



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações semilineares com não linearidade de absorção e medida como dado

Carlos Eduardo Passarin Segantin

São Carlos-SP
Março de 2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações semilineares com não linearidade de absorção e medida como dado

Carlos Eduardo Passarin Segantin

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Adilson Eduardo Presoto

Coorientador(a): Prof(a). Dr(a). Olimpio Hiroshi Miyagaki

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP

Março de 2026

Segantin, Carlos Eduardo Passarin

Equações semilineares com não linearidade de absorção e medida como dado / Carlos Eduardo Passarin Segantin -- 2026.
112f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Adilson Eduardo Presoto
Banca Examinadora: Adilson Eduardo Presoto, Gustavo Ferron Madeira, Sérgio Leandro Nascimento Neves
Bibliografia

1. EDP com medida. 2. Problema de Dirichlet. 3. Equações não lineares. I. Segantin, Carlos Eduardo Passarin. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato **Carlos Eduardo Passarin Segantin**, realizada em **04/03/2026**.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto (UFSCar)

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira (UFSCar)

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves (UNESP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*Dedico este trabalho aos meus pais, Daniele e Geovani,
que desde sempre me incentivaram a seguir meus sonhos.*

Agradecimentos

Existe uma frase famosa na história da matemática, atribuída a Pierre de Fermat, que diz: “*Encontrei uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é muito estreita para contê-la*”. Ao olhar para este trabalho finalizado, entendo perfeitamente esse sentimento. As páginas desta dissertação cumprem o seu papel de registrar o rigor científico e os resultados de todo o trabalho, mas elas são, de fato, uma “margem estreita”. Nelas não cabem o tamanho do aprendizado pessoal, as dúvidas superadas e o amadurecimento que tive ao longo desses dois anos. A matemática está no papel, mas a experiência de vida que me trouxe até aqui vai muito além dele.

Por isso, deixo aqui meu muito obrigado àqueles que fizeram parte dessa trajetória.

A Deus, primeiramente, por ser a fonte da minha vida e da minha força. Agradeço por ter me sustentado nos momentos de incerteza, renovado a minha fé e permitido que eu chegasse até o final desta etapa com saúde e clareza.

Aos meus pais, Daniele e Geovani, e irmão, José Luis, agradeço de todo o coração. Vocês são a minha base e o meu exemplo. Nada disso seria possível sem o apoio, a educação e o amor incondicional que sempre recebi de vocês.

Aos meus avós, pelo carinho constante e pela sabedoria de vida, e a todos os meus familiares, que, de perto ou de longe, torceram pelo meu sucesso e sempre acreditaram em mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto, expresso minha profunda gratidão. Obrigado pela confiança depositada neste trabalho, pela paciência nas correções e pela generosidade em compartilhar seu conhecimento ao longo dos últimos 6 anos. Sua orientação foi o norte que me permitiu não apenas concluir esta pesquisa, mas também amadurecer minha visão científica. À CAPES (Processo nº: 88887.954918/2024-00) e à FAPESP (Processo nº: 2024/05733-0), agradeço pelo indispensável apoio financeiro. O suporte dessas instituições foi essencial para que eu pudesse me dedicar a esta pesquisa com a profundidade necessária e alcançar os resultados aqui apresentados.

À minha noiva, meu agradecimento especial pela parceria diária. Obrigado por entender meus momentos de estudo, por me dar suporte emocional quando as coisas pareciam difíceis ou, até mesmo, impossíveis e por dividir a vida comigo. Essa conquista também é sua. Às minhas cachorrinhas, que com sua alegria simples e lealdade foram essenciais para tornar os meus dias melhores e mais divertidos. Obrigado pela companhia e por me lembrarem da importância de parar e respirar.

Aos meus amigos, obrigado pelas conversas, pelos momentos de descontração e pelo companheirismo. A presença de vocês transformou a pressão acadêmica em uma caminhada compartilhada e

muito mais leve.

Por fim, concluo esta etapa com o sentimento de dever cumprido. Levo comigo não apenas um título, mas a certeza de que a matemática e a vida são construções coletivas. Encerro esta etapa com a certeza de que não caminhei sozinho. A todos que fizeram parte desta trajetória, direta ou indiretamente, meu muito obrigado!

Resumo

Este trabalho teve como principal objetivo investigar o problema de Dirichlet não linear com dados de medida e as dificuldades que surgem ao diminuir a regularidade do dado. Estabeleceu-se uma estrutura analítica para estudar a existência, unicidade e regularidade de soluções quando o dado é uma medida, generalizando formulações clássicas que exigem dados em espaços de Lebesgue.

A abordagem baseia-se na teoria de espaços de Sobolev, na noção de capacidade e na teoria de medidas, empregando ferramentas como o potencial Newtoniano, a desigualdade de Kato e o princípio do máximo fraco e inverso. O texto desenvolve os fundamentos teóricos necessários para tratar do assunto, dentre eles: teoria da medida e integração (incluindo a decomposição de Radon-Nykodym-Lebesgue para medidas σ -finitas), propriedades das funções harmônicas, teoria de espaços de Sobolev (imersões, traço, desigualdades de Poincaré) e a formulação da equação de Poisson com dados de medida no sentido distribucional.

Os principais resultados obtidos incluem: a caracterização de soluções da equação de Poisson como a soma de um potencial Newtoniano e uma função harmônica; a equivalência entre formulações distribucionais e no dual do conjunto das funções suaves que se anulam na fronteira do domínio, para o problema de Dirichlet; e a obtenção de versões mais gerais do princípio do máximo (fraco e inverso) no contexto de medidas, utilizando a decomposição de uma medida em partes difusa e concentrada relativa à capacidade de Sobolev. Estes resultados consolidam a base para o estudo posterior de problemas não lineares.

Palavras-chave: Problema de Dirichlet; Princípio do Máximo; Equações não lineares; Espaços de Sobolev; Capacidade; EDP com medida.

Abstract

This work aimed to investigate the nonlinear Dirichlet problem with measure data and the difficulties that arise by reducing the regularity of the data. An analytical framework was established to study the existence, uniqueness, and regularity of solutions when the boundary data is a measure, generalizing classical formulations that require data in Lebesgue spaces.

The approach is based on Sobolev space theory, the notion of capacity, and measure theory, employing tools such as the Newtonian potential, Kato's inequality, and the weak and inverse maximum principles. The text develops the necessary theoretical foundations to address the subject, among them: measure and integration theory (including the Radon-Nikodym-Lebesgue decomposition for σ -finite measures), properties of harmonic functions, Sobolev space theory (embeddings, trace, Poincaré inequalities), and the formulation of the Poisson equation with measure data in the distributional sense.

The main results obtained include: the characterization of solutions as the sum of a Newtonian potential and a harmonic function; the equivalence between distributional and dual of the set of smooth functions vanishing at the domain boundary formulations of the Dirichlet problem; and the derivation of more general versions of the maximum principle (weak and inverse) in the context of measures, using the decomposition of a measure into diffuse and concentrated parts with respect to Sobolev capacity. These results consolidate the basis for the subsequent study of nonlinear problems.

Keywords: Dirichlet problem; Weak solution; Maximum Principle; Nonlinear equations; Sobolev spaces; Capacity; PDE; PDE with measure.

Sumário

Introdução	1
1 Teoria da Medida e Integração	3
1.1 Espaços e Funções Mensuráveis	3
1.2 Medidas	6
1.3 A Integral de Lebesgue	7
1.4 Os Espaços L^p	9
1.5 Decomposição de Medidas	10
1.5.1 Semimedidas e medidas difusas	10
1.5.2 Lema de extração	11
1.5.3 Decomposição de Radon-Nykodym-Lebesgue para medidas σ -finitas	11
2 Funções Harmônicas	13
2.1 Propriedades do Valor Médio	13
2.2 Soluções Fundamentais	22
3 Espaços de Sobolev	31
3.1 Espaços de Hölder	31
3.2 Derivadas Fracas	32
3.3 Espaços de Sobolev	32
3.4 Imersões de Sobolev	35
3.5 Compacidade e Desigualdades de Poincaré	37
3.6 Capacidade de Sobolev	39
4 Equação de Poisson	41
4.1 Soluções Distribucionais	41
4.2 Funções Superharmônicas	45
5 Princípio do Máximo Fraco	49
5.1 Desigualdade de Kato	54
5.2 Regularidade de soluções	59

5.3	Princípio do Máximo Inverso	61
6	O problema não linear	67
A	Apêndice	81
A.1	Fórmulas Clássicas	81
A.2	Desigualdades Fundamentais	82
A.3	Medidas e Distribuições	83
A.4	Regularização e Aproximação	87
A.5	Resultados sobre o Laplaciano	89
	Referências Bibliográficas	90

Lista de Figuras

1.1	Representação visual dos conjuntos definidos na aproximação por funções simples. .	5
5.1	Gráfico da função $H(t)$	52
5.2	Representação do truncamento de uma função no nível κ	62
5.3	Gráfico da função $\varphi_\varepsilon(x)$	64

Lista de Símbolos

Σ : σ -álgebra de subconjuntos de Ω ;

(Ω, Σ) : Espaço mensurável;

$M(\Omega, \Sigma)$: Espaço das funções Σ -mensuráveis;

μ : Medida;

(Ω, Σ, μ) : Espaço com medida;

$\int_{\Omega} f d\mu$: Integral de Lebesgue de f em Ω ;

$\|f\|_p$: Norma L^p de f ;

$\|f\|_{\infty}$: Norma do supremo essencial;

$\text{ess sup}_{\Omega}(u)$: Supremo essencial da função u em Ω ;

$L^p(\Omega, \mu)$: Espaço de Lebesgue das funções com $\|f\|_p < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ segundo a medida μ ;

$L^1(\Omega; |\mu|)$: espaço das funções integráveis segundo a medida da variação total $|\mu|$;

f^+, f^- : Parte positiva e negativa de f , respectivamente;

qtp : Quase sempre / quase todo ponto;

$\mathcal{M}(\Omega)$: Espaço das medidas de Borel finitas em Ω ;

$|v|$: Variação total da medida v ;

Ω : Aberto em \mathbb{R}^N ;

σ_N : Área da superfície da esfera unitária \mathbb{S}^{N-1} ;

\mathbb{S}^{N-1} : Esfera unitária em \mathbb{R}^N ;

$d\sigma$: Elemento de área superficial (medida de superfície);

$B_r(x)$: Bola aberta de centro x e raio r ;

$\partial B_r(x)$: Fronteira da bola $B_r(x)$;

$C^k(\Omega)$: Espaço de funções de classe C^k em Ω ;

$C_c^{\infty}(\Omega)$: Funções suaves com suporte compacto em Ω ;

- $C_0^\infty(\Omega)$: Funções suaves que se anulam na fronteira de Ω ;
 Δu : Laplaciano de u ;
 $D^\alpha u$: Derivada parcial de multi-índice α ;
 $\Gamma(a, x)$: Solução fundamental da equação de Laplace transladada por a ;
 $G(x, y)$: Função de Green para o domínio Ω ;
 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$: Derivada normal exterior;
 $K(x, y)$: Núcleo de Poisson;
 $\text{dist}(A, B)$: Distância entre os conjuntos A e B ;
 $\text{diam}(\Omega)$: Diâmetro do conjunto Ω ;
 $C^{k, \gamma}(\Omega)$: Espaço de Hölder de ordem k e expoente γ ;
 $[u]_{C^{0, \gamma}}$: Semi-norma de Hölder;
 $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$: Espaço das funções localmente integráveis em Ω ;
 $W^{k, p}(\Omega)$: Espaço de Sobolev de ordem k e expoente p ;
 $H^k(\Omega)$: Espaço de Sobolev $W^{k, 2}(\Omega)$;
 $W_0^{k, p}(\Omega)$: Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k, p}(\Omega)$;
 $\eta_\varepsilon * u$: Convolução de u com um regularizante;
 p^* : Expoente conjugado de Sobolev;
 $\text{cap}_{W^{k, p}}(K)$: Capacidade de Sobolev de um conjunto compacto K ;
 $(u)_\Omega$: Média de u em Ω ;
 δ_a : Medida de Dirac concentrada em a ;
 $\mathcal{N}(\mu)$: Potencial Newtoniano da medida μ ;
 $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega)$: Medidas de Borel localmente finitas em Ω ;
 $\text{supt}(\rho)$: Suporte da função ρ ;
 $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))'$: Dual do espaço de funções teste que se anulam na fronteira;
 $T_\kappa(u)$: Função truncada no nível κ ;
 $(\Delta u)^+$: Parte positiva da medida Δu ;
 \mathcal{L}_u : Conjunto dos pontos de Lebesgue de u ;

Introdução

O problema de Dirichlet para a equação de Poisson,

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, constitui um marco na teoria das equações diferenciais parciais elípticas. A abordagem clássica considera o dado μ pertencente a espaços de Lebesgue, tipicamente $L^p(\Omega)$ com $p > 1$, ou, no mínimo, $L^1(\Omega)$. Neste cenário, dispõe-se de uma teoria bem estabelecida para a existência, unicidade e regularidade de soluções no contexto dos espaços de Sobolev, fundamentada em métodos variacionais, estimativas a priori e na teoria da regularidade.

O avanço de áreas como a Mecânica Quântica, por sua vez, impulsionou o desenvolvimento de novas ferramentas da Análise Funcional, Teoria da Medida e Teoria das Distribuições, motivando a consideração de dados menos regulares. Na Teoria de Thomas-Fermi para átomos, moléculas e sólidos, por exemplo, obtém-se, após renormalização, equações da forma

$$-\Delta u + [(u - u_0)^+]^{3/2} = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{a_j} \quad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

onde $u(x)$ está relacionada à densidade eletrônica na posição x . Problemas dessa natureza revelaram fenômenos novos e sutis. Instigados pelo problema acima, Bénilan e Brezis em (Bénilan; Brezis, 2004), dedicaram-se a explorar $-\Delta u + |u|^{p-2}u = \delta_0$, sendo δ_0 a medida de Dirac concentrada na origem, e depararam-se com um surpreendente fenômeno de não existência de solução para $p > N/(N-2)$, evidenciando que o enfraquecimento dos dados pode levar a fenômenos inesperados. Outros exemplos importantes incluem modelos de Higgs com n vórtices estáticos,

$$\Delta \ln |\varphi| + 1 - |\varphi| = 2\pi \sum_{i=1}^n \delta_{a_i}, \quad a_i \in \mathbb{R}^2,$$

e modelos sigma calibrados do ferromagneto de Heisenberg,

$$-\Delta u + 4e^u(1 + e^u)^{-1} = 4\pi \sum_{i=1}^n \delta_{a_i} - 4\pi \sum_{i=1}^n \delta_{b_i}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}^2.$$

Esses exemplos justificam o estudo de problemas com dados de medida. Neste trabalho, figura como objetivo principal o *problema de Dirichlet não linear com termo de absorção e dado de medida*

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $g(t)t \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e μ é uma medida de Borel finita em Ω . A condição sobre g assegura que sua primitiva $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ seja não negativa, propriedade essencial para métodos variacionais.

A passagem de um dado integrável para um dado de medida não é meramente técnica. Ela impõe dificuldades que exigem a decomposição da medida em suas partes difusa e concentrada, cujos efeitos devem ser analisados separadamente.

A dissertação está organizada da seguinte forma. *No Capítulo 1*, revisitamos os fundamentos da Teoria da Medida e Integração, com ênfase nos espaços L^p , teoremas de convergência e a decomposição de Radon-Nikodym-Lebesgue. *No Capítulo 2*, exploramos as propriedades das funções harmônicas, incluindo a propriedade da média, princípios do máximo, solução fundamental e função de Green, que fornecem a base para a teoria linear. *No Capítulo 3*, apresentamos a teoria de espaços de Sobolev, cobrindo derivadas fracas, imersões, desigualdades de Poincaré e o conceito de *capacidade de Sobolev*, instrumento fundamental para caracterizar o “tamanho” de conjuntos no contexto da diferenciabilidade. *No Capítulo 4*, definimos a equação de Poisson no sentido distribucional para dados de medida, introduzimos o potencial Newtoniano e estudamos funções superharmônicas e sua relação com medidas não negativas. *No Capítulo 5*, abordamos o princípio do máximo fraco, versões da desigualdade de Kato para medidas e a prova do princípio do máximo inverso, que estabelece que a parte concentrada (relativa à capacidade $W^{1,2}$) do Laplaciano de uma função não negativa é não positiva. Este conjunto de resultados fornece a base analítica para o estudo do problema semilinear. Finalmente, *o Capítulo 6* é dedicado ao problema de Dirichlet não linear $-\Delta u + g(u) = \mu$, onde aplicamos o ferramental desenvolvido para investigar a existência, unicidade e propriedades qualitativas das soluções.

Teoria da Medida e Integração

A teoria da medida e integração de Lebesgue fornece a base para a formulação moderna de muitos problemas em equações diferenciais parciais (EDPs), particularmente no estudo de espaços de Sobolev. Neste capítulo, apresentamos os conceitos fundamentais de espaços mensuráveis, medidas, a integral de Lebesgue (com seus principais teoremas de convergência) e os espaços L^p . Estes últimos são espaços de Banach essenciais para a análise funcional aplicada às equações diferenciais. As demonstrações completas dos resultados aqui enunciados podem ser encontradas em (Bartle, 1995) e (Ponce, 2016).

1.1 Espaços e Funções Mensuráveis

Definição 1.1. Dada uma família $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ de subconjuntos de um conjunto Ω , dizemos que Σ é uma σ -álgebra se

- (i) $\Sigma \neq \emptyset$;
- (ii) Se $A \in \Sigma$, então $A^c = \Omega \setminus A \in \Sigma$;
- (iii) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

O par (Ω, Σ) é chamado de *espaço mensurável*.

Definição 1.2. Sejam (Ω, Σ) um espaço mensurável e \mathbb{R} a reta real. Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Σ -mensurável se

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. A coleção de tais funções é denotada por $M(\Omega, \Sigma)$.

Observação 1.3. A definição acima é equivalente a exigir que $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo conjunto de Borel B .

Exemplo 1.4. Funções constantes, contínuas (quando Ω é um espaço topológico e Σ contém os abertos) e características de conjuntos mensuráveis são mensuráveis.

Definição 1.5. Dado um conjunto E , definimos sua *função característica* por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Proposição 1.6 (Operações com funções mensuráveis). *Se $f, g \in M(\Omega, \Sigma)$ e $c \in \mathbb{R}$, então as funções cf , $f + g$, fg , $|f|$, $\sup(f, g)$ e $\inf(f, g)$ também são mensuráveis. Além disso, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M(\Omega, \Sigma)$, então as funções definidas por*

$$\inf_n f_n, \quad \sup_n f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$$

são mensuráveis. Em particular, o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis (quando existe) é mensurável.

Demonstração. A demonstração explora as relações entre pré-imagens de conjuntos. Por exemplo, para a soma, temos $\{x : f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) > r\} \cap \{x : g(x) > \alpha - r\}$. Para os limites, usa-se que $\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$. Detalhes podem ser consultados em (Bartle, 1995, Lema 2.6). \square

O próximo resultado, conhecido como *Lema de Aproximação por Funções Simples*, é fundamental para a construção da integral de Lebesgue e suas demonstrações subsequentes.

Lema 1.7 (Aproximação por funções simples). *Seja $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável não negativa. Então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções mensuráveis simples, com $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, tal que $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Além disso, se f for limitada, a convergência é uniforme.*

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Se $k = 0, 1, \dots, n2^n - 1$, defina o conjunto

$$E_{kn} = \{x \in \Omega \mid k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}$$

e, se $k = n2^n$, defina $F_n = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq n\}$. Defina também

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} k2^{-n} \cdot \chi_{E_{kn}} + n \cdot \chi_{F_n}. \quad (1.1)$$

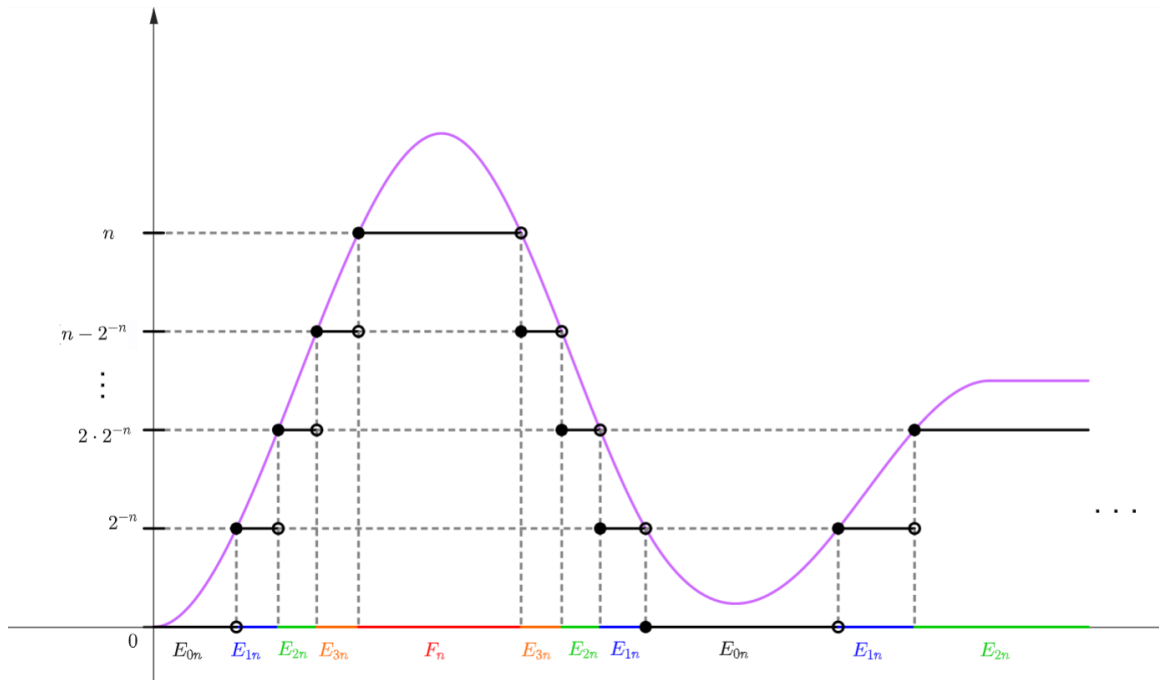


Figura 1.1: Representação visual dos conjuntos definidos na aproximação por funções simples.

Com isso, obtemos que

- (i) É claro que $\varphi_n(x) \geq 0$, já que é definida como uma soma de termos não negativos. Além disso, temos que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$. Para verificar que a sequência é crescente, devemos primeiramente analisar a relação entre os conjuntos E_{kn} 's e $E_{j(n+1)}$'s. Escrevendo a definição de ambos e comparando k com j , obtemos que $j = 2k$ e logo,

$$E_{kn} = E_{2k(n+1)} \cup E_{(2k+1)(n+1)},$$

onde $k = 0, 1, \dots, n2^n - 1$.

Com isso, mostramos que a igualdade é válida e, como consequência direta, provamos que

$$\bigcup_{k=0}^{n2^n-1} E_{kn} = \bigcup_{j=0}^{n2^{n+1}-1} E_{j(n+1)}.$$

Antes de prosseguir para a prova da monotonicidade de φ_n , precisamos analisar a relação entre os conjuntos F_n, F_{n+1} e os $E_{j(n+1)}$ que não foram considerados na união anterior. Afirmamos que

$$F_n = F_{n+1} \cup \left(\bigcup_{j=n2^{n+1}}^{(n+1)2^{n+1}-1} E_{j(n+1)} \right).$$

De fato, seja $x \in F_{n+1} \cup \left(\bigcup_{j=n2^{n+1}}^{(n+1)2^{n+1}-1} E_{j(n+1)} \right)$. Pela definição de união, temos duas possibilidades

- $x \in F_{n+1} \implies f(x) \geq n+1 \geq n \implies x \in F_n$;
- $x \in \bigcup_{j=n2^{n+1}}^{(n+1)2^{n+1}-1} E_{j(n+1)}$, então para algum $n2^{n+1} \leq j_0 \leq (n+1)2^{n+1} - 1$, temos que $x \in E_{j_0(n+1)}$ e, nesse caso, ocorre $f(x) \geq j_0 2^{-n-1} \geq n2^{n+1} 2^{-n-1} = n$, logo $x \in F_n$.

Por outro lado, suponha que $x \in F_n$. Então, pode ocorrer $f(x) \geq n+1 \geq n$, e nesse caso teremos que $x \in F_{n+1}$. A outra possibilidade é $n \leq f(x) < n+1$, donde $x \in E_{j(n+1)}$ para algum $n2^{n+1} \leq j \leq (n+1)2^{n+1} - 1$, pela definição de $E_{j(n+1)}$. Isso prova a igualdade desejada.

