

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Física

**Aplicação de Fibrados e Conexões de Fibrados na
Física Teórica**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado para obtenção do
grau de Bacharel em Física.

Aluno: Arthur Costa Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. Fernando David Marmolejo Schmidt

São Carlos, 09 de Fevereiro de 2025

Sumário

1	Resumo	1
2	Abstract	2
3	Desenvolvimento	3
3.1	Fibrados	3
3.1.1	Definição	3
3.1.2	Função de Transição	5
3.1.3	Fibrado Principal	7
3.2	Conexões em Fibrados Principais	8
3.2.1	Definição	8
3.2.2	Conexão Local e Potencial de gauge	11
3.2.3	Curvatura	12
3.2.4	Forma Local da Curvatura	13
3.3	Aplicações Físicas	15
3.3.1	Teoria de gauge $U(1)$	15
3.3.2	Monopolo de Dirac	20
3.3.3	Efeito Aharonov-Bohm	26
3.3.4	Teoria de Yang-Mills	30
3.3.5	Instanton	38
4	Conclusão	46

1 Resumo

Este trabalho aborda as aplicações de fibrados e conexões de fibrados na Física Teórica, destacando sua relevância na formulação de teorias modernas como a Teoria de Gauge, o monopolo magnético de Dirac, o efeito Aharonov-Bohm, a teoria de Yang-Mills e os instantons. Utilizando conceitos da geometria diferencial, como espaços fibrados, conexões, curvatura e holonomia, exploramos como essas estruturas matemáticas oferecem uma linguagem unificadora para descrever fenômenos físicos fundamentais.

Inicialmente, introduzimos os fibrados como uma generalização dos produtos cartesianos, enfatizando seu papel na definição de campos físicos em espaços curvos ou com topologias não triviais. As conexões são descritas como ferramentas para transportar informações ao longo do fibrado, estabelecendo o paralelo entre derivadas covariantes e transformações locais em teorias físicas. Exemplos de fibrados tangentes e fibrados principais são discutidos como casos fundamentais para aplicações na Física.

Na Teoria de Gauge, os fibrados fornecem o formalismo necessário para descrever interações fundamentais, como as forças eletromagnéticas, fracas e fortes, utilizando grupos de simetria locais. Exploramos o monopolo magnético de Dirac como uma solução singular da equação de Maxwell, cuja existência está intrinsecamente ligada à topologia dos fibrados. O efeito Aharonov-Bohm, por sua vez, demonstra como as conexões podem mediar efeitos físicos em regiões onde os campos locais são nulos, revelando a importância das propriedades globais do espaço-tempo.

Avançamos para a teoria de Yang-Mills, que generaliza o eletromagnetismo para grupos de simetria não abelianos, fundamentando o Modelo Padrão da Física de Partículas. Nesta teoria, as curvaturas dos fibrados correspondem às forças associadas aos campos de Gauge. Também discutimos os instantons, soluções clássicas das equações de Yang-Mills, que têm impacto significativo na descrição de transições quânticas e fenômenos como a quebra espontânea de simetria.

Ao longo deste estudo, destacamos como os fibrados encapsulam informações sobre a estrutura geométrica do espaço-tempo e permitem a descrição precisa de fenômenos que envolvem topologia, simetria e interações locais. Este formalismo geométrico não

só esclarece a relação entre matemática e física, mas também abre possibilidades para o desenvolvimento de teorias mais abrangentes e unificadoras no futuro.

2 Abstract

This work addresses the applications of fiber bundles and fiber bundle connections in Theoretical Physics, highlighting their relevance in the formulation of modern theories such as Gauge Theory, Dirac's magnetic monopole, the Aharonov-Bohm effect, Yang-Mills theory, and instantons. Using concepts from differential geometry, such as fiber spaces, connections, curvature, and holonomy, we explore how these mathematical structures provide a unifying language for describing fundamental physical phenomena.

Initially, we introduce fiber bundles as a generalization of Cartesian products, emphasizing their role in defining physical fields in curved spaces or those with nontrivial topologies. Connections are described as tools for transporting information along the bundle, establishing the parallel between covariant derivatives and local transformations in physical theories. Examples of tangent bundles and principal bundles are discussed as fundamental cases for applications in Physics.

In Gauge Theory, fiber bundles provide the necessary formalism to describe fundamental interactions, such as electromagnetic, weak, and strong forces, using local symmetry groups. We explore Dirac's magnetic monopole as a singular solution to Maxwell's equations, whose existence is intrinsically linked to the topology of fiber bundles. The Aharonov-Bohm effect, in turn, demonstrates how connections can mediate physical effects in regions where local fields vanish, revealing the importance of the global properties of spacetime.

We then advance to Yang-Mills theory, which generalizes electromagnetism to non-abelian symmetry groups, forming the foundation of the Standard Model of Particle Physics. In this theory, the curvatures of fiber bundles correspond to the forces associated with Gauge fields. We also discuss instantons, classical solutions of the Yang-Mills equations, which play a significant role in the description of quantum transitions and phenomena such as spontaneous symmetry breaking.

Throughout this study, we emphasize how fiber bundles encapsulate information about the geometric structure of spacetime and enable an accurate description of phenomena involving topology, symmetry, and local interactions. This geometric formalism not only clarifies the relationship between mathematics and physics but also opens possibilities for developing more comprehensive and unifying theories in the future.

3 Desenvolvimento

3.1 Fibrados

Os fibrados podem ser entendidos como uma estrutura matemática que generaliza a ideia de associar um espaço a cada ponto de uma variedade. Um fibrado associa uma "fibra", que pode ser um espaço vetorial, um espaço tangente ou um grupo de Lie, a cada ponto de uma variedade base. Essencialmente, um fibrado consiste em uma variedade base M , sobre a qual são "coladas" fibras F_p em cada ponto $p \in M$, de modo que essas fibras variam suavemente ao longo da base.

3.1.1 Definição

A intuição básica é que, para cada ponto da variedade base M , há um espaço adicional, chamado de fibra, que "paira" sobre ele. Este espaço, a fibra, pode ser de diversas naturezas, como um espaço vetorial, um grupo, ou até outro tipo de estrutura matemática, dependendo do contexto. [8] Este conceito é central em diversas áreas da física teórica e geometria diferencial, permitindo a formalização de sistemas físicos com simetrias locais ou globais.

Portanto, formalmente, um *fibrado* (E, π, M, F, G) consiste nos seguintes elementos:

- (i) Uma variedade diferenciável E chamada de *espaço total*, que combina o espaço base e todas as fibras.
- (ii) Uma variedade diferenciável M chamada de *espaço base*, sobre a qual o fibrado está construído.

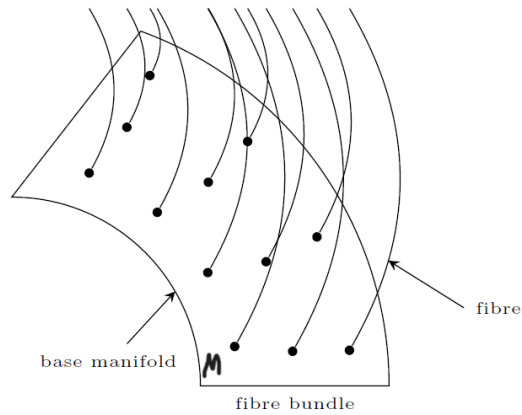


Figura 1: Nesta imagem, observamos a representação de um fibrado sobre uma variedade M , onde cada ponto da variedade tem associada uma fibra. Imagem retirada de [17].

- (iii) Uma variedade diferenciável F chamada de *fibra* (ou *fibra típica*), que representa a estrutura de cada fibra individual.
- (iv) Uma sobrejeção $\pi : E \rightarrow M$ chamada de *projeção*. A imagem inversa $\pi^{-1}(p) = F_p \cong F$ é chamada de *fibra* sobre p .
- (v) Um grupo de Lie G chamado de *grupo estrutural*, que age à esquerda em F .
- (vi) Um conjunto de recobrimentos abertos $\{U_i\}$ de M com um difeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$. O mapa ϕ_i é chamado de *trivialização local*, já que ϕ_i^{-1} mapeia $\pi^{-1}(U_i)$ no produto direto $U_i \times F$.
- (vii) Se escrevermos $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$, o mapa $\phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$ é um difeomorfismo. No conjunto $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, exigimos que $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \rightarrow F$ seja um elemento de G . Então, ϕ_i e ϕ_j estão relacionados por um mapa suave $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$.

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f).$$

Onde os mapas t_{ij} são chamados de *funções de transição*.

Nesse viés, a trivialização local pode ser enxergada como uma maneira de descrever o fibrado como um produto direto numa região local da base, que nos fornece um "desembaraçar" do fibrado. Para enxergar isso, pode ser feito uma analogia com o cilindro, o espaço base é o círculo, enquanto as fibras serão várias extensões verticais cobrindo cada ponto do círculo, gerando assim um fibrado. [1]

3.1.2 Função de Transição

Considere uma carta U_i do espaço base M . O conjunto $\pi^{-1}(U_i)$ é difeomorficamente equivalente a um produto direto $U_i \times F$, por meio de um mapa $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$, conhecido como trivialização local. Quando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, temos duas trivializações ϕ_i e ϕ_j que se sobrepõem na região $U_i \cap U_j$. Para um ponto $u \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$, tal que $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$, podemos associar dois elementos da fibra típica F a partir das trivializações, dados por:

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, f_i), \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, f_j), \quad (1)$$

onde f_i e f_j representam as coordenadas locais do ponto u na fibra associada às trivializações ϕ_i e ϕ_j , respectivamente. A relação entre f_i e f_j é mediada por um mapa suave $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, definido como:

$$f_i = t_{ij}(p)f_j. \quad (2)$$

Esse mapa $t_{ij}(p)$ é chamado de *função de transição* e deve satisfazer as seguintes condições de consistência para garantir que as trivializações locais formem um fibrado global:

- Identidade em cada carta:

$$t_{ii}(p) = \text{id}, \quad \forall p \in U_i. \quad (3)$$

- Simetria inversa entre interseções:

$$t_{ij}(p) = t_{ji}(p)^{-1}, \quad \forall p \in U_i \cap U_j. \quad (4)$$

- Condição de cociclo em interseções triplas:

$$t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) = t_{ik}(p), \quad \forall p \in U_i \cap U_j \cap U_k. \quad (5)$$

Considere agora um recobrimento aberto $\{U_i\}$ do espaço base M , tal que $M = \bigcup_i U_i$. Para cada U_i , existe uma trivialização local que "desenrola" o fibrado como um produto direto $U_i \times F$, onde F é a fibra típica.

