

Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Engenharia Elétrica

**Análise e Síntese de Redes de Microcavidades em  
Anel Utilizando a Teoria de Modos Acoplados com  
uma Abordagem por Grafos de Fluxo de Sinal**

Daniel Amaral Brigante

Dezembro de 2025



# **Análise e Síntese de Redes de Microcavidades em Anel Utilizando a Teoria de Modos Acoplados com uma Abordagem por Grafos de Fluxo de Sinal**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

**Aluno:** Daniel Amaral Brigante

**Orientador:** Luis Alberto Mijam Barêa

Dezembro de 2025



## **Resumo**

Este trabalho apresenta um formalismo baseado na Teoria de Redes de Duas Portas para a modelagem de filtros compostos por microcavidades em forma de anel, aplicados em circuitos fotônicos integrados. Como alternativa equivalente à abordagem matricial convencional, emprega-se a Teoria de Grafos de Fluxo de Sinal para fornecer uma representação gráfica das diferentes seções do dispositivo e de suas interações. Sendo evidenciada a conexão direta entre a descrição por grafo de uma associação de redes em cascata e a definição do Produto Estrela de Redheffer. Para caracterizar os parâmetros de rede dos dispositivos, a Teoria de Modos Acoplados é introduzida. Com base na representação por grafos das equações de modos acoplados no tempo, uma metodologia para a síntese de filtros de cavidades acopladas em série é apresentada, com aplicação a um filtro Butterworth de segunda ordem. Os resultados são validados por simulações numéricas utilizando o método de Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, demonstrando a consistência do procedimento proposto.



## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Configurações para Filtros com Cavidade em forma de Anel . . . . .	10
1.2	Redes de Duas Portas para Dispositivos Fotônicos . . . . .	11
1.3	Teoria de Modos Acoplados . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Descrição de Dispositivos Fotônicos como Redes de Duas Portas</b>	<b>12</b>
2.1	Representação de Redes por Grafos de Fluxo de Sinal (SFG) . . . . .	13
2.2	Associação de Redes em Cascata . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Análise por Modos Acoplados no Espaço (S-CMT)</b>	<b>16</b>
3.1	Modelo para o Acoplamento entre Dois Guias de Onda . . . . .	16
3.2	Representação de uma junção de acoplamento como uma rede de duas portas . . . . .	17
3.3	Representação de um guia de onda como uma rede de uma porta . . . . .	19
3.4	Representação de um par simétrico de guias de onda como uma rede de duas portas . . . . .	20
3.5	Modelo na S-CMT para o Filtro <i>All-Pass</i> . . . . .	21
3.6	Modelo na S-CMT para o filtro <i>Add-Drop</i> . . . . .	22
3.7	Modelo na S-CMT para o Filtro de Anéis Acoplados em Série . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Análise por Modos Acoplados no Tempo (T-CMT)</b>	<b>25</b>
4.1	Modelo na T-CMT para o Filtro <i>All-Pass</i> . . . . .	26
4.2	Modelo na T-CMT para o Filtro <i>Add-Drop</i> . . . . .	28
4.3	Modelo na T-CMT para o Filtro de Anéis Acoplados em Série . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Síntese por Modos Acoplados no Tempo (T-CMT)</b>	<b>34</b>
5.1	Expansão da Transmissão de um SFG como uma Fração Continuada . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Realização Física dos Dispositivos</b>	<b>36</b>
6.1	Guias de Onda . . . . .	36
6.2	Cavidades em Forma de Anel . . . . .	38
6.3	Junções de Acoplamento . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Aplicação à Síntese de um Filtro Butterworth de Segunda Ordem com Cavidades Acopladas em Série</b>	<b>40</b>
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>46</b>



# Análise e Síntese de Redes de Microcavidades em Anel Utilizando a Teoria de Modos Acoplados com uma Abordagem por Grafos de Fluxo de Sinal

DANIEL AMARAL BRIGANTE,<sup>1</sup> LUIS ALBERTO MIJAM BARÊA,<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Aluno - Departamento de Engenharia Elétrica (DEE) - Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) - São Carlos, SP.*

<sup>2</sup> *Orientador - Departamento de Engenharia Elétrica (DEE) - Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) - São Carlos, SP.*

**Resumo:** Este trabalho apresenta um formalismo baseado na Teoria de Redes de Duas Portas para a modelagem de filtros compostos por microcavidades em forma de anel, aplicados em circuitos fotônicos integrados. Como alternativa equivalente à abordagem matricial convencional, emprega-se a Teoria de Grafos de Fluxo de Sinal para fornecer uma representação gráfica das diferentes seções do dispositivo e de suas interações. Sendo evidenciada a conexão direta entre a descrição por grafo de uma associação de redes em cascata e a definição do Produto Estrela de Redheffer. Para caracterizar os parâmetros de rede dos dispositivos, a Teoria de Modos Acoplados é introduzida. Com base na representação por grafos das equações de modos acoplados no tempo, uma metodologia para a síntese de filtros de cavidades acopladas em série é apresentada, com aplicação a um filtro Butterworth de segunda ordem. Os resultados são validados por simulações numéricas utilizando o método de Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, demonstrando a consistência do procedimento proposto.

## 1. Introdução

O uso de microcavidades ópticas em forma de anel é amplamente difundido em fotônica integrada, constituindo um dos blocos fundamentais para a implementação de filtros, linhas de atraso, sensores refratométricos, moduladores, chaves ópticas e fontes de luz coerentes ou não coerentes [1]. Essas cavidades apresentam vantagens relevantes para integração em chip, como elevada seletividade espectral, compactidade, compatibilidade com processos de fabricação CMOS e capacidade de operar em regimes lineares e não lineares com baixo consumo de energia. Além disso, quando múltiplos anéis são associados em topologias adequadas, seja em série, paralelo ou por meio de acoplamentos indiretos, é possível obter respostas espectrais complexas e altamente controláveis, permitindo o projeto de dispositivos como filtros de ordem elevada, estruturas ressonantes com transparência induzida, cavidades de Vernier e elementos avançados para multiplexação e demultiplexação de canais [2–4]. Diante desse cenário, torna-se essencial um formalismo matemático capaz de descrever, de maneira rigorosa e modular, sistemas compostos por guias de onda e cavidades acopladas. Tal formalismo deve permitir, por um lado, a análise precisa de uma configuração já determinada, isto é, a previsão de sua resposta espectral e de seus parâmetros de desempenho, e, por outro lado, deve fornecer as ferramentas necessárias ao processo de síntese, no qual uma arquitetura de cavidades deve ser projetada de forma sistemática para atingir uma resposta desejada, como uma função de transferência alvo.

Neste trabalho, combina-se, de forma unificada, a Teoria de Redes de Duas Portas, a Teoria de Grafos de Fluxo de Sinal e a Teoria de Modos Acoplados, permitindo representar tanto os acopladores quanto as cavidades e suas interações de forma consistente e modular. Essa abordagem além de permitir analisar e sintetizar com precisão filtros baseados em cavidades acopladas, também fornece um direcionamento sobre como associar os elementos de forma a produzir um comportamento desejado.

Embora cada uma das teorias empregadas neste trabalho seja amplamente estabelecida na literatura, sua combinação sistemática em um único formalismo unificado não aparece de forma consolidada nas principais referências de fotônica integrada. Em geral, o método da matriz S é utilizado de forma separada da abordagem pela Teoria de Modos Acoplados, sem levar em consideração a forma como as duas teorias se relacionam. Além disso, o uso da Teoria de Grafos de Fluxo de Sinal é explorada em alguns trabalhos em conjunto com a matriz S e a Teoria de Modos Acoplados no Espaço. Todavia, não foi encontrado nenhum trabalho que utilizasse em conjunto a Teoria de Modos Acoplados no Tempo com a Teoria de Grafos de Fluxo de Sinal. Assim, a abordagem proposta aqui representa uma contribuição metodológica relevante, ao oferecer uma estrutura modular, coerente e aplicável tanto ao processo de análise quanto ao de síntese de filtros fotônicos baseados em cavidades acopladas.

### 1.1. Configurações para Filtros com Cavidade em forma de Anel

Ao acoplar um anel a um guia de onda, é obtida a configuração *all-pass*, mostrada na Figura 1. Nela, um sinal de entrada  $s_i$  é aplicado ao dispositivo e a resposta é medida na saída *through*, a partir da amplitude complexa do modo  $s_t$ , no mesmo guia de onda. O sinal de entrada  $s_i$  acopla-se ao modo  $s_{ra}$ , que propaga-se no anel, acumulando fase e sofrendo perdas, resultando no modo  $s_{rb}$  após uma volta completa ao longo do anel. Por sua vez, o modo  $s_{rb}$  acopla-se ao modo  $s_t$ , combinando-se ao modo  $s_i$ , já presente no guia. Disso, resultam os efeitos de interferência construtiva/destrutiva característicos da resposta espectral do dispositivo, de acordo com os comprimentos de onda ressonantes no anel.

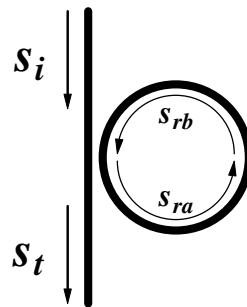


Figura 1. Configuração de filtro *all-pass*.

Com um filtro *all-pass* simples é possível sintetizar respostas rejeita-faixa periódica ou passa-todas (*all-pass*, de onde vem o nome do dispositivo), de acordo com a relação entre as perdas na cavidade e a força do acoplamento com o guia de onda. A partir do projeto correto do acoplamento entre o anel e o guia de onda, é possível obter condições de zero transmissão ( $s_t = 0$ ) nos comprimentos de onda ressonantes no anel, onde toda a potência incidente sobre o dispositivo é confinada e dissipada no interior da cavidade. Já para anéis com perdas desprezíveis, ou com fator de acoplamento muito maior que elas, o dispositivo apresentará praticamente a mesma magnitude de transmissão para todos os comprimentos de onda, diferindo apenas na fase e, consequentemente, no atraso de grupo, permitindo que o filtro seja utilizado como uma linha de atraso.

A adição de um segundo guia de onda acoplado ao anel resulta na configuração *add-drop*, mostrada na Figura 2. Com isso, ficam disponíveis duas entradas (entrada e *add*) e duas saídas (*through* e *drop*). Por meio da saída *drop*, uma resposta passa-faixa pode ser obtida. E a inclusão da entrada *add* permite a combinação de diferentes sinais no dispositivo.

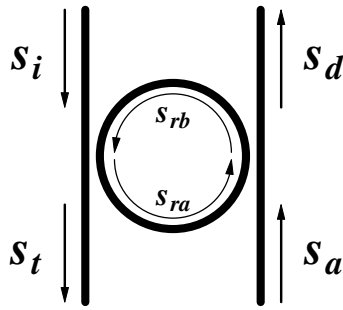


Figura 2. Configuração de filtro *add-drop*.

Configurações mais complexas de filtros podem ser geradas por meio da ligação em cascata entre filtros mais simples e, também, pela adição de mais anéis acoplados entre si ou aos guias de onda. No entanto, conforme a complexidade da configuração aumenta, surge a necessidade de um formalismo que permita simplificar o processo de análise e fornecer um direcionamento para o processo de síntese. Como será visto, a introdução da abordagem pela teoria de redes de duas portas permite separar os dispositivos em blocos (redes) independentes e depois associá-los de maneira arbitrária.

### 1.2. Redes de Duas Portas para Dispositivos Fotônicos

Os dispositivos fotônicos que serão estudados neste trabalho são compostos por guias de onda e cavidades acopladas. Por sua vez, as próprias cavidades podem ser vistas como guias de onda cujos extremos foram interligados, assumindo a forma de um anel.

Aliado a isso, o funcionamento desses dispositivos está baseado na propagação de modos ao longo dos guias de onda e no acoplamento entre os modos que se propagam em diferentes guias.

Com isso em mente, qualquer um dos dispositivos estudados neste trabalho, por mais complexo que ele seja, pode ser descrito a partir da associação entre trechos de guias de onda independentes ou acoplados.

A abordagem por redes de duas portas [5–7] permite que os dispositivos sejam divididos em componentes mais simples, cujo funcionamento de cada um pode ser descrito de forma isolada dos demais. Em posse de modelos para esses componentes, o comportamento do dispositivo completo pode ser obtido através da associação entre eles. Nesse sentido, se cada componente for descrito por uma rede de duas portas, a composição apropriada entre essas redes produzirá uma rede equivalente que corresponderá ao dispositivo completo.

A escolha do conjunto de variáveis que descrevem uma rede depende da natureza física do sistema que será descrito. Para o presente caso, como os dispositivos são compostos por guias de onda, é conveniente escolher essas variáveis como as amplitudes complexas dos modos que se propagam nesses guias. Ou seja, as redes serão descritas a partir das amplitudes complexas de ondas progressivas, normalizadas de forma que o quadrado de suas magnitudes seja igual à potência carregada pela onda. E as posições em que essas amplitudes são medidas correspondem às portas da rede.

Sob essa perspectiva, uma rede de duas portas pode ser pensada como uma região do espaço cujas fronteiras com o meio externo são delimitadas por suas portas. A entrada e a saída de potência da rede ocorre apenas através das portas, por meio de ondas progressivas carregando potência para fora da rede ou para o seu interior, denominadas ondas incidentes e ondas refletidas, respectivamente.

Sendo estabelecidas as variáveis da rede como as amplitudes das ondas incidentes e refletidas em cada porta, é necessário escolher um conjunto de parâmetros de rede que estabeleça a relação entre essas variáveis. A escolha mais comum para isso são os parâmetros de espalhamento ou

parâmetros S, que descrevem as ondas refletidas em cada porta em função das ondas incidentes.

A representação de uma rede por parâmetros S é frequentemente feita em forma matricial, com a matriz S (ou matriz de espalhamento). Todavia, conforme será mostrado, o uso de grafos de fluxo de sinal para representar as equações apresenta vantagens sobre a notação matricial, simplificando o processo de associação em cascata entre redes e constituindo uma notação gráfica mais intuitiva.

### 1.3. Teoria de Modos Acoplados

Os dispositivos que serão estudados são compostos de guias de onda e cavidades ressonantes, que são estruturas capazes de confinar e guiar a propagação de ondas eletromagnéticas em seu interior. No entanto, a presença de campos evanescentes permite a transferência de potência entre duas estruturas próximas, configurando um acoplamento entre elas.

Mais especificamente, o fenômeno de maior importância para este trabalho é a possibilidade de transferência de potência entre duas estruturas fisicamente próximas, sem que isso afete significativamente o comportamento individual de cada uma delas. Sob estas condições, diz-se que há um acoplamento fraco entre as estruturas e busca-se estudar o comportamento global desse sistema, isto é, quais propriedades o dispositivo passará a ter como consequência do acoplamento entre suas partes.