Com isso, podemos demonstrar a monotonicidade de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

(i) Se $x \in E_{j(n+1)}$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então

- para $j > n2^{n+1} - 1$, temos que $x \in F_n$, e assim,

$$\varphi_n(x) = n = n2^{n+1} 2^{-n-1} \leq j2^{-n-1} = \varphi_{n+1}(x).$$

- para $j \leq n2^{n+1} - 1$, temos $j = 2k$ ou $j = 2k+1$ com $0 \leq k \leq 2^n - 1$. Assim, $x \in E_{kn}$ e, conseqüentemente,

$$\varphi_n(x) = k2^{-n} \leq j2^{-n-1} = \varphi_{n+1}(x).$$

(ii) Se $x \in F_{n+1}$, então $x \in F_n$ e logo, $\varphi_n = n \leq n+1 = \varphi_{n+1}(x)$.

Em todos os casos, concluímos que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, como desejado.

(ii) Dado $n \in \mathbb{N}$, considere $x \in \bigcup E_{kn}$, para algum k . Então,

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) = f(x) - k2^{-n} < (k+1)2^{-n} - k2^{-n} = 2^{-n}.$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$, para $x \in \bigcup E_{kn}$. Seja $x \in \Omega$, como \mathbb{R} é arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < n_0$. Logo, $x \in \bigcup E_{kn}$, $\forall n \geq n_0$, e portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$, $x \in \Omega$.

(iii) Segue diretamente da definição de φ_n (1.1). □

1.2 Medidas

Definição 1.8. Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável. Uma função $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ é chamada *medida* se

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) (Aditividade enumerável) Para qualquer seqüência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ de conjuntos *disjuntos dois a dois*,

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

A tripla (Ω, Σ, μ) é chamada *espaço com medida*.

Exemplo 1.9. • A *medida de contagem* em \mathbb{N} : $\mu(E) = \#E$.

- A *medida de Dirac* concentrada em um ponto $p \in \Omega$, definida por

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- A *medida de Lebesgue* em \mathbb{R}^N , que generaliza o conceito de comprimento, área e volume, dada por

$$m = m^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)},$$

em que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ é a coleção dos conjuntos Lebesgue mensuráveis e m^* é a medida exterior de Lebesgue definida como $m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_N(R_i) \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i, R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N) \right\}$, com V_N sendo o volume N -dimensional de retângulos em \mathbb{R}^N (o produto dos comprimentos de seus lados, os quais são intervalos reais).

Definição 1.10. Dado um espaço mensurável (Ω, Σ) , uma *medida finita* ν é uma função de conjunto $\nu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para toda sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos disjuntos pertencentes a Σ , temos

$$\nu \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} |\nu(A_k)|.$$

Definição 1.11. Diz-se que uma propriedade vale *quase sempre* ou *quase todo ponto* (qtp) em relação a μ se o conjunto dos pontos onde ela falha tem medida nula (μ -medida zero).

Definição 1.12. Denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as medidas de Borel finitas definidas em Ω , equipado com a norma da variação total dada por

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \sup \{ \mu(A) - \mu(B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\Omega) \},$$

ou, alternativamente,

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) = |\mu|(\Omega).$$

Quando necessário, exigiremos que a medida seja *localmente finita*, isto é, para todo $K \subset \Omega$ compacto, temos $\mu(K) < \infty$. Nesse caso, utilizaremos a notação $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega)$ para o espaço das medidas localmente finitas.

1.3 A Integral de Lebesgue

A integral de Lebesgue é construída em etapas: primeiro para funções simples não negativas, depois para funções mensuráveis não negativas via aproximação (Lema 1.7) e, finalmente, para funções de sinal arbitrário decompondo-as em partes positiva e negativa.

Definição 1.13 (Integral de funções simples não negativas). Se $\varphi = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}$ é uma função simples não negativa ($a_i \geq 0$, $E_i \in \Sigma$ disjuntos), sua integral é definida por

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^k a_i \mu(E_i).$$

Definição 1.14 (Integral de funções não negativas). Para $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mensurável, define-se

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi \, d\mu : \varphi \text{ é simples, } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Definição 1.15 (Integral de funções de sinal arbitrário). Para $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável, escrevemos $f = f^+ - f^-$, onde $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0)$. Dizemos que f é *integrável a Lebesgue* se $\int f^+ \, d\mu < \infty$ e $\int f^- \, d\mu < \infty$. Nesse caso, definimos

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f^+ \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \, d\mu.$$

Definição 1.16 (Integral de funções complexas). Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis. Dizemos que f é *integrável a Lebesgue* se $\int \operatorname{Re}(f) \, d\mu < \infty$ e $\int \operatorname{Im}(f) \, d\mu < \infty$. Nesse caso, definimos

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} \operatorname{Re}(f) \, d\mu + i \int_{\Omega} \operatorname{Im}(f) \, d\mu.$$

Os seguintes teoremas são os pilares da teoria de integração e são indispensáveis ao lidar com EDPs.

Teorema 1.17 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ em Ω (isto é, $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$). Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Bartle, 1995, Teorema 4.6) □

Teorema 1.18 (Lema de Fatou). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Então,*

$$\int_{\Omega} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Bartle, 1995, Lema 4.8) □

Teorema 1.19 (Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções integráveis que convergem qtp para uma função mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Bartle, 1995, Teorema 5.6). □

1.4 Os Espaços L^p

Os espaços de Lebesgue L^p são centrais na formulação variacional de EDPs.

Definição 1.20. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(\Omega, \mu)$ consiste nas classes de equivalência de funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) tais que

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty,$$

em que funções coincidentes qtp são identificadas. Para $p = \infty$, define-se $L^\infty(\Omega, \mu)$ como o espaço das funções mensuráveis essencialmente limitadas, com norma dada por

$$\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ qtp}\}.$$

Proposição 1.21 (Desigualdades Clássicas). *Sejam $p, q \in (1, \infty)$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (expoentes conjugados).*

(i) Desigualdade de Hölder: *Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $fg \in L^1$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(ii) Desigualdade de Minkowski: *Se $f, g \in L^p$, então $f + g \in L^p$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

A desigualdade de Minkowski garante que $\|\cdot\|_p$ é uma norma. O caso $p = 2$ da desigualdade de Hölder é conhecido como Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Bartle, 1995, Teoremas 6.9 e 6.11). \square

Teorema 1.22 (Completude dos Espaços L^p). *Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço normado $(L^p(\Omega, \mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach (isto é, completo). Em particular, $L^2(\Omega, \mu)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Bartle, 1995, Teorema 6.14). \square

Para a completude de L^p , utilizamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Ela garante que toda sequência de Cauchy em L^p converge para um elemento do próprio espaço, propriedade fundamental para métodos de análise funcional em EDPs. No entanto, é importante notar que a convergência na norma L^p não implica, em geral, convergência pontual qtp. Contudo, uma ligação importante entre esses modos de convergência é estabelecida pelo seguinte resultado,

Proposição 1.23. *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que*

(i) $f_{n_k}(x) = f(x)$ para quase todo $x \in \Omega$;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k e para quase todo $x \in \Omega$, em que $h \in L^p$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Brezis, 2010, Teorema 4.9). \square

1.5 Decomposição de Medidas

Nesta seção, apresentamos a decomposição de uma medida de Borel finita em uma parte difusa e uma parte concentrada relativamente a uma semimedida. Essa decomposição é análoga à clássica decomposição de Lebesgue (em parte singular e absolutamente contínua para medidas, ver (Bartle, 1995, Teorema 8.11)), mas formulada no contexto mais geral de semimeditas de Borel.

1.5.1 Semimeditas e medidas difusas

Começamos definindo o conceito de semimedida, que generaliza a noção de medida, exigindo apenas monotonicidade e semiaditividade.

Definição 1.24 (semimedida). Uma *semimedida de Borel não negativa* T em \mathbb{R}^N é uma função de conjunto boreliana com valores em $[0, +\infty]$ tal que

- (i) $T(\emptyset) = 0$,
- (ii) se $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$ são borelianos, então $T(A) \leq T(B)$,
- (iii) existe $M > 0$ tal que, para toda sequência de borelianos $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ de \mathbb{R}^N ,

$$T\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq M \sum_{k=0}^{\infty} T(A_k).$$

Uma medida de Borel não negativa satisfaz as condições acima com $M = 1$. Interessa-nos o comportamento de medidas que não carregam conjuntos T -negligenciáveis, isto é conjuntos E tais que $T(E) = 0$.

Definição 1.25 (Medida difusa). Seja T uma semimedida de Borel não negativa em \mathbb{R}^N . Uma medida $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ é *difusa* em relação a T se, para todo conjunto boreliano $A \subset \mathbb{R}^N$ tal que $T(A) = 0$, tivermos

$$|\nu|(A) = 0.$$

O conceito de difusão equivale, em essência, ao de continuidade absoluta, como mostra a seguinte caracterização.

Proposição 1.26 (Caracterização da difusão). *Sejam T uma semimedida de Borel não negativa em \mathbb{R}^N e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Então, μ é difusa com respeito a T se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $A \subset \mathbb{R}^N$ é um boreliano com $T(A) \leq \delta$, então*

$$|\mu|(A) \leq \varepsilon.$$

Demonstração. A demonstração segue argumentos padrão de continuidade absoluta, utilizando a semiaditividade de T e a aditividade de $|\mu|$, como detalhado em (Ponce, 2016, Teorema 14.7). \square

1.5.2 Lema de extração

O resultado técnico central para a decomposição é um lema de extração, inspirado no teorema de decomposição de Jordan.

Lema 1.27 (Extração). *Seja T uma semimedida de Borel não negativa em \mathbb{R}^N . Para toda medida não negativa $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, existe um boreliano $E \subset \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\mu|_E \leq T \quad e \quad T(\mathbb{R}^N \setminus E) \leq M\mu(\mathbb{R}^N \setminus E),$$

sendo M a constante da semiaditividade de T .

A prova constrói, por indução, uma família disjunta de conjuntos onde T é menor do que μ , e mostra que no complemento da união desses conjuntos vale a desigualdade $\mu \leq T$. A constante M aparece naturalmente na estimativa da semiaditividade.

1.5.3 Decomposição de Radon-Nykodym-Lebesgue para medidas σ -finitas

Com as ferramentas anteriores, podemos enunciar o teorema de decomposição.

Definição 1.28 (Medida concentrada). *Seja T uma semimedida de Borel não negativa em \mathbb{R}^N . Uma medida $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ é *concentrada* com respeito a T se existe um boreliano $F \subset \mathbb{R}^N$ tal que $T(F) = 0$ e*

$$|\nu|(\mathbb{R}^N \setminus F) = 0.$$

Teorema 1.29 (Decomposição de Lebesgue). *Seja T uma semimedida de Borel não negativa em \mathbb{R}^N . Para toda $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, existem medidas únicas $\mu_d, \mu_c \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$\mu = \mu_d + \mu_c,$$

em que μ_d é difusa com respeito a T e μ_c é concentrada com respeito a T .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Teo. 14.12) □

A decomposição estabelecida acima, generaliza a clássica decomposição de Lebesgue, permitindo tratar, por exemplo, capacidades de Sobolev $\text{cap}_{W^{k,p}}$. No caso particular em que T é a medida de Lebesgue, a parte difusa corresponde à parte absolutamente contínua, e a parte concentrada à parte singular.

Funções Harmônicas

Neste capítulo, revisitamos e exploramos resultados fundamentais da teoria de funções harmônicas, com ênfase nas propriedades qualitativas e quantitativas. Em particular, abordaremos estimativas do gradiente e o princípio do máximo, estabelecendo o que é necessário para o estudo de problemas não lineares.

2.1 Propriedades do Valor Médio

Ao longo dessa seção, vamos assumir que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio conexo.

Definição 2.1. Para $u \in C(\Omega)$, definimos

(i) u satisfaz a primeira propriedade da média se

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, d\sigma \text{ para toda } B_r(x) \subset\subset \Omega.$$

(ii) u satisfaz a segunda propriedade da média se

$$u(x) = \frac{N}{\sigma_N r^N} \int_{B_r(x)} u(y) \, dy \text{ para toda } B_r(x) \subset\subset \Omega.$$

onde σ_N denota a área da superfície da esfera unitária $\mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

Observação 2.2. Note que as duas definições acima são equivalentes. De fato, escrevendo (i) como

$$u(x)r^{N-1} = \frac{1}{\sigma_N} \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, d\sigma,$$

podemos integrar ambos os lados entre 0 e r , obtendo

$$\frac{r^N}{N} u(x) = \int_0^r u(x) s^{N-1} \, ds = \frac{1}{\sigma_N} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x)} u(y) \, d\sigma \right) ds = \frac{1}{\sigma_N} \int_{B_r(x)} u(y) \, dy.$$

Logo,

$$u(x) = \frac{N}{\sigma_N r^N} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Por outro lado, escrevendo (ii) como

$$u(x)r^N = \frac{N}{\sigma_N} \int_{B_r(x)} u(y) dy,$$

podemos derivar ambos os lados com respeito a r ,

$$u(x)Nr^{N-1} = \frac{N}{\sigma_N} \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x)} u dy \right) = \frac{N}{\sigma_N} \frac{d}{dr} \left(\int_0^r \int_{\partial B_s(x)} u d\sigma ds \right)$$

e, conseqüentemente,

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma.$$

Observação 2.3. Por uma mudança de variáveis, podemos reescrever as duas propriedades da média como

(i) u satisfaz a primeira propriedade da média se

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N} \int_{|w|=1} u(x+rw) d\sigma \text{ para toda } B_r(x) \subset\subset \Omega.$$

(ii) u satisfaz a segunda propriedade da média se

$$u(x) = \frac{N}{\sigma_N} \int_{|z|\leq 1} u(x+rz) dz \text{ para toda } B_r(x) \subset\subset \Omega.$$

Vamos provar agora o princípio do máximo para funções satisfazendo as propriedades da média.

Proposição 2.4. *Se $u \in C(\bar{\Omega})$ satisfaz a propriedade da média em Ω , então u assume seu máximo e mínimo somente em $\partial\Omega$, a menos que u seja constante.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o máximo. Defina o conjunto

$$\Sigma = \left\{ x \in \Omega \mid u(x) = M \equiv \max_{\bar{\Omega}} u \right\} \subset \Omega.$$

Observe que $\Sigma = u^{-1}(\{M\})$ é um conjunto fechado em Ω , pois u é contínua. Mostremos agora que Σ é aberto. Para qualquer $x_0 \in \Sigma$, tome $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$ para algum $r > 0$. Pela propriedade da média, temos

$$M = u(x_0) = \frac{N}{\sigma_N r^N} \int_{B_r(x_0)} u(y) dy \leq M \frac{N}{\sigma_N r^N} \int_{B_r(x_0)} dy = M.$$

Note que dado $y \in B_r(x_0)$, se $y \notin \Sigma$, a desigualdade acima é estrita e, conseqüentemente, chegamos a um absurdo. Portanto, $\Sigma \subset \Omega$ é aberto e fechado. Como Ω é conexo, segue que $\Sigma = \emptyset$ ou $\Sigma = \Omega$. No primeiro caso, temos que $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ em Ω , enquanto no segundo, $u \equiv M = \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u = \max_{\Omega} u$. \square

Vamos definir agora o conceito de função harmônica e mostrar uma equivalência com a propriedade da média.

Definição 2.5. Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é *harmônica* se $\Delta u = 0$ em Ω .

Teorema 2.6. Seja $u \in C^2(\Omega)$ harmônica em Ω . Então, u satisfaz a propriedade da média em Ω .

Demonstração. Considere $B_r(x) \subset \Omega$ uma bola arbitrária. Para $\rho \in (0, r)$, aplicamos o Teorema da Divergência A.1 em $B_\rho(x)$ obtendo

$$\int_{B_\rho(x)} \Delta u(y) dy = \int_{\partial B_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) d\sigma = \rho^{N-1} \int_{|w|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x + \rho w) d\sigma = \rho^{N-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{|w|=1} u(x + \rho w) d\sigma \right).$$

Assim, como u é harmônica, para todo $\rho \in (0, r)$ temos

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{|w|=1} u(x + \rho w) d\sigma \right) = 0.$$

Integrando com respeito a ρ entre 0 e r , obtemos

$$\int_{|w|=1} u(x + rw) d\sigma = \int_{|w|=1} u(x) d\sigma = u(x) \sigma_N.$$

Portanto,

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N} \int_{|w|=1} u(x + rw) d\sigma = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma.$$

\square

Teorema 2.7. Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz a propriedade da média em Ω , então u é suave e harmônica em Ω .

Demonstração. Escolha $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ com $\int_{B_1(0)} \varphi dx = 1$ e $\varphi(x) = \psi(|x|)$, isto é,

$$\sigma_N \int_0^1 r^{N-1} \psi(r) dr = 1.$$

Defina $\varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^N} \varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ para $\varepsilon > 0$. Agora, para todo $x \in \Omega$, considere $\varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x+y) \varphi_\varepsilon(y) dy &= \int_{|y|<1} u(x+\varepsilon y) \varphi(y) dy = \int_0^1 r^{N-1} \psi(r) \int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon r w) d\sigma(w) dr \\ &= u(x) \sigma_N \int_0^1 \psi(r) r^{N-1} dr = u(x). \end{aligned}$$

Portanto, $u(x) = (\varphi_\varepsilon * u)(x)$ para todo $x \in \Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega \mid \text{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, o que prova que u é suave. Além disso, temos

$$\int_{B_r(x)} \Delta u dy = r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{|w|=1} u(x+rw) d\sigma \right) = r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_N u(x)) = 0,$$

para toda $B_r(x) \subset \Omega$. Logo, $\Delta u = 0$ em Ω e u é harmônica. \square

Observação 2.8. Os últimos dois teoremas mostram que funções harmônicas são suaves e satisfazem a propriedade da média. Consequentemente, podemos garantir a unicidade de solução clássica para o problema de Dirichlet em um domínio limitado

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ em } \Omega, & f \in C(\Omega) \\ u = \varphi \text{ sobre } \partial\Omega, & \varphi \in C(\partial\Omega) \end{cases}.$$

Em seguida, vamos provar algumas estimativas do gradiente, que serão úteis para concluir a equivalência entre funções harmônicas satisfazendo a propriedade da média.

Lema 2.9. *Seja $u \in C(\bar{B}_R(x_0))$ harmônica. Então,*

$$|Du(x_0)| \leq \frac{N}{R} \max_{\bar{B}_R(x_0)} |u|.$$

Demonstração. Por simplicidade, vamos assumir $u \in C^1(\bar{B}_R(x_0))$. Como u é suave, $\Delta(D_{x_i} u) = 0$, isto é, $D_{x_i} u$ é também harmônica em $\bar{B}_R(x_0)$ e, conseqüentemente, satisfaz a propriedade da média. Pelo Teorema da Divergência,

$$D_{x_i} u(x_0) = \frac{N}{\sigma_N R^N} \int_{B_r(x)} D_{x_i} u(y) dy = \frac{N}{\sigma_N R^N} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Portanto,

$$|D_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{N}{\sigma_N R^N} \left| \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) \cdot \mathbf{n} d\sigma \right| \leq \frac{N}{\sigma_N R^N} \int_{\partial B_R(x_0)} |u(y) \cdot \mathbf{n}| d\sigma \leq \frac{N}{R} \max_{\bar{B}_R(x_0)} |u|.$$

No caso em que u é apenas contínua, consideramos uma seqüência de regularizantes $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e aplicamos o que provamos acima para a função $u_n = \rho_n * u$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ e utilizando a propriedade A.27.(iii), a conclusão segue. \square

Se acrescentarmos a hipótese de que $u \geq 0$ ao lema anterior, obtemos o resultado a seguir

Lema 2.10. *Seja $u \in C(\bar{B}_R)$ uma função harmônica não negativa em $\bar{B}_R = \bar{B}_R(x_0)$. Então,*

$$|Du(x_0)| \leq \frac{N}{R}u(x_0).$$

Demonstração. Pelo Teorema da Divergência e o fato de u ser não negativa, segue que

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{N}{\sigma_N R^N} \int_{\partial B_R(x_0)} |u(y)\mathbf{n}| d\sigma = \frac{N}{\sigma_N R^N} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) d\sigma.$$

Utilizando a propriedade da média, obtemos

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{N}{\sigma_N R^N} \sigma_N R^{N-1} u(x_0) = \frac{N}{R}u(x_0). \quad \square$$

Corolário 2.11. *Uma função harmônica em \mathbb{R}^N limitada inferiormente (ou superiormente) é constante.*

Demonstração. Suponha que u é harmônica em \mathbb{R}^N . É suficiente provar que u é constante se $u \geq 0$. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, aplicamos o lema anterior para u em $B_R(x)$, obtendo

$$0 \leq |Du(x)| \leq \frac{N}{R}u(x).$$

Portanto, fazendo $R \rightarrow \infty$ segue que $Du(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Como \mathbb{R}^N é conexo, concluímos que u é constante. \square

Utilizando o lema 2.9, podemos generalizar a estimativa para qualquer multi-índice α , como vemos na proposição abaixo.

Proposição 2.12. *Seja $u \in C(\bar{B}_R)$ harmônica em $B_R = B_R(x_0)$. Então, para todo multi-índice α com $|\alpha| = m$,*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{N^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\bar{B}_R} |u|.$$

Demonstração. Provaremos por indução em m . Pelo lema 2.9, o resultado é válido para $m = 1$. Assuma que vale para m e considere $|\alpha| = m + 1$, com $\alpha = (0, \dots, 0, m + 1, 0, \dots, 0)$. Para $0 < \theta < 1$, defina $r = (1 - \theta)R \in (0, R)$. Aplicando o lema (2.9) para $D^m u$ em B_r , obtemos

$$|D^{m+1}u(x_0)| \leq \frac{N}{r} \max_{\bar{B}_R} |D^m u|.$$

Pela hipótese indutiva, temos que

$$\max_{\bar{B}_R} |D^m u| \leq \frac{N^m e^{m-1} m!}{(R - r)^m} \max_{\bar{B}_R} |u|.$$

Portanto,

$$|\mathbf{D}^{m+1} u(x_0)| \leq \frac{N}{r} \cdot \frac{N^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{\bar{B}_R} |u| = \frac{N^{m+1} e^{m-1} m!}{(1-\theta)R\theta^m R^m} \max_{\bar{B}_R} |u| = \frac{N^{m+1} e^{m-1} m!}{R^{m+1} \theta^m (1-\theta)} \max_{\bar{B}_R} |u|.$$

Tomando $\theta = \frac{m}{m+1}$, temos

$$\frac{1}{\theta^m (1-\theta)} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m (m+1) < e(m+1),$$

pois $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$, com $a_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, é uma sequência crescente e $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = e$. Portanto,

$$|\mathbf{D}^{m+1} u(x_0)| \leq \frac{N^{m+1} e^{m-1} e(m+1)m!}{R^{m+1}} \max_{\bar{B}_R} |u| = \frac{N^{m+1} e^m (m+1)!}{R^{m+1}} \max_{\bar{B}_R} |u|.$$

Com isso, mostramos que o resultado é válido para qualquer multi-índice β tal que $|\beta| = m$ e $\beta = (0, \dots, m, \dots, 0)$, isto é, para diferenciais de qualquer ordem em uma única variável. Para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ qualquer, basta notar que

- $\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N! \leq (|\alpha|)!;$
- $\mathbf{D}^\alpha u = \mathbf{D}_{x_1}^{\alpha_1} \mathbf{D}_{x_2}^{\alpha_2} \dots \mathbf{D}_{x_N}^{\alpha_N} u.$

Assim, basta aplicar o resultado provado anteriormente para cada uma das variáveis, obtendo

$$|\mathbf{D}^\alpha u(x_0)| \leq \frac{N^{|\alpha|} e^{|\alpha|-N} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!}{R^{|\alpha|}} \max_{\bar{B}_R} |u| \leq \frac{N^{|\alpha|} e^{|\alpha|-1} (|\alpha|)!}{R^{|\alpha|}} \max_{\bar{B}_R} |u| = \frac{N^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\bar{B}_R} |u|. \quad \square$$

Teorema 2.13. *Se u é uma função harmônica, então u é analítica.*

Demonstração. Suponha que u é harmônica em Ω . Para $x \in \Omega$ fixado, tome $B_{2R}(x) \subset \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^N$ com $|h| \leq R$. Pela expansão de Taylor,

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_N \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^k u \right] (x) + R_m(h),$$

onde

$$R_m(h) = \frac{1}{m!} \left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_N \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^m u \right] (x_1 + \theta h_1, \dots, x_N + \theta h_N)$$

para algum $\theta \in (0, 1)$. Note que $x+h \in B_R(x)$ para $|h| < R$ já que $d(x+h, x) = |h| < R$. Consequentemente, pela Proposição 2.12, obtemos

$$\begin{aligned} |R_m(h)| &= \left| \frac{1}{m!} \left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_N \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^m u \right] (x_1 + \theta h_1, \dots, x_N + \theta h_N) \right| \\ &\leq \frac{1}{m!} |h|^m N^m \cdot \frac{N^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\bar{B}_{2R}} |u| \leq \left(\frac{|h| N^2 e}{R} \right)^m \max_{\bar{B}_{2R}} |u|. \end{aligned}$$

Assim, para todo h com $|h| < \frac{R}{2N^2e}$, temos que

$$|R_m(h)| \leq \frac{1}{2^m} \max_{B_{2R}} |u| \longrightarrow 0$$

quando $m \rightarrow \infty$. Portanto, $R_m(h) \rightarrow 0$ se $m \rightarrow \infty$ e u é analítica. \square

Teorema 2.14 (Desigualdade de Harnack). *Seja u harmônica em Ω . Então, para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existe uma constante $C = C(\Omega, K) > 0$ tal que se u é não negativa em Ω , então*

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y)$$

para todos $x, y \in K$.

