



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE  
CIÊNCIAS EXATAS



GUSTAVO CAVANI TELES DA SILVA

# **UM MODELO FUZZY PARA IDENTIFICAÇÃO DE DIFICULDADES MATEMÁTICAS**

SOROCABA, SP  
05 DE DEZEMBRO DE 2025

Gustavo Cavani Teles da Silva

## **Um modelo fuzzy para identificação de dificuldades matemáticas**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação da Professora Doutora Magda da Silva Peixoto.

Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Orientadora: Magda da Silva Peixoto

Sorocaba, SP  
05 de dezembro de 2025

Silva, Gustavo Cavani Teles da

Um modelo fuzzy para identificação de dificuldades matemáticas / Gustavo Cavani Teles da Silva -- 2025. 87f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba  
Orientador (a): Magda da Silva Peixoto  
Banca Examinadora: Luiza Amália Pinto, Silvia Maria Simões de Carvalho  
Bibliografia

1. Lógica Fuzzy. 2. Modelagem computacional. 3. Sistemas fuzzy hierárquicos. I. Silva, Gustavo Cavani Teles da. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -  
CRB/8 6979



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

---

## Folha de Aprovação

---

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gustavo Cavani Teles da Silva, realizada em 05/12/2025.

### Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto (UFSCar)

Profa. Dra. Luiza Amália Pinto (UNESP)

Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

*Dedico este trabalho aos meus pais, Luiz e Edlene, e aos meus irmãos, Renan e Gabriel. O apoio, o carinho e a força que recebo de vocês dão sentido a cada etapa desta caminhada.*

# Agradecimentos

Aos meus pais, Luiz e Edlene, pela base sólida, pelo amor incondicional e pelo apoio incansável em cada etapa da minha vida. Aos meus irmãos, Gabriel e Renan, pela parceria, pela presença constante e pela força silenciosa que sempre me impulsionou. Às minhas cunhadas, Tamires e Soraya, pelo carinho e pela leveza que trazem à nossa família. À Mel, minha fiel companheira, e aos meus gatos Zé Gato e Maria Gata, que tornam os dias mais leves.

À minha orientadora, Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto, por sua dedicação generosa, pelo rigor acadêmico que me fez crescer, pela paciência em cada orientação e pela confiança que depositou no meu trabalho. Sua sensibilidade como pesquisadora e educadora marcou profundamente o meu percurso e tornou esta jornada possível.

Às professoras da banca examinadora, Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho e Profa. Dra. Luiza Amália Pinto, pelas contribuições atentas, pela leitura cuidadosa e pela disponibilidade em dialogar sobre este estudo com tanta generosidade.

Aos professores do mestrado, Profa. Dra. Ana Mereu, Prof. Dr. Raphael, Prof. Dr. Sadao, Prof. Dr. Rogério, Profa. Dra. Graciele, Prof. Dr. Antonio Venezuela e Prof. Dr. Paulo, pelos ensinamentos, pelas discussões enriquecedoras e pela formação que ampliou meu olhar sobre a pesquisa e a docência.

À minha família, formada por tios, tias, primos e primas, pelo carinho constante e pelo apoio afetivo que sempre me acompanhou, mesmo de longe.

Aos meus amigos matemáticos do PPGECE e do PROFMAT, Gabriela, Adriano, Eduardo, Jéssica, Vitor, Danilo, Schmitt, Giovanna, José Reis, Julia, Natãna, Suellem e tantos outros, pela parceria acadêmica, pelas conversas, pelos momentos de estudo e pelas risadas que tornaram o percurso mais leve.

Aos meus amigos não-matemáticos, Ana Carolina, Matheus, Julia, Jonathan, Bruno, Thiago e Daniel, por estarem ao meu lado nos intervalos entre uma etapa e outra e por trazerem equilíbrio, amor e vida para além da pesquisa.

À minha psicóloga, Flávia Meneghel, pela escuta atenta, pelo apoio emocional e por me ajudar a atravessar com mais serenidade os desafios dessa caminhada.

Aos pesquisadores que conheci no VII Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, cuja troca de ideias ampliou minha visão e reforçou meu desejo de seguir pesquisando na área. Em especial, agradeço à Profa. Dra. Rosana Jafelice, que, com rara generosidade, dividiu comigo seu livro e suas palavras de incentivo, fortalecendo meu percurso acadêmico.

À UFSCar, por abrir as portas mais uma vez e possibilitar a realização de mais um sonho acadêmico.

A todos os alunos que passaram pela minha trajetória docente, deixo minha gratidão profunda. Cada pergunta, cada desafio, cada conquista compartilhada e cada história

transformaram a minha forma de ensinar e de enxergar a educação. Vocês me ensinaram a ser um profissional melhor e, sobretudo, uma pessoa melhor.

Agradeço também ao pequeno Gustavo, aquele menino que sonhou, insistiu, acreditou e seguiu adiante mesmo quando tudo parecia impossível. É graças à sua coragem e à sua persistência que hoje eu posso viver sonhos que ele só imaginava à distância. Honrar esse caminho é, também, honrar a minha própria história.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para este trabalho, inclusive aqueles que, por qualquer esquecimento involuntário, não foram mencionados nominalmente, deixo meu agradecimento sincero e respeitoso.

Agradeço, de todo o meu coração, a cada amigo, familiar, colega e professor que fez parte desta caminhada e desta formação. Obrigado pelo apoio, pelo carinho e por tudo o que fizeram por mim.

*Minha vida, meus mortos, meus caminhos tortos.  
Secos & Molhados, Sangue Latino (1973)*

# Resumo

Esta dissertação apresenta o desenvolvimento de um modelo fuzzy que visa identificar dificuldades matemáticas de discentes no Ensino Médio. Fundamentado em sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF), o modelo integra variáveis cognitivas e aspectos relacionados ao envolvimento do estudante, permitindo representar diferentes níveis de desempenho de forma gradual e interpretável. A arquitetura é hierárquica e composta por três subsistemas que avaliam engajamento, consistência de desempenho e tipos específicos de dificuldade. As funções de pertinência, definidas por modelos triangulares e trapezoidais, e as bases de regras foram elaboradas com base em relações pedagógicas entre participação, compreensão conceitual, procedimentos e interpretação de enunciados. O sistema foi implementado no MATLAB e testado por meio de cenários simulados, possibilitando analisar seu comportamento diante de diferentes combinações de desempenho estudantil. O trabalho busca contribuir para o desenvolvimento de ferramentas mais flexíveis e compreensíveis, capazes de apoiar práticas educacionais e aproximar técnicas de modelagem fuzzy dos processos de avaliação da aprendizagem.

**Palavras-chave:** identificação educacional, Lógica Fuzzy, modelagem computacional, sistemas baseados em regras, sistemas fuzzy hierárquicos.

# Abstract

This dissertation presents the development of a fuzzy model designed to identify mathematical learning difficulties among high school students. Grounded in fuzzy rule-based systems (FRBS), the model integrates cognitive variables and aspects related to student engagement, enabling the representation of performance levels in a gradual and interpretable manner. Its hierarchical architecture is composed of three subsystems that assess engagement, performance consistency, and specific types of mathematical difficulties. The membership functions, defined using triangular and trapezoidal models, as well as the rule bases, were constructed according to pedagogical relationships involving participation, conceptual understanding, procedural skills, and problem-statement interpretation. The system was implemented in MATLAB and tested through simulated scenarios, allowing the analysis of its behavior under different combinations of student performance. This work contributes to the development of flexible and interpretable tools capable of supporting educational practices and strengthening the connection between fuzzy modeling techniques and learning assessment processes.

**Keywords:** computational modeling, diagnostic assessment, Fuzzy Logic, hierarchical fuzzy systems, rule-based systems.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica da função característica do conjunto dos reais não negativos ao intervalo $[2, 4]$ . . . . .	18
Figura 2 – Ilustração de Subconjuntos Fuzzy e Crisp. . . . .	19
Figura 3 – Funções de pertinência triangulares. . . . .	22
Figura 4 – Função de pertinência trapezoidal. . . . .	22
Figura 5 – Função de pertinência trapezoidal para temperaturas agradáveis em São Paulo. . . . .	23
Figura 6 – Operações com subconjuntos fuzzy. . . . .	24
Figura 7 – Subconjuntos fuzzy das pessoas baixas e das pessoas altas. . . . .	25
Figura 8 – Representação gráfica do $\alpha$ -nível e do suporte de um conjunto fuzzy $A$ expresso por uma função de pertinência $\varphi_A$ . . . . .	39
Figura 9 – $\alpha$ -níveis: $[A]^\alpha$ e $[A]^0 = U$ . . . . .	40
Figura 10 – Convexidade em conjuntos fuzzy. . . . .	42
Figura 11 – Subconjunto $\hat{f}(A)$ do Exemplo 2.32. . . . .	44
Figura 12 – Representação da relação clássica entre os predadores e suas presas. . . . .	48
Figura 13 – Relação fuzzy e os diversos graus de pertinência. . . . .	49
Figura 14 – Funções de pertinência adotadas para as variáveis do modelo fuzzy de avaliação discente. . . . .	57
Figura 15 – Estrutura hierárquica do modelo fuzzy de identificação. . . . .	60
Figura 16 – Funções de pertinência das variáveis de entrada do subsistema de engajamento. . . . .	66
Figura 17 – Funções de pertinência da variável de saída (EN) do subsistema de engajamento. . . . .	67
Figura 18 – Funções de pertinência das variáveis de entrada do subsistema de consistência. . . . .	67
Figura 19 – Funções de pertinência da variável de saída (CO) do subsistema de consistência. . . . .	68
Figura 20 – Funções de pertinência das variáveis de entrada (CC e IE) do subsistema de identificação. . . . .	68
Figura 21 – Funções de pertinência das variáveis de saída do subsistema de identificação. . . . .	69

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação entre os diagnósticos de cinco pacientes com dois sintomas, febre e mialgia. . . . .	47
Tabela 2 – Exemplo de aplicação do modelo fuzzy com dados fictícios. . . . .	58
Tabela 3 – Resultados dos testes realizados no modelo fuzzy de identificação com dados fictícios. . . . .	72
Tabela 4 – Resultados representativos do teste de sensibilidade em relação à variável AC. . . . .	73

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>A TEORIA DE CONJUNTOS FUZZY</b>	<b>16</b>
2.1	Conceitos Básicos da Teoria Clássica de Conjuntos	17
2.2	Conjuntos fuzzy	18
2.3	Operações com Conjuntos Fuzzy	23
2.4	Operações t-norma e t-conorma	34
2.5	Níveis de um Conjunto Fuzzy	38
2.6	Convexidade de Conjuntos Fuzzy	42
2.7	O Princípio de Extensão	43
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES RELACIONAIS FUZZY</b>	<b>46</b>
3.1	Relações Fuzzy	46
3.2	Formas de Representação e Propriedades das Relações Binárias	47
3.3	Composição entre Relações Fuzzy Binárias	50
<b>4</b>	<b>SISTEMAS BASEADOS EM REGRAS FUZZY</b>	<b>53</b>
4.1	Módulo de fuzzificação	53
4.2	Módulo da base de regras	54
4.3	Módulo de inferência fuzzy	54
4.3.1	Método de Inferência de Mamdani	54
4.4	Módulo de defuzzificação	55
4.4.1	Centro de gravidade	55
<b>5</b>	<b>O MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>59</b>
5.1	Estrutura do Modelo	59
5.2	Definição das Variáveis do Modelo	60
5.3	Variáveis de Saída do Modelo	64
5.4	Funções de Pertinência	66
5.5	Bases de Regras do Modelo	69
5.6	Aplicação do Modelo e Resultados	71
5.6.1	Teste de Sensibilidade do Modelo	72
5.6.2	Discussão dos Resultados	74
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>77</b>

<b>APÊNDICE A – REGRAS DO ENGAJAMENTO . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>APÊNDICE B – REGRAS DA CONSISTÊNCIA . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>APÊNDICE C – REGRAS DE IDENTIFICAÇÃO . . . . .</b>	<b>81</b>

# 1 Introdução

A compreensão das dificuldades encontradas por estudantes em conteúdos matemáticos é um aspecto importante para analisar seu desempenho e orientar intervenções pedagógicas. Em muitas situações, o professor dispõe apenas de resultados numéricos associados a provas, exercícios ou atividades, o que nem sempre permite identificar com clareza quais aspectos do conteúdo representam maior desafio para o aluno. Distinguir se uma dificuldade é predominantemente conceitual, procedimental ou ligada à interpretação de enunciados é uma tarefa complexa, especialmente quando as informações disponíveis apresentam níveis variados de precisão ou subjetividade.

A literatura em Educação Matemática indica que a simples análise de acertos e erros não é suficiente para compreender a origem das dificuldades apresentadas pelos estudantes. Socas (1997) argumenta que tais dificuldades decorrem de obstáculos conceituais, procedimentais e linguísticos que não se mostram de maneira evidente em abordagens avaliativas baseadas apenas no resultado final da tarefa. Essa limitação também é destacada por Perrenoud (1999), ao afirmar que avaliações predominantemente classificatórias produzem informações restritas sobre os processos que conduzem à aprendizagem ou ao erro, reduzindo a complexidade do desempenho estudantil a indicadores numéricos. Considerar esses fatores reforça a necessidade de métodos que permitam representar nuances, incertezas e gradações de desempenho, ampliando a capacidade de identificar padrões de dificuldade que não emergem de forma clara em instrumentos tradicionais.

Nesse contexto, abordagens capazes de lidar com incertezas e gradações de desempenho tornam-se úteis para representar diferentes padrões de aprendizagem. A Teoria dos Conjuntos Fuzzy, ao permitir a descrição gradual de conceitos por meio de funções de pertinência, oferece uma ferramenta adequada para modelar situações em que fronteiras nítidas entre acertos e erros não são suficientes para caracterizar o desempenho estudantil. Sistemas fuzzy baseados em regras possibilitam combinar múltiplas variáveis e traduzir termos linguísticos como “baixo”, “médio” e “alto” em estruturas matemáticas interpretáveis (Barros; Bassanezi, 2021).

Meu interesse por essa área teve início durante a graduação, quando participei de uma pesquisa voltada ao uso de métodos fuzzy na análise de desempenho estudantil. Naquela etapa, tive contato com conceitos fundamentais da teoria e com suas possibilidades de aplicação, o que motivou a continuidade dos estudos. Ao ingressar no mestrado, esse interesse se consolidou, especialmente a partir da participação no VII Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, que ampliou minha compreensão sobre diferentes modelos e técnicas existentes na área (Silva; Peixoto, 2025).

Com base nesse percurso, esta dissertação tem como objetivo propor um modelo fuzzy

para a identificação de dificuldades matemáticas. O modelo desenvolvido é estruturado de forma hierárquica, integrando variáveis relacionadas ao engajamento, à consistência de desempenho e a três dimensões fundamentais: compreensão conceitual, habilidade procedimental e interpretação de enunciados. O uso de funções de pertinência e regras linguísticas permite representar graduações de desempenho, possibilitando identificar padrões que não emergem de forma explícita em abordagens puramente numéricas.

A pesquisa apresenta contribuições tanto na construção do modelo quanto na análise de seu comportamento em diferentes cenários simulados. Do ponto de vista técnico, discute-se a definição das variáveis, o desenho das funções de pertinência, a organização dos subsistemas e a elaboração da base de regras. Do ponto de vista aplicado, o trabalho mostra como a Lógica Fuzzy pode ser utilizada para identificar diferentes tipos de dificuldades e fornecer interpretações mais detalhadas sobre o desempenho estudantil.

A dissertação está organizada da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta os fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy, incluindo definições básicas, operações, funções de pertinência, níveis de conjuntos fuzzy e o Princípio da Extensão. O Capítulo 3 aborda as Equações Relacionais Fuzzy, apresentando relações fuzzy, formas de representação, propriedades das relações binárias e composições entre relações. O Capítulo 4 trata dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, descrevendo os módulos de fuzzificação, base de regras, inferência fuzzy e defuzzificação, com destaque para o método de Mamdani e o cálculo do centro de gravidade. O Capítulo 5 apresenta o modelo fuzzy para identificação de dificuldades matemáticas proposto, detalhando a estrutura do modelo, a definição das variáveis de entrada e de saída, as funções de pertinência, a base de regras, a aplicação do modelo e a discussão dos resultados obtidos. Por fim, o Capítulo 6 reúne as considerações finais, indicando contribuições e possibilidades de desdobramentos futuros.

## 2 A Teoria de Conjuntos Fuzzy

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi desenvolvida para representar conhecimentos incertos e imprecisos. Ela oferece uma maneira aproximada, mas eficaz, de descrever o comportamento de sistemas muito complexos, mal definidos ou com informações limitadas.

As relações fuzzy surgem como uma generalização das relações clássicas. Enquanto uma relação clássica descreve a interdependência entre dois ou mais objetos, com base em conceitos da Teoria de Conjuntos, as relações fuzzy ampliam essa abordagem, incorporando graus de pertencimento. De acordo com Barros e Bassanezi (2021), a escolha do tipo de relação depende do fenômeno que se deseja estudar. Ainda assim, a Teoria Fuzzy tem se mostrado mais robusta, pois engloba a Teoria Clássica como um caso particular.

O marco inicial da Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi o artigo publicado em 1965 por Lotfi Asker Zadeh, professor do Departamento de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley (Zadeh, 1965). A proposta de Zadeh era criar um modelo matemático capaz de lidar com termos linguísticos subjetivos, algo essencial para armazenar e manipular conceitos vagos em computadores, possibilitando cálculos com informações imprecisas. A ideia central foi flexibilizar o conceito de pertencimento, permitindo que um elemento pudesse pertencer parcialmente a um conjunto. Para isso, Zadeh introduziu o conceito de conjunto fuzzy, definido por uma função de pertinência que expressa o grau com que um elemento pertence ao conjunto.

Situações como “*hoje está quente?*” ou “*o clima está agradável?*” mostram como respostas “sim” ou “não” muitas vezes não conseguem captar toda a complexidade envolvida. Termos como “quente” e “agradável” são subjetivos — é difícil estabelecer uma linha exata que defina o que é, de fato, uma temperatura quente. Na Teoria Fuzzy, essa incerteza é representada por meio de uma função de pertinência, que permite atribuir graus a expressões como “*levemente quente*” ou “*muito quente*”.

Nos conjuntos clássicos (ou *crisp*), o pertencimento é bem definido: um elemento pertence ou não ao conjunto. Por exemplo, o número 2 é primo, enquanto o número 6 não é. Agora, considere o conjunto  $Q$  das temperaturas consideradas “quentes”, definido como  $Q = \{x \in U \mid x \geq 30^\circ\text{C}\}$ . Com esse critério, uma temperatura de  $30^\circ\text{C}$  é classificada como quente, mas uma de  $29,9^\circ\text{C}$  já não pertence ao conjunto. No entanto, uma variação tão pequena realmente justifica essa mudança? Provavelmente não. É justamente para lidar com esse tipo de incerteza que surgem os conjuntos fuzzy e as funções de pertinência (Belucci, 2009).

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos fundamentais sobre conjuntos clássicos e conjuntos fuzzy. As principais referências utilizadas foram Barros e Bassanezi (2021), Nicoletti e Camargo (2011), Pissini (2019), Belucci (2009), Marins (2016) e Silva (2020).

## 2.1 Conceitos Básicos da Teoria Clássica de Conjuntos

Em Matemática, alguns termos são aceitos sem definição formal e são chamados de noções primitivas. Na Teoria Clássica de Conjuntos, os conceitos de conjunto e elemento fazem parte desse grupo.

De forma geral, um conjunto pode ser entendido como uma coleção de objetos distinguíveis que compartilham alguma característica comum, e é essa característica que justifica sua inclusão no conjunto. Os objetos que compõem um conjunto são chamados de elementos (Nicoletti; Camargo, 2011).

Por convenção, conjuntos são representados por letras maiúsculas, enquanto seus elementos são indicados por letras minúsculas. A letra  $U$  é frequentemente utilizada para representar o conjunto que contém todos os elementos relacionados a um determinado contexto, sendo chamado de conjunto universo.

Outra noção primitiva fundamental é a de pertinência. Dizemos que um objeto  $x$  pertence a um conjunto  $A$ , e representamos isso por  $x \in A$ . Caso contrário, usamos  $x \notin A$  para indicar que  $x$  não pertence ao conjunto.

Uma forma de indicar a pertinência de um elemento  $x$  a um conjunto  $A$  é por meio da função característica  $\chi_A(x)$ , definida da seguinte forma:

**Definição 2.1.** Seja  $U$  um conjunto e  $A$  um subconjunto de  $U$ . A função característica de  $A$  é dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Ou seja, para cada  $x \in U$ , se  $x$  pertence ao conjunto  $A$ , então  $\chi_A(x) = 1$ ; caso contrário, se  $x \notin A$ , então  $\chi_A(x) = 0$ . Dessa forma, a função característica atua como um critério que classifica os elementos do conjunto universo  $U$ , indicando quais pertencem ou não ao subconjunto  $A$ .