A Teoria de Modos Acoplados (*Coupled-Mode Theory* - CMT) introduz uma abordagem perturbativa para tratar sistemas na presença de acoplamento fraco entre modos de propagação e modos de oscilação [8–10]. Para os dispositivos estudados neste trabalho, duas abordagens pela CMT podem ser utilizadas. A primeira delas está baseada no acoplamento entre modos de propagação no espaço (*Space-CMT* - S-CMT). Já a segunda, trata o acoplamento entre modos de oscilação no tempo (*Time-CMT* - T-CMT).

Como será visto, a abordagem pela S-CMT é mais rigorosa e permite a descrição de uma variedade maior de dispositivos, em condições de operação mais diversas. Todavia, as funções de transferência obtidas por essa teoria não serão funções racionais da frequência complexa  $s$ , o que dificulta os procedimentos de análise e síntese dos dispositivos.

Sob a suposição de que o campo propagando-se no interior da cavidade em anel é uniforme (o que implica em baixas perdas, acoplamento fraco e largura de banda estreita) um sistema composto por cavidades acopladas pode ser aproximado pela T-CMT, fornecendo uma descrição para o espectro em torno de uma das frequências de ressonância do dispositivo. Embora seja mais restritiva que a S-CMT, as funções de transferência fornecidas pela aplicação da T-CMT são funções racionais de  $s$ , permitindo que uma vasta teoria, já existente, de análise e síntese de redes seja aplicada [5, 6, 11, 12].

## 2. Descrição de Dispositivos Fotônicos como Redes de Duas Portas

O objetivo desta descrição é obter modelos genéricos para os componentes que constituem os dispositivos estudados. Com a abordagem por redes de duas portas, esses componentes podem ser modelados independentemente e associados de forma arbitrária para produzir qualquer um dos dispositivos desejados.

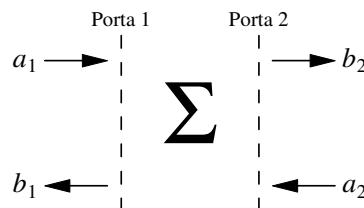


Figura 3. Representação genérica de uma rede de duas portas.

Uma rede de duas portas pode ser ilustrada conforme a Figura 3. Nela, a rede corresponde a uma região do espaço delimitada pelos planos de referência das portas 1 e 2. A interação da rede com o meio externo ocorre por meio das ondas progressivas  $a_{1,2}$  e  $b_{1,2}$ , com incidência normal sobre os planos de referência das portas, sendo  $a_{1,2}$  as ondas que incidem sobre a rede e  $b_{1,2}$  as que são refletidas pela rede. As amplitudes complexas dos modos  $a_{1,2}$  e  $b_{1,2}$  são definidas sobre os planos de referência da porta correspondente e são normalizadas para que  $|a_{1,2}|^2$  e  $|b_{1,2}|^2$  seja igual à potência carregada por cada onda. Com isso, o comportamento da rede pode ser descrito por um conjunto de parâmetros que relacionem as amplitudes dos modos  $a_{1,2}$  e  $b_{1,2}$ .

Os parâmetros de espalhamento ou parâmetros S são comumente usados para relacionar as amplitudes dos modos  $a_{1,2}$  e  $b_{1,2}$ , descrevendo os modos que deixam a rede  $b_{1,2}$  (refletidos) em função dos modos incidentes  $a_{1,2}$  segundo:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Em forma matricial, a matriz S expressa as relações da Equação 1 como:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

### 2.1. Representação de Redes por Grafos de Fluxo de Sinal (SFG)

Uma das formas de representar o sistema de equações lineares que definem uma rede (Equação 1) é através da matriz S (Equação 2). Alternativamente, uma outra maneira de representar essas equações é por meio de um grafo de fluxo de sinal (*Signal-Flow Graph* - SFG) [13–17], onde os sinais em cada nó correspondem às amplitudes dos modos  $a_i$  e  $b_i$  e as transmissões dos ramos serão os parâmetros S, com os nós  $a_i$  sendo fontes e os nós  $b_i$ , saídas. Com base nisso, a representação por SFG de uma rede de duas portas descrita por parâmetros S é ilustrada na Figura 4.

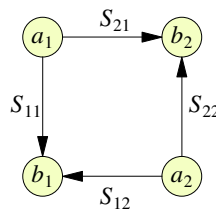


Figura 4. Representação em forma de SFG dos parâmetros S de uma rede de duas portas

Conforme será visto, a representação em forma de SFG apresenta vantagens ao associar os diferentes elementos que compõem o dispositivo, além de constituir uma representação gráfica da estrutura de um sistema, permitindo uma visão mais intuitiva do que uma abordagem puramente matricial.

### 2.2. Associação de Redes em Cascata

Após obter as representações dos componentes de um sistema como redes de duas portas, é necessário definir uma operação que permita combinar essas redes para produzir uma rede final que represente o sistema como um todo.

Seja uma rede de duas portas  $\Sigma_1$  com modos referenciados por  $a_{1,2}^{(1)}$  e  $b_{1,2}^{(1)}$ . E uma segunda rede de duas portas  $\Sigma_2$ , com modos  $a_{1,2}^{(2)}$  e  $b_{1,2}^{(2)}$ . Uma associação entre as duas redes pode ser expressa como condições de contorno sobre os modos  $a_i$  e  $b_i$  nas fronteiras (portas) das redes.

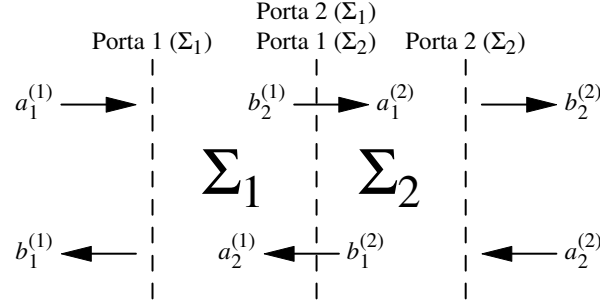


Figura 5. Representação espacial da ligação em cascata entre duas redes.

Se as redes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  forem associadas de modo que  $a_1^{(2)} = b_2^{(1)}$  e  $a_2^{(1)} = b_1^{(2)}$ , pode-se dizer que elas estão ligadas em cascata. Sob um ponto de vista espacial, a rede  $\Sigma_2$  está disposta imediatamente à direita de  $\Sigma_1$ , de forma que o plano de referência da porta 1 de  $\Sigma_2$  coincide com o plano de referência da porta 2 de  $\Sigma_1$ , como mostra a Figura 5. Sob essa condição, a onda que deixa a rede  $\Sigma_1$  à direita, incide imediatamente sobre  $\Sigma_2$  à esquerda, de forma que,  $a_1^{(2)} = b_2^{(1)}$ . Analogamente, a onda que deixa a rede  $\Sigma_2$ , à esquerda, incide imediatamente sobre  $\Sigma_1$ , à direita, de forma que,  $a_2^{(1)} = b_1^{(2)}$ .

Portanto, com base na Figura 5, a ligação em cascata das redes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  fornece uma nova rede  $\Sigma$ , cujas portas correspondem à porta 1 de  $\Sigma_1$  e à porta 2 de  $\Sigma_2$ , e cujos modos  $a_{1,2}$  e  $b_{1,2}$  são dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1^{(1)} \\ a_2 &= a_2^{(2)} \\ b_1 &= b_1^{(1)} \\ b_2 &= b_2^{(2)} \end{aligned} \quad (3)$$

Se as redes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  forem descritas pelas matrizes de espalhamento  $\mathbf{S}^{(1)}$  e  $\mathbf{S}^{(2)}$ , ao aplicar as condições de contorno correspondentes à ligação em cascata ( $a_1^{(2)} = b_2^{(1)}$ ,  $a_2^{(1)} = b_1^{(2)}$ ) e substituir os modos da Equação 3, tem-se:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}^{(1)} a_1 + S_{12}^{(1)} a_2^{(1)} \\ b_2 &= S_{21}^{(2)} a_1^{(2)} + S_{22}^{(2)} a_2 \\ a_2^{(1)} &= b_1^{(2)} = S_{11}^{(2)} a_1^{(2)} + S_{12}^{(2)} a_2 \\ a_1^{(2)} &= b_2^{(1)} = S_{21}^{(1)} a_1 + S_{22}^{(1)} a_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Com isso, a partir da Equação 4, os parâmetros  $S$  da rede  $\Sigma$  resultante da ligação em cascata serão dados por:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = S_{11}^{(1)} + S_{21}^{(1)} S_{12}^{(1)} S_{11}^{(2)} \Delta^{-1} \\
S_{12} &= \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} = S_{12}^{(1)} S_{12}^{(2)} \Delta^{-1} \\
S_{21} &= \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = S_{21}^{(1)} S_{21}^{(2)} \Delta^{-1} \\
S_{22} &= \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} = S_{22}^{(2)} + S_{21}^{(2)} S_{12}^{(2)} S_{22}^{(1)} \Delta^{-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{Onde, } \Delta = 1 - S_{22}^{(1)} S_{11}^{(2)}$$

As relações encontradas na Equação 5 são a definição do Produto Estrela de Redheffer [7] entre as matrizes de espalhamento  $\mathbf{S}^{(1)}$  e  $\mathbf{S}^{(2)}$ . Em forma matricial, o Produto Estrela  $\star$  entre duas matrizes  $\mathbf{S}$  pode ser expresso como:

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{21}^{(1)} S_{12}^{(1)} S_{11}^{(2)} \Delta^{-1} & S_{12}^{(1)} S_{12}^{(2)} \Delta^{-1} \\ S_{21}^{(1)} S_{21}^{(2)} \Delta^{-1} & S_{22}^{(2)} + S_{21}^{(2)} S_{12}^{(2)} S_{22}^{(1)} \Delta^{-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\text{Onde, } \Delta = 1 - S_{22}^{(1)} S_{11}^{(2)}$$

Desse modo, a matriz  $\mathbf{S}$  da rede  $\Sigma$ , resultante da ligação em cascata entre as redes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , é igual ao Produto Estrela das matrizes  $\mathbf{S}^{(1)}$  e  $\mathbf{S}^{(2)}$  das redes individuais, conforme:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(1)} \star \mathbf{S}^{(2)} \tag{7}$$

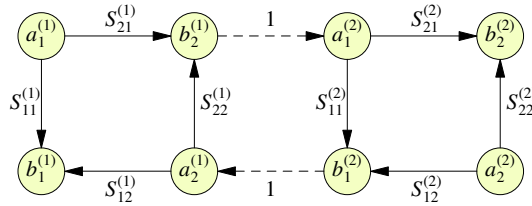


Figura 6. Associação entre redes em cascata como um SFG.

O procedimento de associação de duas redes em cascata pode ser simplificado consideravelmente pela utilização de grafos de fluxo de sinal. Se as matrizes de espalhamento  $\mathbf{S}^{(1)}$  e  $\mathbf{S}^{(2)}$  forem representadas como um SFG na forma da Figura 4, a ligação em cascata pode ser realizada adicionando os ramos unitários (tracejados) entre os grafos de cada rede, conforme mostra a Figura 6. Essa ligação corresponde às condições de contorno  $a_1^{(2)} = b_2^{(1)}$  e  $a_2^{(1)} = b_1^{(2)}$  impostas pela associação em cascata. Com isso, o grafo resultante é mostrado na Figura 7, onde os nós foram renomeados de acordo com a Equação 3.

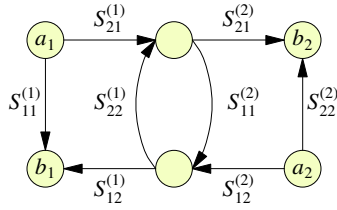


Figura 7. SFG resultante de uma ligação em cascata entre redes.

Portanto, os parâmetros  $S$  da rede resultante  $\Sigma$  podem ser encontrados a partir das transmissões entre os nós do grafo. A aplicação da Regra de Mason [15] ao grafo da Figura 7 resulta nas mesmas expressões da Equação 5, onde o parâmetro  $\Delta$  corresponde ao determinante do grafo. Disso, nota-se que, quando definido em forma de SFG, o Produto Estrela surge de uma forma mais natural e o parâmetros  $\Delta$  recebe uma interpretação sobre seu significado em termos das propriedades topológicas do grafo. Já na abordagem matricial, o Produto Estrela passa a impressão de ser apenas um novo produto entre matrizes, definido de forma arbitrária, para satisfazer as condições impostas à operação.

### 3. Análise por Modos Acoplados no Espaço (S-CMT)

Em posse do formalismo que permite descrever as estruturas como redes de duas portas, somada à operação de associação de rede em cascata, resta obter uma maneira de relacionar os valores dos parâmetros de rede com os parâmetros físicos do dispositivo.

Como os dispositivos estudados podem ser decompostos em trechos de guias de onda independentes e trechos de guias acoplados, é necessário obter uma descrição para essas duas estruturas, de forma que seja possível avaliar seus parâmetros de rede. Por meio da Teoria de Modos Acoplados no Espaço (*Space Coupled Mode Theory - S-CMT*), um modelo para um trecho de dois guias de onda acoplados pode ser facilmente obtido.

#### 3.1. Modelo para o Acoplamento entre Dois Guias de Onda

Partindo da equação para um modo propagando-se sem perdas em um guia de onda isolado [8,9]:

$$\frac{ds_+}{dz} = -j\beta s_+ \quad (8)$$

A solução da Equação 8 representa uma onda progressiva propagando-se sem perdas no sentido  $z^+$ , com uma constante de propagação imaginária  $j\beta$ , onde  $\beta$  é a constante de fase, real e positiva. Além disso, considera-se que a amplitude de  $s(z)$  foi normalizada, de forma que  $|s(z)|^2$  seja igual a potência carregada pela onda.

Se um segundo guia for adicionado, paralelamente ao primeiro, a abordagem pela S-CMT introduz o efeito do acoplamento de maneira perturbativa, considerando que as constantes de propagação individuais dos modos continuam iguais aos casos onde os guias estão isolados e que não há acoplamento entre modos contra-propagantes. Sob essas condições, diz-se que os guias de onda estão fracamente acoplados [9].

Dessa forma, se  $s_{1,2}$  são os modos em cada guia, propagando-se no mesmo sentido, e  $-j\beta_{1,2}$  são suas respectivas constantes de propagação na ausência de acoplamento, a formulação por modos acoplados no espaço (S-CMT) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dz} &= -j\beta_1 s_1 + \beta_{12} s_2 \\ \frac{ds_2}{dz} &= -j\beta_2 s_2 + \beta_{21} s_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Onde  $\beta_{12,21}$  são os coeficientes complexos de acoplamento entre os modos. Por considerações de conservação de energia, os coeficientes estão relacionados por  $\beta_{12} = -\beta_{21}$  [9].

Para o caso onde as constantes de propagação nos dois guias são iguais  $j\beta_1 = j\beta_2 = j\beta$ , a solução do sistema da Equação 9 para as amplitudes dos modos é:

$$\begin{aligned} s_1(z) &= \cos(\beta_0 z) e^{-j\beta z} s_1(0) - j \operatorname{sen}(\beta_0 z) e^{-j\beta z} s_2(0) \\ s_2(z) &= -j \operatorname{sen}(\beta_0 z) e^{-j\beta z} s_1(0) + \cos(\beta_0 z) e^{-j\beta z} s_2(0) \end{aligned} \quad (10)$$

Onde a constante de propagação em cada guia, ao longo do trecho de acoplamento, permanece sendo  $j\beta$ . E  $\beta_0 = |\beta_{12}| = |\beta_{21}|$  relaciona a variação nas amplitudes dos modos com o comprimento do trecho de acoplamento.