Demonstração. Sejam $R < \frac{1}{4} \text{dist}(K, \partial\Omega)$ e $x \in K$. Então, $B_{4R}(x) \subset \Omega$. Considerando $y \in B_R(x)$, segue da propriedade da média que

$$u(x) = \frac{N}{\sigma_N(2R)^N} \int_{B_{2R}(x)} u \geq \frac{N}{\sigma_N 2^N R^N} \int_{B_R(y)} u = \frac{1}{2^N} u(y).$$

Trocando x por y e repetindo o argumento anterior, obtemos

$$\frac{1}{c}u(y) \leq u(x) \leq cu(y),$$

para todo $y \in B_R(x)$, onde $c = 2^N$. Como x foi tomado arbitrariamente, a desigualdade é válida para todos $x, y \in \Omega$ com $|x - y| \leq R$. Agora, sendo K compacto, sabemos que existem $x_1, \dots, x_N \in K$ tais que $\{B_R(x_i)\}_{i=1}^N$ é uma cobertura aberta para K com $4R < \text{dist}(K, \partial\Omega)$. Então, aplicamos a desigualdade anterior para cada bola dessa cobertura e escolhemos $C = c^N$, de modo que

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y)$$

para todos $x, y \in K$. \square

Notemos que, se u é harmônica em Ω , integrando por partes, obtemos

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^2(\Omega).$$

A recíproca também é válida, como mostra o próximo teorema.

Teorema 2.15 (Lema de Weyl). *Suponha $u \in C(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^2(\Omega).$$

Então, u é harmônica em Ω .

Demonstração. Basta provar que para toda $B_r(x) \subset \Omega$,

$$r \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma = N \int_{B_r(x)} u(y) dy. \quad (2.1)$$

Com isso, podemos verificar que

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma \right) = \frac{N}{\sigma_N} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^N} \int_{B_r(x)} u(y) dy \right) = \frac{N}{r^{N+1} \sigma_N} \left[-N \int_{B_r(x)} u(y) dy + r \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma \right] = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma = \frac{1}{\sigma_N} \int_{|w|=1} u(x + rw) d\sigma$$

é constante e igual a $u(x)$, se fazemos $r \rightarrow 0$ e utilizamos a continuidade de u . Isso prova que u satisfaz a propriedade da média e, conseqüentemente, é harmônica. Vamos demonstrar 2.1 para $N \geq 3$. Por simplicidade, assuma que $x = 0$ e defina

$$\varphi(y, r) = \begin{cases} (|y|^2 - r^2)^N, & \text{se } |y| \leq r \\ 0, & \text{se } |y| > r. \end{cases}$$

Então, defina

$$\varphi_k(y, r) = \begin{cases} (|y|^2 - r^2)^{N-k} (2(N-k+1)|y|^2 + N(|y|^2 - r^2)), & \text{se } |y| \leq r \\ 0, & \text{se } |y| > r, \end{cases}$$

para $2 \leq k \leq N$. Note que

- Se $|y| \leq r$, então

$$\frac{\partial}{\partial r} \varphi(y, r) = \frac{\partial}{\partial r} [(|y|^2 - r^2)^N] = -2N(|y|^2 - r^2)^{N-1} r,$$

e $\frac{\partial}{\partial r} \varphi(y, r) = 0$, caso contrário. Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, r) = -2N(r^2 - r^2)^{N-1} = 0.$$

- Se $|y| \leq r$, então

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi(y, r) = \frac{\partial}{\partial r} [-2N(|y|^2 - r^2)^{N-1} r] = 4N(N-1)(|y|^2 - r^2)^{N-2} r^2 - 2N(|y|^2 - r^2)^{N-1},$$

e $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi(y, r) = 0$, caso contrário. Além disso,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi(r, r) = 4N(N-1)(r^2 - r^2)^{N-2} r^2 - 2N(r^2 - r^2)^{N-1} = 0.$$

Portanto, φ é C^2 com relação a r . Derivando agora com respeito a y , para $|y| \leq r$, temos que

- $\frac{\partial}{\partial y_i} \varphi(y, r) = 2y_i N (|y|^2 - r^2)^{N-1}$;
- $\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \varphi(y, r) = 4y_i^2 N(N-1) (|y|^2 - r^2)^{N-2} + 2N (|y|^2 - r^2)^{N-1}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_y \varphi(y, r) &= \sum_{i=1}^N \left[4y_i^2 N(N-1) (|y|^2 - r^2)^{N-2} + 2N (|y|^2 - r^2)^{N-1} \right] \\ &= 2N \left[2(N-1) (|y|^2 - r^2)^{N-2} |y|^2 + N (|y|^2 - r^2)^{N-1} \right] \\ &= 2N \varphi_2(y, r). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $|y| > r$, então $\varphi(y, r) = 0$ e nesse caso, $\Delta_y \varphi(y, r) = 0$, já que $\Delta_y \varphi(y, r) = 2N \varphi_2(y, r) = 0$. Portanto,

$$\Delta_y \varphi(y, r) = \begin{cases} 2N \varphi_2(y, r), & \text{se } |y| \leq r \\ 0, & \text{se } |y| > r, \end{cases}$$

e $\varphi(\cdot, r) \in C_0^2(\Omega)$. Por hipótese, temos que

$$\int_{B_r(0)} u(y) \varphi_2(y, r) \, dy = 0.$$

Assuma que, para algum $k \in \mathbb{Z}$ com $2 \leq k \leq N-1$, tenhamos que

$$\int_{B_r(0)} u(y) \varphi_k(y, r) \, dy = 0.$$

Derivando com respeito a r , conforme (Flanders, 1973, Páginas 615–620), obtemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{B_r(0)} u(y) \varphi_k(y, r) \, dy \right) = \int_{\partial B_r(0)} u(y) \varphi_k(y, r) \, d\sigma + \int_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y, r) \, dy.$$

Notemos que para todo $2 \leq k < N$, temos $\varphi_k(y, r) = 0$ para $|y| = r$. Então,

$$\int_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y, r) \, dy = 0.$$

Observando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y, r) &= -2r(N-k+1) (|y|^2 - r^2)^{N-(k+1)} \left[2(N-(k+1)+1) |y|^2 + N(|y|^2 - r^2) \right] \\ &= -2r(N-k+1) \varphi_{k+1}(y, r). \end{aligned}$$

temos

$$0 = \int_{B_r(0)} u(y) \frac{\partial}{\partial r} \varphi_k(y, r) \, dy = -2r(N-k+1) \int_{B_r(0)} \varphi_{k+1}(y, r) u(y) \, dy.$$

e, conseqüentemente,

$$\int_{B_r(0)} \varphi_{k+1}(y, r) u(y) \, dy = 0.$$

Tomando $k = N - 1$ na equação anterior, obtemos

$$\int_{B_r(0)} u(y) \varphi_N(y, r) \, dy = \int_{B_r(0)} u(y) \left[(N+2) |y|^2 - Nr^2 \right] \, dy = 0.$$

Derivando a segunda integral acima com respeito a r , segue que

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(0)} u(y) \left[(N+2) |y|^2 - Nr^2 \right] \, dy \right) = \int_{\partial B_r(0)} u(y) \left[(N+2) |y|^2 - Nr^2 \right] \, d\sigma - 2Nr \int_{B_r(0)} u(y) \, dy.$$

Conseqüentemente,

$$N \int_{B_r(0)} u(y) \, dy = r \int_{\partial B_r(0)} u(y) \, d\sigma$$

implicando que u satisfaz a propriedade da média e, portanto, u é harmônica em Ω . \square

2.2 Soluções Fundamentais

Consideremos u uma função harmônica em \mathbb{R}^N que depende somente de $r = |x - a|$ para algum $a \in \mathbb{R}^N$ fixado. Definindo $v(r) = u(|x|)$, temos que

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0 \tag{2.2}$$

e, conseqüentemente,

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln r, & \text{se } N = 2 \\ c_3 + c_4 r^{2-N}, & \text{se } N \geq 3 \end{cases} \tag{2.3}$$

onde c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) são constantes. Nosso objetivo é obter uma função com singularidade, de modo que

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial v}{\partial r} \, d\sigma = 1, \quad \forall r > 0. \tag{2.4}$$

Assim, para todo $a \in \mathbb{R}^N$, definimos

$$\Gamma(a, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |a - x|, & \text{se } N = 2 \\ \frac{1}{\sigma_N(N-2)} \frac{1}{|a - x|^{N-2}}, & \text{se } N \geq 3 \end{cases}$$

Observe que Γ tem singularidade em $x = a$ e é harmônica em $x \neq a$, já que $\Delta_x \Gamma(a, x)$ corresponde ao lado esquerdo da equação (2.2) para v dada por (2.3) com $c_1 = 0 = c_3$, $c_2 = -\frac{1}{2\pi}$ e $c_4 = \frac{1}{\sigma_N(N-2)}$.

Além disso,

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(a, x) d\sigma = 1, \quad \forall r > 0,$$

em que $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ denota a derivada normal com respeito à variável x . De fato, note que para todo $x \in B_r(a)$, temos $|a - x| = r$ e

- $\mathbf{n} = \frac{x - a}{r}$;
- $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(a, x) = \nabla \Gamma(a, x) \cdot \mathbf{n}$.

Considere o caso $N \geq 3$, então

$$\nabla \Gamma(a, x) = -\frac{1}{\sigma_N} \frac{a - x}{|a - x|^N} = \frac{1}{\sigma_N} \frac{x - a}{r^N}.$$

Com isso,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(a, x) = \frac{1}{\sigma_N} \frac{x - a}{r^N} \cdot \frac{x - a}{r} = \frac{1}{\sigma_N} \frac{|a - x|^2}{r^{N+1}} = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}}.$$

Calculando a integral, obtemos

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(a, x) d\sigma = \int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} d\sigma = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(a)} d\sigma = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \sigma_N r^{N-1} = 1, \quad \forall r > 0.$$

De modo semelhante, mostramos a igualdade para $N = 2$. Provemos agora a Representação de Green para u ,

Teorema 2.16. *Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Então, para todo $a \in \Omega$, temos que*

$$u(a) = \int_{\Omega} \Gamma(a, x) \Delta u(x) dx - \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma(a, x) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(a, x) \right) d\sigma.$$

Observação 2.17. (i) Note que para todo $a \in \Omega$, $\Gamma(a, \cdot)$ é integrável em Ω , embora possua singularidade;

(ii) Para $a \notin \bar{\Omega}$, temos que Γ é harmônica em todo Ω e, conseqüentemente, a expressão no lado direito deve ser zero, pelo Teorema A.4.(iii).

(iii) Fazendo $u \equiv 1$, obtemos $\int_{\partial \Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(a, x) d\sigma = 1, \forall a \in \Omega$.

Demonstração. Aplicando a Fórmula de Green para u e $\Gamma(a, x)$ no domínio $\Omega \setminus B_r(a)$ para $r > 0$ pequeno, obtemos

$$\int_{\Omega \setminus B_r(a)} (\Gamma \Delta u - u \Delta \Gamma) dx = \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma - \int_{\partial B_r(a)} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

Note que $\Delta \Gamma = 0$ em $\Omega \setminus B_r(a)$. Logo,

$$\int_{\Omega \setminus B_r(a)} \Gamma \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma - \int_{\partial B_r(a)} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

Agora, para $N \geq 3$, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_r(a)} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \right| &= \left| \frac{1}{(N-2)\sigma_N} r^{2-N} \int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \right| \\ &\leq \frac{r}{N-2} \sup_{\partial B_r(a)} |Du| \sigma_N r^{N-1} \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \\ &= \frac{r}{N-2} \sup_{\partial B_r(a)} |Du| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $r \rightarrow 0$. Além disso,

$$\int_{\partial B_r(a)} u \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r(a)} u d\sigma \rightarrow u(a)$$

quando $r \rightarrow 0$. Portanto, o resultado é válido para todo $N \geq 3$. A prova para $N = 2$ é semelhante. \square

Esse resultado motiva a discussão sobre funções de Green. Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Pelo teorema anterior, temos que para todo $x \in \Omega$,

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x, y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(x, y) \right) d\sigma.$$

Se u é solução do seguinte problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial \Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

para alguma $f \in C(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C(\partial \Omega)$, então u pode ser expressa em termos de f e φ , com um termo desconhecido. Nosso objetivo é eliminar esse termo, ajustando Γ .

Para qualquer $x \in \Omega$ fixado, considere

$$G(x, y) = \Gamma(x, y) - \Phi(x, y)$$

para alguma $\Phi(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\Delta_y \Phi(x, y) = 0$ em Ω . Então, o teorema 2.16 pode ser expresso por

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial \Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x, y) \right) d\sigma,$$

já que $\Phi(x, \cdot)$ é harmônica. Agora, escolhendo Φ apropriadamente, chegamos ao importante conceito de função de Green.

Para cada $x \in \Omega$ fixado, escolha $\Phi(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi(x, y) = 0 & , \text{ para } y \in \Omega \\ \Phi(x, y) = \Gamma(x, y) & , \text{ para } y \in \partial\Omega \end{cases}$$

A função $G(x, y)$ é chamada *Função de Green*. Se tal G existe, então a solução u do problema de Dirichlet 2.5 pode ser expressa por

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x, y) d\sigma.$$

Note que a função de Green $G(x, y)$ é definida como uma função de $y \in \bar{\Omega}$ para cada $x \in \Omega$ fixado. Discutiremos agora algumas propriedades de G como função de x e y .

Observação 2.18. A unicidade da função de Green segue diretamente do princípio do máximo, já que a diferença entre duas funções de Green é harmônica em Ω (pelo Princípio da Singularidade Removível (Han; Lin, 2011, Teorema 1.28)) e se anula sobre $\partial\Omega$.

Proposição 2.19. A função de Green $G(x, y)$ é simétrica em $\Omega \times \Omega$, isto é, $G(x, y) = G(y, x)$ para $x \neq y \in \Omega$.

Demonstração. Tome $x_1, x_2 \in \Omega$ com $x_1 \neq x_2$. Escolha $r > 0$ pequeno tal que

$$B_r(x_1) \cap B_r(x_2) = \emptyset.$$

Defina $G_1(y) = G(x_1, y)$ e $G_2(y) = G(x_2, y)$. Aplicando a Fórmula de Green em $\Omega \setminus (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))} (G_1 \Delta G_2 - G_2 \Delta G_1) dy &= \int_{\partial\Omega} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial B_r(x_1)} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial B_r(x_2)} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Como G_i é harmônica para $y \neq x_i$ ($i = 1, 2$) e se anula em $\partial\Omega$, temos

$$\int_{\partial B_r(x_1)} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma + \int_{\partial B_r(x_2)} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma = 0.$$

Note que a expressão à esquerda na equação acima, possui o mesmo limite que o lado esquerdo da seguinte equação (quando $r \rightarrow 0$),

$$\int_{\partial B_r(x_1)} \left(\Gamma \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} - G_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma + \int_{\partial B_r(x_2)} \left(G_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} - \Gamma \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma = 0.$$

Como

$$\begin{cases} \int_{\partial B_r(x_1)} \Gamma \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \leq \int_{\partial B_r(x_1)} \Gamma \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \longrightarrow 0 \\ \int_{\partial B_r(x_2)} \Gamma \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \longrightarrow 0 \end{cases}, \text{ quando } r \rightarrow 0,$$

e

$$\begin{cases} \int_{\partial B_r(x_1)} G_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \rightarrow G_2(x_1) \\ \int_{\partial B_r(x_2)} G_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \rightarrow G_1(x_2) \end{cases}, \text{ quando } r \rightarrow 0,$$

segue que $G(x_2, x_1) = G(x_1, x_2)$. □

O próximo resultado fornece estimativas para a função de Green em termos da solução fundamental, isto é,

Proposição 2.20. *Para quaisquer $x, y \in \Omega$ com $x \neq y$,*

$$\begin{cases} 0 < G(x, y) < \Gamma(x, y) & \text{para } N \geq 3, \\ 0 < G(x, y) < \Gamma(x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \text{diam}(\Omega) & \text{para } N = 2. \end{cases}$$

Demonstração. Fixe $x \in \Omega$ e escreva $G(y) = G(x, y)$. Como $\lim_{y \rightarrow x} G(y) = +\infty$, existe $r > 0$ tal que $G(y) > 0$ em $B_r(x)$. Note que G é harmônica em $\Omega \setminus B_r(x)$ com $G = 0$ em $\partial\Omega$ e $G > 0$ em $\partial B_r(x)$. Pelo princípio do máximo, $G(y) > 0$ em $\Omega \setminus B_r(x)$ para tal $r > 0$.

Agora, verifiquemos a segunda parte da desigualdade. Por definição, temos que

$$G(x, y) = \Gamma(x, y) - \Phi(x, y),$$

em que

$$\begin{cases} \Delta \Phi(x, \cdot) = 0 & \text{em } \Omega. \\ \Phi(x, \cdot) = \Gamma(x, \cdot) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para $N \geq 3$, temos

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{(N-2)\sigma_N} |x-y|^{2-N} > 0 \quad \text{para } y \in \partial\Omega,$$

o que implica $\Phi(x, \cdot) > 0$ sobre $\partial\Omega$. Pelo princípio do máximo, temos $\Phi > 0$ em Ω . Para $N = 2$, temos

$$\Gamma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x-y| \geq -\frac{1}{2\pi} \ln \text{diam}(\Omega) \quad \text{para } y \in \partial\Omega.$$

Consequentemente, o princípio do máximo implica que $\Phi > \frac{1}{2\pi} \ln \text{diam}(\Omega)$ em Ω . □

Em certos domínios é possível obter uma expressão explícita e bem definida para essa função, como ocorre, por exemplo, no caso de uma bola arbitrária em \mathbb{R}^N .

Proposição 2.21. *A função de Green para a bola $B_R = B_R(0)$ é dada por*

(i) para $N \geq 3$,

$$G(x,y) = \frac{1}{(N-2)\sigma_N} \left(|x-y|^{2-N} - \left| \frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y \right|^{2-N} \right);$$

(ii) para $N = 2$,

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \left(-\ln|x-y| + \ln \left| \frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y \right| \right).$$

Demonstração. Fixe $x \neq 0$ com $|x| < R$. Considere $X \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_R(x)$ com X sendo o múltiplo de x tal que $|X| \cdot |x| = R^2$, isto é, $X = \frac{R^2}{|x|^2}x$. Note que a aplicação $x \mapsto X$ é uma inversão na esfera e, conseqüentemente, conforme (preserva ângulos). Note que se $|y| = R$, temos

$$\frac{|y-x|}{|y-X|} = \frac{|x|}{R}. \quad (2.6)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left(\frac{|y-x|}{|y-X|} \right)^2 &= \frac{\langle y-x, y-x \rangle}{\langle y-X, y-X \rangle} = \frac{|y|^2 - 2\langle y, x \rangle + |x|^2}{|y|^2 - 2\langle y, X \rangle + |X|^2} \\ &= \frac{|y|^2 - 2\langle y, x \rangle + |x|^2}{|y|^2 - 2\frac{R^2}{|x|^2}\langle y, x \rangle + \frac{R^4}{|x|^2}} = \frac{|x|^2}{R^2} \left(\frac{R^2 - 2\langle y, x \rangle + |x|^2}{|x|^2 - 2\langle y, x \rangle + R^2} \right) = \frac{|x|^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Isso prova (2.6). Com isso, temos que

$$|y-x| = \frac{|x|}{R} |y-X| = \left| \frac{|x|}{R}y - \frac{R}{|x|}x \right| \quad \text{para todo } y \in \partial B_R.$$

Portanto, para ter valor zero na fronteira, no caso $N \geq 3$, tomamos

$$G(x,y) = \frac{1}{(N-2)\sigma_N} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \left(\frac{R}{|x|} \right)^{N-2} \frac{1}{|y-X|^{N-2}} \right).$$

O caso $N = 2$ é análogo. □

Podemos também obter uma expressão para a derivada normal exterior da função de Green no domínio B_R ,

Corolário 2.22. *Suponha G a função de Green na bola $B_R(0)$. Então,*

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_N R |x-y|^N}$$

para todo $x \in B_R$ e $y \in \partial B_R$.

Demonstração. Faremos apenas para o caso $N \geq 3$. Como,

$$G(x, y) = \frac{1}{(N-2)\sigma_N} \left(|x-y|^{2-N} - \left(\frac{R}{|x|} \right)^{N-2} |y-X|^{2-N} \right)$$

em que $x \in B_R$, $y \in \partial B_R$ e $X = \frac{R^2 x}{|x|^2}$, obtemos que

$$D_{y_i} G(x, y) = -\frac{1}{\sigma_N} \left(\frac{x_i - y_i}{|x-y|^N} - \left(\frac{R}{|x|} \right)^{N-2} \cdot \frac{X_i - y_i}{|X-y|^N} \right) = \frac{y_i}{\sigma_N R^2} \cdot \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N}$$

Lembrando que $\mathbf{n}_i = \frac{y_i}{R}$ para $|y| = R$, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i D_{y_i} G(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{y_i^2}{\sigma_N R^3} \cdot \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N} = \frac{1}{\sigma_N R} \cdot \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N}. \quad \square$$

Denotemos por $K(x, y)$ a função do corolário anterior para $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$. Ela é chamada de *núcleo de Poisson* e possui as seguintes propriedades:

(i) $K(x, y)$ é suave para $x \neq y$;

(ii) $K(x, y) > 0$ para $|x| < R$;

(iii)

$$\int_{|y|=R} K(x, y) d\sigma = 1$$

para todo $|x| < R$.

Por meio desse núcleo, é possível representar funções harmônicas com um dado de Dirichlet prescrito na fronteira.

Teorema 2.23. *Seja $\varphi \in C(\partial B_R(0))$ uma função contínua na fronteira da bola. A função u definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) \varphi(y) d\sigma, & |x| < R, \\ \varphi(x), & |x| = R, \end{cases}$$

satisfaz $u \in C^\infty(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ e é solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_R, \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial B_R. \end{cases}$$

Demonstração. Consultar (John, 1978, Pág. 85–86). □

Como consequência dessa representação, temos a desigualdade de Harnack em bolas.

Proposição 2.24. *Suponha que u é harmônica em $B_R(x_0)$ e $u \geq 0$. Então,*

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0),$$

sendo $r = |x - x_0| < R$.

Demonstração. Consultar (Han; Lin, 2011, Lema 1.26).

□

Espaços de Sobolev

Para estudar os espaços de Sobolev, faz-se necessário introduzir alguns conceitos fundamentais. Apresentamos aqui as definições básicas e propriedades essenciais que servirão de base para o desenvolvimento deste capítulo.

3.1 Espaços de Hölder

O ponto de partida para a construção dos espaços de Hölder, são os espaços de funções Lipschitz contínuas. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que u é *Lipschitz contínua* se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \Omega.$$

Esta definição é generalizada pela noção de *continuidade de Hölder*. Dizemos que u é *Hölder contínua com expoente γ* (em que $0 < \gamma \leq 1$) se existir uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \quad \text{para todos } x, y \in \Omega.$$

Os espaços de Hölder, denotados por $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, estabelecem assim uma escala de regularidade intermediária entre os espaços clássicos $C(\bar{\Omega})$ das funções contínuas e $C^1(\bar{\Omega})$ das funções continuamente diferenciáveis.

Definição 3.1. (i) Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Definimos

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|.$$

(ii) A semi-norma de Hölder com expoente γ de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}$$

e a norma de Hölder com expoente γ é

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

Com isso, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 3.2. O Espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ consiste de todas as funções $u \in C^k(\bar{\Omega})$ para as quais

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} < \infty. \quad (3.1)$$

Tais espaços apresentam uma estrutura matemática robusta e bem comportada,

Teorema 3.3. O espaço de funções $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.1). \square

3.2 Derivadas Fracas

No contexto dos espaços de Sobolev, é necessário estender a noção de diferenciabilidade a funções que não são diferenciáveis no sentido clássico. Para tanto, introduz-se o conceito de derivadas fracas, que generaliza a ideia clássica baseado na fórmula de integração por partes para funções teste.

