UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

BRUNA FLÓRIO ALBUQUERQUE

CISSOIDE DE DIOCLES: UM POUCO DE HISTÓRIA E APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

SÃO CARLOS
2025

BRUNA FLÓRIO ALBUQUERQUE

CISSOIDE DE DIOCLES: UM POUCO DE HISTÓRIA E APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
Coorientadora: Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa

SÃO CARLOS
2025

Albuquerque, Bruna Flório

Cissoide de Diocles: Um pouco de história e aplicações em sala de aula / Bruna Flório Albuquerque -- 2025.
63f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Luciene Nogueira Bertoncello
Banca Examinadora: Luciene Nogueira Bertoncello, Grazielle Feliciani Barbosa, Miguel Vinícius Santini Frasson
Bibliografia

1. Cissoide de Diocles. 2. Duplicação do cubo. 3. Ensino de matemática. I. Albuquerque, Bruna Flório. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Bruna Florio, realizada em 21/02/2025.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello (UFSCar)

Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson (USP)

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Dedico este trabalho àqueles que sonham, persistem e acreditam no poder transformador do conhecimento.

Aos meus pais e familiares, cuja presença e apoio incondicional foram fundamentais em minha jornada acadêmica, oferecendo forças nos momentos desafiadores.

À memória de Abigail, que, mesmo ausente, deixou marcas profundas em minha vida e ensinamentos que carrego comigo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder forças nos momentos mais difíceis, por iluminar a minha caminhada e permitir que eu chegasse até aqui. Sem Sua graça esta conquista não teria sido possível.

Aos meus pais, pelo amor incondicional, pelo apoio em cada escolha que eu fiz e por acreditarem no meu pontencial mesmo quando eu duvidei. Vocês foram e sempre serão minha maior inspiração e meu alicerce. Obrigada por cada incentivo, cada palavra de conforto e cada gesto de carinho ao longo dessa jornada.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado, vibrando com cada pequena conquista e me amparando nos momentos de cansaço e incerteza. O amor e a presença de vocês foram essenciais para que eu seguisse em frente com coragem e determinação.

À minha orientadora, Profª. Drª. Luciene Nogueira Bertoncello, pela paciência, dedicação e por me guiar com sabedoria ao longo deste trabalho. Seus conhecimentos e suas orientações foram fundamentais para que essa dissertação se concretizasse. Obrigada por acreditar em mim e por me incentivar a sempre buscar mais.

E, por fim, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, seja por meio de palavras de incentivo, ensinamentos valiosos, experiências, ou simplesmente pela presença nos momentos mais desafiadores. Esta conquista não é apenas minha, mas de todos que estiveram ao meu lado nessa jornada.

Muito obrigada!

RESUMO

Esta dissertação aborda a Cissoide de Diocles, uma curva matemática notável, explorando sua história, construção geométrica e propriedades. Em particular, investigamos sua relação com o problema da duplicação do cubo, um dos desafios clássicos da matemática grega. A dissertação discute a evolução histórica desse problema, a impossibilidade da sua construção com régua e compasso e a forma como a Cissoide de Diocles emerge como uma alternativa geométrica para determinar $\sqrt[3]{2}$.

Além da abordagem teórica, é proposta uma sequência didática voltada para o Ensino Médio, na qual os alunos constroem manualmente a curva e a utilizam para encontrar a medida do lado de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado. Como complemento, será utilizado o *software* GeoGebra, permitindo uma visualização mais dinâmica da Cissoide. O plano de aula é descrito detalhadamente, incluindo a construção geométrica e a montagem do cubo em material concreto, promovendo uma abordagem visual e experimental do problema.

Por fim, será discutida a importância dessa abordagem no ensino de matemática, explorando como atividades geométricas históricas podem ser integradas ao currículo moderno para enriquecer a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos fundamentais.

Palavras-chave: Cissoide de Diocles. Duplicação do cubo. Ensino de matemática.

ABSTRACT

This dissertation explores the Cissoid of Diocles, a remarkable mathematical curve, by examining its history, geometric construction, and properties. In particular, we investigate its connection to the problem of cube duplication, one of the classic challenges of Greek mathematics. The dissertation discusses the historical evolution of this problem, the impossibility of its construction using only a ruler and compass, and how the Cissoid of Diocles emerges as a geometric alternative for determining $\sqrt[3]{2}$.

Beyond the theoretical approach, a didactic sequence designed for high school students is proposed, in which students manually construct the curve and use it to determine the side length of a cube whose volume is twice that of a given cube. Additionally, the *GeoGebra* software will be used to provide a more dynamic visualization of the Cissoid. The lesson plan is described in detail, including the geometric construction and the physical assembly of the cube using concrete materials, fostering a visual and experimental approach to the problem.

Finally, the dissertation discusses the importance of this approach in mathematical education, exploring how historical geometric activities can be integrated into the modern curriculum to enrich students' understanding of fundamental mathematical concepts.

Keywords: Cissoid of Diocles. Cube duplication. Mathematical education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA

A matemática, como ciência, se enriquece e tem seu avanço em grande parte pela exploração de problemas desafiadores que incentivam a busca por métodos inovadores e novas teorias. Um exemplo disso é o problema da duplicação do cubo, um dos três grandes problemas clássicos da Antiguidade. Embora sua solução exata no contexto da Geometria Euclidiana seja impossível, a investigação em torno dessa questão resultou no surgimento de diversas curvas notáveis, e entre elas a Cissoide de Diocles.

Nesta dissertação, abordaremos a Cissoide de Diocles sob duas perspectivas: como uma curva matemática de interesse teórico e como uma ferramenta prática no ensino. Sua construção, formulação algébrica e aplicação no problema da duplicação do cubo serão exploradas, permitindo uma abordagem didática que une rigor matemático e ensino acessível.

1.2 JUSTIFICATIVA

A escolha da Cissoide de Diocles como tema desta dissertação está fundamentada em sua relevância matemática e no potencial pedagógico que ela proporciona. A curva, desenvolvida como uma solução para o problema da duplicação do cubo, não apenas ilustra a geniosidade matemática da época, mas serve também como um bom exemplo de como conceitos abstratos podem ser aplicados a problemas reais e concretos.

Do ponto de vista educacional, a Cissoide de Diocles apresenta uma oportunidade singular de explorar tópicos matemáticos de maneira prática e assertiva. Sua construção e análise nos permite transitar por geometria analítica e álgebra, conectando um contexto histórico a conceitos fundamentais. Além disso, seu uso na solução de um problema clássico oferece aos alunos uma visão mais ampla da matemática como um campo de investigação dinâmico e criativo, tornando o abstrato algo palpável, desmistificando a ideia de que a matemática é uma disciplina puramente teórica.

Essa abordagem é especialmente relevante no contexto atual da educação matemática, que busca promover o pensamento crítico e a resolução de problemas como habilidades centrais. Ao propor uma aula baseada na Cissoide, esta dissertação pretende contribuir para a criação de estratégias pedagógicas inovadoras, capazes de engajar os alunos e estimular o aprendizado significativo.

Por fim, a relevância acadêmica do tema é complementada por seu caráter pouco explorado em abordagens didáticas, especialmente em níveis mais básicos de ensino. O presente estudo busca preencher essa lacuna, fornecendo não apenas uma análise teórica da Cissoide de Diocles, mas também propostas que facilitem sua aplicação em sala de aula, promovendo uma conexão efetiva entre pesquisa acadêmica e prática docente.

1.3 OBJETIVO

O objetivo desta dissertação é oferecer uma visão abrangente da Cissoide de Diocles, desde a dedução de suas equações em coordenadas cartesianas e polares, até sua aplicação direta como a solução do problema da duplicação do cubo. Além disso, será desenvolvido um modelo de aula voltado ao Ensino Médio que utiliza a curva como base para ensinar tópicos de álgebra, geometria analítica e funções. Essa abordagem busca demonstrar como a investigação matemática pode ser transformada em uma experiência educacional rica e instigante, capaz de envolver os alunos com a história e os métodos matemáticos de forma prática e convidativa.

Complementarmente, a dissertação explora ferramentas computacionais e gráficas que auxiliam na visualização e na melhor compreensão da curva, tornando a aprendizagem mais dinâmica e interativa. Assim, o trabalho busca integrar conceitos avançados da matemática a estratégias pedagógicas, que promovam uma compreensão mais profunda e contextualizada de problemas clássicos, ilustrando a relevância e a aplicabilidade da matemática além do campo acadêmico.

2 HISTÓRIA DA CISSOIDE DE DIOCLES

2.1 A DESCOBERTA DA CURVA

A Cissoide de Diocles, cuja história remete à matemática da Grécia Antiga, é notável por sua simplicidade, mas possui um toque sofisticado, fazendo dela uma curva interessante. Descoberta por Diocles, no século III a.C., seu estudo está ligado a um dos três grandes problemas da antiguidade: a duplicação do cubo. Essa curva proporcionou uma solução geométrica para o problema, que envolvia a construção de uma nova figura com o dobro do volume de um cubo dado.

2.2 A MITOLOGIA POR TRÁS DO PROBLEMA

O problema da duplicação do cubo é um dos três grandes desafios matemáticos da Grécia Antiga, junto à quadratura do círculo e à trissecção do ângulo. Ele consiste em encontrar, usando apenas régua e compasso, a construção geométrica de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado. Em uma linguaguem mais descritiva, isso equivale a encontrar a medida da aresta do novo cubo, de modo que ele tenha o dobro de volume do cubo anterior, ou seja, encontrar $\sqrt[3]{2}$.

Existem algumas lendas que são contadas a respeito do surgimento deste problema. Uma delas, segundo (EVES, 2011, p.135),

> O problema da duplicação do cubo possa ter sido originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. Minos ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado. O poeta fez então Minos aduzir, incorretamente, que isso poderia ser feito dobrando-se cada uma das dimensões do túmulo. Essa falha matemática da parte do poeta levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma.

Outra história interessante, e frequentemente mencionada, é o “problema de Delos”, descrito por (BOYER C. B.; MERZBACH, 2011., p.57). De acordo com os autores, o problema surgiu de uma lenda grega na qual o oráculo de Apolo foi consultado pelos habitantes de Atenas durante uma peste que os assolava, em busca de uma solução para erradicarem a praga, e a resposta foi que o altar cúbico dedicado ao deus Apolo deveria sem duplicado em volume. No entanto, ao tentarem cumprir a ordem, os atenienses dobraram as dimensões do altar, resultando em um volume oito vezes maior, ao invés de duas vezes.

Independente de qual seja verdadeira, ambas as histórias mostraram que a solução parecia ser óbvia, mas nenhuma delas atingiu o objetivo. E isso se tornou um desafio para os matemáticos daquela época, que tinham apenas régua e compasso para construir um cubo, cujo volume fosse o dobro de um cubo que eles já possuíam.

2.3 O PROBLEMA MATEMÁTICO

Matematicamente, o problema da duplicação do cubo consiste em encontrar a $\sqrt[3]{2}$, ou seja, dado um cubo de aresta *a*, queremos construir um cubo de aresta *b*, tal que o volume desse cubo seja o dobro do volume do cubo inicial.

Em termos de cálculo de volume, temos:

$$b^3 = 2a^3.$$

Isolando *b*:

$$b = a\sqrt[3]{2}.$$

Por fim, o desafio proposto pelos gregos era resolver essa emblemática usando apenas régua e compasso, ferramentas que eram consideradas indispensáveis e fundamentais para a geometria na época. Contudo, posteriormente, foi provado que essa construção era impossível.

Esse problema levou à exploração de técnicas geométricas e ao desenvolvimento de ferramentas matemáticas mais avançadas. E um desses avanços, que ficou muito conhecido, foi a Cissoide de Diocles, uma curva projetada especificamente para resolver a duplicação do cubo. Vamos defini-la melhor no próximo capítulo, mas para melhor compreensão, escaneie o **QR Code** ao lado para acessar uma animação no *GeoGebra* sobre a construção do segmento $\sqrt[3]{2}$.

2.4 RELEVÂNCIA HISTÓRICA E O IMPACTO NA MATEMÁTICA MODERNA

A Cissoide de Diocles transcendeu seu propósito inicial e se tornou um marco significativo no desenvolvimento da matemática. Essa curva foi uma das primeiras a demonstrar como problemas geométricos poderiam ser resolvidos através da introdução de novos objetos matemáticos, que iam além das ferramentas tradicionais.

Embora os registros específicos sobre a Cissoide de Diocles sejam limitados durante a Idade Média, matemáticos islâmicos desempenharam um papel essencial na preservação e expansão dos conhecimentos da Antiguidade (ROQUE, 2011). Eles aprofundaram o estudo de conceitos relacionados a curvas e seções cônicas, que mais tarde influenciaram o Renascimento Europeu. Esses avanços contribuíram para a recuperação e o desenvolvimento de ideias geométricas nos séculos seguintes.

No Renascimento, matemáticos europeus revisitaram a Cissoide de Diocles e outras curvas clássicas enquanto exploravam novas abordagens algébricas e geométricas (BOYER

C. B.; MERZBACH, 2011.). Durante esse período, o surgimento da geometria analítica por Descartes e Fermat possibilitou a representação e análise de curvas por meio de equações algébricas (ROQUE, 2011). Essas inovações tornaram a Cissoide novamente relevante, não apenas como uma ferramenta geométrica, mas também como um exemplo de como a matemática clássica poderia ser reinterpretada sob novas perspectivas analíticas.

Na matemática moderna, a Cissoide de Diocles desempenhou um papel importante na consolidação da geometria analítica e no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Além disso, sua influência estende-se a campos como a teoria das curvas algébricas e a geometria diferencial. A Cissoide também possui relevância filosófica, pois exemplifica a evolução do pensamento crítico matemático: desde a busca por soluções práticas na Antiguidade até o desenvolvimento de teorias abstratas que moldaram a matemática moderna.

3 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

O conceito de Cissoide surge na geometria como uma construção que gera curvas a partir de uma base geométrica e um ponto fixo. Diversas curvas notáveis podem ser obtidas por esse método, sendo a Cissoide de Diocles um dos exemplos mais estudados. No entanto, antes de analisá-la, é importante entender o que é uma Cissoide de modo geral e explorar alguns exemplos distintos.

Um definição, apresentada por (RIBEIRO, 2012), é a seguinte:

Definição 3.1. Sejam f_1 e f_2 duas curvas quaisquer e O um ponto fixo. Desenhemos uma semirreta com origem em O e que intecepte f_1 e f_2 em R e Q, respectivamente. Consideremos ainda um ponto P tal que $OP = QR$. Ao lugar geométrico descrito por P chama-se *Cissoide de f_1 e f_2 relativamente ao ponto O*.