Segundo Nicoletti e Camargo (2011), a representação de conjuntos por meio de suas funções características é especialmente relevante, pois essa abordagem pode ser generalizada para o caso dos conjuntos fuzzy.

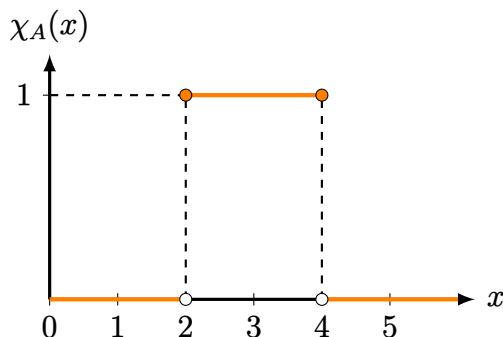
As autoras ainda destacam que os valores 0 e 1 utilizados na definição da função característica não devem ser interpretados como números em si, mas sim como símbolos que servem para distinguir os elementos que pertencem ao subconjunto daqueles que não pertencem.

**Exemplo 2.2.** Seja  $A \subset \mathbb{R}_+$  definido por  $|x - 3| \leq 1$ . Como  $|x - 3| \leq 1 \iff 2 \leq x \leq 4$ , a função característica é

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em que é representada graficamente pela Figura 1.

Figura 1 – Representação gráfica da função característica do conjunto dos reais não negativos ao intervalo  $[2, 4]$ .



Fonte: Elaboração própria.

A partir desses fundamentos, torna-se possível avançar para uma generalização que permite tratar gradações de pertinência, apresentada na próxima seção com a definição de conjuntos fuzzy.

## 2.2 Conjuntos fuzzy

Conforme discutido anteriormente, a função característica de um conjunto clássico assume os valores 1 ou 0, permitindo assim determinar se um elemento pertence ou não ao conjunto definido.

No contexto dos conjuntos fuzzy, essa ideia é estendida por meio da definição de uma função de pertinência, a qual associa a cada elemento do conjunto universo um valor entre 0 e 1, representando o grau com que tal elemento se enquadra no conceito representado pelo conjunto fuzzy.

O grau de pertinência indica, portanto, o nível de compatibilidade entre um elemento e o conceito descrito pelo conjunto fuzzy.

**Definição 2.3.** Seja  $U$  um conjunto clássico. Um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é descrito por uma função

$$\varphi_F : U \longrightarrow [0, 1],$$

a qual é chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ .

O valor  $\varphi_F(x) \in [0, 1]$  expressa o grau com que o elemento  $x \in U$  pertence ao conjunto fuzzy  $F$ . Em particular, os extremos  $\varphi_F(x) = 1$  e  $\varphi_F(x) = 0$  correspondem, respectivamente, a pertinência plena e não pertinência do elemento  $x$  ao conjunto  $F$ .

A concepção de subconjunto fuzzy pode ser entendida como uma generalização da noção de conjunto clássico, uma vez que, ao ampliar o contradomínio da função característica de  $\{0, 1\}$  para o intervalo  $[0, 1]$ , obtém-se uma função de pertinência. Nesse contexto, um

conjunto clássico pode ser interpretado como um caso particular de conjunto fuzzy, em que a função de pertinência  $\varphi_F$  coincide com a função característica  $\chi_F$ .

Assim, um subconjunto fuzzy  $F$  é formado por elementos  $x \in U$ , cada um associado a um grau de pertinência  $\varphi_F(x)$ . Dessa forma, podemos representar o subconjunto fuzzy como um conjunto de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{ com } x \in U\}.$$

O subconjunto clássico de  $U$  definido por

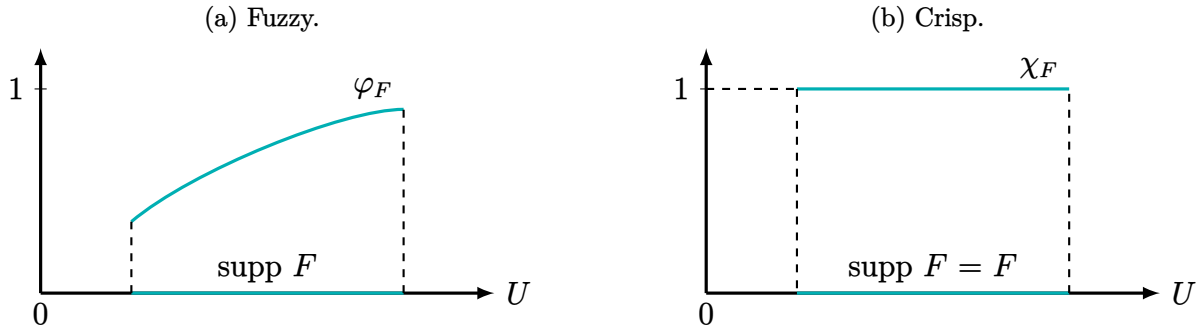
$$\text{supp } F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

é denominado suporte de  $F$  e exerce papel fundamental na articulação entre as abordagens clássica e fuzzy de teoria dos conjuntos (Barros; Bassanezi, 2021).

O conceito de suporte de um subconjunto fuzzy  $F$  definido em  $U$  é importante e interpretado como sendo o conjunto formado pelos elementos de  $U$  cujos elementos têm grau de pertinência não-nulos em  $F$ .

É possível notar com a Figura 2 que o suporte de um subconjunto crisp coincide com o próprio conjunto, diferentemente do subconjunto fuzzy.

Figura 2 – Ilustração de Subconjuntos Fuzzy e Crisp.



Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2021).

A seguir serão apresentados alguns exemplos de conjuntos fuzzy.

**Exemplo 2.4.** Considere o conjunto dos números naturais múltiplos de 3:

$$M = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ é múltiplo de } 3\}.$$

A função característica de  $M$  é dada por

$$\chi_M(n) = \begin{cases} 1, & 3 \mid n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nesse caso, também conseguimos identificar de forma nítida os elementos que pertencem ou não ao conjunto, pois cada número natural é ou múltiplo de 3 ou não é.

Assim, o conjunto dos múltiplos de 3 pode ser interpretado como um caso particular de conjunto fuzzy, em que a função de pertinência  $\chi_M$  assume apenas os valores extremos 0 e 1.

**Exemplo 2.5.** Considere o subconjunto fuzzy  $T$  das *temperaturas agradáveis* em São Paulo.

O número 25°C pode ser considerado uma temperatura agradável? E o número 10°C? Na Lógica Fuzzy, ambos podem pertencer a  $T$ , mas com diferentes graus, dependendo da função de pertinência  $\varphi_T$  escolhida.

Uma possível função de pertinência para  $T$  em São Paulo é dada por:

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 10, \\ \frac{t-10}{10}, & 10 < t \leq 20, \\ 1, & 20 < t \leq 28, \\ \frac{35-t}{7}, & 28 < t < 35, \\ 0, & t \geq 35. \end{cases}$$

Assim, valores entre 20°C e 28°C são plenamente agradáveis ( $\varphi_T(t) = 1$ ), enquanto temperaturas mais frias ou mais quentes apresentam graus de pertinência menores. Por exemplo, em São Paulo,  $t = 25^\circ\text{C}$  pertence a  $T$  com grau máximo, enquanto  $t = 10^\circ\text{C}$  pertence com grau nulo.

Nos exemplos anteriores, o conjunto universo  $U$  estava bem estabelecido. No entanto, ao lidar com conceitos como “temperatura agradável”, a escolha do universo de discurso depende diretamente do contexto. Em São Paulo, consideramos uma determinada faixa de temperaturas, mas, em cidades como Curitiba ou Recife, o intervalo adequado para representar essa noção seria diferente, refletindo as características climáticas locais. Assim, a definição do conjunto universo ou mesmo do suporte da função de pertinência deve sempre ser feita de maneira coerente com a realidade que se deseja modelar.

**Exemplo 2.6.** (Conjunto fuzzy das alturas baixas). Considere a altura de indivíduos adultos em uma população. A cada pessoa podemos associar um número real que representa sua altura em centímetros. Suponha que o conjunto universo das alturas seja o intervalo  $U = [140, 210]$ , onde  $x \in U$  representa a altura de um indivíduo. Um subconjunto fuzzy  $B$ , de  $U$ , representando os indivíduos baixos, pode ser descrito por funções de pertinência como as seguintes:

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 150 \\ \frac{180-x}{30} & \text{se } 150 < x \leq 180 \\ 0 & \text{se } x > 180 \end{cases}$$

ou

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} \left(\frac{180-x}{40}\right)^2 & \text{se } 140 \leq x \leq 180 \\ 0 & \text{se } 180 < x \leq 210 \end{cases} .$$

Nesse caso, a escolha da função de pertinência depende do critério adotado para representar o que significa ser baixo. A primeira função traduz uma transição linear entre 150 cm e 180 cm, enquanto a segunda utiliza uma variação quadrática, atribuindo graus de pertinência mais elevados a alturas bem menores que 180 cm.

A definição do conjunto universo  $U = [140, 210]$  está diretamente ligada à variável escolhida, que neste caso é a altura. Se considerássemos, em vez disso, outra medida para caracterizar a ideia de baixeza, como o peso corporal, o tamanho do calçado ou a média da altura em diferentes países, o conjunto universo e as funções de pertinência adotadas também mudariam.

As funções de pertinência mais comuns são as triangulares e trapezoidais e que serão definidos a seguir:

**Definição 2.7.** Qualquer função de pertinência triangular pode ser caracterizada por três parâmetros:  $a$ ,  $u$  e  $b$ , como mostra a expressão geral:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u < x \leq b \\ 0, & \text{se } x > b \end{cases} .$$

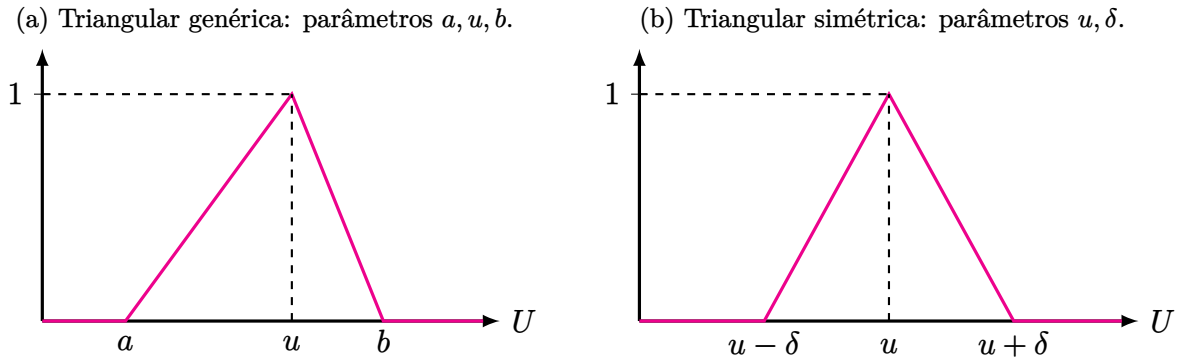
O gráfico da função de pertinência triangular tem o formato de um triângulo, que tem como base o intervalo  $[a, b]$  e como único vértice fora desta base, o ponto  $(u, 1)$ , como pode ser observado na Figura 3a.

Pode-se notar que a função de pertinência triangular não é necessariamente simétrica, pois  $b - u$  pode ser diferente de  $u - a$ , com  $\varphi_A = 1$ . No entanto, quando  $u - a = b - u = \delta$ , obtém-se uma função de pertinência simétrica em relação a  $u$ , simplificada na expressão:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-u|}{\delta}, & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

A forma simétrica dessa função é ilustrada na Figura 3b.

Figura 3 – Funções de pertinência triangulares.



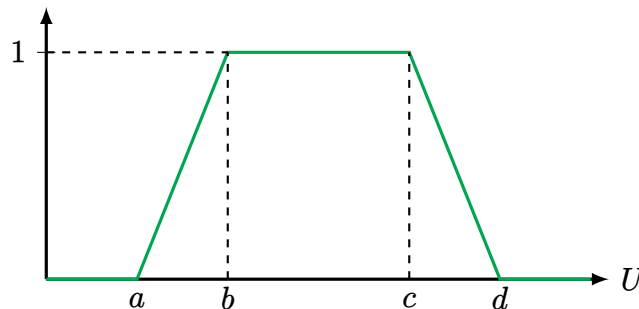
Fonte: Elaboração própria.

**Definição 2.8.** As funções de pertinência que apresentam o contorno trapezoidal podem ser caracterizadas por quatro parâmetros:  $a, b, c$  e  $d$ , como mostra a expressão geral:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d - x}{d - c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

e dada pela Figura 4.

Figura 4 – Função de pertinência trapezoidal.



Fonte: Elaboração própria.

**Exemplo 2.9.** Retomando o Exemplo 2.5, que trata das temperaturas agradáveis em São Paulo, podemos descrevê-lo agora por meio de uma função de pertinência de formato trapezoidal. Nesse caso, assumimos que temperaturas muito baixas ou muito altas não são consideradas agradáveis, enquanto uma faixa intermediária representa plenamente essa característica.

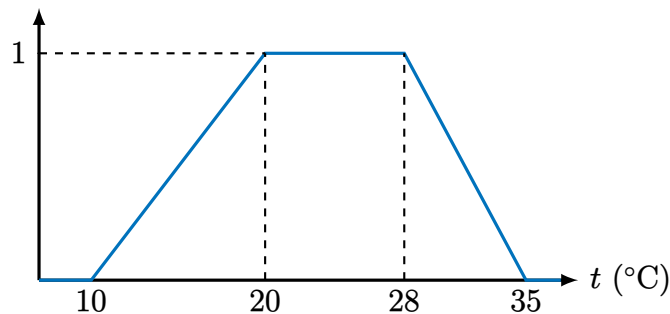
Assumimos que valores até  $10^\circ\text{C}$  têm pertinência nula; entre  $10^\circ\text{C}$  e  $20^\circ\text{C}$  a sensação torna-se gradualmente mais confortável; de  $20^\circ\text{C}$  a  $28^\circ\text{C}$  a pertinência é máxima; e, a

partir daí, diminui até zerar em 35°C. Assim, chegamos à seguinte função:

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 10, \\ \frac{t - 10}{20 - 10}, & 10 < t \leq 20, \\ 1, & 20 < t \leq 28, \\ \frac{35 - t}{35 - 28}, & 28 < t < 35, \\ 0, & t \geq 35. \end{cases}$$

A Figura 5 ilustra graficamente essa função de pertinência, evidenciando as transições entre as regiões de crescimento, platô e declínio.

Figura 5 – Função de pertinência trapezoidal para temperaturas agradáveis em São Paulo.



Fonte: Elaboração própria.

Com a noção de conjuntos fuzzy estabelecida, a próxima etapa consiste em apresentar as operações que possibilitam sua manipulação e uso em aplicações práticas.

## 2.3 Operações com Conjuntos Fuzzy

Nesta seção são apresentadas as operações fundamentais entre conjuntos fuzzy, como união, interseção e complemento, destacando como elas generalizam as operações clássicas ao admitir graus intermediários de pertinência.

Dados  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy de um universo  $U$ , com funções de pertinência  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$ , dizemos que  $A \subset B$  quando, para todo  $x \in U$ , vale

$$\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x).$$

Por definição, o conjunto fuzzy vazio  $\emptyset$  possui função de pertinência nula em todo o universo, isto é,

$$\varphi_{\emptyset}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in U.$$

Esse conjunto representa a ausência total de pertinência, sendo útil como caso extremo em operações fuzzy.

De forma análoga, o conjunto universo  $U$ , considerado como conjunto fuzzy, possui função de pertinência constante igual a 1:

$$\varphi_U(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in U.$$

Esse caso corresponde ao limite superior da pertinência e serve como elemento neutro em certas operações.

**Definição 2.10. (União).** A união entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \quad x \in U.$$

**Definição 2.11. (Intersecção).** A intersecção entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por

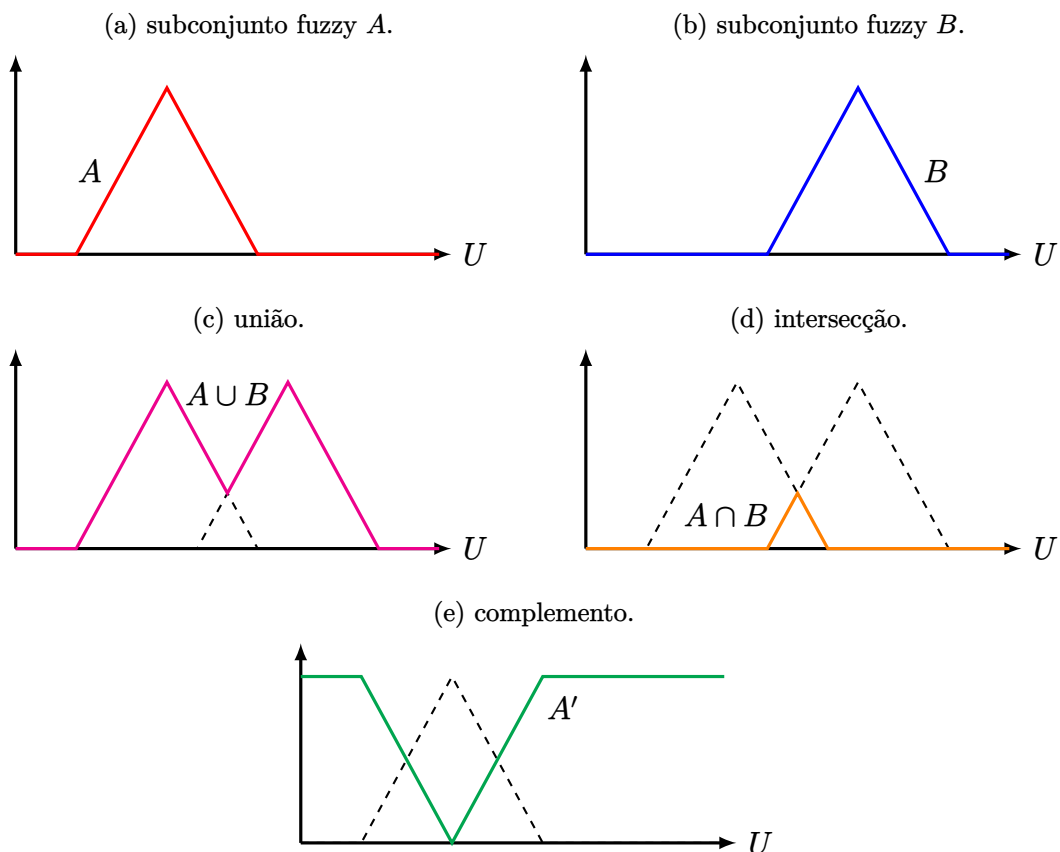
$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \quad x \in U.$$

**Definição 2.12. (Complementar de subconjuntos fuzzy).** O complementar de  $A$  é o subconjunto fuzzy  $A'$  de  $U$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U.$$

As operações com conjuntos estão representadas na Figura 6.

Figura 6 – Operações com subconjuntos fuzzy.



Fonte: Elaboração própria.

**Exemplo 2.13.** (Conjuntos fuzzy das pessoas baixas e altas). Considere a altura de indivíduos adultos em uma população, com conjunto universo  $U = [140, 210]$ , onde  $x \in U$  representa a altura em centímetros. O conjunto fuzzy  $B$ , representando as pessoas baixas, foi definido no Exemplo 2.6.

O conjunto fuzzy  $A$ , representando as pessoas altas, pode ser obtido como o complementar fuzzy de  $B$ , isto é,

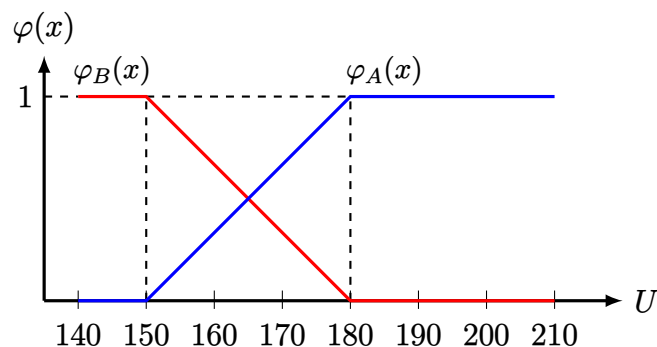
$$\varphi_A(x) = 1 - \varphi_B(x).$$

Se adotarmos a função de pertinência do Exemplo 2.6, temos explicitamente:

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 150 \\ \frac{180-x}{30} & \text{se } 150 < x \leq 180 \\ 0 & \text{se } x > 180 \end{cases}, \quad \varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 150 \\ \frac{x-150}{30} & \text{se } 150 < x \leq 180 \\ 1 & \text{se } x > 180 \end{cases}.$$

A Figura 7 mostra graficamente as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy das pessoas baixas e das pessoas altas.