Definição 3.4 (Derivada Fraca). Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada fraca de u (ou α -ésima derivada de u no sentido fraco) se

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx, \quad (3.2)$$

para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Neste caso, denotamos $v = D^\alpha u$.

Caso não exista nenhuma função v satisfazendo a identidade integral (3.2), concluímos que u não admite derivada de ordem α no sentido fraco. Para que este conceito seja bem definido, é essencial assegurar que, quando tal função v existe, ela seja única (a menos de um conjunto de medida nula). Esta verificação de unicidade consolida a consistência da definição proposta.

Lema 3.5 (Unicidade da Derivada Fraca). Uma derivada fraca de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, caso exista, é única a menos de um conjunto de medida nula.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Lema 4.1). \square

3.3 Espaços de Sobolev

Podemos agora definir os espaços de Sobolev e trabalhar algumas propriedades acerca deles.

Definição 3.6. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido como o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$, com $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que para cada α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$.

Observação 3.7. Um caso particular de grande relevância ocorre quando $p = 2$. Nesta situação, o espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$ é denotado por $H^k(\Omega)$. Esta notação remete à estrutura de espaço de Hilbert que adquire quando equipado com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (fg + D^{\alpha} f \cdot D^{\alpha} g) dx.$$

Como todo espaço de Hilbert é automaticamente um espaço de Banach com respeito à norma induzida por seu produto interno, temos que $H^k(\Omega)$ herda essa propriedade. Vale notar que $H^0(\Omega)$ coincide com $L^2(\Omega)$, o espaço das funções de quadrado integrável. Além disso, identificamos duas funções em $W^{k,p}(\Omega)$ quando estas coincidem a menos de um conjunto de medida nula.

Definição 3.8. Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Definimos sua norma por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} (|D^{\alpha} u|), & \text{se } p = \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

Definição 3.9. Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^{\infty}(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Embora definidas de maneira mais geral, as derivadas fracas mantêm propriedades fundamentais análogas às das derivadas usuais, com consequências significativas para a análise de EDPs.

Teorema 3.10 (Propriedades das Derivadas Fracas). *Sejam $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $|\alpha| \leq k$. Então*

(i) $D^{\alpha} \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ e $D^{\beta}(D^{\alpha} u) = D^{\alpha}(D^{\beta} u) = D^{\alpha+\beta} u$ para todos os multi-índices α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^{\alpha}(\lambda u + \mu v) = \lambda D^{\alpha} u + \mu D^{\alpha} v$, $|\alpha| \leq k$.

(iii) Se ω é um subconjunto aberto de Ω , então $u \in W^{k,p}(\omega)$.

(iv) Se $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, então $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ e vale

$$D^{\alpha}(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta} \varphi D^{\alpha-\beta} u, \quad (3.4)$$

$$\text{em que } \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.3). □

Assim como os espaços de Hölder, temos que os espaços de Sobolev são de Banach.

Teorema 3.11. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, cuja norma é dada pela expressão 3.3.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.6). \square

Recorrer constantemente à definição de derivada fraca em aplicações práticas torna-se uma tarefa trabalhosa. Visando contornar essa dificuldade, investigaremos a estrutura dos espaços de Sobolev através de métodos de aproximação por funções suaves. Para os resultados subsequentes, fixamos $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ e definimos $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Teorema 3.12 (Aproximação local). *Suponha que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, e defina*

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \text{ em } \Omega_\varepsilon.$$

Então,

$$(i) \quad u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \text{ para cada } \varepsilon > 0,$$

$$(ii) \quad u^\varepsilon \rightarrow u \text{ em } W_{loc}^{k,p}(\Omega) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.8). \square

Note que o resultado anterior apenas garante aproximação local, o que pode ser melhorado quando estamos lidando com domínios limitados.

Teorema 3.13 (Aproximação Global). *Sejam Ω limitado e $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então, existem funções $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tais que*

$$u_m \rightarrow u \quad \text{em } W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.9). \square

A teoria desenvolvida até aqui restringiu-se a funções definidas em domínios abertos. No entanto, podemos estender essa definição para funções definidas em todo \mathbb{R}^N de modo a preservar a estrutura de Sobolev. Para isto, devemos impor uma condição de suavidade à fronteira do domínio.

Definição 3.14. Dizemos que a fronteira $\partial\Omega$ é C^k se para cada ponto $x^0 \in \partial\Omega$ existem $r > 0$ e uma função $\gamma: \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tais que

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{x \in B_r(x^0) \mid x_N > \gamma(x_1, \dots, x_{N-1})\}.$$

Com isso, obtemos

Teorema 3.15 (Extensão). *Sejam Ω limitado e $\partial\Omega \in C^1$. Escolha um conjunto aberto e limitado V tal que $\Omega \subset\subset V$. Então, existe um operador linear limitado*

$$E: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{3.5}$$

tal que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(i) $Eu = u$ qtp em Ω ,

(ii) Eu tem suporte contido de V ,

(iii)

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

em que $C = C(p, \Omega, V)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.11). \square

A definição de funções de Sobolev em abertos Ω não garante, em geral, valores definidos na fronteira $\partial\Omega$, que possui medida nula. Para atribuir um significado consistente ao conceito de “restrição de u a $\partial\Omega$ ”, utiliza-se o operador traço, que permite estender a noção de valores no bordo de modo adequado.

Teorema 3.16 (Traço). *Seja Ω limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 . Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$,

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.14). \square

Além disso, esse operador possui como núcleo o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, já definido anteriormente,

Teorema 3.17 (Traço nulo). *Seja Ω limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 e suponha que $u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Então

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.16). \square

3.4 Imersões de Sobolev

O estudo dos espaços de Sobolev culmina em dois resultados fundamentais que consolidam sua utilidade na análise de equações diferenciais: as imersões de Sobolev e as desigualdades de Poincaré. As primeiras estabelecem relações de inclusão contínua entre espaços de Sobolev com diferentes expoentes de regularidade e integrabilidade, revelando ganhos de regularidade intrínsecos às funções desses espaços. Já as desigualdades de Poincaré fornecem estimativas que controlam a norma de

uma função pela norma de suas derivadas, desempenhando um papel crucial na demonstração de coercividade e na análise variacional. Ambos os instrumentos serão essenciais nas aplicações que se seguem.

Definição 3.18. Se $1 \leq p < N$, o conjugado de Sobolev de p é $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Teorema 3.19 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Seja $1 \leq p < N$. Então existe uma constante C , dependendo somente de p e N , tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.17). \square

Como consequência direta desse resultado, obtemos estimativas análogas válidas para o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 3.20. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e suponha que $\partial\Omega$ seja C^1 . Assuma $1 \leq p < N$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in L^{p^*}(\Omega)$, com estimativa*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.18). \square

Ainda, podemos estabelecer uma estimativa no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$,

Teorema 3.21. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Suponha $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < N$. Então, temos a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $q \in [1, p^*]$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.19). \square

No caso $N < p < \infty$, mostra-se que funções em $W^{1,p}(\Omega)$ são Hölder contínuas, um resultado conhecido como Desigualdade de Morrey.

Teorema 3.22 (Desigualdade de Morrey). *Seja $N < p \leq \infty$. Então existe uma constante C tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

para toda $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, onde $\gamma = 1 - \frac{N}{p}$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.20). \square

Observação 3.23. Observe que quando $p \rightarrow N$, temos $p^* = \frac{Np}{N-p} \rightarrow \infty$. Como $p^* > p$, temos em particular, que a imersão abaixo é compacta

$$W^{1,N}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

para todo $q < \infty$.

Além disso, para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, a imersão compacta

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$$

é válida para todo $1 \leq p < \infty$ mesmo sem assumir regularidade extra da fronteira $\partial\Omega$, uma vez que as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ são, por definição, aproximáveis por funções suaves com suporte compacto em Ω .

Agora, quando lidamos com derivadas de grau maior, resultados generalizantes aos anteriores podem ser obtidas, o que está sintetizado no seguinte teorema.

Teorema 3.24 (Desigualdade Geral de Sobolev). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 . Assuma que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então,*

(i) *Se $k < \frac{N}{p}$, então $u \in L^q(\Omega)$, em que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$. Além disso, vale a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

(ii) *Se $k > \frac{N}{p}$, então $u \in C^{k - [\frac{N}{p}] - 1, \gamma}(\bar{\Omega})$, sendo*

- $\gamma = \left[\frac{N}{p} \right] + 1 - \frac{N}{p}$, para $\frac{N}{p} \notin \mathbb{Z}$,
- $0 < \gamma < 1$, arbitrário para $\frac{N}{p} \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.22). □

3.5 Compacidade e Desigualdades de Poincaré

A desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev garante que $W^{1,p}(\Omega)$ está imerso em $L^{p^*}(\Omega)$, desde que $1 \leq p < N$, sendo $p^* = \frac{pN}{N-p}$. O próximo resultado complementa essa imersão, garantindo a **compacidade** em $L^q(\Omega)$ para $q < p^*$.

Definição 3.25. Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Dizemos que X está *compactamente imerso* em Y se

- (i) $\|u\|_Y \leq C \|u\|_X$ para alguma constante C , onde $u \in X$;

(ii) Cada sequência limitada em X é pré-compacta em Y , isto é, se $(u_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência em X com $\sup_{k \geq 1} \|u_k\|_X < \infty$, então existem uma subsequência $(u_{k_j})_{j \geq 1} \subset (u_k)_{k \geq 1}$ e $u \in Y$ tais que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{k_j} - u\|_Y = 0.$$

Teorema 3.26 (Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, com $\partial\Omega$ de classe C^1 . Suponha que $1 \leq p < N$, então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q < p^*$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.23). \square

Além disso, como consequência das imersões de Sobolev, temos as desigualdades de Poincaré, que permitem o controle da norma de u em $L^1(\Omega)$ pela norma de seu gradiente. As duas primeiras versões apresentadas a seguir são consequências dos resultados de imersão acima.

Teorema 3.27 (Desigualdade de Poincaré). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e conexo com $\partial\Omega$ de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe uma constante C tal que*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)},$$

para cada função $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.24). \square

Teorema 3.28 (Desigualdade de Poincaré para bola). *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante C tal que*

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B_r(x))} \leq Cr \|Du\|_{L^p(B_r(x))},$$

para cada bola $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ e cada função $u \in W^{1,p}(B_r(x))$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Segantin, 2024, Teorema 4.25). \square

Temos ainda uma formulação para o caso em que u se anula na fronteira.

Teorema 3.29. *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e Ω seja um conjunto aberto limitado. Então existe uma constante C , dependendo de Ω e p , tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Brezis, 2010, Corolário 9.19). \square

3.6 Capacidade de Sobolev

A capacidade de Sobolev será utilizada posteriormente para obter uma condição de existência de solução para o problema de Dirichlet não linear.

Definição 3.30 (Capacidade de Sobolev para Conjuntos Compactos). Sejam $k \in \mathbb{N}^*$ e $1 \leq p < \infty$. Dado um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, define-se a *capacidade* $W^{k,p}$ de K por

$$\text{cap}_{W^{k,p}}(K) = \inf \left\{ \|\varphi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)}^p \mid \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \varphi \geq 0, \varphi > 1 \text{ em } K \right\},$$

em que

$$\|\varphi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)}^p = \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + \sum_{j=1}^k \|\mathbf{D}_j \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$$

Observação 3.31. Podemos estender a definição de capacidade para conjuntos abertos $U \subset \mathbb{R}^N$ e, mais geralmente, para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ da seguinte maneira,

- Para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^N$, a *capacidade* $W^{k,q}$ de U é definida por

$$\text{cap}_{W^{k,q}}(U) = \sup \{ \text{cap}_{W^{k,q}}(K) \mid K \subset \mathbb{R}^N \text{ é compacto e } K \subset U \}.$$

- Para todo $A \subset \mathbb{R}^N$, a *capacidade* $W^{k,q}$ de A é definida por

$$\text{cap}_{W^{k,q}}(A) = \inf \{ \text{cap}_{W^{k,q}}(U) \mid U \subset \mathbb{R}^N \text{ é aberto e } A \subset U \}.$$

Pela desigualdade de Chebyshev, tem-se $|K| \leq \text{cap}_{W^{k,p}}(K)$, conseqüentemente todo conjunto de capacidade de Sobolev nula possui medida de Lebesgue nula. Entretanto, a recíproca não é verdadeira: um conjunto pode ter medida de Lebesgue nula e capacidade positiva, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 3.32 (Fronteira de domínios suaves). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1 . Então, para todo $k \in \mathbb{N}^*$ e $1 \leq p < \infty$, vale

$$\text{cap}_{W^{k,p}}(\partial\Omega) > 0.$$

Este fato decorre da desigualdade do traço em $W^{1,p}(\Omega)$. Sabemos que existe $C > 0$ tal que, para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\varphi \geq 1$ em $\partial\Omega$,

$$\sigma(\partial\Omega)^{1/p} \leq \|\varphi\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)},$$

sendo σ a medida superficial em $\partial\Omega$. Minimizando sobre φ , obtém-se $\sigma(\partial\Omega) \leq C^p \text{cap}_{W^{k,p}}(\partial\Omega)$, e como $\sigma(\partial\Omega) > 0$, segue a positividade da capacidade.

A capacidade de Sobolev, como definida acima, satisfaz as propriedades fundamentais de uma capacidade, isto é, monotonicidade, regularidade e subaditividade forte, sendo um caso particular do quadro abstrato (Willem, 2013, Definição 7.1.1). A seguinte propriedade de semiaditividade finita é particularmente importante para sua manipulação.

Proposição 3.33 (Semiaditividade Finita). *Seja $(K_j)_{j=1}^n$ uma família finita de subconjuntos compactos de \mathbb{R}^N . Existe uma constante $C \geq 1$, dependendo apenas de N , k e p , tal que*

$$\text{cap}_{W^{k,p}} \left(\bigcup_{j=1}^n K_j \right) \leq C \sum_{j=1}^n \text{cap}_{W^{k,p}}(K_j).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Pág. 368, Prop. A.3). □

Em resumo, a capacidade de Sobolev fornece uma ferramenta precisa para caracterizar conjuntos pequenos no contexto dos espaços de Sobolev, sendo mais sensível que a medida de Lebesgue. Como visto acima, quando um conjunto $A \subset \Omega$ é pequeno em relação a capacidade ($\text{cap}_{W^{k,p}}(A) = 0$), então A também é pequeno no sentido da medida de Lebesgue, ao mesmo passo em que temos conjuntos de medida nula cuja capacidade não é nula, conforme o Exemplo 3.32.

Equação de Poisson

4.1 Soluções Distribucionais

Estamos interessados em soluções da equação de Poisson para algum dado de medida. A partir desse capítulo, utilizaremos a solução fundamental como sendo $-\Gamma(a, x)$. Além disso, por simplicidade, faremos um abuso de notação denotando apenas por $\Gamma(a, x)$ ao invés de $-\Gamma(a, x)$.

Definição 4.1. Seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dizemos que u é uma solução da equação de Poisson

$$-\Delta u = \mu,$$

no sentido das distribuições em Ω se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e u satisfaz, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, a identidade integral

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi \, d\mu.$$

Observe que se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave em $\bar{\Omega}$, então

$$\operatorname{div}(u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) = u \Delta \varphi - \varphi \Delta u.$$

Consequentemente, pela fórmula de Green A.4.(iii), temos que

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi (-\Delta u) \, dx,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Vamos agora considerar dois exemplos que induzem medidas bem definidas, os quais dependem de fórmulas de representação. Para toda função φ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\varphi = -\Delta(\Gamma * \varphi) = -\Gamma * (\Delta \varphi), \tag{4.1}$$

em que Γ é a solução fundamental do Laplaciano.

Exemplo 4.2. Para cada $a \in \mathbb{R}^N$, a função

$$\Gamma_a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

definida para $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{a\}$ por

$$\Gamma_a(y) = \Gamma(a, y)$$

satisfaz a equação de Poisson

$$-\Delta \Gamma_a = \delta_a,$$

no sentido das distribuições em \mathbb{R}^N , em que δ_a é a medida de Dirac concentrada em a . De fato, pela fórmula de representação 4.1 e a definição do produto de convolução, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\delta_a = -\varphi(a) = (\Gamma * \Delta\varphi)(a) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma_a \Delta\varphi dy,$$

como desejado.

Baseado nisso, podemos explicitar uma solução, no sentido das distribuições, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_a & \text{em } B_r(a), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_r(a). \end{cases}$$

Já sabemos que $\Gamma_a(y)$ satisfaz $-\Delta \Gamma_a = \delta_a$ no sentido das distribuições. Resta então ajustar tal função de modo a obter a condição de fronteira $u = 0$. Para isto, basta considerar $u(y) = \Gamma_a(y) - c(N)$, sendo $c(N)$ uma constante que depende de N dada por

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln r, & \text{se } N = 2, \\ \frac{1}{(N-2)\sigma_N} \frac{1}{r^{N-2}} & \text{se } N \geq 3. \end{cases}$$

Observação 4.3. No exemplo anterior, para o caso em que Ω é um domínio qualquer, teríamos que $u = G_\Omega$ a função de Green em Ω .

Exemplo 4.4. Seja $N \geq 3$. O potencial Newtoniano gerado por uma medida não negativa $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ é a função

$$\mathcal{N}(\mu) : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$$

definida por

$$\mathcal{N}(\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, x) d\mu(y) = \frac{1}{(N-2)\sigma_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\mu(y)}{|y-x|^{N-2}}.$$

Observe que $\mathcal{N}(\mu) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz

$$-\Delta \mathcal{N}(\mu) = \mu$$

no sentido das distribuições em \mathbb{R}^N . De fato, pelo Teorema de Fubini e a fórmula de representação 4.1, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{N}(\mu) \Delta\varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, x) d\mu \right] \Delta\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, x) \Delta\varphi dx \right] d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\Gamma * \Delta\varphi) d\mu = - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu. \end{aligned}$$

A abordagem original (Evans, G. C., 1920; Wiener, 1924a,b), nos anos 1920-30, estudava a equação de Poisson com dados de medida via *potencial Newtoniano*. Mais tarde, isso foi superado por meio da formulação no sentido das distribuições (Schwartz, 1945), mais flexível e geral. O próximo resultado garante que toda solução da equação de Poisson com dado de medida não negativa iguala o *potencial Newtoniano* mais uma função harmônica

Proposição 4.5. *Sejam $N \geq 3$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ uma medida não negativa. Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma solução da equação de Poisson com densidade μ , então existe uma função harmônica $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$u = \mathcal{N}(\mu) + h,$$

qtp em Ω .

Para provar essa decomposição de u em termos do potencial e de uma função harmônica, necessitamos do seguinte resultado auxiliar.

Proposição 4.6. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = 0,$$

então existe uma função harmônica $\bar{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{u} = u$ qtp em Ω .

Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazendo a identidade acima é dita ser *fracamente harmônica*. Para demonstrar esse resultado, os dois ingredientes principais são a propriedade da média para funções harmônicas e o lema de Bôcher-Koebe, enunciado abaixo.

Lema 4.7 (Bôcher-Koebe). *Seja $u \in L^1(\Omega)$. Se para cada $x \in \Omega$ e cada $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ temos*

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u \, dx,$$

então $u \in C(\Omega)$.

Demonstração da Proposição 4.6. Para simplificar a prova, assumiremos que $\Omega = \mathbb{R}^N$ (podemos fazer isso por conta de (Ponce, 2016, Proposição 2.18)). Para qualquer $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que $\rho * u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\Delta(\rho * u)(x) = (\Delta\rho) * u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta\rho(x-y)u(y) \, dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Como a função $\mathbb{R}^N \ni y \mapsto \rho(x-y)$ pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, pela hipótese sobre u ,

$$\Delta(\rho * u) = 0.$$

Assim, $\rho * u$ é harmônica em \mathbb{R}^N . Em particular, $\rho * u$ satisfaz a propriedade da média para funções harmônicas. Seja $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de regularizantes e, para cada bola $B_r(x)$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho_n * u(x) = \int_{B_r(x)} \rho_n * u \, dy.$$

Como $(\rho_n * u)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para u em $L^1(B_r(x))$, segundo o Teorema A.27, segue que $(\rho_n * u)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $\bar{u}_r : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida para $x \in \mathbb{R}^N$ por

$$\bar{u}_r(x) = \int_{B_r(x)} u.$$

Em particular, \bar{u}_r é contínua (Folland, 1999, Lema 3.16). Pelo Corolário 1.23, passando a uma subsequência, se necessário, temos que $(\rho_n * u)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge qtp para u . Assim, $u = \bar{u}_r$ qtp em \mathbb{R}^N , e então, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, deduzimos que

$$\bar{u}_r(x) = \int_{B_r(x)} \bar{u}_r.$$

Para quaisquer $r, s > 0$, temos $\bar{u}_r = \bar{u}_s$ em \mathbb{R}^N . De fato, ambas as funções são contínuas em \mathbb{R}^N e coincidem qtp com u em \mathbb{R}^N . Denotando por \bar{u} esta função comum, temos para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e todo $r > 0$,

$$\bar{u}(x) = \int_{B_r(x)} \bar{u}.$$

Pelo lema de Böcher-Koebe 4.7, $\bar{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Finalmente, segue da caracterização do Laplaciano como uma diferença infinitesimal de médias A.28, que \bar{u} é harmônica. Alternativamente, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta \bar{u} \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u} \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} u \Delta \varphi = 0,$$

donde $\Delta \bar{u} = 0$ em \mathbb{R}^N , e a conclusão segue. \square

Agora, podemos demonstrar a proposição 4.5.

Demonstração da Proposição 4.5. Como u e $\mathcal{N}(\mu)$ satisfazem a equação de Poisson com densidade μ , para toda $\varphi \in C_c(\Omega)$ temos

$$\int_{\Omega} (u - \mathcal{N}(\mu)) \Delta \varphi \, dx = 0.$$

Pela proposição 4.6, existe uma função harmônica $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u - \mathcal{N}(\mu) = h$ qtp em Ω e, conseqüentemente, $u = \mathcal{N}(\mu) + h$ qtp em Ω . \square

O potencial Newtoniano pode ser representado em termos da carga total de bolas, baseado no Princípio de Cavalieri, como afirma o Lema a seguir.

Lema 4.8. *Sejam $N \geq 3$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ uma medida não negativa. Para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos*

$$\mathcal{N}(\mu)(x) = \frac{1}{\sigma_N} \int_0^\infty \frac{\mu(B_r(x))}{r^{N-2}} \frac{dr}{r}.$$

Demonstração. Aplicando o Princípio de Cavalieri para a função $y \mapsto \frac{1}{|x-y|^{N-2}}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}} = \int_0^\infty \mu \left(\left\{ y \in \mathbb{R}^N \mid \frac{1}{|x-y|^{N-2}} > t \right\} \right) dt.$$

Usando a mudança de variáveis $t = \frac{1}{r^{N-2}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}} &= (n-2) \int_0^\infty \mu(\{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < r\}) \frac{1}{r^{N-1}} dr \\ &= (N-2) \int_0^\infty \frac{\mu(B_r(x))}{r^{N-1}} dr. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{N}(\mu)(x) = \frac{1}{(N-2)\sigma_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}} = \frac{1}{\sigma_N} \int_0^\infty \frac{\mu(B_r(x))}{r^{N-2}} \frac{dr}{r}. \quad \square$$

Como consequência desse resultado, obtemos um critério suficiente para saber quando um *potencial Newtoniano* é finito em um dado ponto.

Proposição 4.9. *Sejam $N \geq 3$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ uma medida não negativa. Se $x \in \mathbb{R}^N$ é tal que, para todo $r > 0$,*

$$\mu(B_r(x)) \leq Cr^s$$

para alguma constante $C > 0$ e algum expoente $s > N - 2$, então $\mathcal{N}(\mu)(x) < +\infty$.