Vejamos algumas exemplos de Cissoide, conforme a definição:

1. Cissoide de uma Circunferência: Lemniscata de Bernoulli

A Lemniscata de Bernoulli é uma curva algébrica do plano que pode ser definida como o conjunto de pontos cuja multiplicação das distâncias a dois focos fixos é constante. Formalmente, dada uma constante positiva b e dois focos F_1 e F_2, com coordenadas $(b, 0)$ e $(-b, 0)$, respectivamente, a lemniscata é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que:

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = b^2$$

Essa curva foi estudada por Jacob Bernoulli em 1694, que a nomeou a partir do latim *lemniscus*, significando "laço de fita". Sua forma lembra um "oito deitado", sendo atualmente associada ao símbolo do infinito ∞.

A figura abaixo representa a definição da Lemniscata de Bernoulli.

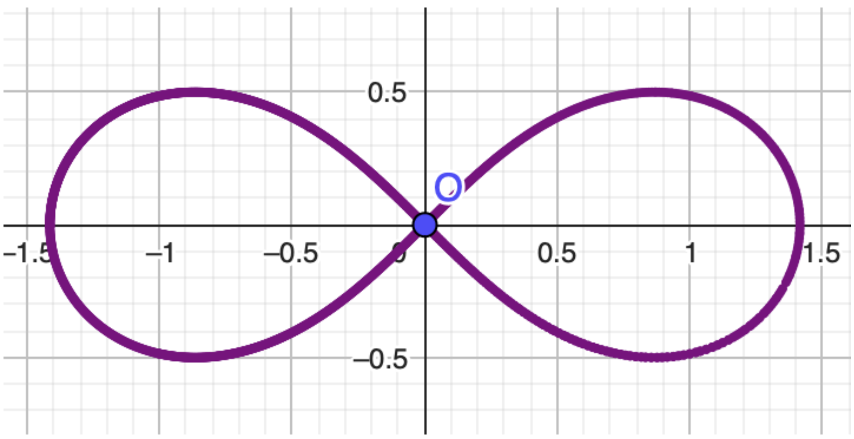


Figura 3.1 – Lemniscata de Bernoulli

Escaneie o **QR Code** para acessar uma animação interativa no *GeoGebra* sobre a Lemniscata de Bernoulli.

Segundo (REIS; ALMEIDA, 2008), para encontrar a equação cartesiana da Lemniscata de Bernoulli, consideremos um sistema ortogonal de coordenadas onde os focos são dados por $F_1(b,0)$ e $F_2(-b,0)$ e usando a fórmula da distância euclidiana para expressar $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$$

e

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x+b)^2 + y^2},$$

a condição de lemniscata nos dá:

$$\sqrt{(x-b)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+b)^2 + y^2} = b^2$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$[(x-b)^2 + y^2][(x+b)^2 + y^2] = b^4 \Rightarrow (x-b)^2(x+b)^2 + (x+b)^2y^2 + y^2(x-b)^2 + y^4 = b^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(x-b)(x+b)]^2 + y^2[(x+b)^2 + (x-b)^2] + y^4 = b^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - b^2)^2 + y^2[x^2 + 2xb + b^2 + x^2 - 2xb + b^2] + y^4 = b^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2b^2 + b^4 + y^2(2x^2 + 2b^2) + y^4 = b^4$$

Cancelando b^4 e reorganizando, temos:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2b^2(x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = 0$$

Assim, a equação cartesiana da Lemniscata de Bernoulli com focos $F_1(b,0)$ e $F_2(-b,0)$ é dada por:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2b^2(x^2 - y^2)$$

E escrevendo $x = \rho\ cos(\theta)$ e $y = \rho\ sen(\theta)$, com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, substituindo essas coordenadas na equação cartesiana e reorganizando, obtemos:

$$\rho^2(\theta) = 2b^2\ cos(2\theta)$$

com $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Esta é a equação da Lemniscata de Bernoulli determinada pela constante b em coordenadas polares.

A Lemniscata de Bernoulli também pode ser definida como a Cissoide de uma circunferência em relação a um ponto fixo.

Para demonstrar isso, consideremos uma circunferência C_1 de diâmetro $\sqrt{2}b$ e um ponto fixo O a uma distância b do centro da circunferência. A Cissoide buscada é o lugar geométrico dos pontos P tal que $\overline{OP} = \overline{P_1P_2}$, onde P_1 e P_2 são os pontos de interseção de uma reta passando por O com a circunferência C_1.

A equação da circunferência C_1 é dada por:

$$(x - b)^2 + y^2 = \frac{b^2}{2}$$

Convertendo para coordenadas polares (ρ, θ), onde $x = \rho\ cos(\theta)$ e $y = \rho\ sen(\theta)$, substituímos e obtemos:

$$\rho^2(cos^2(\theta) + sen^2(\theta)) - 2b\rho\ cos(\theta) + b^2 = \frac{b^2}{2}$$

Os passos algébricos foram omitidos para brevidade, ficando a cargo do leitor a verificação detalhada dos cálculos. Dessa forma, obtemos:

$$\rho^2 = 2b\ cos(2\theta)$$

Esta é exatamente a equação polar da Lemniscata de Bernoulli, provando assim que essa curva pode ser obtida como a Cissoide de uma circunferência em relação a um ponto fixo.

2. Concoide de Nicomedes

O matemático grego Nicomedes, viveu por volta de III a.C., conhecido principalmente por suas contribuições à geometria, em especial, por sua invenção da Concoide de Nicomedes, uma curva que solucionou um dos grandes problemas clássicos da Antiguidade, a trisecção do ângulo, que resumidamente seria: dado um ângulo agudo, queremos construir um ângulo que é igual a um terço do ângulo dado.

A Concoide de Nicomedes, segundo (HOFFMANN, 2008), é uma curva definida como o conjunto de pontos obtidos ao longo de retas que passam por um ponto fixo e que estão a uma distância constante k de um reta fixa, ou seja, a curva é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ situados sobre uma reta que passa por um ponto fixo $O = (0, 0)$ a uma distância fixa k de uma reta dada $x = a$.

Dessa forma, se tomarmos uma reta qualquer que passa por O e intercepta a reta $x = a$ num ponto $Q = (x_q, y_q)$, então os pontos da Concoide são aqueles que estão a uma distância k de Q ao longo dessa mesma reta.

Qualquer reta que passa pela origem pode ser escrita na forma $y = mx$.

Essa reta intercepta $x = a$ no ponto $Q(a, ma)$, onde m é o coeficiente angular da reta.

Os pontos $P(x, y)$ estão a uma distância k de $Q(a, ma)$ ao longo dessa reta, isso significa que P satisfaz a equação da circunferência centrada em Q e raio k:

$$(x - a)^2 + (y - ma)^2 = k^2$$

Substituindo $m = \dfrac{y}{x}$ e expandindo os quadrados, temos:

$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - \frac{2y^2a}{x} + \frac{y^2a^2}{x^2} = k^2$$

Multiplicando a igualdade por x^2 para eliminarmos os denominadores:

$$x^4 - 2x^3a + a^2x^2 + y^2x^2 - 2y^2ax + y^2a^2 = k^2x^2$$

Reorganizando, temos o seguinte:

$$x^2(x^2 - 2xa + a^2) + y^2(x^2 - 2xa + a^2) = k^2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)(x^2 - 2xa + a^2) = k^2x^2$$

Portanto, a equação cartesiana da Concoide de Nicomedes é dada por

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) = k^2x^2.$$

Para escrevermos a equação em coordenadas polares da Concoide de Nicomedes, basta utilizar as transformações $x = \rho\, cos(\theta)$ e $y = \rho\, sen(\theta)$ e substituir na equação cartesiana.

Os cálculos algébricos ficarão a cargo do leitor.

Por fim, temos que $r = a\, sec(\theta) + k$ é a equação em coordenadas polares da Concoide de Nicomedes.

A curva recebe esse nome porque é composta por pontos que possuem uma distância fixa em relação a uma reta, lembrando o forma de uma concha (concoide). A imagem a seguir ilustra essa Cissoide, que foi retirada de (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996):

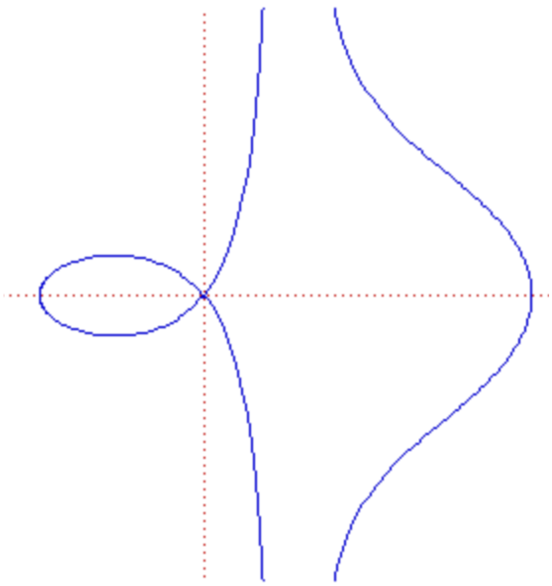


Figura 3.2 – Concoide de Nicomedes

QR Code para uma animação da Concoide de Nicomedes no *GeoGebra*.

E, assim como a Lemniscata de Bernoulli, a Concoide de Nicomedes também é denominada uma Cissoide.

De fato, como se sabe que a Concoide de Nicomedes é definida como o lugar geométrico dos pontos P situados a uma distância fixa k de uma reta, medida ao longo das retas que passam por um ponto fixo O.

Se tomamos uma reta fixa $x = a$ e um ponto fixo $O = (0, 0)$, temos que equação em coordenadas polares da Concoide é $r = a\,sec(\theta) + k$.

Para qualquer reta que passe por O, o ponto Q de interseção dessa reta com a reta $x = a$ tem coordenadas $Q = (a, a\tan(\theta))$. Logo, a distância de O até Q é

$$\overline{OQ} = \sqrt{(a-0)^2 + (a\tan(\theta) - 0)^2} = \sqrt{a^2 + a^2\tan^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2(\theta))} = \sqrt{a^2\ \sec^2(\theta)}$$

Logo, $\overline{OQ} = a\ \sec(\theta)$.

E, pela definição, a distância de $PQ = k$. Assim,

$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{PQ} \Rightarrow \overline{OP} = a \ \sec(\theta) + k,$$

que é exatamente a equação polar da Concoide de Nicomedes. Portanto, ela é uma Cissoide.

Estes foram alguns exemplos de curvas que são classificadas como Cissoide conforme a definição feita no início do capítulo. Isso quer dizer que ”curvas geradas por um processo análago ao da definição são designadas Cissoides. Em grego: kissós (hera) eidos (forma).”(REIS; ALMEIDA, 2008), p. 264. E assim, atualmente é usado uma outra definição para a Cissoide de Diocles, onde as curvas envolvidas são uma circunferência e uma reta tangente à essa circunferência. E (REIS; ALMEIDA, 2008) escreve como sendo:

Definição 3.2. A Cissoide de Diocles é a Cissoide de uma circunferência C_1 e uma reta C_2 tangente a circunferência C_1, com respeito ao polo O pertencente à circunferência e diametralmente oposto ao ponto de tangência.

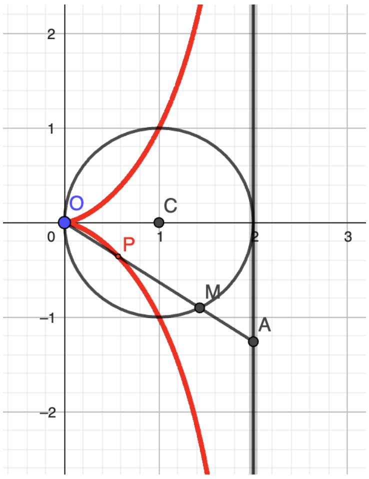


Figura 3.3 – Cissoide pela definição de Diocles

A equação da Cissoide de Diocles pode ser obtida a partir da sua definição geométrica, relacionando-a com as propriedades matemáticas das cônicas. Neste capítulo, serão apresentadas as equações tanto em coordenadas polares quanto cartesianas. Para fundamentar essa exposição, utilizaremos como base os estudos de (SANTOS, 2016) e (FRENSEL, 2017), que fornecem uma abordagem detalhada sobre as deduções dessas equações.

3.1 EQUAÇÃO EM COORDENADAS POLARES

Conforme já vimos, consideremos uma circunferência de diâmetro OA e uma reta tangente a ela em $A = (2a, 0)$. Seja AB um segmento nessa reta, e C o ponto de interseção da circunferência com a reta OB. A Cissoide é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ tais que a distância de *OP* seja igual à distância de *CB*, conforme a figura abaixo, retirada da aula 4 de Geometria Analítica II, de (FRENSEL, 2017):

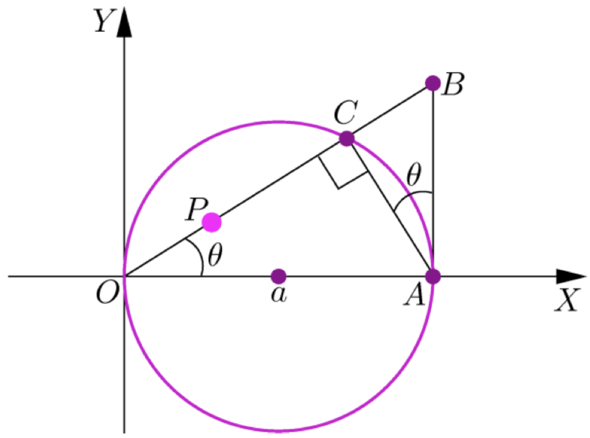


Figura 3.4 – Circunferência que gera a Cissoide

A equação polar dessa curva é determinada da seguinte maneira.

Seja θ o ângulo formado pelo eixo x e a reta OB. Do triângulo retângulo OAB obtemos $\tan(\theta) = \dfrac{AB}{2a}$, e disso temos que $AB = 2a \cdot \tan(\theta)$.

Agora, pelo triângulo retângulo ACB, temos que $sen(\theta) = \dfrac{CB}{AB}$. E pela definição da Cissoide, $CB = OP = \rho$. Logo, $\rho = AB \cdot sen(\theta)$.

Substituindo AB nessa última igualdade, encontramos $\rho = 2a \cdot tan(\theta) \cdot sen(\theta)$, com $\theta \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. E esta é considerada a equação polar da Cissoide de Diocles.

3.2 EQUAÇÃO EM COORDENADAS CARTESIANAS

A equação cartesiana da Cissoide de Diocles pode ser obtida a partir da sua equação polar. Vamos reescrevê-la e convertê-la para o sistema cartesiano:

$$\rho = 2a \cdot tan(\theta) \cdot sen(\theta)$$

Substituindo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad e \quad sen(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

na equação polar, obtemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a\frac{y}{x}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \iff x^2 + y^2 = \frac{2ay^2}{x} \iff x^3 + y^2x = 2ay^2 \iff x^3 = y^2(2a - x)$$

Assim, a equação em coordenadas cartesianas da Cissoide de Diocles é da forma

$$y^2 = \frac{x^3}{(2a - x)}.$$

3.3 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Com base na explicação de (REIS; ALMEIDA, 2008) e com a definição da Cissoide de Diocles como o conjunto de pontos P que satisfazem as seguintes condições:

- Sejam uma circunferência C_1 de raio a, centrada no ponto $A(a, 0)$, e uma reta tangente C_2 à circunferência, no ponto P_1.
- Para cada ponto P_1 na circunferência, tomamos o ponto P_2 na reta tangente C_2, de modo que $\overline{OP_2} = \overline{OP_1}$, onde O é a origem.

