



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática



Introdução à Teoria da Medida

Aluno: Gabriela Lye Watanabe

Curso: Matemática

RA: 770581

Orientador: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende

Curso: Matemática

Centro: Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

São Carlos-SP
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática



Introdução à Teoria da Medida

Monografia apresentada ao Curso de
Licenciatura em Matemática da
Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Alex Carlucci
Rezende.

São Carlos-SP
2023



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
 Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
 Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 14/2024/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

GABRIELA LYE WATANABE

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 09 de fevereiro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

| Cargo/Função | Nome Completo |
|---------------------|----------------------------|
| Orientador | Alex Carlucci Rezende |
| Membro da Banca 1 | Rodrigo da Silva Rodrigues |
| Membro da Banca 2 | Olímpio Hiroshi Miyagaki |



Documento assinado eletronicamente por **Alex Carlucci Rezende, Professor(a) do Ensino Superior**, em 03/07/2024, às 05:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo da Silva Rodrigues, Professor(a) do Ensino Superior**, em 05/07/2024, às 13:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Olimpio Hiroshi Miyagaki, Professor(a) do Ensino Superior**, em 05/07/2024, às 21:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1366993** e o código CRC **27F86689**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.004397/2024-22

SEI nº 1366993

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Agradecimentos

A minha família que me deu apoio nas decisões que tomei, suporte emocional nos momentos de tristeza e de frustração, incentivo aos meus estudos, amor e carinho desde a minha infância até os dias de hoje.

Ao meu orientador Alex Carlucci Rezende que esteve me orientando desde o meu segundo ano de graduação, auxiliando tanto nas dúvidas acadêmicas quanto nos problemas pessoais e psicológicos que eu tive durante a pandemia do Covid-19, além de sempre me incentivar e me apoiar nas minhas decisões, respeitando a minha autonomia.

As minhas melhores amigas Brenda Cavalin Moreira, Carolina Arruda Pereira e Jullya Ogrizio Medeiros, que estudaram comigo do Ensino Fundamental ao Ensino Médio e sempre me apoiaram e me incentivaram a chegar no final do curso e na realização dos meus sonhos, proporcionando muitos momentos de alegria, suporte emocional, amor e carinho, por meio de conversas e da troca de conselhos mesmo a distância.

Aos meus melhores amigos Lucas Ramos Ferreira, Miguel Fantini Fernandes e Vitor Schiavuzzo Ferreira, que tiveram comigo desde o início da minha graduação, dividindo conversas, alegrias e choros. Além de sempre me incentivarem a superar as minhas dificuldades e a buscar os meus sonhos, dando conselhos, amor, carinho e suporte emocional nos momentos em que eu tive que enfrentar a minha ansiedade e preocupações quanto ao meu futuro.

Aos meus amigos da Matemática, em especial ao Gabriel Fernando Candido, a Emilly Chaves Martins, ao Lucas Hideo Maekawa, ao Pedro Morelli, a Relissa Amanda Dias, ao Nathan Lubawski, ao Nelson Amorim Junior e ao Vinícius Marques da Silva, pelo companheirismo, incentivo e carinho nos momentos em que passamos juntos.

As minhas amigas Paula Dal Bem, Marília, Andrea Cruz e Geovanna D. R. M. Pompilio que moram ou moraram comigo em São Carlos e com quem compartilhei momentos de alegrias e tristezas e muitos momentos de apoio e carinho.

Aos professores Paulo Antonio Silvani Caetano e Claudia Buttarello Gentile Moussa pelos ensinamentos e pelos conselhos enquanto eu estive como bolsista no grupo de extensão do PET Matemática UFSCar.

Aos egressos e atuais petianos do grupo PET Matemática UFSCar pelo apoio emocional, pelo incentivo aos estudos e pelo carinho que foram essenciais para a minha permanência no curso e para a experiência que vivi dentro da graduação.

Resumo

A presente monografia consiste em um estudo sobre alguns conceitos fundamentais da Teoria de Medida, como σ -álgebras e medida. Desse modo, será visto os conceitos e as propriedades de álgebras e σ -álgebras assim como os tipos de medidas que podem ser obtidas a partir delas. Além disso, será apresentado também o conceito de espaços mensuráveis e espaços de medida, funções mensuráveis e integração desses tipos de funções. Por fim, será apresentada uma aplicação de tais conceitos na Teoria Ergódica.

Abstract

This monograph consists of a study on some fundamental concepts of Measure Theory, such as σ -algebras and measure. In this way, the concepts and properties of algebras and σ -algebras will be seen, as well as the types of measures that can be derived from them. In addition, the concept of measure spaces, measurable functions and integration of these types of functions will also be presented. Finally, an application of such concepts in Ergodic Theory will be presented.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Conceitos preliminares | 3 |
| 2.1 | Teoria dos conjuntos | 3 |
| 2.2 | Espaços métricos | 6 |
| 2.3 | Topologia | 10 |
| 3 | Álgebras e σ-álgebras | 13 |
| 3.1 | Conceitos e propriedades | 13 |
| 3.2 | σ -álgebras geradas | 15 |
| 3.3 | σ -álgebra produto | 17 |
| 3.4 | σ -álgebra de Borel | 20 |
| 4 | Espaços de medida | 26 |
| 4.1 | Medida | 26 |
| 4.2 | Medida exterior | 34 |
| 4.3 | Medida de Lebesgue | 39 |
| 5 | Funções mensuráveis | 44 |
| 5.1 | Conceito e propriedades | 44 |
| 5.2 | Tipos de funções mensuráveis | 45 |
| 5.3 | Função indicadora e função simples | 49 |
| 5.4 | Função sinal | 51 |
| 6 | Integração de funções não negativas | 57 |
| 6.1 | Funções simples em L^+ | 57 |
| 6.2 | Teorema da convergência monótona | 61 |
| 7 | Modos de convergência | 66 |
| 8 | Integração de funções complexas | 71 |
| 8.1 | Conceitos e propriedades | 71 |
| 8.2 | Teorema da convergência dominada | 75 |

Sumário

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8.3 | Integral de Riemann e Lebesgue | 79 |
| 9 | Medida do produto | 82 |
| 9.1 | Conceitos e propriedades | 82 |
| 10 | Aplicação | 90 |
| 10.1 | Conceitos preliminares | 91 |
| 10.2 | Teorema de Von Neumann | 95 |
| 11 | Considerações finais | 99 |
| | Referências Bibliográficas | 101 |

Capítulo 1

Introdução

Durante a Antiguidade, um dos problemas matemáticos a serem resolvidos era calcular a área de figuras geométricas planas. Neste contexto, o “Método de Exaustão” de Eudoxo se tornou uma ferramenta importante para este processo, pois, por meio dele, eram inscritos na figura, polígonos cujas somas das áreas convergiam para a área da figura onde eles estavam inscritos. Posteriormente, esse método foi aprimorado por Arquimedes, de modo que pudesse calcular não apenas a área de figuras planas, mas também o volume dos sólidos geométricos ([1], 1995 p. 1).

Ao decorrer do tempo, essa problemática passou a ser estudada não apenas pela Geometria Euclidiana, mas também pela Análise. No curso de Cálculo, aprendemos a mensurar as áreas abaixo de curvas determinadas por algumas funções reais, limitadas e contínuas, assim como o volume gerado pelas mesmas, quando rotacionadas. Tal processo é feito por meio da integral de Riemman, que não consegue integrar toda função real, como por exemplo a aplicação $f(x) = e^{-x^2}$. E foi por meio dos estudos do matemático francês Henri Lebesgue que tal obstáculo pôde ser contornado ([1], 1995 p. 1).

Em 1902, Lebesgue escreveu uma dissertação propondo a generalização da integral de Riemman. A medida que ele utilizou para isso formentou o surgimento da Teoria da Medida ([1], 1995 p. 1). Esta área estuda algumas propriedades de σ -álgebras, que são coleções do conjunto das partes de um conjunto, de modo que seus elementos satisfazem algumas propriedades. Por meio delas, é possível definir o conceito de medida, que é uma aplicação que atribui um valor (não necessariamente finito) ao elemento dessa σ -álgebra. Um exemplo disso é a medida de Lebesgue em \mathbb{R} , que é construída a partir de intervalos abertos da reta, sendo que a coleção destes intervalos formam uma σ -álgebra para \mathbb{R} , que é conhecida como σ -álgebra de Borel.

A partir de uma medida estabelecida em um conjunto munido com uma σ -álgebra, temos um espaço de medida o qual pode ser domínio de uma aplicação com contradomínio em outro espaço de medida. Estas funções são chamadas de aplicações mensuráveis que podem ser integradas. Desse modo, podemos trabalhar com o conceito de integral em espaço de medida abstratos diferentes daquele que estamos acostumados quando

estudamos esse conteúdo na disciplina da Cálculo Diferencial e Integral.

Assim, no Capítulo 2 iremos ver algumas definições e resultados preliminares que serão úteis no estudo de Teoria da Medida. Além disso, no Capítulo 3, iremos introduzir alguns conceitos e resultados em torno das σ -álgebras. A seguir, no Capítulo 4, iremos formalizar o conceito de medida e ver algumas de suas propriedades, bem como compreender o que é um espaço de medida ou um espaço mensurável. Tais estruturas serão úteis para a compreensão da definição de uma função mensurável que será apresentada no Capítulo 5 sendo necessário para o estudo da integração de funções não negativas do Capítulo 6.

Aliado a isso, no Capítulo 7, serão apresentados os modos de convergência da função mensurável e no Capítulo 8 iremos explicar a integração de funções complexas. Depois disso, no Capítulo 9 iremos definir uma medida para o produto de espaços mensuráveis e, por fim, no Capítulo 10 dar mostrar uma aplicação envolvendo os conceitos de Teoria da Medida na Teoria Ergódica de Sistemas Dinâmicos.

Capítulo 2

Conceitos preliminares

Neste capítulo, iremos rever alguns conceitos e resultados de Teoria de Conjuntos, de Espaços Métricos e de Topologia que serão utilizados para que possamos entender a Teoria da Medida. Para isso, foram utilizados as referências [6], [7], [9] e [11].

2.1 Teoria dos conjuntos

A grosso modo, um conjunto pode ser definido como uma família ou uma coleção de objetos. Dois exemplos disso é o conjunto vazio, que denotaremos por \emptyset , e o conjunto das partes de X , que denotaremos por $\mathcal{P}(X)$. Além disso, podemos definir a partir desses conjuntos algumas operações, como a união, a interseção e a diferença.

Sejam E e F conjuntos. Então,

Denotamos a **união** por $E \cup F$, e definimos:

$$E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Denotamos a **interseção** por $E \cap F$, e definimos:

$$E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ e } x \in F\}.$$

Denotamos a **diferença** por $E \setminus F$, e definimos:

$$E \setminus F = \{x \mid x \in E \text{ e } x \notin F\}.$$

A partir da operação da diferença, podemos ainda definir a **diferença simétrica**, que é denotada e dada por:

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Por fim, fixado um conjunto X e tomando E um subconjunto, denotamos e definimos **complementar de E em relação X** da seguinte forma:

$$E^c = X \setminus E.$$

A partir dessas operações definidas, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Seja $\{E_l\}_{l \in L}$ uma seqüência de subconjuntos de X . Então, são válidas as seguintes afirmações:*

$$(i) \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right)^c = \bigcap_{l \in L} E_l^c.$$

$$(ii) \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right)^c = \bigcup_{l \in L} E_l^c.$$

Demonstração. Seja $\{E_l\}_{l \in L}$ uma seqüência de subconjuntos de X . Então:

(i) Seja $x \in \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right)^c$. Assim,

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right)^c &\iff x \in X \setminus \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right) \\ &\iff x \in X \text{ e } x \notin \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right) \\ &\iff x \in X \text{ e } x \notin E_l, \forall l \in L \\ &\iff x \in X \setminus E_l, \forall l \in L \\ &\iff x \in E_l^c, \forall l \in L \\ &\iff x \in \bigcap_{l \in L} E_l^c. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right)^c = \bigcap_{l \in L} E_l^c.$$

(ii) Seja $x \in \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right)^c$. Assim,

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right)^c &\iff x \in X \setminus \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right) \\ &\iff x \in X \text{ e } x \notin \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right) \\ &\iff \exists l \in L \text{ tal que } x \in X \text{ e } x \notin E_l \\ &\iff \exists l \in L \text{ tal que } x \in X \setminus E_l \\ &\iff \exists l \in L \text{ tal que } x \in E_l^c \\ &\iff x \in \bigcup_{l \in L} E_l^c. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right)^c = \bigcup_{l \in L} E_l^c.$$

■

Proposição 2.2. *Sejam $\{E_l\}_{l \in L}$ uma sequência de subconjuntos de X e $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por:*

$$f^{-1}(E) = \{x \mid f(x) \in E\}.$$

Então, são válidas as seguintes afirmações:

$$(i) \quad f^{-1} \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right) = \bigcup_{l \in L} f^{-1}(E_l).$$

$$(ii) \quad f^{-1} \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right) = \bigcap_{l \in L} f^{-1}(E_l).$$

$$(iii) \quad f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c.$$

Demonstração. Sejam $\{E_l\}_{l \in L}$ uma sequência de subconjuntos de X . Assim,

$$(i) \quad \text{Seja } x \in f^{-1} \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right).$$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1} \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right) &\iff f(x) \in \bigcup_{l \in L} E_l \\ &\iff \exists l \in L \text{ tal que } f(x) \in E_l \\ &\iff \exists l \in L \text{ tal que } x \in f^{-1}(E_l) \\ &\iff x \in \bigcup_{l \in L} f^{-1}(E_l). \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } f^{-1} \left(\bigcup_{l \in L} E_l \right) = \bigcup_{l \in L} f^{-1}(E_l).$$

$$(ii) \quad \text{Seja } x \in f^{-1} \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right). \text{ Assim,}$$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1} \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right) &\iff f(x) \in \bigcap_{l \in L} E_l \\ &\iff f(x) \in E_l, \forall l \in L \\ &\iff x \in f^{-1}(E_l), \forall l \in L \\ &\iff x \in \bigcap_{l \in L} f^{-1}(E_l). \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } f^{-1} \left(\bigcap_{l \in L} E_l \right) = \bigcap_{l \in L} f^{-1}(E_l).$$

(iii) Seja $x \in f^{-1}(E_l^c)$. Assim,

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(E_l^c) &\iff f(x) \in E_l^c \\
 &\iff f(x) \in X \setminus E_l \\
 &\iff f(x) \in X \text{ e } f(x) \notin E_l \\
 &\iff x \in f^{-1}(X) \text{ e } x \notin f^{-1}(E_l) \\
 &\iff x \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(E_l) \\
 &\iff x \in (f^{-1}(E_l))^c.
 \end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E_l))^c$. ■

Definição 2.1. Seja X um conjunto. Dizemos que X é um **conjunto enumerável** se existir uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Proposição 2.3. *Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos enumeráveis e considere:*

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Então, S é enumerável.

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([11],1976), p. 29. ■

2.2 Espaços métricos

Definição 2.2. [Métrica] Uma **métrica** num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in M$:

(i) $d(x, y) \geq 0$, sendo que $d(x, y) = 0$, se $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.3. [Espaço métrico]. Um **espaço métrico** é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .

Exemplo 2.1. [O espaço euclidiano \mathbb{R}^n] Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, temos que \mathbb{R}^n com a métrica euclidiana d_1 é um espaço métrico, onde $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

De fato,

$$(i) \quad d_1(x, x) = \left[\sum_{k=1}^n (x_k - x_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0;$$

$$(ii) \quad x \neq y \implies d_1(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{\sqrt{x} > 0}{\implies} d_1(x, y) > 0;$$

$$(iii) \quad d_1(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = d_1(y, x);$$

(iv) Por fim, como $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado, então:

$$\begin{aligned} d_1(x, z) &= \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} \\ &= \sqrt{[(x_1 - z_1)(x_1 - z_1)] + \cdots + [(x_n - z_n)(x_n - z_n)]} \\ &= \sqrt{\langle x - z, x - z \rangle} \\ &= \|x - z\| \\ &= \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d_1(x, y) + d_1(y, z). \end{aligned}$$

Logo, (d_1, \mathbb{R}^n) é um espaço métrico.

Exemplo 2.2. [Produto cartesiano de espaços métricos]. Sejam $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ espaços métricos, cujas métricas são d_1, \dots, d_n , respectivamente, então para quaisquer $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$ segue que:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + \cdots + [d_n(x_n, y_n)]^2}, \\ d' &= d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n), \\ d'' &= \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}. \end{aligned}$$

são métricas do conjunto $M_1 \times \cdots \times M_n$.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in M_1 \times \cdots \times M_n$, como d_1, \dots, d_n são métricas, então:

$$(a) \quad (\text{Métrica Euclidiana}). \quad d(x, y) = \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + \cdots + [d_n(x_n, y_n)]^2}.$$

De fato,

$$(i) \quad d(x, x) = \sqrt{[d_1(x_1, x_1)]^2 + \cdots + [d_n(x_n, x_n)]^2} = 0;$$

$$(ii) \quad d(x, y) = \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + \cdots + [d_n(x_n, y_n)]^2} > 0;$$

(iii)

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + \cdots + [d_n(x_n, y_n)]^2} \\
&= \sqrt{[d_1(y_1, x_1)]^2 + \cdots + [d_n(y_n, x_n)]^2} \\
&= d(y, x).
\end{aligned}$$

(iv) Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([7], 2020), p. 7.

$$(b) \quad d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n) = \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k).$$

De fato,

$$(i) \quad d'(x, x) = \sum_{k=1}^n d_k(x_k, x_k) = 0;$$

$$(ii) \quad x \neq y \implies d'(x, y) = \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k) \stackrel{d_k(x_k, y_k) > 0}{\implies} d'(x, y) > 0;$$

$$(iii) \quad d'(x, y) = \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^n d_k(y_k, x_k) = d'(y, x);$$

(iv)

$$\begin{aligned}
d'(x, z) &= \sum_{k=1}^n d_k(x_k, z_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k) + d_k(y_k, z_k) \\
&= \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^n d_k(y_k, z_k) \\
&= d'(x, y) + d'(y, z).
\end{aligned}$$

$$(c) \quad d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

De fato,

$$(i) \quad d''(x, x) = \max\{d_1(x_1, x_1), \dots, d_n(x_n, x_n)\} = 0;$$

$$(ii) \quad \text{Se } x \neq y, \text{ então } d''(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}. \text{ Como } d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n) > 0, \text{ temos que } d''(x, y) > 0;$$

(iii)

$$\begin{aligned}
d''(x, y) &= \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\} \\
&= \max\{d_1(y_1, x_1), \dots, d_n(y_n, x_n)\} \\
&= d''(y, x);
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
d''(x, z) &= \max\{d_1(x_1, z_1), \dots, d_n(x_n, z_n)\} \\
&\leq \max\{d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1), \dots, d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)\} \\
&\leq \max\{d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n)\} \\
&\quad + \max\{d_1(y_1, z_1), \dots, d_n(y_n, z_n)\} \\
&= d''(x, y) + d''(y, z).
\end{aligned}$$

Logo, o produto cartesiano de espaços métricos é um espaço métrico. ■

Definição 2.4. [Conjunto aberto]. Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que M é um **conjunto aberto** se todo elemento de M é **ponto interior** de M , ou seja, para todo elemento $a \in M$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(a; \epsilon) \subset M$, onde $\mathcal{B}(a; \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, a) < \epsilon\}$. Além disso, chamamos $\mathcal{B}(a; \epsilon)$ de bola aberta de centro a e raio r .

Exemplo 2.3. Seja (M, d) um espaço métrico qualquer, temos que $\mathcal{B}((a, b); r)$ é aberto. De fato, seja $(x, y) \in \mathcal{B}((a, b); r)$ e tomemos $\epsilon = r - d((x, y), (a, b))$. Temos que $\epsilon > 0$. Além disso, seja $(u, v) \in \mathcal{B}((x, y); \epsilon)$, então:

$$\begin{aligned} d((u, v), (a, b)) &\leq d((u, v), (x, y)) + d((a, b), (x, y)) \\ &< \epsilon + d((a, b), (x, y)) \\ &= r - d((x, y), (a, b)) + d((a, b), (x, y)) \\ &= r. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{B}((x, y); \epsilon) \subset \mathcal{B}((a, b); r)$ e, portanto, $\mathcal{B}((a, b); r)$ é aberto.

Definição 2.5. [Conjunto fechado]. Dizemos que $Y \subset M$ é um **conjunto fechado** se todo elemento $y \in Y$ é aderente, ou seja, todo aberto A contendo y é tal que $A \cap Y \neq \emptyset$.

Exemplo 2.4. [Conjunto fechado]. O conjunto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado.

A partir das definições de conjuntos abertos e fechados, podemos considerar algumas propriedades relativas a uma família desses dois tipos de conjuntos.

Proposição 2.4. *Seja $\{E_l\}_{l \in L}$ uma sequência de subconjuntos abertos de um espaço métrico M , então são válidas as seguintes afirmações:*

(i) *O conjunto \emptyset e o espaço inteiro M são abertos.*

(ii) *Se $L = \{1, \dots, n\}$, então $\bigcap_{k=1}^n E_k$ é aberto.*

(iii) $\bigcup_{l \in L} E_l$ é aberto.

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([7], 2020), p. 67. ■

Corolário 2.1. *Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([7], 2020), p. 67. ■

Proposição 2.5. *Sejam M, N espaços métricos e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação. Temo que f é contínua se, e somente se, a pré-imagem de abertos de N por f é um conjunto aberto.*

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([7], 2020), p. 69. ■

Proposição 2.6. *Seja $\{E_l\}_{l \in L}$ uma sequência de subconjuntos fechados de um espaço métrico M . Então, são válidas as seguintes afirmações:*

(i) *O conjunto \emptyset e o espaço inteiro M são fechados.*

(ii) *Se $L = \{1, \dots, n\}$, então $\bigcup_{k=1}^n E_k$ é fechado.*

(iii) $\bigcap_{l \in L} E_l$ *é fechado.*

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([7], 2020), p. 76. ■

Definição 2.6. Dizemos que $X \subset M$ é **denso** M , se todo elemento $a \in M$ é aderente a X .

Exemplo 2.5. \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} .

Teorema 2.1. *Todo conjunto aberto de \mathbb{R} é uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos.*

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([5], 1976), p. 25. ■

Definição 2.7. Um espaço métrico (M, d) é **separável** se existe $X \subset M$ enumerável e denso em M .

Exemplo 2.6. Como \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , então \mathbb{R} , munido com qualquer uma das métricas do Exemplo 4.2 é um espaço métrico separável.

2.3 Topologia

Definição 2.8. Uma **topologia** num conjunto X é uma coleção \mathcal{T} de subconjuntos em X tendo as seguintes propriedades:

(i) \emptyset e X pertencem a \mathcal{T} .

(ii) A união de elementos de qualquer subcoleção de \mathcal{T} pertence a \mathcal{T} .

(iii) A interseção de elementos de qualquer subcoleção finita de \mathcal{T} pertence a \mathcal{T} .

Um conjunto X com uma topologia \mathcal{T} é chamado de **espaço topológico**.

Exemplo 2.7. [Topologia Trivial ou Topologia Indiscreta]. A coleção consistida somente de X e de \emptyset é uma topologia em X . De fato, se $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$, temos que:

- (i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
- (ii) Como $A_1 \cap A_2 = X$ ou $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, onde $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Então, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.
- (iii) Como $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \emptyset$ ou $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = X$, onde $A_\lambda \in \mathcal{T}$, então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

Logo, \mathcal{T} é uma topologia.

Definição 2.9. Se X é um conjunto, uma **base** para uma topologia em X é uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de X (chamado de **elementos básicos**) tal que:

- (i) Para cada $x \in X$, existe pelo menos um elemento básico B contendo x .
- (ii) Se x pertence à interseção de dois elementos básicos B_1 e B_2 , então existe um elemento básico B_3 contendo x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se \mathcal{B} satisfaz essas duas condições, então nós definimos a **topologia gerada por \mathcal{B}** .

Exemplo 2.8. Se X é um conjunto qualquer, a coleção \mathcal{A} de todos os subconjuntos unitários com um ponto de X é uma base para a topologia discreta de X cujos elementos são todos os subconjuntos de X .

Exemplo 2.9. Se \mathcal{B} é a coleção de todos os intervalos abertos da reta real,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

e \mathcal{B}' é a coleção de todos os semi-abertos à direita da reta real,

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

então \mathcal{B} e \mathcal{B}' são bases para as topologias \mathcal{T} e \mathcal{T}' de \mathbb{R} , onde \mathcal{T} é conhecida como a **topologia padrão de \mathbb{R}** e \mathcal{T}' é a topologia cujos elementos são intervalos semi-abertos à direita.

Resolução. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos tomar um $\epsilon > 0$ tal que $x \in B(x, \epsilon)$. Além disso, se $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$, então existe $x \in (a, b) \cap (c, d)$ e já que a interseção finita de conjuntos abertos é aberto, então existe (e, f) tal que $x \in (e, f) \subset (a, b) \cap (c, d)$. Logo, \mathcal{B} é uma base para a topologia \mathcal{T} de \mathbb{R} .

Do mesmo modo, para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos tomar um $\epsilon > 0$ tal que $x \in [x - \epsilon, x + \epsilon)$. Além disso, se $[a, b) \cap [c, d) \neq \emptyset$, temos que:

- a) Se $[a, b) \cap [c, d) \neq \emptyset$, então $x \in [a, (a + b)/2) \subset [a, b) \cap [c, d)$.

b) Supondo sem perda de generalidade que $[a, b) \subset [c, d)$, então $x \in [a, b) \subset [a, b) \cap [c, d)$.

c) Se não ocorrer nenhum dos casos acima, então:

(i) Se $a < c < b < d$, então $x \in [c, b) \subset [a, b) \cap [c, d)$.

(ii) Se $c < a < d < b$, então $x \in [a, d) \subset [a, b) \cap [c, d)$.

De todo modo, podemos observar que existe $[e, f) \subset [a, b) \cap [c, d)$ contendo x . Logo, \mathcal{B}' é uma base para a topologia \mathcal{T}' de \mathbb{R} .

Capítulo 3

Álgebras e σ -álgebras

Em Teoria dos Conjuntos, uma dada coleção pode ser mensurada a partir da quantidade de elementos que ela possui, esta propriedade é conhecida como cardinalidade. Rigorosamente, ela é definida a partir de uma função bijetora entre o conjunto dado e um outro conjunto, o qual já se sabe a quantidade de elementos que ele possui. Se for finito, é associado um valor real e não negativo, caso contrário, é dito que o conjunto é infinito. Essa atribuição de um valor a um conjunto constitui a ideia intuitiva de medida, que veremos mais à frente. E para compreendê-la é necessário estudar alguns conceitos e resultados obtidos a partir de álgebras e σ -álgebras. Assim, neste capítulo estudaremos tais conceitos tendo como referências [1], [4] e [6].