Demonstração. Usando a representação dada pelo lema anterior, vamos aplicar a estimativa de densidade para bolas pequenas e a finitude da medida para bolas grandes, isto é,

$$\begin{aligned} \sigma_N \mathcal{N}(\mu)(x) &= \int_0^1 \frac{\mu(B_r(x))}{r^{N-1}} dr + \int_1^\infty \frac{\mu(B_r(x))}{r^{N-1}} dr \leq C \int_0^1 r^{s-(N-1)} dr + \mu(\mathbb{R}^N) \int_1^\infty \frac{dr}{r^{N-1}} \\ &= C \left[\frac{r^{s-N+2}}{s-N+2} \right]_0^1 + \mu(\mathbb{R}^N) \left[\frac{r^{-N+2}}{-N+2} \right]_1^\infty = \frac{C}{s-N+2} + \frac{\mu(\mathbb{R}^N)}{N-2} < \infty, \end{aligned}$$

pois $s > N - 2$ e $N > 2$, e a conclusão segue. □

4.2 Funções Superharmônicas

No sentido das distribuições, podemos enfraquecer a definição de função superharmônica de modo a englobar funções somáveis, ou ainda, localmente somáveis, como garante a próxima definição.

Definição 4.10. Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é superharmônica se, para toda função não negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi \geq 0.$$

A propriedade do valor médio é herdada por funções que são superharmônicas no sentido das distribuições, como garante a proposição abaixo.

Proposição 4.11. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se para toda função não negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,*

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi \geq 0,$$

então, para todo $x \in \Omega$, a função

$$(0, d(x, \partial\Omega)) \ni r \mapsto u_{B_r(x)} := \int_{B_r(x)} u \, dy$$

é não crescente.

Demonstração. Dado um conjunto aberto $\omega \subset\subset \Omega$, tome uma função não negativa $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\omega - \text{supt}(\rho) \subset\subset \Omega$. Mostremos que a função suave $\rho * u$ é superharmônica em ω . De fato, para todo $x \in \omega$ temos

$$\Delta(\rho * u)(x) = (\Delta\rho) * u(x) = \int_{\Omega} \Delta\rho(x-y)u(y) \, dy.$$

A função $y \in \mathbb{R}^N \mapsto \rho(x-y)$ é suave e tem suporte em $x - \text{supt}(\rho)$, que é um subconjunto compacto de Ω para todo $x \in \omega$. Pela hipótese sobre u , deduzimos que

$$\Delta(\rho * u)(x) \leq 0,$$

logo, $\rho * u$ é superharmônica em ω .

Da propriedade do valor médio para funções superharmônicas suaves A.9, segue que, para todo $x \in \omega$ e todo $0 < s \leq r < d(x, \partial\omega)$, temos

$$\rho * u_{B_r(x)} \leq \rho * u_{B_s(x)}.$$

Aplicamos agora esta desigualdade a uma sequência de regularizantes $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e fazemos $n \rightarrow \infty$ para deduzir que

$$u_{B_r(x)} \leq u_{B_s(x)}.$$

Como $\omega \subset\subset \Omega$ é arbitrário, a conclusão segue. \square

Corolário 4.12. *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função superharmônica no sentido das distribuições. Então, para todo $0 < r < d(x, \partial\Omega)$, temos*

$$\int_{B_r(x)} u \leq u(x).$$

Demonstração. Basta fazer $s \rightarrow 0$ na proposição anterior e usar o fato de que $u_{B_s(x)} \rightarrow u(x)$ quando $s \rightarrow 0$ (Folland, 1999, Lema 3.16). \square

Em seguida, vamos provar que toda função superharmônica é o potencial associado a alguma densidade de cargas não negativas. Para isto, utilizaremos a seguinte versão do *Teorema da Representação de Riesz*.

Proposição 4.13. *Se $F : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que $F \geq 0$ no sentido das distribuições em Ω , então existe uma medida não negativa $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ tal que, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos*

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi \, d\mu.$$

Demonstração. Dada uma função não negativa $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, para toda função limitada $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ a função $(\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} - \varphi)\psi$ é admissível na desigualdade $F \geq 0$. Pela linearidade de F , temos

$$F(\varphi\psi) \leq F(\psi)\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Como esta propriedade vale para φ e $-\varphi$ em $C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$|F(\varphi\psi)| \leq F(\psi)\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Dado um subconjunto aberto $\omega \in \Omega$, escolhemos $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ em ω . Para toda $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$, temos então $\varphi\psi = \varphi$ e, além disso, $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^\infty(\omega)}$. Portanto,

$$|F(\varphi)| \leq F(\psi)\|\varphi\|_{L^\infty(\omega)}.$$

Como o funcional linear F é limitado (logo, contínuo) no subespaço $C_c^\infty(\omega)$ denso em $C_c^0(\omega)$, segue possui uma única extensão como um funcional linear contínuo em $C_c^0(\omega)$ (ver (Oliveira, 2014, Teorema 4.7)). Pelo teorema da representação de Riesz A.14, existe uma única medida finita μ_ω em ω tal que, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$, temos

$$F(\varphi) = \int_\omega \varphi d\mu_\omega.$$

A medida μ_ω é não negativa como consequência da regularidade interna de medidas finitas A.13. De fato, dado um conjunto compacto $K \subset \omega$, seja $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada não negativa em $C_c^\infty(\omega)$ convergindo pontualmente para a função característica χ_K . Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_\omega \varphi_n d\mu_\omega = F(\varphi_n) \geq 0.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, o teorema da convergência dominada fornece

$$\mu_\omega(K) = \int_\omega \chi_K d\mu_\omega \geq 0.$$

Pela regularidade interna de μ_ω , dado $A \subset \omega$ um conjunto de Borel e $\varepsilon > 0$, existe $K \subset A$ compacto tal que

$$|\mu_\omega(A \setminus K)| \leq \varepsilon.$$

Como $\mu_\omega(A) = \mu_\omega(K) + \mu_\omega(A \setminus K)$, segue que

$$\mu_\omega(A) = \mu_\omega(K) + \mu_\omega(A \setminus K) \geq 0 - \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos que $\mu_\omega(A) \geq 0$. Logo $\mu_\omega(A) \geq 0$ para todo $A \subset \omega$ boreliano.

Tomando uma sequência crescente de abertos $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ estritamente contidos em Ω tal que $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$, definimos a função de conjunto de Borel μ em todo conjunto de Borel $A \subset \Omega$ por

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\omega_n}(A \cap \omega_n).$$

O limite acima é finito ou diverge para infinito devido à monotonicidade da sequência. Além disso, para todo conjunto A estritamente contido em Ω , o limite acima se torna estacionário, donde $\mu(A) = \mu_{\omega_n}(A)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. De fato, como a sequência é crescente e $A \subsetneq \Omega$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \omega_k$ para todo $n \geq k$. Logo, $\mu(A) = \mu_{\omega_k}(A)$.

Em particular, μ é uma medida localmente finita em Ω , e representa o funcional F no sentido das distribuições em Ω . \square

Proposição 4.14. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se u é superharmônica, então existe uma medida não negativa $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$-\Delta u = \mu$$

no sentido das distribuições em Ω .

Demonstração. O funcional F definido para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ por

$$F(\varphi) = - \int_{\Omega} u \Delta \varphi$$

é não negativo pela superharmonicidade de u . A conclusão segue da proposição anterior. \square

No que segue, vamos provar que é possível aproximar a solução u por convolução sem interferir na equação, desde que fiquemos “longe” da fronteira do domínio.

Proposição 4.15. *Seja $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega)$. Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfaz a equação de Poisson com densidade μ (Definição 4.1), então, para todo aberto $\omega \subset \subset \Omega$ e toda função $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\omega - \text{supt}(\rho) \subset \subset \Omega$, temos*

$$-\Delta(\rho * u) = \rho * \mu \quad \text{em } \omega.$$

Demonstração. Observe que a função $\mathbb{R}^N \ni y \mapsto \rho(x-y)$ está bem definida e é suave, com suporte no subconjunto compacto $x - \text{supt}(\rho)$ de Ω . Como a função $\rho * u$ é suave em ω e u satisfaz a equação de Poisson com densidade μ , para todo $x \in \omega$, temos

$$-\Delta(\rho * u)(x) = -(\Delta \rho) * u(x) = - \int_{\Omega} \Delta \rho(x-y) u(y) dy = \int_{\Omega} \rho(x-y) d\mu(y) = \rho * \mu(x).$$

Isto conclui a demonstração do lema. \square

Princípio do Máximo Fraco

Nesse capítulo, vamos obter uma versão do Princípio do Máximo Fraco para funções superharmônicas no sentido do dual de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, isto é, para toda função não negativa $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, temos

$$-\int_{\Omega} u \Delta \zeta \geq 0.$$

Antes, definiremos a noção de solução no sentido das distribuições para o problema de Dirichlet linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

e, em seguida, veremos um exemplo relacionando as noções de superharmonicidade no sentido do laplaciano e sentido do dual de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

Definição 5.1. Seja Ω um aberto limitado, e seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema de Dirichlet linear com densidade μ se

(i) $u \in L^1(\Omega)$;

(ii) para toda $\xi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$,

$$-\int_{\Omega} u \Delta \xi = \int_{\Omega} \xi d\mu.$$

O resultado a seguir estabelece regularidade para soluções do problema de Dirichlet linear.

Proposição 5.2. Seja Ω um aberto limitado suave, e seja $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se u é a solução do problema de Dirichlet linear com densidade μ , então, para todo $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, temos $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, e vale a estimativa

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

para alguma constante $C > 0$ que depende de q , de N e de Ω .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Proposição 5.1) \square

Exemplo 5.3. Toda função superharmônica não negativa $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $-\Delta u \geq 0$ no sentido $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))'$ em um domínio suave Ω . De fato, dada uma sequência de regularizantes $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$, cada função $\rho_k * u$ é não negativa e superharmônica em \mathbb{R}^N pois ρ_k é não negativa para todo $k \in \mathbb{N}$ e $-\Delta(\rho_k * u) = \rho_k * (-\Delta u) \geq 0$.

Além disso, para toda função não negativa $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ temos $\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{n}} \leq 0$ em $\partial\Omega$ (Lema de Hopf A.33). Pelo teorema da divergência, para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\int_{\Omega} (\rho_k * u) \Delta \zeta = \int_{\Omega} \zeta \Delta(\rho_k * u) + \int_{\partial\Omega} (\rho_k * u) \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \leq 0.$$

Consequentemente, segue do Teorema da Convergência Dominada que $-\Delta u \geq 0$ sentido do dual de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

Após essa discussão, podemos enunciar e demonstrar o princípio do máximo fraco para funções superharmônicas sentido do dual de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

Proposição 5.4. *Seja Ω um domínio suave e $u \in L^1(\Omega)$. Se $-\Delta u \geq 0$ sentido do dual de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, então $u \geq 0$ quase sempre em Ω .*

Demonstração. Para toda $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, seja $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ a solução do problema de Dirichlet linear

$$\begin{cases} -\Delta \zeta = f & \text{em } \Omega, \\ \zeta = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $f \geq 0$ em $\bar{\Omega}$, então ζ é superharmônica e, pelo princípio do máximo fraco para funções C^2 (Ponce, 2016, Corolário 1.10), temos que $\zeta \geq 0$ em Ω . Deduzimos então que

$$\int_{\Omega} u f = - \int_{\Omega} u \Delta \zeta \geq 0. \quad (5.2)$$

Como esta desigualdade vale para toda $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $f \geq 0$ em $\bar{\Omega}$, podemos tomar a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $f_n = \rho_n * \chi_{\{u < 0\}}$, convergindo qtp para a função característica $\chi_{\{u < 0\}}$, e tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(\Omega)$. Pelo teorema da convergência dominada, com f_n no lugar de f em (5.2), deduzimos que

$$\int_{\{u < 0\}} u \geq 0.$$

Portanto, $u \geq 0$ quase sempre em Ω . \square

Neste momento, podemos nos questionar se existe uma, ou mais condições, as quais permitem passar de uma desigualdade no sentido das distribuições para uma desigualdade sentido do dual de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Isto é, queremos obter alguma condição para que uma supersolução da equação

$$-\Delta u = \mu \quad \text{em } \Omega,$$

seja uma supersolução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para estabelecer essa relação, necessitamos de um método de aproximação de funções teste em $C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

Lema 5.5. *Seja Ω um domínio. Então, para toda função não negativa $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, existe uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções não negativas em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que*

1. $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para ζ em $\bar{\Omega}$,
2. $(\nabla \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\bar{\Omega}$ e converge pontualmente para $\nabla \zeta$ em Ω .

Demonstração. Dada uma função suave não negativa $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula em uma vizinhança de 0, para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $\varphi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_n = H(n\zeta)\zeta$$

é não negativa e pertence a $C_c^\infty(\Omega)$. Note que a primeira afirmação é satisfeita se escolhermos H tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 1.$$

De fato, seja $\varepsilon > 0$ e tome $\delta_0 > 0$ a ser escolhido. Para tal H temos que

- para $\zeta(x) \geq \delta_0 > 0$, tomamos $n \geq N_0$, com N_0 grande, tal que

$$|H(t) - 1| < \varepsilon, \quad \text{desde que } t \geq N_0\delta_0.$$

Como $n\zeta(x) \geq n\delta_0$, para todo $x \in \Omega$ tal que $\zeta(x) \geq \delta_0$, segue que

$$|\varphi_n(x) - \zeta(x)| = |\zeta(x)| |H(n\zeta(x)) - 1| \leq \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \varepsilon,$$

se $n \geq N_0$.

- para $\zeta(x) < \delta_0$,

$$|\varphi_n(x) - \zeta(x)| = |\zeta(x)| |H(n\zeta(x)) - 1| \leq 2\delta_0 < \varepsilon,$$

se tomamos $\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Nesta última desigualdade, utilizamos o fato que $0 \leq H(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, devido às condições impostas acima.

Isso prova que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para ζ . Quanto à convergência da sequência dos gradientes, observe que

$$\nabla \varphi_n = H(n\zeta)\nabla \zeta + [n\zeta H'(n\zeta)]\nabla \zeta.$$

Como $\zeta \geq 0$, temos $\nabla \zeta = 0$ no conjunto $\Omega \cap \{\zeta = 0\}$ e, conseqüentemente, $\nabla \varphi_n(x) = 0 = \nabla \zeta(x)$. Nos pontos em que $\zeta(x) \neq 0$, precisamos da condição

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} tH'(t) = 0,$$

pois, pontualmente, temos

$$\begin{cases} H(n\zeta(x))\nabla \zeta(x) \rightarrow \nabla \zeta(x), \\ n\zeta(x)H'(n\zeta(x))\nabla \zeta(x) \rightarrow 0, \end{cases}$$

garantindo que

$$\nabla \varphi_n(x) \rightarrow \nabla \zeta(x) \quad \text{pontualmente.}$$

Por fim, temos que $\nabla \varphi_n$ é limitada, já que

$$|\nabla \varphi_n(x)| \leq |H(n\zeta(x))|\nabla \zeta(x)| + |n\zeta(x)H'(n\zeta(x))|\nabla \zeta(x)| \leq C|\nabla \zeta(x)|. \quad \square$$

Observação 5.6. No lema anterior, basta considerar a função $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2-1}\right), & \text{se } |t| > 1, \\ 0, & \text{se } |t| \leq 1, \end{cases}$$

e observar que ela satisfaz as condições impostas acima, isto é,

- H é suave;
- H se anula numa vizinhança da origem;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 1$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} tH'(t) = 0$.

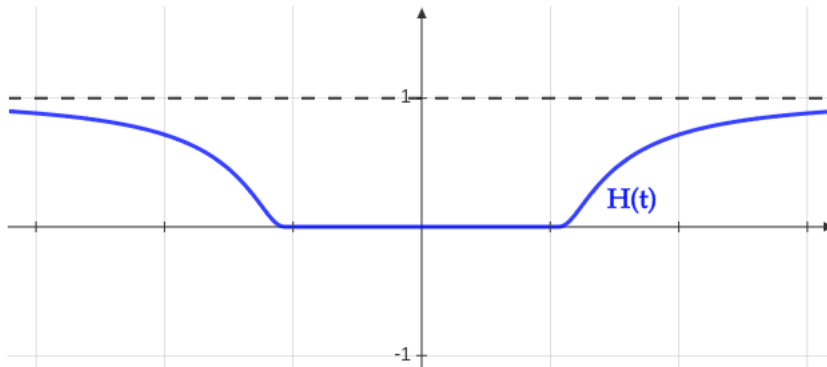


Figura 5.1: Gráfico da função $H(t)$.

Através desse lema, dada $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ uma função com sinal, podemos escrever $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ como uma diferença de funções com sinal e obter seqüências $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aproximando ζ_1 e ζ_2 , respectivamente. Com isso, a seqüência definida por $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\varphi_n - \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aproxima a função ζ . Utilizando o lema anterior, podemos provar o seguinte resultado,

Proposição 5.7. *Seja Ω um domínio suave. Então, para toda $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, temos que u é uma solução do problema de Dirichlet linear (5.1) se, e somente se, $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e a equação $-\Delta u = \mu$ é satisfeita no sentido das distribuições em Ω , isto é, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \varphi \, d\mu.$$

Demonstração. Se u é uma solução do problema de Dirichlet, então a equação é satisfeita no sentido das distribuições, e pela propriedade de regularidade de Sobolev 5.2 temos $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Reciprocamente, assumamos que $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e que a equação é satisfeita no sentido das distribuições em Ω . Como $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, para todo $\xi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, temos

$$-\int_{\Omega} u \Delta \xi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi.$$

Por outro lado, tomando uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ satisfazendo as propriedades (i) e (ii) do Lema 5.5, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_n = \int_{\Omega} \varphi_n \, d\mu.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, para qualquer $\xi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, deduzimos do teorema da convergência dominada que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi = \int_{\Omega} \xi \, d\mu.$$

Logo, u é uma solução do problema de Dirichlet linear com densidade μ no sentido da Definição 5.1. □

Como uma consequência do argumento utilizado acima, podemos obter uma equivalência entre as duas definições de super-solução (no sentido das distribuições e no sentido $(C_0^\infty(\Omega))'$).

Proposição 5.8. *Sejam Ω um domínio suave e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Tome $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $-\Delta u \geq \mu$ sentido do dual de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$,
- (ii) $-\Delta u \geq \mu$ no sentido das distribuições em Ω .

Demonstração. Suponha que $-\Delta u \geq \mu$ sentido do dual de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Assim, como $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ (Proposição 5.2), para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega} u \Delta \varphi \geq \int_{\Omega} \varphi \, d\mu.$$

pela *Fórmula de Integração por Partes*.

Logo, $\Delta u \geq \mu$ no sentido das distribuições em Ω . Reciprocamente, assumamos que u satisfaz (ii). Como $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, para toda $\xi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ segue da fórmula de integração por partes que

$$-\int_{\Omega} u \Delta \xi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi.$$

Tomando uma função não negativa ξ e uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ como no lema de aproximação 5.5, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \geq \int_{\Omega} \varphi_n \, d\mu.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, pelo teorema da convergência dominada obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n \, d\mu = \int_{\Omega} \xi \, d\mu,$$

e a conclusão segue. \square

5.1 Desigualdade de Kato

Indo além dos princípios clássico e fraco, estudaremos o Princípio do Máximo Inverso. Mas, para provar esse resultado, precisamos antes da desigualdade de Kato e algumas de suas variantes.

Proposição 5.9. *Se $u \in L^1(\Omega)$ é tal que $\Delta u \in L^1(\Omega)$, então*

$$\Delta u^+ \geq \chi_{\{u>0\}} \Delta u,$$

no sentido das distribuições em Ω .

Demonstração. Observe que se u é suave, para toda função suave $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, temos

$$\Delta H(u) = H'(u) \Delta u + H''(u) |\nabla u|^2$$

e, supondo que H é convexa, isto é, $H''(x) \geq 0$ para todo x , então

$$\Delta H(u) = H'(u) \Delta u + H''(u) |\nabla u|^2 \geq H'(u) \Delta u. \quad (5.3)$$

Agora, no caso em que $u \in L^1(\Omega)$, tomamos uma função teste não negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e uma sequência de regularizantes $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\text{supt}(\varphi) - \text{supt}(\rho_n) \subset\subset \Omega$, de modo que

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * \Delta u, \quad (5.4)$$

pontualmente em $\text{supt}(\varphi)$. Pela fórmula de integração por partes e a desigualdade (5.3), segue que

$$\int_{\Omega} H(\rho_n * u) \Delta \varphi = \int_{\Omega} \Delta H(\rho_n * u) \varphi \geq \int_{\Omega} H'(\rho_n * u) (\rho_n * \Delta u) \varphi. \quad (5.5)$$

Assumindo também que H' é limitada em \mathbb{R} , fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos, pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_{\Omega} H(u) \Delta \varphi \geq \int_{\Omega} H'(u) \Delta u \varphi. \quad (5.6)$$

Por fim, resta aproximar a função $t \mapsto t^+$, com t real, por funções convexas e suaves. Para isto, considere a sequência de funções suaves $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por

$$H_n(t) = \frac{t + \sqrt{t^2 + 1/n}}{2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e observe que

(i) H_n é convexa para todo $n \in \mathbb{N}$, já que

$$H_n''(t) = \frac{1}{2n} \left(t^2 + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{3}{2}} \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(ii) para todo $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(t) = t^+$ pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t + \sqrt{t^2 + 1/n}}{2} = \frac{t + |t|}{2} = t^+;$$

(iii) para todo $t \leq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{t}{(-t)} \right] = 0;$$

(iv) para todo $t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{t}{t} \right] = 1;$$

(v) $(H_n')_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, pois

$$\frac{|t|}{\sqrt{t^2 + 1/n}} < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e logo,

$$|H_n'(t)| = \left| \frac{1}{2} \left[1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}} \right] \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Assim, aplicando a desigualdade (5.6) com $H = H_n$ e fazendo $n \rightarrow \infty$, segue pelo teorema da convergência dominada que

$$\int_{\Omega} u^+ \Delta \varphi \geq \int_{\Omega} \chi_{\{u>0\}} \Delta u \varphi. \quad \square$$

Observação 5.10. • No caso u suave, para concluir a demonstração basta multiplicar a desigualdade (5.3) por uma função teste $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrar para obter (5.6). A partir disso, procedemos como no restante da demonstração.

- A demonstração acima continua válida se for escolhida qualquer sequência de funções suaves convexas $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo as condições (ii)-(iv) acima.

Quando estamos tratando das desigualdade de Kato, a hipótese $\Delta u \in L^1(\Omega)$ não é invariante, no sentido em que nem sempre $\Delta u^+ \in L^1(\Omega)$, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 5.11. Para todo $a < c < b$, a função $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = x - c$$

satisfaz

$$\Delta u^+ = (u^+)'' = \delta_c$$

no sentido das distribuições em (a, b) . De fato, seja $\varphi \in C_c^\infty((a, b))$ uma função teste arbitrária. Pela definição de derivada distribucional A.23, temos

$$\langle (u^+)'' , \varphi \rangle = \langle u^+ , \varphi'' \rangle = \int_a^b u^+(x) \varphi''(x) dx.$$

Da definição de parte positiva, a integral reduz-se ao intervalo (c, b) , isto é,

$$\langle (u^+)'' , \varphi \rangle = \int_c^b (x - c) \varphi''(x) dx.$$

Utilizando integração por partes, com $f(x) = x - c$ e $g'(x) = \varphi''(x)$, obtemos

$$\int_c^b (x - c) \varphi''(x) dx = \left[(x - c) \varphi'(x) \right]_c^b - \int_c^b 1 \cdot \varphi'(x) dx.$$

Analisando nos extremos do intervalo,

- em $x = b$, $\varphi'(b) = 0$ pois φ tem suporte compacto em (a, b) ;
- em $x = c$, o termo $(x - c)$ anula-se.

Logo, o termo de fronteira é nulo e, com isso, resta a integral

$$- \int_c^b \varphi'(x) dx = - \left[\varphi(x) \right]_c^b = -(\varphi(b) - \varphi(c)).$$

Novamente, como $\varphi(b) = 0$, obtemos

$$\langle (u^+)'' , \varphi \rangle = \varphi(c).$$

Por definição, $\langle \delta_c , \varphi \rangle = \varphi(c)$. Portanto, conclui-se que $(u^+)'' = \delta_c$ no sentido das distribuições, mostrando que Δu^+ não é uma função em $L^1(\Omega)$.

Vale ressaltar que Δu^+ é sempre uma medida localmente finita. Tal fato é uma consequência direta da caracterização de Schwartz para distribuições não negativas (Proposição 4.13). De fato, a desigualdade de Kato garante a não negatividade da distribuição dada por

$$T = \Delta u^+ - \chi_{\{u > 0\}} \Delta u.$$

Sendo T não negativa, ela define uma medida localmente finita em Ω e, por linearidade, a mesma propriedade se estende a Δu^+ .

Embora a aplicação clássica da desigualdade de Kato assuma que $\Delta u \in L^1(\Omega)$, essa condição é bastante restritiva no estudo de subsoluções ou equações que envolvem dados de medida. Para estender a desigualdade ao caso em que Δu é uma medida, necessitamos de alguma estratégia para tratar o termo $\chi_{\{u>0\}}\Delta u$. A primeira delas consiste em eliminar a dependência explícita da função característica.