Figura 7 – Subconjuntos fuzzy das pessoas baixas e das pessoas altas.



Fonte: Elaboração própria.

O complemento fuzzy troca os graus de pertinência entre os dois conjuntos. Se  $\varphi_A(x)$  expressa o quanto  $x$  é compatível com o conceito de pessoas altas, então  $\varphi_{A'}(x)$  indica o quanto  $x$  não é compatível com esse mesmo conceito.

Nos conjuntos fuzzy, pode haver sobreposição entre um conjunto e seu complementar. Por exemplo, com as definições acima, em  $x = 165$  obtemos  $\varphi_B(165) = \varphi_A(165) = 0,5$ . Esse ponto marca a maior incerteza, pois quanto mais próximo de 0,5 o valor da pertinência, maior é a dúvida sobre a inclusão de  $x$  no conjunto. Essa sobreposição não ocorre na teoria clássica, em que os conjuntos são mutuamente excludentes.

**Definição 2.14.** Os subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  de  $U$  são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é, se  $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$  para todo  $x \in U$ .

**Proposição 2.15.** *As operações entre subconjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) *Involução:*

$$(A')' = A.$$

(2) *Comutatividade:*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

(3) *Associatividade:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

(4) *Distributividade:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(5) *Idempotência:*

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

(6) *Absorção por  $U$  e por  $\emptyset$ :*

$$A \cup U = U, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

(7) *Identidade:*

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap U = A.$$

(8) *Leis de De Morgan:*

$$(A \cap B)' = A' \cup B', \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  funções fuzzy cujos valores estão em  $\mathbb{R}$ . As operações de máximo e mínimo entre essas funções podem ser representadas pelas seguintes expressões:

$$\max\{\varphi(x), \psi(x)\} = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) + |\varphi(x) - \psi(x)|],$$

$$\min[\varphi(x), \psi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)|].$$

A partir dessas definições, é possível demonstrar que as operações de união, interseção e complemento atendem às propriedades apresentadas na Proposição 2.15.

(1)  $(A')' = A$

*Demonstração.* Pela definição temos:

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi_{(A')'}(x) &= 1 - \varphi_{A'}(x) \\ &= 1 - (1 - \varphi_A(x)) \\ &= 1 - 1 + \varphi_A(x) \\ &= \varphi_A(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $(A')' = A$ . ■

(2) (a)  $A \cup B = B \cup A$

*Demonstração.* Pela definição de união temos:

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \quad x \in U$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_{A \cup B}(x) &= \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|] \\ &= \frac{1}{2}[\varphi_B(x) + \varphi_A(x) + |\varphi_B(x) - \varphi_A(x)|] \\ &= \max\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} \\ &= \varphi_{B \cup A}(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $A \cup B = B \cup A$ . ■

(b)  $A \cap B = B \cap A$

*Demonstração.* Pela definição de intersecção temos:

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \quad x \in U$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_{A \cap B}(x) &= \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|] \\ &= \frac{1}{2}[\varphi_B(x) + \varphi_A(x) - |\varphi_B(x) - \varphi_A(x)|] \\ &= \min\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} \\ &= \varphi_{B \cap A}(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $A \cap B = B \cap A$ . ■

$$(3) \text{ (a) } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

*Demonstração.* Compreende-se que:

$$\begin{aligned} \varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x)\} \\ &= \max\{\varphi_A(x), \max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\}. \end{aligned}$$

Pelo outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) &= \max\{\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \max\{\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \varphi_C(x)\}. \end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

- (i)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$ ;
- (ii)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$ ;
- (iii)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$ ;
- (iv)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$ ;
- (v)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ ;
- (vi)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$ .

A demonstração será feita para o primeiro caso; os demais são semelhantes.

Para (i) temos:

$$\begin{aligned} \varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x)\} \\ &= \max\{\varphi_A(x), \max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\} \\ &= \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \varphi_C(x), \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) &= \max\{\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \max\{\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \varphi_C(x)\} \\ &= \max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \varphi_C(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ . ■

$$(b) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

*Demonstração.* Compreende-se que:

$$\begin{aligned}\varphi_{\{A \cap B\} \cap C}(x) &= \min\{\varphi_{A \cap B}(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \min\{\min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \varphi_C(x)\}.\end{aligned}$$

Pelo outro lado,

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cap \{B \cap C\}}(x) &= \min\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)\} \\ &= \min\{\varphi_A(x), \min\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\}.\end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

- (i)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$ ;
- (ii)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$ ;
- (iii)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$ ;
- (iv)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$ ;
- (v)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ ;
- (vi)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$ .

A demonstração será feita para o primeiro caso; os demais são semelhantes.

Para (i) temos:

$$\begin{aligned}\varphi_{(A \cap B) \cap C}(x) &= \min\{\varphi_{A \cap B}(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \min\{\min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \varphi_C(x)\} \\ &= \min\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \varphi_A(x),\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cap (B \cap C)}(x) &= \min\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)\} \\ &= \min\{\varphi_A(x), \min\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\} \\ &= \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ . ■

$$(4) \text{ (a) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

*Demonstração.* Sabendo que:

$$\varphi_{A \cup (B \cap C)}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)\}$$

$$= \max \{ \varphi_A(x), \min \{ \varphi_B(x), \varphi_C(x) \} \}.$$

Pelo outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) &= \min \{ \varphi_{A \cup B}(x), \varphi_{A \cup C}(x) \} \\ &= \min \{ \max \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, \max \{ \varphi_A(x), \varphi_C(x) \} \}. \end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

- (i)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$ ;
- (ii)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$ ;
- (iii)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$ ;
- (iv)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$ ;
- (v)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ ;
- (vi)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$ .

A demonstração será feita para o primeiro caso; os demais são semelhantes.

Para (i) temos:

$$\begin{aligned} \varphi_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \max \{ \varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x) \} \\ &= \max \{ \varphi_A(x), \min \{ \varphi_B(x), \varphi_C(x) \} \} \\ &= \max \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \} \\ &= \varphi_B(x), \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \varphi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) &= \min \{ \varphi_{A \cup B}(x), \varphi_{A \cup C}(x) \} \\ &= \min \{ \max \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, \max \{ \varphi_A(x), \varphi_C(x) \} \} \\ &= \min \{ \varphi_B(x), \varphi_C(x) \} \\ &= \varphi_B(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . ■

$$(b) \ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \varphi_{A \cap (B \cup C)}(x) &= \min \{ \varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x) \} \\ &= \min \{ \varphi_A(x), \max \{ \varphi_B(x), \varphi_C(x) \} \}. \end{aligned}$$

Pelo outro lado

$$\begin{aligned}\varphi_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x) &= \max \{ \varphi_{A \cap B}(x), \varphi_{A \cap C}(x) \} \\ &= \max \{ \min \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, \min \{ \varphi_A(x), \varphi_C(x) \} \}.\end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

- (i)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$ ;
- (ii)  $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$ ;
- (iii)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$ ;
- (iv)  $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$ ;
- (v)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ ;
- (vi)  $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$ .

A demonstração será feita para o primeiro caso; os demais são semelhantes.

Para (i) temos:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cap (B \cup C)}(x) &= \min \{ \varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x) \} \\ &= \min \{ \varphi_A(x), \max \{ \varphi_B(x), \varphi_C(x) \} \} \\ &= \min \{ \varphi_A(x), \varphi_C(x) \} \\ &= \varphi_A(x),\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}\varphi_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x) &= \max \{ \varphi_{A \cap B}(x), \varphi_{A \cap C}(x) \} \\ &= \max \{ \min \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, \min \{ \varphi_A(x), \varphi_C(x) \} \} \\ &= \max \{ \varphi_A(x), \varphi_A(x) \} \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . ■

(5) (a)  $A \cup A = A$

*Demonstração.* Sabendo que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup A}(x) &= \max \{ \varphi_A(x), \varphi_A(x) \} \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $A \cup A = A$ . ■

$$(b) A \cap A = A$$

*Demonstração.* Sabendo que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cap A}(x) &= \min \{ \varphi_A(x), \varphi_A(x) \} \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $A \cap A = A$ . ■

$$(6) (a) A \cup U = U$$

*Demonstração.* Sabendo que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup U}(x) &= \max \{ \varphi_A(x), \varphi_U(x) \} \\ &= \max \{ \varphi_A(x), 1 \} \\ &= 1 \\ &= \varphi_U(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $A \cup U = U$ . ■

$$(b) A \cap \emptyset = \emptyset$$

*Demonstração.* Sabendo que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cap \emptyset}(x) &= \min \{ \varphi_A(x), \varphi_{\emptyset}(x) \} \\ &= \min \{ \varphi_A(x), 0 \} \\ &= 0 \\ &= \varphi_{\emptyset}(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ . ■

$$(7) (a) A \cup \emptyset = A$$

*Demonstração.* Sabendo que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup \emptyset}(x) &= \max \{ \varphi_A(x), \varphi_{\emptyset}(x) \} \\ &= \max \{ \varphi_A(x), 0 \} \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $A \cup \emptyset = A$ . ■

$$(b) A \cap U = A$$

*Demonstração.* Sabendo que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cap U}(x) &= \min \{ \varphi_A(x), \varphi_U(x) \} \\ &= \min \{ \varphi_A(x), 1 \} \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $A \cap U = A$ . ■

$$(8) (a) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

*Demonstração.* Pelas definições de complemento, intersecção e união temos:

$$\begin{aligned}\varphi_{A' \cup B'}(x) &= \max \{ \varphi_{A'}(x), \varphi_{B'}(x) \} \\ &= \frac{1}{2} [ \varphi_{A'}(x) + \varphi_{B'}(x) + | \varphi_{A'}(x) - \varphi_{B'}(x) | ] \\ &= \frac{1}{2} [ 1 - \varphi_A(x) + 1 - \varphi_B(x) + | (1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x)) | ] \\ &= \frac{1}{2} [ 2 - \varphi_A(x) - \varphi_B(x) + | -\varphi_A(x) + \varphi_B(x) | ] \\ &= \frac{1}{2} [ 2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - | -\varphi_A(x) + \varphi_B(x) |) ] \\ &= \frac{1}{2} [ 2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - | \varphi_A(x) - \varphi_B(x) |) ] \\ &= 1 - \frac{1}{2} [ (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - | \varphi_A(x) - \varphi_B(x) |) ] \\ &= 1 - \min \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \} \\ &= 1 - \varphi_{A \cap B}(x) \\ &= \varphi_{(A \cap B)'}(x).\end{aligned}$$

Portanto,  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ . ■

$$(b) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

*Demonstração.* Pelas definições de complemento, intersecção e união temos:

$$\begin{aligned}\varphi_{A' \cup B'}(x) &= \min \{ \varphi_{A'}(x), \varphi_{B'}(x) \} \\ &= \frac{1}{2} [ \varphi_{A'}(x) + \varphi_{B'}(x) - | \varphi_{A'}(x) - \varphi_{B'}(x) | ] \\ &= \frac{1}{2} [ 1 - \varphi_A(x) + 1 - \varphi_B(x) - | (1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x)) | ] \\ &= \frac{1}{2} [ 2 - \varphi_A(x) - \varphi_B(x) - | -\varphi_A(x) + \varphi_B(x) | ]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ 2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ 2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|) \right] \\
&= 1 - \frac{1}{2} \left[ (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|) \right] \\
&= 1 - \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \\
&= 1 - \varphi_{A \cup B}(x) \\
&= \varphi_{(A \cup B)'}(x).
\end{aligned}$$

Portanto,  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ . ■

## 2.4 Operações t-norma e t-conorma

Os primeiros passos em lógica matemática envolvem o estudo dos conectivos “e”, “ou”, “não” e “implicação”. Esses conectivos são amplamente utilizados na modelagem matemática de sentenças condicionais, como no exemplo:

$$\overbrace{\underbrace{\text{“Se } a \text{ está em } A \text{ e } b \text{ está em } B\text{”}}_p}^P, \text{ então } \overbrace{\underbrace{\text{“} c \text{ está em } C \text{ ou } d \text{ não está em } D\text{”}}_r}^Q.$$

Tal sentença pode ser avaliada logicamente com base nos valores dos conectivos. Como os conjuntos mencionados são, a princípio, conjuntos clássicos, essa avaliação assume apenas os valores 0 ou 1, dependendo se cada elemento pertence ou não ao conjunto correspondente.

Pensando no caso fuzzy, observamos que o valor lógico da sentença  $p$ : “ $a$  está em  $A$ ” coincide com o valor da função característica do conjunto  $A$  aplicada ao elemento  $a$ , ou seja, o valor de  $p$  é dado por  $\chi_A(a)$ . Da mesma forma,  $\chi_B(b)$  fornece o valor lógico de  $q$ : “ $b$  está em  $B$ ”, e  $\chi_C(c)$  fornece o valor lógico de  $r$ : “ $c$  está em  $C$ ”. Já a negação “ $d$  não está em  $D$ ” pode ser representada por  $1 - \chi_D(d)$ , que corresponde à negação do valor lógico clássico da sentença.

No contexto fuzzy, substituímos as funções características  $\chi$  pelas funções de pertinência  $\varphi$ , o que permite que os valores das sentenças não sejam apenas 0 ou 1, mas sim qualquer valor no intervalo  $[0, 1]$ , refletindo a intensidade ou grau com que cada proposição é verdadeira.

Para realizar a avaliação lógica dos conectivos no sentido fuzzy, devemos estendê-los. Tais extensões são obtidas por meio das normas e conormas triangulares.

As normas e conormas triangulares são generalizações dos operadores união e intersecção. Serão definidas a seguir.

**Definição 2.16. (t-norma).** O operador  $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ,  $\Delta(x, y) = x \Delta y$ , é uma *t-norma*, se satisfizer as seguintes condições:

- $t_1$ ) elemento neutro:  $\Delta(1, x) = 1 \Delta x = x$ ;
- $t_2$ ) comutativa:  $\Delta(x, y) = x \Delta y = y \Delta x = \Delta(y, x)$ ;
- $t_3$ ) associativa:  $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$ ;
- $t_4$ ) monotonicidade: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \Delta y \leq u \Delta v$ .

A operação  $t$ -norma estende o operador  $\wedge$  que modela o conectivo “e”.

**Exemplo 2.17.** Consideremos o operador

$$\Delta(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y.$$

$\Delta$  é um exemplo para  $t$ -norma.

*Demonstração.* 1)  $\Delta(1, x) = 1 \wedge x = \min\{1, x\} = x$ , pois  $x \in [0, 1]$ .

Logo, satisfaz a condição de elemento neutro.

2)  $\Delta(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\} = \min\{y, x\} = y \wedge x = \Delta(y, x)$ .

Logo, é comutativa.

3)  $x \Delta (y \Delta z) = x \wedge (y \wedge z) = \min\{x, \min\{y, z\}\}$ .

Por outro lado, tem-se:

$$(x \Delta y) \Delta z = (x \wedge y) \wedge z = \min\{\min\{x, y\}, z\}.$$

Considerando os seguintes casos:

- i)  $x \leq y \leq z$ ;
- ii)  $x \leq z \leq y$ ;
- iii)  $y \leq x \leq z$ ;
- iv)  $y \leq z \leq x$ ;
- v)  $z \leq x \leq y$ ;
- vi)  $z \leq y \leq x$ .

A demonstração será feita para o primeiro caso; os demais são semelhantes.

Para (i) temos:

$$\begin{aligned} x \Delta (y \Delta z) &= x \wedge (y \wedge z) \\ &= \min\{x, \min\{y, z\}\} \\ &= \min\{x, y\} \\ &= x, \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
 (x \triangle y) \triangle z &= (x \wedge y) \wedge z \\
 &= \min \{ \min \{ x, y \}, z \} \\
 &= \min \{ x, z \} \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

Logo, pela associatividade,  $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$ .

4) Para o caso “se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \triangle y \leq u \triangle v$ ”, analisa-se as seguintes possibilidades:

- i)  $x \leq y$  e  $u \leq v$ ;
- ii)  $x \leq y$  e  $v \leq u$ ;
- iii)  $y \leq x$  e  $u \leq v$ ;
- iv)  $y \leq x$  e  $v \leq u$ .

A demonstração será feita para o primeiro caso; os demais são semelhantes.

Para (i) temos:

$$\begin{aligned}
 \Delta(x, y) &= x \triangle y \\
 &= x \wedge y \\
 &= \min \{ x, y \} \\
 &= x,
 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
 \Delta(u, v) &= u \triangle v \\
 &= u \wedge v \\
 &= \min \{ u, v \} \\
 &= u.
 \end{aligned}$$

Como, por hipótese,  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , tem-se que  $x \triangle y \leq u \triangle v$  para cada caso.

Logo, se  $x \leq u$  e  $y \leq v$  então  $x \triangle y \leq u \triangle v$ .

Por (1), (2), (3) e (4), conclui-se que o operador  $\Delta(x, y) = \min \{ x, y \} = x \wedge y$  é um exemplo para t-norma. ■

**Definição 2.18. (t-conorma).** O operador  $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ,  $\nabla(x, y) = x \nabla y$ , é uma t-conorma, se satisfizer as seguintes condições:

- $c_1$ ) elemento neutro:  $\nabla(0, x) = 0 \nabla x = x$ ;

$c_2$ ) *comutativa*:  $\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$ ;

$c_3$ ) *associativa*:  $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$ ;

$c_4$ ) *monotonicidade*: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \nabla y \leq u \nabla v$ .

A operação *t-conorma* estende o operador  $\vee$  que modela o conectivo “ou”.

**Exemplo 2.19.** Consideremos o operador

$$\nabla(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y.$$

$\nabla$  é um exemplo para t-conorma.

*Demonstração.* 1)  $\nabla(0, x) = 0 \vee x = \max\{0, x\} = x$ , pois  $x \in [0, 1]$ .

Logo, satisfaz a condição de elemento neutro.

2)  $\nabla(x, y) = x \vee y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y \vee x = \nabla(y, x)$ .

Logo, é comutativa.

3)  $x \nabla (y \nabla z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\}$ .

Por outro lado, tem-se:

$$(x \nabla y) \nabla z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\}.$$

Considerando os seguintes casos:

i)  $x \leq y \leq z$ ;

ii)  $x \leq z \leq y$ ;

iii)  $y \leq x \leq z$ ;

iv)  $y \leq z \leq x$ ;

v)  $z \leq x \leq y$ ;

vi)  $z \leq y \leq x$ .

A demonstração será feita para o primeiro caso; os demais são semelhantes.

Para (i) temos:

$$\begin{aligned} x \nabla (y \nabla z) &= x \vee (y \vee z) \\ &= \max\{x, \max\{y, z\}\} \\ &= \max\{x, z\} \\ &= z, \end{aligned}$$

e:

$$(x \nabla y) \nabla z = (x \vee y) \vee z$$

$$\begin{aligned}
&= \max\{\max\{x, y\}, z\} \\
&= \max\{y, z\} \\
&= z.
\end{aligned}$$

Logo, pela associatividade,  $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$ .

4) Para o caso “se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \nabla y \leq u \nabla v$ ”, analisa-se as seguintes possibilidades:

- i)  $x \leq y$  e  $u \leq v$ ;
- ii)  $x \leq y$  e  $v \leq u$ ;
- iii)  $y \leq x$  e  $u \leq v$ ;
- iv)  $y \leq x$  e  $v \leq u$ .

A demonstração será feita para o primeiro caso; os demais são semelhantes.

Para (i) temos:

$$\begin{aligned}
\nabla(x, y) &= x \nabla y \\
&= x \vee y \\
&= \max\{x, y\} \\
&= y,
\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
\nabla(u, v) &= u \nabla v \\
&= u \vee v \\
&= \max\{u, v\} \\
&= v.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese,  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , tem-se que  $x \nabla y \leq u \nabla v$  para cada caso.

Logo, se  $x \leq u$  e  $y \leq v$  então  $x \nabla y \leq u \nabla v$ .

Por (1), (2), (3) e (4), conclui-se que o operador  $\nabla(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y$  é um exemplo para t-conorma. ■

## 2.5 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Um elemento  $x \in U$  pertence a uma classe quando seu grau de pertinência é maior ou igual a um valor limiar  $\alpha \in [0, 1]$ , que define essa classe. Esse conjunto clássico é chamado de  $\alpha$ -nível de  $A$  e é denotado por  $[A]^\alpha$ .

O conceito de  $\alpha$ -nível é uma maneira de identificar subconjuntos do conjunto universo por meio da restrição de seus graus de pertinência (Nicoletti; Camargo, 2011).