A Cissoide de Diocles é o lugar geométrico dos pontos P_2.

Nosso objetivo é encontrar a parametrização $(x(t), y(t))$, que descreve essa curva.
A equação da circunferência centrada em $A(a, 0)$ com raio a é dada por

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

Podemos parametrizar este ponto em termos de um ângulo θ:

$$P_1 = (a\,cos(\theta) + a, a\,sen(\theta))$$

com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Pela definição da Cissoide de Diocles, o ponto P_2 é determinado pela condição:

$$\overline{OP_2} = \overline{OP_1}$$

Podemos expressar essa distância de $O = (0, 0)$ à P_1 como:

$$\overline{OP_1} = \sqrt{(a\,cos(\theta) + a)^2 + (a\,sen(\theta))^2}$$

Expandindo, temos

$$\overline{OP_1} = \sqrt{a^2cos^2(\theta) + 2a^2cos(\theta) + a^2 + a^2sen^2(\theta)} = \sqrt{a^2(cos^2(\theta) + sen^2(\theta) + 2a^2cos(\theta) + a^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a^2cos(\theta) + a^2} = \sqrt{2a^2(cos(\theta) + 1)}$$

Usando a identidade trigonométrica $1 + cos(\theta) = 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$\overline{OP_1} = \sqrt{2a^2 \cdot 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{4a^2 \cdot cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2a \cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \overline{OP_2}$$

O ponto P_2 pertence à reta $x = a$, e, como a reta que passa por O e P_1 tem inclinação

$$m = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{asen(\theta)}{a + acos(\theta)}$$

E, novamente usando a identidade trigonométrica $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen(\theta}{1 + cos(\theta)}$, podemos reescrever a inclinação como:

$$m = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Portanto, a equação da reta que passa por O e P_1 é da forma $y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot x$, e como $x = a$, fica

$$y_2 = a \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Porém, como a construção permite pontos simétricos em relação ao eixo x, temos

$$y_2 = \pm 2a \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Então, o ponto P_2 pode ser escrito como

$$P_2 = \left(a, \pm 2a \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

e o sinal vai depender da posição de P_1.

A ideia da parametrização é expressar as coordenadas x e y em função de um único parâmetro, sem depender diretamente de ângulos trigonométricos, como por exemplo θ.

Para isso, vamos utilizar uma substituição trigonométrica clássica: $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Assim,

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen(\theta/2)}{cos(\theta/2)}$$

Usando as fórmulas de ângulo duplo:

$$sen(\theta) = sen\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 2sen\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

e

$$cos(\theta) = cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Agora, expressando $sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ em termos de t,

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

e substituindo nas fórmulas, obtemos:

$$sen(\theta) = 2 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos(\theta) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Agora, substituímos essas identidades na equação da Cissoide, e substituindo também $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, temos

$$y_2 = \pm 2at$$

Para a coordenada x, sabemos que a equação da Cissoide pode ser escrita como $x = a\frac{1-cos(\theta}{1+cos(\theta}$

Fazendo os cálculos algébricos necessários, concluímos que

$$x = a\frac{t^2}{1+t^2}$$

e para y temos

$$y = a\frac{t^3}{1+t^2}$$

E, portanto, estas são as equações paramétricas da Cissoide de Diocles.

3.4 PROPRIEDADES DA CISSOIDE

Nesta seção abordaremos algumas propriedades da Cissoide de Diocles, e para isso foi utilizado de referência a obra *"An Elementary Treatiase on Cubic and Quartic Curves"*, de (BASSET, 1901). No capítulo *VI* do livro o autor se dedicou a uma análise profunda da curva, que será apresentada aqui, mas as demonstrações rigorosas ficarão a cargo do leitor, que conseguirá encontrá-las na referência.

3.4.1 Diferenciação Implícita e Equação Tangencial

Para obter a equação da tangente à curva em um ponto $P(x_1, y_1)$, diferenciamos implicitamente a equação da Cissoide.

Partindo de:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

Aplicando a diferenciação implícita, encontramos a derivada de y em relação a x:

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2)(2a - x) + x^3}{(2a - x)^2}$$

Simplificando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(2a - x) + x^3}{2y(2a - x)^2}$$

Essa expressão nos dá a inclinação da reta tangente à Cissoide em qualquer ponto $P(x_1, y_1)$. Usando essa inclinação, a equação tangencial pode ser expressa como:

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)(x - x_1)$$

Caro leitor, (BASSET, 1901) apresenta a derivação com um rigor matemático detalhado, focando em como a inclinação da tangente se comporta em diferentes pontos da curva, caso tenha interesse em ver.

3.4.2 Interseções com o eixo x

A Cissoide de Diocles intersecta o eixo x em pontos críticos que são determinados pela solução da equação

$$y^2 = 0 \Rightarrow x^3 = 0$$

Portanto, temos a interseção em $x = 0$.

Esse ponto de interseção não apenas define a extensão horizontal da curva, mas também é fundamental na análise da sua simetria e comportamento em relação a outras funções. Basset destaca que o ponto $(0, 0)$ é uma singularidade da curva, que merece uma análise mais detalhada.

3.4.3 Simetria

Em relação ao eixo x, a Cissoide é simétrica.

De fato, a equação que define a curva é $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.

Se substituirmos y por $-y$, a equação ainda é válida, pois o lado esquerdo y^2 continua o mesmo, e o lado direito permanece inalterado.

Assim, para cada ponto (x, y) na curva, existe um ponto correspondente $(x, -y)$, confirmando a simetria em relação ao eixo x.

Por outro lado, a Cissoide não é simétrica em relação ao eixo y. Para entender isso, podemos observar que, ao substituir x por $-x$ na equação, obtemos uma nova relação, que não é equivalente à original, pois teríamos $y^2 = \dfrac{-x^3}{2a + x}$.

Logo, não podemos garantir que existe um ponto $(-x, y)$ correspondente para cada (x, y) na Cissoide.

A Cissoide também não é simétrica em relação à origem, o que significa que, para cada ponto (x, y), não existe um ponto correspondente $(-x, -y)$ na curva.

Para verificar isso, podemos observar que se substituirmos x por $-x$ e y por $-y$, temos:

$$(-y)^2 = \frac{(-x)^3}{2a - (-x)} \Rightarrow y^2 = \frac{-x^3}{2a + x}$$

E, novamente, essa relação aparece, mas não é equiavalente à original. Portanto, a simetria em relação à origem não é estritamente válida para todos os pontos, mas a estrutura da curva sugere um comportamento refletivo em torno da origem.

3.4.4 Singularidade na origem

O estudo das singularidades é crucial na análise das propriedades de uma curva. Na Cissoide de Diocles, a origem é um ponto singular onde a inclinação da reta tangente se anula.

A partir da derivada,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

em $(0, 0)$, podemos observar que a equação tangencial não se comporta igualmente como em pontos normais na curva. A singularidade implica que a Cissoide não tem uma tangente bem definida nesse ponto, o que resulta em um comportamento não contínuo quando analisamos a vizinhança da origem.

(BASSET, 1901) utiliza uma abordagem técnica, que não será apresentada aqui, para mostrar que, ao calcular a segunda derivada no ponto singular, obtemos algo que é indefinido. E com isso, conclui-se que a curva apresenta um ponto de inflexão em $(0, 0)$.

3.4.5 Comportamento assintótico

O comportamento assintótico da Cissoide de Diocles é particularmente interessante.

A equação cartesiana é da forma

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

onde a é uma constante, e a curva é definida para valores de x no intervalo $0 \leq x < 2a$. Quando x se aproxima de 0 ou de $2a$, o comportamento da curva revela suas características assintóticas.

QUANDO $x \to 2a$

Quando $x \to 2a$, o denominador da equação $(2a - x)$ se aproxima de zero, o que sugere que y^2 tende a valores muito grandes. Vamos explorar isso mais formalmente.

A equação $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ se comporta assimetricamente à medida que $x \to 2a$, com o numerador crescendo mais lentamente do que o denominador diminui, ou seja, a medida que $x \to 2a^-$, $y^2 \to \infty$ e, portanto, $y \to \pm\infty$. Isso indica que a curva possui uma assíntota vertical em $x = 2a$.

Essa assíntota vertical mostra que, conforme x se aproxima de $2a$ pela esquerda, os valores de y aumentam indefinidamente, isso significa que a curva ‘explode” verticalmente.

QUANDO $x \to 0$

Agora vamos ver o que acontece quando $x \to 0$.

Substituindo $x = 0$ na equação da Cissoide, temos que $y^2 = \dfrac{0}{2a - 0} = 0$. Logo, $y = 0$.

Isso indica que a Cissoide de Diocles passa pela origem $(0, 0)$.

Valores de x próximos a 0, o termo $\dfrac{x^3}{2a - x}$ é muito pequeno, e y tende a valores pequenos conforme x se aproxima de 0. Portanto, a curva se aproxima suavemente da origem.

QUANDO $x \to \infty$

Tecnicamente, o domínio da Cissoide de Diocles não inclui valores de $x > 2a$, mas é interessante se perguntar o que aconteceria quando $x \to \infty$, de maneira hipotética.

Se considerássemos uma extensão da equação para $x > 2a$, o termo $2a - x$ seria negativo, levando a valores complexos para y. Isso nos diz que a curva não está definida para $x > 2a$, confirmando assim a presença da assíntota vertical em $x = 2a$.

4 UM POUCO DE INVERSÃO NO PLANO

4.1 INVERSÃO NO PLANO

Considere, no plano, uma circunferência $\mathcal{C}$ com centro em O e raio r. Seja P um ponto qualquer no plano, diferente de O.

Defina o ponto P' da seguinte maneira:

- Se $P \in \mathcal{C}$, então $P' = P$;
- Se $\overline{OP} < r$, na semirreta $\overrightarrow{OP}$, levante uma perpendicular s por P. Tome o ponto T em $\mathcal{C} \cap s$. Então, tome $P' \in \overrightarrow{OP} \cap t$, com t tangente a $\mathcal{C}$ por T;

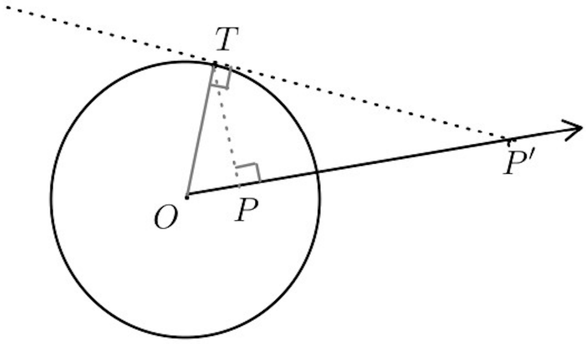


Figura 4.1 – Posição de P' quando $\overline{OP} < r$

- Se $\overline{OP} > r$, uma reta tangente a $\mathcal{C}$ por P determina um ponto $T \in \mathcal{C}$. Tome P' a projeção ortogonal de T em $\overrightarrow{OP}$.

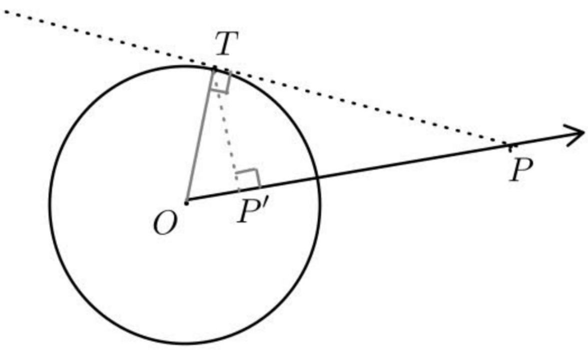


Figura 4.2 – Posição de P' quando $\overline{OP} > r$

Assim, fica bem definida, para a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e raio r, uma transformação, chamada de *inversão*, dada por:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}: & \mathbb{R}^2 - \{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 - \{O\} \\ & P & \longmapsto & \mathcal{I}_{\mathcal{C}} = P' \end{array}$$

O ponto O é chamado de centro da inversão.

4.2 PROPRIEDADES DA INVERSÃO

Na figura 4.2, note que os triângulos OTP' e OPT são semelhantes (caso ângulo-ângulo), segue que

$$\frac{OT}{OP} = \frac{OP'}{OT} = \frac{TP'}{PT}.$$

Como $OT = r$, temos

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Desse modo, temos a seguinte propriedade:

Propriedade: Se $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P)$, então $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.

Ou seja, $\overline{OP}$ e $\overline{OP'}$ são inversamente proporcionais entre si, ou seja, à medida que P se afasta do centro de inversão, P' se aproxima do centro de inversão, e vice-versa.

Definição 4.1. (Inversão de uma curva) Se temos uma curva Γ no plano, então sua inversão é a curva formada pelo conjunto de pontos

$$\Gamma' = \{P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P) : P \in \Gamma\}.$$

Outras propriedades importantes da Inversão:

- **Involutividade:** Aplicar a inversão duas vezes (com o mesmo centro e raio) retorna o ponto original, ou seja, a inversão é uma transformação involutória.
- **Conformidade:** A inversão preserva ângulos (medidos entre curvas que se cruzam), o que a torna uma transformação conformal.

4.3 TRANSFORMAÇÃO DE CÍRCULOS E RETAS

Vamos calcular as coordenadas de $P' = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(P)$ em função das coordenadas de P. Para isso, usaremos um pouco de geometria vetorial.

Seja $O = (a, b)$ e r o raio de C. Pela definição de inversão, temos que os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OP'}$ têm mesma direção e sentido. Além disso, o comprimento de $\overrightarrow{OP'} = \dfrac{r^2}{|\overrightarrow{OP}|}$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP'} &= |\overrightarrow{OP'}|\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} \\
&= \frac{r^2}{|\overrightarrow{OP}|}\left(\frac{x-a}{|\overrightarrow{OP}|}, \frac{y-b}{|\overrightarrow{OP}|}\right) \\
&= \frac{r^2}{|\overrightarrow{OP}|^2}(x-a, y-b).
\end{aligned}$$

Agora, como $\overrightarrow{OP'} = (x' - a, y' - b)$, segue que

$$x' = a + \frac{r^2(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

e

$$y' = b + \frac{r^2(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Vejamos um exemplo numérico dessa transformação:

Exemplo: Considere a circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio $r = 3$. Seja $P = (4, 2)$, um ponto fora da curva. Então sua inversão é dada por

$$P' = \left(\frac{3^2 \cdot 4}{4^2 + 2^2}, \frac{3^2 \cdot 2}{4^2 + 2^2}\right) = \left(\frac{36}{20}, \frac{18}{20}\right) = (1.8, 0.9)$$

Geometricamente, isso significa que o ponto P' está mais próximo do centro da circunferência do que P, pois a inversão nesse tipo de caso (pontos fora da circunferência) reduz distâncias. Além disso, ele se encontra na mesma direção radial de P, ilustrando que inversão preserva alinhamentos em relação ao centro.