3.1 Conceitos e propriedades

Definição 3.1. [Álgebra]. Seja X um conjunto qualquer e considere $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Dizemos que \mathcal{M} é uma **álgebra** de subconjuntos de X se:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{M}$;
- (ii) Para todo $E \in \mathcal{M}$, temos que $E^c = (X \setminus E) \in \mathcal{M}$;
- (iii) Se $\{E_l\}_{l \in L}$ é um conjunto finito de elementos de \mathcal{M} , então $\bigcup_{l \in L} E_l \in \mathcal{M}$.

Definição 3.2. [σ -álgebra]. Seja X um conjunto qualquer e considere $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Dizemos que \mathcal{M} é uma **σ -álgebra** de subconjuntos de X se:

- (i) \mathcal{M} é uma álgebra de subconjuntos de X .
- (ii) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de \mathcal{M} , então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

Vejam agora alguns exemplos de σ -álgebras .

Exemplo 3.1. [σ -álgebras canônicas]. Dados um conjunto X , existem duas σ -álgebras de subconjuntos de X que são canônicas:

a) $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$, a menor σ -álgebra de X .

Resolução. De fato, temos que $\emptyset \in \mathcal{M}$. Ainda, como $\emptyset^c = X$ e $X^c = \emptyset$ são elementos de \mathcal{M} , então temos que o item (ii) da Definição 3.1 é satisfeito. Por fim, note que $X \cup \emptyset = X \in \mathcal{M}$. Logo, \mathcal{M} é uma σ -álgebra.

b) $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, a maior σ -álgebra de X .

Resolução. De fato, como \emptyset está contido em qualquer conjunto, em particular, ele está contido em X . Assim, $\emptyset \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{M}$. Ainda, para todo $E \in \mathcal{M}$, temos que $E^c = X \setminus E$ será um subconjunto de X e, portanto, $E^c \in \mathcal{M}$. Por fim, seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência enumerável de elementos de \mathcal{M} , então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ será um subconjunto de X e, portanto, temos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{P}(X)$.

Exemplo 3.2. $\mathcal{M} = \{\emptyset, \mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}\}$ é uma σ -álgebra de \mathbb{R} .

Resolução. De fato, $\emptyset \in \mathcal{M}$. Além disso,

$$\mathbb{R}^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}^c \quad \text{e} \quad (\mathbb{Q}^c)^c = \mathbb{Q},$$

são elementos de \mathcal{M} . Ainda, para toda sequência de elementos de \mathcal{M} , temos que a união será igual a $\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c$ ou \mathbb{R} . Logo, \mathcal{M} é uma σ -álgebra de \mathbb{R} .

Exemplo 3.3. O conjunto $\mathcal{M} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ou } A^c \text{ é enumerável}\}$ é uma σ -álgebra de \mathbb{R} .

Resolução. De fato, por definição \emptyset é um conjunto finito e portanto enumerável, assim $\emptyset \in \mathcal{M}$. Além disso, para todo $A \in \mathcal{M}$, temos que A ou A^c é um conjunto enumerável. Se A^c é um conjunto enumerável, então $A \in \mathcal{M}$. Porém, se A é um conjunto enumerável, então como $(A^c)^c = A$, então $A^c \in \mathcal{M}$.

Por fim, seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência enumerável de \mathcal{M} . Se E_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ também o é, logo $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$. Porém, se existir pelo menos um E_m que não é um conjunto enumerável, então temos que E_m^c é um conjunto enumerável. Como $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c \subset E_m^c$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

Logo, \mathcal{M} é uma σ -álgebra de \mathbb{R} .

Exemplo 3.4. O conjunto $\mathcal{M} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ é infinito ou vazio}\}$ não é uma σ -álgebra, pois apesar de $(\mathbb{N} \setminus \{1\}) \in \mathcal{M}$, temos que $(\mathbb{N} \setminus \{1\})^c = \{1\} \notin \mathcal{M}$.

Agora, iremos ver algumas propriedades das σ -álgebras.

Teorema 3.1. *Sejam \mathcal{M} uma σ -álgebra de subconjuntos de X e $E, F \in \mathcal{M}$. Então, valem as seguintes propriedades:*

- (i) $E \cup F \in \mathcal{M}$;
- (ii) $E \cap F \in \mathcal{M}$;
- (iii) $E \setminus F \in \mathcal{M}$;
- (iv) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em \mathcal{M} , então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

Demonstração. Sejam $E, F \in \mathcal{M}$, onde \mathcal{M} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X .

- (i) Como $E, F \in \mathcal{M}$ então, pelo item (ii) da Definição 3.2, segue que $E \cup F \in \mathcal{M}$.
- (ii) Pelo item (i) da Definição 3.2, temos que $E^c, F^c \in \mathcal{M}$. Sabendo-se disso, pelo que foi provado anteriormente, segue que $E^c \cup F^c \in \mathcal{M}$. Assim, $(E^c \cup F^c)^c = (E^c)^c \cap (F^c)^c = E \cap F \in \mathcal{M}$.
- (iii) Como $F^c \in \mathcal{M}$, então pelo que foi provado anteriormente temos que $E \setminus F = (X \setminus F) \cap E = F^c \cap E \in \mathcal{M}$.
- (iv) Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência enumerável em \mathcal{M} , então $E_n^c \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo item (ii) da Definição 3.2, temos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^c \in \mathcal{M}$, o que implica que $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^c\right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (E_n^c)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

■

3.2 σ -álgebras geradas

Uma dúvida natural que pode surgir é se é possível determinar uma σ -álgebra a partir de uma família de subconjuntos de X . Veremos a seguir que tal processo é possível e verificaremos como podemos proceder para determiná-la.

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{S} = (\mathcal{M}_l)_{l \in L}$ uma família não-vazia de σ -álgebras de subconjuntos de X . Então,*

$$\bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l = \{E \in \mathcal{M}_l, \text{ para todo } l \in L\},$$

a interseção de todas as σ -álgebras que pertencem a \mathcal{S} é uma σ -álgebra de X .

Demonstração. Seja $\mathcal{S} = (\mathcal{M}_l)_{l \in L}$ uma família não-vazia de σ -álgebras de subconjuntos de X .

Como $\emptyset \in \mathcal{M}_l$ para todo $l \in L$, então $\emptyset \in \bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$. Ainda, se $E \in \bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$, temos que $E \in \mathcal{M}_l$, para todo $l \in L$. Além disso, já que \mathcal{M}_l é uma σ -álgebra, então $E^c \in \mathcal{M}_l$, para todo $l \in L$. Assim, $E^c \in \bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$.

Por fim, seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência enumerável em $\bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$. Temos que $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será uma sequência enumerável em \mathcal{M}_l , para todo $l \in L$. Daí, como cada \mathcal{M}_l é uma σ -álgebra, segue que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_l$, para todo $l \in L$. Assim, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$.

Portanto, $\bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$ é uma σ -álgebra. ■

Corolário 3.1. *Seja \mathcal{A} uma família de subconjuntos de X . Existe $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ que é a menor σ -álgebra de subconjuntos de X incluindo \mathcal{A} , isto é, se \mathcal{M}' é uma σ -álgebra contendo \mathcal{A} , então $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}'$.*

Demonstração. Defina

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{M}_l \mid \mathcal{M}_l \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra de subconjuntos de } X \text{ e } \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_l, \text{ para todo } l \in L\}.$$

Pelo Exemplo 3.1, temos que $\mathcal{P}(X)$ é uma σ -álgebra. Ainda, já que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, então \mathcal{S} é uma família não-vazia de σ -álgebras. Assim, pelo Teorema 3.2, temos que $\bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$ é uma σ -álgebra que contém \mathcal{A} , sendo que $\bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l \subset \mathcal{M}'$, para todo $\mathcal{M}_l \in \mathcal{S}$.

Logo, $\bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$ é a menor σ -álgebra de subconjuntos de X incluindo \mathcal{A} , ou seja, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{l \in L} \mathcal{M}_l$. ■

Definição 3.3. Dizemos que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(X)$ é a σ -álgebra de subconjuntos de X gerada por $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se:

- (i) $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ é uma σ -álgebra.
- (ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.
- (iii) Se \mathcal{M}' é uma σ -álgebra com $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}'$, então $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}'$. Denotamos $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ por $\sigma(\mathcal{A})$.

Exemplo 3.5. Para qualquer conjunto X , a σ -álgebra gerada por \emptyset é $\{\emptyset, X\}$.

Resolução. De fato, pelo item (ii) da Definição 3.3 temos que $\emptyset \in \sigma(\mathcal{A})$. Ainda, pelo item (i), temos que $\emptyset^c = X \setminus \emptyset = X \in \sigma(\mathcal{A})$. Logo, $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, X\}$.

Exemplo 3.6. A σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{Q} gerada por $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Q}\}$ é $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Resolução. De fato, pelo item (ii) da Definição 3.3, temos que $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Logo, todo subconjunto unitário de número racional pertence a $\sigma(\mathcal{A})$. Ao mesmo tempo, pelo item (i) da mesma definição, temos que para todo $E \in \sigma(\mathcal{A})$ é necessário que $E^c \in \sigma(\mathcal{A})$. Logo, $\mathbb{Q} \setminus \{x\} \in \sigma(\mathcal{A})$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Como \mathbb{Q} é um conjunto infinito, então para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ distintos um do outro, temos pelo mesmo item que $(\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \cup (\mathbb{Q} \setminus \{y\}) = (\mathbb{Q} \setminus \{x, y\}) \in \sigma(\mathcal{A})$.

Assim, utilizando o item (i) sucessivas vezes, temos que:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{A}) &= \left\{ \{x\}_{x \in \mathbb{Q}}, \mathbb{Q} \setminus \{x\}_{x \in \mathbb{Q}}, \mathbb{Q} \setminus \{x, y\}_{x, y \in \mathbb{Q}}, (\mathbb{Q} \setminus \{x, y\}_{x, y \in \mathbb{Q}})^c, \dots, \emptyset, \mathbb{Q} \right\} \\ &= \mathcal{P}(\mathbb{Q}).\end{aligned}$$

Portanto, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Exemplo 3.7. Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A σ -álgebra de X gerada por $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ é:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, X, \emptyset\}.$$

Resolução. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, então:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{A}) &= \left\{ \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}^c, \{3, 4\}^c, (\{1, 2\} \cup \{3, 4\}), (\{1, 2\} \cup \{1, 2\}^c), \dots, X, \emptyset \right\} \\ &= \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, X, \emptyset\}.\end{aligned}$$

Portanto, $\sigma(\mathcal{A}) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, X, \emptyset\}$.

Por fim, iremos anunciar e demonstrar uma propriedade envolvendo σ -álgebras geradas que será utilizada para o nosso estudo em torno das σ -álgebras de Borel.

Proposição 3.1. *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, então:*

(i) *Se $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B})$, então $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.*

(ii) *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, então $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.*

Demonstração. De fato, sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, então:

(i) Se $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B})$, então pelo item (iii) da Definição 3.3, segue que segue que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.

(ii) Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, então como $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{B})$ temos que $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B})$ e pelo item anterior, segue que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.

■

3.3 σ -álgebra produto

Além disso, podemos definir a σ -álgebra de um produto cartesiano de uma coleção indexada de conjuntos não vazios.

Definição 3.4. Sejam $\{X_l\}_{l \in L}$ uma coleção indexada de conjuntos não vazios, $X = \prod_{l \in L} X_l$ e $\pi_l : X \rightarrow X_l$ a aplicação projeção. Se \mathcal{M}_l é a σ -álgebra em X_l para cada l , a **σ -álgebra produto** em X é a σ -álgebra gerada por:

$$\{\pi_l^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{M}_l, l \in L\}.$$

Podemos denotar essa σ -álgebra como $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$. Se L for um conjunto finito, então podemos

escrever $\bigotimes_1^n \mathcal{M}_j$, $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{M}_j$ ou $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$.

Proposição 3.2. Se L é enumerável, então $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$ é a σ -álgebra gerada por:

$$\mathcal{A} = \left\{ \prod_{n \in L} E_n \mid E_n \in \mathcal{M}_n \right\}.$$

Demonstração. Para mostrar que $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l \subset \sigma(\mathcal{A})$, basta mostrar que um elemento qualquer de $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$ é escrito na forma $\prod_{n \in L} E_n$, onde $E_n \in \mathcal{M}_n$. Para isso, devemos lembrar inicialmente que $\emptyset \in \mathcal{M}_n$, para todo $n \in L$, de acordo com a propriedade (i) da definição de σ -álgebra. Assim, pela mesma propriedade, temos que $\emptyset^c = X_n \in \mathcal{M}_n$, para todo $n \in L$. Logo, $\prod_{m \in L} E_m \in \mathcal{A}$, onde $E_m = X_n$, para $m \neq n$ e $n, m \in L$, e $E_m = \emptyset$, se $m = n$. Seja $E_n \in \mathcal{M}_n$ e consideremos $\pi_n^{-1}(E_n) = \prod_{m \in L} E_m$, onde $E_m = X_n$, para $m \neq n$ e $n, m \in L$ e $E_m = \emptyset$, se $m = n$. Portanto, $\pi_n^{-1}(E_n) \in \sigma(\mathcal{A})$, para todo $n \in L$. Logo, $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l \subset \sigma(\mathcal{A})$, pela Proposição 3.1.

Seja $\prod_{n \in L} E_n \in \mathcal{A}$. Notemos que $\prod_{n \in L} E_n = \bigcap_{n \in L} \pi_n^{-1}(E_n)$ e como $\pi_n^{-1}(E_n) \in \bigotimes_{n \in L} \mathcal{M}_n$, para todo $n \in L$ segue do Teorema 3.1 que $\bigcap_{n \in L} \pi_n^{-1}(E_n) \in \bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$. Pela Proposição 3.1 temos que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$.

Portanto, $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l = \sigma(\mathcal{A})$. ■

Proposição 3.3. Suponha que \mathcal{M}_n é gerada por \mathcal{A}_n , para todo $n \in L$. Então, $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$ é gerado por $\mathcal{F}_1 = \{\pi_n^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{A}_n, n \in L\}$. Se L é contável e $X_n \in \mathcal{A}_n$ para todo n , $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$ é gerado por $\mathcal{F}_2 = \left\{ \prod_{n \in L} E \mid E \in \mathcal{A}_n \right\}$.

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em duas partes.

(i) Se $E \in \mathcal{A}_n$, temos que $\pi_n^{-1}(E) \in \mathcal{F}_1 \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$, mas como $\mathcal{M}_n = \sigma(\mathcal{A}_n)$, para todo $n \in L$, então $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n$, assim $E \in \mathcal{M}_n$ e, por conseguinte, $\pi_n^{-1}(E) \in \bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$. Assim,

pela Proposição 3.1, segue que $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$.

Por outro lado, para cada $n \in L$, afirmamos que a coleção $\mathcal{M} = \{E \subset X_n \mid \pi_n^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F}_1)\}$ é uma σ -álgebra em X_n . De fato, para cada $n \in L$, $\emptyset \in \mathcal{M}$, por vacuidade. Notemos ainda que, para todo $E \in X_n$ tal que $\pi_n^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F}_1)$, temos que $\pi_n^{-1}(E)^c \in \sigma(\mathcal{F}_1)$, ou seja:

$$\begin{aligned} X \setminus \pi_n^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F}_1) &\implies \\ X \setminus \left\{ \prod_{i \in L} Y_i \in X \mid \pi_n \left(\prod_{i \in L} Y_i \right) = E \right\} \in \sigma(\mathcal{F}_1) &\implies \\ \left\{ \prod_{i \in L} Y_i \in X \mid \pi_n \left(\prod_{i \in L} Y_i \right) \neq E \right\} \in \sigma(\mathcal{F}_1) &\implies \\ \left\{ \prod_{i \in L} Y_i \in X \mid \pi_n \left(\prod_{i \in L} Y_i \right) = X_n \setminus E \right\} \in \sigma(\mathcal{F}_1) &\implies \\ \left\{ \prod_{i \in L} Y_i \in X \mid \pi_n \left(\prod_{i \in L} Y_i \right) = E^c \right\} \in \sigma(\mathcal{F}_1) &\implies \\ \pi_n^{-1}(E^c) \in \sigma(\mathcal{F}_1). & \end{aligned}$$

Assim, para todo $E \subset X_n$, temos que $E^c = (X_n \setminus E) \subset X_n$, e daí temos que $E^c \in \mathcal{M}$.

Seja $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência enumerável de \mathcal{M} , então $E_m \subset X_n$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\pi_n^{-1}(E_m) \in \sigma(\mathcal{F}_1)$, assim $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \subset X_n$.

$$\begin{aligned} \pi_n^{-1} \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \right) &= \left\{ \prod_{i \in L} Y_i \in X \mid \pi_n \left(\prod_{i \in L} Y_i \right) = E, E \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \right\} \implies \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \prod_{i \in L} Y_i \in X \mid \pi_n \left(\prod_{i \in L} Y_i \right) = E, E \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \right\} \implies \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \pi_n^{-1}(E_m) \in \sigma(\mathcal{F}_1), \end{aligned}$$

pois $\{\pi_n^{-1}(E_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência enumerável em $\sigma(\mathcal{F}_1)$. Portanto, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \in \mathcal{M}$.

Logo, \mathcal{M} é uma σ -álgebra de X_n , para cada $n \in L$. Ainda, se $E \in \mathcal{A}_n$, temos que $\pi_n^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F}_1)$, então $E \in \mathcal{M}$. Pela Proposição 3.1, segue que $\mathcal{A}_n \subset \sigma(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{M}$. Desse modo, temos que $\pi_n^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F}_1)$ para todo $E \in \mathcal{M}_n$ e $n \in L$, o que implica que $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$.

(ii) Fazendo uma demonstração análoga da Proposição 3.2, seja $E \in \mathcal{A}_n$ e consideremos $\pi_n^{-1}(E) = \prod_{m \in L} E_m$, onde $E_m = X_n$, para $m \neq n$ tal que $m, n \in L$ e $E_m = \emptyset$, se $m = n$.

Assim, $\pi_n^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F}_2)$ e, pela Proposição 3.1, segue que $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$. Por outro

lado, seja $\prod_{m \in L} E_m \in \mathcal{F}_2$, notemos que $\prod_{m \in L} E_m = \bigcap_{m \in L} \pi_m^{-1}(E_m)$ e pela, Proposição 3.1, segue que $\sigma(\mathcal{F}_2) \subset \bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l$.

Portanto, $\bigotimes_{l \in L} \mathcal{M}_l = \sigma(\mathcal{F}_2)$.

■

3.4 σ -álgebra de Borel

Uma coleção particular de σ -álgebras que serão utilizadas em nosso estudo daqui para frente são as σ -álgebras de Borel.

Definição 3.5. Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico. A σ -álgebra gerada pela topologia \mathcal{T} de X é conhecida como **σ -álgebra de Borel** e é denotada como \mathfrak{B}_X . Seus elementos são os **conjuntos de Borel** ou **conjuntos borelianos** de X .

Proposição 3.4. A σ -álgebra $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ é gerada por cada uma das seguintes famílias:

(i) Os intervalos abertos: $\mathcal{A}_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$;

(ii) Os intervalos fechadas: $\mathcal{A}_2 = \{[a, b] \mid a < b\}$;

(iii) Os intervalos semi-abertos: $\mathcal{A}_3 = \{(a, b] \mid a < b\}$ ou $\mathcal{A}_4 = \{[a, b) \mid a < b\}$;

(iv) Os intervalos semi-ilimitados abertos: $\mathcal{A}_5 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ou $\mathcal{A}_6 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$;

(v) Os intervalos semi-ilimitados fechados: $\mathcal{A}_7 = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ou $\mathcal{A}_8 = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração. De fato, \mathcal{A}_1 é uma base para a topologia padrão \mathcal{T} de \mathbb{R} e, portanto, $\mathcal{A}_1 \subset \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Logo, pela Proposição 3.1, segue que $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Por outro lado, pelo Teorema 2.1, todo conjunto aberto de \mathbb{R} pode ser escrito pela união enumerável de intervalos abertos, então para todo $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, temos que $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$. Daí, pela Proposição 3.1, temos que $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{A}_1)$. Assim, temos que $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A}_1)$.

Além disso, notemos que:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right), & [a, b) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, b \right), \\ (a, b] &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b + \frac{1}{n} \right), & (a, \infty) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, n), \\ (-\infty, a) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, a), \\ [a, \infty) &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [a, k] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, k \right) \right), \\ (-\infty, a] &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (-k, a] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-k, a + \frac{1}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 3.1, segue que $\sigma(\mathcal{A}_i) \subset \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, para todo $i \in \{1, \dots, 8\}$.

Ainda,

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right], \quad (a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{1}{n} \right], \quad (a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b \right).$$

Portanto, pela Proposição 3.1, segue que $\sigma(\mathcal{A}_i) \subset \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, para todo $i = 2, 3, 4$.

Além disso, note que se $a < b$, então $(b - 1/n, \infty) \subset (a, \infty)$ e $(-\infty, a + 1/n) \subset (-\infty, b)$. Como a diferença entre dois elementos de uma σ -álgebra é ainda um de seus elementos, então:

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(a, \infty) \setminus \left(b - \frac{1}{n}, \infty \right) \right] \quad \text{e} \quad (a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(-\infty, b) \setminus \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right) \right].$$

Portanto, pela Proposição 3.1, segue que $\sigma(\mathcal{A}_i) \subset \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, para todo $i = 5, 6$.

Por fim, se $a < b$, então $[b - 1/n, \infty) \subset [a + 1/n, \infty)$ e $(-\infty, a + 1/n] \subset (-\infty, b - 1/n]$. Como a diferença entre dois elementos de uma σ -álgebra e a união enumerável destes elementos é ainda assim um de seus elementos, então:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\left[a + \frac{1}{n}, \infty \right) \setminus \left[b - \frac{1}{n}, \infty \right) \right], \\ (a, b) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{1}{n} \right] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\left(-\infty, b - \frac{1}{n} \right] \setminus \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 3.1, segue que $\sigma(\mathcal{A}_i) \subset \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, para todo $i = 7, 8$.

Logo, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A}_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, 8\}$. ■

Proposição 3.5. *Sejam X_1, \dots, X_n espaços métricos e $X = \prod_{j=1}^n X_j$ munido com a métrica*

do produto. Então, $\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{X_j} \subset \mathfrak{B}_X$. Se X_j é separável para todo j , então $\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{X_j} = \mathfrak{B}_X$.

Demonstração. Pela Proposição 3.3, temos que $\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{X_j}$ é gerado por $\mathcal{F} = \{\pi_j^{-1}(U_j) \mid$

$U_j \text{ é aberto em } X_j, 1 \leq j \leq n\}$. Assim, pela Proposição 3.1, temos que $\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{X_j} \subset \mathfrak{B}_X$.

Agora, se X_j é um espaço métrico separável para todo j , então existe um conjunto enumerável denso em X_j que chamaremos de C_j . Seja A_j uma coleção de bolas em X_j com raio de comprimento racional e centro em $c \in C_j$. Então, todo conjunto aberto em X_j é uma união enumerável de elementos de A_j . Ademais, o conjunto de pontos em X cuja j -ésima coordenada está em C_j , para todo j , é um subconjunto enumerável e denso de X , e as bolas de raio $r \in X$ são apenas produtos das bolas de raio r em X_j , para todo j . Assim, segue que \mathfrak{B}_{X_j} é gerado por A_j e \mathfrak{B}_X é gerado por $\left\{ \prod_{j=1}^n E_j \mid E_j \in A_j \right\}$.

Portanto, $\mathfrak{B}_X = \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{X_j}$ pela Proposição 3.3. ■

Corolário 3.2. $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_1^n \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

Demonstração. Como \mathbb{Q} é um conjunto enumerável denso em \mathbb{R} , então pela Proposição 3.5 segue que $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_1^n \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. ■

Exemplo 3.8. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. São borelianos em \mathbb{R}^2 :

a) $\Omega = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1]\}$ (diagonal de um quadrado de lado 1).

Resolução. De fato, sabemos que $\sigma([0, 1] \times [0, 1])$ é uma σ -álgebra de Borel, tendo em vista que $\sigma([0, 1])$ é uma σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} . A partir disso, se conseguirmos mostrar que o complementar de Ω em relação a $[0, 1] \times [0, 1]$ é um elemento de $\sigma([0, 1] \times [0, 1])$, então teremos que Ω será um conjunto boreliano em \mathbb{R}^2 .

Assim, sejam $x, y \in [0, 1]$ arbitrários tal que $x \neq y$ e suponha sem perda de generalidade que $x < y$. Ainda, considere a métrica d induzida da reta \mathbb{R} em $[0, 1]$. Então, os intervalos $X = [0, d(x, y)/2)$ e $Y = [d(x, y)/2, y]$, são disjuntos e contêm x e y , respectivamente. Vimos pela Proposição 3.4 que intervalos da reta são conjuntos borelianos. Logo, $X, Y \in \sigma([0, 1])$ e, portanto, $X \times Y \in \sigma([0, 1] \times [0, 1])$. Como isso ocorre para quaisquer $x, y \in [0, 1]$ tal que $x \neq y$, segue que $\Omega \in \sigma([0, 1] \times [0, 1])$, ou seja, Ω é um conjunto de Borel em \mathbb{R}^2 .

b) $\Omega_f = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ (gráfico da função).

Resolução. Seguindo a mesma ideia do item anterior, iremos mostrar que $\Omega_f^c \in \sigma(B)$, onde B é uma base para uma topologia de \mathbb{R}^2 . Assim, note que:

$$\Omega_f^c = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq f(t)\}.$$

Como \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , então existe um conjunto enumerável de intervalos abertos em \mathbb{R} , permitindo tomar uma base enumerável $B = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ para a topologia de \mathbb{R}^2 . Assim, seja $(t, y) \in \Omega_f^c$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(t) \in B_k$, mas $y \notin B_k$. Como cada elemento de B é um conjunto de Borel, então $B_k^c \in \sigma(B)$, onde $y \in B_k^c$. Ainda, como f é contínua, temos que $f^{-1}(B_k) \in \sigma(B)$. Assim, para todo $(t, y) \in \Omega_f^c$, temos que $(t, y) \in f^{-1}(B_k) \times B_k^c$, por conseguinte:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_f = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_k) \times B_k^c \in \sigma(B).$$

Portanto, $\Omega_f \in \sigma(B)$, ou seja, Ω_f é um conjunto de Borel.

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (disco unitário).

Resolução. Consideremos a métrica euclidiana d de \mathbb{R}^2 . Assim, seja:

$$B_d((0, 0); 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 0)) < 1\}.$$

Temos que $B_d((0, 0); 1) \subset B_d((a, b); r)$, que é um elemento da Topologia padrão de \mathbb{R}^2 . Logo, D é um conjunto boreliano.