Considerando um trecho de acoplamento ao longo da direção  $z$ , com comprimento  $l$ , a Equação 10 pode ser expressa em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} s_1(l) \\ s_2(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_0 l) e^{-j\beta l} & -j \operatorname{sen}(\beta_0 l) e^{-j\beta l} \\ -j \operatorname{sen}(\beta_0 l) e^{-j\beta l} & \cos(\beta_0 l) e^{-j\beta l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(0) \\ s_2(0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Sendo assim, a Equação 11 relaciona as amplitudes dos modos em cada guia de onda, no início e ao fim de um trecho de acoplamento com comprimento  $l$ .

### 3.2. Representação de uma junção de acoplamento como uma rede de duas portas

Junções de acoplamento entre dois guias de onda são um dos componentes que constituem os dispositivos estudados. Portanto, é útil modelá-las como redes isoladas, possibilitando que elas sejam posteriormente interligadas a outros componentes para formar os dispositivos desejados.

A rigor, sob a suposição de que em cada guia de onda se propagam apenas dois modos de mesma ordem e sentidos opostos, seria necessária uma rede de quatro portas para representar completamente uma junção de acoplamento entre dois guias de onda. No entanto, a abordagem da S-CMT permite que essa junção seja descrita por uma rede de duas portas, simplificando o modelo.

A aproximação da S-CMT considera que não há acoplamento entre modos contra-propagantes em um trecho de dois guias acoplados. Dessa maneira, se as ondas incidentes sobre o trecho de acoplamento ( $s_1(0)$  e  $s_2(0)$ ), nos guias 1 e 2, possuírem o mesmo sentido de propagação e não existir nenhuma onda incidindo no sentido oposto, então, as ondas que deixarão o trecho de acoplamento ( $s_1(l)$  e  $s_2(l)$ ) estarão no mesmo sentido que as ondas incidentes. Isso permite considerar apenas duas portas para modelar essa estrutura, se os planos de referência forem definidos de maneira apropriada.

Dessa forma, utilizando a notação  $a_{1,2}$  para a amplitude complexa do modo incidente na junção de acoplamento, propagando-se no guia 1,2, e  $b_{1,2}$  para a amplitude do modo que deixa a junção de acoplamento, propagando-se no guia 1,2. Onde as amplitudes são normalizadas de forma que  $|a_{1,2}|^2$  e  $|b_{1,2}|^2$  correspondam às potências em cada modo. Se os planos de referência para a junção de acoplamento forem estabelecidos conforme a Figura 8 em  $z = 0$  e  $z = l$ , então, as amplitudes dos modos  $a_{1,2}$  e  $b_{1,2}$  podem ser definidas em termos de  $s_{1,2}(z)$  conforme:

$$\begin{aligned} a_1 &= s_1(0) \\ b_1 &= s_1(l) \\ a_2 &= s_2(0) \\ b_2 &= s_2(l) \end{aligned} \quad (12)$$

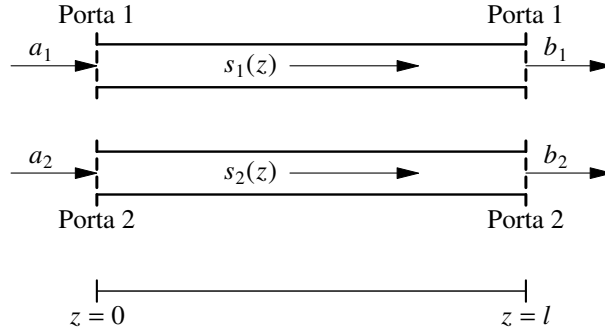


Figura 8. Definição dos planos de referência para a junção de acoplamento entre dois guias de onda

Tendo isso em mente e considerando a forma geral de uma matriz  $S$  para uma rede de duas portas, mostrada na Equação 2, substituindo as definições da Equação 12 na Equação 11 e comparando com a Equação 2 tem-se que uma junção de acoplamento entre dois guias de onda pode ser representada como uma rede de duas portas onde os valores dos parâmetros  $S$  são fornecidos pela S-CMT, conforme:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_0 l) e^{-j\beta l} & \pm j \sin(\beta_0 l) e^{-j\beta l} \\ \pm j \sin(\beta_0 l) e^{-j\beta l} & \cos(\beta_0 l) e^{-j\beta l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Com isso, pode ser introduzida a notação simbólica, mostrada na Figura 9, para representar a junção de acoplamento entre dois guias de onda como uma rede de duas portas.

Analisando a simbologia apresentada na Figura 9, vê-se que a região de acoplamento entre os guias é ilustrada por dois semicírculos com extremidades voltadas para fora, onde cada semicírculo corresponde a um guia de onda. Além disso, os planos de referência de cada uma das portas, onde são definidas as amplitudes dos modos  $a_{1,2}$  e  $b_{1,2}$ , correspondem aos segmentos verticais tracejados. Vale ressaltar que o fato dos guias serem representados de forma curvada no símbolo é apenas uma conveniência para que os planos de referência possam ser ilustrados como segmentos de reta. Sendo assim, a curvatura dos guias no símbolo não implica necessariamente na presença de guias curvados no dispositivo real.

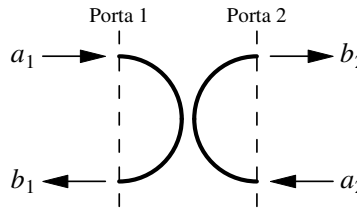


Figura 9. Representação simbólica de uma junção de acoplamento entre guias de onda como uma rede de duas portas

Alternativamente, ao modelar filtros com cavidades em anel, é comum [1] representar a junção de acoplamento por meio de uma matriz  $S$  na forma:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -j\kappa \\ -j\kappa & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Onde  $t$  e  $\kappa$  são reais positivos. Ao considerar a junção de acoplamento como uma rede sem perdas [11], é encontrada a relação entre os parâmetros mostrada na Equação 15, de forma que a junção é totalmente especificada pelo parâmetro real  $t$ .

$$\kappa = \sqrt{1 - t^2} \quad (15)$$

A principal diferença entre a matriz  $S$  da Equação 13 e a forma mostrada na Equação 14 é que a última não leva em consideração a fase acumulada durante a propagação ao longo do trecho de acoplamento, representada pelo termo  $e^{-j\beta}$  na Equação 13. Apenas a variação de amplitude é considerada através do parâmetro real  $t$ . Esse tipo de consideração pode ser feito em dois casos: quando os planos de referência das portas podem ser deslocados arbitrariamente ou quando a fase acumulada devido ao trecho de acoplamento pode ser considerada em outra parte da estrutura. Para os dispositivos estudados, os planos de referência nos guias de onda de entrada e saída podem ser posicionados arbitrariamente, de modo que a fase da junção de acoplamento possa ser cancelada para uma determinada frequência. No caso dos planos de referência da junção de acoplamento presentes no anel, a fase da junção pode ser desprezada e considerada como um comprimento adicional no guia de onda que representa a propagação do anel, pois tanto a junção de acoplamento, quanto o restante do anel, possuem as mesmas constantes de propagação (suposição base da S-CMT).

Sabendo disso, as junções de acoplamento, neste trabalho, serão sempre tratadas na forma da Equação 14 e o acoplamento será dito "pontual".

### 3.3. Representação de um guia de onda como uma rede de uma porta

Além de junções de acoplamento, os dispositivos estudados também são compostos por trechos de guias de onda independentes (sem acoplamento), que formam os anéis e os guias de entrada e saída do dispositivo. Por isso, a descrição desses trechos como redes de uma ou duas portas também é necessária para formular um modelo completo dos dispositivos.

Sob as mesmas suposições anteriores, de que só se propaga um único modo em um guia, com um único sentido, não havendo acoplamento entre modos contra-propagantes em um mesmo guia. Nessas condições, um modo  $s_+(z)$  propagando-se no sentido  $z_+$  pode ser descrito por uma onda progressiva como:

$$s_+(z) = s_+(0) e^{-\gamma z} \quad (16)$$

Onde a propagação através do guia é caracterizada pela constante complexa  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  reais positivos.

As suposições de sentido único de propagação e ausência de acoplamento entre modos de sentidos opostos permitem que o guia de onda seja descrito como uma rede de uma porta. Sem essas duas suposições, seriam necessárias duas portas para representá-lo completamente.

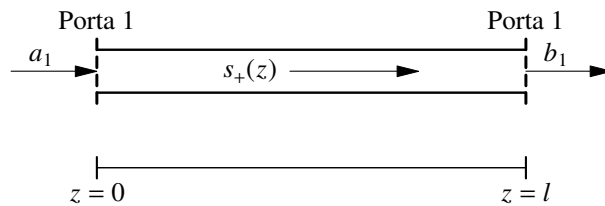


Figura 10. Definição dos planos de referência para um trecho de guia de onda com sentido único de propagação.

Considerando um trecho de comprimento  $l$ , mostrado na Figura 10, havendo uma única porta,

com o mesmo plano de referência posicionado em  $z = 0$  e  $z = l$ , as amplitudes dos modos nessa porta são definidas como:

$$\begin{aligned} a_1 &= s_+(0) \\ b_1 &= s_+(l) \end{aligned} \quad (17)$$

Dessa forma, o parâmetro  $S_{11}$  para um trecho de guia de onda com comprimento  $l$  é dado por:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{s_+(l)}{s_+(0)} = e^{-\gamma l} \quad (18)$$

Introduzindo a constante  $A = e^{-\alpha l}$ , para representar a atenuação ( $A \leq 1$ ) sofrida pelo modo ao propagar-se ao longo do trecho de comprimento  $l$ . E a constante  $\theta = \beta l$  para representar o acúmulo de fase (comprimento ótico) ao longo da propagação no trecho de comprimento  $l$ . O parâmetro  $S_{11}$  pode ser escrito como:

$$S_{11} = A e^{-j\theta} \quad (19)$$

Assim, com base na Figura 10, o símbolo mostrado na Figura 11 pode ser introduzido para representar um trecho de guia de onda como uma rede de uma porta. Novamente, o guia é ilustrado de forma curvada para que o plano de referência da porta 1 possa ser representado como um único segmento de reta tracejado. Ou seja, isso não implica necessariamente em uma curvatura real do guia.

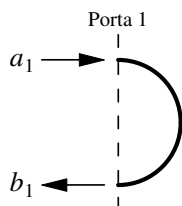


Figura 11. Representação simbólica de um trecho de guia de onda modelado como uma rede de uma porta

### 3.4. Representação de um par simétrico de guias de onda como uma rede de duas portas

A simetria dos dispositivos sugere uma segunda forma de representar como redes os trechos de guias de onda independentes. Observando as Figuras 1 e 2, nota-se que os guias de onda independentes (sem acoplamento) ocorrem sempre em pares simétricos de mesmo comprimento e sentidos opostos de propagação. Com isso em mente, cada par de guia pode ser representado como uma rede de duas portas, com planos de referência definidos segundo a Figura 12 e parâmetros S dados por:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Ae^{-j\theta} \\ Ae^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

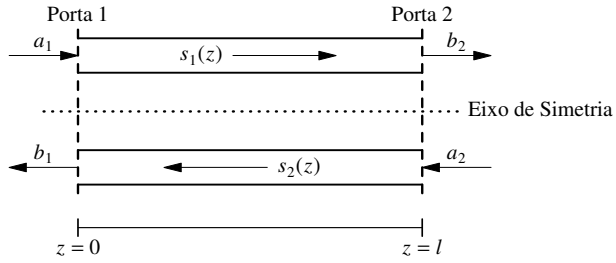


Figura 12. Definição dos planos de referência para um par de guias simétricos independentes.

Sendo assim, é introduzida a simbologia mostrada na Figura 13 para representar um par de guias simétricos e independentes como uma rede de duas portas.

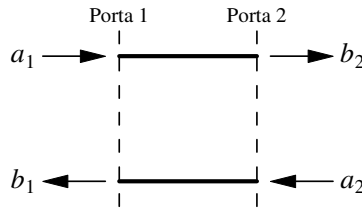


Figura 13. Representação simbólica de um par de guias simétricos independentes.

### 3.5. Modelo na S-CMT para o Filtro All-Pass

A configuração *all-pass* pode ser vista como uma associação em cascata entre as redes de uma junção de acoplamento (Figura 9) e um guia de onda (Figura 11) que forma o anel, resultando na Figura 14.

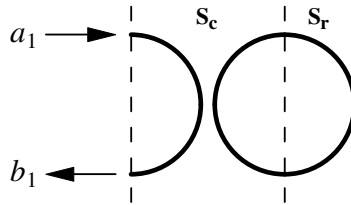


Figura 14. Representação de um filtro *all-pass* por redes em cascata

Onde a matriz  $S_c$  corresponde à junção de acoplamento:

$$S_c = \begin{bmatrix} t & -j\kappa \\ -j\kappa & t \end{bmatrix} \quad (21)$$

E a matriz  $S_r$  modela a propagação ao longo de uma volta no anel:

$$S_r = \begin{bmatrix} Ae^{-j\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Dessa forma, a rede correspondente à configuração *all-pass* pode ser encontrada pelo Produto Estrela de Redheffer conforme:

$$\mathbf{S}_c \star \mathbf{S}_r = \begin{bmatrix} t & -j\kappa \\ -j\kappa & t \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} Ae^{-j\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + \frac{(-j\kappa)^2 Ae^{-j\theta}}{1 - tAe^{-j\theta}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

De maneira alternativa, a associação em cascata entre as redes da Figura 14 pode ser convenientemente expressa em forma de grafo como mostrado na Figura 15.

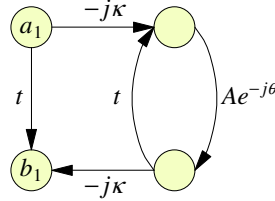


Figura 15. Representação de um filtro *all-pass* como um SFG

Portanto, a função de transferência para a saída *through* ( $H_t$ ) do filtro *all-pass* pode ser encontrada a partir do Produto Estrela da Equação 23 ou do grafo da Figura 15, aplicando a Regra de Mason para calcular a transmissão entre os nós  $a_1$  e  $b_1$ , resultando em:

$$H_t = \frac{b_1}{a_1} = t + \frac{(-j\kappa)^2 Ae^{-j\theta}}{1 - tAe^{-j\theta}} \quad (24)$$

Substituindo  $\kappa$  segundo a Equação 15 na Equação 24 e simplificando, chega-se à seguinte equação para a função de transferência da saída *through* de um filtro *all-pass*:

$$H_t = \frac{Ae^{-j\theta} - t}{tAe^{-j\theta} - 1} \quad (25)$$

Introduzindo a variável  $z^{-1} = e^{-j\theta}$ , a função de transferência da Equação 26 pode ser representada no domínio  $z^{-1}$  como:

$$H_t = \frac{1}{t} \frac{z^{-1} - t/A}{z^{-1} - 1/(tA)} \quad (26)$$

Utilizando a representação no domínio  $z^{-1}$ , a teoria de síntese de filtros digitais pode ser empregada para projetar dispositivos modelados com a S-CMT [12]. No entanto, isso não será abordado neste trabalho.