Proposição 4.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência com centro $O = (a, b)$ e raio $r > 0$. Então, a inversão em $\mathcal{C}$ leva:*

(i) *A inversão de uma reta que não passa pelo centro da inversão é uma circunferência que passa pelo centro da inversão e reciprocamente.*

(ii) *A inversão de uma circunferência que não passa pelo centro da inversão é uma circunferência.*

(iii) *Uma reta que passa pelo centro da inversão é a própria reta, isto é, a reta é invariante por inversão.*

Caro leitor, a demonstração geral dessa proposição não será apresentada neste trabalho, mas você encontra disponível em (LINARES, 2022). Em vez disso, consideramos um caso particular que exemplifica uma de suas consequências.

Uma inversão leva retas que não passam pelo centro da inversão em circunferências que passam pelo centro da inversão.

Para simplificar os cálculos, vamos considerar uma inversão no círculo unitário $\mathcal{C} : x^2+y^2 = 1$. Isso é, a imagem de $P = (x, y)$ é dada por:

$$P' = (x', y') = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Assim,

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{1}{x'^2+y'^2}.$$

Logo, temos a relação:

$$x = (x^2+y^2)x' = \frac{x'}{x'^2+y'^2}$$

$$y = (x^2+y^2)y' = \frac{y'}{x'^2+y'^2}.$$

Agora, se $s : ax + by + c$ uma reta que não passa por $O = (0, 0)$, substituindo na equação de s as fórmulas acima temos:

$$a\left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}\right) + b\left(\frac{y'}{x'^2+y'^2}\right) + c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$ax' + by' + c(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Como a reta s não passa pela origem, $c \neq 0$, a equação acima fica:

$$x'^2 + y'^2 + \frac{a}{c}x' + \frac{b}{c}y' = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(x' + \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(y' + \frac{b}{2c}\right)^2 = \left(\frac{a}{2c}\right)^2 + \left(\frac{b}{2c}\right)^2$$

que é a equação de uma circunferência com centro $\left(-\frac{a}{2c}, -\frac{b}{2c}\right)$ e raio $\sqrt{\left(\frac{a}{2c}\right)^2 + \left(\frac{b}{2c}\right)^2}$.

Portanto, uma reta que não passa pela origem (centro da inversão) é levada em uma circunferência que passa pela origem.

Agora, se a reta $s : ax + by + c = 0$, passa pela origem, então $c = 0$ e a equação da curva obtida pela inversão é dada por:

$$ax' + by' = 0$$

que é a equação de uma reta que passa pela origem.

4.4 CISSOIDE DE DIOCLES E INVERSÕES

Nesta seção, vamos provar que a Cissoide de Diócles pode ser obtida pela inversão de uma parábola.

Considere a inversão dada pela circunferência com centro da origem e raio $r = 2a$, com $a > 0$. Assim, com as notações acima:

$$P' = (x', y') = \left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \right).$$

Assim,

$$(x')^2 + (y')^2 = \frac{r^4 x^2}{[x^2 + y^2]^2} + \frac{r^4 y^2}{[x^2 + y^2]^2} = \frac{r^4}{x^2 + y^2}.$$

Dessa forma, obtemos

$$x = (x^2 + y^2)\frac{x'}{r^2} = \frac{r^2 x'}{(x')^2 + (y')^2}$$

e

$$y = (x^2 + y^2)\frac{y'}{r^2} = \frac{r^2 y'}{(x')^2 + (y')^2}.$$

Agora, considere a parábola de equação $y^2 = 2ax$, que pode ser reescrita na forma $y^2 = \dfrac{r^2}{2a}x$. Aplicando as equações de inversão nessa última equação, obtemos:

$$y^2 = \frac{r^2}{2a}x \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{r^4(y')^2}{(x')^2+(y')^2} = \frac{r^2}{2a}\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$2a(y')^2 = (x')^3 + x'(y')^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2a-x)y'^2 = (x')^3$$

$$\therefore y'^2 = \frac{x'^3}{2a-x}$$

que é a equação cartesiana da Cissoide de Diocles.

Acabamos de provar a seguinte proposição:

Proposição 4.2. *A Cissoide de Diocles pode ser obtida como a imagem da parábola* $y^2 = 2ax$ *pela inversão em uma circunferência de centro na origem e raio* $r = 2a$*.*

4.5 INVERSÕES NO GEOGEBRA

A inversão geométrica é uma transformação poderosa que pode ser visualizada e explorada dinamicamente utilizando ferramentas computacionais como o GeoGebra. Esse *software* nos permite investigar as propriedades da inversão aplicando-a a diferentes objetos geométricos, como pontos, retas e curvas. A seguir, apresentamos um guia prático para realizar inversões no GeoGebra.

1. Crie uma circunferência com centro $O = (0, 0)$ e raio r;
2. Insira um ponto P fora da circunferência;
3. Use o comando **Reflexão(P,C)** para obtero o ponto inverso P';
4. Para visualizar a inversão de uma curva, insira a equação da curva desejada e aplique o comando de reflexão.

A imagem a seguir ilustra a equação da parábola $y^2 = 4ax$, e ao aplicar a inversão, observamos a forma da Cissoide de Diocles.

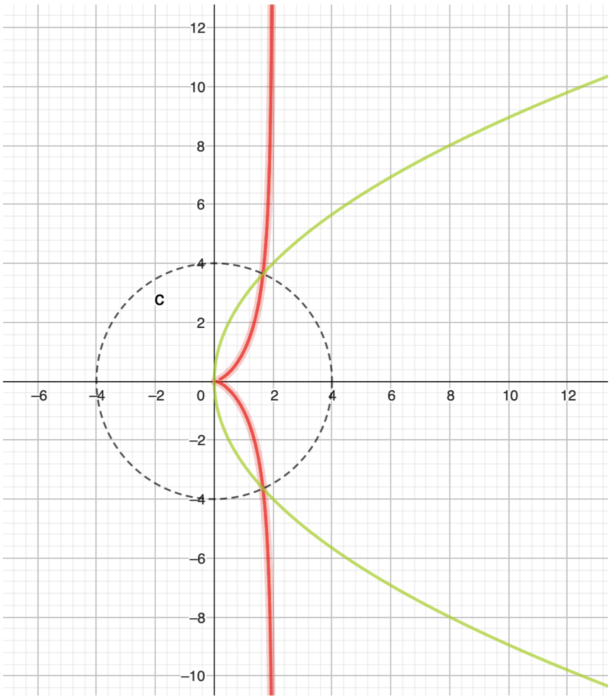


Figura 4.3 – Cissoide de Diocles pela inversão de uma parábola

A inversão geométrica de certas curvas pode revelar conexões surpreendentes entre diferentes famílias de curvas. No caso particular da hipérbole, sua inversão em relação a uma circunferência resulta em uma Lemniscata de Bernoulli, que vimos como um exemplo no capítulo 3. Veja a figura 4.4

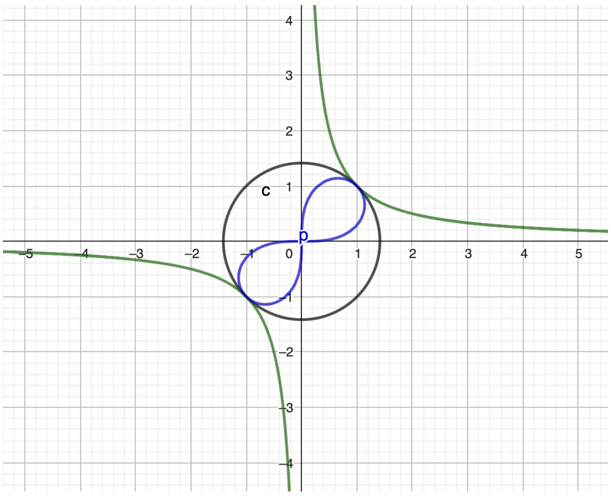


Figura 4.4 – Lemniscata de Bernoulli pela inversão de uma hipérbole

4.6 CISSOIDE COMO CURVA PEDAL DE UMA PARÁBOLA

Conforme a definição e construção da curva pedal apresentada por (OLIVEIRA; ALMEIDA, 2011):

Definição 4.2. As curvas pedais, que são curvas derivadas de outras curvas segundo o seguinte processo: consideremos uma curva plana S. Seja O (*ponto pedal*) um ponto fixo do plano que contém S. Por um ponto qualquer M de S, tracemos a reta t, tangente a S passando por M e a reta n, normal a t baixada de O. Seja P o pé da normal, isto é, P é a interseção de n e t. O lugar geométrico descrito por P quando M se desloca sobre S denomina-se **curva pedal** ou (podória) de S em relação ao ponto O. Veja Fig. 4.5

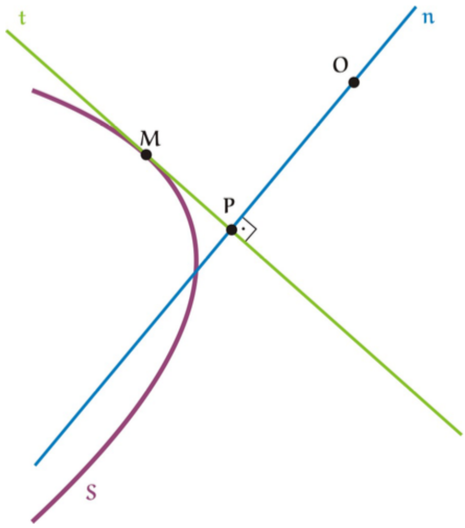


Figura 4.5 – Definição de Curva Pedal

E o objetivo desta seção é mostrar que a Cissoide de Diocles é uma curva pedal de uma parábola.

Antes, vamos escrever a parametrização da curva pedal de uma curva qualquer.

Seja uma curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e $P = (a, b)$ o ponto pedal.

O vetor diretor da reta s tangente a $\mathcal{C}$ em $(x(t), (y(t))$ é dado por $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. Ver Fig. 4.6

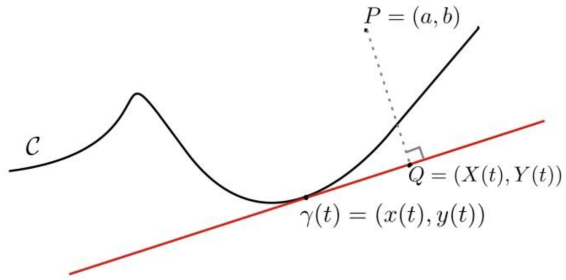


Figura 4.6 – Vetor diretor da reta s tangente a $\mathcal{C}$

Seja $Q = (x(t) + \lambda x'(t), y(t) + \lambda y'(t))$ o pé da perpendicular a s por P. Assim, $\overrightarrow{PQ} \cdot \gamma'(t) = 0$. Substituindo as coordenadas de P, Q e $\gamma'(t)$, temos

$$(x(t) + \lambda x'(t) - a, y(t) + \lambda y'(t) - b) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x(t) \cdot x'(t) + \lambda (x'(t))^2 - ax'(t) + y(t)y'(t) + \lambda (y'(t))^2 - by'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-((x'(t))^2 + (y'(t))^2)\lambda = (x(t) - a)x'(t) + (y(t) - b)y'(t)$$

$$\therefore \lambda = -\frac{(x(t) - a)x'(t) + (y(t) - b)y'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Substituindo λ na expressão de Q, obtemos a parametrização da curva pedal:

$$\begin{cases} X(t) = x(t) - \dfrac{(x(t) - a)x'(t) + (y(t) - b)y'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} x'(t) \\ Y(t) = y(t) - \dfrac{(x(t) - a)x'(t) + (y(t) - b)y'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} y'(t) \end{cases}$$

Em particular, se $P = (0, 0)$, essas equações ficam:

$$\begin{cases} X(t) = x(t) - \dfrac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} x'(t) \\ Y(t) = y(t) - \dfrac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} y'(t). \end{cases}$$

Agora, vamos calcular a parametrização da curva pedal da parábola $y^2 = 4ax$ em relação ao vértice $O = (0, 0)$.

Considere a parametrização de $y^2 = -4ax$ dada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (-at^2, 2at) \Rightarrow \gamma'(t) = (-2at, 2a).$$

Temos,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4a^2t^2 + 4a^2 = 4a^2(t^2 + 1)$$

e

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 2a^2t^3 + 4a^2t = 2a^2t(t^2 + 2).$$

Assim,

$$\frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \frac{2a^2t(t^2 + 2)}{4a^2(t^2 + 1)} = \frac{t(t^2 + 2)}{2(t^2 + 1)}.$$

Substituindo, temos que as coordenadas da parametrização da curva pedal da parábola $y^2 = -4ax$ é dada por:

$$\begin{aligned} X(t) &= -at^2 - \frac{t(t^2+2)}{2(t^2+1)}(-2at) \\ &= at^2\left(\frac{t^2+2}{t^2+1} - 1\right) \\ &= at^2\left(\frac{t^2+2-t^2-1}{t^2+1}\right) = a\frac{t^2}{t^2+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y(t) &= 2at - \frac{t(t^2+2)}{2(t^2+1)}(2a) \\ &= at\left(2 - \frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \\ &= at\left(\frac{2t^2+2-t^2-2}{t^2+1}\right) = a\frac{t^3}{t^2+1}, \end{aligned}$$

que é a parametrização da Cissoide de Diocles $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$.