Definição 3.6. Uma coleção de subconjuntos de X \mathcal{E} é uma **família elementar** tal que:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{E}$;
- (ii) Se $E, F \in \mathcal{E}$, então $E \cap F \in \mathcal{E}$;
- (iii) Se $E \in \mathcal{E}$, então E^c é uma união finita disjunta de elementos de \mathcal{E} .

Proposição 3.6. Se \mathcal{E} é uma família elementar, a coleção \mathcal{A} da união disjunta finita de elementos de \mathcal{E} é uma σ -álgebra.

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([6], 1999), p. 24. ■

Definição 3.7. Seja $\overline{\mathbb{R}}$ a reta estendida do sistema numérico. Nós definimos os conjuntos de Borel em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ por:

$$\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} \mid E \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}.$$

Proposição 3.7. $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ é gerado pelas famílias:

$$\mathcal{A}_1 = \{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{ou} \quad \mathcal{A}_2 = \{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstração. Como $\sigma((a, \infty)) = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ e $\sigma((-\infty, a)) = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, para todo $E \in \sigma((a, \infty))$ e $F \in \sigma((-\infty, a))$, temos que $E \cap \mathbb{R} = E$ e $F \cap \mathbb{R} = F$. Logo, $E \cap \mathbb{R}, F \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

Portanto, $E, F \in \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Como $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ é a menor σ -álgebra que contém $(a, \infty]$ e $[-\infty, a)$, então $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Logo, $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ e $\sigma(\mathcal{A}_2) \subset \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Por outro lado, podemos notar que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Além disso,

$$\{-\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [-\infty, k) \quad \text{e} \quad \{\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} (-k, \infty],$$

Logo, seja $B \in \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, temos que $B = C$, ou $B = C \cup \{\infty\}$ ou $B = C \cup \{-\infty\}$, onde $C \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Em qualquer um dos casos, temos que $B \in \sigma(\mathcal{A}_1)$ e $B \in \sigma(\mathcal{A}_2)$. Portanto, $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ e $\sigma(\mathcal{A}_2) = \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. ■

Definição 3.8. [σ -álgebra por restrição]. Dados σ -álgebra \mathcal{M} em X e $A \subset X$ qualquer (não necessariamente $A \in \mathcal{M}$), definimos a σ -álgebra $\mathcal{M} \cap A = \{E \cap A \subset X \mid E \in \mathcal{M}\}$, chamada σ -álgebra de **A por restrição**.

Teorema 3.3. [σ -álgebra com funções]. Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função, $A \subset X$, \mathcal{M}_X σ -álgebra em X e \mathcal{M}_Y em Y . Prove que:

- (i) $\mathcal{M}_{f,X} = \{f^{-1}(F) \subset X \mid F \in \mathcal{M}_Y\}$ é uma σ -álgebra em X .
- (ii) $\mathcal{M}_{f,Y} = \{F \subset Y \mid f^{-1}(F) \in \mathcal{M}_X\}$ é uma σ -álgebra em Y .

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em duas partes:

- (i) Por vacuidade, temos que $\emptyset \in \mathcal{M}_{f,X}$.

Ademais, seja $F \in \mathcal{M}_Y$ tal que $f^{-1}(F) \subset X$, como \mathcal{M}_Y é uma σ -álgebra, então $F^c \in \mathcal{M}_Y$. Ainda,

$$[f^{-1}(F)]^c = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(F^c) \subset X.$$

Logo, $f^{-1}(F^c) \in \mathcal{M}_{f,X}$.

Por fim, seja $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência enumerável em \mathcal{M}_Y , assim $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{M}_Y$. Ainda, seja $\{f^{-1}(F_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência enumerável em $\mathcal{M}_{f,X}$, tal que $f^{-1}(F_n) \subset X$, para todo n , então:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(F_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) \subset X.$$

Logo, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(F_n) \in \mathcal{M}_{f,X}$.

- (ii) Por vacuidade, temos que $\emptyset \in \mathcal{M}_{f,Y}$.

Além disso, seja $F \subset Y$ tal que $f^{-1}(F) \in \mathcal{M}_X$. Como \mathcal{M}_X é uma σ -álgebra, então $[f^{-1}(F)]^c = X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(F^c) \in \mathcal{M}_X$. Ainda, já que $F^c = Y \setminus F \subset Y$, então $F^c \in \mathcal{M}_{f,Y}$.

Por fim, seja $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência enumerável em Y tal que $f^{-1}(F_n) \in \mathcal{M}_X$, para todo n . Então, como \mathcal{M}_X é uma σ -álgebra, segue que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(F_n) = f^{-1} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \in \mathcal{M}_X.$$

Ainda, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset Y$, portanto, segue que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{M}_{f,Y}$.

■

Capítulo 4

Espaços de medida

A partir de agora, iremos estudar o conceito de medida e de espaço de medida. Intuitivamente, uma medida pode ser vista como uma forma de atribuir um valor (não necessariamente numérico) aos elementos de uma σ -álgebra. Lidamos com esse tipo de problema quando buscamos determinar a cardinalidade de um conjunto, tendo em vista que ele pode conter finitos ou infinitos elementos. Assim, já adiantamos ao leitor que iremos utilizar um pequeno abuso de linguagem, considerando que uma medida pode ser igual a qualquer elemento de $[0, \infty]$. Por fim, é válido destacar que para este capítulo foram utilizadas as referências [4], [6] e [8].

4.1 Medida

Definiremos primeiro algumas propriedades operatórias envolvendo ∞ .

Definição 4.1. São válidas as seguintes propriedades operatórias:

- a) Adição: $\infty + \infty = \infty + a = a + \infty = \infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- b) Subtração: $\infty - a = \infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$; mas $\infty - \infty$ não está definido.
- c) Multiplicação: $\infty \cdot \infty = a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, para todo $a > 0$. E é convenicionado que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.
- d) Somatórios enumeráveis. Seja $x_n \in [0, \infty]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e considere $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, então:
 - (i) Se todos os x_n são finitos, trata-se de uma série de termos não negativos: ou converge para um número real ou é ilimitada (converge para ∞).
 - (ii) Se um dos x_n 's é igual a ∞ , então $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \infty$.

e) Somatórios não enumeráveis. Dado $(x_l)_{l \in L}$ com $x_l \in [0, \infty]$, definimos:

$$\sum_{l \in L} x_l = \sup \left\{ \sum_{m \in M} x_m \mid M \subset L \right\}.$$

Se $L = \emptyset$, então definimos $\sum_{l \in L} x_l = 0$.

Definição 4.2. Dizemos que a sequência $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é **disjunta** se $E_m \cap E_n = \emptyset$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$ distintos.

De forma análoga, se $\{E_l\}_{l \in L}$ é uma família de conjuntos indexada por um conjunto arbitrário L , então ele é **disjunto** se $E_i \cap E_j = \emptyset$, para todos $i, j \in L$ distintos.

Definição 4.3. [Medida]. Seja X um conjunto munido de uma σ -álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Uma **medida** em \mathcal{M} é uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta de \mathcal{M} , então $\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Um caso particular disto ocorre quando temos uma sequência finita de elementos disjuntos de \mathcal{M} . Neste caso, basta considerarmos os n elementos e tomarmos $E_j = \emptyset$, para todo $j > n$. Permitindo, assim, definir o seguinte caso:

(ii)' Se E_1, \dots, E_n são elementos disjuntos de \mathcal{M} , então $\mu \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$.

A propriedade (ii) é chamada de σ -aditividade.

Vejamos, agora, alguns exemplos de medidas.

Exemplo 4.1. Dado $a \in X$, a medida pontual μ_{I_a} gerada pela função indicadora I_a é conhecida como **medida delta de Dirac**, denotada por δ_a , de modo que

$$\delta_a(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \notin Y, \\ 1, & \text{se } a \in Y. \end{cases}$$

Resolução. De fato, como $a \notin \emptyset$, então $\delta_a(\emptyset) = 0$. Agora, seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência disjunta de \mathcal{M} , assim se existir pelo menos um $m \in \mathbb{N}$ tal que $a \in E_m$, então $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e, por conseguinte:

$$\delta_a \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(E_i).$$

Caso contrário, teremos que $a \notin E_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo,

$$\delta_a \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(E_i).$$

Portanto, δ_a é uma medida.

Exemplo 4.2. Considere a σ -álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ em \mathbb{R} . Temos que:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ é vazio.} \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resolução. De fato, temos que $\mu(\emptyset) = 0$. Além disso, se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência disjunta de \mathcal{M} , temos que se existe $E_m \neq \emptyset$, então $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, mas se $E_n = \emptyset$ para todo n , então $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. Portanto, μ é uma medida de \mathbb{R} .

Definição 4.4. [Espaço de medida]. Sejam X um conjunto e $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Chamamos de **espaço de medida** a tripla (X, \mathcal{M}, μ) , onde todo elemento de \mathcal{M} é chamado de **conjuntos mensuráveis**.

Definição 4.5. Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida.

- (i) Se $\mu(X) < \infty$, então E é chamado de σ -finito por μ , e $\mu(E) < \infty$, para todo $E \in \mathcal{M}$, visto que $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c)$.
- (ii) Para cada $E \in \mathcal{M}$ com $\mu(E) = \infty$, se existe $F \in \mathcal{M}$ com $F \subset E$ e $0 < \mu(F) < \infty$, então μ é chamado de **semi-finita**.
- (iii) Se $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, onde $E_i \in \mathcal{M}$ e $\mu(E_i) < \infty$, para todo i , então μ é chamado de **σ -finita**. Mais genericamente, seja $E \in \mathcal{M}$ tal que $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, onde $E_i \in \mathcal{M}$ e $\mu(E_i) < \infty$, para todo i , então o conjunto E é chamado **σ -finito** para μ .

Proposição 4.1. *Toda medida σ -finita é semi-finita.*

Demonstração. Sejam X um conjunto e \mathcal{M} uma σ -álgebra de subconjuntos de X , tais que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, onde $E_i \in \mathcal{M}$ e $\mu(E_i) < \infty$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = \infty$, como μ é σ -finita, então existem $E_k \in \mathcal{M}$, tais que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, onde $\mu(E_k) < \infty$, para todo k . Note que, caso tenha algum E_k igual ao conjunto vazio, então basta desconsiderarmos ele. Assim, teremos que $0 < \mu(E_k) < \infty$. Por fim, sabendo-se que $E_k \subset E$, então segue que μ é semi-finita. ■

Definição 4.6. Sejam X um conjunto e $f : X \rightarrow [0, \infty]$ uma função qualquer. Dado $E \subset X$, defina:

$$\mu_f(E) = \sum_{x \in E} f(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in D} f(x) \mid D \subset E \text{ é finito} \right\}.$$

Então μ_f é uma medida em $\mathcal{P}(X)$. Dizemos que é uma **medida pontual**.

Teorema 4.1. [Propriedades elementares de medida]. Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida.

(i) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \cap F = \emptyset$, então $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

(ii) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(iii) $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ para todo $E, F \in \mathcal{M}$.

(iv) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em \mathcal{M} , então $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

(v) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em \mathcal{M} (isto é, $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), então:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

(vi) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente em \mathcal{M} (isto é, $E_{n+1} \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$), e se algum $\mu(E_n)$ é finito, então:

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Demonstração. Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida.

(i) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \cap F = \emptyset$, então:

$$\begin{aligned} \mu(E \cup F) &= \mu((E \setminus F) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus E)) \\ &= \mu(E \setminus F) + \mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E) \\ &= [\mu(E \setminus F) + \mu(E \cap F)] + \mu(F \setminus E) \\ &= \mu(E) + \mu(F \setminus E) + [\mu(E \cap F) - \mu(F \cap E)] \\ &= \mu(E) + [\mu(F \setminus E) + \mu(E \cap F)] - \mu(F \cap E) \\ &= \mu(E) + \mu(F) - \mu(F \cap E). \end{aligned}$$

Como $E \cap F = \emptyset$, então $\mu(E \cap F) = 0$. Logo, $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

(ii) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $E \subset F$, então:

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E).$$

Logo, $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(iii) De fato, temos que:

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F) \leq \mu(E) + \mu(F).$$

Logo, $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$.

(iv) Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em \mathcal{M} . Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ for uma seqüência disjunta, temos por definição de medida que:

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n).$$

Porém, se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não for uma seqüência disjunta, então existem pelo menos $m', n' \in \mathbb{N}$ tais que $E_{m'} \cap E_{n'} \neq \emptyset$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) &= \mu \left(\left[\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq m', n'}} E_n \right] \cup [E_{m'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})] \cup [E_{m'} \cap E_{n'}] \right. \\ &\quad \left. \cup [E_{n'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})] \right) \end{aligned}$$

e como a união acima é composta por elementos de uma seqüência disjunta, então segue que:

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) &= \mu \left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq m', n'}} E_n \right) + \mu(E_{m'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})) + \mu(E_{m'} \cap E_{n'}) \\ &\quad + \mu(E_{n'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})), \\ &\leq \mu \left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq m', n'}} E_n \right) + \mu(E_{m'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})) + 2\mu(E_{m'} \cap E_{n'}) + \mu(E_{n'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})) \\ &= \mu \left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq m', n'}} E_n \right) + [\mu(E_{m'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})) + \mu(E_{m'} \cap E_{n'})] \\ &\quad + [\mu(E_{n'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})) + \mu(E_{m'} \cap E_{n'})] \\ &= \mu \left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq m', n'}} E_n \right) + [\mu((E_{m'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})) \cup (E_{m'} \cap E_{n'}))] \\ &\quad + [\mu((E_{n'} \setminus (E_{m'} \cap E_{n'})) \cup (E_{m'} \cap E_{n'}))] \\ &= \mu \left(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq m', n'}} E_n \right) + [\mu(E_{m'})] + [\mu(E_{n'})] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

Agora, supondo que para k elementos não disjuntos da sequência $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tenhamos:

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} E_n,$$

assim, para $k+1$ elementos não disjuntos da sequência, suponha que E_i seja um dos elementos não disjuntos, implicando que:

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) &= \mu \left(\left[\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq k+1}} E_n \right] \cup E_i \right) \\ &= \mu \left(\left[\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq i}} E_n \setminus \left(E_i \cap \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq i}} E_n \right) \right] \cup E_i \right). \end{aligned}$$

Assim, a união acima possui agora k elementos não disjuntos. Pela hipótese de indução, temos que:

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Logo,

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} E_n.$$

(v) Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente em \mathcal{M} e defina a sequência $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$F_0 = E_0 \quad \text{e} \quad F_n = E_n \setminus E_{n-1}.$$

De fato, temos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Ainda, já que $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em \mathcal{M} , temos pela definição de medida que:

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(F_n).$$

Agora, vamos mostrar indutivamente que $\mu(E_n) = \sum_{m=0}^n \mu(F_m)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, $\mu(E_0) = \mu(F_0)$.

Supondo que $\mu(E_k) = \sum_{m=0}^k \mu(F_m)$, temos que:

$$\begin{aligned} \mu(E_{k+1}) &= \mu(E_k \cup (E_{k+1} \setminus E_k)) \\ &= \mu(E_k) + \mu(E_{k+1} \setminus E_k) \\ &= \sum_{m=0}^k \mu(F_m) + \mu(F_{k+1}) \\ &= \sum_{m=0}^{k+1} \mu(F_m). \end{aligned}$$

Logo, $\mu(E_n) = \sum_{m=0}^n \mu(F_m)$.

Assim, segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \mu(F_m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(F_m).$$

Como $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$.

Portanto, $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$.

(vi) Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente em \mathcal{M} e suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $\mu(E_k) < \infty$. Defina $F_n = E_k \setminus E_{k+n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e chame $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. De fato, como $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente, então $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em \mathcal{M} e, pelo item anterior, segue que $\mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n)$. Ainda, podemos lembrar que:

$$\mu(E_k) = \mu(F_n \cup E_{k+n}) = \mu(F_n) + \mu(E_{k+n}),$$

e já que $\mu(E_k) < \infty$, então $\mu(F_n) = \mu(E_k) - \mu(E_{k+n})$, ou seja,

$$\mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(E_k) - \mu(E_{k+n})) = \mu(E_k) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_{k+n}) = \mu(E_k) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

Além disso, como $F \subset E_k$, então $\mu(F) + \mu(E_k \setminus F) = \mu(E_k)$ e pelo fato de $\mu(E_k) < \infty$, segue que $\mu(F) = \mu(E_k) - \mu(E_k \setminus F)$. Portanto, segue que $\mu(E_k \setminus F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$.

Por fim, note que $E_k \setminus F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Logo,

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu(E_k) - \mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

Ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n), \text{ pois } \{\mu(E_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é decrescente.}$$

Portanto, $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$

■

Definição 4.7. Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Um conjunto $A \subset X$ possui **medida nula** se existe um conjunto $E \in \mathcal{M}$ tal que $A \subset E$ e $\mu(E) = 0$.

Definição 4.8. Uma medida $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ é completa se dado $E \in \mathcal{M}$, onde $\mu(E) = 0$, então $\mu(F) = 0$, para todo $F \subset E$.

Definição 4.9. Espaços de medida em que todos os conjuntos de medida nula são mensuráveis são chamados de **completos**.

Lema 4.1. *Seja \mathcal{N} a família dos conjuntos de medida nula de um espaço de medida (X, \mathcal{M}, μ) . Então:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{N}$;

(ii) Se $A \subset B \in \mathcal{N}$, então $A \in \mathcal{N}$;

(iii) Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em \mathcal{N} , então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.

Demonstração. Seja \mathcal{N} a família de conjuntos de medida nula de um espaço de medida (X, \mathcal{M}, μ) .

(i) De fato, $\emptyset \subset X$, $\emptyset \subset \emptyset$ e $\mu(\emptyset) = 0$. Logo, $\emptyset \in \mathcal{N}$.

(ii) Como $B \in \mathcal{N}$, então existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset E$ e $\mu(E) = 0$. Como $A \subset B$, temos que $A \subset E$, onde $\mu(E) = 0$. Logo, $A \in \mathcal{N}$.

(iii) Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em \mathcal{N} , então existe uma sequência $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ disjunta em \mathcal{M} tal que $A_n \subset E_n$ e $\mu(E_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$, pela definição de σ -álgebra. Por fim, pela definição de medida, temos que:

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Portanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.

■

Lema 4.2. *Dado um espaço de medida (X, \mathcal{M}, μ) , existe um espaço de medida completo $(X, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mu})$ tal que $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ e $\mu = \tilde{\mu}$ em \mathcal{M} .*

Demonstração. Seja \mathcal{N} a família de conjuntos de medida nula de (X, \mathcal{M}, μ) . Considere $\tilde{\mathcal{M}} = \{E \cup Z \in \mathcal{P}(X) \mid E \in \mathcal{M}, Z \in \mathcal{N}\}$. Para cada $Y \in \tilde{\mathcal{M}}$, $Y = E \cup Z$, defina $\tilde{\mu}(Y) = \mu(E)$. Pelo Lema 4.1, temos que $\emptyset \in \mathcal{N}$, logo $E \cup \emptyset = E \in \tilde{\mathcal{M}}$, para todo $E \in \mathcal{M}$. Logo, $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Além disso, seja $Y \in \mathcal{M}$, temos que $Y = Y \cup \emptyset$, logo $\tilde{\mu}(Y) = \mu(Y)$, ou seja, $\mu = \tilde{\mu}$ em \mathcal{M} .

■

4.2 Medida exterior

Um dos questionamentos que podem ser feitos é se podemos construir medidas a partir de uma certa σ -álgebra. Veremos à frente que é possível sim fazer este processo, mas teremos que utilizar a medida exterior. Assim, nesta subseção iremos defini-la e estudar algumas de suas propriedades. Em especial, iremos enunciar e demonstrar o Teorema de Carathéodory, que é um dos principais resultados de Teoria da Medida.

Definição 4.10. Seja X um conjunto não vazio. Uma **medida exterior** é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ que satisfaz:

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, para todo $A \subset B$;
- (iii) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Definição 4.11. Seja μ^* uma medida exterior em X . Um conjunto $E \subset X$ é chamado de μ^* -**mensurável** se:

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap E) + \mu^*(M \cap E^c), \quad \forall M \subset X.$$

Note que se $\mu^*(M) = \infty$, então de fato a igualdade acima é satisfeita. Porém, se $\mu^*(M) < \infty$, então como μ^* é uma medida exterior, vale que:

$$\mu^*(M) = \mu^*\left((M \cap E) \cup (M \cap E^c)\right) \leq \mu^*(M \cap E) + \mu^*(M \cap E^c).$$

Logo, para que a igualdade seja satisfeita, basta mostrar que $\mu^*(M) \geq \mu^*(M \cap E) + \mu^*(M \cap E^c)$, para $\mu^*(M) < \infty$.

Veremos, agora, como podemos construir uma medida exterior por meio de uma aplicação $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, através do seguinte resultado:

Proposição 4.2. Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$ e $\mu(\emptyset) = 0$. Para algum $M \subset X$, defina:

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathcal{A} \text{ e } M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}.$$

Então, μ^* é uma medida exterior.

Demonstração. Esta demonstração teve como Referência ([8], 2022), p. 25.

Em primeiro lugar, iremos verificar que μ^* está bem definida. Note inicialmente que, para qualquer $M \subset X$, podemos tomar $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Como $X \in \mathcal{A}$, então basta tomarmos $E_i = X$, para todo i . Assim,

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \mid E_i \in \mathcal{A} \text{ e } M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\} \neq \emptyset,$$

e limitado inferiormente, pois $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \geq 0$. Logo, existe o ínfimo deste conjunto.

Agora, iremos verificar se esta aplicação é de fato uma medida exterior. Como $\emptyset \in \mathcal{A}$, então podemos tomar uma sequência $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de modo que $E_i = \emptyset$, para todo i . Logo, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Além disso, sejam $M, N \subset X$ tais que $M \subset N$, então para toda sequência $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $M \subset N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ implica que:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \mid E_i \in \mathcal{A} \text{ e } N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \mid E_i \in \mathcal{A} \text{ e } M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}.$$

Logo, pela propriedade de ínfimo de um conjunto, segue que $\mu^*(M) \leq \mu^*(N)$.

Por fim, sejam $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\epsilon > 0$. Para cada i , existe $\{E_i^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $M_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j$. Pela caracterização de ínfimo, temos que para cada i , vale que:

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i^j) \mid E_i^j \in \mathcal{A} \text{ e } M_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j \right\} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i^j) \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i^j) \mid E_i^j \in \mathcal{A} \text{ e } M_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j \right\} + \frac{\epsilon}{2^i}. \end{aligned}$$

Seja $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Temos que $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j$ e:

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i^j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\mu^*(M_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_i) + \epsilon \end{aligned}$$

e como ϵ é arbitrário, podemos tomá-lo tão pequeno quanto se queira. Assim, segue que:

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_i).$$

Portanto, μ^* é uma medida exterior. ■

Teorema 4.2. [Teorema de Carathéodory]. Se μ^* é uma medida exterior em X , a coleção \mathcal{M} de conjuntos μ^* -mensuráveis é uma σ -álgebra, e a restrição de μ^* em \mathcal{M} é uma medida completa.

Demonstração. Mostraremos que \mathcal{M} é uma σ -álgebra.

(i) De fato, como $\mu^*(\emptyset) = 0$, então:

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap \emptyset) + \mu^*(M \cap \emptyset^c) = \mu^*(M \cap \emptyset) + \mu^*(M \cap X) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(M).$$

Logo, $\emptyset \in \mathcal{M}$.

(ii) Além disso, para todo $E \in \mathcal{M}$, temos que, para todo $M \subset X$, vale:

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &= \mu^*(M \cap E) + \mu^*(M \cap E^c) = \mu^*(M \cap (E^c)^c) + \mu^*(M \cap E^c) \\ &= \mu^*(M \cap E^c) + \mu^*(M \cap (E^c)^c). \end{aligned}$$

Portanto, $E^c \in \mathcal{M}$.

(iii) Sejam $E, F \in \mathcal{M}$. Como esses conjuntos são μ^* -mensuráveis, temos que para todo $M \subset X$, $M \cap E$, $M \cap E^c \subset X$, assim segue que:

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &= \mu^*(M \cap E) + \mu^*(M \cap E^c) \\ &= \mu^*([M \cap E] \cap F) + \mu^*([M \cap E] \cap F^c) + \mu^*([M \cap E^c] \cap F) \\ &\quad + \mu^*([M \cap E^c] \cap F^c). \end{aligned}$$

Note ainda que:

$$\begin{aligned} E \cup F &= (E \setminus F) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus E) \\ &= (E \cap F^c) \cup (E \cap F) \cup (F \cap E^c). \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} \mu^*(M \cap [E \cup F]) &= \mu^*(M \cap [(E \cap F^c) \cup (E \cap F) \cup (F \cap E^c)]) \\ &= \mu^*((M \cap E \cap F^c) \cup (M \cap E \cap F) \cup (M \cap F \cap E^c)) \\ &\leq \mu^*(M \cap E \cap F^c) + \mu^*(M \cap E \cap F) + \mu^*(M \cap F \cap E^c). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &\geq \mu^*(M \cap (E \cup F)) + \mu^*(M \cap E^c \cap F^c) \\ &= \mu^*(M \cap (E \cup F)) + \mu^*(M \cap (E \cup F)^c). \end{aligned}$$

Logo, $E \cup F \in \mathcal{M}$.

Assim, se $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma sequência finita de elementos de \mathcal{M} , temos que $E_i \cup E_j \in \mathcal{M}$.

Agora, suponha que $\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \in \mathcal{M}$, como $E_n \in \mathcal{M}$, então segue que $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M}$.

Portanto, \mathcal{M} é uma σ -álgebra aditiva.

(iv) Sejam $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos disjuntos em \mathcal{M} e considere $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$

e $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Então, para qualquer $M \subset X$,

$$\begin{aligned} \mu^*(M \cup F_n) &= \mu^*((M \cup F_n) \cap E_n) + \mu^*((M \cup F_n) \cap M^c) \\ &= \mu^*(M \cap E_n) + \mu^*(M \cap F_{n-1}). \end{aligned}$$

Mostraremos, agora, que $\mu^*(M \cap F_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(M \cap E_i)$.

De fato, se $i = 1$, então $\mu^*(M \cap F_n) = \mu^*(M \cap E_1)$. Agora, suponha que para $i = k$, vale que:

$$\mu^*(M \cap F_k) = \sum_{i=1}^k \mu^*(M \cap E_i),$$

assim, para $i = k + 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \mu^*(M \cap F_{k+1}) &= \mu^*(M \cap E_{k+1}) + \mu^*(M \cap F_k) \\ &= \mu^*(M \cap E_{k+1}) + \sum_{i=1}^k \mu^*(M \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \mu^*(M \cap E_i). \end{aligned}$$

Logo, $\mu^*(M \cap F_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(M \cap E_i)$. Com isso,

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap F_n) + \mu^*(M \cap F_n^c) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(M \cap E_i) + \mu^*(M \cap F_n^c),$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$, nós obtemos:

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M \cap E_i) + \mu^*(M \cap F_n^c) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (M \cap E_i)\right) + \mu^*(M \cap F_n^c) \\ &= \mu^*(M \cap F) + \mu^*(M \cap F_n^c) \geq \mu^*(M). \end{aligned}$$

Todas as inequações neste último cálculo são igualdades. Segue que $F \in \mathcal{M}$ e tomando $M = F$, temos que $\mu^*(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(F)$ é uma aditividade contável em \mathcal{M} .