### 3.6. Modelo na S-CMT para o filtro *Add-Drop*

O mesmo procedimento utilizado para descrever o filtro *all-pass* pode ser adotado para a configuração *add-drop*. Assim, o filtro será formado pela associação em cascata entre uma junção de acoplamento, um par de guias que formam o anel e uma segunda junção de acoplamento, conforme mostra a Figura 16.

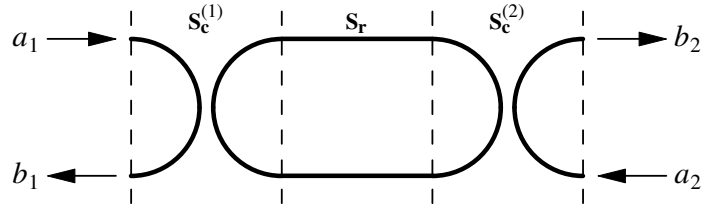


Figura 16. Representação de um filtro *add-drop* por redes em cascata

Onde a matriz  $S_c^{(1)}$  corresponde à junção de acoplamento com o primeiro guia (entrada-through):

$$S_c^{(1)} = \begin{bmatrix} t_1 & -j\kappa_1 \\ -j\kappa_1 & t_1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

E a junção de acoplamento com o segundo guia (*add-drop*) corresponde à matriz  $S_c^{(2)}$ , dada por:

$$S_c^{(2)} = \begin{bmatrix} t_2 & -j\kappa_2 \\ -j\kappa_2 & t_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A cavidade em anel é modelada como um par de guias iguais, cada um deles representando metade do anel. Por isso, a matriz  $S_r$  assume a forma da Equação 29. Os parâmetros  $A$  e  $\theta$  são definidos para uma volta completa no anel, ou seja, levando em consideração seu comprimento total. Como cada parâmetro  $S$  da matriz  $S_r$  modela apenas metade do comprimento do anel,  $Ae^{-j\theta}$  estará elevado à potência de  $1/2$  nos parâmetros da matriz.

$$S_r = \begin{bmatrix} 0 & A^{1/2}e^{-j\theta/2} \\ A^{1/2}e^{-j\theta/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Fazendo uso do Produto de Redheffer, a matriz  $S_{ad}$  do filtro *add-drop* pode ser obtida pela ligação em cascata da Figura 16 conforme:

$$S_{ad} = S_c^{(1)} \star S_r \star S_c^{(2)} = \begin{bmatrix} t_1 - \frac{A\kappa_1^2 t_2 e^{-j\theta}}{1 - At_1 t_2 e^{-j\theta}} & -\frac{\sqrt{A}\kappa_1 \kappa_2 e^{-j\theta/2}}{1 - At_1 t_2 e^{-j\theta}} \\ -\frac{\sqrt{A}\kappa_1 \kappa_2 e^{-j\theta/2}}{1 - At_1 t_2 e^{-j\theta}} & t_2 - \frac{A\kappa_2^2 t_1 e^{-j\theta}}{1 - At_1 t_2 e^{-j\theta}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

De forma equivalente, a ligação da Figura 16 pode ser representada como o SFG mostrado na Figura 17. Os parâmetros  $S$  do filtro serão dados pelas transmissões entre os nós de entrada ( $a_{1,2}$ ) e os nós de saída do grafo ( $b_{1,2}$ ). Por sua vez, as transmissões podem ser calculadas pela aplicação da Regra de Mason, resultando na mesma matriz  $S_{ap}$  obtida na Equação 30:

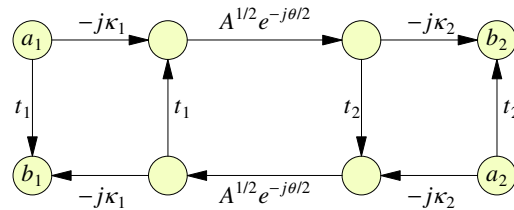


Figura 17. Representação de um filtro *add-drop* como um SFG

Portanto, as funções de transferência para as saídas *through* ( $H_t$ ) e *drop* ( $H_d$ ) para o filtro *add-drop* podem ser obtidas a partir dos parâmetros S da matriz  $\mathbf{S}_{ad}$  conforme:

$$H_t = S_{11} = \frac{t_1 - At_2e^{-j\theta}}{1 - At_1t_2e^{-j\theta}} \quad (31)$$

$$H_d = S_{21} = \frac{-[A(1-t_1^2)(1-t_2^2)e^{-j\theta}]^{1/2}}{1 - At_1t_2e^{-j\theta}} \quad (32)$$

### 3.7. Modelo na S-CMT para o Filtro de Anéis Acoplados em Série

A abordagem desenvolvida para os filtros *all-pass* e *add-drop* começa a tornar-se mais vantajosa quando aplicada em configurações mais complexas de filtros, como o de ressonadores acoplados em série. Nesse caso, a estrutura pode ser representada pela ligação em cascata entre redes na forma da Figura 18, de acordo com o número de cavidades presentes no filtro.

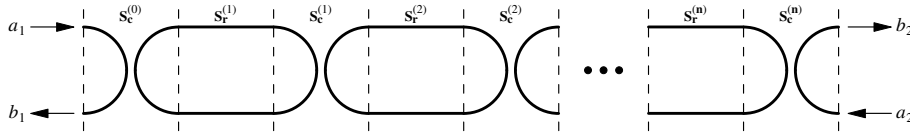


Figura 18. Representação de um filtro de anéis acoplados em série por redes em cascata.

Alternativamente, a estrutura da Figura 18 pode ser descrita como um grafo, conforme a Figura 19.

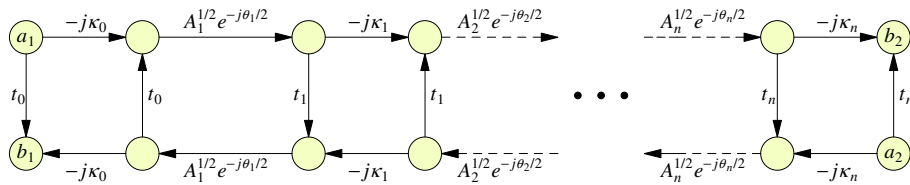


Figura 19. Representação de um filtro de ressonadores acoplados em série como um SFG

Para obter as funções de transferência para as portas *through* e *drop*, a Regra de Mason pode ser aplicada ao grafo da Figura 19. Todavia, um processo mais simples consiste em expressar o Produto estrela de Redheffer em forma de uma relação recursiva para um filtro com  $n$  cavidades.

Seja  $\mathbf{S}_c^{(i)}$  a matriz S correspondente a  $i$ -ésima junção de acoplamento (conforme a Figura 18) e  $\mathbf{S}_r$  a matriz S de cada par de guias que formam os anéis (supondo anéis idênticos), a matriz S do filtro com  $n$  anéis pode ser expressa como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_c^{(0)} \star \mathbf{S}_r^{(1)} \star \mathbf{S}_c^{(1)} \star \mathbf{S}_r^{(2)} \star \mathbf{S}_c^{(2)} \star \dots \star \mathbf{S}_r^{(n)} \star \mathbf{S}_c^{(n)} \quad (33)$$

Onde as matrizes  $\mathbf{S}_c^{(i)}$  das junções de acoplamento e  $\mathbf{S}_r^{(i)}$  do anel serão dadas nas formas:

$$\mathbf{S}_c^{(i)} = \begin{bmatrix} t_i & -j\kappa_i \\ -j\kappa_i & t_i \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{S}_r^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & A_i^{1/2}e^{-j\theta_i/2} \\ A_i^{1/2}e^{-j\theta_i/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

#### 4. Análise por Modos Acoplados no Tempo (T-CMT)

Além da descrição por Modos Acoplados no Espaço (S-CMT), as estruturas de ressonadores acoplados também podem ser descritas utilizando o formalismo de Modos Acoplados no Tempo (T-CMT), que descreve a evolução temporal dos modos de cada ressonador, supondo uma uniformidade espacial da amplitude do modo ao longo de cada anel [9, 10, 12]. Essa uniformidade permite tratar os anéis como ressonadores concentrados, desprezando suas dimensões espaciais.

Como consequência dessa suposição de uniformidade, a descrição pela T-CMT se restringe aos casos onde as perdas nos ressonadores são pequenas e o acoplamento entre os ressonadores (e entre guias e ressonadores) são fracos. Essas restrições limitam a aplicação da T-CMT apenas para filtros de banda estreita e com baixas perdas.

Embora a Teoria de Modos Acoplados no Espaço (S-CMT) seja mais genérica e menos restritiva, os modelos fornecidos por ela são muitas vezes consideravelmente mais complexos do que a abordagem pela Teoria de Modos Acoplados no Tempo (T-CMT).

A formulação pela T-CMT parte da equação para um modo normal de oscilação  $a$  de uma cavidade em anel isolada e sem perdas, com frequência de ressonância  $\omega_0$ :

$$\frac{da}{dt} = j\omega_0 a \quad (36)$$

onde, a amplitude do modo  $a$  é normalizada para que  $|a(t)|^2$  represente a energia armazenada na cavidade no instante  $t$ .

Seguindo a mesma abordagem perturbativa apresentada na S-CMT, pequenas perdas no anel podem ser introduzidas através de um parâmetro real  $\gamma_0$ :

$$\frac{da}{dt} = (j\omega_0 - \gamma_0)a \quad (37)$$

De maneira similar, a transferência de potência do ressonador para o modo propagante  $s_-$  de um guia acoplado a ele pode ser representada pelo parâmetro real  $\gamma_e$ . E o efeito da transferência de potência de um modo  $s_+$  que se propaga no guia para o ressonador pode ser representado pelo coeficiente complexo de acoplamento  $\mu_e$ . A inclusão desses dois efeitos resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= (j\omega_0 - \gamma_0 - \gamma_e)a + \mu_e s_+ \\ s_- &= c_1 s_+ + c_2 a \end{aligned} \quad (38)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes complexas e as amplitudes dos modos que se propagam no guia estão normalizadas de forma que  $|s_+|^2$  e  $|s_-|^2$  correspondem às potências carregadas por eles.

Por considerações de conservação de energia, pode ser demonstrado [9, 10, 12] que os parâmetros,  $\mu_e$ ,  $c_1$  e  $c_2$  estão relacionados por:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= \mu_e \end{aligned} \quad (39)$$

Com isso, a Equação 38 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= (j\omega_0 - \gamma_0 - \gamma_e)a + \mu_e s_+ \\ s_- &= s_+ + \mu_e a \end{aligned} \quad (40)$$

Do mesmo modo como foi feito para a S-CMT, as equações da T-CMT podem ser convenientemente representadas na forma de um grafo de fluxo de sinal. A aplicação da Transformada de Laplace à equação 40, supondo condições iniciais nulas, resulta em:

$$\begin{aligned}
a &= s^{-1} \dot{a} \\
\dot{a} &= (j\omega_0 - \gamma_0 - \gamma_e)a + \mu_e s_+ = \mu_0 a + \mu_e s_+ \\
s_- &= s_+ + \mu_e a
\end{aligned} \tag{41}$$

Notando que as amplitudes dos modos  $s_+$ ,  $s_-$ ,  $a$  e  $\dot{a}$  passam a ser funções da frequência complexa  $s$ . Para simplificar a notação, foram mantidos os mesmos símbolos, sendo suficiente o contexto para diferenciar se as amplitudes estão no domínio do tempo ou da frequência.

Além disso, o coeficiente de auto-acoplamento  $\mu_0$  do modo da cavidade foi introduzido na Equação 41 para agrupar os termos que multiplicam a amplitude do modo  $a$ .

A partir da Equação 41, se forem considerados os nós de entrada e saída,  $s_+$  e  $s_-$ , respectivamente, e a cavidade for representada pelos nós  $a$  e  $\dot{a}$ , então a Equação 40 pode ser representada como o grafo da Figura 20.

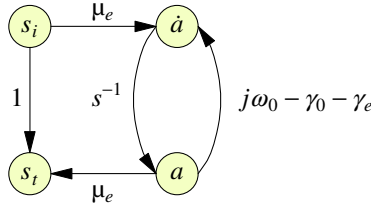


Figura 20. Representação das equações da T-CMT na forma de um SFG.

#### 4.1. Modelo na T-CMT para o Filtro All-Pass

Uma configuração de filtro *all-pass* (Figura 21) pode ser representada na forma da Equação 41, considerando:

$$\begin{aligned}
s_+ &= s_i \\
s_- &= s_t \\
\mu_e &= \mu_t \\
\gamma_e &= \gamma_t
\end{aligned} \tag{42}$$

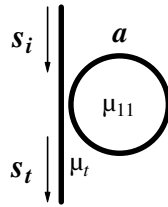


Figura 21. Configuração de filtro *all-pass* representada pela T-CMT.

Com isso, um filtro *all-pass* pode ser descrito pela T-CMT no domínio  $s$  como:

$$\begin{aligned}
a &= s^{-1} \dot{a} \\
\dot{a} &= (j\omega_0 - \gamma_0 - \gamma_t)a + \mu_t s_i = \mu_0 a + \mu_t s_i \\
s_t &= s_i + \mu_t a
\end{aligned} \tag{43}$$

onde,  $a$  é a amplitude do modo na cavidade em anel;  $\omega_0$  é a frequência de ressonância do anel isolado;  $\gamma_0$  é a taxa de decaimento intrínseca do anel;  $\gamma_t$  é a taxa de decaimento extrínseca, devido ao acoplamento da cavidade com o guia de onda (*entrada-through*);  $\mu_t$  é o coeficiente complexo de acoplamento de energia entre o modo da cavidade e o modo  $s_i$ , incidente no guia de onda;  $s_i$  é o modo incidente sobre o guia de onda;  $s_t$  é o modo que deixa o guia de onda pela saída *through*;  $\mu_0$  é o coeficiente complexo de auto-acoplamento do modo da cavidade;

Vale ressaltar que, por reciprocidade, os coeficientes de acoplamento entre o modo da cavidade e os modos  $s_i$  e  $s_t$  serão iguais, denotados por  $\mu_t$ .

Em termos de SFGs, a Equação 43 pode ser representada conforme o grafo da Figura 22.

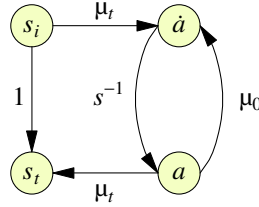


Figura 22. SFG para o filtro *all-pass*.