E assim, seguindo a definição de curva pedal e utilizando o *GeoGebra*, ao considerarmos uma parábola e fixarmos seu vértice como ponto pedal, observamos que surge a Cissoide de Diocles como o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas desse ponto fixo às retas tangentes da parábola. Veja a Fig. 4.7

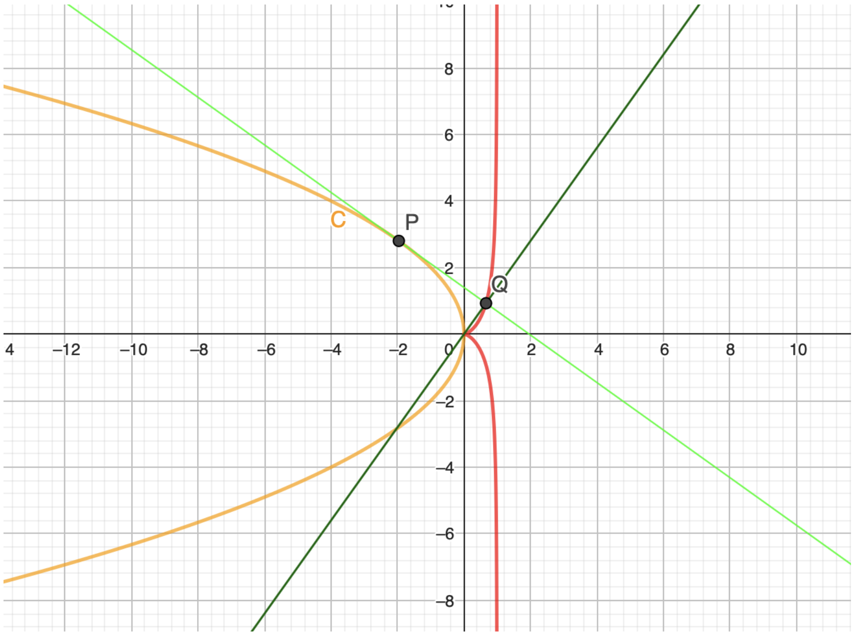


Figura 4.7 – Cissoide de Diocles como Curva Pedal da Parábola

4.7 CONSTRUÇÃO DO SEGMENTO $a\sqrt[3]{2}$ USANDO A CISSOIDE DE DIÓCLES

Nesta seção, vamos mostrar como construir um segmento com medida $a\sqrt[3]{2}$ usando a Cissoide de Diócles de equação $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$.

Seja, no plano, a reta r que passa pelos pontos $A = (a, 0)$ e $B = \left(0, \dfrac{a}{2}\right)$. Logo,

$$r : y = -\frac{1}{2}(x - a).$$

Seja P o ponto que a reta r intercepta a Cissoide de Diócles, ou seja, as coordenadas de P satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} y^2(a - x) = x^3 \\ 2y = a - x \end{cases}$$

Assim, as coordenadas de P pertencem à reta $s : x = \sqrt[3]{2}y$. Seja Q a intersecção da reta s, que é a reta que passa pela origem e pelo ponto P, com a reta horizontal $y = a$. Logo, temos $Q = (a\sqrt[3]{2}, a)$.

Daí, o segmento EQ, com $E = (0, a)$, mede $a\sqrt[3]{2}$.

5 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Caro leitor, neste capítulo apresentamos um roteiro para o plano de aula, que visa aplicar aos alunos do ensino médio, com intuito de explorar e construir a duplicação do cubo, problema foco desta dissertação. Pelo planejamento, serão necessárias, pelo menos 4 aulas, de 50 minutos cada.

5.1 OBJETIVOS E METAS DE APRENDIZAGEM

A priori, devemos destacar qual será o papel do professor nesse ambiente educional. Tradicionalmente visto como a figura central na transmissão de conhecimento, o docente, atualmente, assume um papel de mediador do aprendizado, facilitando o desenvolvimento do pensamento crítico e a autonomia dos alunos.

Nesse sentido, conforme Castellar (2015, citado por (NAZARE, 2020)),

> desenvolver um trabalho eficiente em sala de aula pressupõe que o professor tenha uma postura de mediador, de atuar propondo problemas para que o aluno, a partir do seu conhecimento prévio, possa, no grupo, criar situações-problemas e desafios, transformando o conhecimento de senso comum em conhecimento científico.

Em suma, o professor mediador desempenha um papel crucial na educação contemporânea, sendo responsável por orientar, apoiar e desafiar os alunos em seu processo de aprendizagem. Sendo assim, as aulas terão dois momentos ápices: um deles seria a "mão na massa", construirão a Cissoide de Diocles e também o cubo duplicado, seguindo orientações que serão apresentadas através do professor, e o outro seria a visualização dinâmica da curva utilizando a tecnologia, o *software* GeoGebra, onde os alunos poderão explorar a Cissoide e observar como pequenas variações nos parâmetros da construção influenciam a forma da curva.

Neste segundo momento, o uso da tecnologia no ambiente de aprendizagem se mostra essencial para aprofundar a compreensão dos alunos sobre os conceitos explorados. Segundo (STEKICH et al., 2023), "o ambiente de aprendizagem tecnológico desempenha um papel fundamental na promoção da colaboração, interação e engajamento dos estudantes". A interatividade proporcionada por esse ambiente "permite que os estudantes se engajem em atividades de troca de ideias, compartilhamento de conhecimento e trabalho em equipe", o que favorece um aprendizado mais ativo e significativo.

Dessa forma, a combinação entre aprendizagem manual e digital contribui para um ensino mais completo e acessível, permitindo que os alunos desenvolvam uma visão mais ampla da matemática e da sua aplicabilidade. O professor mediador, ao integrar essas ferramentas em sua prática pedagógica, não apenas facilita a compreensão dos conceitos, mas também promove um ambiente de ensino inovador e alinhado às demandas da educação moderna.

5.2 ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS

Aula 1: Conhecendo o problema e a curva

Para iniciar, o professor mediador lançará a seguinte questão para os alunos: "Você trabalha em uma fábrica de embalagens. Um cliente solicitou que o volume da atual embalagem dele, que é cúbica, com aresta de 10 *cm*, aumentasse o seu volume em dobro. O que você faria para projetar essa nova embalagem, mantendo o formato cúbico?"

Dê um tempo razoável para que os alunos pensem no problema e peça para que registrem os cálculos e/ou raciocínios. A ideia aqui é que a interferência do professor seja mínima, quase nula. Após o tempo, peça para que eles compartilhem suas respostas para a sala. Se possível, escreva na lousa as mais interessantes para uma breve discussão.

Algumas respostas esperadas pelos alunos são:

1. Dobrar o comprimento da aresta.

- Muitos alunos podem pensar que, para dobrar o volume, basta dobrar o tamanho de todas as arestas.

- Podem surgir respostas do tipo: se a aresta atual é de 10 *cm*, então a nova deve ser de 20 *cm*.

2. Dobrar o tamanho de apenas uma aresta

- Alguns alunos podem pensar da seguinte maneira: que o volume de um sólido é calculado como $V_1 = x\ y\ z$, as três dimensões. Então, para que o novo sólido tenha o dobro do volume do primeiro, precisaria ter $V_2 = 2 \cdot V_1$, que implica em $V_2 = 2 \cdot x\ y\ z$. Levando à ideia de multiplicar por 2 apenas a dimensão x.

3. Estimativa aproximada

- Alguns alunos podem tentar adivinhar a resposta fazendo aproximações. Por exemplo: se $10^3 = 1000$, talvez 12^3 ou 15^3 dê perto de 2000.

4. Resposta correta

- Poderão ter alunos que resolverão com muita coerência esse problema, apresentando a $\sqrt[3]{2000}$ como resposta, mas sentirão dificuldade em lidar com essa raiz, já que não é um conceito normalmente explorado em detalhes e com frequência no ensino médio.

Como guiar a discussão?

Após ouvir as respostas, valide a ideia dos alunos para mantê-los engajados. E use os palpites errados como gancho para introduzir conceitos importantes.

- *"Muito bom! Dobrar a aresta parece lógico, mas será que funciona? Vamos analisar?"*
- *"Ótima tentativa! Vamos explorar isso matematicamente para ver o que acontece?"*

Dessa forma, o professor faz com que os próprios alunos concluam que aquelas respostas não estava coerentes, e cheguem a uma respesta aplausível sozinhos.

Depois dessa dinâmica, os alunos assistirão um vídeo público, onde contará brevemente a história por trás do problema foco, que é a duplicação do cubo, e comentará, muito rápido sobre a curva que soluciona este problema.

Segue o link do vídeo: *"Duplicação de um altar - Templo de Apolo - Volume de um cubo",* por Júlio Bara.

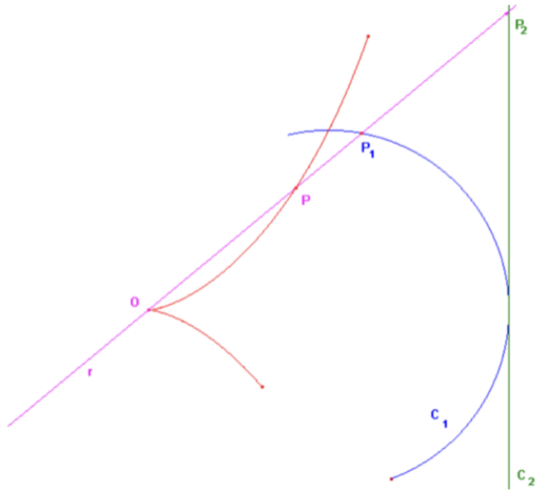
Acesse o vídeo pelo *YouTube*: Clique aqui.

Na sequência, o professor pega o gancho da história que, para solucionar o problema, um discípulo de Aristóteles fez a inteseção entre duas parábolas, e assim ele determinou o segmento que precisava para construir o novo cubo, para apresentar aos alunos a definição matemática de uma Cissoide.

É importante deixar claro para os estudantes que existem algumas definições sobre uma Cissoide, e uma que é muito conhecida é a de Diocles, um matemático que viveu no ínicio do século II a.C., que será explorada nas próximas aulas para resolver o problema da duplicação do cubo.

Ao final dessa aula, o professor pode entregar aos alunos a impressão do arquivo abaixo, que contém a definição de um Cissoide geral e sua representação geométrica, e também a definição da Cissoide de Diocles. Avise-os que a visualização geométrica não foi ilustrada na folha, pois eles construirão manualmente ela, seguindo instruções, na próxima aula.

<u>Definição cissóide geral</u>: Sejam C_1 e C_2 duas curvas dadas no plano $\mathbb{R}^2$ e seja $O \in \mathbb{R}^2$ um ponto fixo. Sejam P_1 e P_2 as intersecções de uma reta variável r passando por O com as curvas C_1 e C_2 , respectivamente. O lugar geométrico dos pontos $P \in r$, tais que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P_2}$ chama-se cissoide de C_1 e C_2 com respeito ao polo O.



Fonte: FAMAT em Revista, 2008

<u>Definição:</u> A cissóide de Diocles é a cissoide de uma circunferência C_1 e de uma reta C_2 tangente a C_1, com respeito ao pólo O pertencente à circunferência e diametralmente oposto ao ponto de tangência.

Em outras palavras, a cissóide é o conjunto de pontos obtidos ao traçar segmentos entre uma reta e uma curva e marcar sempre um ponto específico nesses segmentos.

Figura 5.1 – Definição de Cissoide

Ao escanear o **QR Code** você encontra o arquivo acima para impressão.

Aula 2: Construção manual da Cissoide de Diocles

Para esta aula serão necessários os seguintes materaisi:

- Papel milimetrado

- Régua
- Compasso
- Lápis
- Borracha
- Caneta colorida

É importante o professor avisar com antecedência sobre esses materiais para os alunos providenciarem, caso não consiga ofertar a todos.

As instruções abaixo guiarão os alunos na construção manual da Cissoide de Diocles. O professor deve intervir apenas para esclarecer dúvidas, incentivando a autonomia dos alunos na execução da atividade.

Vale lembrar que para uma boa visualização, orientar os estudantes a fazererem o desenho de um tamanho razoavelmente grande, pois se desenhar pequeno poderão ficar misturas as informações e o aluno pode se perder na construção.

Ao final da instrução, um **QR Code** estará disponível para acessar esta atividade em PDF, facilitando a impressão para o professor entregar aos alunos.

Passo a passo para a construção manual da Cissoide de Diocles:

1. Desenha o plano cartesiano

- Trace duas retas perpendiculares no papel milimetrado usando a régua. O eixo horizontal (eixo x) e o eixo vertical (eixo y). Marque o ponto de interseção como a origem, nomeie de O.

2. Determinando o raio da circunferência

- Marque um ponto no eixo x, à direita da origem, e nomeie como ponto A.
- Desenhar um circunferência cujo diâmetro seja $\overline{OA}$. Para isso será necessário determinar o ponto médio desse segmento, pois precisaremos do raio e centro para construir a circunferência que tenham os pontos O e A.

  Como determinar o ponto médio: abra o compasso com a medida um pouco maior que a metade de $\overline{OA}$. Com a ponta seca em O trace um arco acima e abaixo do segmento OA. Repita o processo com a ponta seca em A, traçando arcos de mesmo tamanho. Os dois arcos se cruzarão acima e abaixo do segmento. Ligue os pontos de interseções dos arcos. Onde cortar o segmento OA será o ponto médio. Chamaremos de C.

- Agora, desenhe a circunferência de centro C e raio $\overline{CA}$. Isso garante que O e A sejam pontos da circunferência.

3. Traçar a reta tangente à circunferência no ponto A

- O raio CA será a abertura do compasso.
- Com a ponta seca do compasso em A, marcar um ponto B, à direita de A, no eixo x.
- Com abertura do compasso um pouco maior que a medida de CB, com a ponta seca em B, traçar um arco. Analogamente, com a ponta seca em C, traçar um arco de modo que intersepte o primeiro. A interseção dos arcos nomear de D.
- Traçar $\overline{AD}$. Prolongue esse segmento. Essa é a tangente à circunferência no ponto A.

4. Escolher uma reta variável

- Desenhe uma reta qualquer que passe pela origem O e intercepte a circunferência em um ponto, digamos R, e que também intercepte a tangente, digamos ponto Q.
- Precisamos encontrar nessa reta um ponto P, de modo que a distância de OR seja a mesma distância que PQ.
- Utilizando o compasso, faça a sua abertura do tamanho de $\overline{OR}$. Com a ponta seca em Q, marque um arco na reta OQ, e esse ponto será chamado de P.
- O ponto P assim obtido é um ponto da Cissoide de Diocles.

5. Repetir o processo.

- Variar a reta. Repetindo o processo do passo 4, variando a reta em suas inclinações, obteremos um conjunto de pontos P, P', P'', ...

6. Traçar a curva

- Após identificar o conjunto de pontos P, P', P'', ..., ligue-os suavemente com uma curva contínua, usando a mão livre. Assim, teremos construído o lugar geométrico que denominamos de Cissoide de Diocles.

7. Verificando a simetria

- Como a Cissoide de Diocles é simétrica em relação ao eixo x, você pode repetir o procedimento acima para retas no semi-plano inferior, para obter o espelho da cruva.

Ao final desta aula, o professor deve passar analisando individualmente o trabalho de cada aluno. Espera-se que todos, ou em sua maioria, tenha feito corretamente a construção da curva.

Mas, vamos pensar na situação em que a Cissoide foi construída incorretamente ou então ficou mal desenhada, pequena. Teremos duas alternativas:

Opção 1: O professor pode auxiliar o aluno para refazer essa construção, talvez utilizando outro papel, uma cartolina ou uma sulfite de tamanho maior, reforçando pontos importantes.

Opção 2: Usar um modelo pronto, seja feito manual ou então impresso.

Segue um modelo para o professor imprimir, através do **QR Code**, caso considere necessário.