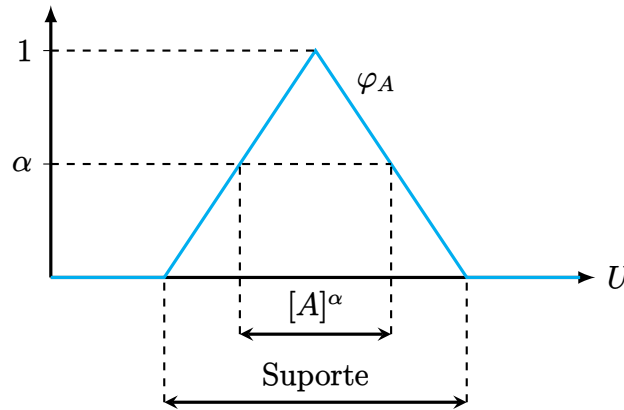
**Definição 2.20. ( $\alpha$ -nível).** Seja  $A$  um subconjunto definido em um conjunto universo  $U$  e qualquer valor  $\alpha \in ]0, 1]$ . O  $\alpha$ -nível de  $A$  é o subconjunto clássico de  $U$  definido por:

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

**Definição 2.21.** Seja  $A$  um subconjunto definido em um conjunto universo  $U$ , o  $\alpha$ -nível zero é definido como fecho do suporte de  $A$ , ou seja,  $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}$ .

**Exemplo 2.22.** O gráfico da Figura 8 representa o  $\alpha$ -nível e o suporte de um conjunto fuzzy  $A$  expresso por uma função de pertinência  $\varphi_A$ .

Figura 8 – Representação gráfica do  $\alpha$ -nível e do suporte de um conjunto fuzzy  $A$  expresso por uma função de pertinência  $\varphi_A$ .



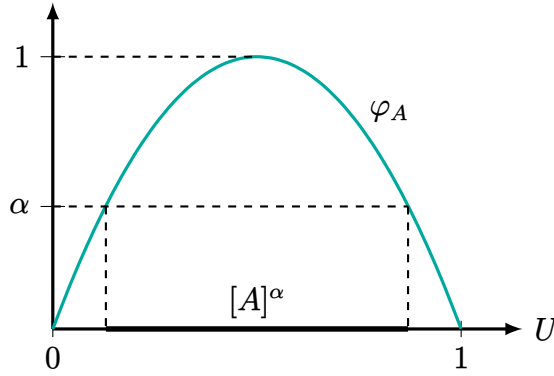
Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2021).

**Exemplo 2.23.** (Barros; Bassanezi, 2021). Sejam  $U = [0, 1]$  e  $A$  o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por  $\varphi_A(x) = 4(x - x^2)$ . Então,

$$\begin{aligned} A(x) &\geq \alpha \\ 4(x - x^2) &\geq \alpha \\ x - x^2 &\geq \frac{\alpha}{4} \\ -x^2 + x - \frac{\alpha}{4} &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolvendo para  $-x^2 + x - \frac{\alpha}{4} = 0$  temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-\frac{\alpha}{4})}}{2 \cdot (-1)} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \alpha}}{-2} \\ x &= \frac{1 \mp \sqrt{1 - \alpha}}{2} \\ x' &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}) \text{ ou } x'' = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}). \end{aligned}$$

Figura 9 –  $\alpha$ -níveis:  $[A]^\alpha$  e  $[A]^0 = U$ 

Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2021).

Logo,

$$-x^2 + x - \frac{\alpha}{4} \geq 0 \Rightarrow x \in \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right]$$

Assim,

$$[A]^\alpha = \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right] \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]$$

Observa-se que, se  $x \in [A]^\alpha$ , então  $x$  pertence ao conjunto fuzzy  $A$  com grau de pertinência maior ou igual a  $\alpha$ . Além disso, vale a seguinte propriedade:

$$\text{se } \alpha \leq \beta, \text{ então } [A]^\beta \subset [A]^\alpha.$$

O teorema a seguir mostra que a família de conjuntos clássicos  $[A]^\alpha$  é suficiente para determinar completamente o conjunto fuzzy  $A$ .

**Teorema 2.24.** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy do conjunto universo  $U$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $A = B$  é que  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .*

*Demonstração.* Tendo  $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Suponhamos que  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Se  $A \neq B$  então existe  $x \in U$  tal que  $\varphi_A(x) \neq \varphi_B(x)$ . Logo, temos que  $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$  ou  $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$ . Supondo  $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$ , podemos concluir que  $x \in [A]^{\varphi_A(x)}$  e  $x \notin [B]^{\varphi_B(x)}$  e, portanto,  $[A]^{\varphi_A(x)} \neq [B]^{\varphi_B(x)}$ , o que contradiz a hipótese  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . De maneira análoga chegamos a uma contradição se admitirmos que  $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ . ■

De acordo com Barros e Bassanezi (2021), uma consequência deste teorema é a relação existente entre a função de pertinência de um subconjunto fuzzy e as funções características de seus  $\alpha$ -níveis.

**Corolário 2.25.** *A função de pertinência  $\varphi_A$  de um conjunto fuzzy  $A$  pode ser expressa em termos de funções características de seus  $\alpha$ -níveis, isto é,*

$$\varphi_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min[\alpha, \chi_{[A]^\alpha}(x)], \text{ onde } \chi_{[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [A]^\alpha \\ 0, & \text{se } x \notin [A]^\alpha \end{cases}.$$

**Definição 2.26.** Um subconjunto fuzzy é dito *normal* se todos seus  $\alpha$ -níveis forem não vazios, ou seja, se  $[A]^\alpha \neq \emptyset$ .

Vale ressaltar que o suporte do subconjunto fuzzy  $A$  é o conjunto clássico

$$\text{supp } A = \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\},$$

podendo descrever  $A$  com equação:

$$A = \varphi_A(x_1)/x_1 + \varphi_A(x_2)/x_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/x_i,$$

quando o subconjunto fuzzy  $A$  tem suporte enumerável, e

$$A = \varphi_A(x_1)/x_1 + \varphi_A(x_2)/x_2 + \dots + \varphi_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \varphi_A(x_i)/x_i,$$

se  $A$  tem suporte finito, ou seja,  $\text{supp } A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

É importante destacar que a notação  $\varphi_A(x_i)/x_i$  não representa uma divisão. Trata-se apenas de uma forma simbólica de associar cada elemento  $x_i$  do conjunto ao seu respectivo grau de pertinência  $\varphi_A(x_i)$ . Da mesma forma, o símbolo “+” nessa notação não indica uma soma real, e o símbolo  $\sum$  não deve ser interpretado como um somatório no sentido tradicional. Essa notação serve apenas como uma maneira de representar, de forma compacta, os elementos de  $U$  que pertencem ao conjunto fuzzy  $A$ , juntamente com seus respectivos graus de pertinência.

**Exemplo 2.27.** Seja  $A$  o subconjunto fuzzy dos reais dado por

$$A = \sum_{i=1}^6 \varphi_A(x_i)/x_i = 0,05/0 + 0,30/2 + 0,55/3 + 0,60/4 + 0,80/7 + 1/9.$$

Então, o complementar fuzzy é

$$A' = \sum_{i=1}^6 [1 - \varphi_A(x_i)]/x_i = 0,95/0 + 0,70/2 + 0,45/3 + 0,40/4 + 0,20/7 + 0/9.$$

Para  $\alpha = 0,6$ , temos

$$[A]^{0,6} = \{x_i : \varphi_A(x_i) \geq 0,6\} = \{4, 7, 9\}, \quad [A']^{0,6} = \{x_i : 1 - \varphi_A(x_i) \geq 0,6\} = \{0, 2\}.$$

## 2.6 Convexidade de Conjuntos Fuzzy

Uma propriedade estrutural de grande relevância para as aplicações práticas dos conjuntos fuzzy, que fundamenta diretamente a ampla utilização das funções de pertinência triangular e trapezoidal, é a convexidade. No contexto fuzzy, essa propriedade pode ser caracterizada de forma equivalente por meio dos seus  $\alpha$ -cortes ou, alternativamente, por uma condição imposta diretamente à função de pertinência associada ao conjunto.

**Definição 2.28** (Convexidade por  $\alpha$ -cortes). Um conjunto fuzzy  $A$ , definido em um universo  $X$ , é dito convexo se, e somente se, todos os seus  $\alpha$ -cortes

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \varphi_A(x) \geq \alpha\}$$

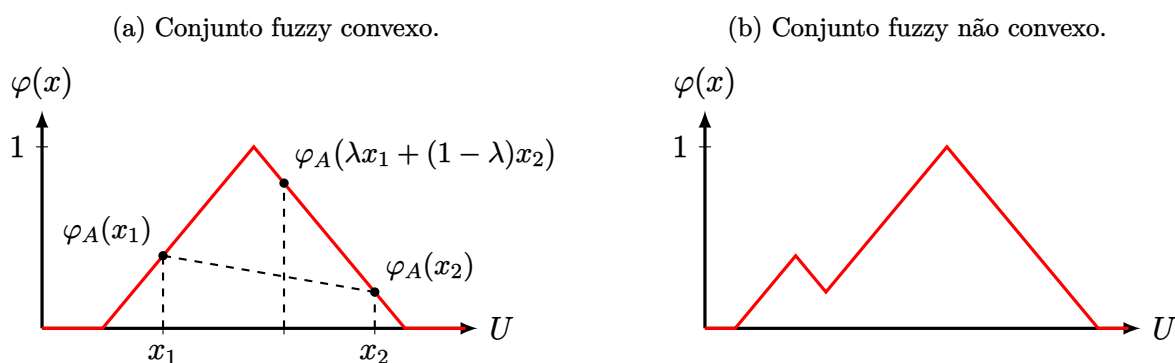
são conjuntos clássicos convexos, para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .

**Definição 2.29** (Convexidade por combinação convexa). Um conjunto fuzzy  $A$  é convexo se, e somente se, para quaisquer  $x_1, x_2 \in X$  e para todo  $\lambda \in [0, 1]$ , vale a desigualdade

$$\varphi_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\varphi_A(x_1), \varphi_A(x_2)\}. \quad (2.1)$$

A Definição 2.28 estabelece que a convexidade fuzzy decorre da convexidade clássica de cada um dos seus  $\alpha$ -cortes. Por sua vez, a Definição 2.29 fornece um critério direto em termos da função de pertinência, segundo o qual o valor de  $\varphi_A(x)$  em qualquer ponto do segmento que liga  $x_1$  e  $x_2$  deve ser maior ou igual ao menor dos valores assumidos nas extremidades. Geometricamente, essa propriedade é ilustrada na Figura 10a, enquanto a violação dessa condição, caracterizada pela presença de reentrâncias ou vales no gráfico da função de pertinência, é apresentada na Figura 10b.

Figura 10 – Convexidade em conjuntos fuzzy.



Fonte: Adaptado de Zadeh (1965).

A principal implicação prática da convexidade é a garantia de consistência semântica. Se dois elementos  $x_1$  e  $x_2$  pertencem a um conceito fuzzy, como Temperatura Agradável, com determinados graus de pertinência, qualquer situação intermediária também deverá pertencer a esse conceito com um grau não inferior ao menor dos valores atribuídos às

extremidades. Tal comportamento está de acordo com a interpretação natural de conceitos graduais.

Diante dessas características, as funções de pertinência triangular e trapezoidal mostram-se especialmente adequadas para a modelagem de conceitos imprecisos. Por serem inerentemente convexas, essas funções garantem que todos os  $\alpha$ -cortes correspondentes sejam intervalos fechados da reta real, assegurando a propriedade da convexidade e conferindo robustez matemática e aderência intuitiva aos conjuntos fuzzy assim definidos.

## 2.7 O Princípio de Extensão

O método de extensão proposto por Zadeh, conhecido como *Princípio de Extensão*, é uma das ideias fundamentais que permite estender conceitos matemáticos clássicos para o contexto fuzzy. Nesta perspectiva, uma função  $f : X \rightarrow Z$  tem como objetivo indicar como dever ser a imagem de um subconjunto fuzzy  $A$  de  $X$  por meio de  $f$  (Barros; Bassanezi, 2021).

**Definição 2.30.** Sejam  $f$  uma função tal que  $f : X \rightarrow Z$  e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . A *extensão de Zadeh* de  $f$  é a função  $\hat{f}$  que, aplicada a  $A$ , fornece o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

em que  $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$  é denominado de *pré-imagem* de  $z$ .

De acordo com Jafelice, Barros e Bassanezi (2012), o princípio de extensão pode ser descrito da seguinte forma:

- O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem.
- Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo sup dos graus de pertinência dos valores de entrada.

**Teorema 2.31.** Sejam  $f : X \rightarrow Z$  uma função contínua e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . Então, para todo  $\alpha \in [0, 1]$  vale

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha).$$

Esse resultado mostra que os  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy, obtidos por meio do Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos  $\alpha$ -níveis pela função crisp correspondente (ver Figura 11).

**Exemplo 2.32.** (Barros; Bassanezi, 2021). Considere o subconjunto fuzzy  $A$  de números reais cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0, 1] \end{cases}.$$

Os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são os intervalos

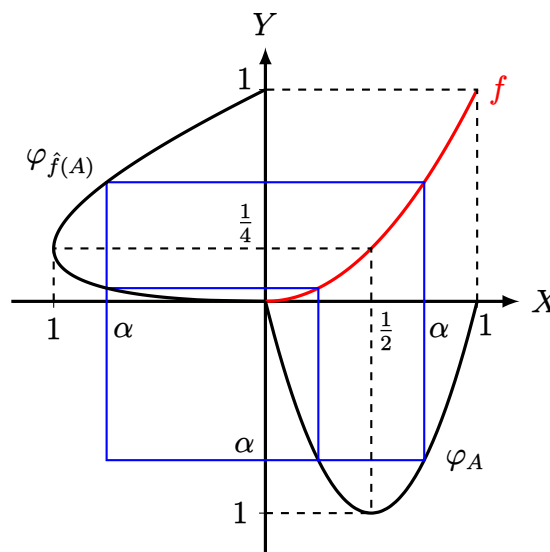
$$[A]^\alpha = \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right].$$

Considerando a função real  $f(x) = x^2$  para  $x \geq 0$ . Como  $f$  é crescente, temos

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= \left[ f\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha})\right), f\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha})\right) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right]. \end{aligned}$$

Temos que o princípio de extensão de  $f$  aplicada a  $A$ , é o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ , representado pela Figura 11.

Figura 11 – Subconjunto  $\hat{f}(A)$  do Exemplo 2.32.



Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2021).

**Exemplo 2.33.** Seja  $A = 0, 2/1 + 0, 5/3 + 0, 6/4 + 0, 8/6 + 1/7$  um subconjunto fuzzy e considere a função  $f(x) = 2x + 1$ .

Aplicando o Princípio de Extensão de  $f$  em  $A$ , obtemos o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ :

- para  $x = 1$ , temos  $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ , logo  $0, 2/3$ ;
- para  $x = 3$ , temos  $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ , logo  $0, 5/7$ ;
- para  $x = 4$ , temos  $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ , logo  $0, 6/9$ ;

- para  $x = 6$ , temos  $f(6) = 2 \cdot 6 + 1 = 13$ , logo  $0,8/13$ ;
- para  $x = 7$ , temos  $f(7) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ , logo  $1/15$ .

Portanto,

$$\hat{f}(A) = 0,2/3 + 0,5/7 + 0,6/9 + 0,8/13 + 1/15.$$

Concluída a discussão das bases teóricas deste capítulo, avançamos para as equações relacionais fuzzy, que ampliam as possibilidades de modelagem ao representar dependências entre variáveis.

## 3 Equações Relacionais Fuzzy

O estudo de associações, relações ou interações entre elementos de diferentes classes é essencial para a análise e compreensão de diversos fenômenos do mundo real. As relações fuzzy surgem como uma extensão natural das relações matemáticas clássicas, oferecendo uma abordagem mais flexível para lidar com situações que envolvem incerteza ou gradação nas associações.

Serão apresentados, ao longo deste capítulo, os principais conceitos relacionados às Relações Fuzzy e às Equações Relacionais Fuzzy. As principais referências utilizadas foram Barros e Bassanezi (2021), Nicoletti e Camargo (2011), Pissini (2019), Belucci (2009) e Marins (2016).

### 3.1 Relações Fuzzy

O conceito de relação fuzzy generaliza a relação clássica (crisp) ao permitir que, em vez de uma associação ser simplesmente existente ou não, ela seja representada por um valor no intervalo  $[0, 1]$ , indicando o grau com que essa associação ocorre entre os elementos.

**Definição 3.1.** Uma *relação fuzzy*  $\mathcal{R}$  sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  é qualquer subconjunto fuzzy de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ . Assim, uma relação fuzzy  $\mathcal{R}$  é definida por uma função de pertinência  $\varphi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$ .

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos  $U_1$  e  $U_2$ , a relação é chamada de fuzzy binária sobre  $U_1 \times U_2$ .

**Definição 3.2.** O *produto cartesiano fuzzy* dos subconjuntos fuzzy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , respectivamente, é a relação fuzzy  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde  $\wedge$  representa o mínimo.

**Exemplo 3.3** (Barros; Bassanezi, 2021). Suponha que o conjunto universo  $U$  seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam  $A$  e  $B$  os subconjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e mialgia, respectivamente. Considere a Tabela 1 que relaciona os diagnósticos de cinco pacientes com os sintomas.

Tabela 1 – Relação entre os diagnósticos de cinco pacientes com dois sintomas, febre e mialgia.

Paciente	$F$ : Febre	$M$ : Mialgia
1	0,7	0,6
2	1,0	1,0
3	0,4	0,2
4	0,5	0,5
5	1,0	0,2

Fonte: (Barros; Bassanezi, 2021).

Para diagnosticar um paciente, o médico parte da análise de certos sintomas (ou sinais) que são característicos de cada doença. Muitas doenças podem apresentar sintomas como febre e mialgia, com diferentes intensidades e formas de avaliação. No caso da gripe, por exemplo, o paciente pode apresentar tanto febre quanto mialgia, e esses sintomas, quando representados por subconjuntos fuzzy, devem ter universos distintos. O universo da febre pode ser composto pelas temperaturas corporais possíveis, enquanto a mialgia pode ser avaliada pelo número de regiões doloridas.

Para determinar o grau com que um indivíduo tem gripe, consideramos seu grau de pertencimento ao conjunto fuzzy da febre e ao conjunto da mialgia. O paciente 1 da Tabela 1, por exemplo, apresenta uma temperatura  $x$  cuja pertinência ao conjunto fuzzy da febre  $F$  é  $\varphi_F(x) = 0,7$ , e uma intensidade de mialgia  $y$  com  $\varphi_M(y) = 0,6$ . O diagnóstico fuzzy para gripe desse paciente é dado por:

$$\text{Paciente 1 : } \varphi_{\text{gripe}}(x, y) = \varphi_F(x) \wedge \varphi_M(y) = 0,7 \wedge 0,6 = 0,6.$$

Isso significa que o paciente 1 pertence ao subconjunto fuzzy das pessoas com febre e mialgia com grau de pertinência igual a 0,6, valor que também representa seu grau de diagnóstico para gripe.

A partir desse resultado, o especialista pode utilizar esse número como apoio na tomada de decisão sobre o tratamento mais adequado.

## 3.2 Formas de Representação e Propriedades das Relações Binárias

Nesta seção serão destacadas algumas formas de representação e algumas propriedades das relações binárias e fuzzy binárias.

Sejam  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  e  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  e a relação fuzzy  $\mathcal{R}$  definida em  $X \times Y$ , com a função de pertinência dada por  $\varphi_{\mathcal{R}}(x_i, y_j) = r_{ij}$ , para  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . As representações de  $\mathcal{R}$  podem ser na forma de tabela ou de matriz.

$$\begin{array}{c|cccc}
 \mathcal{R} & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\
 \hline
 x_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\
 x_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 x_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn}
 \end{array}
 \quad \text{ou} \quad
 \mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.4.** (Barros; Bassanezi, 2021). Suponhamos um determinado ecossistema  $U$ , no qual interagem as populações de *águias* ( $a$ ), *cobras* ( $c$ ), *insetos* ( $i$ ), *lebres* ( $l$ ) e *sapos* ( $s$ ). Um estudo de interesse, entre os indivíduos destas populações, é o processo de predação, isto é, a relação do tipo *presa-predador*.

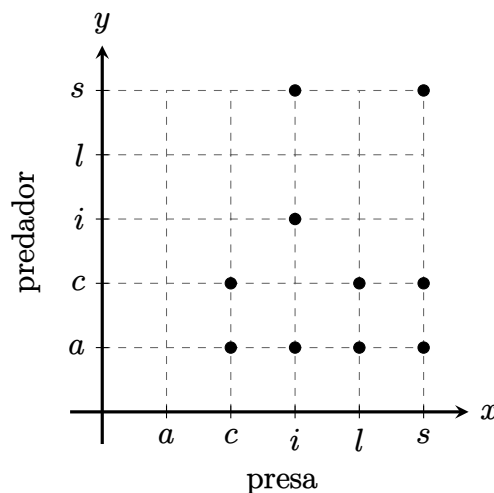
Se desejamos estudar a relação entre dois indivíduos deste ecossistema, esta relação pode ser modelada matematicamente por uma *relação binária*  $\mathcal{R}$ , com  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) = 0$  se  $y$  não é predador de  $x$  e  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) \neq 0$  se  $y$  é predador de  $x$ , onde  $x$  e  $y$  representam indivíduos do conjunto  $U$ .