A função de transferência do filtro *all-pass* no domínio  $s$  para a saída *through* ( $H_t(s)$ ) pode ser encontrada aplicando a Regra de Mason ao grafo da Figura 22, o que resulta em:

$$\frac{s_t}{s_i} = H_t(s) = \frac{s - \mu_0 + \mu_t^2}{s - \mu_0} \quad (44)$$

Como o objetivo é descrever a resposta em frequência dos dispositivos, pode-se considerar uma excitação senoidal em regime permanente fazendo  $s = j\omega$ . Substituindo,  $s$  e  $\mu_0 = j\omega_0 - (\gamma_0 + \gamma_t)$  na Equação 44:

$$\frac{s_t}{s_i} = H_t(\omega) = \frac{j\omega - j\omega_0 + \gamma_0 + \gamma_t + \mu_t^2}{j\omega - j\omega_0 + \gamma_0 + \gamma_t} \quad (45)$$

A abordagem pela T-CMT aproxima o espectro do dispositivo em torno de uma frequência de ressonância  $\omega_0$ . Desse modo, faz sentido definir a variável  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  como a dissintonia de frequência da excitação  $\omega$  em relação à ressonância  $\omega_0$ . Com isso, a função de transferência para o filtro *all-pass*, em torno de  $\omega_0$ , pode ser descrita na variável  $\Delta\omega$  como:

$$\frac{s_t}{s_i} = H_t(\Delta\omega) = \frac{j\Delta\omega + \gamma_0 + \gamma_t + \mu_t^2}{j\Delta\omega + \gamma_0 + \gamma_t} \quad (46)$$

Com base em [12], pode-se definir  $\mu_t = -j|\mu_t|$ , e a taxa de decaimento extrínseca  $\gamma_t$  está relacionada ao módulo do coeficiente complexo de acoplamento  $|\mu_t|$  por:

$$\gamma_t = \frac{|\mu_t|^2}{2} \quad (47)$$

Portanto, a expressão resultante para a função de transferência na saída *through* do filtro *all-pass* é:

$$\frac{s_t}{s_i} = H_t(\Delta\omega) = \frac{j\Delta\omega + \gamma_0 - |\mu_t|^2/2}{j\Delta\omega + \gamma_0 + |\mu_t|^2/2} \quad (48)$$

Analisando a Equação 48, vê-se que a função de transferência  $H_t(\Delta\omega)$  possui um polo  $p$  e um zero  $z$  dados por:

$$\begin{aligned} p &= -\gamma_0 - |\mu_t|^2/2 \\ z &= -\gamma_0 + |\mu_t|^2/2 \end{aligned} \quad (49)$$

A condição de transmissão zero na ressonância ( $\Delta\omega = 0$ ) ocorrerá quando:

$$|\mu_t| = \sqrt{2\gamma_0} \quad (50)$$

Ou seja, a Equação 50 fornece o valor do módulo do coeficiente de acoplamento entre o guia de onda e a cavidade para a condição de acoplamento crítico, onde nenhuma luz é transmitida para a saída *through* e toda a potência que incide sobre o dispositivo é armazenada e dissipada na cavidade. Com base nisso, um filtro *all-pass* criticamente acoplado terá um zero na origem ( $\Delta\omega = 0$ ) e um polo em  $p = -2\gamma_0$

Na condição de sub-acoplamento, as perdas intrínsecas na cavidade predominam sobre as extrínsecas, de modo que a taxa de decaimento intrínseca é maior que a extrínseca ( $\gamma_t < \gamma_0$ ), o que implica em  $|\mu_t| < \sqrt{2\gamma_0}$ , resultando em um zero de fase mínima ( $z = -\gamma_0 + |\mu_t|^2/2 < 0$ ) na função de transferência.

Analogamente, para a condição de sobre-acoplamento, as perdas extrínsecas serão maiores que as intrínsecas ( $\gamma_t > \gamma_0$ ), de maneira que  $|\mu_t| > \sqrt{2\gamma_0}$ , o que produz um zero de fase não-mínima ( $z = -\gamma_0 + |\mu_t|^2/2 > 0$ ) na função de transferência.

Portanto, de acordo com a condição de acoplamento, o filtro apresentará respostas de fase e atraso de grupo distintos, de forma que esse comportamento pode ser controlado através do coeficiente de acoplamento  $\mu_t$ .

#### 4.2. Modelo na T-CMT para o Filtro Add-Drop

Seguindo o mesmo procedimento realizado para adicionar um guia de onda acoplado à cavidade, a inclusão do efeito de um segundo guia na Equação 43 resulta na equação para a topologia *add-drop* (Figura 23):

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= (j\omega_0 - \gamma_0 - \gamma_t - \gamma_d)a + \mu_d s_a + \mu_t s_i = \mu_0 a + \mu_d s_a + \mu_t s_i \\ s_t &= s_i + \mu_t a \\ s_d &= s_a + \mu_d a \end{aligned} \quad (51)$$

onde os termos adicionais devido ao segundo guia são:  $\gamma_d$  é a taxa de decaimento extrínseca, devido ao acoplamento da cavidade com o segundo guia de onda (*add-drop*);  $\mu_d$  é o coeficiente complexo de acoplamento de energia entre o modo da cavidade e o modo  $s_a$ , incidente no segundo guia de onda;  $s_a$  é o modo incidente sobre o segundo guia de onda através da entrada *add*;  $s_d$  é o modo que deixa o guia de onda pela saída *drop*.

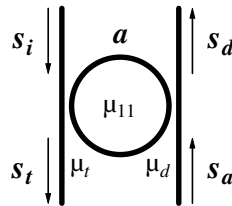


Figura 23. Configuração de filtro *add-drop* representada pela T-CMT.

O coeficiente de auto-acoplamento  $\mu_0$  foi novamente introduzido para agrupar os termos que multiplicam a amplitude do modo  $a$  na Equação 51.

Da mesma forma como ocorre para o primeiro guia de onda (entrada-*through*), por reciprocidade, os coeficientes de acoplamento entre o modo da cavidade e os modos  $s_a$  e  $s_d$ , presentes no segundo guia (*add-drop*), serão iguais, denotados por  $\mu_d$ .

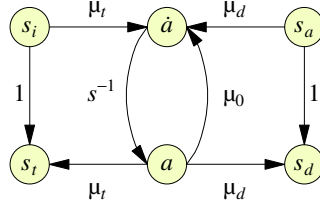


Figura 24. SFG para o filtro *add-drop*

$$H_t(s) = \frac{s_t}{s_i} = \frac{s - \mu_0 + \mu_t^2}{s - \mu_0} \quad (52)$$

$$H_d(s) = \frac{s_d}{s_i} = \frac{\mu_t \mu_d}{s - \mu_0} \quad (53)$$

Na notação de SFG, a Equação 51 pode ser representada conforme a Figura 24. Aplicando a Regra de Mason ao grafo, as funções de transferência para as saídas *through* ( $H_t(s)$ ) e *drop* ( $H_d(s)$ ), em relação à entrada são dadas pelas Equações 44 e 53. Realizando as mesmas considerações adotadas para o filtro *all-pass*, as funções de transferência  $H_t(\Delta\omega)$  e  $H_d(\Delta\omega)$  serão fornecidas pelas Equações 54 e 55.

$$H_t(\Delta\omega) = \frac{j\Delta\omega + \gamma_0 + |\mu_d|^2/2 - |\mu_t|^2/2}{j\Delta\omega + \gamma_0 + |\mu_d|^2/2 + |\mu_t|^2/2} \quad (54)$$

$$H_d(\Delta\omega) = \frac{-|\mu_t||\mu_d|}{j\Delta\omega + \gamma_0 + |\mu_d|^2/2 + |\mu_t|^2/2} \quad (55)$$

Dessa maneira, analisando as Equações 54 e 55, o filtro *add-drop* apresentará um único polo  $p$ . Para a saída *drop* não haverá nenhum zero, já para a saída *through*, o filtro apresentará um zero  $z$ . O polo  $p$  e o zero  $z$  são dados por:

$$\begin{aligned} p &= -\gamma_0 - |\mu_d|^2/2 - |\mu_t|^2/2 \\ z &= -\gamma_0 - |\mu_d|^2/2 + |\mu_t|^2/2 \end{aligned} \quad (56)$$

Com base no numerador da Equação 54, a condição de transmissão zero na saída *through* ocorrerá na ressonância ( $\Delta\omega = 0$ ) quando o valor dos coeficientes de acoplamento satisfizerem a condição de acoplamento crítico:

$$|\mu_t| = \sqrt{2\gamma_0 + |\mu_d|^2} \quad (57)$$

Sabendo que  $|\mu_d|^2 = 2\gamma_d$ , a condição de acoplamento crítico da Equação 57 também pode ser expressa como:

$$|\mu_t| = \sqrt{2(\gamma_0 + \gamma_d)} \quad (58)$$

Comparando as Equações 58 e 50 para as condições de acoplamento crítico dos filtros *add-drop* e *all-pass*, respectivamente, nota-se que, da perspectiva da saída *through*, a cavidade apresentará uma taxa de decaimento equivalente  $(\gamma_0 + \gamma_d)$ . Ou seja, a presença do segundo guia atua como um mecanismo de perdas junto com a taxa de decaimento intrínseca da cavidade, modificando o valor de  $|\mu_t|$  na condição de acoplamento crítico. Esse fato pode ser visto de forma clara se a Equação 57 for expressa apenas em termos das taxas de decaimento  $\gamma_0, \gamma_d, \gamma_t$ , o que resulta em:

$$\gamma_t = \gamma_0 + \gamma_d \quad (59)$$

Na condição de acoplamento crítico, a função de transferência para a saída *through* apresentará um zero na origem e o polo do filtro estará em  $p = 2(\gamma_0 + \gamma_d)$ .

Da mesma forma como ocorre para o filtro *all-pass*, se o sistema estiver sub-acoplado, as perdas serão dominadas pelo acoplamento com o segundo guia de onda (*add-drop*) e pelas perdas intrínsecas do anel, de forma que  $\gamma_t < \gamma_0 + \gamma_d$ . O resultado disso é um zero de fase mínima na função de transferência  $H_t$ . Todavia, se o filtro estiver em uma condição sobre-acoplada, as perdas serão dominadas pelo acoplamento com o primeiro guia de onda (*entrada-through*), de forma que  $\gamma_t > \gamma_0 + \gamma_d$ , produzindo um zero de fase não-mínima na função de transferência  $H_t$ . Portanto, o filtro apresentará respostas de fase e, conseqüentemente, atrasos de grupo distintos de acordo com o regime de acoplamento. Embora isso já ocorresse para o filtro *all-pass*, no caso do *add-drop* a condição de acoplamento pode ser ajustada com maior liberdade, devido à presença de dois coeficientes de acoplamento.

#### 4.3. Modelo na T-CMT para o Filtro de Anéis Acoplados em Série

Uma das vantagens da abordagem pela CMT é a facilidade com que novos efeitos podem ser adicionados ao modelo, bastando incluir novos termos à equação base 36, sem a necessidade de modificar os termos já existentes. Com isso, o raciocínio desenvolvido para os filtros *all-pass* e *add-drop* pode ser estendido para representar o acoplamento entre mais de um modo de oscilação. Supondo, por exemplo, dois anéis acoplados, a formulação via T-CMT resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= j\omega_1 a_1 + \mu_{12} a_2 \\ \frac{da_2}{dt} &= j\omega_2 a_2 + \mu_{21} a_1 \end{aligned} \quad (60)$$

onde,  $\omega_{1,2}$  são as frequências de ressonância de cada um dos anéis isolados e  $\mu_{12}$  e  $\mu_{21}$  são os coeficiente de acoplamento entre os modos dos anéis. É possível demonstrar, por reciprocidade/conservação de energia que  $\mu_{12} = \mu_{21} = -j|\mu_{21}|$  [9].

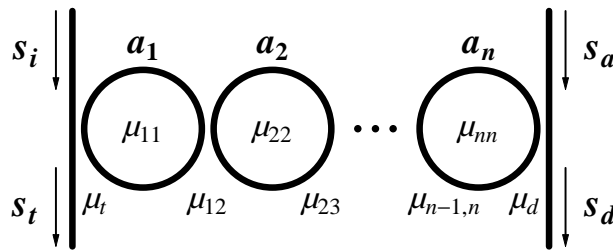


Figura 25. Topologia de Filtro com Ressonadores Acoplados em Série

Partindo da configuração de filtro com n ressonadores acoplados em série, apresentada na Figura 25, as equações para os modos  $a_i$  são fornecidas pela T-CMT conforme:

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= (j\omega_1 - \gamma_1)a_1 + \mu_{12}a_2 + \mu_t s_i \\
\frac{da_2}{dt} &= (j\omega_2 - \gamma_2)a_2 + \mu_{12}a_1 \\
&\vdots \\
\frac{da_i}{dt} &= (j\omega_i - \gamma_i)a_i + \mu_{i-1,i} a_{i-1} \\
&\vdots \\
\frac{da_n}{dt} &= (j\omega_n - \gamma_n)a_n + \mu_{n-1,n} a_{n-1} + \mu_d s_a
\end{aligned} \tag{61}$$

onde,  $a_i$  é a amplitude do modo no  $i$ -ésimo anel;  $\omega_i$  é a frequência de ressonância do  $i$ -ésimo anel;  $\gamma_i$  é a constante real de perdas do  $i$ -ésimo anel, que inclui as perdas intrínsecas e as perdas devido ao acoplamento com os guias;  $\mu_{i-1,i}$  é o coeficiente complexo de acoplamento entre o  $i$ -ésimo anel e seu antecessor;  $s_i$  e  $s_a$  são as ondas incidentes nos guias de entrada e saída, respectivamente;  $\mu_t$  e  $\mu_d$  são os coeficientes complexos de acoplamento entre o primeiro anel e o guia de entrada, e entre o  $n$ -ésimo anel e o guia de saída, respectivamente.

Em conjunto com as equações para as amplitudes dos modos (Equação 61), as relações de entrada e saída do filtro para as saídas *through* e *drop* são dadas por:

$$\begin{aligned}
s_t &= s_i + \mu_t a_1 \\
s_d &= s_a + \mu_d a_n
\end{aligned} \tag{62}$$

onde,  $s_t$  e  $s_d$  são as ondas que deixam o filtro nos guias de entrada (saída *through*) e saída (saída *drop*), respectivamente.

As Equações 61 e 62, fornecem uma descrição completa pela T-CMT para filtros de  $n$  ressonadores acoplados em série. No entanto, para os procedimentos de análise e síntese, é conveniente obter as funções de transferência associadas ao filtro, dadas por  $H_t(s)$  e  $H_d(s)$ , para as saídas *through* e *drop*. Considerando que apenas a entrada é excitada com um sinal  $s_i$ , de modo que  $s_a = 0$ , as Equações em 62 podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
H_t(s) &= \frac{s_t}{s_i} = 1 + \mu_t \frac{a_1}{s_i} \\
H_d(s) &= \frac{s_d}{s_i} = \mu_d \frac{a_n}{s_i}
\end{aligned} \tag{63}$$

Portanto, para expressar de forma fechada as funções de transferência do filtro, é preciso encontrar equações fechadas para as amplitudes dos modos  $a_1$  e  $a_n$ . Uma forma de fazer isso, baseada na inversão da matriz do sistema de equações diferenciais da T-CMT e no cálculo do determinante dessa matriz utilizando uma relação recursiva para o  $n$ -ésimo continuante da matriz, é mostrada em [12]. Aqui, será apresentado um método equivalente, baseado na representação em forma de grafo de fluxo de sinal (SFG) das equações da T-CMT para o filtro.