Sejam $\{\phi_i\}$ e $\{\tilde{\phi}_i\}$ dois conjuntos de trivializações locais que descrevem o mesmo fibrado. As funções de transição associadas a essas trivializações, $t_{ij}(p)$ e $\tilde{t}_{ij}(p)$, descrevem como conectar as trivializações em regiões de interseção $U_i \cap U_j$, sendo definidas como:

$$t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}, \quad \tilde{t}_{ij}(p) = \tilde{\phi}_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{j,p}. \quad (6)$$

Agora, definimos um mapa $g_i(p) : F \rightarrow F$ em cada $p \in U_i$ que relaciona as duas trivializações locais ϕ_i e $\tilde{\phi}_i$:

$$g_i(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{i,p}. \quad (7)$$

Esse mapa $g_i(p)$ pertence ao grupo estrutural G e relaciona as duas descrições locais do fibrado sobre U_i . A compatibilidade entre as funções de transição de ambas as trivializações é dada pela seguinte relação:

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i(p)^{-1} \cdot t_{ij}(p) \cdot g_j(p), \quad \forall p \in U_i \cap U_j. \quad (8)$$

Essa equação mostra como as funções de transição mudam sob uma reparametrização local, garantindo a invariância da estrutura do fibrado sob mudanças de trivialização. [1]

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i(p)^{-1} \circ t_{ij}(p) \circ g_j(p) \quad (9)$$

Nas aplicações físicas que encontraremos, as funções de transição t_{ij} representam as transformações de calibre necessárias para conectar diferentes gráficos locais do fibrado. [6]

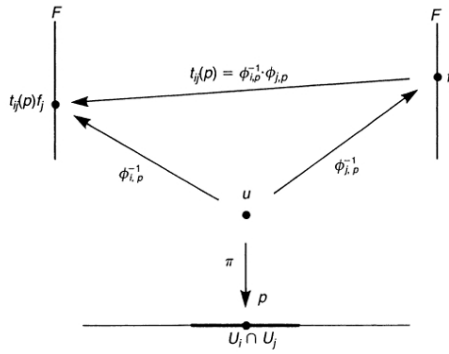


Figura 2: No recobrimento $U_i \cap U_j$, dois elementos $f_i, f_j \in F$ são atribuídos a $u \in \pi^{-1}(p)$, com $p \in U_i \cap U_j$. Eles estão relacionados por $t_{ij}(p)$ de modo que $f_i = t_{ij}(p)f_j$. A imagem ilustra o conceito de transição entre as diferentes trivializações locais e como as funções de transição $t_{ij}(p)$ conectam as fibras sobre a interseção das cartas U_i e U_j . [1].

Exemplificando, considere a faixa de Möbius como um fibrado sobre o círculo S^1 , se cobrirmos S^1 com dois abertos U_1 e U_2 a função de transição pode ser uma função que "inverte" a fibra $F = [0, 1]$ ao passar de U_1 para U_2 , refletindo a torção da faixa de Möbius. [8]

3.1.3 Fibrado Principal

Um **fibrado principal** é um tipo especial de fibrado onde a fibra típica é um grupo de Lie G e a ação deste grupo no fibrado é livre e transitiva. Formalmente, um fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$ consiste em:

- P : o espaço total;
- M : a base do fibrado, que é uma variedade diferencial;
- G : o grupo estrutural, um grupo de Lie que atua à direita de forma suave em P ;
- $\pi : P \rightarrow M$: a projeção, uma função suave que mapeia pontos do espaço total P para a base M .

Em um fibrado principal, cada fibra $\pi^{-1}(x)$ é isomorfa ao grupo G e podemos usar essa estrutura para definir conexões e outras ferramentas geométricas. É válido comentar sobre os grupos de Lie, pois eles representam as simetrias dos campos de calibre, e dentre eles temos $U(1)$ o grupo unitário, $SO(2)$ o grupo de rotações, $SO(3)$, entre outros, mas esses três, posteriormente, serão explorados.[5]

A função de transição atua sobre a fibra à esquerda como antes. Além disso, também podemos definir a ação de G em F à direita. Seja $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ a trivialização local dada por $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, onde $u \in \pi^{-1}(U_i)$ e $p = \pi(u)$. A ação à direita de G em $\pi^{-1}(U_i)$ é definida por ϕ_i^{-1} , ou seja, para qualquer $a \in G$ e $u \in \pi^{-1}(p)$.

$$ua = \phi_i(p, g_i a), \quad (10)$$

Como a ação à direita comuta com a ação à esquerda, essa definição é independente das trivializações locais. De fato, se $p \in U_i \cap U_j$,

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p)g_i a) = \phi_i(p, g_i a). \quad (11)$$

3.2 Conexões em Fibrados Principais

3.2.1 Definição

Ao trabalhar em espaços curvos, algumas propriedades novas aparecem e precisam ser levadas em consideração, por exemplo, à medida que se move um vetor por uma curva, tentamos o manter "paralelo", entretanto, ao voltar ao mesmo ponto, observa-se que a direção do vetor é mudada, e isso é devido a presença da curvatura. Para isso precisamos das conexões, que trata-se de uma generalização da derivada em variedades, permitindo conectar ou comparar vetores em diferentes pontos dessa variedade, definindo uma noção de "horizontalidade".

Seja u um elemento de um fibrado principal $P(M, G)$ e seja G_p a fibra em $p = \pi(u)$. O subespaço vertical $V_u P$ é um subespaço de $T_u P$, que é tangente a G_p em u . Tal que,

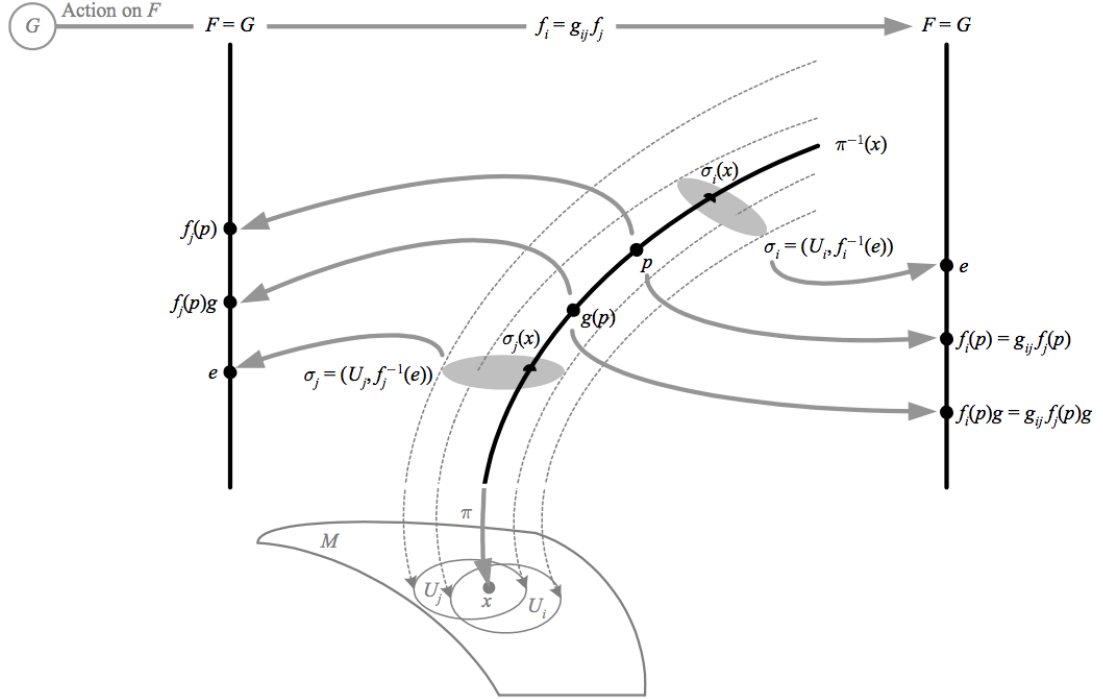


Figura 3: O exposto acima ilustra como um fibrado principal possui o mesmo grupo G tanto como fibra abstrata quanto como grupo estrutural, onde G atua sobre si mesmo via translação à esquerda. G também possui uma ação à direita no próprio fibrado, que é consistente em relação aos recobrimentos trivializantes. As seções identidade (definidas abaixo) também estão representadas.

$V_u P$ é construído da seguinte forma: tome um elemento A de \mathfrak{g} (o álgebra de Lie de G). Pela ação à direita,

$$R_{\exp(tA)}u = u \exp(tA), \quad (12)$$

é definida uma curva passando por u em P . Como $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$, essa curva permanece dentro de G_p . Definimos um vetor $A^\# \in T_u P$ por:

$$A^\# f(u) = \left. \frac{d}{dt} f(u \exp(tA)) \right|_{t=0}, \quad (13)$$

onde $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave arbitrária. O vetor $A^\#$ é tangente a P em u , logo $A^\# \in V_u P$. Dessa maneira, definimos um vetor $A^\#$ em cada ponto de P e construímos

um campo vetorial $A^\#$, chamado de campo vetorial fundamental gerado por A . Existe um isomorfismo entre o espaço vetorial \mathfrak{g} e V_uP dado por $A \rightarrow A^\#$. [1]

O subespaço horizontal H_uP é um complemento de V_uP em T_uP e é unicamente especificado se uma conexão estiver definida em P .