Se o interesse sobre a relação for apenas indicar quem é predador e quem é presa neste conjunto  $U$ , então podemos optar pela teoria clássica e  $\mathcal{R}$  será uma relação binária clássica. Nesse caso,

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) = \chi_{\mathcal{R}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \text{ for predador de } x \\ 0 & \text{se } y \text{ não for predador de } x \end{cases}.$$

Uma representação gráfica para esta relação, colocando os animais em ordem alfabética em um par de eixos, seria como a da Figura 12.

Figura 12 – Representação da relação clássica entre os predadores e suas presas.

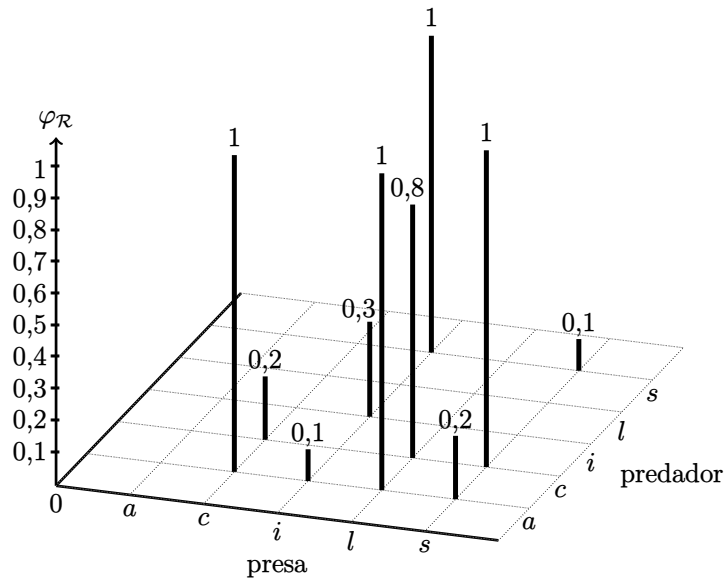


Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2021).

Os pontos destacados na Figura 12 indicam os pares que fazem parte da relação  $\mathcal{R}$ , ou seja, a relação  $\mathcal{R}$  simplesmente revela quem é predador de quem, de acordo com algum especialista.

Se houver interesse em saber, por exemplo, a preferência graduada de um predador por alguma presa na comunidade  $U$ , então uma boa opção é que  $\mathcal{R}$  seja uma relação fuzzy. Neste caso,  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y)$  indica o grau com que  $y$  tem preferência por  $x$ . Supondo que não haja diferença nos graus de predação dentro de cada espécie, uma possibilidade para  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y)$ , também de acordo com um especialista, para este exemplo, está ilustrada na Figura 3.2, onde no terceiro eixo (eixo vertical) estão representados os diversos graus  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y)$ .

Figura 13 – Relação fuzzy e os diversos graus de pertinência.



Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2021).

As representações na forma de tabela e matricial da relação fuzzy são, respectivamente

		p r e d a d o r				
$\mathcal{R}$		a	c	i	l	s
p	a	0	0	0	0	0
r	c	1	0,2	0	0	0
e	i	0,1	0	0,3	0	1
s	l	1	0,8	0	0	0
a	s	0,2	1	0	0	0,1

e  $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 & 0 & 1 \\ 1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$ .

**Definição 3.5.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação fuzzy binária definida em  $X \times Y$ . A *relação fuzzy binária inversa*,  $\mathcal{R}^{-1}$ , definida em  $Y \times X$ , tem função de pertinência  $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}} : Y \times X \rightarrow [0, 1]$  dada por  $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x) = \varphi_{\mathcal{R}}(x, y)$ .

Nota-se que a matriz de  $\mathcal{R}^{-1}$  coincide com a transposta de  $\mathcal{R}$ , já que  $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x) = \varphi_{\mathcal{R}}(x, y)$ , e por esse motivo, muitos textos de Lógica Fuzzy utilizam o termo relação transposta no lugar de inversa (Pedrycz; Gomide, 1998).

Assim, se  $\mathcal{R}$  é a relação fuzzy do Exemplo 3.4, então a representação matricial de sua inversa  $\mathcal{R}^{-1}$  é dada pela sua transposta

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,1 & 1 & 0,2 \\ 1 & 0,2 & 0 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso,  $\mathcal{R}^{-1}$  indica que  $x$  é predado por  $y$ , enquanto  $\mathcal{R}$  representa que  $y$  é predador de  $x$ .

### 3.3 Composição entre Relações Fuzzy Binárias

**Definição 3.6.** Considere  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  duas relações fuzzy binárias em  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente. A composição  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  é uma relação fuzzy binária em  $U \times W$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}}(x, z) = \bigvee_{y \in V} [\Delta(\varphi_{\mathcal{R}}(x, y), \varphi_{\mathcal{S}}(y, z))],$$

onde  $\bigvee$  representa uma t-conorma e  $\Delta$  representa uma t-norma.

Quando os conjuntos  $U$ ,  $V$  e  $W$  são finitos, então a forma matricial da relação  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  pode ser obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto por uma t-norma e a soma por uma t-conorma.

Supõe-se que  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$  e que:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}.$$

Pela Definição 3.6, a relação fuzzy binária tem a forma matricial:

$$\mathcal{T} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mp} \end{bmatrix}_{m \times p},$$

onde

$$t_{ij} = \bigvee_{1 \leq k \leq n} [\Delta(\varphi_{\mathcal{R}}(u_i, v_k), \varphi_{\mathcal{S}}(v_k, w_j))] = \bigvee_{1 \leq k \leq n} [\Delta(r_{ik}, s_{kj})]. \quad (3.1)$$

A composição mais tradicional em Lógica Fuzzy é a composição  $[\max - \min]$ , que é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo.

Caso a relação binária da Equação 3.1 utilizasse a composição  $[\max - \min]$ , teríamos

$$t_{ij} = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, v_j))] = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(r_{ik}, s_{kj})]. \quad (3.2)$$

A seguir, será apresentada a Regra de Composição de Inferência, no qual será utilizada posteriormente em Equações Relacionais Fuzzy.

**Definição 3.7 (Regra de composição de inferência).** Sejam  $U$  e  $V$  dois conjuntos,  $\mathcal{F}(U)$  e  $\mathcal{F}(V)$  as classes dos subconjuntos fuzzy de  $U$  e  $V$  respectivamente, e  $\mathcal{R}$  uma relação binária sobre  $U \times V$ .

- (i) A relação  $\mathcal{R}$  define um funcional de  $\mathcal{F}(U)$  em  $\mathcal{F}(V)$  que, a cada elemento  $A \in \mathcal{F}(U)$ , faz corresponder o elemento  $B \in \mathcal{F}(V)$  cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \max_{x \in U} [\min(\varphi_{\mathcal{R}}(x, y), \varphi_A(x))]. \quad (3.3)$$

Essa composição é conhecida como regra de composição de inferência.

- (ii) A relação  $\mathcal{R}$  também define um funcional de  $\mathcal{F}(V)$  em  $\mathcal{F}(U)$  da seguinte forma: a cada  $B \in \mathcal{F}(V)$ , faz corresponder o elemento  $A \in \mathcal{F}(U)$  cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = \varphi_{\mathcal{R}^{-1}(B)}(x) = \max_{y \in V} [\min(\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x), \varphi_B(y))]. \quad (3.4)$$

$A$  é denominado imagem inversa de  $B$  por  $\mathcal{R}$ .

Pode-se notar que a fórmula (3.3) pode ser reescrita como

$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \max_{x \in U} [\min(\varphi_A(x), \varphi_{\mathcal{R}}(x, y))].$$

Assim, de acordo com a Definição 3.6,

$$B = \mathcal{R}(A) = A \circ \mathcal{R}.$$

De modo análogo, a fórmula (3.4) pode ser reescrita como

$$\varphi_A(x) = \varphi_{\mathcal{R}^{-1}(B)}(x) = \max_{y \in V} [\min(\varphi_B(y), \varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x))].$$

Assim,

$$A = \mathcal{R}^{-1}(B) = B \circ \mathcal{R}^{-1}.$$

**Definição 3.8.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação fuzzy binária sobre  $U$ , cuja função de pertinência é  $\varphi_{\mathcal{R}}$ . Então, para quaisquer  $x$  e  $y$  e  $z$  de  $U$ , a relação fuzzy  $\mathcal{R}$  é

- (i) *reflexiva* se  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, x) = 1$ ;

- (ii) *simétrica* se  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) = \varphi_{\mathcal{R}}(y, x)$ ;
- (iii) *transitiva* se  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, z) \geq \varphi_{\mathcal{R}}(x, y) \wedge \varphi_{\mathcal{R}}(y, z)$ , onde  $\wedge = \text{mínimo}$ ;
- (iv) *antissimétrica* se  $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) > 0$  e  $\varphi_{\mathcal{R}}(y, x) > 0$ , implica que  $x = y$ .

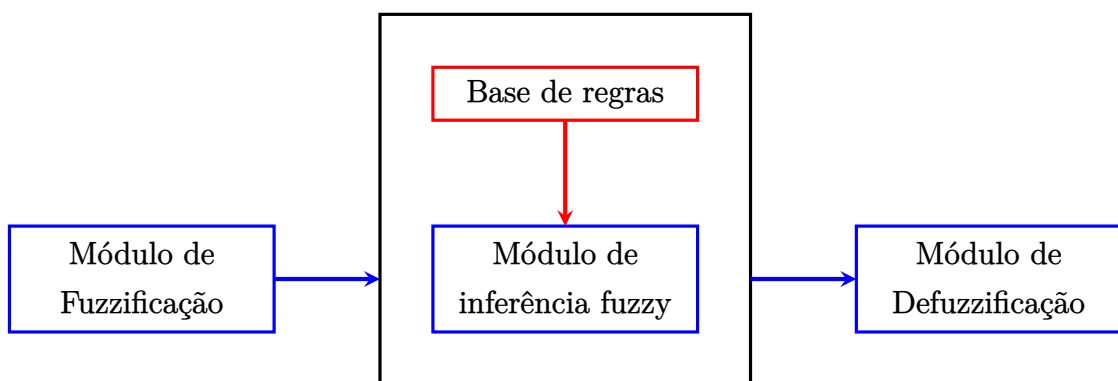
A relação reflexiva é aquela em que todo indivíduo tem relação máxima consigo próprio; a simétrica é caracterizada pela reciprocidade, com mesma intensidade, entre seus indivíduos; a transitiva indica que a relação entre dois indivíduos quaisquer não deve ser, simultaneamente, inferior à relação de cada um destes dois com os demais e a relação antissimétrica é aquela que não admite qualquer reciprocidade entre indivíduos distintos (Barros; Bassanezi, 2021).

As relações fuzzy, discutidas anteriormente, fornecem o fundamento conceitual para a modelagem de imprecisão. Este arcabouço teórico será agora aplicado na construção e análise de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF), mecanismos nos quais o conhecimento é formalizado em regras condicionais para suporte à decisão.

## 4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Os sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF) permitem representar o conhecimento humano por meio de regras linguísticas do tipo “se... então...”, possibilitando a modelagem de sistemas capazes de lidar com incertezas. Essa abordagem é aplicada em diferentes áreas, como controle, diagnóstico e tomada de decisão. Ao longo deste capítulo, serão apresentados os principais módulos que compõem um SBRF, bem como os métodos empregados em cada etapa de seu funcionamento.

Um SBRF é estruturado em quatro componentes principais: o processador de entrada, responsável pela fuzzificação dos dados; a base de regras, formada por um conjunto de regras fuzzy; a máquina de inferência, que realiza o raciocínio fuzzy; e o processador de saída, encarregado da defuzzificação e da geração do resultado final em forma de número real. Esses módulos operam de forma integrada, garantindo a transformação das informações de entrada em resultados consistentes, como ilustrado a seguir.



Fonte: (Barros; Bassanezi, 2021).

Ao longo deste capítulo, serão discutidos os fundamentos teóricos que sustentam o funcionamento dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, com ênfase na estruturação dos módulos, nos métodos de inferência e nos procedimentos de transformação dos dados. As principais referências utilizadas foram Barros e Bassanezi (2021), Nicoletti e Camargo (2011), Peixoto (2005), Belucci (2009), Silva (2020) e Lunetta (2023), que oferecem fundamentos sólidos para compreender o desenvolvimento e a aplicação de modelos fuzzy em diferentes contextos.

### 4.1 Módulo de fuzzificação

Este é o estágio em que as entradas do sistema são representadas por conjuntos fuzzy definidos sobre seus respectivos domínios. Nesse momento, destaca-se a importância da participação de especialistas no fenômeno a ser modelado, pois, com base em seu

conhecimento, são construídas as funções de pertinência para cada conjunto fuzzy envolvido. Mesmo que os dados de entrada sejam do tipo crisp, eles são convertidos em valores fuzzy por meio das respectivas funções de pertinência.

## 4.2 Módulo da base de regras

Este módulo pode ser considerado parte do “núcleo” do controlador fuzzy. Ele é composto por proposições fuzzy, descritas por meio de regras linguísticas do tipo:

$$\begin{array}{l} \text{Se } x_1 \text{ é } A_1 \text{ e } x_2 \text{ é } A_2 \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_n \\ \text{Então } u_1 \text{ é } B_1 \text{ e } u_2 \text{ é } B_2 \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_m \end{array}$$

Essas regras são formuladas com base no conhecimento de especialistas. É nesse estágio que as variáveis e suas classificações linguísticas são identificadas e, em seguida, modeladas por conjuntos fuzzy por meio de funções de pertinência.

## 4.3 Módulo de inferência fuzzy

Neste módulo, cada proposição fuzzy é interpretada matematicamente por meio de técnicas da Lógica Fuzzy. É aqui que se definem as t-normas, t-conormas e regras de inferência utilizadas para gerar a relação fuzzy correspondente à base de regras.

Sua importância é equivalente à do módulo de regras, pois é o processo de inferência que determina a saída fuzzy do sistema, convertendo entradas linguísticas em uma resposta também fuzzy, que orientará a decisão final do controlador.

### 4.3.1 Método de Inferência de Mamdani

O método de inferência de Mamdani é um dos mais utilizados em sistemas fuzzy, sobretudo por sua simplicidade conceitual e por preservar uma interpretação próxima ao raciocínio humano baseado em regras linguísticas. Nesse método, as regras definidas no módulo da base de regras não são apenas descritas semanticamente, mas passam a ser reinterpretadas matematicamente para permitir o processo de inferência.

De modo geral, considera-se uma regra linguística da forma

$$\text{Se } x \text{ é } A_j, \text{ então } u \text{ é } B_j,$$

em que  $A_j$  e  $B_j$  são conjuntos fuzzy definidos, respectivamente, nos universos de discurso das variáveis de entrada  $x$  e de saída  $u$ .

O objetivo da inferência fuzzy é avaliar, a partir de uma entrada específica do sistema, o grau com que cada regra é satisfeita e, em seguida, combinar as contribuições de todas as regras para produzir uma saída fuzzy global. No método de Mamdani, esse

processo é formalizado por meio de uma relação fuzzy binária  $\mathcal{M} \subseteq X \times U$ , que representa matematicamente toda a base de regras do sistema.

Cada regra individual é interpretada como um subconjunto fuzzy do produto cartesiano  $X \times U$ . A construção desse subconjunto é feita a partir da combinação dos graus de pertinência do antecedente e do conseqüente da regra. Para representar o conectivo lógico “e”, adota-se uma t-norma, sendo o operador mínimo a escolha mais comum. Dessa forma, o grau de ativação de uma regra é determinado pelo menor grau de pertinência associado às suas premissas.

Quando o sistema possui múltiplas regras, é necessário combinar os efeitos de todas elas. No método de Mamdani, essa agregação é realizada por meio de uma t-conorma, usualmente o operador máximo, que representa o conectivo lógico “ou”. Esse procedimento reflete a ideia de que diferentes regras podem contribuir simultaneamente para a resposta final do sistema.

Formalmente, a relação fuzzy de Mamdani é definida pela função de pertinência

$$\varphi_{\mathcal{M}}(x, u) = \max_{1 \leq j \leq r} [\varphi_{A_j}(x) \wedge \varphi_{B_j}(u)],$$

onde  $r$  é o número total de regras,  $\wedge$  denota a t-norma mínimo, e  $\varphi_{A_j}$  e  $\varphi_{B_j}$  representam as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy associados, respectivamente, ao antecedente e ao conseqüente da  $j$ -ésima regra.

Essa expressão indica que a relação fuzzy global  $\mathcal{M}$  é obtida pela união dos produtos cartesianos fuzzy correspondentes a cada regra individual. O resultado desse processo é uma saída fuzzy agregada, que sintetiza o conhecimento contido em toda a base de regras e serve como base para a etapa posterior de defuzzificação.

## 4.4 Módulo de defuzzificação

Na teoria estocástica, utilizam-se medidas como média, moda e mediana para resumir distribuições. De forma análoga, na teoria fuzzy, a defuzzificação converte um conjunto fuzzy em um valor real, representando de forma prática a saída do controlador.

Mesmo quando as entradas são crisp, a saída do módulo de inferência permanece fuzzy, exigindo um método de defuzzificação para obter um valor numérico adequado à tomada de decisão. Diversas técnicas existem, e sua escolha depende do contexto. Aqui, adota-se o método do centro de gravidade.

### 4.4.1 Centro de gravidade

Este método é semelhante ao cálculo de uma média ponderada, em que os pesos são os valores  $\varphi_B(u_i)$ , representando o grau de compatibilidade de cada  $u_i$  com o conjunto fuzzy  $B$ . O centro de gravidade (ou centroide) calcula o ponto médio das áreas associadas aos

graus de pertinência e, embora possa ser computacionalmente mais exigente, é o método mais amplamente utilizado.

As Equações 4.1 e 4.2 expressam esse método nos domínios discreto e contínuo, respectivamente.

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)}. \quad (4.1)$$

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) du}. \quad (4.2)$$

**Exemplo 4.1.** (Avaliação do Desempenho Discente) (Silva; Peixoto, 2025). A avaliação da aprendizagem é uma tarefa desafiadora, pois envolve múltiplas dimensões do desempenho discente, como participação, comprometimento e desempenho em avaliações. Com o intuito de representar esses aspectos de forma mais abrangente, propõe-se um sistema baseado em regras fuzzy do tipo Mamdani.

Nesse modelo, são consideradas três variáveis de entrada (antecedentes): participação, entrega de atividades e desempenho em avaliações; e uma variável de saída (consequente): o desempenho final.

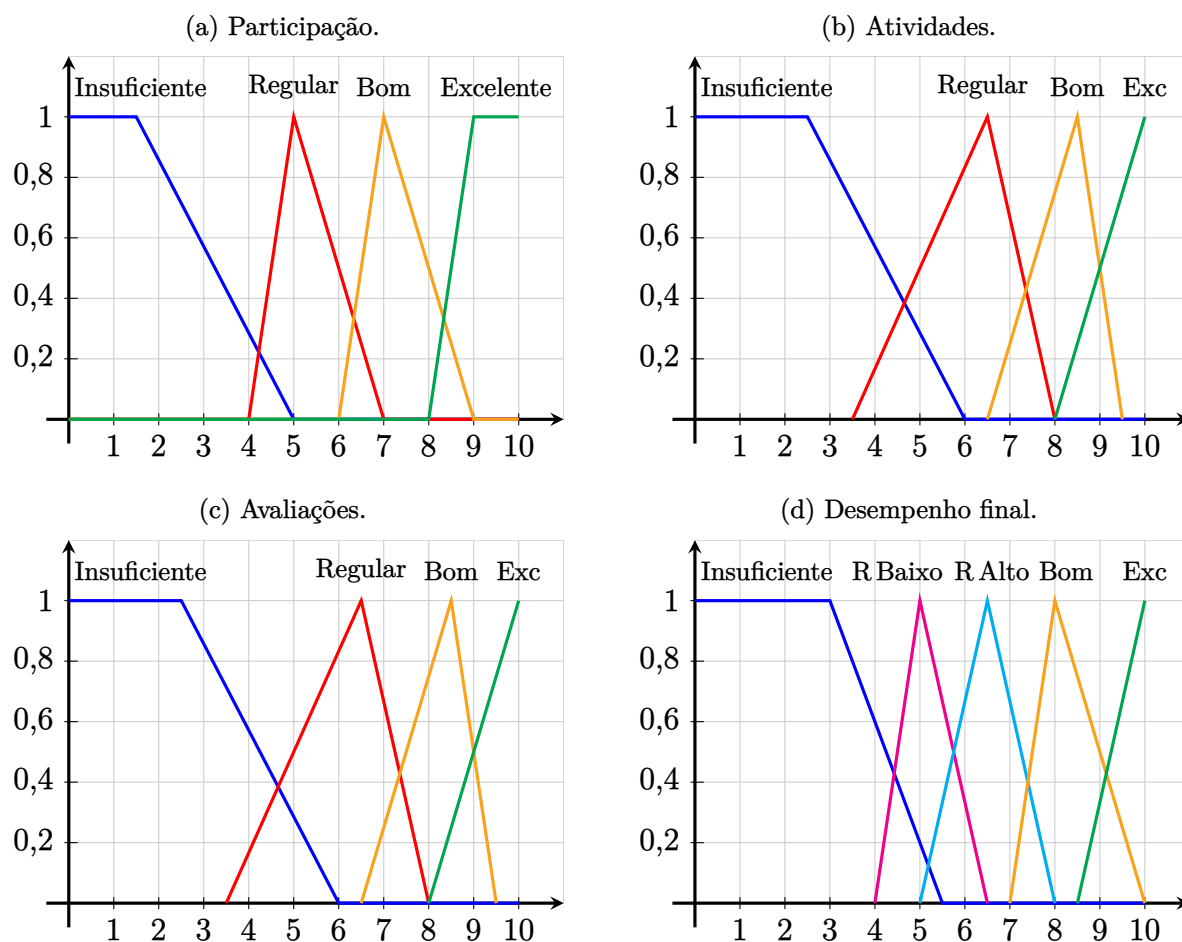
As variáveis de entrada e saída foram definidas no intervalo de 0 a 10 e representadas por conjuntos fuzzy triangulares e trapezoidais, conforme ilustrado nas Figuras 14a, 14b, 14c e 14d.