Da mesma forma como foi realizado para os filtros *all-pass add-drop*, as equações da T-CMT para a topologia de filtro em série podem ser representadas na forma de grafo de fluxo de sinal (SFG) conforme a Figura 26. Onde foram consideradas as amplitudes dos modos expressas como funções da variável de frequência complexa  $s$  e foram introduzidos os coeficientes complexos de auto-acoplamento  $\mu_{ii}$ , dados por:

$$\mu_{ii} = j\omega_i - \gamma_i \quad (64)$$

Em posse do SFG de um filtro de ordem  $n$ , uma das formas de encontrar as funções de transferência é através da aplicação da Regra de Mason na forma matricial [15, 18] fazendo uso da matriz de adjacência do grafo.

No entanto, o método que será apresentado neste trabalho toma como base a possibilidade de expandir o determinante do SFG em um nó do grafo. Isso permite que seja encontrada uma relação recursiva para o determinante do grafo de um filtro com  $n$  ressonadores, o que leva a uma expressão fechada para as funções de transferência das saídas *through* ( $H_t(s)$ ) e *drop* ( $H_d(s)$ ) de um filtro com ordem  $n$  arbitrária. O método está baseado inteiramente na análise topológica/gráfica do SFG. Além disso, a mesma abordagem pode ser utilizada em outras topologias de filtros, sendo um método mais geral do que o apresentado em [12], que se restringe à topologia de anéis acoplados em série.

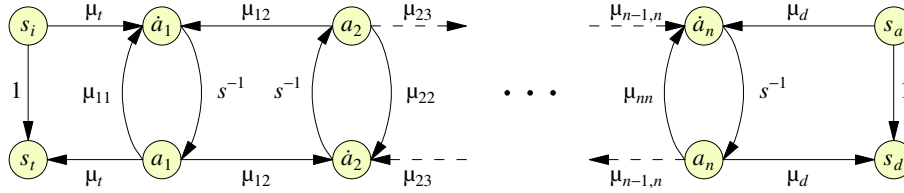


Figura 26. SFG para Ressonadores Acoplados em Série Descritos pela T-CMT

Considerando um SFG composto por  $n$  nós, cujo determinante é igual a  $\Delta^{(n)}$ . Se for adicionado um nó  $n + 1$  ao grafo, o valor do determinante  $\Delta^{(n+1)}$  passará a ser [15]:

$$\Delta^{(n+1)} = \Delta^{(n)} - \sum_k L_k \Delta_k \quad (65)$$

Sendo,  $L_k$  a  $k$ -ésima transmissão da  $k$ -ésima malha formada no grafo após a adição do nó  $n + 1$  e  $\Delta_k$  o cofator associado a  $k$ -ésima malha, isto é, o determinante do grafo resultante quando os nós da  $k$ -ésima malha são removidos.

A propriedade da Equação 65 é chamada de expansão do determinante em um nó. Com ela, pode-se escrever o determinante do SFG correspondente ao filtro (Figura 26) de maneira recursiva, conforme são adicionadas novas cavidades ao filtro.

Partindo de um filtro de ordem 1, ou seja, composto por uma única cavidade em anel, seu SFG será composto por uma única malha  $L_{11}$  e seu determinante será dado por  $\Delta^{(1)} = 1 - L_{11}$ . A adição dos nós ( $a_2$  e  $\hat{a}_2$ ) correspondentes à segunda cavidade formarão as novas malhas  $L_{22}$  e  $L_{12}$ . Por uma inspeção visual do grafo conclui-se que os cofatores associados às novas malhas serão:  $\Delta_{22} = \Delta^{(1)}$  e  $\Delta_{12} = 1$ . Dessa maneira, expandindo o determinante  $\Delta^{(2)}$ , para um filtro de duas cavidades, conforme a Equação 65, obtém-se:

$$\Delta^{(2)} = \Delta^{(1)} - L_{22}\Delta^{(1)} - L_{12} = (1 - L_{22})\Delta^{(1)} - L_{12} \quad (66)$$

Se o mesmo procedimento for realizado, partindo de um filtro com duas cavidades e adicionando uma terceira, o determinante  $\Delta^{(3)}$  poderá ser escrito como:

$$\Delta^{(3)} = \Delta^{(2)} - L_{33}\Delta^{(2)} - L_{23}\Delta^{(1)} = (1 - L_{33})\Delta^{(2)} - L_{23}\Delta^{(1)} \quad (67)$$

Repetindo o processo iterativamente até formar o SFG mostrado na Figura 26, nota-se que o determinante  $\Delta^{(i)}$  de um filtro de ordem  $i$  pode ser calculado recursivamente por:

$$\begin{aligned}
\Delta^{(-1)} &= 0 \\
\Delta^{(0)} &= 1 \\
\Delta^{(i)} &= (1 - L_{ii})\Delta^{(i-1)} - L_{i-1,i}\Delta^{(i-2)}, \text{ para } i \geq 1
\end{aligned} \tag{68}$$

Os valores das transmissões das malhas  $L_{ii}$  e  $L_{i-1,i}$  podem ser obtidas pelos ramos do grafo da Figura 26, resultando em:

$$\begin{aligned}
L_{ii} &= s^{-1}\mu_{ii} \\
L_{i-1,i} &= s^{-2}\mu_{i-1,i}^2
\end{aligned} \tag{69}$$

Em posse de uma expressão para o determinante do SFG correspondente a um filtro de ordem arbitrária, as funções de transferência desejadas podem ser obtidas pela Regra de Mason (Equação 70), restando apenas determinar no grafo os caminhos  $P_k$  e seus cofatores  $\Delta_k$  associados à função de transferência desejada.

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \tag{70}$$

Considerando a função de transferência para a saída *drop*, a partir do grafo (Figura 26), nota-se que há apenas um caminho  $P_d$  entre os nós  $s_i$  e  $s_d$  dado por:

$$\begin{aligned}
P_d &= \mu_t s^{-1} \mu_{12} s^{-1} \mu_{23} \dots s^{-1} \mu_{n-1,n} s^{-1} \mu_d \\
\Rightarrow P_d &= \mu_t \mu_d s^{-n} \prod_{k=1}^{n-1} \mu_{k,k+1}
\end{aligned} \tag{71}$$

Como o caminho  $P_d$  contém todos os nós de todas as malhas do SFG, o cofator  $\Delta_d$  associado a ele será unitário ( $\Delta_d = 1$ ). Portanto, utilizando a Regra de Mason (Equação 70) em conjunto com as Equações 68 e 71, a função de transferência para a saída *drop* de um filtro com  $n$  anéis pode ser expressa por:

$$H_d = \frac{P_d}{\Delta^{(n)}} = \frac{\mu_t \mu_d s^{-n}}{\Delta^{(n)}} \prod_{k=1}^{n-1} \mu_{k,k+1} \tag{72}$$

O mesmo procedimento de avaliação de caminhos e cofatores pode ser utilizado para encontrar a função de transferência da saída *through*. Analisando o SFG, existem dois caminhos possíveis entre os nós  $s_i$  e  $s_t$ . O primeiro deles, possui transmissão  $P_{t,1} = 1$  e por nenhum de seus nós estarem presentes em malhas, o cofator associado a esse caminho será igual ao determinante do grafo, isto é,  $\Delta_{t,1} = \Delta^{(n)}$ . Já o segundo caminho, com transmissão  $P_{t,2} = \mu_t s^{-1} \mu_t$ , passa pelos nós  $\hat{a}_1$  e  $a_1$ , que compõem as malhas  $L_{11}$  e  $L_{12}$ . Devido a isso, o cofator  $\Delta_{t,2}$  será igual ao determinante do grafo se o primeiro anel fosse removido do sistema. Então, a relação recursiva encontrada para o determinante (Equação 68) também pode ser utilizada para calcular o cofator  $\Delta_{t,2}$ , bastando modificar as condições iniciais para:

$$\begin{aligned}
\Delta^{(0)} &= 0 \\
\Delta^{(1)} &= 1
\end{aligned} \tag{73}$$

Com isso, o cofator  $\Delta_{t,2}$  pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}
\Delta_{t,2} &= \Delta^{(n)} \\
\text{Onde,} \\
\Delta^{(0)} &= 0 \\
\Delta^{(1)} &= 1 \\
\Delta^{(i)} &= (1 - L_{ii})\Delta^{(i-1)} - L_{i-1,i}\Delta^{(i-2)}, \text{ para } i \geq 1
\end{aligned} \tag{74}$$

Disso, resulta que a função de transferência  $H_t$  para a saída *through* de um filtro com  $n$  anéis pode ser expressa por:

$$H_t = \frac{P_{t,1}\Delta_{t,1} + P_{t,2}\Delta_{t,2}}{\Delta^{(n)}} = 1 + \frac{\mu_t^2 s^{-1} \Delta_{t,2}}{\Delta^{(n)}} \tag{75}$$

## 5. Síntese por Modos Acoplados no Tempo (T-CMT)

O procedimento de síntese está baseado na possibilidade de escrever a função de transferência da porta *through* em forma de fração continuada, o que fornece de maneira direta os valores dos coeficientes de acoplamento.

Mais do que isso, esse fato demonstra que a topologia de ressonadores acoplados em série descritos pela T-CMT é uma forma canônica de realizar fisicamente uma função de transferência expressa em forma de fração continuada. Assim como, para associações de impedâncias e admitâncias, a topologia de componentes em escada desempenha esse papel [6, 11].

Por sua vez, o procedimento de escrita da função de transferência em forma de fração continuada pode ser realizado diretamente por inspeção do SFG. O que evidencia a utilidade da descrição por SFG e, mais do que isso, uma ligação íntima desse método com as propriedades do sistema.

### 5.1. Expansão da Transmissão de um SFG como uma Fração Continuada

Para facilitar o procedimento, o termo  $T_i$ , com  $i \leq n$ , pode ser introduzido para representar a transmissão do ramo entre os nós  $a_i$  e  $\dot{a}_i$  quando todos os nós  $a_j, \dot{a}_j$  são absorvidos, para  $i < j \leq n$ . Assim, em um filtro com uma única cavidade,  $T_1 = \mu_{11}$ , conforme mostra a Figura 27. Os nós  $s_a$  e  $s_d$  foram omitidos por simplicidade, pois eles não afetam o procedimento.

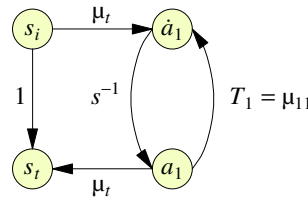


Figura 27. Definição da transmissão de ramo  $T_1$  para um filtro com uma única cavidade

Considerando a definição apresentada para a transmissão de ramo  $T_i$ , o procedimento geral de escrita de  $H_t$  em forma de uma fração continuada encontra-se ilustrado na Figura 28, considerando um filtro com três cavidades  $n = 3$ . A partir do SFG da Figura 28 (a), com  $T_3 = \mu_{33}$ , os nós  $a_3$  e  $\dot{a}_3$  podem ser absorvidos, substituindo os ramos tracejados por um ramo equivalente com transmissão  $T_2$ , resultando no SFG da Figura 28 (b). Repetindo o procedimento, absorvendo os nós  $a_2$  e  $\dot{a}_2$  no grafo da Figura 28 (b), é obtido o SFG da Figura 28 (c) e a transmissão equivalente  $T_1$ . Por fim, absorvendo os nós  $a_1$  e  $\dot{a}_1$ , a transmissão correspondente a  $H_t$  é encontrada em função de  $T_1$ , como mostra a 28 (d). Desse modo, a função de transferência  $H_t$  pode ser escrita

como uma fração continuada substituindo os termos  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  na expressão de  $H_t$ , resultando na Equação 76

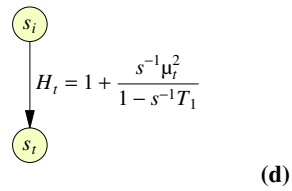
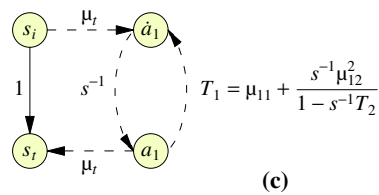
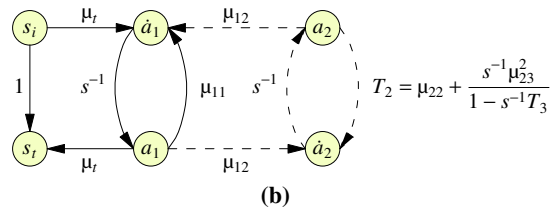
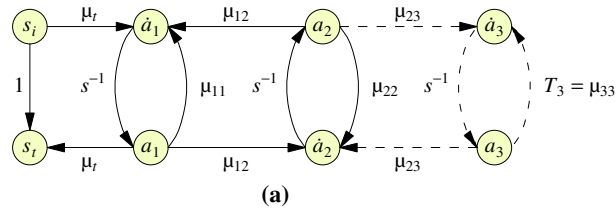


Figura 28. Procedimento de escrita da transmissão de um SFG como uma fração continuada

$$H_t = 1 + \frac{\mu_r^2}{s - \mu_{11} - \frac{\mu_{12}^2}{s - \mu_{22} - \frac{\mu_{23}^2}{s - \mu_{33}}}} \quad (76)$$

O procedimento ilustrado na Figura 28 pode ser generalizado para um filtro com  $n$  cavidades, resultando nas equações:

$$H_t = 1 + \frac{\mu_t^2}{s - T_1}$$

$$T_i = \mu_{ii} + \frac{\mu_{i,i+1}^2}{s - T_{i+1}} \text{ para } i < n \quad (77)$$

$$T_n = \mu_{nn}$$

Em posse da função de transferência  $H_t$  do filtro e da função de transferência alvo, ambas escritas em forma de fração continuada, os coeficientes do filtro são obtidos de forma imediata através da comparação entre as duas funções.

## 6. Realização Física dos Dispositivos

Todo o desenvolvimento realizado até este ponto tratou os dispositivos em termos de coeficientes genéricos dados por uma das abordagens da Teoria de Modos Acoplados. No entanto, nenhuma consideração a respeito dos parâmetros físicos dos dispositivos foi feita. Assim, resta estabelecer uma forma de relacionar esses parâmetros com os coeficientes da CMT.

Todo o desenvolvimento subsequente foi realizado com o auxílio do *software* de simulações RSoft [19].

### 6.1. Guias de Onda

Dimensão	Valor [nm]
Altura ( $h$ )	220
Largura ( $w$ )	450

Tabela 1. Dimensões do Guia de Onda Projetado.