Portanto, seja $P(M, G)$ um fibrado principal. Uma conexão em P é uma separação única do espaço tangente T_uP em subespaço vertical V_uP e subespaço horizontal H_uP tal que:

- $T_uP = H_uP \oplus V_uP$.
- Um campo vetorial suave X em P é separado em campos vetoriais suaves $X_H \in H_uP$ e $X_V \in V_uP$, como $X = X_H + X_V$.
- $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$ para $u \in P$ arbitrário e $g \in G$, onde R_g é a ação à direita do grupo G no fibrado.

Assim, uma conexão em um fibrado principal $P(M, G)$ define uma forma de decompor o espaço tangente T_uP em componentes horizontais e verticais. A conexão permite transportar vetores horizontalmente ao longo da base M de maneira coerente com a estrutura do grupo G e sua ação no fibrado. A conexão, fornece uma maneira de associar uma estrutura geométrica ao fibrado principal, facilitando o transporte paralelo e a curvatura do fibrado. [8]

Conexão 1-Forma

Uma 1-forma de conexão $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ é uma projeção de T_uP sobre o componente vertical V_uP . As propriedades da projeção são resumidas pelos seguintes requisitos, ou seja, para $X \in T_uP$:

- $\omega(A^\#) = A$, onde $A \in \mathfrak{g}$ e $A^\#$ é o campo vetorial fundamental gerado por A .
- $R_g^*\omega = \text{Ad}_{g^{-1}}\omega$, onde R_g é a ação à direita do grupo G e $\text{Ad}_{g^{-1}}$ é a ação adjunta de G sobre \mathfrak{g} .

- $R_g^* \omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R_{g*} X) = g^{-1} \omega_u(X) g$, para $g \in G$ e $u \in P$, onde R_{g*} é o empurrão da ação à direita.

3.2.2 Conexão Local e Potencial de gauge

Seja $\{U_i\}$ um recobrimento aberto de M e seja σ_i uma seção local definida em cada U_i . É conveniente introduzir uma 1-forma com valores na álgebra de Lie \mathcal{A}_i sobre U_i , dada por:

$$\mathcal{A}_i \equiv \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i). \quad (14)$$

Reciprocamente, dada uma 1-forma \mathcal{A}_i com valores na álgebra de Lie sobre U_i , podemos reconstruir uma 1-forma de conexão ω cujo pullback por σ_i^* é \mathcal{A}_i . Dada uma 1-forma \mathcal{A}_i com valores em \mathfrak{g} sobre U_i e uma seção local $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, existe uma 1-forma de conexão ω tal que $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$. [2]

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e σ_i (σ_j) uma seção local sobre U_i (U_j) tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Para $X \in T_p M$ (onde $p \in U_i \cap U_j$), $\sigma_i^* X$ e $\sigma_j^* X$ satisfazem:

$$\sigma_j^* X = R_{t_{ij}^*}(\sigma_i^* X) + (t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X))^\# \quad (15)$$

onde $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ é a função de transição. A condição de compatibilidade é facilmente obtida ao aplicarmos a 1-forma de conexão ω na equação 15. Encontramos que:

$$\sigma_j^* \omega(X) = t_{ij}^{-1} \omega(\sigma_i^* X) t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X). \quad (16)$$

Como isso é verdadeiro para qualquer $X \in T_p M$, utilizando a definição $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$, essa equação se reduz a:

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}. \quad (17)$$

Esta é a condição de compatibilidade, onde o primeiro termo representa a transformação de gauge do potencial \mathcal{A}_i de uma região U_i para U_j . A transformação de gauge

é uma conjugação pela função de transição t_{ij} . A ideia é que, quando você "muda de quadro" (ou seção local) de U_i para U_j , o potencial de gauge se transforma conforme esta conjugação. E o segundo termo de nossa equação é um termo adicional que aparece quando realizamos uma transformação de gauge; e está relacionado à derivada exterior da função de transição t_{ij} [8]. Este termo garante que a variação de t_{ij} ao longo da sobreposição entre U_i e U_j seja levada em conta. Ele é essencial para manter a consistência na forma de conexão. [8].

3.2.3 Curvatura

A curvatura de um fibrado principal é análoga à curvatura de Riemann, que no contexto dos fibrados de vetores, mede a não comutatividade do transporte paralelo de vetores. No caso dos fibrados principais, a curvatura também está relacionada à não comutatividade do transporte paralelo, mas é descrita de maneira diferente. Vamos explorar essa interpretação.

Sabemos que o tensor de curvatura de Riemann expressa a não comutatividade do transporte paralelo de vetores no espaço-tempo, conforme discutido no relatório anterior. De maneira análoga, a curvatura em fibrados principais pode ser interpretada em termos do comutador de campos vetoriais horizontais.

Sejam $X, Y \in H_u P$, dois vetores horizontais no fibrado principal $P(M, G)$. A curvatura pode ser interpretada como a projeção vertical do comutador de Lie $[X, Y]$ de vetores horizontais. Essa interpretação surge ao considerar a ação da derivada exterior da forma de conexão ω , denotada por $d_P \omega$. Como temos $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ para vetores horizontais, segue que:

$$d_P \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]). \quad (18)$$

Dado que $X^H = X$ e $Y^H = Y$, podemos reescrever a curvatura como:

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) = -\omega([X, Y]). \quad (19)$$

Portanto, a curvatura mede a não comutatividade do transporte paralelo ao projetar

o comutador de Lie $[X, Y]$ de vetores horizontais de volta ao subespaço vertical, através da forma de conexão ω .

Isso ilustra como a curvatura de um fibrado principal está diretamente relacionada à estrutura do grupo de simetria G , e à forma como ele "curva" o fibrado através do transporte paralelo de suas fibras.

3.2.4 Forma Local da Curvatura

A forma local da curvatura é definida como o pullback da 2-forma de curvatura pela seção local σ :

$$\mathcal{F} \equiv \sigma^* \Omega \quad (20)$$

onde σ é uma seção local definida em uma carta U de M (ver $\mathcal{A} = \sigma^* \omega$). A curvatura \mathcal{F} é expressa em termos do potencial de gauge \mathcal{A} como:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \quad (21)$$

onde d é a derivada exterior em M . A curvatura \mathcal{F} também é chamada de 2-forma de curvatura e é identificada com a força de campo de Yang-Mills. Para evitar confusão, chamamos Ω de curvatura e \mathcal{F} de força de campo (Yang-Mills). [9]

Como A_μ e $F_{\mu\nu}$ são funções com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} , podemos expandi-las em termos da base $\{T_\alpha\}$ de \mathfrak{g} :

$$A_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha, \quad (22)$$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha. \quad (23)$$

Os vetores base $\{T_\alpha\}$ satisfazem as relações de comutação usuais $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma$. A partir disso, obtemos a expressão bem conhecida:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma. \quad (24)$$

Essa equação representa a força de campo (ou tensor de curvatura) em uma teoria de gauge, como a teoria de Yang-Mills, expressa em termos do potencial de gauge A_μ^α e suas derivadas.

1. $F_{\mu\nu}^\alpha$: É o campo de força ou tensor de curvatura associado ao campo de gauge A_μ^α . Esse objeto captura a variação não trivial do potencial de gauge e a forma como ele se comporta sob transformações de calibre.

2. $\partial_\mu A_\nu^\alpha$ e $\partial_\nu A_\mu^\alpha$: Esses são os termos de derivadas parciais do potencial de gauge A_ν^α e A_μ^α , respectivamente. Eles representam como o potencial de gauge muda ao longo das direções μ e ν no espaço-tempo. A diferença desses dois termos mede a não comutatividade da derivada exterior do potencial de gauge, semelhante ao que ocorre no eletromagnetismo, onde o campo de força (tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$) é dado pela derivada da 1-forma A_μ .

3. $f_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma$: Este termo é o termo de interação não linear que surge devido à estrutura da álgebra de Lie associada ao grupo de gauge. O símbolo $f_{\beta\gamma}^\alpha$ são as constantes de estrutura da álgebra de Lie do grupo de simetria, e indicam que os campos A_μ^α podem interagir entre si, ao contrário do que ocorre no eletromagnetismo clássico, onde o campo eletromagnético não se auto-interage. [8]

Identidade de Bianchi: A identidade de Bianchi é uma condição importante que surge naturalmente em teorias de Gauge e diz respeito à curvatura do fibrado principal. Ela expressa a ideia de que a derivada covariante da curvatura Ω^α deve se anular, garantindo a consistência da teoria.

A identidade de Bianchi pode ser expressa como:

$$D_P \Omega^\alpha = d_P \Omega^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \Omega^\gamma = 0$$

Aqui, D_P é a derivada covariante associada ao campo de conexão ω^α , e esta equação nos diz que a curvatura não pode variar de forma arbitrária; sua variação está sujeita a essa restrição geométrica.

A identidade de Bianchi reflete uma propriedade geométrica fundamental dos campos

de curvatura em fibrados principais. Ela é análoga à identidade de Bianchi encontrada na relatividade geral para o tensor de curvatura de Riemann. Na física, essa identidade assegura que as equações de campo, como as equações de Yang-Mills, sejam consistentes. Especificamente, a identidade de Bianchi implica que a curvatura está relacionada de forma intrínseca ao potencial de Gauge, e que a evolução do campo de força no tempo e no espaço deve obedecer a essa estrutura geométrica. [1]

3.3 Aplicações Físicas

Como mencionamos várias vezes, um potencial de Gauge pode ser interpretado como uma expressão local para uma conexão em um fibrado principal. A força de campo de Yang-Mills é, então, identificada com a forma local da curvatura associada à conexão. Nesta subseção iremos abordar casos físicos que são resolvidos através dos Fibrados e as Conexões em Fibrados.