(v) Finalmente, se $\mu^*(E) = 0$, para $M \subset X$, temos:

$$\mu^*(M) \leq \mu^*(M \cap E) + \mu^*(M \cap E^c) = \mu^*(M \cap E^c) \leq \mu^*(M),$$

então, $E \in \mathcal{M}$. Portanto, $\mu^* \mid \mathcal{M}$ é uma medida completa.

■

Definição 4.12. Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma álgebra, uma função $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ é chamada de **pré-medida** se:

(i) $\mu_0(\emptyset) = 0$.

(ii) Se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em \mathcal{A} tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, então

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i).$$

Em particular, uma pré-medida é finitamente aditiva, pois pode-se tomar $E_i = \emptyset$, para todo $i > k$. As noções de pré-medidas finitas e σ -finitas são definidas exatamente como para medidas. Se μ_0 é uma pré-medida em $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, ela induz uma medida exterior em X de acordo com Proposição 4.2, chamando

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(E_i) \mid E_i \in \mathcal{A}, M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}. \quad (4.1)$$

Proposição 4.3. Se μ_0 é uma pré-medida em \mathcal{A} e μ^* é definido como (4.1), então:

(i) $\mu^* \upharpoonright \mathcal{A} = \mu_0$;

(ii) Todo conjunto A é μ^* -mensurável.

Demonstração. (i) Seja $E \in \mathcal{A}$ e tome $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, onde $A_i \in \mathcal{A}$.

Colocando, $A_0 = \emptyset$ e $B_n = E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right)$, temos que $B_i \neq B_j$, para $i \neq j$,

$B_i \in \mathcal{A}$, para todo $i = 1, \dots, n$ e $\bigcup_{i=1}^n B_i = E$. Logo, como $B_i \subset A_i$, então:

$$\mu_0(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i).$$

Como $\mu^*(E)$ é o ínfimo do somatório das pré-medidas aplicada em cada A_i , então $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$.

Por outro lado, tomando $A_1 = E$ e $A_i = \emptyset$, para todo $i \neq 1$, temos que:

$$\mu^*(E) \leq \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu_0(E).$$

Logo, $\mu^* \upharpoonright \mathcal{A} = \mu_0$.

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$, $E \subset X$ e dado $\epsilon > 0$, existe uma seqüência $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ com $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$

e $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. Como μ_0 é σ -aditiva em \mathcal{A} , então:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \epsilon &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0((B_j \cap A) \cup (B_j \cap A^c)) \\ &= \mu_0((B_j \cap A)) + \mu_0(\cup(B_j \cap A^c)) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, então $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, ou seja, $A \in \mathcal{A}$ é μ^* -mensurável. ■

Teorema 4.3. *Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra, μ_0 uma pré-medida de \mathcal{A} , e \mathcal{M} a σ -álgebra gerada por \mathcal{A} . Existe uma medida μ em \mathcal{M} que restrita a \mathcal{A} é μ_0 . Se ρ é outra medida em \mathcal{M} que estende μ_0 , então $\rho(E) \leq \mu(E)$, para todo $E \in \mathcal{M}$, com a igualdade valendo quando $\mu(E) < \infty$.*

Se μ_0 é σ -finito, então μ é uma extensão única de μ_0 para uma medida em \mathcal{M} .

Demonstração. A demonstração deste Teorema encontra-se na referência ([6],1999), p. 31. ■

4.3 Medida de Lebesgue

Veremos, agora, como é construído a medida de Lebesgue em \mathbb{R} .

Definição 4.13. [Medida exterior de Lebesgue]. Dado um intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ defina $|I| = b - a$, onde $a < b$ e $|\emptyset| = 0$. Definimos a **medida exterior de Lebesgue** de $M \subset \mathbb{R}$ por:

$$\mu^*(M) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |I_j| \mid \{I_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ é uma seqüência de intervalos abertos com } M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

Proposição 4.4. *Seja μ^* dada pela Definição 4.13.*

a) μ^* é uma medida exterior em \mathbb{R} .

b) μ^* é uma extensão de comprimento de intervalo, isto é, $\mu^*(I) = |I|$ para todo intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. a) Iremos demonstrar primeiro que μ^* é uma medida exterior em \mathbb{R} .

(i) De fato, tomando uma seqüência $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $I_j = \emptyset$, para todo j , temos que $\emptyset \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, assim $\mu^*(\emptyset) = \sum_{j=0}^{\infty} |\emptyset| = 0$.

(ii) Para todo $M \subset N \subset \mathbb{R}$, temos que para toda seqüência de intervalos abertos $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tais que $N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, temos que $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Assim:

$$\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |I_j| \mid N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \subset \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |I_j| \mid M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}.$$

Daí,

$$\inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |I_j| \mid M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |I_j| \mid N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\},$$

e assim, $\mu^*(M) \leq \mu^*(N)$.

(iii) Sejam $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Para cada j , temos que para toda seqüência de intervalos abertos $\{I_j^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $M_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_j^k$ vale pela caracterização de ínfimo que:

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \mid M_j \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_j^k \right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \mid M_j \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_j^k \right\} + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Seja $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Temos que $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_j^k$ e

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\mu^*(M) + \frac{\epsilon}{2^j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j) + \epsilon, \end{aligned}$$

e como ϵ é arbitrário, podemos tomá-lo tão pequeno quando se queira. Assim, segue que:

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(M_j).$$

Portanto, μ^* é uma medida exterior.

b) De fato, para todo $I \subset \mathbb{R}$ aberto e para toda seqüência de intervalos abertos $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, temos que $|I| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |I_j|$. Agora, suponha que $\mu^*(I) \neq |I|$ e considere

$\epsilon > 0$ tal que $\mu^*(I) = |I| + \epsilon$. Tome $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, onde para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $I_k = I$ e para $j \neq k$, temos que $|I_j| = (\epsilon/2)/2^j$. Assim, temos que:

$$|I| < \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = |I_k| + \sum_{\substack{j \neq k \\ j \in \mathbb{N}}} |I_j| = |I| + \sum_{\substack{j \neq k \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{\epsilon}{2^j} \leq |I| + \frac{\epsilon}{2} < |I| + \epsilon.$$

Portanto, necessariamente, $\mu^*(I) = |I|$. ■

Proposição 4.5. *Sejam μ^* a medida exterior dada pela Definição 4.13 e*

$$\mathcal{L} = \left\{ E \subset \mathbb{R} \mid \mu^*(M) = \mu^*(M \cap E) + \mu^*(M \cap E^c), \forall M \subset \mathbb{R} \right\}.$$

Temos que $\mu^ \mid \mathcal{L}$ é uma medida, conhecida como **Medida de Lebesgue**, que denotaremos por m . Além disso, elementos de \mathcal{L} são conhecidos como **classe de conjuntos Lebesgue mensuráveis**.*

Demonstração. Como μ^* é uma medida exterior em \mathbb{R} , temos que a coleção \mathcal{L} é uma σ -álgebra e a restrição $\mu^* \mid \mathcal{L}$ é uma medida de acordo com o Teorema 4.2. ■

Definição 4.14. [Medida de Lebesgue nula]. Dizemos que $M \subset \mathbb{R}$ tem **medida de Lebesgue nula** se para todo $\epsilon > 0$, existe uma sequência $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que:

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon,$$

sendo $|I| = b - a$ se $I = (a, b)$.

Veremos, por fim, que a medida de lebesgue é invariante por translações e homotetias. Para isso, iremos precisar do seguinte lema:

Lema 4.3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $B \subset \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, então $f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, onde $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ é gerado pela topologia padrão de \mathbb{R} .*

Demonstração. Para demonstrarmos este resultado, precisaremos considerar um conjunto de modo que satisfaça a propriedade acima e seja uma σ -álgebra que contém $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Assim, considere o conjunto:

$$A = \{E \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(E) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}.$$

Mostraremos que A é uma σ -álgebra em \mathbb{R} .

(i) De fato, $\emptyset \in A$, pois $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

(ii) Se $E \in A$, temos que $f^{-1}(E) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ e como $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ é uma σ -álgebra, então $[f^{-1}(E)]^c = f^{-1}(E^c) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Portanto, $E^c \in A$.

(iii) Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência enumerável de A . Como $E_n \in A$, para todo n , então $f^{-1}(E_n) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, para todo n . Assim, como $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ é uma σ -álgebra, vale que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(E_n) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \implies f^{-1} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.$$

Portanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in A$.

Assim, A é uma σ -álgebra de \mathbb{R} . Em particular, seja $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, como B é aberto, então $f^{-1}(B)$ também será e, por conseguinte, $f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Logo, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subset A$ e daí, segue que se $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, então $f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. ■

Lema 4.4. *Todo elemento Lebesgue mensurável de \mathbb{R} é uma união de um conjunto de Borel com um conjunto de medida de Lebesgue nula.*

Demonstração. A demonstração deste Lema encontra-se na referência ([3], 1998), p. 122. ■

Teorema 4.4. *Se $E \in \mathcal{L}$, então $E + s$ e $r \cdot E$ pertencem a \mathcal{L} , para todo $r, s \in \mathbb{R}$, e $m(E + s) = m(E)$ e $m(r \cdot E) = |r| \cdot m(E)$.*

Demonstração. Sejam $E \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$, tais que $\lambda \neq 0$ e considere as aplicações $f(x) = x - a$ e $g(x) = x/\lambda$. Como f e g são aplicações contínuas, então pelo Lema 4.3, temos que $E + a = \{x + a \mid x \in E\} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ e $\lambda \cdot E = \{\lambda \cdot x \mid x \in E\} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Logo, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ é invariante por translação e por homotetias.

Ainda, para $E \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, defina:

$$m_s(E) = m(E + s) \quad \text{e} \quad m^r(E) = m(r \cdot E),$$

assim, pelo que vimos anteriormente, temos que:

$$m_s((a, b]) = m((a + s, b + s]) = m((a, b]),$$

$$m^r((a, b]) = \begin{cases} m((ra, rb]) = |r| \cdot m((a, b]), & \text{se } r \geq 0, \\ m((rb, ra]) = |r| \cdot m((a, b]), & \text{se } r < 0. \end{cases}$$

Portanto, $m_s = m$ e $m^r = |r| \cdot m$ em \mathcal{A} , onde \mathcal{A} é a σ -álgebra das reuniões finitas e disjuntas de intervalos. Como m, m_s e m^r são pré-medidas aditivas, então pelo Teorema 4.3, temos que cada uma destas aplicações admite uma única extensão em $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Logo, $m_s = m$ e $m^r = |r| \cdot m$ em $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

Além disso, seja $E \in \mathcal{L}$ tal que $m(E) = 0$. Então, pelo Lema 4.4 existe $N \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $m(N) = 0$ e $E \subset N$, pois m é uma medida completa. Assim,

$$m(E + s) \leq m(N + s) = 0 \quad \text{e} \quad m(r \cdot E) \leq m(r \cdot N) = 0.$$

Portanto, os conjuntos de Lebesgue de medida nula são invariantes por translações e homotetias. Desse modo, pelo Lema 4.4, temos que todo elemento de \mathcal{L} é invariante por translações e homotetias. Além disso, temos que, para todo $r, s \in \mathbb{R}$, $m(E + s) = m(E)$ e $m(r \cdot E) = |r| \cdot m(E)$. ■

Capítulo 5

Funções mensuráveis

Como estudamos o conceito e propriedades de medida vendo, inclusive, alguns exemplos, passaremos a estudar as aplicações mensuráveis, que são funções com domínio e contradomínio em espaços mensuráveis, de modo que a imagem inversa aplicada sobre qualquer elemento da σ -álgebra do contradomínio é um elemento da σ -álgebra do domínio. Tais aplicações serão úteis para a definição do conceito de integração em qualquer espaço de medida, cuja ideia intuitiva é semelhante ao que é visto na disciplina Cálculo Diferencial Integral, que utiliza funções localmente constantes. Assim, para este capítulo foi utilizado a referência [6].

5.1 Conceito e propriedades

Definição 5.1. Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) espaços mensuráveis. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável se $f^{-1}(F) \in \mathcal{M}$, para todo $F \in \mathcal{N}$.

Exemplo 5.1. Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) espaços mensuráveis tais que $\mathcal{N} = \{\emptyset, Y\}$, então f é uma aplicação mensurável.

Resolução. De fato, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{M}$, por vacuidade. Além disso, $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{M}$. Logo, f é uma aplicação mensurável.

Definição 5.2. Se (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) são espaços mensuráveis, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamado de $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável, ou somente **mensurável**, quando \mathcal{M} e \mathcal{N} são compreendidos, se $f^{-1}(F) \in \mathcal{M}$, para todo $F \in \mathcal{N}$.

É importante observarmos que uma função mensurável preserva uniões, interseções e complementações. Isso decorre pelo fato de que como $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$, então pela Proposição 2.2 temos que tais propriedades ocorrem.

Proposição 5.1. Se $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável e $g : Y \rightarrow Z$ é $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ -mensurável, então $g \circ f$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ -mensurável.

Demonstração. Seja \mathcal{O} uma σ -álgebra em Z . Como g é $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ -mensurável, então para todo $G \in \mathcal{O}$, temos que $g^{-1}(G) \in \mathcal{N}$. Além disso, como \mathcal{N} é uma σ -álgebra em Y e f é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável, então $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G) \in \mathcal{M}$, para todo $G \in \mathcal{O}$. Portanto, $g \circ f$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ -mensurável. ■

5.2 Tipos de funções mensuráveis

Nesta seção passaremos a estudar alguns tipos de funções mensuráveis.

Proposição 5.2. *Se \mathcal{N} é gerado por \mathcal{B} , então $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável se e, somente se, $f^{-1}(H) \in \mathcal{M}$, para todo $H \in \mathcal{B}$.*

Demonstração. Seja \mathcal{N} gerado por \mathcal{B} . Como $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável, então para todo $F \in \mathcal{N}$, temos que $f^{-1}(F) \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{B})$, então, em particular, temos que $f^{-1}(H) \in \mathcal{M}$, para todo $H \in \mathcal{B}$.

Por outro lado, suponhamos que $f^{-1}(H) \in \mathcal{M}$, para todo $H \in \mathcal{B}$. Além disso, considere o seguinte conjunto $\mathcal{O} = \{F \subset Y \mid f^{-1}(F) \in \mathcal{M}\}$. Iremos mostrar que \mathcal{O} é uma σ -álgebra.

(i) De fato, $\emptyset \subset Y$. Além disso, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{M}$.

(ii) Se $I \in \mathcal{O}$, então $I \subset Y$ tal que $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$. Como \mathcal{M} é uma σ -álgebra, então $(f^{-1}(I))^c \in \mathcal{M}$. Ainda, já que $I^c \subset Y$ e $(f^{-1}(I))^c = f^{-1}(I^c)$, pela Proposição 2.2, então $I^c \in \mathcal{O}$.

(iii) Seja $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}$, então $I_k \subset Y$ e $f^{-1}(I_k) \in \mathcal{M}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como \mathcal{M} é uma σ -álgebra, então $f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \in \mathcal{M}$. Ademais, já que $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset Y$ e como $f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(I_k)$, pela Proposição 2.2, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \in \mathcal{O}$.

Logo, \mathcal{O} é uma σ -álgebra. Assim, pela hipótese, temos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$. Como $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{B})$ é a menor σ -álgebra que contém \mathcal{B} , então $\mathcal{N} \subset \mathcal{O}$.

Portanto, f é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável. ■

Corolário 5.1. *Se X e Y são espaços métricos (ou topológicos), toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathfrak{B}_X, \mathfrak{B}_Y)$ -mensurável.*

Demonstração. Sejam \mathcal{T}_X e \mathcal{T}_Y as topologias padrões dos espaços X e Y , respectivamente. Como f é uma aplicação contínua, então para todo $V \in \mathcal{T}_Y$, temos que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Além disso, já que $\mathfrak{B}_X = \sigma(\mathcal{T}_X)$ e $\mathfrak{B}_Y = \sigma(\mathcal{T}_Y)$, então para todo $V \in \mathcal{T}_Y \subset \mathfrak{B}_Y$, temos que $f^{-1}(V) \in \mathfrak{B}_X$. Portanto, pela Proposição 5.2, segue que f é $(\mathfrak{B}_X, \mathfrak{B}_Y)$ -mensurável. ■

Definição 5.3. Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Uma função complexa ou real f em X é chamada de função \mathcal{M} -mensurável, se $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ ou $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C}})$ são mensuráveis. Em particular, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é **Lebesgue** (resp. **Borel**) mensurável se $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C}})$ (resp. $(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C}})$) mensurável.

Proposição 5.3. Se (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é \mathcal{M} -mensurável.

(ii) $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(iv) $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(v) $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pela Proposição 3.4, como $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ é gerado pelas famílias:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{(a, b) \mid a < b\}, & \mathcal{A}_2 &= \{[a, b] \mid a < b\}, & \mathcal{A}_3 &= \{(a, b] \mid a < b\}, \\ \mathcal{A}_4 &= \{[a, b) \mid a < b\}, & \mathcal{A}_5 &= \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{A}_6 &= \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{A}_7 &= \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{A}_8 &= \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Então, f é \mathcal{M} -mensurável se, e somente se,

$$f^{-1}(a, \infty), f^{-1}([a, \infty)), f^{-1}((-\infty, a)), f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M},$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. ■

Definição 5.4. Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço de medida, f uma função em X e $E \in \mathcal{M}$. Dizemos que f é **mensurável em E** se $f^{-1}(B) \cap E \in \mathcal{M}$, para todo conjunto de Borel B . Equivalentemente, $f|_E$ é \mathcal{M}_E -mensurável, onde $\mathcal{M}_E = \{F \cap E \mid F \in \mathcal{M}\}$.

Definição 5.5. Dado um conjunto X , se $\{(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ é uma família de espaços mensuráveis, e $f : X \rightarrow Y_\alpha$ é uma aplicação para cada $\alpha \in A$, existe uma menor σ -álgebra em X com respeito a qual as f_α 's são todas mensuráveis, chamada, a σ -álgebra gerada pelo conjunto $f_\alpha^{-1}(E)$, com $E \in \mathcal{N}_\alpha$ e $\alpha \in A$. Essa é a σ -álgebra gerada por:

$$\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}.$$

Exemplo 5.2. Se $X = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, a σ -álgebra do produto X é a σ -álgebra gerada pelas funções coordenadas $\pi_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$.

Proposição 5.4. Sejam (X, \mathcal{M}) e $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$ espaços mensuráveis, $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, $\mathcal{N} = \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{N}_\alpha$ e $\pi_\alpha : Y \rightarrow Y_\alpha$ a aplicação coordenada. Então, $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável se, e somente se, $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$ -mensurável, para todo α .

Demonstração. Suponhamos que $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável, então como π_α é $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_\alpha)$ -mensurável, para todo α , então pela Proposição 5.1 segue que $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$ -mensurável, para todo α .

Por outro lado, se $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ é $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$ -mensurável, para todo α , temos que $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) \in \mathcal{M}$, para todo $E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$. Como π_α é $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_\alpha)$ -mensurável, para todo α , então $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \mathcal{N}$, para todo $E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$. Por fim, observemos que com a variação de α , os conjuntos $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ gerarão \mathcal{N} , ou seja, $\mathcal{N} = \sigma(\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \mid E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha \text{ e } \alpha \in A\})$. Portanto, $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) \in \mathcal{M}$, ou seja, f é $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -mensurável. ■

Corolário 5.2. *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é \mathcal{M} -mensurável se, e somente se, $\text{Re}f$ e $\text{Im}f$ são mensuráveis.*

Demonstração. Como $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, então $\mathfrak{B}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Além disso, já que f é uma função complexa, então podemos reescrever $f = \text{Re}f + i \text{Im}f = (\text{Re}f, \text{Im}f)$. Agora, sejam $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\pi_1((\text{Re}f, \text{Im}f)) = \text{Re}f$ e $\pi_2((\text{Re}f, \text{Im}f)) = \text{Im}f$. Temos que $\pi_1 \circ f = \text{Re}f$ e $\pi_2 \circ f = \text{Im}f$. Assim, pela Proposição 5.4, temos que f é $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C}})$ -mensurável se, e somente se, $\pi_1 \circ f$ e $\pi_2 \circ f$ forem $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ -mensuráveis. ■

Definição 5.6. Dizemos que $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é (\mathcal{M}) -mensurável de $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ -mensurável.

Proposição 5.5. *Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ são \mathcal{M} -mensuráveis, então $f + g$ e $f \cdot g$ também são.*

Demonstração. Definimos:

$$\begin{aligned} F : X &\rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C} & F(x) &= (f(x), g(x)), \\ \phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & \phi(z, w) &= z + w, \\ \psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & \psi(z, w) &= z \cdot w. \end{aligned}$$

Como \mathbb{C} é separável, então $\mathfrak{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} = \mathfrak{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$. Ainda, já que f e g são mensuráveis, então F é $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}})$ -mensurável. Além disso, como ϕ e ψ são aplicações contínuas e $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ e \mathbb{C} são espaços métricos, então ϕ e ψ são $(\mathfrak{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C}})$ -mensuráveis. Logo,

$$(\phi \circ F)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\psi \circ F)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

são $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}_{\mathbb{C}})$ -mensuráveis. ■

Proposição 5.6. *Se $\{f_j\}$ é uma seqüência de funções $\overline{\mathbb{R}}$ -valores mensuráveis em (X, \mathcal{M}) , então as funções:*

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sup_j f_j(x), & g_2(x) &= \inf_j f_j(x), \\ g_3(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j(x), & g_4(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \inf f_j(x), \end{aligned}$$

são todas mensuráveis. Se $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ existe para todo $x \in X$, então f é mensurável.

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}_1 = \{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Pela Proposição 3.7, temos que $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A}_1)$ e $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A}_2)$. Assim, dado $(a, \infty] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, temos que:

$$\begin{aligned} g_1^{-1}((a, \infty]) &= \{x \in X \mid g_1(x) > a\}, \\ g_2^{-1}([-\infty, a)) &= \{x \in X \mid g_2(x) < a\}. \end{aligned}$$

Sejam $x_1 \in g_1^{-1}((a, \infty])$ e $x_2 \in g_2^{-1}([-\infty, a))$, assim:

$$\begin{aligned} x_1 \in g_1^{-1}((a, \infty]) &\iff g_1(x_1) > a \\ &\iff \sup_j f_j(x_1) > a \\ &\iff \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_{j_0}(x_1) > a \\ &\iff x_1 \in f_{j_0}^{-1}((a, \infty]) \\ &\iff x_1 \in \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}((a, \infty]), \end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned} x_2 \in g_2^{-1}([-\infty, a)) &\iff g_2(x_2) < a \\ &\iff \inf_j f_j(x_2) < a \\ &\iff \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_{j_0}(x_2) < a \\ &\iff x_2 \in f_{j_0}^{-1}([-\infty, a)) \\ &\iff x_2 \in \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([-\infty, a)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_1^{-1}((a, \infty]) &= \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}, \\ g_2^{-1}([-\infty, a)) &= \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Como f_j é \mathcal{M} -mensurável, para todo j , então g_1^{-1} e g_2^{-1} também são. Portanto, g_1 e g_2 são mensuráveis.

Além disso, por definição, temos que:

$$\begin{aligned} g_3(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j(x) = \inf_k \left(\sup_{j > k} f_j(x) \right), \\ g_4(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \inf f_j(x) = \sup_k \left(\inf_{j > k} f_j(x) \right). \end{aligned}$$

Se $h_k(x) = \sup_{j > k} f_j(x)$, então $h_k(x)$ é \mathcal{M} -mensurável, para todo $k \geq 1$. Assim, $g_3 = \inf_k h_k$ é \mathcal{M} -mensurável. Do mesmo modo, se $h_k(x) = \inf_{j > k} f_j(x)$, então $h_k(x)$ é \mathcal{M} -mensurável, para todo $k \geq 1$. Assim, $g_4 = \sup_k h_k$ é \mathcal{M} -mensurável.

Em particular, se existir $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$, então:

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf f_j(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x).$$

Portanto, f é \mathcal{M} -mensurável. ■

Corolário 5.3. *Se $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são mensuráveis, então existem $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$.*

Demonstração. Sejam $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis e $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, para todo $x \in X$. Então, como $f(x), g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, para todo $x \in X$, temos que $h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$. Definimos, $f = f_1$, $g = f_2$ e $f_n = -\infty$, para todo $n \geq 3$. Assim, $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $h = \sup\{f, g\} = \sup_n \{f_n\}$ é mensurável.

Do mesmo modo, seja $h'(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, para todo $x \in X$. Então, como $f(x), g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, para todo $x \in X$, temos que $h'(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$, para todo $x \in X$. Definimos, $f = f_1$, $g = f_2$ e $f_n = \infty$, para todo $n \geq 3$. Assim, $\{g_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $h' = \inf\{f, g\} = \inf_n \{g_n\}$ é mensurável. ■

Corolário 5.4. *Se $\{f_j\}$ é uma sequência de funções mensuráveis de valores complexos e $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ existem para todo x , então f é mensurável.*

Demonstração. Seja $\{f_j\}$ é uma sequência de funções mensuráveis de valores complexos. Então, para cada f_j , temos que $\operatorname{Re} f_j$ e $\operatorname{Im} f_j$ são mensuráveis pelo Corolário 5.2. Assim, $\{\operatorname{Re} f_j\}$ e $\{\operatorname{Im} f_j\}$ são duas sequências de funções mensuráveis. Então, existem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re} f_j = A \quad \text{e} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Im} f_j = B,$$

daí,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re} f_j \right) + i \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Im} f_j \right) = A + iB = f(x).$$

Logo, $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ são funções mensuráveis. Portanto, f também o é. ■

5.3 Função indicadora e função simples

Definição 5.7. Suponha que (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável. Se $E \subset X$, a **função característica** \mathcal{X}_E de E é definida por:

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

A função característica também é chamada de **função indicadora** de E e denotada por 1_E .

Definição 5.8. Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Uma função $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ é **simples** se é escrito como uma combinação linear finita, com coeficientes complexos, de funções características de \mathcal{M} , ou seja, $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$, onde $E_j \in \mathcal{M}$ e $a_j \in \mathbb{C}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Se $E_i \cap E_j = \emptyset$ e $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$, e $\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^n E_j$, então ϕ está na sua **forma (ou representação) normal (padrão)**.