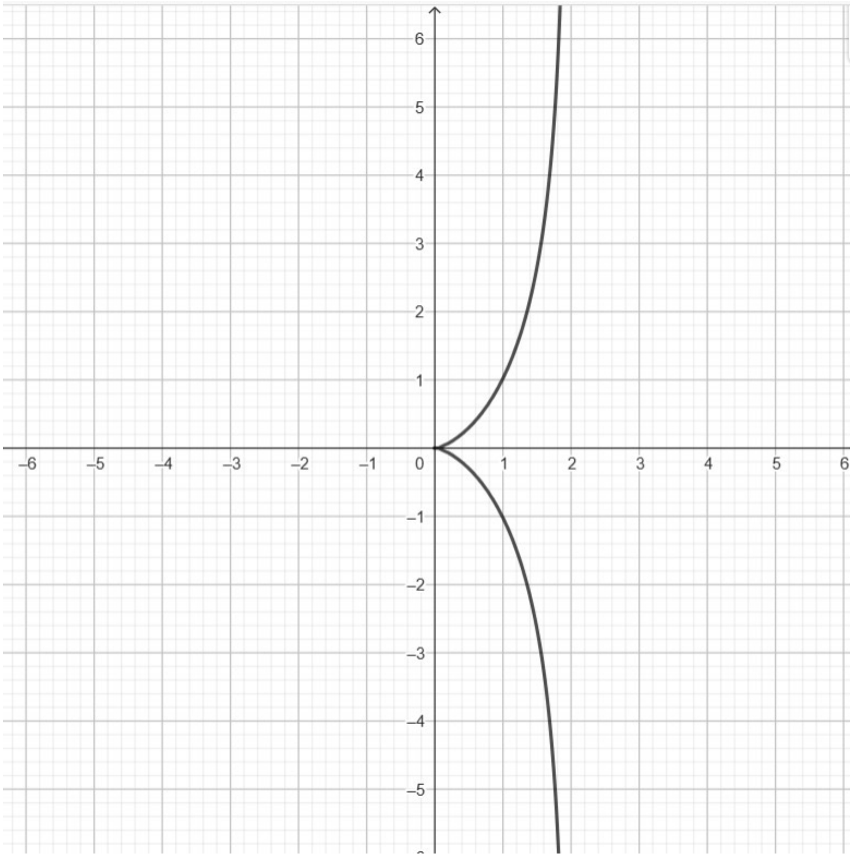


Figura 5.2 – Modelo de Cissoide para impressão

Aula 3: Resolução do problema

O foco desta aula é a construção do cubo, e para isso precisaremos de alguns itens:

- Papelão ou papel cartão
- Lápis
- Tesoura
- Cola
- Régua
- Compasso

Os objetivos dessa aula são de explorar a aplicação prática da Cissoide de Diocles na resolução do problema clássico e desenvolver habilidades manuais e espaciais ao construir o cubo.

Um ponto importante, antes de começar a atividade, é discutir sobre como a curva fornece os pontos que resolvem $x^3 = 2a^3$, devido às suas propriedades fundamentais. A construção da curva baseia-se na interseção de retas tangentes a um círculo de raio a e na simetria com um segundo círculo de raio $2a$. A equação cartesiana da Cissoide de Diocles é dada por

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

Para estabelecer o envolvimento com a equação $x^3 = 2a^3$ consideremos a reta vertical $x = 2a$. A interseção dessa reta com a Cissoide fornece um ponto $P = (2a, y)$, onde a coordenada y satisfaz a equação da curva.

Esse valor representa geometricamente um segmento associado ao problema da duplicação do cubo. Dessa forma, a interseção da Cissoide com a reta $x = 2a$ fornece a solução exata da equação $x^3 = 2a^3$, validando a curva como um instrumento geométrico para a resolução desse tipo de problema.

Agora, vamos para construção do cubo.

A dica, para facilitar a organização, o professor vai dividir a turma em grupos de 3 ou 4 alunos, e cada aluno terá um papel específico na equipe:

- **O Calculista** - Responsável por determinar o tamanho das faces do cubo e calcular o volume.
- **O Desenhista** - Faz o esboço e desenha as faces do cubo na cartolina.

- **O Cortador** - Recorta com precisão as faces desenhadas.
- **O Montador** - Dobra e cola as faces para formar o cubo final.

Se o grupo tiver apenas 3 integrantes, um deles pode acumular duas funções.

Professor, agora guie os grupos pelo processo de construção. Cada etapa deve ser supervisionada para garantir que todos os alunos participem. Eles deverão utilizar a Cissoide de Diocles que construíram na aula anterior, ou então, se o professor achar conveniente, pode entregar o modelo impresso. Reforce que eles construirão dois cubos: o inicial, de medidas de escolha, e o de volume duplicado.

O calculista de cada grupo vai decidir um tamanho para o lado do cubo, que será considerado o inicial. A partir dessa escolha, ele realizará os cálculos necessários para determinar o valor na aresta do novo cubo com volume duplicado. O professor passará de grupo em grupo conferindo os cálculos.

Em seguida, o desenhista molda o cubo inicial e, com o auxílio da Cissoide de Diocles, vai encontrar o tamanho da aresta do novo cubo. E com ajuda da régua e compasso, vai planificar os cubos no papelão ou papel cartão.

Depois de feito o molde dos cubos, o cortador recortará cuidadosamente todas as faces. Aqui, a orientação do professor, pode ser em lemrá-los que deixem abas extras nas bordas para facilitar a colagem depois.

E para a etapa final, o montador dobra e cola as faces, formando os cubos. Se necessário, pode usar fitas adesivas para reforçar a montagem.

Para finalizar, o grupo fará comparações visuais e práticas, para verificar se a construção deu certo. Poderão fazer empilhamentos, ou então preencher os cubos com alguns objetos, para constatarem a duplicação do volume.

Aula 4: Cissoide de Diocles no *GeoGebra*

Para finalizar e esclarecer esse assunto, os alunos verificarão essa curva no programa computacional (GEOGEBRA, 2025). Ele pode ser acessado *online*, pelo link https://www.geogebra.org.

O pré-requisito para essa aula é ter conhecimento do *softaware*, para que possam explorar os comandos e ter mais habilidade em acompanhar o roteiro ilustrado a seguir. Não seria uma boa ideia essa aula, caso seja o primeiro contato do aluno com o aplicativo.

Com o objetivo de tornar a aula mais dinâmica, e também sanar qualquer dúvida que possa ter ficado nas aulas anteriores, usaremos a animação do *GeoGebra* para construir e visualizar a Cissoide de Diocles.

Siga a instrução:

- Marcar a origem $O = (0, 0)$
- $r = 1$

- $C = (r, 0)$
- Traçar a circunferência $c = (C, \overline{CO})$: clicar em círculo: centro & raio, clicar em C e na janela que abrir escrever CO

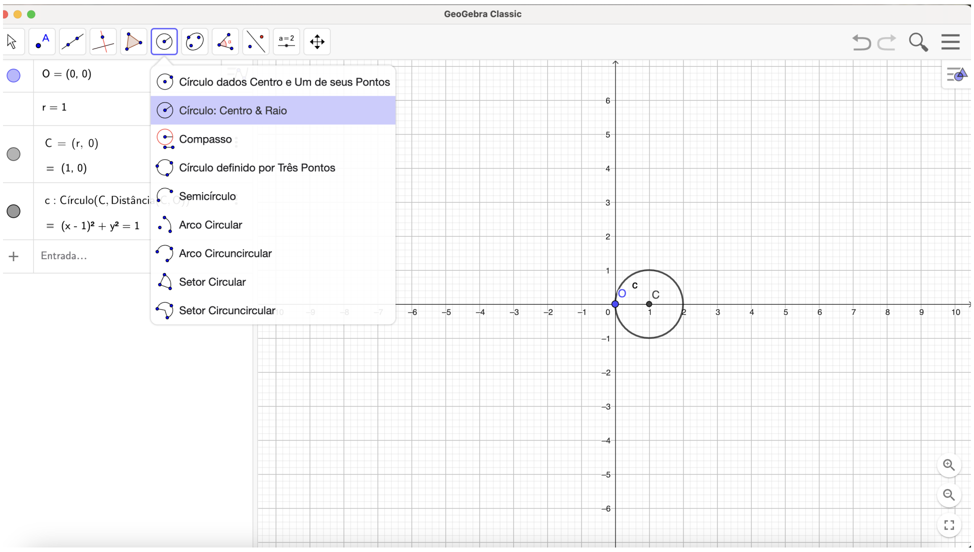


Figura 5.3 – Construção de $c = (C, \overline{CO})$

- Construir um controle deslizante numérico e formatar o intervalo -10 a 10, incremento 0.01 e animação crescente; nomeie de a.

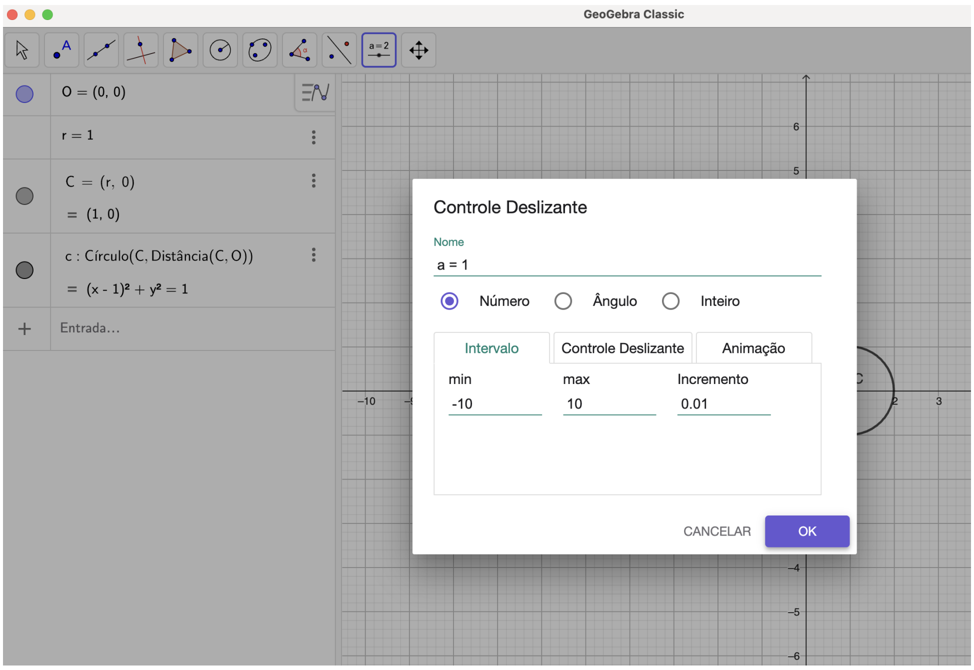


Figura 5.4 – Construção do controle deslizante

- Construir a assíntota vertical à curva, para isso digite na caixa de entrada $x = 2r$
- Marcar o ponto A sobre a assíntota, na caixa de entrada digitar $A = (2r, a)$
- Traçar o segmento $\overline{OA}$ e marcar a interseção entre o segmento e a circunferência. Usar a opção *Interseção de dois objetos*. Renomear por M. Ocultar o outro ponto de interseção, que aparecerá como B.

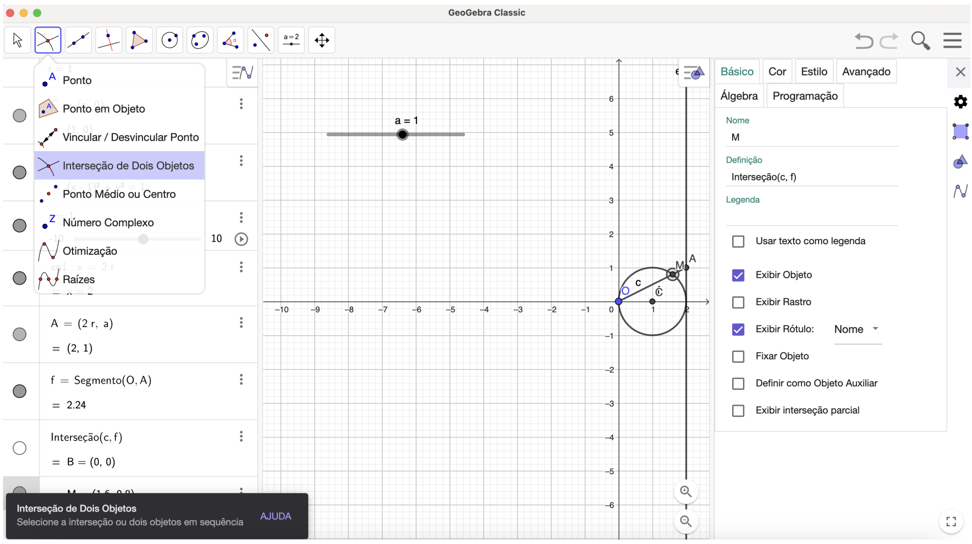


Figura 5.5 – Interseção de dois objetos

- Utilizando o compasso, pegar a medida $\overline{AM}$ como raio e mover essa circunferência até a origem. Determinar a interseção $\overline{OA}$ com a circunferência auxiliar e renomear de P.