3.3.1 Teoria de gauge $U(1)$

A teoria do eletromagnetismo de Maxwell é descrita pelo grupo de gauge $U(1)$. Nas equações de Maxwell, os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} são tradicionalmente definidos como:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

onde ϕ é o potencial escalar e \vec{A} é o potencial vetor. Esses potenciais permitem reescrever os campos \vec{E} e \vec{B} de forma que automaticamente satisfaçam duas das equações de Maxwell, a saber:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0.$$

O uso de ϕ e \vec{A} reduz o número de variáveis independentes e facilita a análise do problema. Além disso, esses potenciais revelam a simetria de calibre subjacente ao eletromagnetismo: transformações de calibre da forma

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda,$$

onde Λ é uma função arbitrária, deixam os campos \vec{E} e \vec{B} invariantes. Essa invariância é uma manifestação do grupo de simetria $U(1)$, que governa o eletromagnetismo.

O grupo $U(1)$ é abeliano e unidimensional, portanto, omitimos todos os índices de grupo α, β, \dots e definimos as constantes de estrutura $f^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Suponha que o espaço base M seja o espaço-tempo de Minkowski quadridimensional. O fibrado $U(1)$ P é trivial, ou seja, $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$, e uma única trivialização local sobre M é suficiente. [9]

O potencial de gauge, anteriormente visto na 14 é simplesmente dado por:

$$A = A_\mu dx^\mu. \quad (25)$$

No formalismo de calibre, o potencial de gauge A_μ é interpretado como uma 1-forma de conexão no fibrado principal, enquanto o campo de força $F_{\mu\nu}$ é identificado com a curvatura dessa conexão, onde F é uma 2-forma no espaço base.

A força de campo, ou seja, o tensor de campo eletromagnético, é obtida pela equação 21, ou seja nesse caso é a derivada exterior do potencial de gauge:

$$F = dA. \quad (26)$$

Em componentes, temos:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu. \quad (27)$$

A força de campo $F_{\mu\nu}$ também satisfaz a identidade de Bianchi, que expressa a conservação do campo eletromagnético:

$$dF = F \wedge A - A \wedge F = 0. \quad (28)$$

$$dF = 0. \quad (29)$$

Em componentes, temos a equação:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (30)$$

Se identificarmos os componentes $F_{\mu\nu} \equiv iF_{\mu\nu}$ com o campo elétrico \mathbf{E} e o campo magnético \mathbf{B} , as seguintes definições são adotadas:

$$E_i = F_{i0}, \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (31)$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

Utilizando as identificações da equação 31 e as substituindo na equação 30 obteremos duas das equações de Maxwell.

Escolhemos os índices μ, ν, λ de forma que todos sejam espaciais ($\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3$):

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0.$$

Aqui, $F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu k}B_k$, conforme definido. Substituímos isso na equação 30:

$$\partial_\lambda \epsilon_{\mu\nu k}B_k + \partial_\nu \epsilon_{\lambda\mu k}B_k + \partial_\mu \epsilon_{\nu\lambda k}B_k = 0.$$

Usando a propriedade cíclica da identidade de Bianchi e reagrupando os termos, obtemos:

$$\epsilon_{ijk}\partial_i B_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Agora, consideramos o caso em que um dos índices é temporal (0) e os outros dois são espaciais. Escolhemos, por exemplo, $\mu = 0, \nu = i, \lambda = j$:

$$\partial_j F_{0i} + \partial_i F_{j0} + \partial_0 F_{ij} = 0.$$

Substituímos $F_{0i} = E_i$ e $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$ para obter:

$$\partial_j E_i - \partial_i E_j + \partial_0 \epsilon_{ijk}B_k = 0.$$

Reescrevendo em notação vetorial:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (32)$$

Para obter as outras duas equações, podemos utilizar a ação de Maxwell.

A ação de Maxwell é construída com base nos seguintes princípios fundamentais:

1. **Simetria de Gauge:** O eletromagnetismo é descrito por uma simetria de gauge associada ao grupo $U(1)$. O campo de gauge A_μ gera o tensor de campo $F_{\mu\nu}$, que contém as informações dos campos elétrico e magnético.
2. **Escalar Relativístico:** A ação deve ser um escalar sob transformações de Lorentz para garantir a invariância de referencial.
3. **Dependência Quadrática em $F_{\mu\nu}$:** A densidade lagrangiana deve depender do tensor $F_{\mu\nu}$, e a forma mais simples e natural dessa dependência é quadrática:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

4. **Densidade Lagrangiana:** A densidade lagrangiana \mathcal{L} representa a energia dos campos eletromagnéticos e é proporcional a $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

O que nos leva a uma funcional da forma de campo \mathcal{F} dada por:

$$S_M[\mathcal{F}] \equiv \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d^4x = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d^4x. \quad (33)$$

Onde:

- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de campo eletromagnético (curvatura associada ao fibrado $U(1)$).
- $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ é o tensor de campo com índices elevados, utilizando a métrica $g^{\mu\nu}$.

A variação da ação em relação ao potencial vetor A_μ é escrita como:

$$\delta S_M = \delta \left(-\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d^4x \right) = 0 \quad (34)$$

Sabemos que $F_{\mu\nu}$ depende de A_μ , então:

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu. \quad (35)$$

Substituindo, temos:

$$\delta S_M = -\frac{1}{4} \int (\delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}) d^4x. \quad (36)$$

Devido à linearidade da variação, podemos reescrever:

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x. \quad (37)$$

Agora substituimos $\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu$:

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) F^{\mu\nu} d^4x. \quad (38)$$

Usando integração por partes para mover as derivadas ∂_μ e ∂_ν , e assumindo que $\delta A_\mu = 0$ nas bordas, obtemos:

$$\delta S_M = \int \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} d^4x. \quad (39)$$

Para que a ação seja estacionária ($\delta S_M = 0$), a condição necessária é:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (40)$$

A equação $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ pode ser expandida em componentes. O tensor $F^{\mu\nu}$ tem a seguinte estrutura:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\nu = 0$, temos:

$$\partial_i F^{i0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (41)$$

que é a equação de Gauss para o campo elétrico no vácuo.

Para $\nu = 1, 2, 3$, obtemos:

$$\partial_0 F^{0i} + \epsilon^{ijk} \partial_j B_k = -\frac{\partial E_i}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_i = 0, \quad (42)$$

ou seja:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (43)$$

Obtendo assim as duas equações de Maxwell restantes.

Portanto, a teoria de gauge $U(1)$, exemplificada pela eletrodinâmica de Maxwell, nos oferece uma descrição geométrica profunda e elegante das interações eletromagnéticas.

Essa estrutura vai além de uma simples formulação matemática consistente; ela revela a natureza intrinsecamente geométrica do campo eletromagnético, onde os potenciais vetor A_μ e escalar ϕ não são meros auxiliares, mas elementos fundamentais na descrição das propriedades físicas, como iremos explorar mais a frente.

3.3.2 Monopolo de Dirac

No eletromagnetismo usual, podemos descrever um campo magnético B em termos de um potencial vetor A tal que

$$B = \nabla \times A. \quad (44)$$

No ano de 1931, o físico Paul Dirac fez um estudo demonstrando que um potencial vetor suave e globalmente bem definido levaria necessariamente à ausência de monopolos magnéticos, ou seja, $g \equiv 0$. Como alternativa, Dirac propôs que uma singularidade no potencial vetor seria necessária, levando à introdução da extbfcorda de Dirac [19].

Historicamente, as equações de Maxwell apresentavam uma aparente assimetria entre os campos elétrico e magnético. Enquanto a equação de Gauss para o campo elétrico é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (45)$$

a equação correspondente para o campo magnético é:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (46)$$

o que implica a inexistência de monopolos magnéticos no formalismo clássico do eletromagnetismo.

Entretanto, suponhamos a existência de um monopolo magnético localizado na origem. Nesse caso, o campo magnético associado teria a forma radial:

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (47)$$

Nosso objetivo é encontrar um potencial vetor \mathbf{A} tal que satisfaça a equação de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (48)$$

No entanto, verifica-se que não é possível definir um único potencial vetor \mathbf{A} suave e globalmente bem definido em toda a esfera S^2 . O motivo disso é que, se um único \mathbf{A} fosse globalmente bem definido, sua circulação ao longo de qualquer curva fechada deveria ser independente da escolha da curva. Entretanto, ao tentar definir \mathbf{A} globalmente, encontramos uma descontinuidade ao longo de um eixo singular, que pode ser interpretado como a corda de Dirac.