A partir desta definição é natural que o leitor se pergunte se toda função simples possui uma representação normal. E isso é possível. Dada qualquer representação de uma função simples $\sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$, se $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ podemos considerar $E_i \setminus (E_i \cap E_j)$, $E_i \cap E_j$, $E_j \setminus (E_i \cap E_j)$, assim parte da combinação linear que representa a função simples será dada por:

$$a_i \mathcal{X}_{E_i} + (a_i + a_j) \mathcal{X}_{E_i \cap E_j} + a_j \mathcal{X}_{E_j}.$$

Logo, toda função simples pode ser representada na forma normal.

Proposição 5.7. Se ϕ e ψ são funções simples, então $\phi + \psi$, $\phi \cdot \psi$ e $k \cdot \phi$ são simples, para todo $k \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Sejam ϕ e ψ funções simples. Então, ϕ e ψ são escritas como uma combinação linear de funções indicadoras com coeficientes complexos, ou seja:

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{j=1}^{n'} b_j \mathcal{X}_{F_j},$$

onde $\{E_i\}, \{F_j\} \subset \mathcal{M}$ e $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, n'\}$. Assim, notemos que:

$$\phi + \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} (a_i + b_j) \mathcal{X}_{E_i \cap F_j} + \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n'} F_j} + \sum_{j=1}^{n'} b_j \mathcal{X}_{F_j \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i},$$

que é uma função simples. Agora, supondo, sem perda de generalidade, que $n \geq n'$, então consideremos $F_j = \emptyset$ e $b_j = 0$, para todo $j > n'$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \phi \cdot \psi &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n'} b_j \mathcal{X}_{F_j} \right) \\ &= a_1 b_1 \cdot \mathcal{X}_{E_1} \mathcal{X}_{F_1} + \dots + a_1 b_n \cdot \mathcal{X}_{E_1} \mathcal{X}_{F_n} + a_2 b_1 \cdot \mathcal{X}_{E_2} \mathcal{X}_{F_1} + \dots + a_n b_n \cdot \mathcal{X}_{E_n} \mathcal{X}_{F_n} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \mathcal{X}_{E_i} \mathcal{X}_{F_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \mathcal{X}_{E_i \cap F_j}, \end{aligned}$$

que é uma função simples. Por fim,

$$\begin{aligned} k \cdot \phi &= k \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (k \cdot a_i) \mathcal{X}_{E_i}, \end{aligned}$$

que é uma função simples. Portanto, $\phi + \psi$, $\phi \cdot \psi$ e $k \cdot \phi$ são funções simples. ■

5.4 Função sinal

Nesta seção, passaremos a estudar alguns teoremas importantes para a teoria de integração. Para entendê-los, será necessário definir as funções abaixo:

$$f = (\text{sgn}(f))|f|, \quad \text{onde} \quad \text{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & , \text{ se } z \neq 0, \\ 0 & , \text{ se } z = 0. \end{cases}$$

Proposição 5.8. *Se f é mensurável, então $|f|$ e $\text{sgn}(f)$ também são.*

Demonstração. Seja f mensurável. Notemos, inicialmente, que $z \mapsto |z|$ e $z \mapsto \text{sgn}(z)$ são aplicações contínuas em \mathbb{C} e $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$ assim:

$$|z - z_0| < \delta \implies ||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \delta = \epsilon.$$

Portanto, $f(z) = |z|$ é contínua em \mathbb{C} . Além disso, seja $\text{sgn}(z) = z/|z|$, podemos observar que sgn é a divisão de duas aplicações contínuas em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: $g_1(z) = z$ e $g_2(z) = |z|$. Logo, $\text{sgn}(z)$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Além disso, como sgn é uma função contínua, se $U \subset \mathbb{C}$ é aberto, então $\text{sgn}^{-1}(U)$ também o é, sendo escrito na forma $V \cup \{0\}$ se $0 \in U$ e V , se $0 \notin U$, onde V é aberto. Portanto, sgn é Borel mensurável. Do mesmo modo, seja $U \subset \mathbb{C}$, temos que $|U|$ é aberto em \mathbb{C} . Logo, $|f| = |\cdot| \circ f$ e $\text{sgn}(f) = \text{sgn} \circ f$ são aplicações mensuráveis. ■

Teorema 5.1. *Seja (X, \mathcal{M}) espaço mensurável.*

- (i) *Se $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável, então existe uma sequência de funções simples $\{\phi_n\}$, tais que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq f$, $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente, e $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente nos conjuntos em que f é limitada.*
- (ii) *Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável, então existe uma sequência de funções simples $\{\phi_n\}$, tais que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f|$, $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente, e $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente nos conjuntos em que f é limitada.*

Demonstração. (i) Para $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq 2^{2^n} - 1$, sejam:

$$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n})) \quad \text{e} \quad F_n = f^{-1}((2^n, \infty]),$$

e definimos

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2^n}-1} k2^{-n} \mathcal{X}_{E_n^k} + 2^n \mathcal{X}_{F_n}.$$

Como f é mensurável, $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \in \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$ e $(2^n, \infty] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$, então E_n^k e F_n são conjuntos mensuráveis. Por conseguinte, ϕ_n é mensurável.

Agora, iremos mostrar que $\phi_n \leq \phi_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Fixemos n .

- a) Suponha que $x \in F_n$, então $f(x) > 2^n$ e $\mathcal{X}_{E_n^k}(x) = 0$, para todos $n, k > 0$. Logo, $\phi_n(x) = 2^n$. Analogamente, se $x \in F_{n+1}$, então $\phi_{n+1}(x) > 2^{n+1} > 2^n = \phi_n(x)$. Por fim, se $2^n < f(x) < 2^{n+1}$, então existe $k \in \{2^{2^n+1}, \dots, 2^{2^{n+1}} - 1\}$ tal que:

$$k2^{-(n+1)} < f(x) \leq (k+1)2^{-(n+1)},$$

ou seja, $f(x) \in E_{n+1}^k$. Logo, $\phi_{n+1}(x) = k2^{-(n+1)} \geq 2^{2^{n+1}} \cdot 2^{-n-1} = 2^n = \phi_n(x)$.

Portanto, se $x \in F_n$, então $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$.

- b) Agora, se $x \in E_n^k$, para algum $k \in \{0, \dots, 2^{2^n} - 1\}$. Então,

$$k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n} \quad \text{e} \quad \phi_n(x) = k2^{-n}.$$

Logo, $\phi_n < f(x) \leq (k+1)2^{-n}$. Além disso,

$$\begin{aligned} k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n} &\implies (2k)2^{-n-1} < f(x) \leq 2(k+1)2^{-n-1} \\ &\implies (2k)2^{-n-1} < f(x) \leq (2k+2)2^{-n-1}. \end{aligned}$$

Assim, se $(2k)2^{-n-1} < f(x) \leq (2k+2)2^{-n-1}$, então:

$$\phi_{n+1}(x) = (2k)2^{-n-1} = k2^{-n} = \phi_n(x).$$

Analogamente, se $(2k+1)2^{-n-1} < f(x) \leq (2k+2)2^{-n-1}$, então:

$$\phi_{n+1}(x) = (2k+1)2^{-n-1} \geq (2k)2^{-n-1} = k2^{-n} = \phi_n(x).$$

Portanto, $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$.

- c) Se $x \notin \left[\left(\bigcup_{k=0}^{2^{2^n}-1} E_n^k \right) \cup F_n \right]$, então $f(x) = 0$. Logo, $\phi_n(x) = 0 = \phi_{n+1}(x)$.

Portanto, $\phi_n \leq \phi_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Agora, iremos mostrar que $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente nos conjuntos em que f é limitada. Para isso, suponhamos que $f(x) \leq 2^{n_0}$. Se $f(x) = 0$, então $\phi_n = 0$, para todo n . Agora, se $f(x) > 0$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}^k$. Assim, para todo $n \geq n_0$, temos que $0 < f(x) < 2^{n_0} \leq 2^n$. Logo, para cada n , existe k' tal que:

$$x \in E_n^{k'} = f^{-1}((k'2^{-n}, (k'+1)2^{-n}]),$$

daí,

$$\phi_n(x) = k'2^{-n} < f(x) \leq (k'+1)2^{-n} = 2^{-n}k' + 2^{-n} = \phi_n(x) + 2^{-n}.$$

Logo, $0 \leq f(x) - \phi_n(x) < 2^{-n}$, para todo $n \geq n_0$.

Portanto, $\phi \rightarrow f$ uniformemente em $f^{-1}([0, 2^{n_0}])$, ou seja, f converge uniformemente nos conjuntos em que f é limitada.

Por fim, seja $x \in X$, se $f(x) < \infty$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < 2^{n_0}$ e $x \in f^{-1}([0, 2^{n_0}])$. Logo, $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$. Ainda, se $f(x) = \infty$, então $f(x) > 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x \in F_n$, então $\phi_n(x)$ será uma sequência crescente. Portanto, $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$. Logo, $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente.

- (ii) Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável, então $f = \text{Re}f + i \text{Im}f$. Consideremos $g_1 = \text{Re}f$ e $g_2 = \text{Im}f$. Pelo item (i), existem duas sequências de funções simples ϕ_n^1 e ϕ_n^2 , onde $n \in \mathbb{N}$, tais que:

$$0 \leq \phi_1^1 \leq \phi_2^1 \leq \dots \leq |g_1|,$$

$$0 \leq \phi_1^2 \leq \phi_2^2 \leq \dots \leq |g_2|.$$

de modo que $\phi_n^1 \nearrow |g_1|$ pontualmente e uniformemente onde $|g_1|$ é limitada. Analogamente, $\phi_n^2 \nearrow |g_2|$ pontualmente e uniformemente onde $|g_2|$ é limitada.

Definimos $\psi_n^1 = \text{sgn}(g_1)\phi_n^1$ e $\psi_n^2 = \text{sgn}(g_2)\phi_n^2$. Como $\text{sgn}(x)$, onde $x \in \mathbb{R}$, é simples e Borel mensurável e g_1 e g_2 são funções mensuráveis, então $\text{sgn}(g_1)$ e $\text{sgn}(g_2)$ são mensuráveis e simples.

Como ϕ_n^1 e ϕ_n^2 são aplicações simples, assim como $\text{sgn}(g_1)$ e $\text{sgn}(g_2)$, então ψ_n^1 e ψ_n^2 também são. Daí,

$$\begin{aligned} |\psi_n^1 - g_1| &= |\text{sgn}(g_1)\phi_n^1 - \text{sgn}(g_1)|g_1|| \\ &= |\text{sgn}(g_1)(\phi_n^1 - |g_1|)| \\ &\leq |\phi_n^1 - |g_1|| \rightarrow 0, \\ |\psi_n^2 - g_2| &= |\text{sgn}(g_2)\phi_n^2 - \text{sgn}(g_2)|g_2|| \\ &= |\text{sgn}(g_2)(\phi_n^2 - |g_2|)| \\ &\leq |\phi_n^2 - |g_2|| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

de modo que essas convergências são uniformes em cada conjunto que g_1 e g_2 são limitadas. Logo, $\psi_n^1 \rightarrow g_1$ e $\psi_n^2 \rightarrow g_2$ pontualmente, quando $n \rightarrow \infty$.

Consideremos $\psi_n = \psi_n^1 + i\psi_n^2$, segue que $\psi_n \rightarrow f$ uniformemente onde f é limitada e pontualmente para todo $x \in X$. Por fim,

$$\begin{aligned} |\psi_n^1| &= |\operatorname{sgn}(g_1)\phi_n^1| \leq |\operatorname{sgn}(g_1)|\phi_{n+1}^1 = |\psi_{n+1}^1| \\ |\psi_n^2| &= |\operatorname{sgn}(g_2)\phi_n^2| \leq |\operatorname{sgn}(g_2)|\phi_{n+1}^2 = |\psi_{n+1}^2| \end{aligned}$$

e

$$|\psi_n| = \sqrt{(\psi_n^1)^2 + (\psi_n^2)^2} \leq \sqrt{(\psi_{n+1}^1)^2 + (\psi_{n+1}^2)^2} = |\psi_{n+1}|.$$

■

Proposição 5.9. *As seguintes implicações são válidas se, e somente se, a medida μ é completa.*

- (i) *Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) são mensuráveis e $f = g$ μ -quase todo ponto (μ -q.t.p.), então g é mensurável.*
- (ii) *Se $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) são mensuráveis para $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \rightarrow f$ μ -quase todo ponto (μ -q.t.p.), então f é mensurável.*

Demonstração. (i) Suponhamos que μ seja uma medida completa e consideremos o conjunto $A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Como $f = g$ em quase todo ponto, então $\mu(A) = 0$ e $A^c \in \mathcal{M}$ e, por conseguinte, $A = (A^c)^c \in \mathcal{M}$.

Como f é mensurável, então para todo $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$, temos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. Assim,

$$g^{-1}(B) = (g^{-1}(B) \cap A) \cup (g^{-1}(B) \cap A^c).$$

Notemos que $g^{-1}(B) \cap A \subset A$. E já que μ é uma medida completa e $\mu(A) = 0$, então $g^{-1}(B) \cap A \in \mathcal{M}$. Além disso, como $g^{-1}(B) \cap A^c \subset A^c$, então $g^{-1}(B) \cap A^c \in \mathcal{M}$. Logo, $g^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, para todo $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$, ou seja, g é mensurável.

Por outro lado, suponhamos que μ não seja uma medida completa. Então, existem $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) = 0$, tal que $E \subset A$ e $E \notin \mathcal{M}$. Sejam $f \equiv 0$ mensurável e

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in E, \\ -1 & , \text{ se } x \in A \setminus E, \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Observemos que $g^{-1}(\{1\}) \notin \mathcal{M}$, o que é um absurdo pois, por hipótese, g é mensurável. Portanto, μ é uma medida completa.

Podemos reproduzir a mesma demonstração para $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

(ii) Suponhamos que μ seja uma medida completa e consideremos o conjunto:

$$A = \{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\}.$$

Como $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, então $\mu(A) = 0$ e $A^c \in \mathcal{M}$ e, por conseguinte, $A = (A^c)^c \in \mathcal{M}$. Além disso, já que cada f_n é mensurável, para todo n , então $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ também o é. Logo, pelo item (i) temos que f é mensurável.

Por outro lado, suponhamos que μ não seja uma medida completa. Então, existem $A \in \mathcal{M}$ e $E \subset A$ tais que $\mu(A) = 0$ e $E \notin \mathcal{M}$. Agora, definimos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in E \\ -1 & , \text{ se } x \in A \setminus E \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Observemos que $f^{-1}(\{E\}) \notin \mathcal{M}$, o que contradiz a hipótese de que f é mensurável. Portanto, μ é uma medida completa. ■

Proposição 5.10. *Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ o seu completamento. Se f for $\overline{\mathcal{M}}$ -mensurável, então existe g \mathcal{M} -mensurável tal que $f = g$ $\overline{\mu}$ -quase todo ponto.*

Demonstração. Seja $E \in \overline{\mathcal{M}}$, então existe $G \in \mathcal{M}$ e $H \subset N \in \mathcal{M}$, tais que $E = G \cup H$ e $\mu(N) = 0$. Definimos $H' = H \setminus G$, ou seja, $H' = \{x \mid \mathcal{X}_E \neq \mathcal{X}_G\}$. Como $H' \subset N$ e $\mu(N) = 0$, então $\overline{\mu}(H') = 0$. Logo, $\mathcal{X}_G = \mathcal{X}_{H'}$ $\overline{\mu}$ -quase todo ponto e \mathcal{X}_G é \mathcal{M} -mensurável.

Além disso, como f é $\overline{\mathcal{M}}$ -mensurável, então f pode ser uma função simples ou não. Se for simples e se estiver em sua forma normal, então $f = \sum_{j=1}^n a_j H_j$. Tomando $G_j \subset H_j$ tal

que $H_j \in \mathcal{M}$, $G_j \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{X}_{H_j} = \mathcal{X}_{G_j}$ $\overline{\mu}$ -quase todo ponto, assim temos que $g = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{G_j}$ é

\mathcal{M} -mensurável e satisfaz:

$$|f - g| = \left| \sum_{j=1}^n a_j (\mathcal{X}_{H_j} - \mathcal{X}_{G_j}) \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| \mathcal{X}_{H_j \setminus G_j} = 0,$$

onde $H'_j = H_j \setminus G_j$, onde $\overline{\mu}(H'_j) = 0$. Portanto, $f = g$ $\overline{\mu}$ -quase todo ponto.

Agora, se f não for simples, como f é $\overline{\mathcal{M}}$ -mensurável, então pelo Teorema 5.1 existe uma seqüência de funções $\overline{\mathcal{M}}$ -mensuráveis simples $\{\phi_n\}$ tais que $\phi_n \rightarrow f$ pontualmente. E, para cada n , existe uma função \mathcal{M} -simples ψ_n tal que $\phi_n = \psi_n$, exceto no conjunto $H'_n = \{x \mid \phi_n(x) \neq \psi_n(x)\}$, onde $\overline{\mu}(H'_n) = 0$. Assim, para cada n , existe $N_n \in \mathcal{M}$ tal que $H'_n \subset N_n$ e $\mu(N_n) = 0$. Daí, seja $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ temos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} H'_n \subset N$, onde $\mu(N) = 0$. Logo,

$$\psi_n \mathcal{X}_{X \setminus N}(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{ se } x \in N \\ f(x), & \text{ se } x \notin N \end{cases} = g.$$

Como g é limite de uma sequência de funções mensuráveis, então pelo Corolário 5.4, temos que g é \mathcal{M} -mensurável. Portanto, como μ é completa, então $f = g$ é $\bar{\mu}$ -quase todo ponto. ■

Capítulo 6

Integração de funções não negativas

A partir de um espaço de medida e de uma aplicação mensurável f , podemos definir o conceito de integral dessa função com respeito a medida utilizada. No caso de funções simples, a integral relaciona os coeficientes da representação padrão da aplicação com a medida aplicada sobre o elemento da σ -álgebra do espaço. E em casos mais gerais é considerado o supremo do conjunto de integrais aplicados sobre as funções ϕ tais que $\phi : X \rightarrow [0, \infty]$, ϕ é mensurável e $\phi \leq f$. **Utilizamos essa convenção pois passaremos a estudar integração de funções em $\overline{\mathbb{R}}$** e como $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$, temos que as propriedades operatórias envolvendo o ∞ serão parecidas com o que ocorre com os números reais.

Para este capítulo, foi utilizado a referência [6].

6.1 Funções simples em L^+

Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço mensurável. Definimos o conjunto:

$$L^+(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow [0, \infty] \mid f \text{ é } \mathcal{M} - \text{mensurável}\}.$$

Definição 6.1. Seja $\phi \in L^+$ simples representada na forma normal $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$.

Definimos a **integral de ϕ com respeito a μ** por:

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

Podemos denotar esta integral por $\int \phi$ ou $\int \phi(x) \, d\mu(x)$. Em alguns casos, quando o argumento de ϕ foi especificado e existem outras variáveis envolvidas, então utiliza-se a notação $\int \phi(x) \, d\mu(x)$. Além disso, usamos como convenção de que $0 \cdot \infty = 0$.

Definição 6.2. Se $E \in \mathcal{M}$ e $\phi \in L^+$ é uma função simples:

$$\int_E \phi \, d\mu = \int_E \phi = \int \phi \chi_E \, d\mu = \int_E \phi(x) \, d\mu(x).$$

Proposição 6.1. *Sejam ϕ e ψ funções simples em L^+ . Valem as seguintes propriedades:*

(i) Se $c \geq 0$, $\int c \phi \, d\mu = c \cdot \int \phi \, d\mu$.

(ii) $\int (\phi + \psi) \, d\mu = \int \phi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$.

(iii) Se $\phi \leq \psi$, então $\int \phi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$.

(iv) A aplicação $\alpha(A) = \int_A \phi \, d\mu$ é uma medida em \mathcal{M} .

Demonstração. (i) Suponha que $c = 0$, então, $\int 0 \cdot \phi \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0 = 0 \cdot \int \phi \, d\mu$.

Agora, suponha que $c > 0$, então seja $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$ na forma normal, temos que:

$$\int c \cdot \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^n (c \cdot a_j) \mu(E_j) = c \cdot \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = c \cdot \int \phi \, d\mu.$$

(ii) Sejam $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$ e $\psi = \sum_{j=1}^m b_j \mathcal{X}_{F_j}$ nas suas formas normais. Então, $E_i \cap E_j = \emptyset$

e $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$, e $X = \bigcup_{j=1}^n E_j$. Do mesmo modo, $F_i \cap F_j = \emptyset$ e $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$, e

$X = \bigcup_{j=1}^n F_j$. Logo,

$$E_j = \bigcup_{i=1}^m E_j \cap F_i \quad \text{e} \quad F_j = \bigcup_{i=1}^n F_j \cap E_i,$$

daí,

$$\begin{aligned} \int \phi \, d\mu + \int \psi \, d\mu &= \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{j=1}^m b_j \mu(F_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_i \mu(E_j \cap F_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (a_j + b_i) \mu(E_j \cap F_i) \\ &= \int \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (a_j + b_i) \mathcal{X}_{E_j \cap F_i} \, d\mu \\ &= \int (\phi + \psi) \, d\mu. \end{aligned}$$

(iii) Sejam $\phi \leq \psi$ tais que $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$ e $\psi = \sum_{j=1}^m b_j \mathcal{X}_{F_j}$ são suas formas normais.

Então, $a_j \leq b_i$ sempre que $E_j \cap F_i \neq \emptyset$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \phi \, d\mu &= \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_i) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_i \mu(E_j \cap F_i) \\ &= \sum_{i=1}^m b_i \mu(F_i) \\ &= \int \psi \, d\mu \end{aligned}$$

(iv) a) $\alpha(\emptyset) = \int_{\emptyset} \phi \, d\mu = \int \phi \mathcal{X}_{\emptyset} \, d\mu = \int \phi \cdot 0 \, d\mu = 0$.

b) Seja $\{E_j\} \subset \mathcal{M}$, tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então:

$$\begin{aligned} \alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \phi \, d\mu = \int \phi \mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \, d\mu \\ &= \int \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_{E_k} \mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \, d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu\left(E_k \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_k \cap A_j)\right) = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_k \cap A_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} a_k \mu(E_k \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_{E_k \cap A_j} \, d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int \left(\sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_{E_k}\right) \mathcal{X}_{A_j} \, d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j). \end{aligned}$$

Logo, α é uma medida em \mathcal{M} . ■

Definição 6.3. Seja $f \in L^+$. Definimos a integral de f como:

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \phi \, d\mu \mid \phi \in L^+, \phi \text{ é simples e } \phi \leq f \right\}.$$

Proposição 6.2. Sejam $f, g \in L^+$, então:

(i) Se $c \geq 0$, $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$.

(ii) Se $f \leq g$, então $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Demonstração. Sejam $f, g \in L^+$.

(i) Se f for uma função simples, então o resultado segue do item (i) da Proposição 6.1.

Agora, suponha que f não é uma função simples. Se $c = 0$, então:

$$\begin{aligned} \int 0 \cdot f \, d\mu &= \sup \left\{ \int 0 \cdot \phi \, d\mu \mid 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simples} \right\} \\ &= 0 \\ &= 0 \cdot \sup \left\{ \int \phi \, d\mu \mid 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simples} \right\} \\ &= 0 \cdot \int f \, d\mu. \end{aligned}$$

Seja $c > 0$, então temos que:

$$c \cdot \int f \, d\mu = c \cdot \sup \left\{ \int \phi \, d\mu \mid \phi \text{ simples em } L^+ \text{ e } \phi \leq f \right\},$$

assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\phi \in L^+$ simples tal que $\phi \leq f$ e:

$$\left(c \int f \, d\mu \right) - \frac{\epsilon}{c} \leq c \int \phi \, d\mu = \int c\phi \, d\mu \leq \int cf \, d\mu.$$

Logo, $c \int f \, d\mu \leq \int cf \, d\mu$. Do mesmo modo,

$$\int cf \, d\mu = c \cdot \sup \left\{ \int c\phi \, d\mu \mid \phi \text{ simples em } L^+ \text{ e } \phi \leq f \right\},$$

logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\phi \in L^+$ simples tal que $\phi \leq f$ e:

$$\left(\int cf \, d\mu \right) - \frac{\epsilon}{c} \leq \int c\phi \, d\mu = c \int \phi \, d\mu \leq c \int f \, d\mu.$$

Portanto, $\int cf \, d\mu \leq c \int \phi \, d\mu$. Logo, $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$.

(ii) Se f e g são funções simples, então o resultado segue do item (iii) da Proposição 6.1.

Agora, suponha que $f, g \in L^+$ e não são simples. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \int \phi \, d\mu \mid \phi \in L^+, \phi \text{ é simples e } \phi \leq f \right\} \\ B &= \left\{ \int \phi \, d\mu \mid \phi \in L^+, \phi \text{ é simples e } \phi \leq g \right\}. \end{aligned}$$

Logo, como $A \subset B$, então $\sup A \leq \sup B$. Portanto, $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

■

6.2 Teorema da convergência monótona

Teorema 6.1. [Teorema da convergência monótona]. Se $\{f_n\}$ é uma seqüência em L^+ tal que $f_j \leq f_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x)$, então

$$\int f(x) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $\{f_n\}$ uma seqüência em L^+ tal que $f_j \leq f_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, pela Proposição 6.2, temos que $a_n = \int f_n \, d\mu$ é uma seqüência de números a valores estendidos não - decrescente, limitados superiormente por ∞ . Logo, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \in [0, \infty]$.