Proposição 5.12. *Se $u \in L^1(\Omega)$ é tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, então*

$$\Delta u^+ \geq \min\{\Delta u, 0\}$$

no sentido das distribuições em Ω .

Demonstração. Na demonstração da desigualdade de Kato, considere $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e reescreva (5.4) em $\text{supt}(\varphi)$ como

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * \Delta u \geq \rho_n * \min\{\Delta u, 0\}.$$

Em particular, a função no lado direito é não positiva. Assumindo, em adição às condições impostas na Proposição 5.9, que $0 \leq H' \leq 1$, a desigualdade integral (5.5) pode ser substituída por

$$\int_{\Omega} H(\rho_n * u) \Delta \varphi = \int_{\Omega} \Delta H(\rho_n * u) \varphi \geq \int_{\Omega} H'(\rho_n * u) (\rho_n * \Delta u) \varphi \geq \int_{\Omega} (\rho_n * \min\{\Delta u, 0\}) \varphi.$$

Assim, quando $n \rightarrow \infty$, segue do teorema da convergência dominada que

$$\int_{\Omega} H(u) \Delta \varphi \geq \int_{\Omega} \varphi \min\{\Delta u, 0\}.$$

Usando o mesmo argumento de aproximação com funções convexas suaves contido na demonstração da Proposição 5.9, a conclusão segue. \square

Observação 5.13. (i) Quando escrevemos $\min\{\Delta u, 0\}$ estamos nos referindo ao mínimo entre Δu e a medida nula. Para dar um sentido a isso, podemos escrevemos $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e, então, temos que $\min\{\mu, 0\} = -\mu^-$;

(ii) A própria sequência de funções H_n , definida na demonstração da Proposição 5.9 satisfaz a condição $0 \leq H'_n \leq 1$.

Outra maneira de trabalhar com o termo em questão, consiste em substituir Δu por alguma função somável que seja menor que esse laplaciano. A motivação para isto vem do fato que se u é suave e satisfaz $\Delta u \geq f$, com $f \in L^1(\Omega)$, então

$$\chi_{\{u>0\}}\Delta u \geq \chi_{\{u>0\}}f.$$

A próxima proposição lida com o caso em que não temos a suavidade de u .

Proposição 5.14. *Seja $f \in L^1(\Omega)$. Se $u \in L^1(\Omega)$ é tal que*

$$\Delta u \geq f$$

no sentido das distribuições em Ω , então,

$$(\Delta u)^+ \geq \chi_{\{u>0\}} f$$

no sentido das distribuições em Ω .

Demonstração. Observe (5.4) pode ser reescrita em $\text{supt}(\varphi)$ como

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * \Delta u \geq \rho_n * f.$$

Assumindo, em adição às condições impostas na Proposição 5.9, que H' é não negativa, obtemos pela desigualdade (5.5) que

$$\int_{\Omega} H(\rho_n * u) \Delta \varphi = \int_{\Omega} \Delta H(\rho_n * u) \varphi \geq \int_{\Omega} \Delta H'(\rho_n * u) (\rho_n * \Delta u) \varphi \geq \int_{\Omega} \Delta H'(\rho_n * u) (\rho_n * f) \varphi.$$

Portanto, fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando o teorema da convergência dominada, obtemos

$$\int_{\Omega} H(u) \Delta \varphi \geq \int_{\Omega} H'(u) f \varphi.$$

Para concluir, basta repetir o argumento de aproximação por funções suaves convexas. \square

Uma terceira abordagem consiste em atribuir um sentido rigoroso ao produto $\chi_{\{u>0\}} \Delta u$ utilizando um elemento mais regular em alguma classe de equivalência de u . Este representante é dado pela definição a seguir

Definição 5.15. *Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^N$ é um *ponto de Lebesgue* de u se existe $\hat{u}(x) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |u - \hat{u}(x)| = 0.$$

A função $\hat{u}: \mathcal{L}_u \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida no conjunto de Lebesgue \mathcal{L}_u de todos os pontos de Lebesgue é o *representante preciso* de u .

Embora o Teorema de Diferenciação de Lebesgue garanta que $\hat{u} = u$ em quase todo ponto (com o conjunto excepcional $\Omega \setminus \mathcal{L}_u$ tendo medida de Lebesgue nula), a hipótese adicional de que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$ nos permite um controle muito mais fino sobre este conjunto singular (Ponce, 2016, Proposição 8.11), isto é,

$$\text{cap}_{W^{1,2}}(\Omega \setminus \mathcal{L}_u) = 0,$$

em que $\text{cap}_{W^{1,2}}$ denota a capacidade de Sobolev associada a norma $W^{1,2}$.

Neste contexto, será necessário analisar a estrutura da medida Δu sob a ótica da capacidade $W^{1,2}$. Isso é feito pela proposição 1.29, a qual garante que podemos decompor qualquer medida μ como

$$\mu = \mu_d + \mu_c,$$

em que μ_d é difusa com respeito a capacidade $W^{1,2}$ e μ_c é concentrada em algum conjunto de Borel $E \subset \Omega$ com capacidade nula.

Por meio dessa decomposição, obtemos a seguinte versão da Desigualdade de Kato.

Teorema 5.16. *Se $u \in L^1(\Omega)$ é tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, então $\Delta u^+ \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ e a parte difusa de Δu^+ com respeito à capacidade $W^{1,2}$ satisfaz*

$$(\Delta u^+)_d \geq \chi_{\{\hat{u} > 0\}}(\Delta u)_d.$$

Demonstração. Será necessária a seguinte proposição.

Proposição 5.17. *Seja $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa de classe C^1 tal que $0 \leq \Phi' \leq 1$ em \mathbb{R} . Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, então*

$$\Delta \Phi(u) \geq \Phi'(u)(\Delta u)_d - (\Delta u)_c^- \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Brezis; Ponce, 2004, Proposição 2.1). \triangle

Seja (Φ_n) uma sequência de funções convexas suaves em \mathbb{R} tal que $\Phi_n(t) = t$ se $t \geq 0$ e $|\Phi_n(t)| \leq 1/n$ se $t < 0$. Em particular, $0 \leq \Phi'_n \leq 1$ em \mathbb{R} , e segue da proposição acima que

$$\Delta \Phi_n(u) \geq \Phi'_n(u)(\Delta u)_d - (\Delta u)_c^-,$$

no sentido das distribuições em Ω . Quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\Delta u^+ \geq \chi_{[u \geq 0]}(\Delta u)_d - (\Delta u)_c^-, \tag{5.7}$$

no sentido das distribuições em Ω . Em particular, temos $\Delta u^+ \in \mathcal{M}(\Omega)$ visto que

$$\Delta u^+ = \begin{cases} 0, & \text{se } u = 0, \\ \Delta u, & \text{se } u > 0. \end{cases}$$

Tomando a parte difusa em ambos os lados de (5.7), concluímos a demonstração. \square

5.2 Regularidade de soluções

Quando o Laplaciano de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ pertence ao espaço $\mathcal{M}_{loc}(\Omega)$, a solução do problema de Dirichlet linear possui regularidade local no contexto dos espaços de Sobolev, o que é formalizado no próximo resultado.

Proposição 5.18. *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que $\Delta u \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega)$, então*

(i) para todo $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, temos $u \in W_{loc}^{1,q}(\Omega)$,

(ii) para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos $\Delta(u\varphi) \in \mathcal{M}(\Omega)$ e

$$\Delta(u\varphi) = \varphi\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\Delta\varphi.$$

Demonstração. Para provar (i), considere um subconjunto aberto limitado suave $\omega \subset\subset \Omega$, e seja v a solução do problema de Dirichlet linear

$$\begin{cases} -\Delta v = \Delta u & \text{em } \omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\omega. \end{cases}$$

Então, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$, temos

$$\int_{\omega} (u+v)\Delta\varphi = 0.$$

Pelo lema 4.6 (Weyl), $u+v$ coincide qtp em ω com uma função harmônica suave. Por outro lado, pela regularidade de Sobolev de v dada pela Proposição 5.2, para todo $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ temos $v \in W_0^{1,q}(\omega)$. Isso implica a primeira afirmação.

Resta provar a igualdade satisfeita por $\Delta(u\varphi)$. Note que, para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \psi\Delta\varphi,$$

que pode ser reescrita como

$$\varphi\Delta\psi = \Delta(\varphi\psi) - 2\operatorname{div}(\nabla\varphi\psi) + \psi\Delta\varphi.$$

Multiplicando esta identidade por u e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} u\varphi\Delta\psi = \int_{\Omega} u\Delta(\varphi\psi) - 2 \int_{\Omega} u\operatorname{div}(\nabla\varphi\psi) + \int_{\Omega} u\psi\Delta\varphi.$$

Como $\Delta u \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} u\Delta(\varphi\psi) = \int_{\Omega} \varphi\psi\Delta u,$$

e sendo $\nabla u \in L_{loc}^1(\Omega)$, segue que

$$- \int_{\Omega} u\operatorname{div}(\nabla\varphi\psi) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\varphi\psi.$$

Combinando essas identidades, obtemos

$$\int_{\Omega} u\varphi\Delta\psi = \int_{\Omega} (\varphi\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla\varphi + u\Delta\varphi)\psi,$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Isso prova a fórmula desejada para $\Delta(u\varphi)$ no sentido das distribuições. Em particular, temos $\Delta(u\varphi) \in \mathcal{M}(\Omega)$. \square

5.3 Princípio do Máximo Inverso

Quando tratamos sobre princípios do máximo, sempre nos baseamos na ideia de que se Δu é não positivo, então u deve ser não negativa e, para isto, assumimos alguma condição de fronteira apropriada. No caso do princípio do máximo inverso, o qual apresentaremos nessa seção, vamos seguir a direção oposta, ou seja, supor que u é não negativa e concluir que alguma parte de Δu deve ser não positiva.

Para estabelecer esse resultado, utilizaremos a propriedade dada pelo lema a seguir.

Proposição 5.19. *Seja $u \in L^1(\Omega)$ tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se $\nabla u \in L^2(\Omega)$, então a medida Δu é difusa¹ com respeito à capacidade em $W^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração. Para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta u = - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla u.$$

Dado um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{cap}_{W^{1,2}}(K) = 0$, seja $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que

- (a) $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 em $W_0^{1,2}(\Omega)$,
- (b) $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(\Omega)$,
- (c) $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função característica χ_K .

Pelo teorema da convergência dominada, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n \Delta u = \int_K \Delta u = (\Delta u)(K).$$

Como $\nabla u \in L^2(\Omega)$, a convergência da sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ juntamente com a desigualdade de Hölder, implicam

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla u = 0.$$

Portanto,

$$(\Delta u)(K) = 0.$$

Sendo K é um subconjunto compacto arbitrário de Ω , segue da regularidade interna das medidas de Borel finita A.13, que a igualdade vale para todo subconjunto de Borel de Ω com capacidade zero. \square

Observação 5.20. A existência da sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ segue diretamente da definição de capacidade em compactos, quando consideramos K com capacidade nula.

¹Conforme a Definição 1.25 para $T = \text{cap}_{W^{1,2}}$.

Com isso, temos que

Proposição 5.21. *Seja $u \in L^1(\Omega)$ tal que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se $u \geq 0$ qtp em Ω , então a parte concentrada de Δu com respeito à capacidade de $W^{1,2}(\Omega)$ satisfaz*

$$(\Delta u)_c \leq 0.$$

Demonstração. Estabelecemos primeiro o princípio do máximo inverso quando u tem suporte² compacto em Ω , e em particular é uma solução do problema de Dirichlet com densidade $-\Delta u$. Como u é não negativa, para todo $\kappa > 0$ temos

$$T_\kappa(u) = \kappa - (\kappa - u)^+$$

qtp em Ω , em que T_κ denota o truncamento nos níveis $\pm\kappa$.

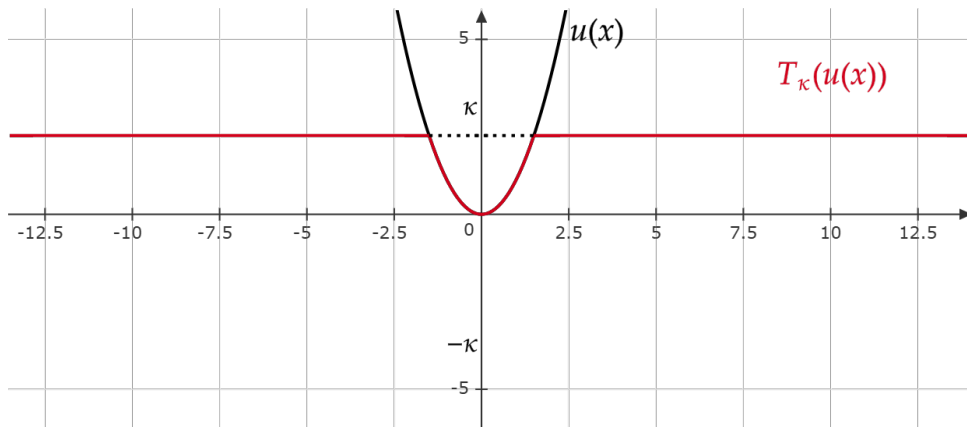


Figura 5.2: Representação do truncamento de uma função no nível κ

Observe que sendo $v = \kappa - u$, temos

- $T_\kappa(u) = \kappa - v^+$ e, conseqüentemente, $\Delta T_\kappa(u) = -\Delta v^+$;
- $\Delta v = \Delta(\kappa - u) = -\Delta u$.

Aplicando a desigualdade de Kato 5.12 à função v ,

$$-\Delta T_\kappa(u) = \Delta v^+ \geq \min\{\Delta v, 0\} = \min\{-\Delta u, 0\} = -(\Delta u)^+,$$

no sentido das distribuições em Ω . Conseqüentemente,

$$\Delta T_\kappa(u) \leq (\Delta u)^+$$

²No sentido da definição A.22.

no sentido das distribuições em Ω , e portanto, no sentido das medidas, conforme garante a proposição A.17. Esta desigualdade fornece um limitante superior uniforme para as medidas $\Delta T_\kappa(u)$.

Pela desigualdade de interpolação (Ponce, 2016, Lema 5.8), temos $T_\kappa(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Assim, para todo conjunto de Borel $E \subset \Omega$ tal que $\text{cap}_{W^{1,2}(\Omega)}(E) = 0$, a medida $\Delta T_\kappa(u)$ no lado esquerdo não carrega E (Lema 5.19) e, em particular, temos

$$\Delta T_\kappa(u) \leq 0$$

no sentido das medidas sobre E . Também temos

$$\Delta T_\kappa(u) \leq (\Delta u)^+$$

no sentido das medidas sobre $\Omega \setminus E$. Usando a aditividade das medidas, podemos combinar as duas desigualdades e deduzir que

$$\Delta T_\kappa(u) \leq (\Delta u)^+ \Big|_{\Omega \setminus E}$$

no sentido das medidas sobre Ω , e portanto no sentido das distribuições (Proposição A.17). Assim, para toda função não negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} T_\kappa(u) \Delta \varphi \leq \int_{\Omega \setminus E} \varphi (\Delta u)^+.$$

Fazendo $\kappa \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, segue do teorema da convergência dominada que

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \leq \int_{\Omega \setminus E} \varphi (\Delta u)^+.$$

Em outras palavras,

$$\Delta u \leq (\Delta u)^+ \Big|_{\Omega \setminus E}$$

no sentido das distribuições em Ω , e também, no sentido das medidas. Em particular, calculando ambas as medidas em E obtemos

$$(\Delta u)(E) \leq (\Delta u)^+(E \setminus E) = 0.$$

Como esta propriedade vale para todo conjunto de Borel $E \subset \Omega$ tal que $\text{cap}_{W^{1,2}(\Omega)}(E) = 0$, concluímos que $(\Delta u)_c \leq 0$.

No caso em que $u \in L^1(\Omega)$ não tem suporte compacto, tomamos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ não negativa e então, pela proposição 5.18 sabemos que a função $u\varphi$ satisfaz as hipóteses do princípio do máximo inverso para funções de suporte compacto (que acabamos de provar). Logo,

$$(\Delta(u\varphi))_c \leq 0.$$

Para concluir a demonstração, dado um subdomínio $\omega \subset \Omega$ arbitrário, basta tomar $\varphi \equiv 1$ em ω , de modo que

$$\Delta(u\varphi) = \Delta u$$

em ω , e isto implica que $(\Delta u)_c \leq 0$ em ω . Dada a arbitrariedade de ω , a conclusão segue. \square

Vejam os um exemplo concreto no qual o princípio do máximo inverso é válido.

Exemplo 5.22. Considere $u \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\Delta u = \alpha \delta_a,$$

sendo δ_a é a massa de Dirac em $a \in \Omega$. Observe que $\{a\}$ tem capacidade zero. De fato, pela invariância da medida de Lebesgue e da norma do gradiente por translações, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a é a origem.

Para provar que a capacidade é zero, devemos exibir uma sequência de funções teste admissíveis cujo limite da norma $W^{1,2}$ seja zero. Considere $0 < \varepsilon < 1/2$ e defina a função radial $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq \varepsilon, \\ \frac{\ln(1/|x|)}{\ln(1/\varepsilon)}, & \text{se } \varepsilon < |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Note que φ_ε é uma função contínua, com suporte compacto em $\overline{B_1(0)}$ e $\varphi_\varepsilon(0) = 1$. Embora φ_ε não seja C^∞ (pois possui “bicos” em $|x| = \varepsilon$ e $|x| = 1$, como pode ser observado na Figura 5.3), ela pertence a $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ e pode ser aproximada por funções suaves mantendo a norma arbitrariamente próxima, o que é suficiente para a definição de capacidade.

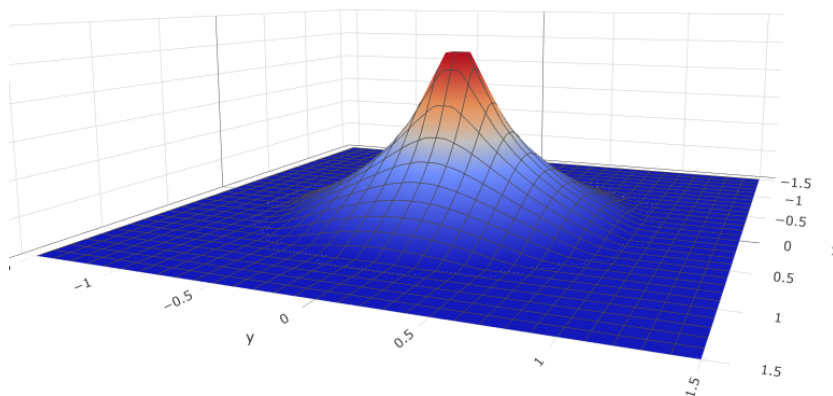


Figura 5.3: Gráfico da função $\varphi_\varepsilon(x)$.

Vamos estimar a norma $\|\varphi_\varepsilon\|_{W^{1,2}}^2 = \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2$.

- *Estimativa da norma L^2 .* Como $0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1$ e o suporte está contido na bola unitária B_1 , temos que $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ para todo $x \neq 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (sendo a função característica χ_{B_1} a função integrável que domina φ_ε), concluímos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_\varepsilon(x)|^2 dx = 0.$$

- *Estimativa da norma do gradiente.* Calculamos o gradiente em coordenadas polares. Para $\varepsilon < r < 1$, em que $r = |x|$, temos

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial r}(r) = \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \frac{d}{dr}(\ln(r^{-1})) = \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \left(-\frac{1}{r}\right).$$

Assim, $|\nabla \varphi_\varepsilon(x)| = \frac{1}{|x| \ln(1/\varepsilon)}$ no anel $\varepsilon < |x| < 1$, e zero fora dele. Integrando em coordenadas polares,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \varphi_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_\varepsilon^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r \ln(1/\varepsilon)}\right)^2 r dr d\theta = \frac{2\pi}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Passando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, observamos que $\ln(1/\varepsilon) \rightarrow \infty$, logo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 dx = 0.$$

Como $\text{cap}_{W^{1,2}}(\{0\}) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2) = 0$, segue que $\{0\}$ tem capacidade nula. Consequentemente, Δu é puramente concentrada, isto é, $(\Delta u)_c = \alpha \delta_a$.

Agora, assumamos que $u(x) \geq 0$ em Ω . Em uma vizinhança da singularidade a , temos que

$$u(x) \sim \frac{\alpha}{2\pi} \ln|x-a|,$$

de acordo com o Exemplo 4.2. Observe que quando $x \rightarrow a$, sabemos que $\ln|x-a| \rightarrow -\infty$, logo, para que $u(x)$ seja não negativa, precisamos impor $\alpha \leq 0$. Com isso, concluímos que $(\Delta u)_c = \alpha \delta_a \leq 0$, conforme afirma o teorema.

O problema não linear

Neste capítulo, trataremos do problema de Dirichlet não linear, dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.1)$$

em que o dado é uma medida de Borel finita. A análise tem por objetivo contrastar o comportamento do problema sob dados integráveis com aquele sob dados de medida, evidenciando as particularidades deste último. Iniciaremos a discussão estabelecendo uma definição apropriada de solução, a qual se trata de uma adaptação do conceito empregado no caso linear. Para os próximos resultados, sempre vamos considerar Ω um aberto limitado.

Definição 6.1. Sejam $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, Ω um conjunto aberto limitado e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do *problema de Dirichlet não linear* com densidade μ se

- (i) $u \in L^1(\Omega)$ e $g(u) \in L^1(\Omega)$,
- (ii) para toda $\xi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$,

$$-\int_{\Omega} u \Delta \xi + \int_{\Omega} g(u) \xi = \int_{\Omega} \xi d\mu.$$

Quando consideramos a não linearidade g satisfazendo determinadas condições (*não decrescência, condição de sinal*), surgem diferenças fundamentais entre dados em $L^1(\Omega)$ e dados de medida. Nesse contexto, estabeleceremos as ferramentas necessárias para demonstrar a existência de solução para o problema (6.1) quando $\mu \in L^1(\Omega)$ e, em seguida, apresentaremos um exemplo — com dado de medida — para o qual *não existe solução*.

A estratégia para obter existência com $\mu \in L^1(\Omega)$ baseia-se em dois ingredientes,

- (i) a existência de soluções variacionais para o problema de Dirichlet não linear;
- (ii) uma estimativa para soluções variacionais do problema de Dirichlet linear associado.

Para estabelecer (i), buscamos soluções de (6.1) com $\mu \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$ via minimização do funcional de energia

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} G(v) dx - \langle \mu, v \rangle,$$

definido em $W_0^{1,2}(\Omega)$, sendo $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de g , dada por

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nesta etapa, assumiremos g como na definição abaixo,

Definição 6.2. Uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a *condição de sinal* se, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$g(t)t \geq 0.$$

Observação 6.3. Uma generalização desta propriedade do sinal é obtida exigindo que g satisfaça a mesma condição acima somente para valores grandes de t , isto é, para todo $t \gg 1$, temos que $g(t)t \geq 0$.

Proposição 6.4. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a condição de sinal. Se $\mu \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$, então, para toda $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos*

$$\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \leq C \left(E(v) + \|\mu\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'}^2 \right),$$

para alguma constante $C > 0$ que depende de N e de Ω .

Demonstração. Seja $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Como g satisfaz a condição de sinal, temos $G(v) \geq 0$ qtp em Ω , e

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq E(v) + \langle \mu, v \rangle.$$

Pela continuidade do funcional linear μ , temos

$$\langle \mu, v \rangle \leq A \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

em que $A = \|\mu\|_{(W^{1,2}(\Omega))'}$. Pela desigualdade de Poincaré 3.29, temos também

$$\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Combinando essas estimativas, obtemos

$$\frac{1}{2C_1} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq E(v) + A \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Para todo $\varepsilon > 0$, segue da desigualdade de Young A.6 que

$$\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \varepsilon \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon},$$

e então,

$$\left(\frac{1}{2C_1} - A\varepsilon \right) \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \leq E(v) + \frac{A}{4\varepsilon}.$$

Escolhendo ε tal que $A\varepsilon = 1/4C_1$, a conclusão segue. □

Com isso, podemos garantir a existência de um minimizante para o funcional E ,

Proposição 6.5. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a condição de sinal. Se $\mu \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$, então existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que, para toda $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos*

$$E(u) \leq E(v).$$

Demonstração. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência minimizante em $W_0^{1,2}(\Omega)$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} E(v).$$

Pela proposição anterior, para cada $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos que

$$-\infty < -\|\mu\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'}^2 \leq \frac{1}{C} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - \|\mu\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'}^2 \leq E(v),$$

logo, o funcional E é limitado inferiormente e, conseqüentemente, a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Segue do teorema da compacidade de Rellich-Kondrachov (Teorema 3.26), que existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo em $L^2(\Omega)$ para alguma função u . Aplicando o lema de fechamento (Ponce, 2016, Proposição 4.10), segue que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^2.$$

Pela continuidade fraca de $\mu \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$, temos também

$$\langle \mu, u \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu, u_{n_k} \rangle.$$

Aplicando o recíproco do teorema da convergência dominada (Proposição 1.23), podemos supor que a subsequência $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge qtp para u . Assim, pela não negatividade de G e pelo lema de Fatou 1.18, temos

$$\int_{\Omega} G(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G(u_{n_k}).$$

Com isso, concluímos que

$$E(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E(u_{n_k}) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} E(v).$$

Como $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, a igualdade deve valer, logo u é um minimizante de E . □

A próxima etapa consiste em mostrar que todo minimizante para o funcional E satisfaz, no sentido fraco, a equação de Euler-Lagrange.