Para evitar singularidades no potencial vetor \mathbf{A} , usamos uma cobertura da esfera S^2 por duas cartas coordenadas [10] [19]. Em 1975, os físicos Tai Tsun Wu e Chen Ning Yang propuseram uma abordagem em que o espaço é dividido em duas regiões [20]:

$$R_a = \{r > 0, \frac{1}{2}\pi + \delta > \theta \geq 0, 2\pi > \phi \geq 0\}, \quad (49)$$

$$R_b = \{r > 0, \pi \geq \theta > \frac{1}{2}\pi - \delta, 2\pi > \phi \geq 0\}. \quad (50)$$

Os potenciais vetores definidos nessas regiões são:

$$R_a : \quad A_{a\phi} = g \frac{(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta}, \quad (51)$$

$$R_b : \quad A_{b\phi} = g \frac{(-1 - \cos \theta)}{r \sin \theta}. \quad (52)$$

Na interseção das duas regiões, a diferença entre os potenciais é:

$$A_{a\phi} - A_{b\phi} = \frac{i}{e} S \nabla S^{-1}, \quad (53)$$

onde a função de transição S entre os dois potenciais é dada por:

$$S = e^{2ieg\phi}. \quad (54)$$

A função de onda do elétron no campo magnético do monopolo tem componentes ψ_{Ra} e ψ_{Rb} definidas respectivamente nas regiões R_a e R_b . Na região de sobreposição, temos a relação:

$$\psi_{Ra} = S\psi_{Rb}. \quad (55)$$

Impondo a condição de unicidade da função de onda ao redor do eixo polar, exigimos que, ao percorrer um ciclo completo em torno do monopolo ($\phi \rightarrow \phi + 2\pi$), a função de onda volte ao seu valor original. Assim, deve-se ter:

$$e^{4\pi i eg} = 1. \quad (56)$$

Essa condição implica que o produto das cargas elétrica e magnética deve ser quantizado:

$$2eg = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (57)$$

Essa relação estabelece a **quantização do monopolo de Dirac**, mostrando que a carga elétrica deve ser quantizada se monopolos magnéticos existirem na natureza. Este resultado fornece uma explicação teórica para a quantização da carga elétrica observada experimentalmente, sugerindo que monopolos podem desempenhar um papel fundamental na estrutura da teoria eletromagnética.

Agora vamos usar o formalismo de fibrados. Estudamos a teoria do eletromagnetismo de Maxwell definida em \mathbb{R}^4 . A trivialidade do espaço base faz com que o fibrado $U(1)$ seja trivial. O lema de Poincaré garante que o campo de força é globalmente exato: $F = dA$. É interessante estender nossa análise para fibrados $U(1)$ sobre um espaço base não trivial. Assumimos que tudo é independente do tempo, para simplificação. O monopolo de Dirac é definido em \mathbb{R}^3 com a origem removida, $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, e $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é homotopicamente equivalente à esfera S^2 , de modo que o fibrado relevante é um fibrado $U(1)$. S^2 é coberta por dois gráficos:

$$U_N \equiv \{(\theta, \phi) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon\} \quad \text{e} \quad U_S \equiv \{(\theta, \phi) | \frac{\pi}{2} - \epsilon \leq \theta \leq \pi\}, \quad (58)$$

onde θ e ϕ são coordenadas polares. Seja ω uma conexão de Ehresmann em P . [2] Tomamos uma seção local σ_N (ou σ_S) em U_N (ou U_S) e definimos os potenciais de gauge locais:

$$A_N = \sigma_N^* \omega, \quad \text{e} \quad A_S = \sigma_S^* \omega. \quad (59)$$

Seja t_{NS} a função de transição definida no equador $U_N \cap U_S$. A função t_{NS} define um mapa de S^1 (equador) para $U(1)$ (grupo de estrutura), o qual é classificado por $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$. Os potenciais de gauge A_N e A_S estão relacionados em $U_N \cap U_S$ por

$$A_N = t_{NS}^{-1} A_S t_{NS} + t_{NS}^{-1} dt_{NS} = A_S + id\varphi. \quad (60)$$

Isolando $id\varphi$, obtemos a seguinte equação:

$$d\varphi = -i(A_N - A_S) = 2gd\phi. \quad (61)$$

Ou seja, a diferença entre os potenciais de gauge nos dois hemisférios é controlada por essa função azimutal $\varphi(\phi)$, que desempenha um papel crucial na quantização da carga magnética [2]. Ao percorrer um ciclo completo ao longo do equador, o ângulo azimutal ϕ varia de 0 a 2π , e a função $\varphi(\phi)$ integra-se como:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi g. \quad (62)$$

Para garantir que a função de transição entre os dois potenciais seja bem definida, a transformação de calibre da função de onda entre os hemisférios Norte (N) e Sul (S) é dada por:

$$\psi_N = e^{i\varphi(\phi)} \psi_S. \quad (63)$$

A condição de monodromia exige que, ao darmos uma volta completa ao redor do equador ($\phi \rightarrow \phi + 2\pi$), a função de onda retorne a si mesma, ou seja:

$$e^{i\varphi(2\pi)} = e^{i\varphi(0)}. \quad (64)$$

Como a diferença da fase é dada pela integral de φ , obtemos a condição:

$$e^{i4\pi g} = 1. \quad (65)$$

Dessa equação, segue que $4\pi g$ deve ser um múltiplo inteiro de 2π , ou seja:

$$4\pi g = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (66)$$

Dividindo ambos os lados por 2π , obtemos:

$$2g = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (67)$$

Agora, introduzimos a carga elétrica e . Na teoria quântica de campos, a interação entre um elétron (com carga e) e o potencial vetor A ocorre através da derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (68)$$

Quando consideramos um monopolo magnético, o campo magnético B satisfaz a equação de Maxwell modificada:

$$\nabla \cdot B = 4\pi g \delta^3(r). \quad (69)$$

Como o potencial vetor A não pode ser definido de maneira suave em toda a esfera S^2 , introduzimos duas funções de calibre A_N e A_S nos hemisférios Norte e Sul, respectivamente, que estão relacionadas por uma transformação de calibre na região de sobreposição:

$$A_N - A_S = \frac{i}{e} S \nabla S^{-1}. \quad (70)$$

A transformação de calibre da função de onda, dada por

$$\psi_N = S \psi_S, \quad (71)$$

exige que a fase da função de transição S seja periódica ao redor do equador:

$$S = e^{i\chi}, \quad \text{com } \chi(2\pi) - \chi(0) = 4\pi e g. \quad (72)$$

A condição de unicidade da função de onda impõe que

$$e^{i4\pi eg} = 1. \quad (73)$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados e lembrando que o único conjunto de valores permitidos são os múltiplos inteiros de 2π , obtemos a condição de quantização:

$$4\pi eg = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (74)$$

Finalmente, dividindo por 2π , recuperamos a relação de quantização de Dirac:

$$2eg = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (75)$$

Essa equação fundamental demonstra que, se existir pelo menos um monopolo magnético no universo, a carga elétrica e deve ser quantizada, explicando a quantização observada experimentalmente. [1] [10] [19] [20]

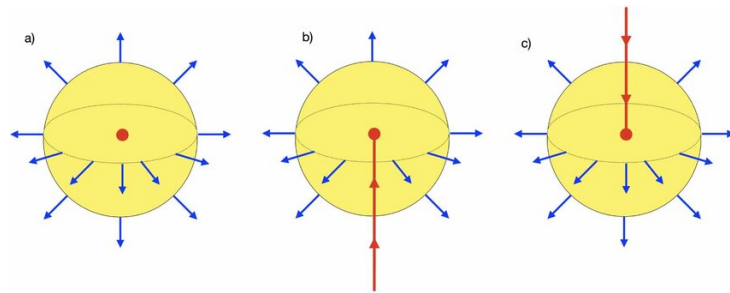


Figura 4: Representação do monopolo de Dirac (ponto vermelho) com linhas de campo magnético radiais (azul) e a linha de Dirac (vermelho). a) Monopolo isolado com campo radial. b) Monopolo com linha de Dirac ascendente. c) Monopolo com linha de Dirac descendente.

[18]

3.3.3 Efeito Aharonov-Bohm

No estudo clássico do eletromagnetismo, os campos elétrico e magnético, representados pelo tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$, são tradicionalmente considerados as quantidades fundamentais, enquanto os potenciais $A_\mu = (A, A_0)$ são tratados como auxiliares, sem significado físico direto. No entanto, na formulação quântica da eletrodinâmica, torna-se evidente que o potencial vetorial desempenha um papel crucial em certas situações, mesmo quando o campo eletromagnético é nulo em uma determinada região do espaço. [7]

Um dos exemplos mais notáveis dessa necessidade é o efeito Aharonov-Bohm, no qual partículas carregadas sofrem influências mensuráveis devido à presença de um potencial eletromagnético, mesmo quando os campos elétrico e magnético locais são nulos. Isso demonstra que A_μ contém informação física além daquela codificada em $F_{\mu\nu}$.

E para ilustrar a configuração de nosso problema, segue-se a imagem contendo o experimento.

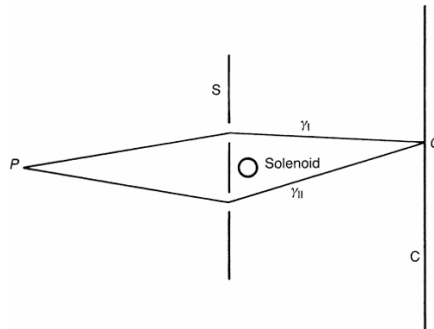


Figura 5: Um feixe de elétrons com carga e chega da extrema esquerda e forma um padrão de interferência na tela C . Um solenoide de comprimento infinito é colocado no meio do feixe. Uma blindagem S impede os elétrons de penetrarem no solenoide. Imagem retirada de [1].