Agora, fixe $\alpha \in (0, 1)$ e considere $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$ simples escrito na forma padrão em L^+ , tal que $0 \leq \phi \leq f$. Seja $E_n = \{x \mid f_n \geq \alpha\phi(x)\} = (f_n - \alpha\phi)^{-1}([0, \infty])$. Como f_n e ϕ são funções mensuráveis, temos que $f_n - \alpha\phi$ também o é. Logo, E_n é um conjunto mensurável. Além disso, note que como $f_j \leq f_{j+1}$, então para todo $x \in E_n$, temos que:

$$\alpha\phi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x),$$

logo, $x \in E_{n+1}$, ou seja, $E_n \subset E_{n+1}$. Ainda, dado $x \in X$, temos que:

- (i) Se $\phi(x) = 0$, então temos que $f_n(x) \geq \alpha \cdot 0 = 0$ e $x \in E_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Se $\phi(x) > 0$, então como $\alpha \in (0, 1)$, segue que:

$$0 < \alpha\phi(x) < \phi(x) \leq f(x) = \sup_n f_n(x).$$

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos que $\alpha\phi(x) < f_n(x)$. Assim, $x \in E_n$, para todo $n \geq n_0$. Portanto, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Desse modo, sendo $\mathcal{X}_X \geq \mathcal{X}_{E_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\int f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} \alpha\phi \, d\mu. \quad (6.1)$$

Pela propriedade (iv) da Proposição 6.1, temos que $\mu(E) = \int_E \phi \, d\mu$ é uma medida. E pelo item (iv) do Teorema 4.1, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \phi \, d\mu = \int \phi \, d\mu$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \geq \alpha \int \phi \, d\mu$, para todo $\alpha \in (0, 1)$. Em particular, isso também vale para $\alpha = 1$. Ainda, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \geq \int \phi \, d\mu$, para toda função simples ϕ , então:

$$\int f_n \, d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \geq \sup \left\{ \int \phi \, d\mu \mid 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simples} \right\} = \int f \, d\mu.$$

Logo, $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$. ■

Teorema 6.2. Se $\{f_n\}$ é uma seqüência finita ou infinita em L^+ e $f = \sum_n f_n$, então

$$\int f \, d\mu = \sum_n \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in L^+$, então pelo Teorema 5.1 temos que existem seqüências de funções simples $\{\phi_j\}$ e $\{\psi_j\}$ em L^+ tais que $\phi_j \leq \phi_{j+1}$, $\psi_j \leq \psi_{j+1}$, $\phi_j \rightarrow f_1$ e $\psi_j \rightarrow f_2$. Logo, $\{\phi_j + \psi_j\} \rightarrow f_1 + f_2$. Assim, pelo Teorema 6.1 temos que:

$$\begin{aligned} \int (f_1 + f_2) \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\phi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int \phi_n \, d\mu + \int \psi_n \, d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n \, d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu. \end{aligned}$$

Agora, suponha que seja válido que:

$$\int \sum_{n=1}^k f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^k \int f_n \, d\mu.$$

Seja $g_k := \sum_{n=1}^k f_n$. Assim, $g_k \in L^+$, $g_k \leq g_{k+1}$ e $g_{k-1} \nearrow \sum_{n=1}^k f_n$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ e aplicando o Teorema 6.1 temos que:

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

■

Proposição 6.3. Se $f \in L^+$, então $\int f = 0$ se, e somente se, $f = 0$ em quase todo ponto.

Demonstração. Suponhamos que $f = 0$ em quase todo ponto. Seja $\phi \in L^+$ simples tal que $\phi \leq f$. Consideremos o conjunto $E = \{x \mid f(x) \neq 0\}$. Como $f = 0$ em quase todo ponto, então $\mu(E) = 0$. Temos que $\{x \mid \phi(x) > 0\} \subset E$, logo, $\phi = 0$ em quase todo ponto.

Escrevamos $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$, $a_j \neq 0$, $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$, $j = 1, \dots, n$. Observemos que quando ϕ é simples, então $\phi^{-1}(\{a_j\})$ é mensurável. Assim, $\phi^{-1}(\{a_j\}) = \{x \mid \phi(x) = a_j\} = E_j \subset E$. Como $\mu(E) = 0$, então $\mu(E_j) = 0$, para todo $j = 1, \dots, n$. Logo, $\int \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = 0$. Portanto, $\int f \, d\mu = 0$.

Por outro lado, suponhamos que $\int f \, d\mu = 0$. Notemos que:

$$\{x \mid f(x) \neq 0\} = \{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \mid f(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Afirmamos que, se $Z_n := \left\{ x \mid f(x) > \frac{1}{n} \right\}$, então $\mu(Z_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, podemos notar que $z_n \in \mathcal{M}$, pois:

$$Z_n = \left\{ x \mid f(x) > \frac{1}{n} \right\} = f^{-1} \left(\left(\frac{1}{n}, +\infty \right) \right) \in \mathcal{M}.$$

Se $\mu(Z_n) \neq 0$, então existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(Z_{n_0}) > 0$. Assim,

$$0 = \int f \, d\mu \geq \int f \chi_{Z_{n_0}} \, d\mu \geq \int \frac{1}{n_0} \chi_{Z_{n_0}} \, d\mu = \frac{1}{n_0} \mu(Z_{n_0}) > 0,$$

o que é um absurdo. Logo, $\mu(Z_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\mu(\{x \mid f(x) \neq 0\}) = 0$. Portanto, $f = 0$ em quase todo ponto. ■

Corolário 6.1. *Se $\{f_n\} \subset L^+$, $f \in L^+$, e $f_n(x) \nearrow f(x)$ em quase todo ponto. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Consideremos o conjunto:

$$E = \{x \mid f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}.$$

Como $f_n \nearrow f$ em quase todo ponto, então $\mu(E^c) = 0$. Sejam $g = f \chi_E$ e $g_n = f_n \chi_E$ funções mensuráveis, então como $f_n(x) \nearrow f(x)$ em quase todo ponto, então $f_n \chi_E \leq f_{n+1} \chi_E$, ou seja, $g_n \leq g_{n+1}$. Logo, $g_n(x) \nearrow g(x)$.

Pelo Teorema 6.1, temos que:

$$\int g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu. \quad (6.2)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu &= \int_E g \, d\mu + \int_{E^c} g \, d\mu = \int g \chi_E \, d\mu + \int g \chi_{E^c} \, d\mu \\ &= \int f \chi_E \chi_E \, d\mu + \int f \chi_E \chi_{E^c} \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu. \end{aligned}$$

Como $\mu(E^c) = 0$, então $\int f \chi_{E^c} \, d\mu = \int_{E^c} f \, d\mu = 0$. Logo,

$$\int g \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu + \int f \chi_{E^c} \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Portanto, $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$. Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \int g_n \, d\mu &= \int_E g_n \, d\mu + \int_{E^c} g_n \, d\mu = \int g_n \chi_E \, d\mu + \int g_n \chi_{E^c} \, d\mu \\ &= \int f_n \chi_E \chi_E \, d\mu + \int f_n \chi_E \chi_{E^c} \, d\mu = \int f_n \chi_E \, d\mu \\ &= \int f_n \chi_E \, d\mu + \int f_n \chi_{E^c} \, d\mu = \int f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

Logo, $\int g_n \, d\mu = \int f_n \, d\mu$. Da equação (6.2) temos que $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$. ■

Lema 6.1. *[Lema de Fatou]. Se $\{f_n\}$ é uma sequência em L^+ , então*

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Para cada $k \geq 1$, seja $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$. Como $\{f_n\} \subset L^+$, então pela Proposição 5.6, temos que g_k é mensurável e, portanto, $g_k \in L^+$. Assim, pela definição de ínfimo temos que $g_k \leq f_j$, para todo $j \geq k$. Com isso, temos que $\int g_k \, d\mu \leq \int f_j \, d\mu$, pela Proposição 6.2. Logo, temos que $\int g_k \, d\mu \leq \int f_j \, d\mu$, para todo $j \geq k$ e, por conseguinte,
$$\int g_k \, d\mu \leq \inf_{j \geq k} \int f_j \, d\mu.$$

Notemos que $g_k \leq g_{k+1}$. Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \sup_k g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n f_n$. Aplicando o Teorema 6.1 em g_k , temos que:

$$\int \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n f_n \, d\mu \leq \sup_k \inf_{j \geq k} \int f_j \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j \, d\mu.$$

Portanto,
$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n f_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu. \quad \blacksquare$$

Corolário 6.2. *Se $\{f_n\} \subset L^+$, $f \in L^+$ e $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, então
$$\int f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$*

Demonstração. Se $f_n \rightarrow f$ em X , então como $\{f_n\} \subset L^+$ e já que $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n f_n = f$, temos pelo Lema 6.1 que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \inf_n f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

Agora, consideremos o seguinte conjunto:

$$E = \{x \mid f_n(x) \rightarrow f(x)\}.$$

Assim, como $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, então $\mu(E^c) = 0$. Definimos as funções $g = f \chi_E$ e $g_n = f_n \chi_E$, que são conjuntos mensuráveis, pois f é. Assim, $g_n \leq g_{n+1}$ e $g_n \nearrow g$ em X . Pelo Teorema 6.1, temos que
$$\int g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu &= \int_E g \, d\mu + \int_{E^c} g \, d\mu = \int g \chi_E \, d\mu + \int g \chi_{E^c} \, d\mu \\ &= \int f \chi_E \chi_E \, d\mu + \int f \chi_E \chi_{E^c} \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu. \end{aligned}$$

Como $\mu(E^c) = 0$, então $\int f \chi_{E^c} \, d\mu = \int_{E^c} f \, d\mu = 0$. Logo,

$$\int g \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu + \int f \chi_{E^c} \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Portanto, $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$. Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \int g_n \, d\mu &= \int_E g_n \, d\mu + \int_{E^c} g_n \, d\mu = \int g_n \chi_E \, d\mu + \int g_n \chi_{E^c} \, d\mu \\ &= \int f_n \chi_E \chi_E \, d\mu + \int f_n \chi_E \chi_{E^c} \, d\mu = \int f_n \chi_E \, d\mu \\ &= \int f_n \chi_E \, d\mu + \int f_n \chi_{E^c} \, d\mu = \int f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 6.1, segue que:

$$\int g \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

Como $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$ e $\int g_n \, d\mu = \int f_n \, d\mu$, então $\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$. ■

Proposição 6.4. *Se $f \in L^+$ e $\int f \, d\mu < \infty$, então:*

(i) $\mu(\{x \mid f(x) = \infty\}) = 0$;

(ii) $\{x \mid f(x) > 0\}$ é σ -finito.

Demonstração. (i) Seja $\epsilon > 0$ e $E = \{x \mid f(x) = +\infty\}$. Suponhamos que $\mu(E) = \epsilon$, então dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\phi_n = n\chi_E \in L^+$ tal que $\phi_n \leq f$. Com isso, segue que:

$$n\epsilon = n\mu(E) = \int \phi_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu < +\infty.$$

Por outro lado, $\int f \, d\mu = \sup \{ \int \phi \, d\mu \mid \phi \in L^+ \text{ simples}, \phi \leq f \} = +\infty$, o que contraria o fato de que $\int f \, d\mu < +\infty$.

Portanto, $\mu(\{x \mid f(x) = +\infty\}) = 0$.

(ii) Observemos que $\{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \mid f(x) > \frac{1}{n} \right\}$. Chamemos $E_n = \left\{ x \mid f(x) > \frac{1}{n} \right\}$.

Afirmamos que $\mu(E_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Supondo que isso não seja verdade, então existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_0}) = +\infty$. Assim,

$$+\infty = \frac{1}{n_0} \mu(E_{n_0}) = \int \frac{1}{n_0} \chi_{E_{n_0}} \leq \int f < +\infty,$$

o que é um absurdo. Logo, $\mu(E_n) < +\infty$. Portanto, $\{x \mid f(x) > 0\}$ é σ -finito. ■

Capítulo 7

Modos de convergência

Neste capítulo, estudaremos um pouco sobre os modos de convergência para aplicações mensuráveis em espaços de medida. Para isso, foi utilizado a referência [6].

Definição 7.1. Uma sequência $\{f_n\}$ de funções de valores complexos em X **converge pontualmente** para f , se para cada $x \in X$ e para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, temos que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Exemplo 7.1. Seja

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (n, n+1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $f_n \rightarrow 0$ pontualmente.

Definição 7.2. Uma sequência $\{f_n\}$ de funções de valores complexos em X **converge uniformemente** para f , se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, temos que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X.$$

Exemplo 7.2. Seja

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $f_n \rightarrow 0$ uniformemente.

Definição 7.3. Uma sequência $\{f_n\}$ de funções de valores complexos em X **converge em quase todo ponto** para f , se o conjunto $B = \{x \in X \mid f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ tem medida 0.

Definição 7.4. Iremos denotar $L^1(\mu)$, $L^1(X, \mu)$, ou simplesmente, L^1 o conjunto formado pelas funções $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ integráveis.

Definição 7.5. Uma sequência $\{f_n\}$ de funções de valores complexos em X **converge em L^1** para f se, e somente se,

$$\int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Proposição 7.1. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções de valores complexos em X , então:*

- (i) *Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente, então $f_n \rightarrow f$ pontualmente.*
- (ii) *Se $f_n \rightarrow f$ pontualmente, então $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto.*
- (iii) *$f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto não implica que $f_n \rightarrow f$ em L^1 e vice-versa.*

Demonstração. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções de valores complexos em X .

- (i) Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente, então para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, temos que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X.$$

Como essa condição é satisfeita para todo $x \in X$, então $f_n \rightarrow f$ pontualmente.

- (ii) Se $f_n \rightarrow f$ pontualmente, então para cada $x \in X$ e para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, temos que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Assim,

$$\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = \emptyset,$$

como $f_n \rightarrow f$ pontualmente para todo x , temos que para n suficientemente grande, o conjunto dos pontos em que f_n não converge é vazio. Portanto, tem medida nula. Portanto, $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto.

- (iii) Considere

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x \in (0, n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dado $\epsilon > 0$ tome $n_0 > 1/\epsilon$, assim para todo $n \geq n_0$, temos que se $x \in (0, n)$, então:

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{n_0} \right| < \epsilon.$$

Agora, se $x \notin (0, n)$, então para todo $n \geq n_0$:

$$|f_n(x) - 0| = |0 - 0| < \epsilon.$$

Portanto, $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Assim, pelos itens (ii) e (iii), temos que $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, porém:

$$\begin{aligned} \int |f_n(x) - 0| \, d\mu &= \int_{(0,n)} f_n(x) \, d\mu + \int_{(0,n)^c} f_n(x) \, d\mu \\ &= \int_{(0,n)} \frac{1}{n} \, d\mu + \int_{(0,n)^c} 0 \, d\mu = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Portanto, $f_n \not\rightarrow f$ em L^1 .

Agora, considere

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $n = 2^k + j$ com $0 \leq j < 2^k$.

Notemos que:

$$\int |f_n(x) - 0| \, d\mu = \int |f_n(x)| \, d\mu = \int_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]} 1 \, d\mu + \int_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]^c} 0 \, d\mu = 2^{-k},$$

que converge para 0, quando $k \rightarrow \infty$. Porém, $f_n(x)$ não converge para $x \in [0, 1]$, pois existem infinitos n tais que $f_n(x) = 0$ e infinitos n tais que $f_n(x) = 1$. Logo, f_n não converge em quase todo ponto. ■

Proposição 7.2. *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções de valores complexos em X e $g \in L^1$ tal que $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, $|f_n| \leq g$ para todo n , então $f_n \rightarrow f$ em L^1 .*

Demonstração. Sejam $\{f_n\}$ uma seqüência de funções de valores complexos em X e $E_{n,\epsilon} = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$, então:

$$\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq 2\epsilon\} \subset \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \cup \{x \mid |f_n(x) - g(x)| \geq \epsilon\}.$$

■

Definição 7.6. Uma seqüência $\{f_n\}$ de funções mensuráveis de valores complexos em (X, \mathcal{M}, μ) é **Cauchy na medida** se para todo $\epsilon > 0$,

$$\mu(\{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0,$$

quando $m, n \rightarrow \infty$.

Definição 7.7. A seqüência $\{f_n\}$ **converge na medida** para f se para todo $\epsilon > 0$.

$$\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Proposição 7.3. *Se $f_n \rightarrow f$ em L^1 , então $f_n \rightarrow f$ na medida.*

Demonstração. Como $f_n \rightarrow f$ em L^1 , então:

$$\int |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0.$$

Dado $\epsilon > 0$ seja $E_{n,\epsilon} = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$, temos que $\epsilon \cdot \mathcal{X}_{E_{n,\epsilon}} < |f_n - f| \cdot \mathcal{X}_{E_{n,\epsilon}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \epsilon \mu(E_{n,\epsilon}) &\leq \int \epsilon \cdot \mathcal{X}_{E_{n,\epsilon}} \, d\mu \leq \int \mathcal{X}_{E_{n,\epsilon}} \cdot |f_n - f| \, d\mu \\ &= \int_{E_{n,\epsilon}} |f_n - f| \, d\mu \leq \int |f_n - f| \, d\mu. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu(E_{n,\epsilon}) \leq \epsilon^{-1} \int |f_n - f| \, d\mu$. Como $\int |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0$, então $\mu(E_{n,\epsilon}) \rightarrow 0$, então $f_n \rightarrow f$ na medida. ■

Teorema 7.1. *Suponha que $\{f_n\}$ é de Cauchy na medida. Então, existe uma função mensurável f tal que $f_n \rightarrow f$ na medida, e existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ que converge para f em quase todo ponto. Além disso, se $f_n \rightarrow g$ na medida, então $g = f$ em quase todo ponto.*

Demonstração. Suponha que $\{f_n\}$ é de Cauchy na medida. Escolhemos uma subsequência de f_n como sendo $\{g_j\} = \{f_{n_j}\}$ tal que:

$$E_j = \{x \mid |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\} \implies \mu(E_j) \leq 2^{-j}.$$

Se $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$, então $\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j}$. Note que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} &= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \dots \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \\ &= 2^{-k} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= 2^{-k} \cdot 2 \\ &= 2^{-(k-1)} \\ &= 2^{1-k}. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k}$. Além disso, se $x \notin F_k$ para $k \leq j \leq i$, temos que:

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{1-j}, \quad (7.1)$$

assim, $\{g_j\}$ é pontualmente convergente na medida de Cauchy em F_k^c . Seja

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \limsup E_j,$$

então, $\mu(F) = 0$.

Agora, definimos $f(x) = \lim g_j(x)$, para $x \notin F$ e $f(x) = 0$, para $x \in F$, então f é mensurável e $g_j \rightarrow f$ em quase todo ponto. Além disso, a partir da equação (7.1), temos que $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{1-j}$, para $x \notin F_k$ e $j \geq k$. Como $\mu(F_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, isso significa que $g_j \rightarrow f$ na medida. Assim,

$$\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subset \left\{x \mid |f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \mid |g_j(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\},$$

quando $n, j \rightarrow \infty$, temos que:

$$\mu\left(\left\{x \mid |f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \mu\left(\left\{x \mid |g_j(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) \rightarrow 0.$$

Portanto, $\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0$. Analogamente, como:

$$\{x \mid |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \subset \left\{x \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \mid |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\},$$

então, $f_n \rightarrow g$ na medida. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, como $\mu(\{x \mid |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) = 0$, para todo $\epsilon > 0$ dado. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, através da sequência f_n , temos que $f = g$ em quase todo ponto. ■

Corolário 7.1. *Se $f_n \rightarrow f$ em L^1 , existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ tal que $f_{n_j} \rightarrow f$ em quase todo ponto.*

Demonstração. Se $f_n \rightarrow f$ em L^1 , então pela Proposição 7.3, temos que $f_n \rightarrow f$ na medida. Assim, pelo Teorema 7.1, temos que existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ tal que $f_{n_j} \rightarrow f$ em quase todo ponto. ■

Teorema 7.2. *[Teorema de Egoroff]. Suponha que $\mu(X) < \infty$, e f_1, f_2, \dots e f funções de valores complexos e mensuráveis em X tais que $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < \epsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em E^c .*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $f_n \rightarrow f$ em todo X . Para $k, n \in \mathbb{N}$ seja

$$E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \mid |f_m(x) - f(x)| \geq k^{-1}\}.$$

Então, para cada k fixo, $E_n(k)$ decresce quando n cresce e $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$, então desde que $\mu(X) < \infty$, nós concluímos que $\mu(E_n(k)) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Dado $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, escolha n_k tão grande tal que $\mu(E_{n_k}(k)) < \epsilon 2^{-k}$ e seja $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$. Então, $\mu(E) < \epsilon$, e nós temos $|f_n(x) - f(x)| < k^{-1}$, para $n > n_k$ e $x \notin E$. Então, $f_n \rightarrow f$ uniformemente em E^c . ■

Capítulo 8

Integração de funções complexas

8.1 Conceitos e propriedades

Neste capítulo, estudaremos a integração de funções complexas. Para isso, foi utilizada a referência [6].

Definição 8.1. Seja $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Definimos a parte **positiva** e **negativa** de f como:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

então, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Se f é mensurável, então f^+ e f^- também são, pelo Corolário 5.3.

Definição 8.2. Fixe um espaço de medida (X, \mathcal{M}, μ) e considere a parte positiva e a parte negativa de $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ são finitos, então f é integrável e nós definimos:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Da mesma forma, definimos:

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_E (f^+ - f^-) d\mu = \int (f^+ - f^-) \chi_E d\mu \\ &= \int f^+ \chi_E d\mu - \int f^- \chi_E d\mu \\ &= \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu. \end{aligned}$$

Proposição 8.1. *Seja L o conjunto das funções de valores reais integráveis em X . Então, L é um espaço vetorial real e a integral é um funcional linear sobre ele.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e f, g funções de valores reais e integráveis em X , então:

$$|af + bg| \leq |a||f| + |b||g|.$$

Como f e g são integráveis, então $\int f \, d\mu < \infty$ e $\int g \, d\mu < \infty$. Portanto,

$$\int |af + bg| \, d\mu \leq \int |a||f| \, d\mu + \int |b||g| \, d\mu < \infty.$$

Logo, o conjunto das funções de valores reais integráveis em X é um espaço vetorial real. Agora, definimos $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(f) = \int f \, d\mu$. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \int af \, d\mu &= \int a(f^+ - f^-) \, d\mu = \int af^+ - af^- \, d\mu \\ &= \int af^+ \, d\mu - \int af^- \, d\mu = a \int f^+ \, d\mu - a \int f^- \, d\mu = a \int f^+ - f^- \, d\mu. \end{aligned}$$

Se $a < 0$, então:

$$\begin{aligned} \int af \, d\mu &= \int a(f^+ - f^-) \, d\mu = - \int af^- - af^+ \, d\mu \\ &= \int |a|f^- \, d\mu - \int |a|f^+ \, d\mu = |a| \left(\int f^- \, d\mu - \int f^+ \, d\mu \right) \\ &= -|a| \int f \, d\mu = a \int f \, d\mu. \end{aligned}$$

Logo, $\int af \, d\mu = a \int f \, d\mu$. Sejam $f, g \in L$ e $h = f + g$.

$$h^+ - h^- = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Então, $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, o que implica que $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Assim, pelo Teorema 6.2, temos que:

$$\int h^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int h^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int h \, d\mu &= \int h^+ \, d\mu - \int h^- \, d\mu \\ &= \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu \\ &= \int f^+ - f^- \, d\mu + \int g^+ - g^- \, d\mu \\ &= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

Portanto, ϕ é um funcional linear. ■

Definição 8.3. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável. Dizemos que f é integrável se $\int |f| \, d\mu = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$ for finita.

Desde que $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| < 2|f|$, então f é integrável se, e somente se, $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ forem integráveis.

Definição 8.4. Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ for integrável, definimos $\int f \, d\mu = \int \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int \operatorname{Im} f \, d\mu$.

Proposição 8.2. $L^1(X, \mu)$ é um espaço vetorial e $f \mapsto \int f \, d\mu$ é um funcional linear.

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ e f, g funções de valores complexos e integráveis em X , então:

$$|af + bg| \leq |a||f| + |b||g|.$$

Como f e g são integráveis, então $\int |f| \, d\mu < \infty$ e $\int |g| \, d\mu < \infty$. Portanto,

$$\int |af + bg| \, d\mu \leq \int |a||f| \, d\mu + \int |b||g| \, d\mu < \infty.$$

Logo, o conjunto das funções de valores complexas integráveis em X é um espaço vetorial complexo. Agora, definimos $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ por $\phi(f) = \int f \, d\mu$. Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $l \in L^1$ temos que:

$$\begin{aligned} \int zf \, d\mu &= \int (a + ib)(\operatorname{Re} f + i\operatorname{Im} f) \, d\mu \\ &= \int a\operatorname{Re} f + ia\operatorname{Im} f + ib\operatorname{Re} f + i^2b\operatorname{Im} f \, d\mu \\ &= a \int \operatorname{Re} f \, d\mu + ia \int \operatorname{Im} f \, d\mu + ib \int \operatorname{Re} f \, d\mu + i^2b \int \operatorname{Im} f \, d\mu \\ &= (a + ib) \int \operatorname{Re} f \, d\mu + i(a + ib) \int \operatorname{Im} f \, d\mu \\ &= z \left(\int \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int \operatorname{Im} f \, d\mu \right) = z \int f \, d\mu. \end{aligned}$$

Portanto, ϕ é um funcional linear. ■

Proposição 8.3. Se $f \in L^1$, então $|\int f| \leq \int |f|$.

Demonstração. Se $\int f \, d\mu = 0$, então $|\int f| = 0 \leq \int |f|$.

Agora, seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned} \left| \int f \, d\mu \right| &= \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \leq \left| \int f^+ \, d\mu \right| + \left| \int f^- \, d\mu \right| \\ &= \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int f^+ + f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

Por fim, seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, se $\int f \, d\mu \neq 0$, então podemos escrever a integral de f como:

$$\int f \, d\mu = e^{i\theta} \left| \int f \, d\mu \right|, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Assim, $|\int f \, d\mu| = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \cdot \int f)$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int f \, d\mu \right| &= \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \int f \, d\mu \right) = \operatorname{Re} \left(\int e^{-i\theta} f \, d\mu \right) = \int \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \, d\mu \\ &\leq \int |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)| \, d\mu \leq \int |e^{-i\theta}| |f| \, d\mu = \int |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

Portanto, $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$. ■

Proposição 8.4. *São válidas as seguintes sentenças:*

(i) Se $f \in L^1$, então $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ é σ -finito.

(ii) Se $f, g \in L^1(X, \mu)$, então são equivalentes:

a) $\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$

b) $\int |f - g| \, d\mu = 0.$

c) $f = g$ em quase todo ponto.

Demonstração. (i) Seja $f \in L^1(X, \mu)$, então $\int |f| \, d\mu < \infty$. Além disso, observemos que:

$$E = \{x \mid f(x) \neq 0\} = \{x \mid |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}.$$

Chamemos $E_n = \left\{x \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$. Se $\mu(E_n)$ não fosse finito, então teríamos que $\mu(E_{n_0}) = \infty$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\infty > \int |f| \, d\mu \geq \int \frac{1}{n_0} \chi_{E_{n_0}} \, d\mu = \infty,$$

o que é um absurdo. Logo, $\mu(E_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ é σ -finito.

(ii) • [b] \implies c]. Definimos $h := |f - g|$. Como $f, g \in L^1$, então $h \in L^1$. Pela Proposição 6.3, temos que $\int h = 0$ se, e somente se, $h = 0$ em quase todo ponto. Logo,

$$\int |f - g| \, d\mu = 0 \iff |f - g| = 0 \text{ q.t.p.} \iff f = g \text{ q.t.p.}$$

• [b] \implies a]. Dado $E \in \mathcal{M}$, então pela Proposição 8.3, temos que:

$$\left| \int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu \right| = \left| \int_E (f - g) \, d\mu \right| \leq \int_E |f - g| \, d\mu \leq \int |f - g| \, d\mu = 0.$$

Logo, $\left| \int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu \right| = 0$. Portanto, $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$.