Proposição 6.6. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a condição de sinal. Se $\mu \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$ e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é um minimizante do funcional E , então $g(u) \in L^1(\Omega)$ e, para toda $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v = \langle \mu, v \rangle. \quad (6.2)$$

Demonstração. Começaremos mostrando que

$$\frac{d}{dt}E(u+tv)|_{t=0} = 0,$$

se a função teste v se anula nos conjuntos onde $|u|$ é grande. Isto é,

Afirmção. A equação de Euler–Lagrange 6.2 é satisfeita para toda função teste $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $v = 0$ no conjunto $\{|u| > \kappa\}$ para algum $\kappa \geq 0$.

Demonstração da afirmação. Seja $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Para todo $t \in \mathbb{R}_*$, escrevemos

$$\frac{E(u+tv) - E(u)}{t} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} - \langle \mu, v \rangle.$$

Pela continuidade de g , temos $G' = g$ e, então, para todo $x \in \Omega$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(u(x) + tv(x)) - G(u(x))}{t} = g(u(x))v(x).$$

Supondo que $v = 0$ em $\{|u| > \kappa\}$ para algum $\kappa \geq 0$, segue do teorema do valor médio que

$$\left| \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} \right| \leq \sup\{|g(\xi)| \mid |\xi| \leq \kappa + |t|\|v\|_{L^\infty(\Omega)}\} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em particular, o quociente no lado esquerdo é uniformemente limitado quando $t \rightarrow 0$. Pelo teorema da convergência dominada 1.19, deduzimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} = \int_{\Omega} g(u)v.$$

Portanto, a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto E(u+tv)$ é diferenciável em 0. Como o mínimo é atingido neste ponto, u satisfaz a equação de Euler–Lagrange com a função teste v . Isto conclui a demonstração da afirmação.

Agora, dada $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, aproximamos v por uma sequência $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo as hipóteses da afirmação. Para isso, tomamos uma sequência de números positivos $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e uma função $H \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\text{supt}(H) \subset [-1, 1]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$v_k = H(\alpha_k u)v$$

pertence a $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (via regra de Leibniz e da cadeia). Como $v_k = 0$ no conjunto $\left\{|u| > \frac{1}{\alpha_k}\right\}$, pela afirmação obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_k + \int_{\Omega} g(u)v_k = \langle \mu, v_k \rangle.$$

Se, adicionalmente, supomos que $H(0) = 1$ e a sequência $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para zero, então $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para v em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Logo, da identidade anterior, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(u)v_k = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \langle \mu, v \rangle. \quad (6.3)$$

Embora o próprio minimizante u não pertença necessariamente a $L^\infty(\Omega)$, podemos também aplicar a fórmula (6.3) com $v = u$, pois, para todo $k \in \mathbb{N}$, a função $H(\alpha_k u)u$ satisfaz as hipóteses da afirmação.

Finalmente, para provar que $g(u) \in L^1(\Omega)$, assumimos que $v = u$ e escolhemos uma função de corte não negativa H . Pela condição de sinal, a sequência $(g(u)v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é não negativa. Assim, pelo lema de Fatou 1.18 e a identidade (6.3), temos que $g(u)u \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} g(u)u \leq - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \langle \mu, u \rangle \leq \langle \mu, u \rangle.$$

Como

$$|g(u)| \leq \sup_{|t| \leq 1} |g(t)| \chi_{\{|u| \leq 1\}} + g(u)u,$$

segue que $g(u) \in L^1(\Omega)$. Retornando a uma função arbitrária $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, temos

$$|g(u)v_k| \leq |g(u)| \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Sabendo que $g(u) \in L^1(\Omega)$, o teorema da convergência dominada garante que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(u)v_k = \int_{\Omega} g(u)v,$$

e usando (6.3), obtemos

$$\int_{\Omega} g(u)v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \langle \mu, v \rangle. \quad \square$$

Partindo do fato estabelecido de que $g(u)u \in L^1(\Omega)$, veremos a seguir que a regularidade de $g(u)$ é aprimorada quando assumimos $\mu \in L^2(\Omega)$.

Proposição 6.7. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, ímpar e não decrescente. Se $\mu \in L^2(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange associada a E , então $g(u) \in L^2(\Omega)$ e*

$$\|g(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mu\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Começaremos provando que

$$\int_{\{|u| \geq \kappa\}} |g(u)| \leq \int_{\{|u| \geq \kappa\}} |\mu|. \quad (6.4)$$

é válida para todo $\kappa > 0$. Seja $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções suaves e limitadas $H_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $H_n(0) = 0$, com derivadas limitadas H'_n . Temos $H_n(u) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pela regra da cadeia para funções de Sobolev. Aplicando a equação de Euler-Lagrange com a função teste $v = H_n(u)$, obtemos

$$\int_{\Omega} H'_n(u) |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} g(u) H_n(u) = \langle \mu, H_n(u) \rangle = \int_{\Omega} H_n(u) \mu.$$

Adicionalmente, se H_n é não decrescente, então $H'_n(u) \geq 0$, e temos

$$\int_{\Omega} g(u) H_n(u) = \int_{\Omega} H_n(u) \mu - \int_{\Omega} H'_n(u) |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} H_n(u) \mu. \quad (6.5)$$

Dado $\kappa > 0$, escolhamos a sequência $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo pontualmente para a função sinal $\text{sgn}_\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\text{sgn}_\kappa(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq \kappa, \\ 0, & \text{se } -\kappa < t < \kappa, \\ -1, & \text{se } t \leq -\kappa, \end{cases}$$

e tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|H_n| \leq 1$. Tomando $n \rightarrow \infty$ na estimativa (6.5), segue do teorema da convergência dominada que

$$\int_{\Omega} g(u) \text{sgn}_\kappa(u) \leq \int_{\Omega} \text{sgn}_\kappa(u) \mu.$$

Como g satisfaz a condição de sinal, obtemos

$$\int_{\{|u| \geq \kappa\}} |g(u)| = \int_{\Omega} g(u) \text{sgn}_\kappa(u) \leq \int_{\Omega} \text{sgn}_\kappa(u) \mu \leq \int_{\{|u| \geq \kappa\}} |\mu|.$$

Isto prova a estimativa (6.4).

Ainda não provamos que $g(u) \in L^2(\Omega)$. Para isto, primeiro estabeleceremos uma estimativa para a norma $\|g(u)\|_{L^2(\{|g(u)| < s\})}$ independentemente de $s > 0$. Observe que

$$\int_{\{|g(u)| < s\}} |g(u)|^2 dx = \int_{\Omega} |g(u)| \cdot |g(u)| \chi_{\{|g(u)| < s\}} dx = \int_{\Omega} \left(\int_0^\infty \chi_{\{t \leq |g(u)|\}} dt \right) \cdot |g(u)| \chi_{\{|g(u)| < s\}} dx,$$

se escrevemos

$$|g(u)| = \int_0^{|g(u)|} 1 dt = \int_0^\infty \chi_{\{t \leq |g(u)|\}} dt.$$

Pelo Teorema de Fubini A.10, temos

$$\int_{\{|g(u)| < s\}} |g(u)|^2 dx = \int_0^s \left(\int_{\{|g(u)| \geq t\}} |g(u)| \right) dt.$$

Como g é ímpar e não decrescente, temos que $|g(-s)| = |-g(s)| = |g(s)|$ para todo $s \in \mathbb{R}$, isto é, o valor absoluto de $g(u)$ depende apenas do valor absoluto de u . Assim, podemos aplicar a afirmação provada anteriormente, obtendo

$$\int_{\{|g(u)| \geq t\}} |g(u)| \leq \int_{\{|g(u)| \geq t\}} |\mu|.$$

Aplicando mais uma vez o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{\{|g(u)| < s\}} |g(u)|^2 \leq \int_0^s \left(\int_{\{|g(u)| \geq t\}} |\mu| \right) dt = \int_{\Omega} |g(u)| \cdot |\mu| \chi_{\{|g(u)| < s\}}.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\{|g(u)| < s\}} |g(u)|^2 \leq \|\mu\|_{L^2(\Omega)} \|g(u)\|_{L^2(\{|g(u)| < s\})}.$$

Assim, para todo $s > 0$, temos

$$\|g(u)\|_{L^2(\{|g(u)| < s\})} \leq \|\mu\|_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando $s \rightarrow \infty$, deduzimos do lema de Fatou 1.18 que $g(u) \in L^2(\Omega)$ e

$$\|g(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mu\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square$$

Observação 6.8. Observe que sendo g ímpar e não decrescente, temos que ela satisfaz automaticamente a condição do sinal definida no início desta seção.

Proposição 6.9. *Seja Ω um conjunto aberto limitado e suave. Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfaz o problema de Dirichlet linear com densidade $\mu \in L^2(\Omega)$, então*

$$\int_{\Omega} \mu \operatorname{sgn} u \geq 0.$$

Demonstração. Para toda $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ temos

$$\int_{\Omega} \mu v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Por outro lado, dada uma função suave $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H(0) = 0$ e H' é limitada, então $H(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Podemos então usar $v = H(u)$ como função teste, obtendo

$$\int_{\Omega} \mu H(u) = \int_{\Omega} H'(u) |\nabla u|^2.$$

Assim, supondo também que H é uma função não decrescente, o lado esquerdo na igualdade acima é não negativo, isto é,

$$\int_{\Omega} \mu H(u) \geq 0.$$

Para concluir, basta tomar uma sequência limitada de funções $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo pontualmente para a função sinal em \mathbb{R} . \square

Observação 6.10. Podemos considerar, por exemplo, a sequência de funções reais $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$H_n(x) = \tanh(nx).$$

Proposição 6.11. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado e suave, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não decrescente. Para todo $\mu \in L^1(\Omega)$, o problema de Dirichlet não linear com não linearidade g e densidade μ tem uma solução.*

Demonstração. Sejam $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^2(\Omega)$ convergindo fortemente para μ em $L^1(\Omega)$, e $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma solução do problema de Dirichlet não linear com densidade μ_n . Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, subtraímos a equação satisfeita por u_n da equação satisfeita por u_m , e obtemos

$$-\Delta(u_m - u_n) = (\mu_m - \mu_n) - [g(u_m) - g(u_n)],$$

isto é, a função $w = u_m - u_n$ satisfaz o problema de Dirichlet linear com densidade $\tilde{\mu} = (\mu_m - \mu_n) - [g(u_m) - g(u_n)]$. Pela Proposição 6.9, temos

$$\int_{\Omega} [g(u_m) - g(u_n)] \operatorname{sgn}(u_m - u_n) \leq \int_{\Omega} (\mu_m - \mu_n) \operatorname{sgn}(u_m - u_n).$$

Usando a monotonicidade de g , deduzimos a estimativa,

$$\|g(u_m) - g(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)}. \quad (6.6)$$

Como $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, isto implica que $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Assim, $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $L^1(\Omega)$.

Agora, note que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos pela Proposição A.35 que

$$\|u_m - u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|g(u_m) - g(u_n)\|_{L^1(\Omega)} + C \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

Logo, usando (6.6),

$$\|u_m - u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq 2C \|\mu_m - \mu_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

Em particular, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, e portanto converge em $L^1(\Omega)$ para alguma função u , e $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $L^1(\Omega)$ para $g(u)$. Como, para todo $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $\zeta \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, temos

$$-\int_{\Omega} u_n \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u_n) \zeta = \int_{\Omega} \zeta \mu_n,$$

fazendo $n \rightarrow \infty$, segue que u resolve o problema de Dirichlet não linear com densidade $\mu \in L^1(\Omega)$. \square

Observação 6.12. A sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na demonstração anterior pode ser obtida por convolução de μ com uma sequência regularizante, isto é, $\mu_n = \mu * \rho_n$.

Quando consideramos o dado μ uma medida, nem sempre esse problema admite uma solução, o que pode depender da própria medida ou até mesmo da dimensão do espaço. A proposição a seguir apresenta um exemplo de medida μ , e não linearidade g , para as quais o problema de Dirichlet não linear não admite solução, dependendo da dimensão.

Proposição 6.13. *Seja $N \geq 3$ e $a \in \Omega$. Se $p \geq \frac{N}{N-2}$, então a equação não linear*

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = \delta_a$$

não tem solução no sentido das distribuições em Ω .

Demonstração. Vamos assumir, por simplicidade, que $a = 0$ e $\Omega = B_1(0)$. Suponha por contradição que existe solução u . Para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\text{supt}(\varphi) \subset B_1(0)$, defina para $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_k(x) = \varphi(kx), \quad x \in B_1(0).$$

Usando φ_k como função teste,

$$-\int_{B_1(0)} u \Delta \varphi_k + \int_{B_1(0)} |u|^{p-1}u \varphi_k = \int_{B_1(0)} \varphi_k d\delta_0 = \varphi_k(0) = \varphi(0). \quad (6.7)$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_1(0)} |u|^{p-1}u \varphi_k = 0.$$

Além disso,

$$\int_{B_1(0)} u \Delta \varphi_k = \int_{B_{1/k}(0)} u \Delta \varphi_k = k^2 \int_{B_{1/k}(0)} u(x) \Delta \varphi(kx) dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder,

$$\left| \int_{B_1(0)} u \Delta \varphi_k \right| \leq k^2 \left(\int_{B_{1/k}(0)} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{1/k}(0)} |\Delta \varphi(kx)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = kx$, segue que

$$\left| \int_{B_1(0)} u \Delta \varphi_k \right| \leq k^{2-\frac{N}{p'}} \left(\int_{B_{1/k}(0)} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_1(0)} |\Delta \varphi|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Note que $2 - \frac{N}{p'} \leq 0$ se, e somente se, $p \geq \frac{N}{N-2}$. Logo, se $p \geq \frac{N}{N-2}$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_1(0)} u \Delta \varphi_k = 0.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ em (6.7), concluímos que

$$0 + 0 = \varphi(0).$$

Obtemos uma contradição se escolhermos φ tal que $\varphi(0) \neq 0$. Isso conclui a demonstração. \square

Neste ponto, é natural investigar a existência de restrições sobre a medida μ que assegurem a solubilidade do problema (6.1), independente da dimensão considerada.

Responderemos a essa questão demonstrando que a condição necessária para a existência de solução é que μ seja uma medida difusa em relação à capacidade $W^{1,2}$. Para fundamentar essa conclusão, faremos inicialmente algumas observações pertinentes e provaremos um resultado auxiliar para a demonstração do teorema de existência.

Observe que

(i) medidas μ que satisfazem a desigualdade

$$\|\varphi\|_{L^1(\Omega; |\mu|)} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \quad (6.8)$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, pertencem ao espaço dual $(W_0^{1,2}(\Omega))'$, e são densas na classe de medidas difusas em $\mathcal{M}(\Omega)$, conforme as Proposições 14.1 e 14.2 de (Ponce, 2016). A expressão em (6.8) é conhecida como desigualdade do traço;

(ii) para todo $\mu \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$, o problema de Dirichlet não linear (6.1) possui uma solução variacional $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo a equação de Euler–Lagrange (Proposições 6.5 e 6.6), isto é, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v = \langle \mu, v \rangle. \quad (6.9)$$

(iii) supondo que μ satisfaz a desigualdade (6.8), sabemos que $\mu \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$, pelo item (i). Pela interpretação pontual da desigualdade do traço (Ponce, 2016, Proposição 16.5), temos que o representante preciso \hat{v} de uma função $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ pertence a $L^1(\Omega; |\mu|)$ e $\langle \mu, v \rangle$ pode ser calculado como uma integral com respeito a μ ,

$$\langle \mu, v \rangle = \int_{\Omega} \hat{v} d\mu.$$

Assim, temos

Proposição 6.14. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a condição de sinal, e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ uma medida satisfazendo a desigualdade de traço (6.8). Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ resolve a equação de Euler–Lagrange (6.9), então, para todo $s \geq 0$, temos*

$$\int_{\{|u|>s\}} |g(u)| \leq |\mu|(\{|u|>s\}).$$

Demonstração. Como na demonstração da estimativa (6.4), aplicamos a equação de Euler-Lagrange com uma função teste da forma $v = H(u)$. Dado $s > 0$, tome uma função suave não decrescente $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H(0) = 0$ e $H(t) = \text{sgn}(t)$ para $|t| > s$. Através da regra da cadeia, sabemos que $H(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e, uma vez que H é não decrescente, obtemos

$$\nabla u \cdot \nabla(H(u)) = H'(u)|\nabla u|^2 \geq 0,$$

e também, temos que $H(u)$ e u têm o mesmo sinal. Logo, pela condição de sinal satisfeita por g , obtemos

$$g(u)H(u) = |g(u)||H(u)| \geq |g(u)|\chi_{\{|u|>s\}}.$$

Aplicando a equação (6.9) com função teste $H(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, segue que

$$\int_{\{|u|>s\}} |g(u)| \leq \langle \mu, H(u) \rangle.$$

Como a função H é Lipschitz contínua, o representante preciso de $H(u)$ é igual a $H(\hat{u})$ no conjunto de Lebesgue \mathcal{L}_u (ver Teorema A.19), em que \hat{u} denota o representante preciso de u dado pela Definição 5.15. Pelo item (iii) acima, temos

$$\int_{\{|u|>s\}} |g(u)| \leq \int_{\Omega} H(\hat{u}) d\mu.$$

Aplicamos agora esta estimativa a uma sequência de funções suaves $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como acima convergindo pontualmente para zero em $(-s, s)$. Pelo teorema da convergência dominada, quando $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\int_{\{|u|>s\}} |g(u)| \leq \int_{\{|\hat{u}|>s\}} \text{sgn} \hat{u} d\mu \leq \left| \int_{\{|\hat{u}|>s\}} \text{sgn} \hat{u} d\mu \right| \leq \int_{\{|\hat{u}|>s\}} d|\mu| = |\mu|(\{|u|>s\}).$$

Isso fornece a conclusão para $s > 0$, e o caso $s = 0$ segue da estimativa anterior quando $s \rightarrow 0$. \square

Uma consequência direta da estimativa dada pela proposição anterior, é que para $s = 0$ deduzimos a chamada estimativa de absorção, isto é,

$$\|g(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq |\mu|(\Omega). \quad (6.10)$$

Observação 6.15. Seja $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ o regularizante padrão, com $\text{supt}(\rho) \subset [-1, 1]$ e $\int \rho = 1$, conforme Definição A.25. Para cada $n \geq 1$, defina o parâmetro de escala $\varepsilon_n := \frac{s}{4n}$.

Considere a sequência regularizante $\rho_n(t) := \frac{1}{\varepsilon_n} \rho\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right)$, cujo suporte está contido em $[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$, e a sequência de funções contínuas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq s - \varepsilon_n, \\ \frac{1}{\varepsilon_n} (t - (s - 2\varepsilon_n)), & \text{se } s - 2\varepsilon_n < t < s - \varepsilon_n, \\ 0, & \text{se } |t| \leq s - 2\varepsilon_n, \\ \frac{1}{\varepsilon_n} (t + (s - 2\varepsilon_n)), & \text{se } -s + \varepsilon_n < t < -s + 2\varepsilon_n, \\ -1, & \text{se } t \leq -s + \varepsilon_n. \end{cases}$$

Finalmente, definimos a sequência $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ via convolução,

$$H_n(t) := (f_n * \rho_n)(t).$$

Esta construção garante que, para todo $n \geq 1$, tenhamos

- (i) $H_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ e não decrescente;
- (ii) $H_n(t) = \text{sgn}(t)$ para $|t| \geq s$;
- (iii) $H_n(t) = 0$ no intervalo $|t| \leq s \left(1 - \frac{3}{4n}\right)$, implicando que $H_n \rightarrow 0$ pontualmente em $(-s, s)$.

Consequentemente, essa sequência de funções satisfaz as condições impostas na demonstração acima.

Por meio da estimativa de absorção (6.10), quando trabalhamos com a mesma não linearidade da Proposição 6.13, mas para $p < \frac{2}{N-2}$, conseguimos garantir existência de solução, conforme o teorema a seguir.

Teorema 6.16. *Sejam $N \geq 3$, Ω um conjunto aberto limitado e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Para todo $0 < p < \frac{2}{N-2}$, o problema de Dirichlet não linear*

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = \mu & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma solução no sentido da Definição 6.1.

Demonstração. Seja $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $\mu_n = \rho_n * \mu$, sendo $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência regularizante dada por A.25. Pela Proposição A.18, temos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $L^2(\Omega)$ tal que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^1(\Omega)$ e converge fracamente para μ no sentido das medidas em Ω . Para todo $n \in \mathbb{N}$, o problema de Dirichlet não linear com densidade μ_n tem uma solução $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (Proposições 6.5 e 6.6) e, para todo $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, temos

$$-\int_{\Omega} u_n \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u_n) \zeta = \int_{\Omega} \zeta \mu_n. \quad (6.11)$$

Como a sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^1(\Omega)$, a estimativa de contração (6.10) mostra que a sequência $(\mu_n - g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ também é limitada em $L^1(\Omega)$. Pela compacidade das soluções do problema de Dirichlet (Ponce, 2016, Proposição 5.9), existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo em $L^r(\Omega)$ para alguma função u , para todo $1 \leq r < \frac{N}{N-2}$. Visto que $p < \frac{N}{N-2}$, segue que a sequência $(g(u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $g(u)$ em $L^1(\Omega)$ (Proposição A.24). Fazendo $n_k \rightarrow \infty$ na identidade (6.11), deduzimos que, para todo $\zeta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$,

$$-\int_{\Omega} u \Delta \zeta + \int_{\Omega} g(u) \zeta = \int_{\Omega} \zeta d\mu. \quad \square$$

Observe que, o resultado anterior garante existência de solução apenas para $g(u) = |u|^{p-1}u$. Isso pode ser estendido para qualquer não linearidade satisfazendo a condição de sinal por meio da Proposição 6.14, como mostra o teorema a seguir, originalmente encontrado em (Orsina; Ponce, 2008, Teorema 1.2). Antes de demonstrá-lo, enunciaremos um resultado auxiliar que será utilizado em sua demonstração.

Proposição 6.17. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado suave e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se u é a solução do problema de Dirichlet linear com densidade μ , então, para todo $\lambda > 0$, temos*

$$\text{cap}_{W^{1,2}}(\{\mathfrak{M}u > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|\mu\|_{M(\Omega)},$$

para alguma constante $C > 0$ que depende de Ω .

A função maximal $\mathfrak{M}u : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ é calculada tomando o supremo sobre bolas contidas em Ω , isto é,

$$\mathfrak{M}u(x) = \sup_{0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)} \int_{B_r(x)} |u|.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Proposição 9.6). □

Teorema 6.18. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado suave e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se a medida μ é difusa em relação à capacidade $W^{1,2}$, então, para toda função contínua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição de sinal, o problema de Dirichlet não linear (6.1) com densidade μ possui solução.*

Demonstração. Aplicando a propriedade de aproximação forte de medidas difusas às partes positiva e negativa de μ (Ponce, 2016, Proposição 14.1), encontramos uma sequência de medidas $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

- (a) para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\mu_n| \leq C_n \text{cap}_{W^{1,2}}$,
- (b) $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortemente para μ em $\mathcal{M}(\Omega)$.

Além disso, como cada medida μ_n é obtida pela restrição de μ a subconjuntos de Borel $E_n \subset \Omega$, em particular, temos

$$|\mu_n| \leq |\mu|.$$

Como $\mu_n \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$ (Ponce, 2016, Proposição 14.2), temos que o problema de Dirichlet (6.1) com densidade μ_n possui uma solução variacional $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo a equação (6.9). A demonstração é concluída quando provarmos que a sequência $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é equi-integrável, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto de Borel $E \subset \Omega$ satisfazendo $|E| \leq \delta$, temos

$$\int_E |g(u_n)| \leq \varepsilon.$$

Para isto, utilizamos a afirmação abaixo.