Consideremos uma configuração clássica do efeito Aharonov-Bohm: um solenoide infinitamente longo, transportando uma corrente elétrica estacionária, de modo que o campo magnético esteja confinado ao seu interior. No exterior do solenoide, temos que o campo magnético é nulo, ou seja,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \text{para } r > R, \quad (76)$$

onde R é o raio do solenoide. No entanto, o potencial vetor \mathbf{A} pode não ser trivial, pois a condição $\mathbf{B} = 0$ apenas exige que \mathbf{A} seja um campo irrotacional, permitindo que ele tenha um comportamento singular ao redor do eixo do solenoide. [7]

A escolha usual para \mathbf{A} na região externa ao solenoide, levando em conta a simetria cilíndrica do problema e a necessidade de reproduzir corretamente a circulação do campo magnético dentro do solenoide, é dada por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_B}{2\pi r^2}(-y, x, 0), \quad (77)$$

onde Φ_B é o fluxo magnético total através do solenoide. Esse potencial vetorial corresponde a uma configuração em que a integral de linha ao redor do solenoide é diferente de zero:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\ell = \Phi_B. \quad (78)$$

Essa equação mostra que, embora \mathbf{B} seja nulo fora do solenoide, o potencial \mathbf{A} ainda desempenha um papel físico fundamental, tornando possível a manifestação do efeito Aharonov-Bohm. [1]

$$\mathbf{A}(r) = \left(-\frac{y}{2\pi r^2}, \frac{x}{2\pi r^2}, 0 \right), \quad A_0 = 0 \quad (79)$$

Semi-classicamente, podemos distinguir entre os caminhos γ_I e γ_{II} na figura 5. Escrevemos a função de onda correspondente a γ_I (γ_{II}) como ψ_I (ψ_{II}) quando $A = 0$. Se $A \neq 0$, a função de onda é dada pela forma transformada de gauge:

$$\psi_A^i(r) \equiv \exp \left(ie \int_P^r A(r) \cdot dr \right) \psi_i(r) \quad (i = I, II) \quad (80)$$

onde P é um ponto de referência distante do aparato. Consideremos uma superposição $\psi_A^I + \psi_A^{II}$ de funções de onda ψ_A^I e ψ_A^{II} tal que $\psi_A^I(P) = \psi_A^{II}(P)$.

É evidente que, embora $B = 0$ nos pontos no espaço pelos quais os elétrons viajam, a função de onda depende do potencial vetorial A . [2]. Isso ocorre porque, na mecânica quântica, o potencial A altera a fase da função de onda associada ao elétron. A mudança de fase da função de onda ao longo de um caminho fechado γ pode ser calculada usando o potencial vetor, tal que, essa mudança é dada pelo integral de linha, e pelo teorema de Stokes, temos que

$$\oint_C A \cdot dl = \int_S (\nabla \times A) \cdot dS = \int_S B \cdot dS = \Phi \quad (81)$$

onde S é uma superfície delimitada por γ . Na mecânica quântica, a função de onda de uma partícula acumula uma fase proporcional ao integral de linha de A ao longo de sua trajetória. Para um caminho fechado γ , essa fase acumulada é proporcional ao fluxo magnético ϕ . Para que o padrão de interferência observado na tela não seja alterado, a diferença de fase acumulada entre dois caminhos possíveis deve ser um múltiplo inteiro de 2π . Isso garante que a superposição das funções de onda seja coerente. A partir disso, encontramos que o padrão de interferência deve ser o mesmo para dois valores dos fluxos Φ_a e Φ_b se

$$e(\Phi_a - \Phi_b) = 2\pi n \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}. \quad (82)$$

Como o problema é essencialmente bidimensional, consideramos uma região $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, onde o solenoide é assumido estar na origem. Os fibrados relevantes são o fibrado principal $P(M, U(1))$ e seu fibrado associado $E = P \times_\rho \mathbb{C}$, onde $U(1)$ age sobre \mathbb{C} de maneira óbvia. O fibrado E é um fibrado de linha complexa sobre M , cuja seção é a função de onda ψ . [7]

Definimos uma forma diferencial de um-forma com valores na álgebra de Lie ω , que serve como conexão local. A derivada covariante associada a essa conexão local é

$$D = d + iA = d + iA_\mu dx^\mu, \quad (83)$$

onde A é dada pela equação 79. Como $dA = 0$, essa conexão é localmente plana. Consideremos o círculo unitário S^1 que circunda o solenoide na origem. Parametrizamos S^1 como $e^{i\theta}$ (com $0 \leq \theta \leq 2\pi$) e escrevemos a conexão sobre S^1 como

$$A = i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta. \quad (84)$$

Exigimos que a função de onda ψ seja transportada paralelamente ao longo de S^1 em relação a essa conexão local, ou seja:

$$D\psi = (d + iA)\psi(\theta) \quad (85)$$

O transporte paralelo implica que a derivada covariante ao longo da curva deve ser zero:

$$\psi(\theta) = \left(d + i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta \right) \psi(\theta) = 0. \quad (86)$$

A equação diferencial para o transporte paralelo é dada pode ser reescrita como:

$$\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} = -i \frac{\Phi}{2\pi} \psi(\theta). \quad (87)$$

Separando variáveis e integrando:

$$\int \frac{1}{\psi} d\psi = \int -i \frac{\Phi}{2\pi} d\theta, \quad (88)$$

$$\ln |\psi(\theta)| = -i \frac{\Phi}{2\pi} \theta + C. \quad (89)$$

Exponenciando ambos os lados, obtemos:

$$\psi(\theta) = \psi(0) \exp \left(-i \frac{\Phi}{2\pi} \theta \right). \quad (90)$$

Impondo a condição de monodromia $\psi(2\pi) = \psi(0)$, que surge devido estarmos num círculo unitário S^1 , temos:

$$\psi(2\pi) = \psi(0) \exp \left(-i \frac{\Phi}{2\pi} \cdot 2\pi \right) = \psi(0). \quad (91)$$

Isso implica que:

$$e^{-i\Phi} = 1. \quad (92)$$

Portanto, o fluxo magnético Φ deve satisfazer a condição de quantização:

$$\Phi = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (93)$$

$$\psi(\theta) = e^{-i\theta/2\pi}. \quad (94)$$

Essa quantização do fluxo magnético é um reflexo da natureza discreta de certas propriedades em sistemas quânticos, como o momento angular ou o fluxo magnético em torno de um solenoide. Em termos práticos, isso implica que não é possível ajustar Φ de forma contínua; ele só pode variar em passos discretos de 2π .

Com base nas equações apresentadas, podemos concluir que o efeito Aharonov-Bohm demonstra que o potencial vetorial A , embora não mensurável diretamente nos experimentos de eletromagnetismo clássico, tem implicações físicas profundas em nível quântico. No contexto do experimento, o potencial A afeta a fase da função de onda dos elétrons, mesmo que o campo magnético B seja nulo nas regiões por onde os elétrons passam. Isso fica claro na solução da função de onda $\psi(\theta) = e^{-i\theta/2\pi}$, que mostra uma dependência explícita de A na fase da função de onda. [1]

O efeito Aharonov-Bohm, portanto, fornece evidência experimental de que o potencial vetorial A possui uma realidade física em nível quântico, sendo fundamental para descrever fenômenos que não podem ser explicados apenas pelos campos elétrico e magnético E e B . [7]

3.3.4 Teoria de Yang-Mills

A Teoria de Yang-Mills é uma extensão da teoria de gauge de Maxwell, que descreve o eletromagnetismo, para grupos de simetria não abelianos. Enquanto o eletromagnetismo é uma teoria de gauge com simetria $U(1)$, a Teoria de Yang-Mills lida com simetrias mais

complexas, como $SU(2)$ e $SU(3)$, que são fundamentais para descrever as interações fortes e fracas nas teorias modernas de partículas, especialmente no Modelo Padrão.

Consideremos uma teoria de gauge baseada no grupo $SU(2)$ no espaço \mathbb{R}^4 . A conexão de gauge A é expressa como:

$$A = A_\mu^\alpha T_\alpha dx^\mu, \quad (95)$$

onde:

- $T_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{2i}$ são os geradores da álgebra de Lie $su(2)$, com σ_α representando as matrizes de Pauli.
- A_μ^α são os componentes do potencial de gauge.
- dx^μ são os 1-formulários associados às coordenadas em \mathbb{R}^4 .

Os geradores T_α satisfazem a relação de comutação característica da álgebra $su(2)$:

$$[T_\alpha, T_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma, \quad (96)$$

onde $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ é o símbolo de Levi-Civita totalmente antissimétrico. [1]

A 2-forma de curvatura (ou força de campo) F é definido como:

$$F = dA + A \wedge A, \quad (97)$$

como vimos na equação 21, expandindo cada termo:

- O termo dA é a derivada exterior do potencial de gauge, representando a variação do potencial de gauge:

$$dA = \partial_\mu A_\nu^\alpha dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (98)$$

- O termo $A \wedge A$ é o produto exterior não comutativo:

$$(A \wedge A)_{\mu\nu}^\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (99)$$

Assim, o tensor de força de campo em componentes é dado por:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma. \quad (100)$$

Esse tensor de força de campo encapsula as propriedades locais da simetria $SU(2)$, e inclui tanto contribuições lineares $\partial_\mu A_\nu^\alpha$ quanto não lineares $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma$.

A identidade de Bianchi é uma consequência direta da definição do campo de curvatura F , reflete sua conservação, e nesse caso, é expressa como:

$$dF + [A, F] = 0. \quad (101)$$

O termo dF é a derivada exterior do 2-formulário F . Em componentes, temos:

$$(dF)^\alpha = \partial_\lambda F_{\mu\nu}^\alpha dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (102)$$

O termo $[A, F]$ representa a ação da conexão A sobre o campo F através do comutador na álgebra de Lie. Expandindo, temos:

$$[A, F]^\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^\beta \wedge F^\gamma. \quad (103)$$

Substituindo essas expressões na identidade de Bianchi, obtemos:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu}^\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\lambda^\beta F_{\mu\nu}^\gamma = 0. \quad (104)$$

Essa equação expressa uma relação fundamental entre a variação do campo de curvatura e a interação entre o potencial de gauge A e F , garantindo a consistência matemática da teoria de gauge. [9]

Analisando agora a ação de Yang-Mills podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$S_{\text{YM}}[A] = -\frac{1}{4} \int_M \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (105)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura, M representa a variedade base e tr denota o traço na álgebra de Lie associada ao grupo de gauge. [14]

Utilizando a linguagem de formas diferenciais, a ação pode ser reescrita de maneira compacta como:

$$S_{\text{YM}}[A] = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge *F), \quad (106)$$

onde:

- F é o 2-formulário de curvatura $F = dA + A \wedge A$,
- $*F$ é o dual de Hodge de F , definido como $(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, com $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ sendo o tensor de Levi-Civita.
- tr é o traço sobre os índices da álgebra de Lie.