O conjunto de regras foi elaborado a partir da prática docente e de parâmetros frequentemente observados no cotidiano escolar, de modo a representar situações típicas relacionadas ao comportamento e ao desempenho dos estudantes. Cada regra busca traduzir, por meio de termos linguísticos, relações reconhecidas na rotina de ensino, articulando aspectos como participação, entrega de atividades e desempenho em avaliações.

Dessa forma, o sistema fuzzy integra critérios objetivos (como notas, pontualidade e cumprimento de tarefas) e critérios subjetivos (como engajamento e responsabilidade), permitindo uma representação mais ampla das situações que influenciam o desempenho global do aluno. A base de regras, portanto, incorpora interpretações pedagógicas plausíveis e facilita a leitura do comportamento do modelo.

Como cada variável de entrada possui quatro termos linguísticos (*Insuficiente*, *Regular*, *Bom* e *Excelente*), o número total de combinações possíveis decorre do produto cartesiano entre esses conjuntos. Assim, considerando três variáveis, obtém-se  $4^3 = 64$  regras fuzzy, cada uma correspondendo a um cenário específico e ao conceito final associado. Essa estrutura garante que o sistema responda de forma consistente em todo o espaço de entrada, preservando transparência na interpretação das regras.

Figura 14 – Funções de pertinência adotadas para as variáveis do modelo fuzzy de avaliação discente.



Fonte: Adaptado de Silva e Peixoto (2025).

Alguns exemplos de regras fuzzy são apresentados a seguir:

- Se (Participação é **Insuficiente**) e (Atividade é **Bom**) e (Avaliação é **Excelente**) então (Desempenho é **Bom**).
- Se (Participação é **Regular**) e (Atividade é **Insuficiente**) e (Avaliação é **Excelente**) então (Desempenho é **Regular Alto**).
- Se (Participação é **Bom**) e (Atividade é **Excelente**) e (Avaliação é **Insuficiente**) então (Desempenho é **Regular Baixo**).
- Se (Participação é **Excelente**) e (Atividade é **Regular**) e (Avaliação é **Insuficiente**) então (Desempenho é **Insuficiente**).
- Se (Participação é **Excelente**) e (Atividade é **Bom**) e (Avaliação é **Excelente**) então (Desempenho é **Excelente**).

A análise dos resultados obtidos indica que o modelo apresenta coerência nas classificações geradas, quando comparadas às percepções docentes, sugerindo que a proposta pode representar adequadamente o processo avaliativo.

Para exemplificar, considerou-se um conjunto de dados fictício, em que o sistema fuzzy retornou valores numéricos associados aos conceitos finais, conforme apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Exemplo de aplicação do modelo fuzzy com dados fictícios.

Aluno	Participação	Atividade	Avaliação	Saída Numérica	Conceito Final
Aluno 1	2,0	6,0	2,0	2,23	Insuficiente
Aluno 2	5,0	2,0	8,5	5,60	Regular Baixo
Aluno 3	5,0	7,5	6,5	6,50	Regular Alto
Aluno 4	7,0	7,5	8,5	8,33	Bom
Aluno 5	9,0	7,5	10,0	9,53	Excelente

Fonte: (Silva; Peixoto, 2025).

Além da saída numérica, o sistema permite observar o grau de pertencimento de cada valor às categorias linguísticas. Por exemplo, para o Aluno 2, com saída 5,60, há pertinência de 0,60 ao conjunto *Regular Baixo* e 0,40 ao conjunto *Regular Alto*, evidenciando a transição gradual entre conceitos adjacentes. Essa característica representa uma vantagem em relação ao modelo tradicional de médias, pois possibilita uma interpretação mais contínua e realista do desempenho discente.

Em síntese, o modelo fuzzy proposto permite integrar dimensões qualitativas e quantitativas no processo de avaliação, proporcionando uma análise mais flexível e condizente com a prática docente. Embora exija maior complexidade na definição das funções e regras, o sistema se mostra promissor para representar aspectos subjetivos do aprendizado, como engajamento e evolução individual.

## 5 O modelo matemático

A partir dos fundamentos discutidos no capítulo anterior, em que foram apresentados os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) e suas características principais, este capítulo descreve a estruturação do modelo proposto para a identificação de dificuldades matemáticas. O objetivo central é detalhar o processo de concepção do sistema, abrangendo a definição das variáveis consideradas, a organização dos subsistemas, o desenho das funções de pertinência, a elaboração das bases de regras e a lógica de integração que sustenta a abordagem hierárquica adotada.

O desenvolvimento do modelo parte de uma perspectiva pedagógica que busca compreender como diferentes dimensões da aprendizagem matemática, tais como engajamento, consistência de desempenho e tipos específicos de dificuldade, podem ser representadas em um ambiente computacional capaz de lidar com incertezas, variações e gradações de desempenho. Cada decisão de modelagem é sustentada por fundamentos educacionais e pelas características próprias dos sistemas fuzzy. Essa combinação garante que o modelo permaneça coerente, fácil de interpretar e adequado às demandas de uma avaliação diagnóstica.

Com o intuito de tornar o processo mais concreto e ilustrativo, este capítulo utiliza o conteúdo de função afim como exemplo orientador. A escolha desse tópico se justifica por sua presença recorrente no currículo de Matemática da Educação Básica, por sua utilidade em análises qualitativas e quantitativas, e pelo fato de exigir competências conceituais, procedimentais e interpretativas distintas, exatamente as dimensões centrais consideradas no modelo. A partir desse conteúdo, discute-se como cada variável é definida, quais aspectos são avaliados nas entradas e como o sistema fuzzy interpreta diferentes combinações de informações para produzir identificações específicas das dificuldades.

O capítulo começa apresentando a estrutura geral do modelo, segue com a descrição das variáveis de entrada e das saídas intermediárias e, posteriormente, introduz as funções de pertinência adotadas. Em seguida, discute-se a construção das bases de regras e, ao final, são apresentados exemplos que ilustram o funcionamento do sistema. Essa organização fornece a fundamentação metodológica necessária para a realização dos experimentos, análises e validações desenvolvidos nos capítulos seguintes.

### 5.1 Estrutura do Modelo

O modelo proposto foi estruturado como um sistema fuzzy hierárquico composto por três subsistemas, permitindo analisar diferentes dimensões da aprendizagem matemática de forma integrada. Cada subsistema recebe variáveis específicas, realiza suas inferências e produz uma saída utilizada na etapa seguinte.

O primeiro subsistema avalia o engajamento do estudante, reunindo informações sobre participação, disposição para aprender e presença nas atividades. Essa etapa sintetiza fatores que influenciam o desempenho acadêmico e que devem ser considerados antes de análises mais específicas.

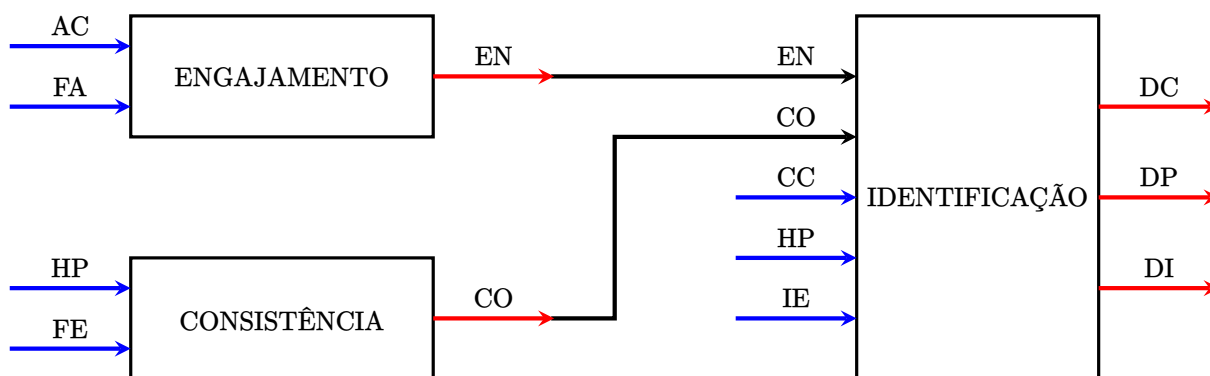
O segundo subsistema trata da consistência de desempenho, articulando competências conceituais e procedimentais. Ele identifica o nível de estabilidade com que o estudante compreende e aplica os conteúdos, evitando interpretações isoladas dessas dimensões.

O terceiro subsistema corresponde ao processo de identificação das dificuldades. Nele, as saídas anteriores são combinadas com variáveis diretamente relacionadas à aprendizagem matemática, permitindo identificar dificuldades de natureza conceitual, procedimental e interpretativa. A estrutura hierárquica garante que essas identificações considerem tanto aspectos cognitivos quanto elementos associados ao envolvimento.

No processo de inferência, adotou-se a configuração tradicional de sistemas fuzzy do tipo Mamdani, com operadores mínimo e máximo para implicação e agregação, respectivamente, e o método do centróide na defuzzificação. Essa escolha assegura interpretabilidade e simplicidade computacional.

A Figura 15 apresenta a estrutura geral do modelo e o fluxo entre seus subsistemas. As variáveis que compõem cada módulo, bem como suas funções no processo avaliativo, serão detalhadas na seção seguinte.

Figura 15 – Estrutura hierárquica do modelo fuzzy de identificação.



Fonte: Elaboração própria.

Com a estrutura geral estabelecida, a seção seguinte descreve as variáveis que compõem o modelo e o papel desempenhado por cada uma delas no processo de identificação das dificuldades.

## 5.2 Definição das Variáveis do Modelo

As variáveis consideradas no modelo representam os elementos observáveis utilizados para inferir o desempenho do estudante em diferentes dimensões da aprendizagem

matemática. A seleção dessas variáveis foi orientada por aspectos pedagógicos que influenciam o processo e o resultado da aprendizagem, contemplando componentes comportamentais, cognitivos e interpretativos. Assim, o modelo integra fatores relacionados à participação do estudante, à regularidade de seu desempenho e às competências específicas necessárias para compreender e resolver tarefas matemáticas.

As variáveis estão organizadas de acordo com o papel desempenhado por cada subsistema. No subsistema de engajamento são considerados fatores relacionados à participação e ao envolvimento do estudante ao longo do processo de ensino. No subsistema de consistência são utilizadas variáveis que articulam compreensão conceitual e execução procedimental, permitindo avaliar a estabilidade do desempenho. No subsistema de identificação são incorporadas variáveis diretamente associadas ao raciocínio matemático, possibilitando reconhecer diferentes tipos de dificuldade.

A seguir, apresentam-se as variáveis de entrada com suas justificativas pedagógicas e sua relação com o conteúdo de função afim, utilizado como referência ilustrativa ao longo do capítulo.

### Autoconfiança (AC)

A Autoconfiança é um aspecto importante no processo de aprendizagem de Matemática, pois influencia a disposição do estudante para enfrentar desafios, persistir em tarefas e mobilizar estratégias cognitivas diante de dificuldades. No modelo proposto, essa variável representa a percepção que o estudante tem de sua própria capacidade de compreender e resolver atividades relacionadas ao conteúdo analisado.

A obtenção dessa informação pode ser realizada por diferentes meios. Uma possibilidade é o uso de formulários de autorrelato, nos quais o estudante expressa seu nível de confiança em relação ao tema estudado. Outra possibilidade envolve registros de observação em sala de aula, considerando aspectos como iniciativa, participação e disposição para tentar resolver os problemas propostos. O modelo não restringe o método de coleta, permitindo que a variável seja adaptada às características do contexto em que a identificação das dificuldades será aplicada.

No contexto do conteúdo de função afim, a Autoconfiança está relacionada à segurança do estudante ao identificar propriedades da função, realizar cálculos, interpretar representações gráficas e resolver situações-problema.

### Frequência em Aula (FA)

A frequência em aula é um indicador fundamental para a compreensão dos processos de aprendizagem, especialmente em Matemática, cujo desenvolvimento conceitual e procedimental se constrói de forma contínua. No modelo proposto, essa variável representa

a presença do estudante nas aulas relacionadas ao conteúdo analisado, bem como sua oportunidade de participar de explicações, atividades orientadas e momentos de discussão.

A justificativa para sua inclusão está no fato de que a ausência frequente reduz o contato do estudante com os conceitos apresentados e com as estratégias de resolução discutidas em sala de aula, o que pode comprometer tanto a compreensão conceitual quanto o desempenho em tarefas procedimentais. Assim, a frequência é interpretada como um fator que condiciona o acesso às experiências de aprendizagem.

No contexto do conteúdo de função afim, essa variável está associada ao número de encontros em que o estudante teve contato com a introdução do conceito, com atividades de cálculo, com a construção de gráficos e com a resolução de problemas contextualizados que envolvem esse tipo de função.

## Habilidade Procedimental (HP)

A habilidade procedimental refere-se à capacidade do estudante de executar corretamente algoritmos, procedimentos e cálculos necessários para resolver uma tarefa matemática. Essa dimensão envolve a aplicação de regras, manipulações algébricas e operações que sustentam a resolução de problemas, e está diretamente relacionada à fluência no uso das técnicas adequadas.

No modelo proposto, essa variável representa o domínio do estudante na execução dos procedimentos envolvidos no conteúdo analisado. A avaliação da habilidade procedimental pode considerar o desempenho em exercícios práticos, a resolução de listas, atividades em sala e demais tarefas em que a execução correta das etapas seja essencial.

No caso do conteúdo de função afim, a habilidade procedimental inclui ações como calcular  $f(x)$  para valores dados, determinar interceptos, construir tabelas de valores, manipular a expressão algébrica da função, encontrar a raiz e identificar coeficientes envolvidos na escrita  $f(x) = ax + b$ . Desempenhos inconsistentes nessas operações podem indicar dificuldades procedimentais, mesmo quando a compreensão conceitual está presente.

## Frequência de Erros (FE)

A frequência de erros sintetiza a proporção de respostas incorretas apresentadas pelo estudante nas atividades relacionadas ao conteúdo trabalhado. Diferentemente da habilidade procedimental, que observa etapas específicas de resolução, essa variável fornece uma visão mais geral da precisão e da regularidade do desempenho.

Essa medida é relevante porque estudantes com dificuldades tendem a apresentar erros variados mesmo em tarefas simples, enquanto estudantes com domínio mais consolidado erram menos e de forma mais consistente. Assim, FE atua como indicador complementar, contribuindo para distinguir falhas pontuais de dificuldades persistentes.

No caso de função afim, a frequência de erros pode ser observada em exercícios que envolvem cálculo de imagens, interpretação de gráficos, identificação de coeficientes e análise de situações que envolvam variação linear. Essa análise possibilita identificar padrões de erro que enriquecem a avaliação de consistência do estudante.

## Compreensão Conceitual (CC)

A compreensão conceitual é um componente essencial da aprendizagem matemática, pois envolve a capacidade de interpretar ideias, reconhecer relações entre objetos matemáticos e atribuir significado às representações utilizadas. No modelo proposto, essa variável descreve o entendimento que o estudante possui sobre os conceitos fundamentais do conteúdo analisado, indo além da execução de procedimentos.

No caso do estudo de função afim, a compreensão conceitual está relacionada ao entendimento das propriedades da função, da interpretação do coeficiente angular e do coeficiente linear, da noção de crescimento ou decréscimo e da relação entre representações algébricas e gráficas. Também abrange a habilidade de identificar a ideia de proporcionalidade envolvida em situações que podem ser modeladas por uma função desse tipo.

A avaliação dessa variável pode considerar tarefas que demandam interpretação, explicação ou justificativa, como reconhecer o comportamento da função a partir de seu coeficiente angular, relacionar a expressão algébrica a seu gráfico e compreender o significado de pontos notáveis, como a raiz e o intercepto. Dessa forma, CC permite identificar o quanto o estudante compreende os princípios que estruturam o conceito, elemento indispensável para uma identificação mais precisa das dificuldades apresentadas.

## Interpretação de Enunciados (IE)

A interpretação de enunciados é uma dimensão essencial no processo de resolução de problemas matemáticos e refere-se à capacidade do estudante de compreender informações escritas, identificar relações entre grandezas e organizar dados relevantes apresentados em linguagem natural. Essa variável busca avaliar quanto o estudante compreende o enunciado antes de aplicar qualquer procedimento ou conceito.

No estudo de função afim, essa habilidade envolve reconhecer, a partir de descrições textuais, como grandezas variam, identificar informações iniciais e relações de dependência, interpretar mudanças uniformes e distinguir elementos que devem ser traduzidos para uma expressão do tipo  $f(x) = ax + b$ . Inclui também a seleção de dados relevantes e a capacidade de estruturar a situação de forma coerente.

A avaliação dessa variável pode considerar tarefas que exijam leitura cuidadosa, identificação de grandezas envolvidas, compreensão das condições apresentadas e tradução de um contexto verbal para uma representação algébrica ou gráfica adequada. Dessa forma,

IE permite identificar se eventuais dificuldades decorrem da compreensão do enunciado e não necessariamente de limitações conceituais ou procedimentais.

### Entradas Intermediárias: Engajamento (EN) e Consistência (CO)

No terceiro subsistema, as variáveis Engajamento (EN) e Consistência (CO) compõem o conjunto de entradas utilizadas no processo de inferência. Entretanto, diferentemente das variáveis apresentadas anteriormente, EN e CO não são obtidas diretamente por meio de coleta de dados. Esses valores são resultados produzidos pelos dois primeiros subsistemas do modelo.

Assim, EN e CO funcionam como entradas intermediárias, isto é, representam informações já sintetizadas a partir das variáveis originais associadas à participação do estudante, à execução de procedimentos e à regularidade de seu desempenho. A inclusão dessas variáveis no subsistema de identificação permite que o modelo considere fatores essenciais do processo de aprendizagem antes de avaliar dificuldades específicas.

No subsistema de identificação, EN e CO são combinadas às variáveis Compreensão Conceitual (CC), Habilidade Procedimental (HP) e Interpretação de Enunciados (IE). Essa combinação possibilita identificar três tipos de dificuldade: conceitual, procedimental e de interpretação.

No contexto do conteúdo de função afim, EN e CO não representam características específicas do tema estudado, mas atuam como indicadores que modulam a interpretação das variáveis diretamente relacionadas ao conteúdo. Valores reduzidos de engajamento podem sinalizar que dificuldades observadas em aspectos conceituais, procedimentais ou de interpretação não decorrem exclusivamente do contato com o tema, mas também da participação limitada nas atividades. De maneira semelhante, níveis baixos de consistência indicam flutuações no desempenho que dificultam a identificação de um padrão claro de compreensão ou de erro. Dessa forma, EN e CO contribuem para contextualizar e qualificar a identificação resultante da análise de CC, HP e IE.

### 5.3 Variáveis de Saída do Modelo

As variáveis de saída representam os resultados produzidos pelo subsistema de identificação. Elas sintetizam as informações provenientes das variáveis específicas associadas ao conteúdo estudado, bem como dos valores intermediários de engajamento e consistência gerados pelos subsistemas anteriores. Cada variável de saída corresponde a um tipo de dificuldade que pode ser identificada no desempenho do estudante, de modo a fornecer uma análise mais detalhada sobre os aspectos que influenciam sua aprendizagem.