Afirmação. Para todo $s \geq 0$, existe $C_1 > 0$ tal que, para todo conjunto boreliano $E \subset \Omega$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_E |g(u_n)| \leq C_1 |E| + |\mu|(\{| \hat{u}_n | > s \}).$$

Antes de demonstrá-la, vejamos como concluir a prova do Teorema. Pela Proposição anterior, para todo $s > 0$ temos

$$\text{cap}_{W^{1,2}}(\{| \hat{u}_n | > s \}) \leq \text{cap}_{W^{1,2}}(\{ \mathfrak{M}u > s \}) \leq \frac{C_2}{s} \|\mu_n - g(u_n)\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Assim, pela desigualdade triangular e pela estimativa de absorção (6.10), obtemos

$$\text{cap}_{W^{1,2}}(\{| \hat{u}_n | > s \}) \leq \frac{C_2}{s} \left(\|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|g(u_n)\|_{L^1(\Omega)} \right) \leq \frac{2C_2}{s} |\mu|(\Omega).$$

Combinando isto com a afirmação, obtemos que a sequência $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é equi-integrável. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, pela continuidade absoluta das medidas difusas 1.26 e a estimativa da capacidade acima, existe $s > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mu|(\{| \hat{u}_n | > s \}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para este $s > 0$ dado, segue que para todo conjunto boreliano $E \subset \Omega$ satisfazendo $|E| \leq \varepsilon/(2C_1)$, temos

$$\int_E |g(u_n)| \leq C_1 \frac{\varepsilon}{2C_1} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, a sequência $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é equi-integrável.

Pela desigualdade triangular e a estimativa de absorção 6.10, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|\Delta u_n\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq |\mu_n|(\Omega) + |\mu_n|(\Omega) \leq 2|\mu|(\Omega).$$

Segue então da compacidade das soluções do problema linear de Dirichlet (Ponce, 2016, Proposição 5.9) que existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ a qual converge em $L^1(\Omega)$ e converge qtp em Ω para alguma função u . Como a sequência $(g(u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é equi-integrável e converge qtp para $g(u)$, concluímos pelo Teorema de Vitali (Bartle, 1995, Teorema 7.13) que $(g(u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $g(u)$ em $L^1(\Omega)$. Portanto, u é uma solução do problema não linear de Dirichlet com densidade μ .

Resta apenas estabelecer a afirmação. Para todo conjunto boreliano $E \subset \Omega$ e qualquer $s \geq 0$, temos

$$\int_E |g(u_n)| \leq \int_{E \cap \{|u_n| \leq s\}} |g(u_n)| + \int_{\{|u_n| > s\}} |g(u_n)|.$$

Como g é limitada no conjunto compacto $[-s, s]$, a primeira integral do lado direito pode ser estimada da seguinte forma

$$\int_{E \cap \{|u_n| \leq s\}} |g(u_n)| \leq C_1 |E \cap \{|u_n| \leq s\}| \leq C_1 |E|,$$

em que $C_1 > 0$ é limitante superior de $|g|$ sobre $[-s, s]$. Para estimar a segunda integral, aplicamos a estimativa dada pela Proposição 6.14,

$$\int_{\{|u_n| > s\}} |g(u_n)| \leq |\mu_n|(\{|u_n| > s\}).$$

Como $|\mu_n| \leq |\mu|$, a afirmação segue. □

Observação 6.19. Existem trabalhos na literatura que estendem os resultados de existência de solução desse problema para operadores mais gerais. Por exemplo, em (Bénilan; Boccardo *et al.*, 1995) os autores mostram condições suficientes para existência de solução no caso de operadores na forma divergente.

Apêndice

Neste apêndice, reunimos diversos resultados clássicos de análise que foram utilizados ao longo do trabalho. A apresentação está organizada em seções temáticas para facilitar a consulta.

A.1 Fórmulas Clássicas

Começamos recordando alguns resultados fundamentais do cálculo vetorial e de integração em múltiplas variáveis, que são essenciais para a formulação variacional de problemas em equações diferenciais parciais.

Teorema A.1 (Teorema da Divergência). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado com fronteira de classe C^1 . Se u é de classe C^1 em uma vizinhança aberta O de $\bar{\Omega}$, isto é, $u \in C^1(O)$, então para cada $i \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{n}_i \, d\sigma,$$

onde $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Equivalentemente,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Demonstração. Para uma demonstração detalhada, consultar (Alt, 2016). □

Como consequência imediata do Teorema da Divergência, obtemos a versão clássica do Teorema de Gauss-Green.

Teorema A.2 (Teorema de Gauss-Green). *Suponha $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Então*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{n}^i \, d\sigma \quad (i = 1, \dots, n).$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema A.1 para o campo $F = (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$ onde u é a i -ésima entrada. □

A partir do Teorema de Gauss-Green, deduzimos a importante fórmula de integração por partes.

Teorema A.3 (Fórmula de integração por partes). *Sejam $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Então*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n^i \, d\sigma \quad (i = 1, \dots, n).$$

Demonstração. Aplique o Teorema A.2 a uv . □

Finalmente, para funções de classe $C^2(\Omega)$, obtemos as conhecidas Fórmulas de Green.

Teorema A.4 (Fórmulas de Green). *Sejam $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então*

$$(i) \int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma,$$

$$(ii) \int_{\Omega} Dv \cdot Du \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u \, d\sigma,$$

$$(iii) \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma.$$

A.2 Desigualdades Fundamentais

Nesta seção apresentamos algumas desigualdades fundamentais frequentemente empregadas nas estimativas deste trabalho.

Proposição A.5 (Desigualdade de Jensen). *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Considere $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função somável. Então*

$$f\left(\int_U u \, dx\right) \leq \int_U f(u) \, dx.$$

Demonstração. Ver (Evans, L. C., 2010), Teorema 2, apêndice B. □

Uma desigualdade relacionada, de grande utilidade em análise, é a Desigualdade de Young.

Proposição A.6 (Desigualdade de Young). *Consideremos $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $1 < p, q < +\infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Temos*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Como a aplicação $x \mapsto e^x$ é convexa, temos que

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \square$$

Frequentemente, necessitamos de uma versão mais flexível da Desigualdade de Young, que introduz um parâmetro de ajuste.

Corolário A.7 (Young com ε). *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $1 < p, q < +\infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, temos*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q,$$

em que $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Demonstração. Basta escrever $ab = ((\varepsilon p)^{1/p} a) \left(\frac{b}{(\varepsilon p)^{1/p}} \right)$ e aplicar a Desigualdade de Young. \square

Observação A.8. No caso em que $p = q = 2$, obtemos as Desigualdades de Cauchy e Cauchy com ε , respectivamente.

Proposição A.9 (Propriedade do Valor Médio para funções suaves). *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se u é superharmônica ($-\Delta u \geq 0$), então, para todo $x \in \Omega$, a função*

$$(0, d(x, \partial\Omega)) \ni r \mapsto \int_{B(x;r)} u$$

é não crescente, e, para todo $0 < r < d(x, \partial\Omega)$, temos

$$\int_{B(x;r)} u \leq u(x).$$

Demonstração. Consultar (Ponce, 2016, Proposição 1.4) \square

A.3 Medidas e Distribuições

A seguir, apresentamos resultados de teoria da medida e das distribuições que são cruciais para a formulação de problemas em espaços de funções.

Um resultado fundamental sobre troca de ordem de integração é o Teorema de Fubini.

Teorema A.10 (Fubini). *Seja $u \in L^1(\Omega)$, onde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ e $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Então*

(i) *Para quase todo $x_2 \in \Omega_2$, a função $u(\cdot, x_2) \in L^1(\Omega_1)$;*

(ii) *A função $x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$ pertence a $L^1(\Omega_2)$;*

(iii) *Vale a igualdade*

$$\int_{\Omega} u(x_1, x_2) d\mu(x_1, x_2) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Willem, 2013, Teo. 2.3.7) \square

Um conceito importante para relacionar integrais de Lebesgue com integrais unidimensionais é o da função distribuição.

Definição A.11. A função distribuição de u é definida por

$$\mu_u(t) = \mu(\{x \in \Omega \mid u(x) > t\}) < +\infty, \quad t \geq 0.$$

O Princípio de Cavalieri estabelece uma relação fundamental entre a integral de uma função e a integral de sua função distribuição.

Proposição A.12 (Princípio de Cavalieri). *Seja $u \in L^1(\Omega)$, com $u \geq 0$. Então*

$$\int_{\Omega} u \, d\mu = \int_0^{\infty} \mu_u(t) \, dt,$$

em que $\mu_u(t) = \mu(\{x \in \Omega \mid u(x) > t\})$ é a função distribuição de u .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Willem, 2013, Cor. 2.2.34). □

Para medidas de Borel em espaços localmente compactos, temos importantes propriedades de regularidade.

Proposição A.13. *Sejam X um espaço localmente compacto, e ν uma medida de Borel finita em X . Então, para todo conjunto de Borel $A \subseteq X$ e todo $\varepsilon > 0$, temos*

(i) Regularidade interna: *existe um compacto $K \subset A$ tal que $|\nu(A \setminus K)| \leq \varepsilon$;*

(ii) Regularidade externa: *existe um aberto $U \supseteq A$ tal que $|\nu(U \setminus A)| \leq \varepsilon$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Proposição 2.5) □

O próximo resultado é uma versão do teorema de representação de Riesz para funcionais lineares contínuos.

Proposição A.14 (Representação de Riesz). *Seja X um espaço métrico localmente compacto. Se $T : C_c^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que, para toda $\phi \in C_c^0(X)$,*

$$|T(\phi)| \leq C \sup_X |\phi|,$$

então existe uma única medida de Borel finita ν em X tal que, para toda $\phi \in C_c^0(X)$,

$$T(\phi) = \int_X \phi \, d\nu.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Proposição 2.9). □

Definição A.15. *Seja $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que*

$$F \geq 0 \quad \text{no sentido das distribuições}$$

se, para toda função teste não negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$, tivermos

$$\langle F, \varphi \rangle \geq 0.$$

Observação A.16. Aqui $\langle F, \varphi \rangle$ denota a ação da distribuição F na função teste φ .

A próxima proposição estabelece a equivalência entre desigualdades no sentido de medidas e de distribuições, baseando-se na regularidade interior das medidas.

Proposição A.17. Se $u, v \in \mathcal{M}(\Omega)$, então $u \leq v$ no sentido das medidas se, e somente se, $u \leq v$ no sentido das distribuições.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Proposição 6.12) \square

Proposição A.18. Para todo $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, existe uma sequência de funções somáveis $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C^\infty(\bar{\Omega})$ convergindo fracamente para μ no sentido das medidas em Ω , e tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^1(\Omega)} = \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Proposição 2.7). \square

Teorema A.19. Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Se $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz contínua, então $\mathcal{L}_u \subset \mathcal{L}_{H(u)}$ e

$$\widehat{H(u)} = H(\hat{u}) \quad \text{em } \mathcal{L}_u.$$

Demonstração. Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e considere um ponto $x \in \mathcal{L}_u$. Pela definição de ponto de Lebesgue, existe um valor real $\hat{u}(x)$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |u(y) - \hat{u}(x)| dy = 0.$$

Suponha que $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função Lipschitz contínua, isto é, existe uma constante $L \geq 0$ tal que $|H(a) - H(b)| \leq L|a - b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

Para demonstrar que $x \in \mathcal{L}_{H(u)}$ e que $\widehat{H(u)}(x) = H(\hat{u}(x))$, estimamos a média integral da diferença correspondente

$$\int_{B_r(x)} |H(u(y)) - H(\hat{u}(x))| dy.$$

Utilizando a propriedade Lipschitz com $a = u(y)$ e $b = \hat{u}(x)$, temos a desigualdade pontual $|H(u(y)) - H(\hat{u}(x))| \leq L|u(y) - \hat{u}(x)|$. Integrando sobre a bola $B_r(x)$ e normalizando pelo volume, obtemos

$$\int_{B_r(x)} |H(u(y)) - H(\hat{u}(x))| dy \leq L \int_{B_r(x)} |u(y) - \hat{u}(x)| dy.$$

Ao fazer $r \rightarrow 0$, o lado direito da desigualdade converge para zero em virtude de x ser um ponto de Lebesgue de u . Consequentemente,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |H(u(y)) - H(\hat{u}(x))| dy = 0.$$

Isso comprova que $\mathcal{L}_u \subset \mathcal{L}_{H(u)}$ e que a igualdade $\widehat{H(u)} = H(\hat{u})$ é válida em \mathcal{L}_u . \square

Para funções em espaços de Sobolev, definimos o suporte da seguinte forma.

Definição A.20. Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Definimos o suporte de u por

$$\text{supt}(u) = \overline{\Omega \setminus \{x \in \Omega \mid f(x) = 0 \text{ qtp}\}}.$$

O próximo lema estabelece uma propriedade importante do suporte da convolução de duas funções.

Lema A.21. Sejam $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções. Então $\text{supt}(f * g) \subset \overline{\text{supt}(f) + \text{supt}(g)}$.

Demonstração. De fato, suponha que $x \notin \overline{\text{supt}(f) + \text{supt}(g)}$. Então, para todo $y \in \text{supt}(g)$, temos que $x - y \notin \text{supt}(f)$. Portanto, $f(x - y)g(y) = 0$ para todo y , e então $(f * g)(x) = 0$. Mas isso significa que $x \notin \text{supt}(f * g)$, provando o resultado. \square

Definição A.22 (Suporte Essencial). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $f \in L^1(\Omega)$. O *suporte (essencial)* de f , denotado por $\text{supt}(f)$, é definido como o complemento do maior conjunto aberto onde f se anula qtp, isto é,

$$\text{supt}(f) = \Omega \setminus \bigcup \{U \subset \Omega \mid U \text{ é aberto e } f = 0 \text{ qtp em } U\}.$$

Definição A.23 (Derivada Distribucional). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e u uma distribuição em Ω . A derivada distribucional de u de ordem α , denotada por $D^\alpha u$, é a distribuição definida pelo funcional linear

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

em que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ é a ordem da derivada, e

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Em particular, para a derivada parcial de primeira ordem em relação a x_j , temos

$$\langle \partial_{x_j} u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_{x_j} \varphi \rangle.$$

Proposição A.24. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergindo fortemente para f em $L^q(X; \nu)$, então, para toda função contínua $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|H(t)| \leq C|t|^q,$$

a sequência $(H(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortemente para $H(f)$ em $L^1(X; \nu)$.

Demonstração. Assumimos que $f_n \rightarrow f$ em $L^q(X; \nu)$. Isso implica duas propriedades importantes

(i) $\|f_n - f\|_{L^q} \rightarrow 0$, o que acarreta a convergência das normas $\|f_n\|_{L^q}^q \rightarrow \|f\|_{L^q}^q$. Ou seja, $\int |f_n|^q dv \rightarrow \int |f|^q dv$.

(ii) A sequência converge em medida para f . Logo, para toda subsequência de (f_n) , existe uma sub-subsequência (f_{n_k}) que converge qtp para f .

Para provar a convergência de $H(f_n)$ para $H(f)$ em L^1 , basta mostrar que, de qualquer subsequência, podemos extrair uma sub-subsequência que converge para o limite desejado.

Seja (f_{n_k}) uma subsequência tal que $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ qtp. Como H é contínua, segue que

$$H(f_{n_k}(x)) \rightarrow H(f(x)) \quad \text{qtp}$$

Dada a condição de crescimento $|H(t)| \leq C|t|^q$, temos a seguinte estimativa pontual

$$|H(f_{n_k}(x))| \leq C|f_{n_k}(x)|^q.$$

Defina $g_k = H(f_{n_k})$ e $M_k = C|f_{n_k}|^q$, e observe que

- $g_k(x) \rightarrow H(f(x))$ qtp;
- $|g_k(x)| \leq M_k(x)$;
- $M_k \rightarrow M = C|f|^q$ qtp e, devido à convergência forte de f_n em L^q , temos a convergência das integrais

$$\int M_k dv = C \int |f_{n_k}|^q dv \rightarrow C \int |f|^q dv = \int M dv.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\int |H(f_{n_k}) - H(f)| dv \rightarrow 0.$$

Como o limite é o mesmo para qualquer subsequência, concluímos que a sequência original inteira converge, logo $H(f_n) \rightarrow H(f)$ em $L^1(X; \nu)$. \square

A.4 Regularização e Aproximação

A técnica de regularização por convolução é fundamental para aproximar funções por funções suaves, preservando certas propriedades.

Definição A.25 (Regularizante). Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definimos seu regularizante por

$$f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \quad \text{em } \Omega_\varepsilon.$$

Isto é,

$$f^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y)f(y) dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y) dy,$$

onde

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

e $\eta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

com $C > 0$ constante escolhida para que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta \, dx = 1$.

Observação A.26. Chamamos η de regularizante padrão. Devido à maneira que definimos a função η_ε , temos as seguintes propriedades satisfeitas

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon \, dx = 1 \quad \text{e} \quad \text{supt}(\eta_\varepsilon) \subset \bar{B}(0, \varepsilon).$$

Verifiquemos a primeira propriedade. Temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n} \, dx = \int_0^\infty \int_{\partial B(0, \rho)} \eta\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n} \, d\sigma \, d\rho = \int_0^\infty \eta\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n} \sigma_N \rho^{n-1} \, d\rho \\ &= \int_0^\infty \eta(r) \varepsilon^{-n} \sigma_N r^{n-1} \varepsilon^{n-1} \varepsilon \, dr = \sigma_N \int_0^\infty \eta(r) r^{n-1} \, dr = \int_{\mathbb{R}^N} \eta(|x|) \, dx = 1. \end{aligned}$$

Os regularizantes possuem propriedades de aproximação notáveis, que são sumarizadas no próximo teorema.

Teorema A.27 (Propriedades dos regularizantes). *Consideremos o regularizante η_ε definido anteriormente. Então,*

- (i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$;
- (ii) $f^\varepsilon \rightarrow f$ qtp quando $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (iii) Se $f \in C(\Omega)$, então $f^\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω ;
- (iv) Se $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então $f^\varepsilon \rightarrow f$ em $L^p_{loc}(\Omega)$;
- (v) Se $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então

$$f^\varepsilon_{x_i} = \eta_\varepsilon * f_{x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{em } \Omega_\varepsilon;$$

- (vi) Em particular, se $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então $f^\varepsilon \rightarrow f$ em $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$.

A.5 Resultados sobre o Laplaciano

Finalmente, apresentamos alguns resultados específicos sobre equações diferenciais parciais que são utilizados diretamente nas demonstrações.

A seguinte proposição fornece uma caracterização do Laplaciano como limite de um quociente de diferenças.

Proposição A.28. *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então, para todo $x \in \Omega$, temos*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\varepsilon^2} (u(x + \varepsilon) - u(x)) \right| = \Delta u(x),$$

em que $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$ é o laplaciano de u no ponto x .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Prop. 1.3) □

Teorema A.29 (Princípio do Máximo para funções subarmônicas). *Suponha $u \in C(\bar{B}_1) \cap C^2(B_1)$ é uma função subarmônica em B_1 , isto é, $\Delta u \geq 0$. Então*

$$\sup_{B_1} u \leq \sup_{\partial B_1} u.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Han; Lin, 2011, Teorema 1.29). □

Proposição A.30. *Suponha u é harmônica em B_1 . Então vale*

$$\sup_{B_{1/2}} |Du| \leq c \sup_{\partial B_1} |u|$$

onde $c = c(N)$ é uma constante positiva. Em particular, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ vale

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha \sup_{\partial B_1} |u| \quad \text{para qualquer } x, y \in B_{1/2}$$

onde $c = c(N, \alpha)$ é uma constante positiva.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Han; Lin, 2011, Proposição 1.31). □

Proposição A.31. *Suponha u é uma função harmônica não negativa em B_1 . Então vale*

$$\sup_{B_{1/2}} |D \log u| \leq C$$

onde $C = C(N)$ é uma constante positiva.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Han; Lin, 2011, Lema 1.32). □

Corolário A.32 (Desigualdade de Harnack quantitativa). *Suponha u é uma função harmônica não negativa em B_1 . Então vale*

$$u(x_1) \leq Cu(x_2) \quad \text{para qualquer } x_1, x_2 \in B_{1/2}$$

onde C é uma constante positiva dependendo apenas de n .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Han; Lin, 2011, Corolário 1.33). □

Proposição A.33 (Lema de Hopf quantitativo). *Suponha $u \in C(\overline{B_1})$ é uma função harmônica em $B_1 = B_1(0)$. Se $u(x) < u(x_0)$ para qualquer $x \in \overline{B_1}$ e algum $x_0 \in \partial B_1$, então vale*

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) \geq C(u(x_0) - u(0))$$

onde C é uma constante positiva dependendo apenas de N .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Han; Lin, 2011, Proposição 1.34). □

O próximo resultado estabelece uma versão quantitativa do Princípio do Máximo para funções superharmônicas.

Proposição A.34 (Princípio do Máximo quantitativo). *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, e seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto conexo. Se u é superharmônica, então, para todo $x \in K$, temos*

$$u(x) \geq \inf_{\Omega} u + c \|\Delta u\|_{L^1(K)},$$

para alguma constante $c > 0$ que depende de Ω e de K .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Prop. 1.8) □

Proposição A.35. *Seja Ω um conjunto aberto limitado. Para toda medida $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, o problema de Dirichlet linear com densidade μ admite uma solução u tal que*

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|\mu\|_{M(\Omega)},$$

para alguma constante $C > 0$ que depende de Ω .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (Ponce, 2016, Proposição 3.2). □

Referências

ALT, H. W. **Linear Functional Analysis: An Application-Oriented Introduction**. London: Springer London, 2016. p. 270–272. (Universitext). Citado na p. 81.

BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995. (Wiley Classics Library). Citado nas pp. 3 sq., 8 sqq., 80.

BÉNILAN, P.; BOCCARDO, L. *et al.* **An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations**. [*S. l.: s. n.*], 1995. v. 22, p. 241–273. (4e série, 2). Citado na p. 80.

BÉNILAN, P.; BREZIS, H. **Nonlinear problems related to the Thomas-Fermi equation**. [*S. l.*]: Journal of Evolution Equations, 2004. v. 3, p. 673–770. Citado na p. 1.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2010. (Universitext). Citado nas pp. 9, 38.

BREZIS, H.; PONCE, A. C. **Kato's inequality when Δu is a measure**. [*S. l.*]: C. R. de Acad. Sci. Paris, 2004. v. 338, p. 599–604. Citado na p. 59.

EVANS, G. C. **Fundamental points of potential theory**. [*S. l.*]: The Rice Institute Pamphlet, 1920. v. 7, p. 252–329. Citado na p. 43.

EVANS, L. C. **Partial differential equations**. 2. ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate Studies in Mathematics). Citado na p. 82.

FLANDERS, H. **Differentiation Under the Integral Sign**. [*S. l.*]: The American Mathematical Monthly, 1973. v. 80, p. 615–627. Citado na p. 21.

FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and its applications**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999. (Pure and Applied Mathematics). Citado nas pp. 44, 46.

HAN, Q.; LIN, F. **Elliptic Partial Differential Equations**. 2. ed. USA: American Mathematical Society, 2011. (Courant lecture notes). Citado nas pp. 25, 29, 89 sq.

JOHN, F. **Partial Differential Equations**. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 1978. (Applied Mathematical Sciences). Citado na p. 28.

OLIVEIRA, C. R. d. **Introdução à análise funcional**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Projeto Euclides). Citado na p. 47.

ORSINA, L.; PONCE, A. C. **Semilinear elliptic equations and systems with diffuse measures**. [S. l.]: J. Evol. Equ., 2008. (Volume 8, Number 4). Citado na p. 78.

PONCE, A. C. **Elliptic PDEs, Measures and Capacities: From the Poisson Equation to Nonlinear Thomas–Fermi Problems**. Zürich: European Mathematical Society, 2016. (Tracts in Mathematics 23). Citado nas pp. 3, 10 sq., 40, 43, 50, 58, 63, 69, 75 sq., 78 sqq., 83 sqq., 89 sq.

SCHWARTZ, L. **Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques**. [S. l.]: Ann. Univ. Grenoble - Sect. Sci. Math. Phys., 1945. v. 21, p. 57–74. Citado na p. 43.

SEGANTIN, C. E. P. **Visitando algumas ferramentas da análise moderna para soluções de EDP's**. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. Graduação em Matemática. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/20.500.14289/20114>. Citado nas pp. 32–38.

WIENER, N. **Certain notions in potential theory**. [S. l.]: Mass. J. Math. Phys., 1924. v. 3, p. 24–51. Citado na p. 43.

WIENER, N. **The Dirichlet problem**. [S. l.]: Mass. J. Math. Phys., 1924. v. 3, p. 127–146. Citado na p. 43.

WILLEM, M. **Functional Analysis: Fundamentals and Applications**. New York: Springer, 2013. (Cornerstones). Citado nas pp. 40, 83 sq.