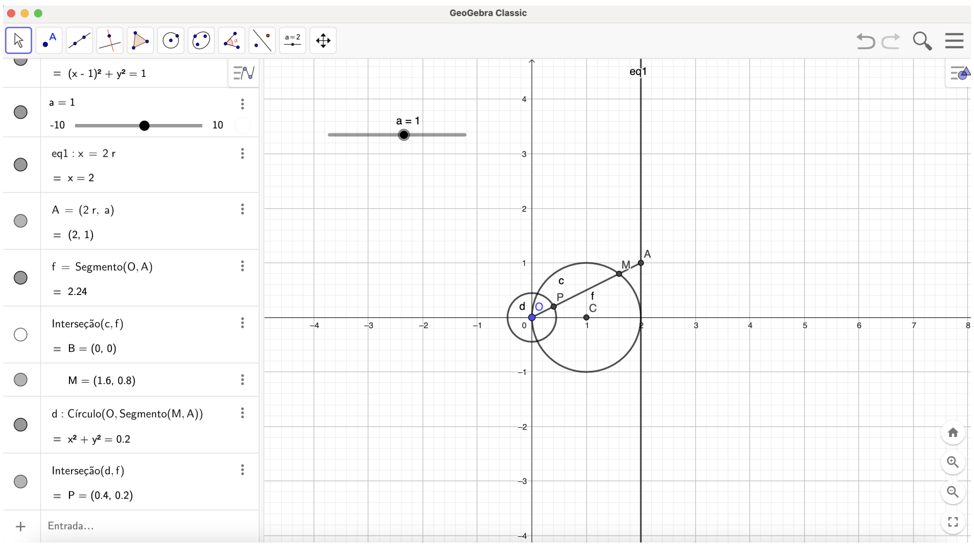


Figura 5.6 – Determinando o ponto P

- Habilitar o rastro do controle deslizante. Para isso, clique nas configurações de P e selecione *Exibir rastro*. Você pode modificar a cor, a seu critério.
- Feito isso, clique na setinha, que corresponde ao *play*, no seu controle deslizante a.
- Esse lugar geométrico é denominado **Cissoide de Diocles**

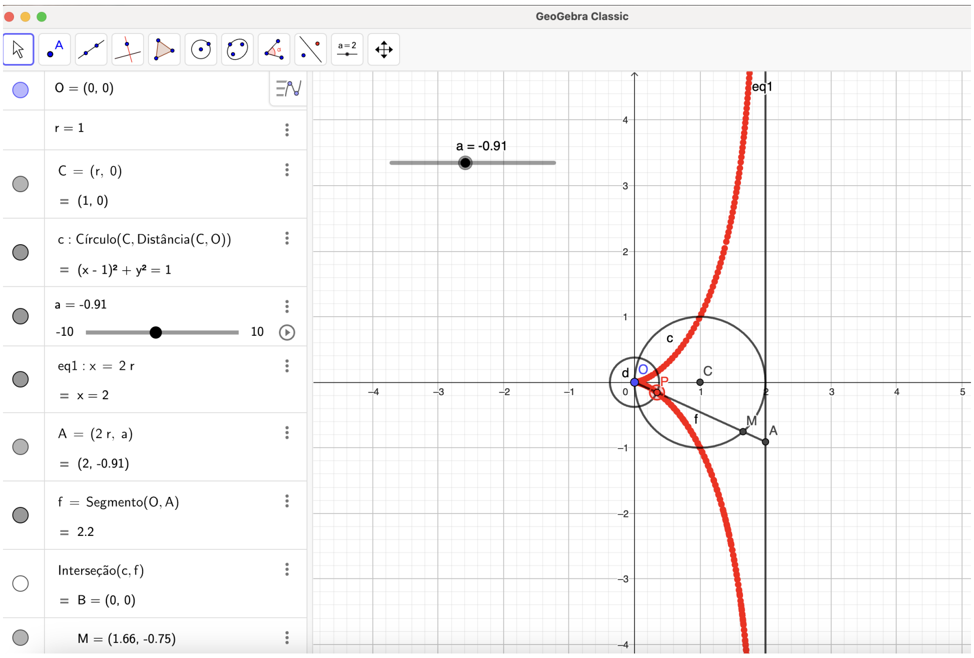


Figura 5.7 – Cissoide de Diocles

Esse guia você também encontra em PDF para impressão, escaneando o **QR Code** ao lado:

5.3 DISCUSSÃO PARA CONCLUSÃO

Após todas essas construções nas últimas aulas, é fundamental conduzir uma discussão final com os alunos para consolidar o aprendizado. O professor deve estimular a reflexão sobre os principais conceitos abordados, promovendo um momento de síntese coletiva.

Para isso, algumas questões podem ser lançadas aos alunos para guiá-los na revisão dos conteúdos:

1. **O que aprendemos sobre a Cissoide de Diocles?**
    - Como essa curva foi descoberta e por que foi criada?
    - Como ela está relacionada ao problema da duplicação do cubo?
    - Quais são as principais propriedades matemáticas?
2. **Por que a Cissoide de Diocles é uma solução geométrica para a duplicação do cubo?**
    - Como a construção da Cissoide nos permite encontrar a medida correta para a aresta do cubo duplicado?
3. **Quais foram as etapas desafiadoras da construção da Cissoide?**
    - O que foi mais difícil: desenhar a curva manualmente ou visualizá-la no *GeoGebra*?
    - Como a tecnologia ajudou a compreender essa construção matemática?

Conforme as respostas dadas pelos alunos, o professor vai aproveitando para fazer conclusões e destacando a importância da matemática como um campo de investigação ativa, que vai além de uma simples aula de resolução de equações. O estudo da Cissoide de Diocles ilustra como podemos desenvolver a matemática em aula, a partir de problemas e desafios históricos, de maneira aplicável.

Para encerrar, pode-se pedir que os alunos registrem uma conclusão pessoal sobre o que aprenderam, respondendo à pergunta:

Se você tivesse que explicar a Cissoide de Diocles para alguém que nunca ouviu falar sobre ela, o que diria?

Essa atividade permitirá que o professor avalie a compreensão dos alunos e reforce os aspectos mais importantes, encerrando a sequência didática de maneira significativa e assertiva.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação buscou explorar a Cissoide de Diocles sob diferentes perspectivas, desde sua origem histórica e relevância matemática, até suas propriedades analíticas e aplicações didáticas. Inicialmente, foi apresentado o contexto histórico da curva, evidenciando sua conexão com o problema da duplicação do cubo, um dos três grandes desafios matemáticos da Antiguidade. Através desse estudo, constatou-se que, embora a solução exata para esse problema seja impossível utilizando apenas régua e compasso, a introdução da Cissoide forneceu um caminho geométrico alternativo para a determinação da $\sqrt[3]{2}$.

Além do aprofundamento matemático da curva, foram apresentadas suas propriedades fundamentais, como a equação em coordenadas polares e cartesianas, a simetria, o comportamento assintótico e sua relação com curvas pedais. A partir dessas análises, constatou-se que a Cissoide de Diocles não apenas desempenhou um papel relevante na história da matemática, mas também contribuiu significativamente para o desenvolvimento de técnicas da geometria analítica e do cálculo diferencial.

Já no âmbito educacional, foi proposta uma sequência didática para o Ensino Médio, com o intuito de aproximar os alunos a conceitos matemáticos abstratos por meio da construção geométrica da Cissoide e de sua aplicação no problema da duplicação do cubo. A abordagem combinou atividades manuais e digitais, utilizando tanto a construção com régua e compasso quanto o *softaware* GeoGebra. A experiência didática reforçou a importância do ensino baseado na experimentação e na resolução de problemas, promovendo um aprendizado mais interativo e efetivo.

Dessa forma, esta dissertação reafirma a importância da Cissoide de Diocles tanto no desenvolvimento da matemática quanto em seu potencial didático. Ao unir história, teoria e prática, este estudo reforça a matemática como um campo dinâmico e acessível, promovendo novas perspectivas para seu ensino. Espera-se que este trabalho contribua para futuras investigações sobre a aplicabilidade de curvas matemáticas no ensino básico e que inspire novas abordagens que integrem a história da matemática ao ensino contemporâneo.

REFERÊNCIAS

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011. Trad. Hygino H. Domingues. Citado na página 13.

BOYER C. B.; MERZBACH, U. C. **A History of Mathematics**. 3rd ed.. ed. Wiley: Hoboken, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.

ROQUE, T. **História da Matemática**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Zahar, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

RIBEIRO, M. R. C. **Curvas e Geometria Dinâmica**. Dissertação (Dissertação Mestrado) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2012. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/65938/2/24379.pdf>. Acesso em: 08/02/2025. Citado na página 16.

REIS, F. E.; ALMEIDA, D. M. Um estudo introdutório sobre cissóides. **FAMAT em Revista**, Universidade Federal de Uberlândia - UFU, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 17, 21 e 23.

HOFFMANN, A. R. K. **Curvas Mecânicas - A Conchóide**. Dissertação (Dissertação Mestrado) — UNICAMP, Campinas, 2008. Citado na página 19.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **MacTutor History of Mathematics Archive**. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews: [s.n.], 1996. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk>. Acesso em: 14/10/2024. Citado na página 20.

SANTOS, f. f. P. **Algumas curvas notáveis: aplicações e construções com o uso do software winplot**. Dissertação (Dissertação Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/19612/1/2016_dis_ffpsantos.pdf>. Acesso em 08/02/2025. Citado na página 21.

FRENSEL, K. Geometria analítica ii - notas de aula. **Uviversidade Federal Fluminense (UFF)**, 2017. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/2017/08/30/disciplina-geometria-analitica/>. Acesso em: 08/02/2025. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

BASSET, A. **An Elementary Treatise on Cubic and Quartic Curves**. Cambridge: Deighton, Bell, and Co.: [s.n.], 1901. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 27.

LINARES, J. L. **Transformações de Inversões: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, Pirassununga, 2022. Citado na página 32.

OLIVEIRA, F. A.; ALMEIDA, D. M. D. Curvas pedais via geometria dinâmica. **Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica**, 2011. Citado na página 36.

NAZARE, V. S. M. de. O papel do professor no processo ensino-aprendizagem do aluno: Uma revisÃo de literatura. **Revista Científica Semana Acadêmica**, Fortaleza, Nº 000193, 30/04/2020, 2020. Disponível em: <https://semanaacademica.org.br/artigo/o-papel-do-professor-no-processo-ensino-aprendizagem-do-aluno-uma-revisao-de-literatura>. Acesso em : 31/01/2025. Citado na página 40.

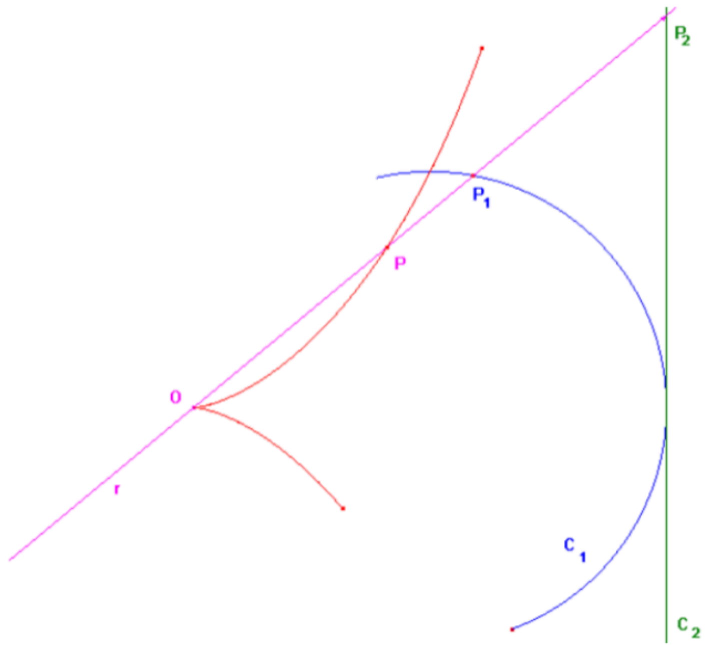
STEKICH, C. D. L. d. N. et al. O papel do professor como mediador e facilitador no ambiente de aprendizagem. **Revista Ilustração**, v.4, n. n.2, p. p.109–115, 2023. Disponível em: <https://journal.editorailustracao.com.br/index.php/ilustracao/article/view/162>. Acesso em: 31/01/2025. Citado na página 40.

GEOGEBRA. **GeoGebra – Software de Matemática Dinâmica**. 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 06/09/2024. Citado na página 48.

APÊNDICE A ANEXOS

DEFINIÇÃO DE CISSOIDE GERAL E DE DIOCLES

Definição cissóide geral: Sejam C_1 e C_2 duas curvas dadas no plano $\mathbb{R}^2$ e seja $O \in \mathbb{R}^2$ um ponto fixo. Sejam P_1 e P_2 as intersecções de uma reta variável r passando por O com as curvas C_1 e C_2 , respectivamente. O lugar geométrico dos pontos $P \in r$, tais que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P_2}$ chama-se cissoide de C_1 e C_2 com respeito ao polo O.



Fonte: FAMAT em Revista, 2008

Definição: A cissóide de Diocles é a cissoide de uma circunferência C_1 e de uma reta C_2 tangente a C_1, com respeito ao pólo O pertencente à circunferência e diametralmente oposto ao ponto de tangência.

Em outras palavras, a cissóide é o conjunto de pontos obtidos ao traçar segmentos entre uma reta e uma curva e marcar sempre um ponto específico nesses segmentos.

GUIA PARA CONSTRUÇÃO MANUAL DA CISSOIDE

Instruções para construir a Cissoide de Diocles

Caro aluno, a seguir você encontra um passo a passo para construir manualmente a curva, denominada como Cissoide de Diocles. Ela foi criada para solucionar o problema da duplicação do cubo, um dos grandes problemas clássicos da Antiguidade.

Para a construção serão necessários alguns materiais, como papel milimetrado, régua, compasso, lápis e borracha. Tendo isto em mãos e com toda a sua concentração, vamos colocar em prática suas habilidades e conhecimentos geométricos!!!

PASSO A PASSO:

1. Desenhar o plano cartesiano

- Trace duas retas perpendiculares no papel usando uma régua: o eixo horizontal (eixo x) e o eixo vertical (eixo y). Marque o ponto de interseção como a origem (O)

2. Escolher o raio da circunferência

- Marque um ponto no eixo x, à direita da origem, como o ponto A.
- Desenhe uma circunferência cujo diâmetro seja $\overline{OA}$. Para isso, será necessário determinar o ponto médio desse segmento, pois precisaremos do raio e centro para construir a circunferência que tenham os pontos O e A.
- Como determinar o ponto médio: abra o compasso com um medida um pouco maior que a metade de OA. Com a ponta seca em O trace um arco acima e abaixo do segmento OA. Repita o processo com a ponta seca em A, traçando arcos de mesmo tamanho. Os dois arcos se cruzarão acima e abaixo do segmento. Ligue os pontos de interseções dos arcos. Onde cruzar o segmento OA, será o ponto médio. Chamaremos de C.
  - Agora, desenhe uma circunferência de centro C e raio $\overline{OC}$. Isso garante que O e A sejam pontos da circunferência.

GUIA PARA CONSTRUÇÃO MANUAL DA CISSOIDE

3. Traçar a reta tangente à circunferência no ponto A

- O raio CA será a abertura do compasso.
- Com a ponta seca do compasso no ponto A, marcar um ponto B, à direita de A A, no eixo x.
- Abertura do compasso um pouco maior que a medida de CB, com a ponta seca em B, traçar um arco. Analogamente, com a ponta seca em C, traçar um arco de modo que intersepte o primeiro. A interseção dos arcos nomear de D.
- Traçar $\overline{AD}$. Prolongue esse segmento. Essa é a tangente à circunferência no ponto A.

4. Escolher uma reta variável

- Desenhe um reta qualquer que passe pela origem O e intercepte a circunferência e a reta tangente, marcando os pontos R e Q, respectivamente.
- Agora, precisamos encontrar na reta OQ um ponto P, de modo que a distância OR seja a mesma distância que PQ.
- Utilizando o compasso, faça a sua abertura do tamanho de $\overline{OR}$. Com a ponta seca em Q, marque um arco na reta OQ, e esse ponto será chamado de P.
- O ponto P assim obtido é um ponto da Cissoide de Diocles.