Foram usados guias de onda iguais para os guias retos e os guias curvados que formam os anéis, com a geometria mostrada na Figura 29 e dimensões resumidas na Tabela 1. A plataforma adotada foi a de silício sobre isolante (*Silicon On Insulator* - SOI), com valores de índice de refração mostrados na Tabela 2.

Material	Índice de Refração
Silício ( $S_i$ )	3,49
Dióxido de Silício ( $S_iO_2$ )	1,45

Tabela 2. Valores utilizados para os índices de refração na plataforma SOI.

O comprimento de onda no vácuo  $\lambda_0$  adotado para a excitação dos dispositivos foi de 1.550 nm e os guias foram projetados para operar com um modo TE (Transversal-Elétrico) de excitação. Sob essas condições, o guia de onda apresenta um índice de refração efetivo de 2,428.

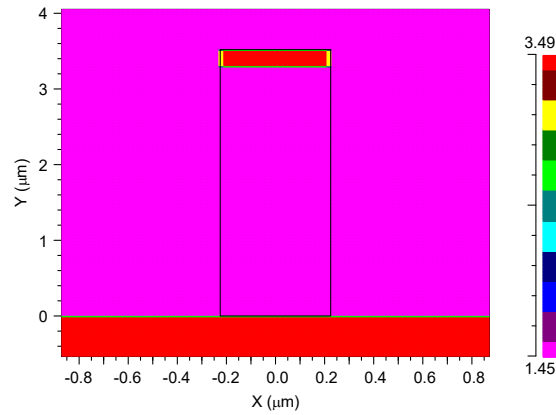


Figura 29. Corte transversal do guia de onda 3D.

O método do índice efetivo foi aplicado para reduzir a estrutura 3D do guia de onda, mostrada na Figura 29, para uma estrutura 2D do tipo *slab* equivalente, sendo obtido um índice de refração efetivo de 2,432, próximo ao guia 3D real. Uma consequência da aplicação do método do índice efetivo é a alteração da orientação do modo, isto é, se o guia 3D real é excitado por um modo TE, o guia 2D equivalente deverá ser excitado por um modo TM (Transversal-Magnético). Uma comparação entre os valores dos índices de refração efetivos para os guias 3D e 2D pode ser vista na Tabela 3. O perfil do modo TE do guia 3D pode ser visto na Figura 30.

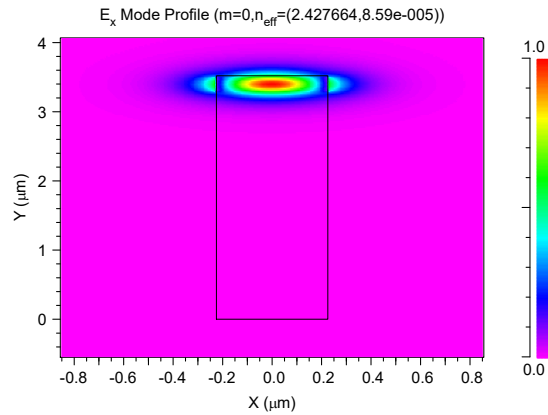


Figura 30. Perfil do modo TE do guia de onda 3D.

Guia de Onda	Índice de Refração Efetivo
Real (3D)	2,427664
Aproximado (2D)	2,432453

Tabela 3. Comparação entre os índices de refração efetivos.

## 6.2. Cavidades em Forma de Anel

O comprimento de onda  $\lambda_m$  do m-ésimo modo ressonante de uma cavidade em forma de anel pode ser aproximado por [12]:

$$\lambda_m = \frac{2\pi n_e R}{m} \quad (78)$$

Onde  $n_e$  é o índice de refração efetivo do guia de onda que forma o anel e  $R$  é o raio médio do anel.

Projetando a cavidade de forma que o modo de ordem  $m = 50$  encontre-se em  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$ , é obtido o valor correspondente para o raio médio  $R$  por meio da Equação 78. Portanto, as cavidades utilizadas terão um raio médio  $R = 5,076 \mu\text{m}$ .

## 6.3. Junções de Acoplamento

Considerando as junções de acoplamento guia-cavidade e cavidade-cavidade, é necessário obter uma relação entre os coeficientes da CMT e o espaçamento entre os elementos acoplados. Para isso, serão utilizados os coeficientes da S-CMT.

Para obter a relação entre o espaçamento e os coeficientes da S-CMT  $t$  e  $\kappa$  de uma junção de acoplamento pontual, foram utilizadas as estruturas mostradas nas Figuras 31 e 32. Onde o mapeamento de cores indica o valor do índice de refração ao longo da estrutura.

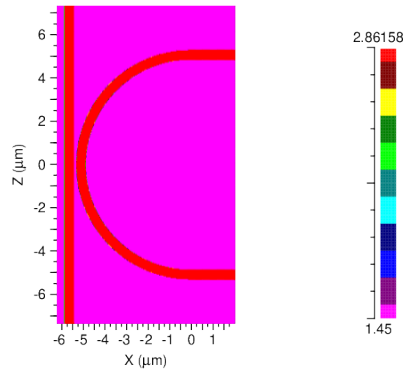


Figura 31. Estrutura usada para obter a relação entre os coeficientes da S-CMT e o espaçamento entre um guia de onda e uma cavidade.

No caso da estrutura mostrada na Figura 31, o procedimento consistiu em aplicar uma excitação contínua TM de comprimento de onda igual a  $1550 \text{ nm}$  no guia de onda e medir a amplitude dos modos, em regime permanente, no guia de onda e no anel, ambos após a junção de acoplamento. Com isso, os coeficientes de acoplamento de campo  $t$  e  $\kappa$  podem ser obtidos de maneira direta a partir dessas medidas, conforme as definições dos parâmetros de espalhamento.

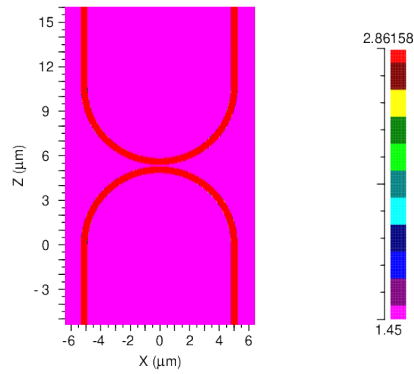


Figura 32. Estrutura usada para obter a relação entre os coeficientes da S-CMT e o espaçamento entre duas cavidades.

O mesmo procedimento foi realizado para a estrutura da Figura 32, aplicando a excitação em um dos anéis e realizando as medidas após a junção de acoplamento, no anel excitado e no anel acoplado.

Dessa forma, as medidas foram realizadas para diferentes valores de espaçamento entre o guia-cavidade e cavidade-cavidade, possibilitando que fossem obtidas as curvas mostradas nas Figuras 33 e 34.

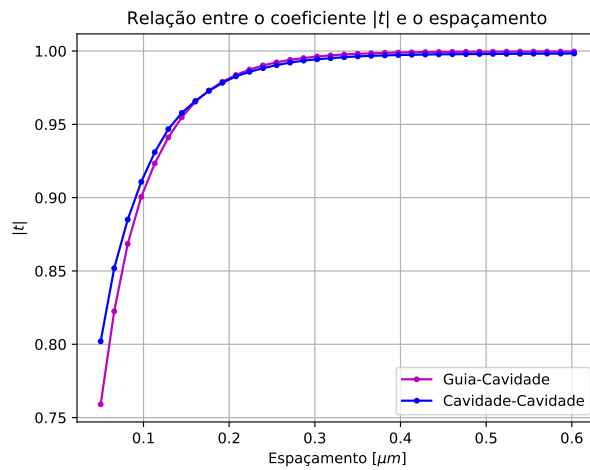


Figura 33. Relação entre o coeficiente  $|t|$  e o espaçamento.

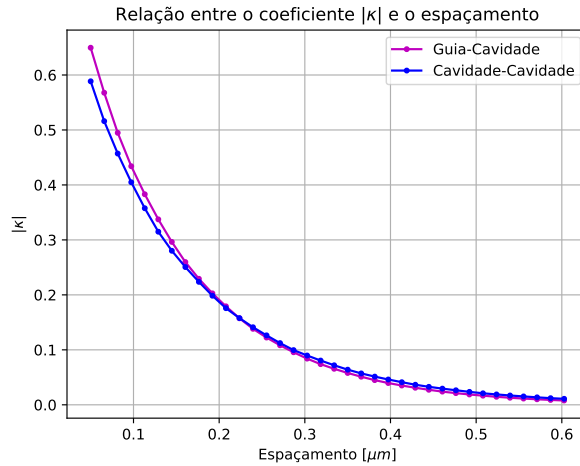


Figura 34. Relação entre o coeficiente  $|\kappa|$  e o espaçamento.

As curvas das Figuras 33 e 34 mostram que, para gaps menores que aproximadamente  $0,21 \mu\text{m}$ , o acoplamento guia–cavidade é ligeiramente maior que o acoplamento cavidade–cavidade. Esse comportamento é esperado para microrressonadores de pequeno raio ( $R \approx 5 \mu\text{m}$ ) e está de acordo com os resultados reportados na literatura, como por [20]. Segundo os autores, a forte curvatura aumenta o confinamento do modo na cavidade, reduzindo a extensão do campo evanescente radial e, conseqüentemente, diminuindo o acoplamento entre cavidades. Já o guia apresenta um campo evanescente mais longo, o que favorece o acoplamento guia–cavidade em pequenos gaps. Para espaçamentos maiores, ambos os acoplamentos entram no regime evanescente fraco e suas curvas convergem, como também previsto no modelo de [20].

## 7. Aplicação à Síntese de um Filtro Butterworth de Segunda Ordem com Cavidades Acopladas em Série

Para ilustrar o procedimento de síntese através da T-CMT, será projetado um filtro de segunda ordem com resposta máxima-plana (Butterworth), utilizando a configuração de anéis acoplados em série.

O procedimento de síntese é consideravelmente mais simples quando realizado por meio da T-CMT. A conversão entre os coeficientes da CMT possibilita que o dispositivo sintetizado com a T-CMT seja convertido para um modelo na S-CMT, permitindo validar se as restrições de acoplamento fraco/banda estreita, impostas pela T-CMT foram respeitadas.

Aliado a isso, em posse dos coeficientes de acoplamento de campo da S-CMT, os valores dos espaçamentos podem ser obtidos através dos gráficos das Figuras 33 e 34. Isso permite que o projeto seja validado em um *software* de simulações FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*).

Partindo de uma função de transferência alvo correspondente a um filtro passa-alta com resposta máxima-plana (Butterworth), normalizada para uma frequência de corte de  $1 \text{ rad/s}$ :

$$F_t(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (79)$$

O procedimento de síntese consistiria em reescrever a função de transferência da Equação 79 como uma fração continuada e realizar a comparação direta com os coeficientes da função de transferência para a saída *through* na forma da Equação 77.

Em forma de fração continuada, a Equação 79 pode ser reescrita como:

$$F_t(s) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{s + (\sqrt{2}/2) + \frac{1/2}{s + \sqrt{2}/2}} \quad (80)$$

Com base na Equação 77, a função de transferência para a saída *through* possui a forma:

$$H_t(s) = 1 + \frac{\mu_t^2}{s - \mu_{11} - \frac{\mu_{12}^2}{s - \mu_{22}}} \quad (81)$$

Através da transformação de variáveis da Equação 82, a função de transferência do filtro pode ser expressa em função da dissintonia de frequência  $\Delta\omega$  da excitação  $\omega$  relativa à frequência central  $\omega_0$  e da dissintonia  $\delta\omega_i$  da frequência de ressonância  $\delta_i$  da  $i$ -ésima cavidade em relação à frequência central  $\omega_0$ . Isso equivale a mover a origem do espectro para a frequência central  $\omega_0$ . Antes da transformação, a função  $H_t(s)$  teria a forma de um filtro rejeita-faixa. Após a transformação, ela passará a ter a forma de um filtro passa-alta. Com isso, pode-se utilizar a função de transferência alvo (Equação 79) na forma de um filtro passa-alta, que é mais simples do que uma função de um filtro rejeita-faixa.

$$\begin{aligned} s &\leftarrow j(\omega - \omega_0) = j\Delta\omega \\ \mu_{ii} &\leftarrow j(\omega_i - \omega_0) - \gamma_i = j\delta\omega_i - \gamma_i \end{aligned} \quad (82)$$

Após aplicar a transformação da Equação 82 à Equação 81, pode-se realizar a comparação entre os coeficientes da função de transferência alvo (Equação 80) e da função para a saída *through* (Equação 81), resultando nos seguintes valores para os coeficientes:

$$\begin{aligned} \mu_t^2 &= -(\sqrt{2}) \\ \mu_{11} &= -(\sqrt{2}/2) \\ \mu_{12}^2 &= -(1/2) \\ \mu_{22} &= -(\sqrt{2}/2) \end{aligned} \quad (83)$$

Considerando que as duas cavidades possuem a mesma frequência de ressonância, igual à  $\omega_0$ , de forma que  $\delta\omega_{1,2} = 0$ , os coeficientes de auto-acoplamento serão reais, dados por  $\mu_{ii} = -\gamma_i$ . Junto a isso, se as cavidades tiverem perdas desprezíveis, então  $\gamma_0 = 0$ , de modo que  $\gamma_1 = \gamma_t$  e  $\gamma_2 = \gamma_d$ . Por fim, utilizando a relação [2]  $\gamma_{t,d} = |\mu_{t,d}|^2/2$ , junto com  $\mu_{t,d} = -j|\mu_{t,d}|$ ,  $\mu_{12} = -j|\mu_{12}|$ , os coeficientes do filtro sintetizado serão dados por:

$$\begin{aligned} |\mu_t|^2 &= \sqrt{2} \\ \mu_{11} = -\gamma_t &= -\frac{|\mu_t|^2}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies |\mu_t|^2 = \sqrt{2} \\ |\mu_{12}|^2 &= \frac{1}{2} \\ \mu_{22} = -\gamma_d &= -\frac{|\mu_d|^2}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies |\mu_d|^2 = \sqrt{2} \end{aligned} \quad (84)$$

Os coeficientes obtidos na Equação 84 estão normalizados para uma frequência de corte igual a 1 *rad/s* (considerando a transformação para passa-alta), o que corresponde a uma largura

de banda de  $2 \text{ rad/s}$  centrada em  $\omega_0$ , na forma original rejeita-faixa. O uso de coeficientes normalizados é útil pois permite que o procedimento de síntese seja realizado de maneira independente da largura de banda desejada para o filtro. Dada uma largura de banda alvo  $\Delta\omega_{bw}$ , os coeficientes finais podem ser obtidos aplicando a transformação:

$$\begin{aligned} |\mu_{t,d}|^2 &\leftarrow \frac{\Delta\omega_{bw}}{2} |\mu_{t,d}|^2 \\ |\mu_{12}|^2 &\leftarrow \frac{\Delta\omega_{bw}^2}{4} |\mu_{12}|^2 \end{aligned} \quad (85)$$

Para um filtro com uma largura de banda de  $123 \text{ GHz}$ ,  $\Delta\omega_{bw} = 774 \times 10^9 \text{ rad/s}$ , os coeficientes de acoplamento de energia serão dados pelos valores da Tabela 4.