• [a] \implies c]. Sejam $u = \operatorname{Re}(f - g)$ e $v = \operatorname{Im}(f - g)$ e suponhamos que f não seja igual a g em quase todo ponto. Então, existe $F_1 \in \mathcal{M}$ com $\mu(F_1) < \infty$ tal que $f \neq g$ em F_1 . Assim, $f - g \neq 0$ em F_1 . Daí, $0 \neq |f - g| = u^2 + v^2$ em F_1 . Então, $F_2 \in \mathcal{M}$ com $F_2 \subset F_1$ e $\mu(F_2) > 0$ tal que $u \neq 0$ em F_2 ou $v \neq 0$ em F_2 . Suponhamos, sem perda de generalidade, que $u \neq 0$ em F_2 . Então, $0 \neq |u| = u^+ + u^-$ em F_2 . Desse modo, existe $E \in \mathcal{M}$ com $E \subset F_2$ e $\mu(E) > 0$ tal que $u^+ \neq 0$ em E ou $u^- \neq 0$ em E . Agora, suponhamos sem perda de generalidade que $u^+ \neq 0$ em E . Então, $u^- = 0$ em E . Logo, o conjunto $E = \{x \mid u^+(x) > 0\}$ tem medida positiva.

Como $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, onde $E_n = \left\{ x \mid u^+(x) > \frac{1}{n} \right\}$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_0}) > 0$. Além disso, já que $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$, para todo $E \in \mathcal{M}$, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{E_{n_0}} \operatorname{Re} f \, d\mu - \int_{E_{n_0}} \operatorname{Im} f \, d\mu = \int_{E_{n_0}} u \, d\mu \\ &= \int_{E_{n_0}} (u^+ - u^-) \, d\mu = \int_{E_{n_0}} u^+ \, d\mu \geq \int \frac{1}{n_0} \chi_{E_{n_0}} \, d\mu \\ &= \int \frac{1}{n_0} \mu(E_{n_0}) \, d\mu > 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, $f = g$ em quase todo ponto. ■

A Proposição acima nos mostra podemos integrar funções que são apenas definidas em um conjunto mensurável E cujo complemento é nulo. Para isso, podemos definir f como sendo 0 em E^c . Assim, podemos integrar funções de valores em $\overline{\mathbb{R}}$ que são finitas em quase todo ponto como sendo funções reais para fins de integração.

8.2 Teorema da convergência dominada

A partir da ideia de integrar funções que são iguais em quase todo ponto, iremos verificar alguns resultados importantes em torno desta ideia. Antes disso, notemos que:

Proposição 8.5. *Sejam f e g funções mensuráveis em X . Uma relação de equivalência entre f e g é dada por:*

$$f \sim g \iff f = g \text{ em quase todo ponto.}$$

Demonstração. De fato,

- (i) Se $f = f$, então $f = f$ em quase todo ponto. Portanto, $f \sim f$.
- (ii) Se $f \sim g$, então $f = g$ em quase todo ponto. Logo, $g = f$ em quase todo ponto. Portanto, $g \sim f$.
- (iii) Se $f \sim g$ e $g \sim h$ e considerando os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} E &= \{x \mid f(x) = g(x)\}, \\ F &= \{x \mid g(x) = h(x)\}, \\ G &= \{x \mid f(x) = h(x)\}. \end{aligned}$$

Assim, já que $f = g$ em quase todo ponto e $g = h$ em quase todo ponto, então $\mu(E^c) = \mu(F^c) = 0$.

Seja $x \in E \cap F$, temos que $f(x) = g(x)$ e $g(x) = h(x)$, logo $f(x) = h(x)$ e $x \in G$. Portanto, $E \cap F \subset G$. Por conseguinte, $G^c \subset (E^c \cup F^c)$. Assim,

$$\mu(E^c \cup F^c) \leq \mu(E^c) + \mu(F^c) = 0,$$

daí, temos que $\mu(G^c) = 0$, o que implica que, $f \sim h$.

Portanto, \sim é uma relação de equivalência. ■

Definição 8.5. Sejam f e g funções integráveis em X . Definimos a classe de equivalência de f por:

$$[f] = \{g \mid g \sim f\}$$

Definição 8.6. Sejam f e g funções integráveis em X . Definimos o conjunto:

$$L^1(\mu) = \{[f] \mid \int f \, d\mu < \infty\}.$$

e uma função $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$.

Teorema 8.1. [Teorema da convergência dominada]. Seja $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, para todo n . Suponha que exista $g \in L^1(\mu)$ não negativa tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ em quase todo ponto e para todo n . Então, $f \in L^1(\mu)$ e $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$.

Demonstração. Seja $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, então f é mensurável pelas Proposições 5.9 e 5.10. Ainda, como $|f_n| \leq g$ em quase todo ponto e $f_n \rightarrow f$ em quase todo ponto, então $|f| \leq g$ em quase todo ponto. Logo, como $g \in L^1$ temos que:

$$\int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty.$$

Portanto, $f \in L^1$.

Sejam $u_n = \operatorname{Re} f_n$, $v_n = \operatorname{Im} f_n$, $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$, temos que $|u_n|, |v_n| \leq |f_n| \leq |g|$ em quase todo ponto e $|u|, |v| \leq |f| \leq |g|$ em quase todo ponto. Logo, $u_n, v_n, u, v \in L^1$.

Como $-g \leq u_n \leq g$ em quase todo ponto, então $u_n + g \geq 0$ em quase todo ponto e $g - u_n \geq 0$ em quase todo ponto. Assim, temos dois casos:

(i) Pelo Lema 6.1, segue que:

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu + \int u \, d\mu &= \int (g + u) \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (g + u_n) \, d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n \int (g + u_n) \, d\mu = \int g \, d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n \int u_n \\ &\implies \int u \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n \int u_n. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\int g \, d\mu - \int u \, d\mu &= \int (g - u) \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (g - u_n) \, d\mu \\
&\leq \int g \, d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (-u_n) \, d\mu = \int g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int u_n \\
&\implies - \int u \, d\mu \leq - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int u_n \\
&\implies \int u \, d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int u_n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int u \, d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\mu \leq \int u \, d\mu \\
&\implies \int u \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\mu.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos que $\int v \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n \, d\mu$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int f \, d\mu &= \int u \, d\mu + i \int v \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n \, d\mu \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int u_n \, d\mu + i \int v_n \, d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.
\end{aligned}$$

Portanto, $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$. ■

Teorema 8.2. *Seja $f_j \in L^1(\mu)$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_1 < \infty$. Então, $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge em quase*

todo ponto para uma função em L^1 . Além disso, $\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j$.

Demonstração. Pelo Teorema 6.2, temos que $\int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| < \infty$. Logo, a função

$g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L_1$. Como $\int g \, d\mu < \infty$, temos pela Proposição 6.4 que $\{x \mid g(x) = \infty\}$ é um

conjunto de medida nula, ou seja, $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|$ é finito em quase todo. Então, $\sum_{j=1}^k f_j \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j$

em quase todo ponto e, para todo k , temos que:

$$\left| \sum_{j=1}^k f_n \right| \leq \sum_{j=1}^k |f_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| = g.$$

Logo, $\left| \sum_{j=1}^k f_n \right| \leq g$. Então, pelo Teorema 8.1 $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \in L^1$ e:

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \sum_{j=1}^k f_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

Portanto, $\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j$. ■

Teorema 8.3. [Teorema da densidade]. Se $f \in L^1$ e dado $\epsilon > 0$, existe uma função simples integrável $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ tal que $\int |f - \phi| d\mu < \epsilon$, isto é, o conjunto das funções simples integráveis é denso em L^1 , com a métrica de $\|\cdot\|_1$.

Demonstração. Como $f \in L^1$, então pelo Teorema 5.1, temos que existe $\{\phi_n\}$ uma sequência de funções simples tal que $0 \leq |\phi_1| \leq \dots \leq |\phi_{n-1}| \leq \dots \leq |f|$ e $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$, para todo $x \in X$. Seja $g_n := |\phi_n - f|$, então $g_n \leq |\phi_n| + |f| \leq 2|f| \in L^1(\mu)$. Assim, pelo Teorema 8.1, como $\phi_n \rightarrow f$ temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int g_{n_0} d\mu < \epsilon$. Portanto, $\|\phi_{n_0} - f\|_1 = \int |\phi_{n_0} - f| d\mu < \epsilon$. ■

Teorema 8.4. Suponha que $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $-\infty < a < b < \infty$, e que $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável para cada $t \in [a, b]$. Seja $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu$.

(i) Suponha que existe $g \in L^1$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$, para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$. Se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$, para todo $x \in X$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$.

(ii) Suponha que $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ exista, para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$ e que exista $h \in L^1(X, \mu)$ tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq h(x)$, para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$. Então, F é diferenciável e $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu$.

Demonstração. (i) Seja $\{t_n\} \subset [a, b]$ uma sequência tal que $t_n \rightarrow t_0$. Definimos $g_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ por $g_n(x) = f(x, t_n)$. Como $f(x, t_n) \in L^1$, então g é mensurável e:

$$|g_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x).$$

Assim, $g_n(x) = f(x, t_n) \rightarrow f(x, t_0)$. Pelo Teorema 8.1, segue que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) d\mu &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) d\mu \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x, t_n) d\mu = \int f(x, t_0) d\mu \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} F(t) = F(t_0). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F(t_0)$.

(ii) Fixemos $t_0 \in [a, b]$ e tomemos $t_n \in [a, b]$ tal que $t_n \rightarrow t_0$ e $t_n \neq t_0$. Agora, consideremos a função:

$$h_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}.$$

como $f \in L^1$, então h_n é mensurável, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos que $h_n(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$. Portanto, $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ também é mensurável.

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio, temos que:

$$|h_n(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \bar{t}) \right| \leq g(x), \quad \bar{t} \in (t_0, t_n).$$

Daí, pelo Teorema 8.1 obtemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n(x) \, d\mu &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \, d\mu \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \, d\mu &= \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \, d\mu \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} &= \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \, d\mu. \end{aligned}$$

Logo, F é diferenciável e $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \, d\mu$. ■

8.3 Integral de Riemann e Lebesgue

Definição 8.7. Seja $[a, b]$ um intervalo compacto. Uma **partição** de $[a, b]$ é uma sequência finita $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$.

Definição 8.8. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Definimos:

$$\begin{aligned} S_P f &= \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \left[\sup_{t_{j-1} \leq x \leq t_j} f(x) \right] (t_j - t_{j-1}), \\ s_P f &= \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \left[\inf_{t_{j-1} \leq x \leq t_j} f(x) \right] (t_j - t_{j-1}), \\ \int_a^b f \, dx &= \inf_P S_P f \quad \text{e} \quad \int_a^b f \, dx = \sup_P s_P f. \end{aligned}$$

Definição 8.9. A função f é Riemann integrável se, e somente se, $\int_a^b f \, dx = \int_a^b f \, dx$.

Teorema 8.5. f é Riemann integrável em $[a, b]$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P de forma que:

$$S_P f - s_P f < \epsilon.$$

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([11], 1976) p. 124. ■

Definição 8.10. Se P e Q são partições de $[a, b]$ de forma que $P \subset Q$, dizemos que Q é um **refinamento** de P .

Teorema 8.6. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$, P uma partição de $[a, b]$ e $\epsilon > 0$ dado. Se $S_P f - s_P f < \epsilon$, então para todo refinamento Q de P vale que $S_Q f - s_Q f < \epsilon$.*

Demonstração. Para esta demonstração recomenda-se a leitura da referência ([11], 1976) p. 125. ■

Definição 8.11. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lebesgue mensurável e E é um conjunto mensurável, então a **integral de Lebesgue** sobre E é dada por:

$$\int_E f(x) \, d\mu.$$

Teorema 8.7. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada.*

(i) *Se f for Riemann integrável, então f é Lebesgue mensurável e $\int_a^b f \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu$.*

(ii) *f é Riemann integrável se, e somente se, $\{x \in [a, b] \mid f \text{ é descontínua em } x\}$ tem medida de Lebesgue nula.*

Demonstração. (i) Seja f Riemann integrável. Para cada partição P definimos:

$$G_P = \sum_{j=1}^n M_j \mathcal{X}_{(t_{j-1}, t_j]} \quad \text{e} \quad g_P = \sum_{j=1}^n m_j \mathcal{X}_{(t_{j-1}, t_j]}.$$

Assim, $S_P f = \int G_P \, d\mu$ e $s_P f = \int g_P \, d\mu$. Além disso, pelos Teoremas 8.5 e 8.6, temos que existe uma sequência $\{P_k\}$ de partições tais que $P_k \subset P_{k+1}$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{P_k} = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Tomemos $G = \lim_{k \rightarrow \infty} G_{P_k}$ e $g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{P_k}$, então temos que G e g são mensuráveis de acordo com a Proposição 5.6. Ainda, já que f é limitada, então G e g também são, assim pelo Teorema 8.1 segue que:

$$\int G \, d\mu = \int_a^b f(x) \, dx = \int g \, d\mu.$$

Portanto, $\int (G - g) \, d\mu = 0$ e $G = g$ em quase todo ponto pelo Teorema 6.3. Como $g \leq f \leq G$, donde $G = f$ em quase todo ponto, temos pelo Teorema 4.4,

$$\int_a^b f \, dx = \int G \, d\mu = \int_{[a,b]} f \, d\mu.$$

(ii) Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e:

$$H(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| \leq \delta} f(y) \quad \text{e} \quad h(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| \leq \delta} f(y).$$

Afirmamos que $H(x) = h(x)$ se, e somente se, f é contínua em x .

De fato, se f é contínua, então para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, tal que:

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in [a, b]$. Daí,

$$\begin{aligned} H(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| < \delta} f(y) = \lim_{y \rightarrow x} \sup f(y) = f(x) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \inf f(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| \leq \delta} f(y) = h(x). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $H(x) = h(x)$, então $\limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$. Portanto, f é contínua.

Assim, se f for contínua em $[a, b]$, temos que:

$$\begin{aligned} \int H \, d\mu &= \int_a^b f \, d\mu = \int G \, d\mu, \\ \int h \, d\mu &= \int_a^b f \, d\mu = \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

Portanto, $H = G$ em quase todo ponto, assim como $h = g$.

Agora, supondo que $\{x \in [a, b] \mid f \text{ é descontínua em } f\}$ tem medida nula, então f é contínua em quase todo ponto. Logo, $H(x) = h(x)$ em quase todo ponto o que implica que $G(x) = g(x)$ em quase todo ponto. Assim, $G - g = 0$ em quase todo ponto e, portanto,

$$0 = \int (G - g) \, d\mu = \int G \, d\mu - \int g \, d\mu = \int_a^{\bar{b}} f \, dx - \int_a^{\underline{b}} f \, dx.$$

Portanto, f é Riemann integrável.

Por outro lado, se f for Riemann integrável, então:

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dx = \int_a^{\underline{b}} f \, dx \implies \int G \, d\mu = \int g \, d\mu,$$

como $G = H$ em quase todo ponto, assim como $g = h$, temos que f é contínua em quase todo ponto. Logo, $\{x \in [a, b] \mid f \text{ é descontínua em } f\}$ tem medida nula. ■

Capítulo 9

Medida do produto

9.1 Conceitos e propriedades

Neste capítulo, iremos discutir sobre a construção de uma medida para o produto cartesiano de espaços mensuráveis. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) espaços métricos.

Definição 9.1. Um **retângulo mensurável** é o conjunto da forma $A \times B$, onde $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$.

Proposição 9.1. Seja $\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n R_i \mid R_i \text{ é retângulo mensurável} \right\}$. Então, \mathcal{R} é uma família elementar de acordo com a Definição 3.6.

Demonstração. Sejam $R, S \in \mathcal{R}$ tais que $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$ e $S = \bigcup_{j=1}^m S_j$, onde $R_i = A_i \times B_i$ e $S_j = E_j \times F_j$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Então,

(i) De fato, por vacuidade, segue que $\emptyset \in \mathcal{R}$.

(ii) Seja $(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &\iff (x, y) \in A_1 \times B_1 \text{ e } (x, y) \in A_2 \times B_2 \\ &\iff x \in A_1, x \in A_2, y \in B_1 \text{ e } y \in B_2 \\ &\iff x \in A_1 \cap A_2 \text{ e } y \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff (x, y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2). \end{aligned}$$

Portanto, $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

Agora, suponhamos que para $(A_1 \times B_1) \cap \dots \cap (A_k \times B_k)$, vale que:

$$[A_1 \cap \dots \cap A_k] \times [B_1 \cap \dots \cap B_k].$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
& (A_1 \times B_1) \cap \cdots \cap (A_{k+1} \times B_{k+1}) = \\
& [(A_1 \times B_1) \cap \cdots \cap (A_k \times B_k)] \cap (A_{k+1} \times B_{k+1}) = \\
& [(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \times (B_1 \cap \cdots \cap B_k)] \cap (A_{k+1} \times B_{k+1}) = \\
& [(A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}) \times (B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap B_{k+1})] = \\
& \left[\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} B_i \right) \right].
\end{aligned}$$

Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}
R \cap S &= \left[\bigcap_{i=1}^n (A_i \times B_i) \right] \cap \left[\bigcap_{j=1}^m (E_j \times F_j) \right] \\
&= \left[\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m E_j \right) \right] \times \left[\left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m F_j \right) \right].
\end{aligned}$$

Como $\left[\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m E_j \right) \right] \in \mathcal{M}$ e $\left[\left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m F_j \right) \right] \in \mathcal{N}$, então $R \cap S \in \mathcal{R}$.

(iii) Seja $(x, y) \in (A \times B)^c$.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times B)^c &\iff (x, y) \in [(X \times Y) \setminus (A \times B)] \\
&\iff (x, y) \in (X \times Y) \text{ e } (x, y) \notin (A \times B) \\
&\iff (x \in X \text{ e } y \in Y) \text{ e } (x \notin A \text{ e } y \notin B) \\
&\iff (x \in X \text{ e } y \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ e } y \in B) \\
&\iff (x, y) \in X \times B^c \text{ ou } (x, y) \in (A^c \times B) \\
&\iff (x, y) \in (X \times B^c) \cup (A^c \times B).
\end{aligned}$$

Portanto, $(A \times B)^c = (X \times B^c) \cup (A^c \times B)$.

Notemos que,

$$\begin{aligned}
R^c &= \left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i) \right)^c \\
&= \bigcap_{i=1}^n (A_i \times B_i)^c \\
&= \bigcap_{i=1}^n \left[(X \times B_i^c) \cup (A^c \times B_i) \right],
\end{aligned}$$

que é uma união disjunta de elementos de \mathcal{R} . Logo, R^c é igual a uma união disjunta de elementos de \mathcal{R} , para todo $R \in \mathcal{R}$.

Portanto, \mathcal{R} é uma família elementar. ■

Como \mathcal{R} é uma família elementar, então pela Proposição 3.6, temos que \mathcal{R} é uma σ -álgebra. Logo, $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Agora, suponhamos que $A \times B$ é um retângulo tal que $A \times B = \bigcup_{j \geq 1} A_j \times B_j$ (finita ou enumerável), onde $A_j \in \mathcal{M}$ e $B_j \in \mathcal{N}$, então para $x \in X$ e $y \in Y$, temos que:

$$\mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y) = \mathcal{X}_{A \times B}(x, y) = \sum_{j \geq 1} \mathcal{X}_{A_j \times B_j}(x, y) = \sum_{j \geq 1} \mathcal{X}_{A_j}(x)\mathcal{X}_{B_j}(y).$$

Assim, se integrarmos com respeito a x utilizando o Teorema 6.2, nós obtemos:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y) \, d\mu &= \int \sum_{j \geq 1} \mathcal{X}_{A_j}(x)\mathcal{X}_{B_j}(y) \, d\mu = \sum_{j \geq 1} \int \mathcal{X}_{A_j}(x)\mathcal{X}_{B_j}(y) \, d\mu \implies \\ \implies \mu(A) \cdot \mathcal{X}_B(y) &= \sum_{j \geq 1} \mu(A_j)\mathcal{X}_{B_j}(y). \end{aligned}$$

Analogamente, integrando em y , teremos:

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{j \geq 1} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

Agora, seja $R \in \mathcal{R}$ tal que $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$, onde $R_i = A_i \times B_i$, $A_i \in \mathcal{M}$ e $B_i \in \mathcal{N}$. Definimos:

$$\pi(R) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i).$$

Observemos que π está bem definida. De fato, seja $R = \bigcup_{i=1}^n R_i = \bigcup_{j=1}^m S_j$, onde $R_i = A_i \times B_i$ e $S_j = E_j \times F_j$, então:

$$\bigcup_{i=1}^n R_i = \bigcup_{i,j=1}^{n,m} (R_i \cap S_j) = \bigcup_{j=1}^m S_j.$$

Logo, $\pi(R) = \pi(S)$, ou seja, π está bem definida. Além disso, seja $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos disjuntos em \mathcal{R} tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathcal{R}$, onde $S_i = \bigcup_{j=1}^n S_j^i$ e $S_j^i = A_j^i \times B_j^i$, com $A_j^i \in \mathcal{M}$ e $B_j^i \in \mathcal{N}$, então notemos que:

$$\begin{aligned} \pi(\emptyset) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\emptyset)\nu(\emptyset) = 0, \\ \pi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j^i)\nu(B_j^i). \end{aligned}$$

Portanto, π está bem definida e é uma pré-medida.

Assim, pelo Teorema 4.3, temos que π se estende a uma medida em $\sigma(R) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, proveniente da medida exterior também gerada por π . Esta medida é chamada **medida**

do produto, sendo denotada por $\mu \times \nu$. Mais ainda, se μ e ν são σ -finitas, ou seja, $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, com $\mu(A_j) < \infty$ e $\nu(B_k) < \infty$, então $X \times Y = \bigcup_{i,j \geq 1} A_i \times B_j$ e $\pi(A_i \times B_j) = \mu(A_i)\nu(B_j) < \infty$.

Portanto, π é σ -finita e neste caso, pelo Teorema 4.3, a extensão de π a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tal que $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ é única, para todo retângulo $A \times B$.

Definição 9.2. Dado $E \subset X \times Y$, para $x \in X$ e $y \in Y$, definimos:

(i) **Seção x de E :**

$$E_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}.$$

(ii) **Seção y de E :**

$$E^y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}.$$

Se $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$, definimos:

$$\begin{array}{ll} f_x : Y \rightarrow \mathbb{C} & f^y : X \rightarrow \mathbb{C} \\ y \mapsto f(x, y) & x \mapsto f(x, y) \end{array}$$

Proposição 9.2. (i) Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, então $E_x \in \mathcal{N}$ e $E^y \in \mathcal{M}$, para todos $(x, y) \in X \times Y$.

(ii) Se f é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável, então f_x é \mathcal{N} -mensurável, para todo $x \in X$ e f^y é \mathcal{M} -mensurável, para todo $y \in Y$.

Demonstração. (i) Seja \mathcal{R} a coleção de todos os subconjuntos E de $X \times Y$ tal que $E_x \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$, e $E^y \in \mathcal{M}$, para todo $y \in Y$. Seja $A \times B \in X \times Y$, notemos que:

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{se } x \in A, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (A \times B)^y = \begin{cases} A, & \text{se } y \in B, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $A, \emptyset \in \mathcal{M}$ e $B, \emptyset \in \mathcal{N}$, então $A \times B \in \mathcal{R}$. Logo, \mathcal{R} contém todos os retângulos. Além disso, observemos que:

$$\begin{aligned} y \in \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)_x &\iff y \in \left\{ y \in Y \mid (x, y) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\} \\ &\iff \exists j \in \mathbb{N} \text{ tal que } y \in \{y \in Y \mid (x, y) \in E_j\} \\ &\iff \exists j \in \mathbb{N} \text{ tal que } y \in (E_j)_x \\ &\iff y \in \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y \in (E^c)_x &\iff y \in \{y \in Y \mid (x, y) \in E^c\} \\
&\iff y \in \{y \in Y \mid (x, y) \in X \setminus E\} \\
&\iff y \in \{y \in Y \mid (x, y) \in X\} \text{ e } y \notin \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \\
&\iff y \in (E_x)^c.
\end{aligned}$$

Portanto, $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x$ e $(E^c)_x = (E_x)^c$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^y &\iff x \in \left\{x \in Y \mid (x, y) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right\} \\
&\iff \exists j \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in \{x \in X \mid (x, y) \in E_j\} \\
&\iff \exists j \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in (E_j)_y \\
&\iff x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)^y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in (E^c)^y &\iff x \in \{x \in X \mid (x, y) \in E^c\} \\
&\iff x \in \{x \in X \mid (x, y) \in X \setminus E\} \\
&\iff x \in \{x \in X \mid (x, y) \in X\} \text{ e } x \notin \{x \in X \mid (x, y) \in E\} \\
&\iff x \in (E^y)^c.
\end{aligned}$$

Portanto, $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^y = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)^y$ e $(E^c)^y = (E^y)^c$.

Assim, temos que $\emptyset \in \mathcal{R}$, pois $\emptyset_x = \emptyset \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$, e $\emptyset^y = \emptyset \in \mathcal{N}$, para todo $y \in Y$.

Além disso, seja $E \in \mathcal{R}$, temos que $E_x \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$, e $E^y \in \mathcal{N}$, para todo $y \in Y$. Assim, $(E_x)^c = (E^c)_x \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$, e $(E^y)^c = (E^c)^y \in \mathcal{M}$, para todo $y \in Y$. Portanto, $E^c \in \mathcal{R}$.

Por fim, seja $\{E_j\} \subset \mathcal{R}$, temos que como $E_j \in \mathcal{R}$, para todo j , então para todo j , segue que $(E_j)_x \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$, e $(E_j)^y \in \mathcal{M}$, para todo $y \in Y$. Como $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^y = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)^y \in \mathcal{M}$, para todo $y \in Y$, e $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$. Então, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{R}$.

Portanto, \mathcal{R} é uma σ -álgebra. Como \mathcal{R} contém todos os retângulos, temos que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$. Portanto, se $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, temos que $E_x \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$, e $E^y \in \mathcal{M}$, para todo $y \in Y$.

- (ii) Se f é $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -mensurável, então seja $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$, temos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, para todo $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}$. Assim, $(f^{-1}(B))_x \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$, e $(f^{-1}(B))^y \in \mathcal{M}$, para todo $y \in Y$. Observemos que:

$$\begin{aligned} y \in (f^{-1}(B))_x &\iff y \in \{y \in Y \mid (x, y) \in f^{-1}(B)\} \\ &\iff y \in \{y \in Y \mid f(x, y) \in B\} \\ &\iff y \in (f_x)^{-1}(B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in (f^{-1}(B))^y &\iff x \in \{x \in X \mid (x, y) \in f^{-1}(B)\} \\ &\iff x \in \{x \in X \mid f(x, y) \in B\} \\ &\iff x \in (f^y)^{-1}(B). \end{aligned}$$

Logo, $(f_x)^{-1}(B) \in \mathcal{N}$ e $(f^y)^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. Portanto, f_x é \mathcal{N} -mensurável e f^y é \mathcal{M} -mensurável. ■

Definição 9.3. Uma classe $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(X)$ é **monótona em X** se:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{C}$;
- (ii) $E_j \in \mathcal{C}, E_j \subset E_{j+1}, j \in \mathbb{N} \implies \bigcup_j E_j \in \mathcal{C}$;
- (iii) $E_j \in \mathcal{C}, E_{j+1} \subset E_j, j \in \mathbb{N} \implies \bigcap_j E_j \in \mathcal{C}$.