5. Repetir o processo

- Variar a reta inicial. Repetindo o processo, variando a reta em todas as suas inclinações, obteremos um conjunto de pontos $P, P', P'', \ldots$

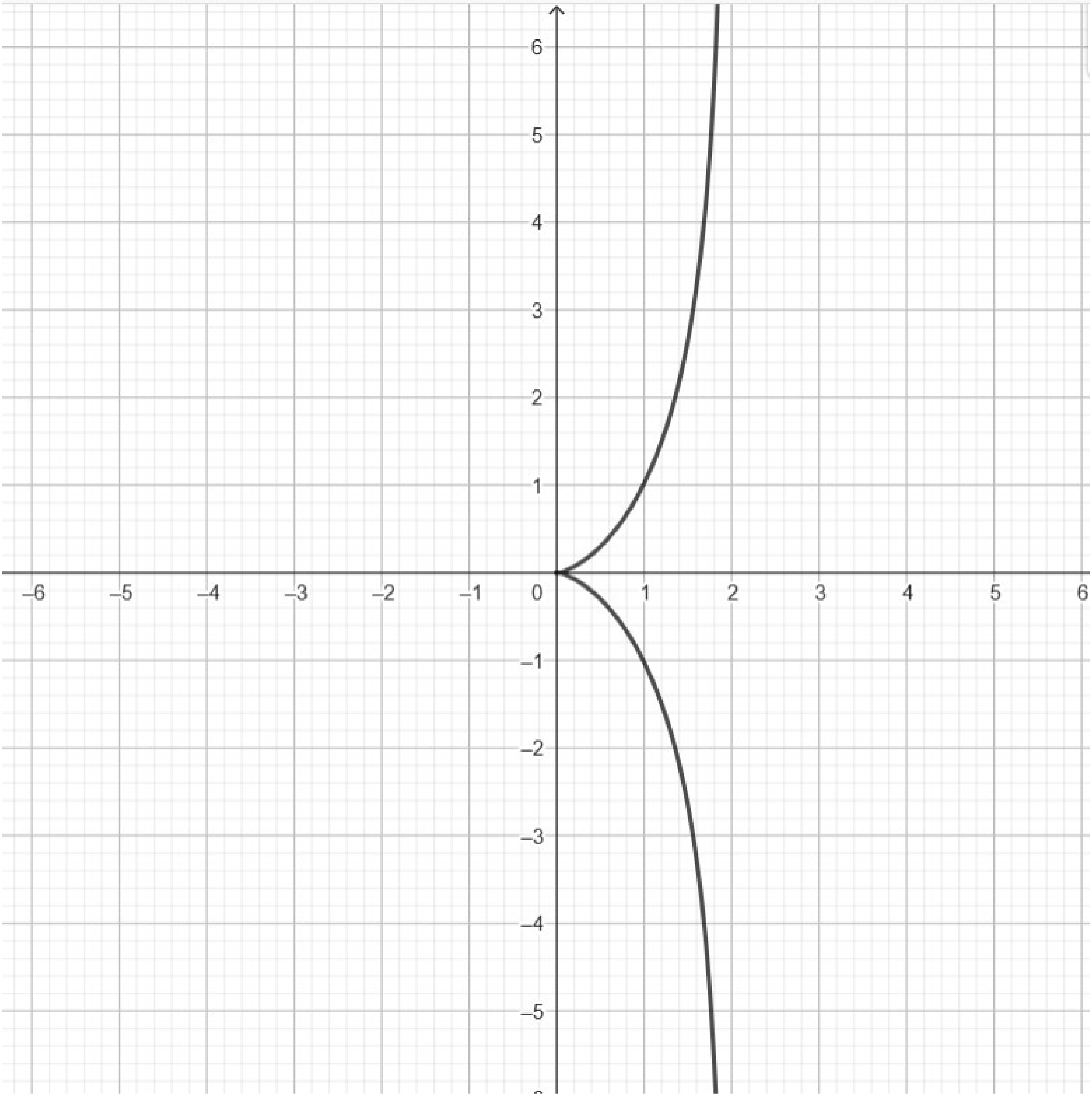
6. Traçar a curva

- Após identificar o conjunto de pontos $P, P', P'', \ldots$, ligue-os suavemente com uma curva contínua usando a mão livre. Assim, teremos construído o lugar geométrico que denominamos de Cissoide de Diocles.

7. Verificar a simetria

- Como a cissoide de diocles é simetrica em relacao ao eixo x, você pode repetir o procedimento acima para retas no semi-plano inferior, para obter o espelho da curva.

MODELO DE CISSOIDE DE DIOCLES PARA IMPRESSÃO



GUIA PARA CONSTRUÇÃO DA CISSOIDE DE DIOCLES NO GEOGEBRA

Instrução para contruir a Cissoide de Diocles no GeoGebra

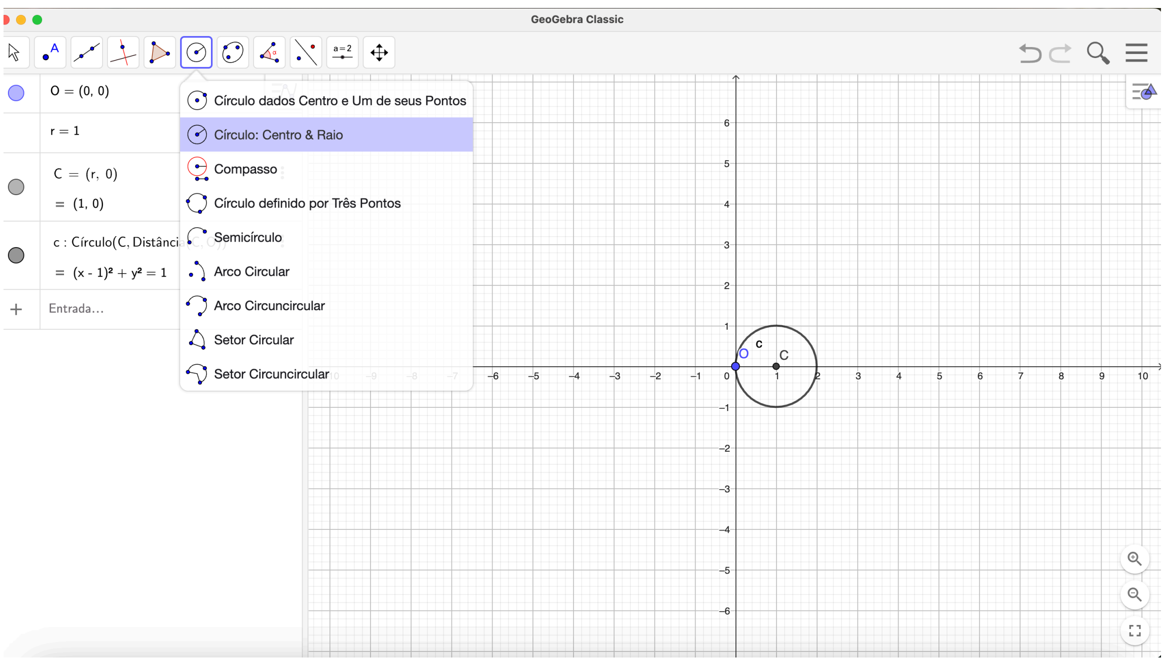
O objetivo desta aula é de finalizar e esclarecer o assunto que abordamos nos últimos dias - *Cissoide de Diocles: duplicação do cubo* - explorando os comandos já conhecidos no *GeoGebra*.

Caso o computador não tenha o aplicativo instalado, ele poderá ser acessado *online* pelo link https://www.geogebra.org/calculator.

Com o programa aberto, basta seguir as instruções abaixo, que ao final você terá construído a curva famosa em resolver um dos grandes problemas cássicos da Antiguidade, a Cissoide de Diocles.

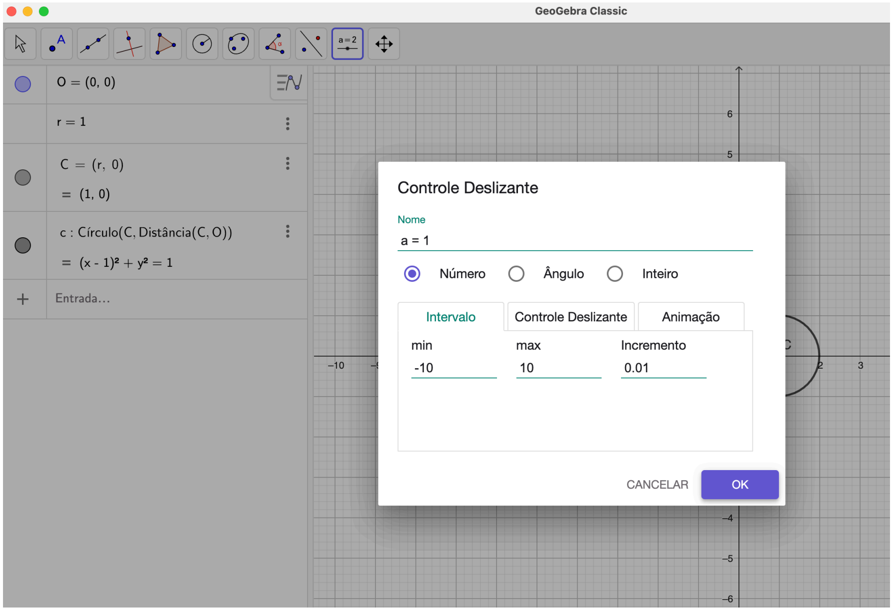
Siga o passo a passo:

- Marcar a origem $O = (0,0)$
- $r = 1$
- $C = (r,0)$
- Traçar a circunferência $C = (C, \overline{CO})$: clicar em círculo: centro & raio, clicar em C e na janela que abrir escrever CO



GUIA PARA CONSTRUÇÃO DA CISSOIDE DE DIOCLES NO GEOGEBRA

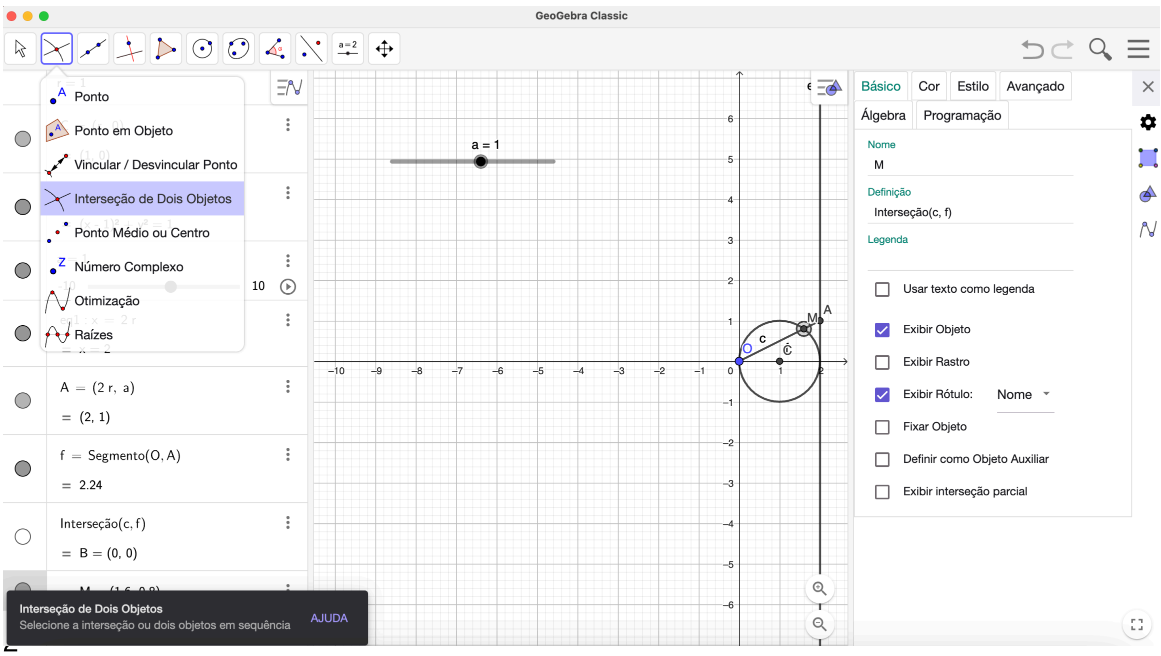
- Construir um controle deslizante numérico e formatar o intervalo -10 a 10, incremento 0.01 e animação crescente e nomeie de a



- Construir a assíntota vertical à curva, para isso digite na caixa de entrada $x = 2r$

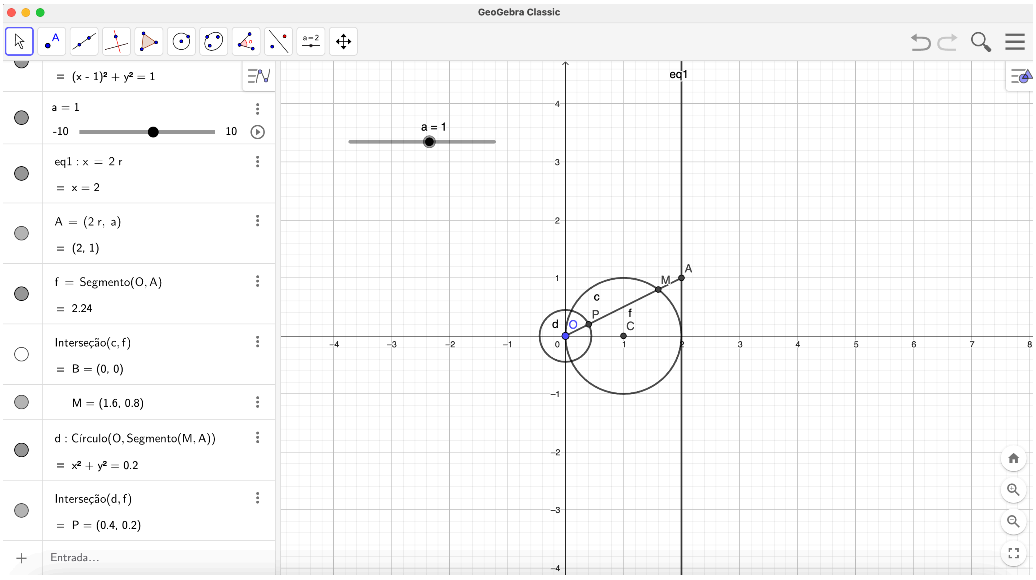
- Marcar o ponto A sobre a assíntota, na caixa de entrada digitar $A = (2r, a)$

- Traçar o segmento $\overline{OA}$ e marcar a interseção entre o segmento e a circunferência. Usar a opção *Interseção de Dois Objetos*. Renomear por M. Ocultar o outro ponto de interseção, que aparecerá como B.



GUIA PARA CONSTRUÇÃO DA CISSOIDE DE DIOCLES NO GEOGEBRA

- Utilizando o compasso, pegar a medida $\overline{AM}$ como raio e mover essa circunferência até a origem. Determinar a interseção $\overline{OA}$ com a circunferência auxiliar e renomear por P.



- Habilitar rastro do controle deslizante. Para isso, clique nas configurações de P e selecione *Exibir rastro.* Você pode modificar a cor, a seu critério.

- Feito isso, clique na setinha, que corresponde ao *play,* no seu controle deslizante a.

- Esse lugar geometrico é denominado cissoide.