As saídas foram definidas com base em três dimensões fundamentais da compreensão matemática: a dimensão conceitual, a dimensão procedimental e a dimensão interpretativa. A seguir, apresenta-se cada uma delas, acompanhada de sua justificativa pedagógica.

## Dificuldade Conceitual (DC)

A dificuldade conceitual refere-se a limitações no entendimento das ideias e relações fundamentais que estruturam um determinado conteúdo matemático. No modelo proposto, essa variável representa o grau em que o estudante apresenta obstáculos para compreender definições, propriedades, significados e inter-relações entre diferentes representações.

No caso da função afim, a dificuldade conceitual pode manifestar-se em situações como: compreender inadequadamente o significado do coeficiente angular, interpretar de forma equivocada o coeficiente linear, não reconhecer o comportamento crescente ou decrescente da função e apresentar dificuldades para relacionar a expressão algébrica a sua representação gráfica. A identificação desse tipo de dificuldade permite apontar lacunas no entendimento que servem de base para diversas outras competências.

## Dificuldade Procedimental (DP)

A dificuldade procedimental diz respeito a limitações na execução de técnicas, algoritmos e procedimentos necessários para resolver tarefas matemáticas. Essa variável indica em que medida o estudante encontra obstáculos na realização de cálculos, manipulações algébricas e etapas operatórias que compõem a solução de um problema.

No estudo de função afim, essa dificuldade pode ser observada em erros recorrentes ao calcular imagens, construir tabelas de valores, determinar a raiz ou interceptos, manipular a expressão  $f(x) = ax + b$  ou resolver situações que envolvem determinação de valores desconhecidos. A análise da dificuldade procedimental permite identificar problemas diretamente ligados à prática e ao uso de técnicas específicas.

## Dificuldade de Interpretação (DI)

A dificuldade de interpretação refere-se a limitações na compreensão de enunciados, na identificação de grandezas relevantes e na capacidade de extrair informações essenciais de um texto descritivo. Essa dimensão está diretamente relacionada à leitura matemática e ao entendimento de situações contextualizadas.

No contexto de função afim, essa dificuldade pode manifestar-se quando o estudante não consegue reconhecer relações de dependência entre grandezas, interpretar taxas de variação ou valores iniciais, identificar o que deve ser modelado ou distinguir informações relevantes de irrelevantes em um problema. A identificação da dificuldade de interpretação permite separar questões relacionadas ao entendimento do contexto das dificuldades propriamente matemáticas.

## 5.4 Funções de Pertinência

As funções de pertinência constituem um dos elementos centrais do modelo fuzzy, pois descrevem como cada valor numérico associado a uma variável é interpretado em termos linguísticos. A definição dessas funções considera o comportamento esperado das variáveis no contexto educacional e busca produzir inferências coerentes com os objetivos da identificação das dificuldades.

As variáveis de entrada foram definidas no intervalo de 0 a 10, uma vez que representam níveis de desempenho usualmente expressos em forma de nota. As variáveis de saída, por sua vez, foram modeladas no intervalo normalizado de 0 a 1, o que permite interpretar os resultados como graus de dificuldade e mantém a consistência das operações de inferência e defuzzificação ao longo de todo o sistema.

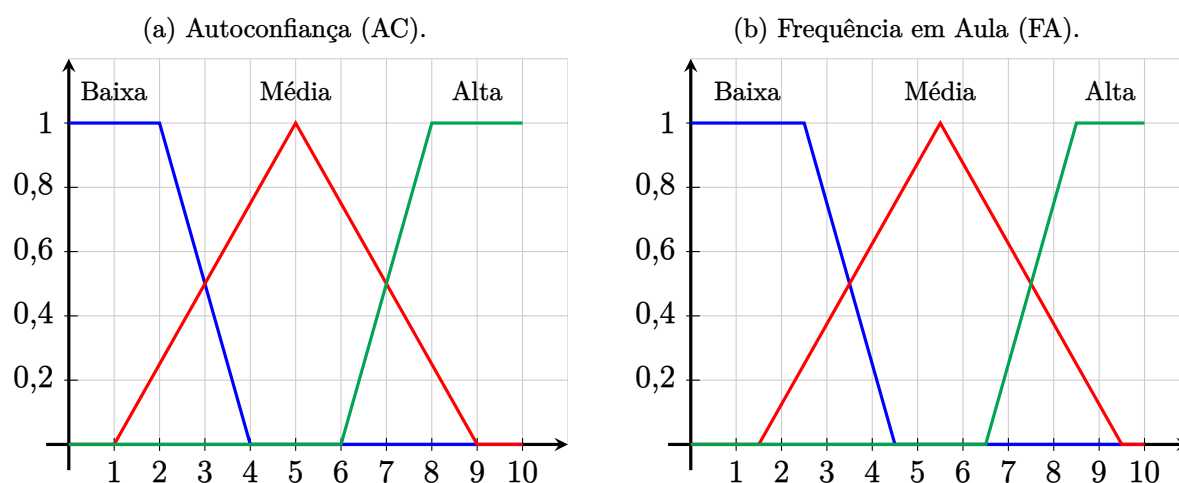
Foram utilizadas funções triangulares e trapezoidais, que apresentam simplicidade computacional, boa interpretabilidade e transições progressivas entre níveis linguísticos. A seguir, apresentam-se as funções de pertinência organizadas de acordo com os subsistemas do modelo, acompanhadas de sua descrição e de suas representações gráficas.

### Subsistema de Engajamento

O subsistema de engajamento utiliza as variáveis Autoconfiança (AC) e Frequência em Aula (FA), cada uma estruturada com três termos linguísticos: *Baixa*, *Média* e *Alta*. A partir dessas entradas, o sistema produz a variável de saída Engajamento (EN), definida com quatro termos: *Baixo*, *Médio Baixo*, *Médio Alto* e *Alto*, permitindo representar diferentes níveis de envolvimento do estudante.

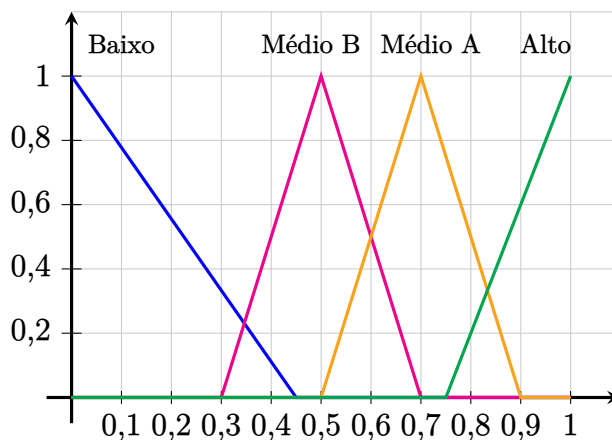
As funções de pertinência das variáveis AC e FA são apresentadas na Figura 16, enquanto a variável de saída EN é ilustrada separadamente na Figura 17.

Figura 16 – Funções de pertinência das variáveis de entrada do subsistema de engajamento.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 17 – Funções de pertinência da variável de saída (EN) do subsistema de engajamento.



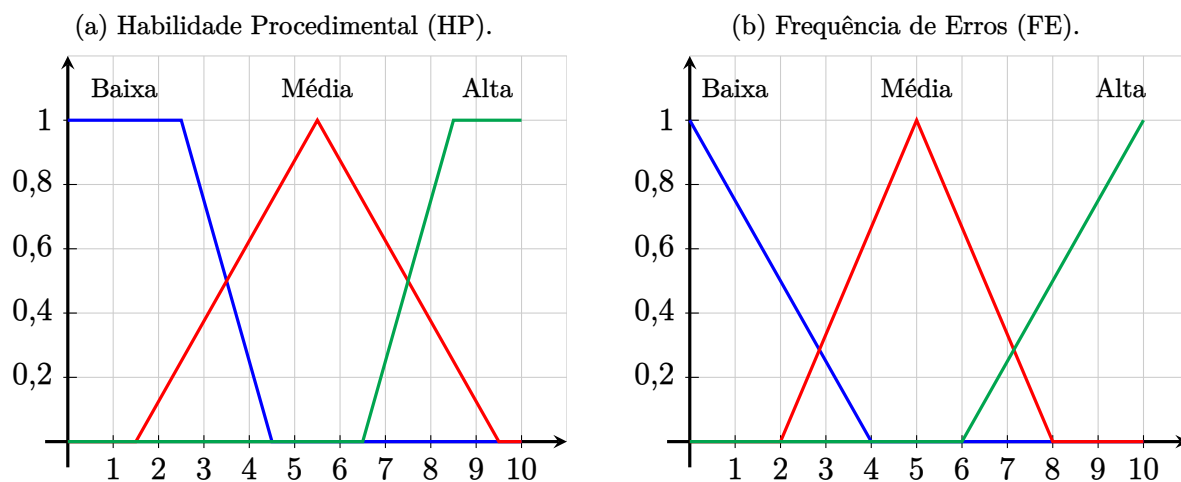
Fonte: Elaboração própria.

### Subsistema de Consistência

O subsistema de consistência utiliza as variáveis Habilidade Procedimental (HP) e Frequência de Erros (FE). Para ambas foram definidos três termos linguísticos, a saber: *Baixa*, *Média* e *Alta*. A partir dessas entradas o modelo produz a variável de saída Consistência (CO), estruturada com quatro termos linguísticos: *Baixa*, *Médio Baixo*, *Médio Alto* e *Alto*. Essa modelagem permite distinguir desempenhos altamente irregulares, níveis intermediários de estabilidade e desempenhos mais consistentes.

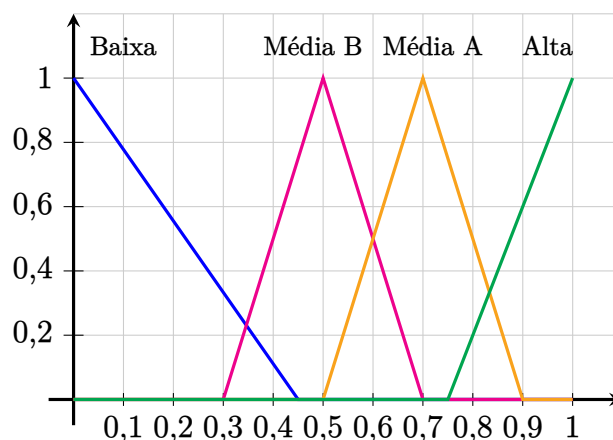
As funções de pertinência das variáveis HP e FE são apresentadas na Figura 18, enquanto as funções de pertinência da variável de saída CO encontram-se separadamente na Figura 19.

Figura 18 – Funções de pertinência das variáveis de entrada do subsistema de consistência.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 19 – Funções de pertinência da variável de saída (CO) do subsistema de consistência.



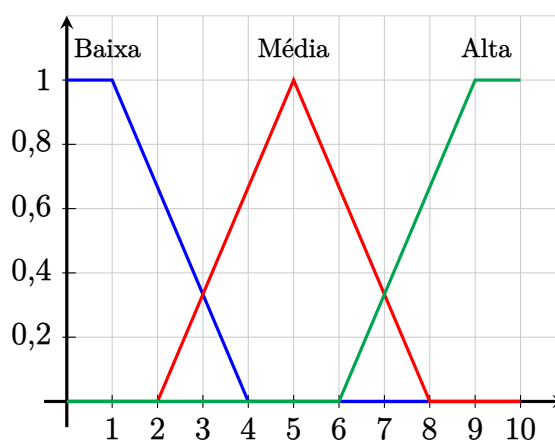
Fonte: Elaboração própria.

### Subsistema de Identificação

O subsistema de identificação integra as variáveis Compreensão Conceitual (CC), Interpretação de Enunciados (IE) e as entradas intermediárias Engajamento (EN) e Consistência (CO). Para CC e IE foram definidos três termos linguísticos (*Baixa*, *Média* e *Alta*), que representam diferentes níveis de domínio cognitivo. As variáveis intermediárias EN e CO, provenientes dos subsistemas anteriores, utilizam quatro termos linguísticos (*Baixo*, *Médio Baixo*, *Médio Alto* e *Alto*), conforme apresentado nas Figuras 17 e 19.

As funções de pertinência das variáveis CC e IE encontram-se na Figura 20. Ambas utilizam a mesma organização de termos e formato de modelagem, uma vez que descrevem dimensões cognitivas avaliadas na mesma escala, garantindo uniformidade semântica e coerência na interpretação das inferências.

Figura 20 – Funções de pertinência das variáveis de entrada (CC e IE) do subsistema de identificação.



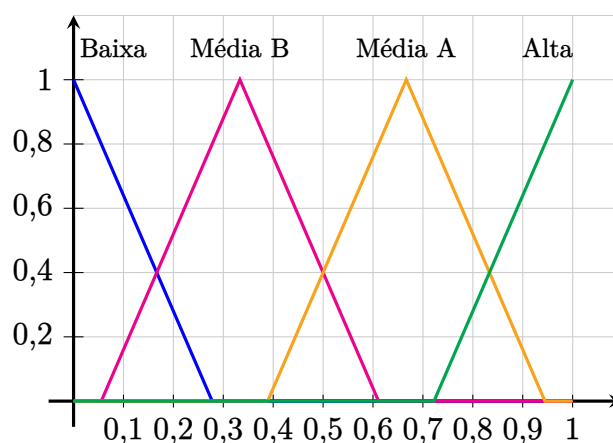
Fonte: Elaboração própria.

## Variáveis de Saída

As variáveis de saída Dificuldade Conceitual (DC), Dificuldade Procedimental (DP) e Dificuldade de Interpretação (DI) foram modeladas com quatro termos linguísticos: *Baixa*, *Média Baixa*, *Média Alta* e *Alta*. Todas as saídas utilizam a mesma estrutura de funções de pertinência, uma vez que representam graus de dificuldade avaliados na mesma escala e organizados segundo os mesmos níveis linguísticos. Essa uniformidade garante coerência semântica entre as três dimensões avaliadas e simplifica a interpretação dos resultados gerados pelo modelo.

As funções de pertinência das três saídas estão apresentadas na Figura 21.

Figura 21 – Funções de pertinência das variáveis de saída do subsistema de identificação.



Fonte: Elaboração própria.

Após a definição das funções de pertinência, apresentamos a base de regras que integra essas variáveis e orienta o funcionamento inferencial do modelo.

## 5.5 Bases de Regras do Modelo

As bases de regras constituem o núcleo inferencial do sistema fuzzy, pois estabelecem as relações entre as variáveis de entrada e as variáveis de saída. Cada regra representa um possível comportamento do estudante e orienta a interpretação que o modelo realiza a partir de combinações específicas de informações pedagógicas. A formulação dessas regras foi guiada pela literatura da área, pela estrutura hierárquica do modelo e pela experiência em sala de aula, considerando que avaliações centradas apenas em resultados numéricos tendem a oferecer informações limitadas sobre os processos que conduzem ao desempenho dos estudantes (Perrenoud, 1999). Nesse sentido, o uso de regras linguísticas permite incorporar nuances de compreensão que não seriam capturadas por abordagens exclusivamente classificatórias.

Se todas as cinco variáveis do subsistema de identificação fossem combinadas simultaneamente, considerando três termos linguísticos para CC, HP e IE e quatro termos para EN e CO, o total possível seria

$$3^3 \times 4^2 = 432 \text{ combinações.}$$

Esse número é muito alto e incluiria diversas situações pouco relevantes para a análise das dificuldades matemáticas.

Para construir um conjunto de regras mais coerente, cada tipo de dificuldade foi associado apenas às variáveis que influenciam diretamente sua interpretação pedagógica:

- DC depende de EN, CO e CC;
- DP depende de EN, CO e HP;
- DI depende de EN, CC e IE.

Durante a análise das variáveis, os níveis intermediários de EN e CO (*Médio Baixo* e *Médio Alto*) foram considerados próximos e interpretados como pertencentes a um mesmo nível médio. Ainda assim, foram utilizados na construção das regras para manter a representação das variações presentes nos dados e para registrar diferenças que, embora discretas, contribuem para a sensibilidade do modelo.

A organização final resultou em diferentes quantidades de regras para cada saída. Para DC e DP, a combinação de EN, CO e CC ou HP gera 48 regras em cada caso. Para DI, a combinação de EN, CC e IE produz 36 regras, pois algumas combinações não apresentam sentido pedagógico e foram descartadas. Assim, o subsistema de identificação contém

$$48 \text{ (DC)} + 48 \text{ (DP)} + 36 \text{ (DI)} = 132 \text{ regras.}$$

Nos subsistemas de engajamento e de consistência, cada variável possui três termos linguísticos (*Baixo*, *Médio*, *Alto*), o que gera

$$3 \times 3 = 9 \text{ regras por subsistema.}$$

O modelo completo é composto por

$$9 \text{ (Engajamento)} + 9 \text{ (Consistência)} + 132 \text{ (Identificação)} = 150 \text{ regras.}$$

Alguns exemplos de regras fuzzy são apresentados a seguir:

- Se (EN é **Baixo**) e (CO é **Alta**) e (CC é **Média**) então (DC é **Média Alta**).
- Se (EN é **Alto**) e (CO é **Média Alta**) e (CC é **Baixa**) então (DC é **Alta**).
- Se (EN é **Médio Baixo**) e (CO é **Baixa**) e (HP é **Alta**) então (DP é **Média Baixa**).
- Se (EN é **Médio Alto**) e (CC é **Média**) e (IE é **Alta**) então (DI é **Baixa**).

As regras dos três subsistemas fuzzy estão organizadas nos respectivos apêndices: Engajamento (A), Consistência (B) e Identificação (C).

## 5.6 Aplicação do Modelo e Resultados

Com a estrutura do modelo fuzzy definida, passa-se à fase de aplicação do sistema aos cenários escolhidos. Essa etapa tem como objetivo verificar o comportamento do modelo diante de combinações distintas das variáveis de entrada e avaliar se os valores obtidos nas saídas refletem de maneira coerente as situações pedagógicas simuladas. As simulações computacionais foram realizadas no software MATLAB<sup>1</sup>.

Para essa finalidade, foram elaborados cinco cenários fictícios, representando estudantes com diferentes combinações de autoconfiança, frequência em aula, habilidades procedimentais, frequência de erros, compreensão conceitual e interpretação de enunciados. Esses cenários incluem casos próximos ao domínio pleno, casos com dificuldades específicas e casos de desempenho irregular, permitindo examinar a sensibilidade do modelo a perfis variados.

Cada conjunto de valores é processado sequencialmente pelos três subsistemas. O subsistema de engajamento gera o valor de Engajamento (EN), enquanto o subsistema de consistência produz o valor de Consistência (CO). Por fim, o subsistema de identificação utiliza essas duas variáveis intermediárias, associadas às dimensões conceitual, procedimental e interpretativa, para estimar os graus de Dificuldade Conceitual (DC), Dificuldade Procedimental (DP) e Dificuldade de Interpretação (DI).

Além das variáveis diretamente relacionadas ao domínio matemático, como Compreensão Conceitual (CC), Habilidade Procedimental (HP) e Interpretação de Enunciados (IE), o modelo inclui variáveis que representam aspectos mais subjetivos do processo de aprendizagem, entre elas Autoconfiança (AC), Frequência em Aula (FA), Engajamento (EN), Consistência (CO) e Frequência de Erros (FE). Embora não descrevam unicamente o conhecimento formal do estudante, esses elementos influenciam o modo como ele participa das atividades, enfrenta desafios, mantém regularidade de estudo e se dispõe a tentar resolver problemas. Dessa forma, a presença dessas variáveis no modelo permite uma análise mais completa do comportamento do estudante, diferenciando situações em que a dificuldade está ligada ao domínio conceitual ou procedimental de situações em que ela é influenciada por fatores relacionados ao envolvimento, à participação ou à persistência nas tarefas.

A Tabela 3 reúne todos os valores de entrada e as saídas geradas.

A análise dos resultados permite observar padrões relevantes. O Aluno 1, com valores elevados em todas as variáveis de entrada, apresenta níveis mínimos de dificuldades: DC, DP e DI permanecem baixos, indicando domínio consistente das três dimensões avaliadas. O Aluno 2 combina compreensão conceitual intermediária com boa interpretação, mas baixa autoconfiança; isso se reflete em uma dificuldade conceitual mais elevada ( $DC=0,67$ ), enquanto as demais dimensões permanecem baixas. Já o Aluno 3 apresenta habilidade

<sup>1</sup> Licença adquirida no projeto FAPESP número 2016/04299-9

Tabela 3 – Resultados dos testes realizados no modelo fuzzy de identificação com dados fictícios.

Aluno	AC	FA	HP	FE	CC	IE	EN	CO	DC	DP	DI
Aluno 1	9	9	9	1	9	9	0,87	0,86	0,23	0,23	0,21
Aluno 2	3	9	8	2	4	7	0,59	0,79	0,67	0,20	0,28
Aluno 3	7	4	2	8	8	5	0,63	0,17	0,33	0,92	0,67
Aluno 4	2	3	8	3	2	3	0,33	0,66	0,83	0,31	0,72
Aluno 5	8	5	5	6	3	9	0,70	0,50	0,72	0,67	0,28

Fonte: Elaboração própria.

procedimental reduzida e elevada frequência de erros, o que se traduz diretamente na maior dificuldade procedimental ( $DP=0,92$ ) e em dificuldades interpretativas moderadas, ainda que o domínio conceitual permaneça razoável.