A variação da ação $S_{\text{YM}}[A]$ em relação ao potencial de gauge A_μ fornece as equações de movimento. Variando a ação, temos:

$$\delta S_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(\delta A \wedge D * F) = 0, \quad (107)$$

onde D é a derivada covariante associada ao potencial A . Como a variação δA é arbitrária, segue que:

$$D * F = 0. \quad (108)$$

Expandindo explicitamente a derivada covariante $D * F$, obtemos:

$$(D * F)^\alpha = d(*F)^\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^\beta \wedge (*F)^\gamma. \quad (109)$$

Em componentes:

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^\alpha = \partial_\mu F^{\mu\nu\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta F^{\mu\nu\gamma} = 0. \quad (110)$$

A equação $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$ é a generalização das equações de Maxwell para grupos de gauge não abelianos. Ela expressa a conservação do campo de curvatura, levando em conta as interações auto-induzidas entre os campos de gauge, que são características das teorias de Yang-Mills. Além disso, a formulação com formas diferenciais, $D * F = 0$, ressalta a elegância geométrica da teoria, conectando a dinâmica dos campos diretamente à estrutura topológica do espaço-tempo e do grupo de gauge.

E a equação generalizada pode ser escrita como:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = j^\nu, \quad (111)$$

Para grupos não abelianos, o termo $[A_\mu, A_\nu]$ não é nulo, levando à **auto-interação** dos campos de força.

O eletromagnetismo é descrito pelo grupo **abeliano** $U(1)$, onde os elementos comutam:

$$[A_\mu, A_\nu] = 0. \quad (112)$$

Isso simplifica a equação de Yang-Mills, pois o tensor de campo de força $F_{\mu\nu}$ reduz-se a:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (113)$$

Esta é precisamente a definição da força de campo, como mostrado na seção 2.3.1. onde o eletromagnetismo foi estudado:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (114)$$

A equação de Yang-Mills torna-se então:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (115)$$

que corresponde às **equações de Maxwell na forma covariante**.

No eletromagnetismo, a função de onda de uma partícula carregada $\psi(x)$ pode ter um fator de fase:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) \quad (116)$$

Isso é uma **simetria global**, pois α não depende de x [14]. Para torná-la **local**, consideramos:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad (117)$$

Ao calcular a derivada:

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha) e^{i\alpha(x)} \psi \quad (118)$$

O segundo termo quebra a invariância de gauge. Para restaurá-la, introduzimos um **campo de gauge** A_μ que se transforma como:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (119)$$

Esse campo é o **potencial eletromagnético**, e sua dinâmica é descrita pela Lagrangiana de Maxwell:

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (120)$$

É de válida importância destacar que através de cálculos mais complexos analisando essa equação de forma mais profunda veremos que esse campo é o **fóton**, o bóson de gauge da interação eletromagnética.

A teoria de Yang-Mills para o grupo de Lie $SU(2)$ é um caso fundamental para descrever interações gauge não abelianas [9]. O grupo $SU(2)$ possui três geradores T^a ($a = 1, 2, 3$) que satisfazem a álgebra de Lie:

$$[T_\alpha, T_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}T_\gamma, \quad (121)$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ são os símbolos de Levi-Civita tridimensionais. Os geradores T^a são tipicamente representados pelos operadores de spin $\frac{\sigma^a}{2}$, onde σ^a são as matrizes de Pauli.[13]

Para garantir a invariância de gauge local, introduzimos três **campos de gauge** W_μ^a , que se transformam como:

$$W_\mu \rightarrow UW_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (122)$$

Esses são os campos dos bósons W^1, W^2, W^3 . A quebra espontânea de simetria pelo mecanismo de Higgs dá origem a:

- W^\pm
- Z^0
- O fóton γ (mistura de W^3 com o campo de $U(1)$)

O potencial de gauge da teoria de Yang-Mills para $SU(2)$ é um campo vetorial com componentes no espaço do grupo de Lie:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a. \quad (123)$$

O tensor de curvatura de campo (campo de força) é definido como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu], \quad (124)$$

onde g é a constante de acoplamento da interação.

A presença do termo de comutador $[A_\mu, A_\nu]$ indica que os campos de gauge interagem entre si, caracterizando a natureza não abeliana da teoria [1]. E essa equação pode ser escrita na forma:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (125)$$

Sendo denominada como a força de Yang-Mills, tal que, o primeiro e o segundo termos representam as contribuições usuais de um campo de gauge, semelhantes às do eletromagnetismo. No entanto, o terceiro termo é exclusivo de teorias não abelianas, pois contém o fator ϵ^{abc} , que são as constantes de estrutura do grupo de Lie associado. O termo $g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ indica que A_μ^b pode interagir com outro campo de gauge A_ν^c sem a necessidade de uma partícula de matéria estar presente. [9]

A lagrangiana de Yang-Mills para um grupo não abeliano é:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (126)$$

Expandindo $F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$, obtemos:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2. \quad (127)$$

Os termos relevantes para as interações são:

Termo trilinear

$$g\epsilon^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu}, \quad (128)$$

O termo trilinear origina interações do tipo:

$$\mathcal{L}_{3\text{B}} = \epsilon^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu}. \quad (129)$$

Isso significa que, quando quantizamos o campo, encontramos interações diretas entre três bósons vetoriais. Na teoria eletrofraca, esses vértices representam, por exemplo, a interação entre dois bósons W^\pm e um bóson Z ou um fóton γ . [12]

Termo Quadrilinear

$$g^2 \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}, \quad (130)$$

O termo quadrilinear gera interações entre quatro bósons:

$$\mathcal{L}_{4B} = g^2 \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}. \quad (131)$$

O que resulta nos vértices como:

$$\mathcal{L}_{WWWW} = g_{WWWW} W_\mu^+ W_\nu^- W^{+\mu} W^{-\nu}. \quad (132)$$

Por exemplo, considerando $a = W^+$, $b = W^-$ e $c = Z$, temos:

$$\mathcal{L}_{WWZ} = g_{WWZ} W_\mu^+ W_\nu^- \partial^\mu Z^\nu. \quad (133)$$

Isso implica que existem interações simultâneas entre quatro bósons vetoriais, como dois W^\pm interagindo com dois Z , ou quatro W^\pm interagindo entre si.

A interação forte é baseada no grupo $SU(3)$, que age sobre os **quarks**, que possuem três estados de cor:

$$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix} \quad (134)$$

O grupo $SU(3)$ tem **oito geradores** T^a , que são identificados como as matrizes de **Gell-Mann** e, portanto, precisamos de **oito campos de gauge** G_μ^a (os glúons). O tensor de campo de força para os glúons é:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (135)$$

O termo $g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ implica que os **glúons interagem entre si**. [12]

Claro, o processo para chegar nessa conclusão é mais complexo, requerendo uma análise mais profunda da lagrangiana e de seus termos, entretanto o intuito é demonstrar a descrição da Teoria de Yang-Mills, e o que ela pode nos fornecer.

Portanto, a teoria de Yang-Mills, uma generalização das equações de Maxwell para grupos de simetria não abelianos, é fundamental para descrever as interações fundamentais na física de partículas. Neste contexto, o potencial de gauge A_μ e o tensor de campo $F_{\mu\nu}$ desempenham papéis cruciais na descrição das interações entre partículas mediadas por campos de força associados a grupos de Lie como $SU(2)$ [13]. Através da ação de Yang-Mills, podemos deduzir as equações de movimento que governam a dinâmica dos campos, mostrando a profundidade e a riqueza dessas teorias de gauge na formulação moderna da física teórica. [9]

3.3.5 Instanton

A *integração de trajetórias* é uma abordagem central na mecânica quântica e na teoria quântica de campos para calcular amplitudes de transição entre estados quânticos. O formalismo exige somar as contribuições de todas as possíveis configurações de campo ao longo do espaço-tempo. No entanto, para que a integral seja matematicamente bem definida, é necessário trabalhar em um espaço com *métrica euclidiana*, em que a assinatura do espaço-tempo muda de $(-+++)$ (métrica de Minkowski) para $(++++)$. Isso evita divergências que poderiam surgir devido ao comportamento exponencial de termos complexos na métrica de Minkowski. [4]

Para avaliar a integral de trajetórias, uma estratégia eficaz é identificar as configurações que minimizam a *ação euclidiana*. Essas configurações, conhecidas como *mínimos locais da ação*, desempenham um papel central no cálculo de flutuações quânticas, pois fornecem a base para expandir o integrando ao redor das soluções clássicas. No contexto de teorias de gauge no grupo $SU(2)$, no espaço euclidiano de quatro dimensões (\mathbb{R}^4), os mínimos locais da ação correspondem a configurações especiais de campo chamadas *instantons* ou *pseudo-partículas* [11]. Esse conceito foi originalmente introduzido por Belavin et al. (1975). [1]

A ação euclidiana para a teoria de gauge é definida como:

$$S_E[A] = \frac{1}{4} \int_M \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (136)$$

onde:

- $F_{\mu\nu}$ é o *tensor de força de campo* ou *campo de curvatura*, que mede a intensidade do campo de gauge e é calculado a partir do potencial de gauge A_μ ,
- tr denota o traço na álgebra de Lie do grupo $SU(2)$, garantindo a invariância sob transformações de gauge.