Exemplo 9.1. Toda σ -álgebra é uma classe monótona.

Definição 9.4. Se $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}(X)$, seja $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ a menor classe monótona que contém $\mathcal{E} = \bigcap \{\mathcal{C}_a \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{C}_a \text{ e } \mathcal{C}_a \text{ é classe monótona}\}$.

Lema 9.1. [Lema da classe monótona]. Se \mathcal{A} é uma álgebra de subconjuntos de X , então a classe \mathcal{C} gerada por \mathcal{A} coincide com a σ -álgebra \mathcal{M} gerada por \mathcal{A} .

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$, assim como $\sigma(\mathcal{A})$ é uma classe monótona contendo \mathcal{A} , então $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$.

Seja $E \in \mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathcal{A})$, definimos:

$$\mathcal{C}(E) = \{F \in \mathcal{C} \mid E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{C}\}.$$

Assim, temos que $\emptyset, E \in \mathcal{C}(E)$ e se $F \in \mathcal{C}$, então $E \in \mathcal{C}(F)$ se, e somente se, $F \in \mathcal{C}(E)$.

Agora, iremos verificar que $\mathcal{C}(E)$ é uma classe monótona.

- (i) De fato, $\emptyset \in \mathcal{C}(E)$, pois $E \setminus \emptyset = E \in \mathcal{C}$, $\emptyset \setminus E = \emptyset \in \mathcal{C}$ e $E \cap \emptyset = \emptyset$.

(ii) Sejam $\{E_j\} \subset \mathcal{C}(E)$ tais que $E_j \subset E_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Então:

$$\text{a) } E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} E \setminus E_j \in \mathcal{C};$$

$$\text{b) } \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \setminus E \in \mathcal{C};$$

$$\text{c) } E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} E \cap E_j \in \mathcal{C}.$$

Portanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{C}(E)$.

(iii) Sejam $\{E_j\} \subset \mathcal{C}(E)$ tais que $E_{j+1} \subset E_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Então:

$$\text{a) } E \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E \setminus E_j \in \mathcal{C};$$

$$\text{b) } \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \right) \setminus E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \setminus E \in \mathcal{C};$$

$$\text{c) } E \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} E \cap E_j \in \mathcal{C}.$$

Logo, $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{C}(E)$.

Portanto, $\mathcal{C}(E)$ é uma classe monótona. Observemos que se $E \in \mathcal{A}$, então para todo $F \in \mathcal{A}$, temos que $E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{A}$, pois \mathcal{A} é uma álgebra. Logo, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E)$, para todo $E \in \mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(E)$. Então, para todo $F \in \mathcal{C}(E)$, temos que $E \in \mathcal{C}(F)$. Desse modo, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(F)$, para todo $F \in \mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{C} \in \mathcal{C}(F)$.

Concluimos que se $A, B \in \mathcal{C}$, então $A \in \mathcal{C}(B)$, implicando que $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{C}$. Como $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, então $X \setminus A = A^c \in \mathcal{C}$, para todo $A \in \mathcal{C}$. Ainda, se $A, B \in \mathcal{C}$, então $A \cup B = [A^c \cap B^c]^c \in \mathcal{C}$, pois $A^c, B^c, A^c \cap B^c \in \mathcal{C}$. Por fim, seja $\{E_j\} \in \mathcal{C}$ e consideremos $F_n := \bigcup_{j=1}^n E_j$. Assim, $F_n \in \mathcal{C}$ e $F_n \subset F_{n+1}$. Como \mathcal{C} é uma classe monótona,

$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{C}$. Portanto, \mathcal{C} é uma σ -álgebra que contém \mathcal{A} . Logo, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A})$. ■

Teorema 9.1. *Suponha que (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) sejam espaços mensuráveis σ -finitos. Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, então as funções $x \mapsto \nu(E_x)$ e $y \mapsto \mu(E^y)$ são mensuráveis em X e Y , respectivamente, e:*

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E^y) d\nu(y). \quad (9.1)$$

Demonstração. Suponhamos que μ e ν são finitas e seja \mathcal{C} o conjunto de todos os elementos $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tais que as conclusões do teorema são verdadeiras. Se $E = A \times B$, então $\nu(E_x) = \mathcal{X}_A(x)\nu(B)$ e $\mu(E^y) = \mu(A)\mathcal{X}_B(y)$, assim $E \in \mathcal{C}$. Pela aditividade, segue que as uniões disjuntas finitas de retângulos estão em \mathcal{C} , então, pelo Lema 9.1, é suficiente mostrar que \mathcal{C} é uma classe monótona.

Se $\{E_n\}$ é uma sequência crescente em \mathcal{C} e $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então as funções $f_n(y) = \mu((E_n)^y)$ são mensuráveis e aumentam pontualmente para $f(y) = \mu(E^y)$. Portanto, f é mensurável, e pelo Teorema 6.1, temos que:

$$\int \mu(E^y) d\nu(y) = \lim \int \mu((E_n)^y) d\nu(y) = \lim(\mu \times \nu)(E_n) = (\mu \times \nu)(E).$$

Como $(\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x)$, então $E \in \mathcal{C}$. Do mesmo modo, se $\{E_n\}$ é uma sequência decrescente em \mathcal{C} e $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, a função $y \mapsto \mu((E_1)^y)$ está em $L^1(\nu)$, pois:

$$\mu((E_1)^y) \leq \mu(X) < \infty$$

e $\nu(Y) < \infty$. Então aplicando o Teorema 6.1, podemos mostrar que $E \in \mathcal{C}$. Então \mathcal{C} é uma classe monótona, para o caso de espaços mensuráveis finitos.

Por fim, se μ e ν são σ -finitos, nós podemos escrever $X \times Y$ como uma união de elementos de uma sequência crescente $\{X_j \times Y_j\}$ de retângulos finitos mensuráveis. Se $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, então podemos aplicar $E \cap (X_j \times Y_j)$, para cada j , para obter:

$$(\mu \times \nu)(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int \mathcal{X}_{X_j}(x)\nu(E_x \cap Y_j) d\mu(x) = \int \mathcal{X}_{Y_j}\mu(E^y \cap X_j) d\nu(y),$$

e pelo Teorema 6.1 segue o resultado. ■

Capítulo 10

Aplicação

No século XIX, o físico austríaco Ludwig E. Boltzmann desenvolveu estudos sobre a teoria cinética dos gases. Através dos seus trabalhos, houve o desenvolvimento da Teoria Ergódica, que é um ramo de Sistemas Dinâmicos que estuda sistemas munidos de medidas invariantes.

Um dos problemas estudados pela Teoria Ergódica é analisar qualitativamente o conjunto dos iterados de um ponto que visitam um conjunto mensurável, que está contido em um conjunto que contém esse ponto. Em outras palavras, considerando um conjunto mensurável $E \subset X$ com medida positiva e um ponto $x \in X$ qualquer, queremos verificar as propriedades relacionadas ao conjunto:

$$I = \{j \geq 0 \mid f^j(x) \in E\}.$$

A partir desse conjunto, podemos definir o **tempo médio de visita** de x a E , que é dado por:

$$\tau(E, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n \mid f^j(x) \in E\}. \quad (10.1)$$

Para fluxos, podemos definir uma noção análoga dada por:

$$\tau(E, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} m(\{0 \leq t \leq T \mid f^t(x) \in E\}), \quad (10.2)$$

onde m é a medida de Lebesgue na reta.

Assim, podemos nos perguntar sob quais condições esse tempo médio de visita é positivo e até mesmo se esses limites existem. Para responder tais perguntas, podemos reescrever a equação (10.1) utilizando a função característica φ do conjunto E , ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)). \quad (10.3)$$

A partir disso, passamos a nos questionar se o limite (10.3) existe para funções φ muito gerais, tais como as funções integráveis. Sob esse contexto, os teoremas ergódicos nos asseguram alguns resultados sobre isso. Entre eles, o teorema ergódico de Von Neumann assegura que esse limite existe no espaço $L^2(\mu)$, para toda função $\varphi \in L^2(\mu)$. Para este capítulo, foi utilizada a referência [10].

10.1 Conceitos preliminares

Definição 10.1. Um **espaço de Hilbert** é um espaço vetorial munido de um produto interno cuja norma $\|\cdot\|$ é completa.

Exemplo 10.1. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n com o produto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$.

Proposição 10.1. [Desigualdade de Minkowski]. Sejam L^p o conjunto das funções complexas p -integráveis com relação a μ e $f, g \in L^p(\mu)$, então:

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Para a demonstração deste resultado recomenda-se a leitura da referência ([2]) p. 3. ■

Exemplo 10.2. O espaço $L^2(\mu)$ das funções com quadrado integrável num espaço de medida (X, Σ, μ) munido do produto interno:

$$\varphi \cdot \psi = \int_X \varphi \bar{\psi} d\mu.$$

Resolução. A partir do produto interno definido acima, podemos definir uma norma para $L^2(\mu)$, dada por:

$$\|f\|_2 = (f \cdot f)^{1/2}.$$

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^2(\mu)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomando $\epsilon_k = 1/2^k$ temos que existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geq N_k$, temos que:

$$\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{2^k}.$$

Agora, defina:

$$\begin{aligned} g(x) &:= |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(|f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \right). \end{aligned}$$

Logo, g é mensurável e pertence a M^+ .

Afirmamos que $g \in L^2$. De fato, pelo Lema de Fatou, temos que:

$$\begin{aligned} \int g^2 d\mu &= \int \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^2 d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^2 d\mu \right), \end{aligned}$$

daí,

$$\left(\int g^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^2 d\mu \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, pela Proposição 10.1, temos que:

$$\begin{aligned} \|g\|_2 &\leq \left[\liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^2 d\mu \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\int \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\int |f_{n_1}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\int |f_{n_1}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^k \int |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\int |f_{n_1}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^k \left(\int |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\|f_{n_1}\|_2 + \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_2 \right) \\ &\leq \|f_{n_1}\|_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \|f_{n_1}\|_2 + 1. \end{aligned}$$

Logo, $g \in L_2$ e $\mu(\{x \mid g(x) = +\infty\}) = 0$. Desse modo, temos que g converge a um valor finito em quase todo ponto. Notemos ainda que $g \geq 0$. Agora, seja $A = \{x \mid g(x) < \infty\}$ e definimos f da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) & , \text{ se } x \in A, \\ 0 & , \text{ se } x \notin A. \end{cases}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |f_{n_k}| &= |f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \cdots + (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})| \\ &\leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \\ &\leq g. \end{aligned}$$

Agora, $f_{n_k} \rightarrow f$ em quase todo ponto. Logo $f \in L_2$, pois $|f_{n_k}| \leq g$ e $\lim f_{n_k} = f$, então $|f| \leq g$ e assim $\int |f|^2 d\mu \leq \int |g|^2$.

Para mostrar que $\|f_{n_k} - f\|_2 \rightarrow 0$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada à sequência $|f_{n_k} - f|^2$ dominada por $2^2 g^2$, obtendo desse modo que $\|f_{n_k} - f\|_2 \rightarrow 0$. Logo, uma subsequência de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f . Daí,

$$\|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - f_{n_k}\|_2 + \|f_{n_k} - f\|_2.$$

Portanto, $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$. ■

Definição 10.2. Sejam H um espaço de Hilbert e F um subespaço fechado de H . Então,

$$H = F \oplus F^\perp, \quad (10.4)$$

onde $F^\perp = \{w \in H \mid v \cdot w = 0, \text{ para todo } v \in F\}$ é o **complementar ortogonal** de F .

Definição 10.3. A projeção $P_F : H \rightarrow F$ associada à decomposição (10.4) da Definição 10.2 é chamada **projeção ortogonal sobre F** .

Exemplo 10.3. Considere o espaço de Hilbert $L^2(\mu)$, com o produto interno:

$$\varphi \cdot \psi = \int \varphi \bar{\psi} d\mu.$$

Se φ_0 é a função constante igual a 1 e F é o subespaço gerado por φ_0 em $L^2(\mu)$, ou seja, o espaço das funções constantes, então a projeção ortogonal $P_F(\varphi)$ é dada por:

$$P_F(\varphi) = \int \varphi d\mu.$$

Resolução. De fato, já que F é gerado por φ_0 , então $P_F(\varphi) = c \cdot \varphi_0$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

Ainda como P_F é a projeção, então,

$$\begin{aligned} (P_F(\varphi) - \varphi) \cdot \varphi_0 &= 0 \iff \\ (c\varphi_0 - \varphi) \cdot \varphi_0 &= 0 \iff \\ c(\varphi_0 \cdot \varphi_0) - (\varphi \cdot \varphi_0) &= 0 \iff \\ c &= \frac{\varphi \cdot \varphi_0}{\varphi_0 \cdot \varphi_0} \iff \\ c &= \int \varphi d\mu. \end{aligned}$$

■

Definição 10.4. Seja $U : H \rightarrow H$ um operador linear contínuo. Um **operador adjunto** $U^* : H \rightarrow H$ é aquele que satisfaz a relação:

$$U^*u \cdot v = u \cdot Uv, \text{ para todo } u, v \in H. \quad (10.5)$$

Definição 10.5. Seja $U : H \rightarrow H$ um operador linear contínuo. Dizemos que U é uma **isometria** se ele preserva o produto interno:

$$Uu \cdot Uv = u \cdot v, \text{ para todo } u, v \in H. \quad (10.6)$$

Exemplo 10.4. Se $f : M \rightarrow M$ preserva uma medida μ , então o seu operador de Koopman $U_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ é uma isometria.

Resolução. Podemos lembrar que se (X, Σ) é um espaço mensurável, $f : X \rightarrow X$ é uma transformação mensurável e μ uma medida invariante por f , o operador de Koopman para L^2 é o operador linear:

$$U_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu), \quad U_f(\phi) = \phi \circ f.$$

Este operador é uma isometria, pois:

$$\begin{aligned} U_f(\phi_1) \cdot U_f(\phi_2) &= \int_X U_f(\phi_1) \overline{U_f(\phi_2)} \, d\mu \\ &= \int_X (\phi_1 \circ f) \overline{(\phi_2 \circ f)} \, d\mu \\ &= \int_X (\phi_1 \circ f) \overline{(\phi_2 \circ f)} \, d\mu \\ &= \int_X \phi_1 \overline{\phi_2} \circ f \, d\mu \\ &= \int_X \phi_1 \overline{\phi_2} \, d\mu \\ &= \phi_1 \cdot \phi_2. \end{aligned}$$

Portanto, $U_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ é uma isometria. ■

Definição 10.6. Seja $U : H \rightarrow H$ um operador linear contínuo. O **conjunto dos vetores invariantes** do operador U é o subespaço:

$$I(U) = \{v \in H \mid Uv = v\}.$$

Lema 10.1. Se $U : H \rightarrow H$ é uma isometria então $Uv = v$ se, e somente se, $U^*v = v$.

Demonstração. Seja $U : H \rightarrow H$ é uma isometria e U^* seu operador adjunto, assim temos que $U^* \circ U = \text{Id}$. Desse modo, se $U(v) = v$, então:

$$(U^* \circ U)(v) = \text{Id}(v) = v \implies (U^* \circ U)(v) = U^*(U(v)) = U^*(v) = v.$$

Agora, suponhamos que $U^*(v) = v$, então:

$$\langle U(v), v \rangle = \langle v, U^*(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

Ainda, como U preserva a norma de H , então:

$$\|U(v) - v\|^2 = \langle U(v) - v, U(v) - v \rangle = \|U(v)\|^2 - 2\langle U(v), v \rangle + \|v\|^2 = 0.$$

Portanto, $U(v) = v$. ■

10.2 Teorema de Von Neumann

Teorema 10.1. [Teorema de Von Neumann]. *Sejam $U : H \rightarrow H$ uma isometria num espaço de Hilbert H e P uma projeção ortogonal sobre o subespaço $I(U)$ dos vetores invariantes por U . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) = P(v), \quad \forall v \in H.$$

Demonstração. Sejam $L(U)$ o conjunto dos vetores $v \in H$ da forma $v = U(u) - u$, para algum $u \in H$, e $\overline{L}(U)$ o seu fecho. Afirmamos que:

$$I(U) = \overline{L}(U)^\perp.$$

De fato, consideremos qualquer $v \in I(U)$ e $w \in \overline{L}(U)$. Pelo Lema 10.1, temos que $v \in I(U^*)$, ou seja, $U^*(v) = v$. Além disso, por definição de $\overline{L}(U)$, existem $u_n \in H$ onde tais que $U(u_n) - u_n \rightarrow w$, onde $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\langle v, U(u_n) - u_n \rangle = \langle v, U(u_n) \rangle - \langle v, u_n \rangle = \langle U^*(v), u_n \rangle - \langle v, u_n \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por conseguinte, $\langle v, w \rangle = 0$. Logo, $I(U) \subset \overline{L}(U)^\perp$.

Agora, seja $v \in \overline{L}(U)^\perp$, então:

$$\begin{aligned} \langle v, U(u) - u \rangle = 0 &\implies \langle v, U(u) \rangle - \langle v, u \rangle = 0 \\ &\implies \langle U^*(v), U^*(U(u)) \rangle - \langle v, u \rangle = 0 \\ &\implies \langle U^*(v), u \rangle - \langle v, u \rangle = 0, \quad \forall u \in H. \end{aligned}$$

Assim, $U^*(v) = v$ e pelo Lema 10.1, segue que $U(v) = v$, ou seja, $v \in I(U)$. Logo, $\overline{L}(U)^\perp \subset I(U)$ e, portanto, $I(U) = \overline{L}(U)^\perp$.

Como $\overline{L}(U)$ é um subespaço de H , então:

$$H = \overline{L}(U) \oplus \overline{L}(U)^\perp = \overline{L}(U) \oplus I(U).$$

Agora para provarmos o que queremos, vamos considerar três casos:

(i) Caso: $v \in I(U)$. Se $v \in I(U)$, então $P(v) = v$, assim:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} v = v = P(v).$$

(ii) Caso: $v \in \overline{L(U)}$.

Se $v \in L(U)$, então existe $u \in H$ tal que $v = U(u) - u$, assim:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (U^{j+1}(u) - U^j(u)) = \frac{1}{n} (U^n(u) - u).$$

Ainda, notemos que:

$$\left\| \frac{1}{n} (U^n(u) - u) \right\| = \frac{1}{n} \|U^n(u) - u\| \leq \frac{1}{n} (\|U^n(u)\| + \|u\|) \leq \frac{1}{n} (\|u\| + \|u\|) = \frac{2\|u\|}{n}.$$

Assim, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\left\| \frac{1}{n} (U^n(u) - u) \right\| \rightarrow 0$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) = 0, \quad \forall v \in L(U).$$

Agora, suponhamos que $v \in \overline{L(U)}$, então existem $v_k \in L(U)$ tal que $v_k \rightarrow v$. Então,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v_k) \right\| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|U^j(v - v_k)\| \leq \|v - v_k\|, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v_k) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) = 0, \quad \forall v \in \overline{L(U)}.$$

Além disso, como $I(U) = \overline{L(U)}^\perp$, temos que $P(v) = 0$, para todo $v \in \overline{L(U)}$, o que mostra que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) = P(v), \quad \forall v \in \overline{L(U)}.$$

(iii) Caso: $v \in I(U) \oplus \overline{L(U)}$. Seja $v \in I(U) \oplus \overline{L(U)}$, temos que $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in I(U)$

e $v_2 \in \overline{L}(U)$. Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v_1 + v_2) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} [U^j(v_1) + U^j(v_2)] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v_1) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v_2) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v_2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) = P(v), \quad \forall v \in H.$$

■

Definição 10.7. Dada uma transformação mensurável $f : M \rightarrow M$ que preserva uma probabilidade μ em M , dizemos que uma função mensurável $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é **invariante** se $\psi \circ f = \psi$ em μ -quase todo ponto.

Corolário 10.1. Para qualquer $\phi \in L^2(\mu)$ a sequência:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j.$$

converge em $L^2(\mu)$ para a projeção ortogonal $\tilde{\phi}$ da função ϕ no subespaço das funções invariantes. Se f é invertível, então a sequência:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^{-j}$$

também converge em $L^2(\mu)$ para $\tilde{\phi}$.

Demonstração. Seja $U = U_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ o operador de Koopman de uma transformação $f : M \rightarrow M$ que preserva uma medida finita μ . Assim, $\psi \in I(U)$ se, e somente se, $\psi \circ f = \psi$ em μ -quase todo ponto. Seja $\tilde{\phi}$ a projeção ortogonal de ϕ em $I(U)$. Então, pelo Teorema 10.1 temos que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j \rightarrow \tilde{\phi},$$

em $L^2(\mu)$.

Além disso, consideremos $U = U_{f^{-1}}$, ou seja, $U = U_f^{-1}$. Assim, teremos que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^{-j} \rightarrow P_{I(U_f^{-1})}(\phi),$$

onde $P_{I(U_f^{-1})}(\phi)$ é a projeção ortogonal de ϕ no espaço $I(U_f^{-1})$. Como $I(U_f^{-1}) = I(U_f)$, então:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^{-j} \rightarrow \tilde{\phi}.$$

Assim, o corolário está demonstrado. ■

Capítulo 11

Considerações finais

Ao longo desta monografia conseguimos compreender alguns conceitos fundamentais de Teoria da Medida. Vimos que uma σ -álgebra é uma coleção de subconjuntos de um conjunto que é fechado pelo complementar e pela união enumerável, além de conter o conjunto vazio. Esta σ -álgebra pode ser gerada a partir de uma coleção, como é o caso das σ -álgebras de Borel que são gerados por uma topologia \mathcal{T} , e das σ -álgebras de um produto cartesiano de conjuntos não vazios, que são gerados pela coleção das pré-imagens das projeções.

Intuitivamente, vimos que uma medida consiste em uma forma de atribuir um valor numérico ou não aos elementos da σ -álgebra. Isto é feito mais rigorosamente com a definição de uma aplicação com domínio em uma σ -álgebra e contradomínio no conjunto $[0, \infty]$, de modo que ela satisfaça duas propriedades. A primeira delas impõe que a medida do conjunto vazio é 0 e a segunda diz que a medida de uma sequência disjunta de elementos da σ -álgebra deverá ser igual à soma das medidas de cada elemento. Diante disso, podemos notar que, a partir de um conjunto e de uma σ -álgebra, podemos definir diferentes tipos de medida. E daí, para cada tripla composta desses três itens, podemos determinar um espaço de medida diferente.

Um tipo especial de medida que vimos e que é muito útil, é a medida exterior. Definida a partir de uma aplicação com domínio no conjunto das partes de um conjunto não vazio e contradomínio no conjunto $[0, \infty]$, esta função restrita a uma coleção de conjuntos μ^* -mensuráveis define uma σ -álgebra. Quando esta medida exterior é restrita a ela, então essa aplicação se torna uma medida completa.

Ainda, vimos também que a partir de uma aplicação com domínio em um subconjunto das partes de um conjunto X e contradomínio $[0, \infty]$, sob certas restrições, obtemos uma medida exterior. Esse processo, aliado ao fato de conseguirmos construir uma medida a partir da medida exterior considerada, se torna um meio de construir novas medidas. Um exemplo disso é a medida de Lebesgue, que é obtida a partir de uma medida exterior vinda da aplicação que associava os intervalos abertos de \mathbb{R} aos seus respectivos comprimentos.

Depois disso, vimos que a partir dos espaços de medidas, podemos trabalhar com

funções mensuráveis. Estas aplicações são caracterizadas por levar elementos da σ -álgebra do contradomínio em elementos da σ -álgebra do domínio. E para cada uma delas, existe uma sequência de funções simples não-decrescentes que convergem pontualmente para elas e uniformemente nos conjuntos em que elas são limitadas.

E é a partir dessas sequências de funções simples que definimos o conceito de integral sobre funções mensuráveis. Para isso, é considerado como a integral de uma função mensurável o supremo das integrais aplicadas a cada uma dessas sequências de funções simples. Sendo que essas integrais aplicadas nessas aplicações simples são definidas como sendo o somatório da combinação linear com os coeficientes e com a medida aplicada a cada um dos elementos da σ -álgebra da representação padrão de cada uma dessas funções.

Desse modo, é possível definir diferentes tipos de integrais a partir da medida atribuída ao espaço de medida. Um exemplo disso é a integral de Lebesgue, que considera a integração sobre a medida de Lebesgue. Esta, em comparação com a integral de Riemann, tem mais vantagens haja visto que funções Riemann integráveis são Lebesgue mensuráveis. E existem funções que, mesmo não sendo Riemann integráveis, são Lebesgue integráveis.

Por fim, é válido destacar que uma das aplicações dos conceitos estudados em Teoria da Medida encontra-se na aplicação de teoremas da Teoria Ergódica, como é o caso do Teorema de Von Neumann. Esse resultado busca estabelecer condições para que o tempo médio de visita exista quando trabalhamos com isometrias e projeções ortogonais em espaços de Hilbert.

Referências Bibliográficas

- [1] BARTLE, Robert G. **Elements of integration and Lebesgue measure**. 1^a ed. John Wiley & Sons, 1995.
- [2] BELOQUI, Jorge Adrian. **Desigualdades de Holdere e Minkowski - MAT0234 Medida e Integração**. 2020. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php?>. Acesso em: 10/02/2024
- [3] BURK, Frank. **Lebesgue measure and integration: an introduction**. John Willey & Sons, Inc, 1998.
- [4] CABRAL, Marco A. P. **Introdução à teoria da medida e integral de Lebesgue**. 3^a ed. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2016.
- [5] COOKE, R. Solutions manual to Walter Rudin's Principles of mathematical analysis. [Burlington]: University of Vermont, 1976.
- [6] FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. 2^a ed. New Jersey: John Willey & Sons, Inc, 1999.
- [7] LIMA, Elon L. **Espaços métricos**. Projeto Euclides. 6^a ed. IMPA. Rio de Janeiro, 2020.
- [8] MAEKAWA, Lucas Hideo. **Introdução à teoria da medida e integração**. 2022. TCC (Graduação) - Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/16998>. Acesso em: 19/08/2023.
- [9] MUNKERS, James R. **Topology**, 2001.
- [10] OLIVEIRA, Krerley; VIANA, Marcelo. **Fundamentos da teoria ergódica**. IMPA, Brazil, p. 3-12, 2014.
- [11] RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**, 3^a ed. McGraw-Hill. Book Company, Cingapura, 1976.