O Aluno 4 apresenta baixos níveis de autoconfiança, frequência em aula, compreensão conceitual e interpretação, resultando em um perfil de dificuldades acentuadas nas dimensões conceitual ( $DC=0,83$ ) e interpretativa ( $DI=0,72$ ). A dificuldade procedimental, embora menos elevada, ainda aparece em nível moderado. Por fim, o Aluno 5 combina uma boa interpretação de enunciados com compreensão conceitual reduzida, situação que se manifesta em dificuldade conceitual mais alta ( $DC=0,72$ ), acompanhada de dificuldade procedimental moderada ( $DP=0,67$ ), enquanto o índice interpretativo se mantém baixo.

Em conjunto, os resultados revelam que o modelo distingue de forma adequada diferentes estruturas de dificuldade, atribuindo maior peso aos fatores mais relevantes em cada cenário. Além disso, a presença das variáveis intermediárias EN e CO permite qualificar melhor as identificações, diferenciando situações de baixo engajamento daquelas decorrentes de limitações conceituais ou procedimentais. Esses experimentos evidenciam que a arquitetura proposta é sensível às variações das entradas e produz identificações consistentes com a interpretação pedagógica esperada.

### 5.6.1 Teste de Sensibilidade do Modelo

Com o objetivo de analisar o comportamento do modelo fuzzy hierárquico frente a variações controladas em suas variáveis de entrada, realizou-se um teste de sensibilidade local no sistema completo. Esse teste permite verificar como alterações pontuais em uma única entrada se propagam ao longo da estrutura hierárquica do modelo e influenciam tanto as saídas intermediárias quanto as saídas finais.

O procedimento adotado consistiu na variação individual da variável de entrada AC ao longo de todo o seu domínio, mantendo-se todas as demais entradas constantes em um ponto de referência. Esse ponto de referência foi definido por valores intermediários dentro dos domínios das variáveis, representando um cenário típico de funcionamento do modelo. As simulações foram realizadas no ambiente MATLAB, utilizando a implementação

completa do sistema fuzzy baseada em uma estrutura do tipo FIS Tree.

No ponto de referência considerado, as saídas do modelo assumiram os seguintes valores: EN=0,7000, CO=0,5000, DC=0,6667, DP=0,6667 e DI=0,3333. A partir desse estado base, a variável AC foi variada de maneira controlada, enquanto as demais entradas permaneceram fixas, permitindo a observação do comportamento das saídas intermediárias EN e CO e das saídas finais DC, DP e DI.

A Tabela 4 apresenta valores representativos obtidos no teste de sensibilidade em relação à variável AC.

Tabela 4 – Resultados representativos do teste de sensibilidade em relação à variável AC.

AC	EN	CO	DC	DP	DI
0,0	0,1491	0,5000	0,6667	0,6667	0,6667
1,5	0,2436	0,5000	0,6667	0,6667	0,6667
2,5	0,3520	0,5000	0,6667	0,6667	0,4849
3,5	0,5148	0,5000	0,6667	0,6667	0,3333
5,0	0,7000	0,5000	0,6667	0,6667	0,3333
10,0	0,7000	0,5000	0,6667	0,6667	0,3333

Fonte: Elaboração própria.

A análise dos resultados evidencia que a saída intermediária EN apresenta crescimento progressivo em função do aumento de AC, com comportamento não linear e saturação a partir de determinados valores. Esse resultado indica que incrementos iniciais em AC produzem impacto significativo no subsistema de engajamento, enquanto aumentos adicionais passam a gerar efeitos limitados, o que é coerente com a lógica das regras fuzzy empregadas.

Por outro lado, a saída intermediária CO manteve-se constante ao longo de todo o intervalo analisado, evidenciando que a variável AC não exerce influência sobre o subsistema de consistência. Esse comportamento confirma a independência semântica entre os domínios modelados e reforça a coerência da arquitetura hierárquica adotada.

No que se refere às saídas finais, observa-se que DC e DP apresentaram variações mínimas durante todo o teste, mantendo valores praticamente constantes. Esse comportamento sugere que essas dimensões não são sensíveis a variações isoladas na variável AC, contribuindo para a estabilidade global do modelo. Em contraste, a saída DI apresentou uma variação progressiva decrescente à medida que AC foi incrementada, seguida de estabilização em valores inferiores, evidenciando uma sensibilidade direcionada dessa dimensão à variável analisada.

De forma geral, o teste de sensibilidade realizado demonstra que o modelo fuzzy hierárquico responde de maneira controlada e semanticamente coerente às variações em suas entradas, apresentando estabilidade nas saídas finais e preservando a interpretabilidade das relações estabelecidas pelas regras fuzzy.

## 5.6.2 Discussão dos Resultados

Os resultados apresentados permitem observar que o modelo proposto reage de maneira consistente às diferentes combinações das variáveis de entrada, diferenciando adequadamente os tipos de dificuldade considerados. O comportamento do sistema evidencia que as regras fuzzy e a estrutura hierárquica dos subsistemas foram capazes de traduzir variações significativas nos perfis dos estudantes em identificações compatíveis com cenários pedagogicamente plausíveis.

No caso de estudantes com indicadores elevados em todas as dimensões, o modelo produziu valores reduzidos de dificuldade, refletindo domínio conceitual, procedimental e interpretativo. Em contraste, perfis com limitações específicas apresentaram identificações coerentes com o tipo de restrição observada. Por exemplo, baixos valores de habilidade procedimental e frequência de erros elevada resultaram em maior dificuldade procedimental, enquanto valores reduzidos de compreensão conceitual ou interpretação de enunciados geraram dificuldades nessas dimensões.

A presença das variáveis intermediárias Engajamento (EN) e Consistência (CO) mostrou-se particularmente relevante. Essas variáveis, derivadas de aspectos mais subjetivos do comportamento do estudante, modulam a identificação final ao distinguir situações em que a dificuldade parece decorrer de falta de envolvimento ou regularidade de estudo daquelas em que há, de fato, uma limitação cognitiva mais específica. Assim, o modelo evita interpretações simplificadas, integrando informações atitudinais e cognitivas em uma identificação mais refinada das dificuldades.

Outro aspecto importante é a capacidade do sistema de lidar com combinações irregulares de desempenho, produzindo identificações equilibradas mesmo quando as variáveis de entrada indicam avanços em algumas áreas e fragilidades em outras. Esse comportamento é especialmente relevante em contextos reais, nos quais o desempenho estudantil raramente é uniforme entre todas as dimensões avaliadas.

De forma geral, os resultados obtidos nesta seção ilustram o funcionamento do modelo, buscando evidenciar sua capacidade de representar, por meio da Lógica Fuzzy, diferentes padrões de desempenho e dificuldade. O conjunto de cenários analisados explicita que o sistema responde de maneira coerente às variações das entradas, distinguindo nuances importantes entre os tipos de dificuldade e oferecendo uma interpretação estruturada do desempenho estudantil.

## 6 Considerações Finais

Esta dissertação apresentou o desenvolvimento de um modelo fuzzy voltado à identificação de dificuldades matemáticas no contexto educacional. A partir da construção de um sistema baseado em regras, organizado em subsistemas hierárquicos e estruturado com variáveis cognitivas e aspectos relacionados ao envolvimento do estudante, foi possível elaborar um mecanismo capaz de representar diferentes padrões de desempenho e de indicar, de maneira diferenciada, graus de dificuldade conceitual, procedimental e interpretativa. O modelo proposto sintetiza elementos centrais da teoria dos conjuntos fuzzy, dos sistemas de inferência e da construção de regras, aplicando-os a um cenário pedagógico relevante.

A definição das funções de pertinência, a organização modular do sistema e a elaboração da base de regras permitiram consolidar uma proposta metodológica consistente e sensível às nuances presentes no processo de aprendizagem. A aplicação do modelo em cenários simulados evidenciou que a estrutura desenvolvida responde de forma coerente às variações das variáveis de entrada, distinguindo adequadamente diferentes perfis de estudantes e permitindo interpretar, de maneira estruturada, padrões de dificuldade relacionados ao domínio conceitual, ao desempenho procedimental e à interpretação de enunciados.

Além das contribuições técnicas, este trabalho também representou um avanço significativo na minha formação acadêmica. A pesquisa possibilitou um aprofundamento importante no estudo da Lógica Fuzzy, área pela qual me interessei desde a graduação, ampliando meus conhecimentos teóricos e práticos e fortalecendo minha compreensão das potencialidades dessa abordagem. O desenvolvimento do modelo me permitiu explorar diferentes perspectivas dentro do campo dos sistemas fuzzy e consolidar habilidades relacionadas à implementação de sistemas acoplados, ao uso de variáveis intermediárias e à construção de arquiteturas em camadas.

A construção desta dissertação também possibilitou a participação no VII Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, ocasião em que tive a oportunidade de apresentar parte do estudo realizado, conhecer pesquisadores da área, discutir ideias e ampliar perspectivas sobre as diversas ramificações da Lógica Fuzzy. Essa experiência serviu como estímulo para continuar explorando o campo, aproximando-me de temas como Programação Linear Fuzzy e Sistemas Fuzzy do Tipo 2, que se mostram promissores e motivam estudos futuros.

Essa trajetória acadêmica reforçou meu desejo de seguir pesquisando o tema no doutorado, aprofundando o estudo da Teoria dos Conjuntos Fuzzy e ampliando o escopo de suas possíveis aplicações. Pretendo desenvolver modelos que integrem diferentes formas de incerteza e níveis de complexidade, explorando novas perspectivas metodológicas e fortalecendo a interface entre teoria e prática. Da mesma forma, mantenho meu compromisso com a atuação docente na educação básica e expresso a intenção de, no

futuro, também atuar no ensino superior, levando para esse espaço a articulação entre pesquisa, prática pedagógica e inovação metodológica.

Em síntese, esta pesquisa apresenta um modelo que combina o aspecto conceitual, flexibilidade e aplicabilidade educacional. Ao integrar diferentes variáveis que influenciam o desempenho do estudante, o sistema desenvolvido contribui para a construção de identificações mais detalhadas e informativas, oferecendo uma abordagem complementar às formas tradicionais de avaliação. O trabalho estabelece bases sólidas para investigações futuras, tanto na ampliação das aplicações do modelo quanto na exploração de novas técnicas e metodologias associadas à Lógica Fuzzy, reforçando seu potencial como ferramenta para compreender e apoiar processos de aprendizagem.

# Referências

- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas/SP: IMECC-UNICAMP, 2021.
- BELUCCI, D. P. **Sistemas Baseados em Regras Fuzzy e Aplicações**. 2009. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do ABC, Santo André.
- JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações**. São Carlos/SP: SBMAC, 2012. (Notas em Matemática Aplicada).
- LUNETTA, Camila. **Um modelo matemático via sistema baseado em regras fuzzy para avaliação do processo ensino-aprendizagem**. 2023. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba.
- MARINS, L. R. **Diagnóstico médico por meio de relações fuzzy: dengue, chikungunya ou zica**. 2016. Dissertação de Mestrado – CCET-UFSCar, São Carlos.
- NICOLETTI, M. C.; CAMARGO, H. A. **Fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy**. São Carlos: EdUFSCar, 2011. (Série Apontamentos).
- PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design**. Cambridge: MIT Press, 1998.
- PEIXOTO, M. S. **Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: Um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo**. 2005. Tese de Doutorado – IMECC-UNICAMP, Campinas/SP.
- PERRENOUD, Philippe. **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens – Entre duas lógicas**. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- PISSINI, M. M. **Um estudo fuzzy para propor um modelo matemático como auxílio ao diagnóstico médico das faringotonsilites**. 2019. Dissertação de Mestrado – UFSCar, Sorocaba.
- SILVA, A. L. **Um estudo sobre sistemas baseados em regras fuzzy**. 2020. Dissertação de Mestrado – UFSCar, Sorocaba.
- SILVA, G. C. T.; PEIXOTO, M. S. Uma Proposta Fuzzy para Avaliação do Desempenho Discente. *In*: VII CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS FUZZY (CBSF), 2025. **Anais do VII Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy**. Campinas, SP: [s. n.], 2025. Em preparação.

SOCAS, M. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. *In*: RICO, Luis; AL., et (ed.). **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria**. Barcelona: Horsori, 1997. p. 109–132.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, p. 338–353, 1965.

## APÊNDICE A – Regras do Engajamento

- (1) Se (AC e Baixa) e (FA e Baixa) então (EN e Baixo).
- (2) Se (AC e Baixa) e (FA e Media) então (EN e Baixo).
- (3) Se (AC e Baixa) e (FA e Alta) então (EN e MedioBaixo).
- (4) Se (AC e Media) e (FA e Baixa) então (EN e MedioBaixo).
- (5) Se (AC e Media) e (FA e Media) então (EN e MedioAlto).
- (6) Se (AC e Media) e (FA e Alta) então (EN e Alto).
- (7) Se (AC e Alta) e (FA e Baixa) então (EN e MedioBaixo).
- (8) Se (AC e Alta) e (FA e Media) então (EN e MedioAlto).
- (9) Se (AC e Alta) e (FA e Alta) então (EN e Alto).

## APÊNDICE B – Regras da Consistência

- (1) Se (HP e Baixa) e (FE e Baixa) então (CO e MediaBaixa).
- (2) Se (HP e Baixa) e (FE e Media) então (CO e Baixa).
- (3) Se (HP e Baixa) e (FE e Alta) então (CO e Baixa).
- (4) Se (HP e Media) e (FE e Baixa) então (CO e MediaAlta).
- (5) Se (HP e Media) e (FE e Media) então (CO e MediaBaixa).
- (6) Se (HP e Media) e (FE e Alta) então (CO e Baixa).
- (7) Se (HP e Alta) e (FE e Baixa) então (CO e Alta).
- (8) Se (HP e Alta) e (FE e Media) então (CO e Alta).
- (9) Se (HP e Alta) e (FE e Alta) então (CO e MediaAlta).

## APÊNDICE C – Regras de Identificação

- (1) Se (EN e Baixo) e (CO e Baixa) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (2) Se (EN e Baixo) e (CO e Baixa) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (3) Se (EN e Baixo) e (CO e Baixa) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (4) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (5) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (6) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (7) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaAlta) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (8) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaAlta) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (9) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaAlta) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (10) Se (EN e Baixo) e (CO e Alta) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (11) Se (EN e Baixo) e (CO e Alta) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (12) Se (EN e Baixo) e (CO e Alta) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (13) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Baixa) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (14) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Baixa) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (15) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Baixa) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (16) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (17) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (18) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Alta) então (DC e Baixa).
- (19) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaAlta) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (20) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaAlta) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (21) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaAlta) e (CC e Alta) então (DC e Baixa).
- (22) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Alta) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (23) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Alta) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (24) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Alta) e (CC e Alta) então (DC e Baixa).

- (25) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Baixa) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (26) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Baixa) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (27) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Baixa) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (28) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (29) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (30) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Alta) então (DC e Baixa).
- (31) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaAlta) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (32) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaAlta) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (33) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaAlta) e (CC e Alta) então (DC e Baixa).
- (34) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Alta) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (35) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Alta) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (36) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Alta) e (CC e Alta) então (DC e Baixa).
- (37) Se (EN e Alto) e (CO e Baixa) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (38) Se (EN e Alto) e (CO e Baixa) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (39) Se (EN e Alto) e (CO e Baixa) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (40) Se (EN e Alto) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (41) Se (EN e Alto) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (42) Se (EN e Alto) e (CO e MediaBaixa) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (43) Se (EN e Alto) e (CO e MediaAlta) e (CC e Baixa) então (DC e Alta).
- (44) Se (EN e Alto) e (CO e MediaAlta) e (CC e Media) então (DC e MediaAlta).
- (45) Se (EN e Alto) e (CO e MediaAlta) e (CC e Alta) então (DC e MediaBaixa).
- (46) Se (EN e Alto) e (CO e Alta) e (CC e Baixa) então (DC e MediaAlta).
- (47) Se (EN e Alto) e (CO e Alta) e (CC e Media) então (DC e Baixa).
- (48) Se (EN e Alto) e (CO e Alta) e (CC e Alta) então (DC e Baixa).
- (49) Se (EN e Baixo) e (CO e Baixa) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (50) Se (EN e Baixo) e (CO e Baixa) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).

- (51) Se (EN e Baixo) e (CO e Baixa) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (52) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (53) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (54) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (55) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaAlta) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (56) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaAlta) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (57) Se (EN e Baixo) e (CO e MediaAlta) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (58) Se (EN e Baixo) e (CO e Alta) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (59) Se (EN e Baixo) e (CO e Alta) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (60) Se (EN e Baixo) e (CO e Alta) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (61) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Baixa) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (62) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Baixa) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (63) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Baixa) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (64) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (65) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (66) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Alta) então (DP e Baixa).
- (67) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaAlta) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (68) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaAlta) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (69) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e MediaAlta) e (HP e Alta) então (DP e Baixa).
- (70) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Alta) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (71) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Alta) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (72) Se (EN e MedioBaixo) e (CO e Alta) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (73) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Baixa) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (74) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Baixa) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (75) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Baixa) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (76) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).

- (77) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (78) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Alta) então (DP e Baixa).
- (79) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaAlta) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (80) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaAlta) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (81) Se (EN e MedioAlto) e (CO e MediaAlta) e (HP e Alta) então (DP e Baixa).
- (82) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Alta) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (83) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Alta) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (84) Se (EN e MedioAlto) e (CO e Alta) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (85) Se (EN e Alto) e (CO e Baixa) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (86) Se (EN e Alto) e (CO e Baixa) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (87) Se (EN e Alto) e (CO e Baixa) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (88) Se (EN e Alto) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (89) Se (EN e Alto) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (90) Se (EN e Alto) e (CO e MediaBaixa) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (91) Se (EN e Alto) e (CO e MediaAlta) e (HP e Baixa) então (DP e Alta).
- (92) Se (EN e Alto) e (CO e MediaAlta) e (HP e Media) então (DP e MediaAlta).
- (93) Se (EN e Alto) e (CO e MediaAlta) e (HP e Alta) então (DP e MediaBaixa).
- (94) Se (EN e Alto) e (CO e Alta) e (HP e Baixa) então (DP e MediaAlta).
- (95) Se (EN e Alto) e (CO e Alta) e (HP e Media) então (DP e Baixa).
- (96) Se (EN e Alto) e (CO e Alta) e (HP e Alta) então (DP e Baixa).
- (97) Se (EN e Baixo) e (CC e Baixa) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (98) Se (EN e Baixo) e (CC e Baixa) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).
- (99) Se (EN e Baixo) e (CC e Baixa) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).
- (100) Se (EN e Baixo) e (CC e Media) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (101) Se (EN e Baixo) e (CC e Media) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).
- (102) Se (EN e Baixo) e (CC e Media) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).

- (103) Se (EN e Baixo) e (CC e Alta) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (104) Se (EN e Baixo) e (CC e Alta) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).
- (105) Se (EN e Baixo) e (CC e Alta) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).
- (106) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Baixa) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (107) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Baixa) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).
- (108) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Baixa) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).
- (109) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Media) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (110) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Media) e (IE e Media) então (DI e MediaBaixa).
- (111) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Media) e (IE e Alta) então (DI e Baixa).
- (112) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Alta) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (113) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Alta) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).
- (114) Se (EN e MedioBaixo) e (CC e Alta) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).
- (115) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Baixa) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (116) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Baixa) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).
- (117) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Baixa) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).
- (118) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Media) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (119) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Media) e (IE e Media) então (DI e MediaBaixa).
- (120) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Media) e (IE e Alta) então (DI e Baixa).
- (121) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Alta) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (122) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Alta) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).
- (123) Se (EN e MedioAlto) e (CC e Alta) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).
- (124) Se (EN e Alto) e (CC e Baixa) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (125) Se (EN e Alto) e (CC e Baixa) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).
- (126) Se (EN e Alto) e (CC e Baixa) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).
- (127) Se (EN e Alto) e (CC e Media) e (IE e Baixa) então (DI e Alta).
- (128) Se (EN e Alto) e (CC e Media) e (IE e Media) então (DI e MediaAlta).

(129) Se (EN e Alto) e (CC e Media) e (IE e Alta) então (DI e MediaBaixa).

(130) Se (EN e Alto) e (CC e Alta) e (IE e Baixa) então (DI e MediaAlta).

(131) Se (EN e Alto) e (CC e Alta) e (IE e Media) então (DI e Baixa).

(132) Se (EN e Alto) e (CC e Alta) e (IE e Alta) então (DI e Baixa).