Coeficiente	Valor
$ \mu_t ^2$	$5,47 \times 10^{11}$
$ \mu_d ^2$	$5,47 \times 10^{11}$
$ \mu_{12} ^2$	$7,49 \times 10^{22}$

Tabela 4. Coeficientes da T-CMT para o filtro sintetizado.

Com o objetivo de validar os resultados obtidos pela síntese na T-CMT, os coeficientes de acoplamento de energia encontrados podem ser convertidos em coeficientes de acoplamento de campo da S-CMT [2] utilizando as Equações 86, para o acoplamento guia-cavidade, e 87 para o acoplamento entre duas cavidades iguais.

$$|\mu_{t,d}|^2 = \frac{\kappa^2}{T} \quad (86)$$

$$|\mu_{12}|^2 = \frac{\kappa^2}{T^2} \quad (87)$$

Nas Equações 86 e 87, o parâmetro  $T$  corresponde ao tempo de propagação de grupo em uma volta no anel da cavidade, sendo calculado como:

$$T = \frac{2\pi R n_g}{c} \quad (88)$$

Sabendo como converter os coeficientes entre as duas formas da CMT, pode-se introduzir o modelo na S-CMT para o filtro de anéis acoplados em série com ordem 2, expresso a partir da Equação 33, como o produto de Redheffer:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_c^{(0)} \star \mathbf{S}_r \star \mathbf{S}_c^{(1)} \star \mathbf{S}_r \star \mathbf{S}_c^{(2)} \quad (89)$$

Onde as matrizes terão as formas das Equações 34 e 35. Como os anéis são iguais e sem perdas, a matriz será:

$$\mathbf{S}_r = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta/2} \\ e^{-j\theta/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

Onde o comprimento ótico  $\theta$  está relacionado com a frequência de excitação  $\omega$  por:

$$\theta = \omega T \quad (91)$$

O valor do tempo de propagação  $T$  pode ser calculado substituindo os valores do raio  $R = 5,076$  e  $n_g \approx n_e = 2,43$  (desprezando o efeito de dispersão) na Equação 88, resultando em  $T = 258,6 \times 10^{-15}$  s.

Realizando a conversão dos coeficientes da T-CMT (Tabela 4) para a S-CMT, utilizando as Equações 86 e 87, são obtidos os valores apresentados na Tabela 5 para os coeficientes  $t_i$  das junções de acoplamento, lembrando que  $t_i = \sqrt{1 - \kappa_i^2}$ .

Coeficiente	Valor
$t_0$	0,926516
$t_1$	0,997492
$t_2$	0,926516

Tabela 5. Coeficientes da S-CMT para o filtro sintetizado.

A partir dos coeficientes da Tabela 5, os valores dos espaçamentos correspondentes podem ser encontrados pelas curvas da Figura 33, sabendo que  $t_{0,2}$  correspondem a acoplamentos guia-cavidade e  $t_1$  corresponde ao acoplamento cavidade-cavidade. Disso, resultam os valores dos espaçamentos  $g_i$ , correspondentes aos respectivos coeficientes  $t_i$ , mostrados na Tabela 6. Com esses valores, a simulação FDTD do filtro sintetizado pode ser realizada.

Espaçamento	Valor [ $\mu m$ ]
$g_0$	0,1163
$g_1$	0,3633
$g_2$	0,1163

Tabela 6. Valores dos espaçamentos para o filtro sintetizado.

A Figura 35 apresenta a estrutura do filtro utilizada na simulação FDTD, onde podem ser vistas as duas cavidades e os dois guias de onda, entrada-*through* e *add-drop*.

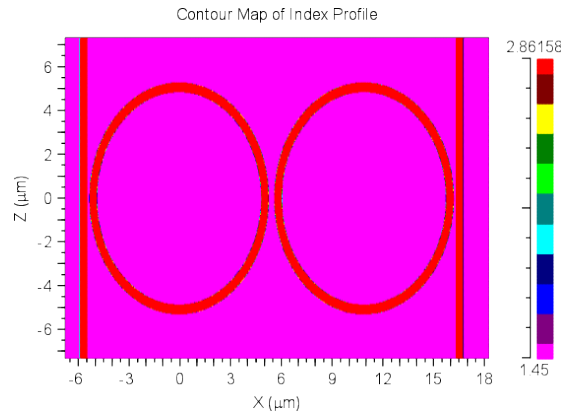


Figura 35. Realização física do filtro sintetizado.

A comparação da resposta obtida pelo projeto da T-CMT com o modelo da S-CMT pode ser vista nas Figuras 36 e 37. A proximidade entre as duas respostas confirma que a aproximação da T-CMT foi suficiente para representar o espectro do filtro em torno de uma ressonância. No entanto, pode ser vista uma pequena diferença entre elas, fazendo com que a resposta da S-CMT não fosse tão plana quanto a projetada. Essa diferença se deve a escolha da largura de banda do filtro, que está no limite da restrição imposta pela T-CMT. Para larguras de banda maiores, o erro da aproximação pela T-CMT tornará-se ainda maior. Analogamente, se a largura de banda for reduzida, o resultado da T-CMT será ainda mais próximo ao da S-CMT.

Com isso em mente, para realizar a comparação com os resultados da FDTD, é mais apropriado utilizar o modelo da S-CMT, pois ele irá refletir melhor o comportamento real do dispositivo.

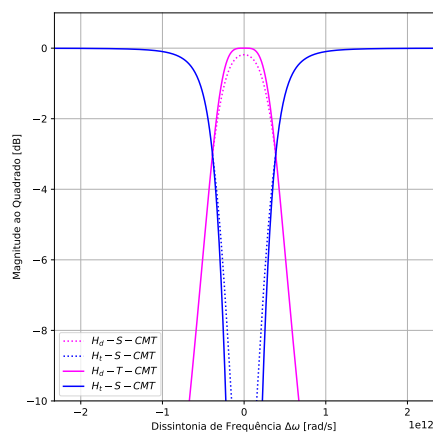


Figura 36. Comparação entre o espectro do filtro projetado na T-CMT e seu equivalente na S-CMT.

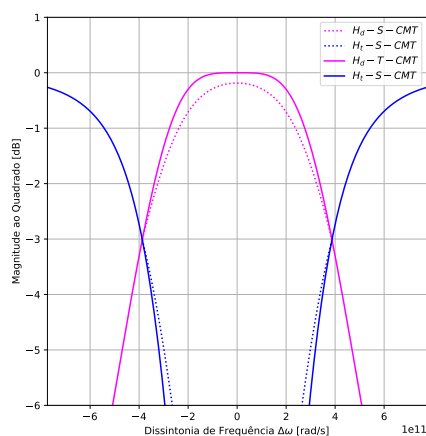


Figura 37. Comparação entre o espectro do filtro projetado na T-CMT e seu equivalente na S-CMT.

O resultado da simulação FDTD encontra-se comparado à resposta do modelo da S-CMT na Figura 38, onde pode ser visto que existe um pequeno erro na estimativa da frequência central do filtro, que poderia ser corrigido em iterações subsequentes do projeto do dispositivo. Esse pequeno erro possivelmente se deve à incapacidade da T-CMT em prever corretamente a frequência central, sendo esse um problema conhecido [10], podendo ser visto nos filtros projetados em [2].

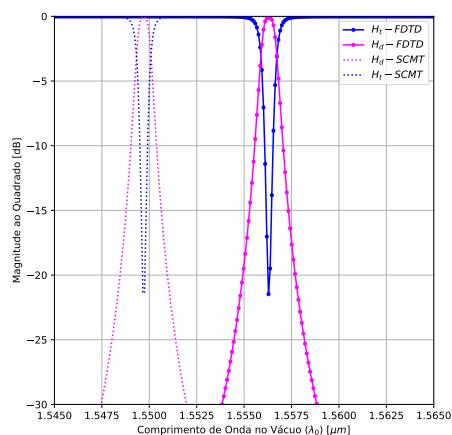


Figura 38. Comparação entre o espectro do modelo na S-CMT com o resultado da simulação de FDTD, em torno de uma ressonância.

A fim de comparar melhor as respostas da Figura 38, o espectro da S-CMT foi deslocado, cancelando a diferença entre as frequências centrais, resultando nas Figuras 39 e 40. Nela, pode ser visto que, embora as frequências centrais foram ligeiramente distintas, a resposta da simulação FDTD foi praticamente igual à projetada, demonstrando a eficácia e validando o método.

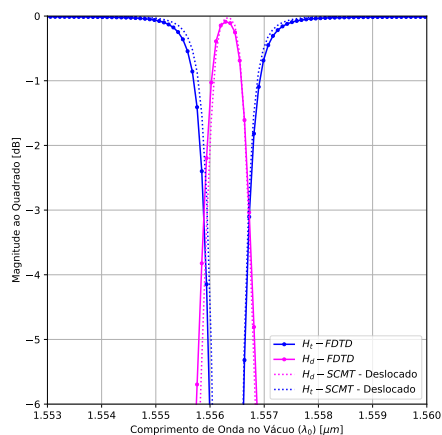


Figura 39. Comparação entre o espectro do modelo na S-CMT com o resultado da simulação de FDTD, com as ressonâncias sobrepostas.

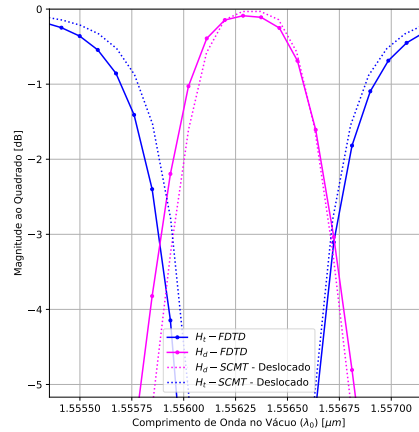


Figura 40. Comparação entre o espectro do modelo na S-CMT com o resultado da simulação de FDTD, com as ressonâncias sobrepostas.

## 8. Conclusões

A utilização do formalismo de redes de duas portas mostrou-se uma ferramenta eficaz para a modelagem dos filtros estudados, permitindo decompor os dispositivos em blocos elementares e reutilizáveis. A incorporação do Produto Estrela de Redheffer e da Teoria de Grafos de Fluxo de Sinal possibilitou a associação sistemática desses blocos, de forma modular, resultando em uma metodologia unificada capaz de descrever diferentes arquiteturas de filtros fotônicos a partir de um mesmo conjunto de regras. A integração entre a Teoria de Grafos de Fluxo de Sinal e a Teoria de Modos Acoplados no Tempo permitiu estabelecer um procedimento de síntese de filtros baseados em cavidades acopladas, partindo de uma resposta espectral desejada e chegando à determinação dos parâmetros físicos associados. Em complemento, os modelos desenvolvidos segundo a Teoria de Modos Acoplados no Espaço foram empregados para verificar e quantificar os parâmetros obtidos no processo de síntese, validando as aproximações adotadas na formulação temporal. Finalmente, as simulações FDTD confirmaram os resultados previstos pelas abordagens de Modos Acoplados, demonstrando a consistência entre as diferentes etapas do método e a eficácia da metodologia proposta para a análise e síntese de filtros fotônicos compostos por cavidades acopladas.

## Referências

1. W. Bogaerts, P. De Heyn, T. Van Vaerenbergh, *et al.*, “Silicon microring resonators,” *Laser Photon. Rev.* **6**, 47–73 (2012).
2. B. E. Little, S. T. Chu, H. A. Haus, *et al.*, “Microring resonator channel dropping filters,” *J. Light. Technol.* **15**, 998–1005 (1997).
3. V. Van, “Synthesis of elliptic optical filters using mutually coupled microring resonators,” *J. Light. Technol.* **25**, 584–590 (2007).
4. G. F. M. Rezende, “Projeto, caracterização e análise de microrressonadores Óticos acoplados em plataforma soi,” Dissertação (mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin, Campinas, SP (2015).
5. R. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, McGraw-Hill electrical and electronic engineering series (McGraw-Hill, 1966).
6. G. H. Owyang, *Foundations for microwave circuits* (Springer, New York, NY, 1989), 1989th ed.
7. R. M. Redheffer, “Difference equations and functional equations in transmission line theory,” in *Modern Mathematics for the Engineer: Second Series*, vol. 2 of *Modern Mathematics for the Engineer* E. F. Beckenbach, ed. (McGraw-Hill, New York, 1958), chap. 12, pp. 271–318.

8. H. A. Haus and W.-P. Huang, "Coupled-mode theory," Proc. IEEE **79**, 1505–1518 (1991). Anteriormente Proceedings of the I.R.E.
9. W. H. Louisell, *Coupled Mode and Parametric Electronics* (John Wiley & Sons, New York, 1960).
10. H. A. Haus, *Waves and Fields in Optoelectronics*, Prentice-Hall Series in Solid State Physical Electronics (Prentice-Hall, New Jersey, 1984).
11. W.-K. Chen, *Theory and Design of Broadband Matching Networks*, Applied Electricity and Electronics Series (Pergamon Press, Oxford, 1976).
12. V. Van, *Optical microring resonators*, Series in Optics and Optoelectronics (CRC Press, London, England, 2021).
13. S. J. Mason, "Feedback theory: Some properties of signal flow graphs," Proc. IRE **41**, 1144–1156 (1953).
14. S. J. Mason, "Feedback theory: Further properties of signal flow graphs," Proc. IRE **44**, 920–926 (1956).
15. S. J. Mason and H. J. Zimmermann, *Electronic Circuits, Signals, and Systems* (John Wiley & Sons, New York, 1960).
16. W.-K. Chen, *Graph Theory and its Engineering Applications*, vol. 5 of *Advanced Series in Electrical and Computer Engineering* (World Scientific Publishing, Singapore, 1997).
17. S. Seshu and M. B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1961).
18. G. R. da Ascensão, "Modelando moléculas fotônicas usando a teoria dos grafos," Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Engenharia Elétrica, São Carlos, SP (2023). Graduação em Engenharia Elétrica.
19. Synopsys, "Rsoft photonic device tools," <https://www.synopsys.com/photonic-solutions/rsoft-photonic-device-tools.html> (2025). Acesso em: 20 de novembro de 2025.
20. M. Bahadori, K. Bergman, M. Nikdast, *et al.*, "Design space exploration of microring resonators in silicon photonic interconnects: Impact of the ring curvature," J. Light. Technol. **36**, 2767–2782 (2018).
21. M. C. M. M. Souza, G. F. M. Rezende, L. A. Barea, *et al.*, "Modifying coupled mode theory to model quasi-dark states in coupled resonators," in *Conference on Lasers and Electro-Optics*, (2016).
22. M. C. M. M. Souza, G. F. M. Rezende, L. A. Barea, *et al.*, "Modeling quasi-dark states with temporal coupled-mode theory," Opt. Express **24**, 18960–18972 (2016).