Utilizando a linguagem de formas diferenciais, que é particularmente útil para teorias geométricas como a de gauge, a ação euclidiana pode ser reescrita como:

$$S_E[A] = -\frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge *F), \quad (137)$$

onde:

- F é o *2-forma de curvatura*, uma generalização geométrica do tensor $F_{\mu\nu}$,
- $*F$ é o *dual de Hodge* de F , calculado em relação à métrica euclidiana, e representa um novo 2-formulário,
- $F \wedge *F$ é o *produto exterior*, combinando as componentes de F e $*F$ em uma forma escalar apropriada para integração sobre o espaço M .

Essa reformulação conecta a ação a propriedades geométricas do campo de gauge, enfatizando a simetria e a estrutura topológica. [16]

Uma configuração de campo especial ocorre quando o campo de curvatura $F_{\mu\nu}$ satisfaz a relação de *auto-dualidade* ou *anti-auto-dualidade*:

$$F_{\mu\nu} = \pm * F_{\mu\nu}. \quad (138)$$

Essa equação implica que o campo de força é igual (ou oposto) ao seu dual de Hodge. Configurações auto-duais (+) ou anti-auto-duais (-) minimizam a ação euclidiana e, portanto, correspondem aos instantons.

Quando F é auto-dual ou anti-auto-dual, a ação euclidiana assume o valor:

$$S_E[A] = \mp \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge F). \quad (139)$$

Esse resultado surge diretamente das propriedades da auto-dualidade:

- Para $F_{\mu\nu} = + * F_{\mu\nu}$, temos $*F = F$,
- Para $F_{\mu\nu} = - * F_{\mu\nu}$, temos $*F = -F$.

Nesse caso, a ação depende unicamente do produto $F \wedge F$, que é uma quantidade topológica relacionada ao número de Pontryagin, caracterizando propriedades globais do campo.

Agora, exploraremos as propriedades topológicas de um instanton no espaço de quatro dimensões (\mathbb{R}^4). No formalismo da integral de caminho, apenas configurações de campo com ação finita contribuem. Isso impõe a condição de que o campo de gauge se comporte assintoticamente como uma pura transformação de gauge para grandes x . Portanto, para que a ação euclidiana de um instanton seja finita, impomos a seguinte condição no comportamento do potencial de gauge $A_\mu(x)$ em uma "casca esférica" de raio L :

$$A_\mu(x) \rightarrow g(x)^{-1} \partial_\mu g(x), \quad \text{quando } |x| \rightarrow L, \quad (140)$$

onde $g(x)$ é um elemento do grupo de gauge $SU(2)$, e $|x| = L$ define uma esfera S^3 em quatro dimensões. Isso implica que $A_\mu(x)$ é "puro gauge" na borda ($|x| = L$), ou seja, ele pode ser escrito como uma transformação de gauge de um potencial nulo. Este comportamento assegura que o campo de força associado tende a zero suficientemente rápido para garantir que a ação seja finita.

A condição acima define um mapeamento entre a esfera tridimensional S^3 e o grupo $SU(2)$:

$$g : S^3 \rightarrow SU(2). \quad (141)$$

Este mapeamento é classificado pela terceira classe de homotopia $\pi_3(SU(2))$, que é equivalente ao conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}). Isso implica que as propriedades to-

pológicas de $g(x)$ podem ser quantificadas por um número inteiro, o índice topológico ou número de Pontryagin. [9]

Para facilitar o estudo das propriedades globais, compactificamos o espaço \mathbb{R}^4 adicionando o ponto no infinito. Este processo transforma \mathbb{R}^4 em uma esfera quadridimensional (S^4):

- O **polo sul** (S) de S^4 representa os pontos no infinito.
- O **polo norte** (N) de S^4 corresponde à origem ($x = 0$).

Dividimos o espaço compactificado S^4 em duas regiões:

- **Hemisfério Norte** (U_N):

$$U_N = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \leq L + \epsilon\}, \quad (142)$$

onde $\epsilon > 0$ define uma margem para evitar singularidades.

- **Hemisfério Sul** (U_S):

$$U_S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \geq L - \epsilon\}. \quad (143)$$

As duas regiões se sobrepõem em uma faixa esférica ($U_N \cap U_S$), que corresponde ao "equador" de S^4 , definido pela esfera S^3 .

Assumimos que o potencial de gauge $A_\mu(x)$ é **trivial** (nulo) no hemisfério sul (U_S):

$$A_\mu(x) = 0, \quad \forall x \in U_S. \quad (144)$$

Com esta escolha, toda a informação topológica do sistema está contida:

1. No potencial $A_\mu(x)$ no hemisfério norte (U_N).
2. Na **função de transição** $t_{NS}(x)$ na região de interseção ($U_N \cap U_S = S^3$).

A função de transição $t_{NS}(x)$ relaciona os potenciais definidos em U_N e U_S .

Na região de sobreposição ($U_N \cap U_S$), o potencial no hemisfério norte (A_N) é relacionado ao potencial no hemisfério sul (A_S) pela transformação de gauge, encontrada na equação 17:

$$A_N = t_{NS}^{-1} A_S t_{NS} + t_{NS}^{-1} dt_{NS}. \quad (145)$$

Substituímos $A_S = 0$ (hipótese para U_S):

$$A_N = t_{NS}^{-1} dt_{NS}. \quad (146)$$

Esta equação mostra que o potencial no hemisfério norte é completamente determinado pela função de transição $t_{NS}(x)$.

A função $t_{NS}(x)$ é um mapeamento:

$$t_{NS} : S^3 \rightarrow SU(2), \quad (147)$$

classificado pela terceira classe de homotopia $\pi_3(SU(2))$. O índice topológico deste mapeamento é o **número de Pontryagin**, que quantifica as propriedades topológicas do instanton.

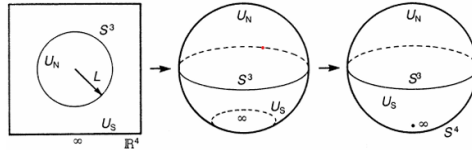


Figura 6: A figura ilustra o processo de compactificação de \mathbb{R}^4 para a esfera quadridimensional (S^4):. O diagrama mostra como a esfera tridimensional (S^3) serve como um limite dentro do espaço compactificado, onde os pontos infinito em (U_S) e (U_N) são identificados para criar a topologia fechada (S^4). [1].

Os mapas de $S^3 \rightarrow SU(2)$ são classificados pelo grupo $\pi_3(SU(2))$, que é isomorfo a $\pi_3(S^3)$, devido à equivalência topológica $SU(2) \cong S^3$. A seguir, explicitamos as principais classes homotópicas de $\pi_3(SU(2))$:

O mapa constante $g_0(x) : x \in S^3 \rightarrow e \in SU(2)$ pertence à classe 0 de $\pi_3(SU(2))$, indicando que não há enrolamento topológico.

O mapa identidade $g_1(x)$ mapeia $S^3 \rightarrow S^3$ com a fórmula explícita:

$$g_1(x) = \frac{1}{r} (x_4 I_2 + x_i \sigma_i), \quad r^2 = x^2 + x_4^2,$$

onde $x_i \sigma_i$ denota a soma sobre as componentes de x com os geradores σ_i do grupo $SU(2)$. Este mapa define a classe 1 de $\pi_3(SU(2))$, correspondendo a um enrolamento topológico básico.

O mapa $g_n(x)$, definido como $g_n(x) = (g_1(x))^n$, pertence à classe n de $\pi_3(SU(2))$, descrevendo n enrolamentos topológicos.

Os instantons, definidos sobre S^4 , possuem um número topológico associado, análogo ao número de carga de um monopolo magnético, obtido pela integração de uma forma diferencial apropriada.

No contexto da teoria de gauge, o tensor de campo F é uma 2-forma diferencial associada à curvatura de uma conexão A em um fibrado principal. A 4-forma $\text{tr}(F \wedge F)$ é definida como:

$$\text{tr}(F \wedge F)(x) = \text{tr}(F(x) \wedge F(x)),$$

onde tr denota o traço em relação ao espaço interno do grupo de gauge.

Pela identidade de Bianchi:

$$dF + [A, F] = 0,$$

temos que:

$$d \text{tr}(F \wedge F) = \text{tr}(dF \wedge F + F \wedge dF) = 0.$$

Portanto, $\text{tr}(F \wedge F)$ é uma forma fechada ($d \text{tr}(F \wedge F) = 0$).

Pelo lema de Poincaré, sabemos que, em um espaço suficientemente regular como S^4 , toda forma fechada é localmente exata. Isso significa que existe uma 3-forma K tal que:

$$\text{tr}(F \wedge F) = dK.$$

Essa decomposição será útil para calcular o número topológico associado aos instantons.

Se $K = \text{tr}[AdA + \frac{2}{3}A^3]$, obteremos o seguinte:

$$\int_{S^4} \text{tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{3} \int_{S^3} \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (148)$$

Isso segue do **teorema de Stokes** aplicado à 4-esfera S^4 , onde S^3 é sua borda. O termo dentro da integral de S^3 é a **forma de Chern-Simons**, que codifica a topologia da conexão de gauge. A forma de Chern-Simons aparece porque, ao aplicar Stokes sobre a variedade, a derivada do termo K (definido pelo livro como $K = \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$) dá precisamente a densidade de Pontryagin $\text{tr}(F \wedge F)$.

No espaço S^3 , a conexão é escrita na forma:

$$A = g^{-1}dg, \quad (149)$$

onde $g(x)$ é uma função de S^3 para $SU(2)$. Isso significa que a conexão A é puramente um termo de gauge e não tem campo de curvatura F não trivial.

A integral relevante é:

$$\int_{S^3} \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (150)$$

Utilizando $A = g^{-1}dg$, expandimos:

$$\text{tr}(A \wedge dA) = \text{tr} (g^{-1}dg \wedge g^{-1}d(g^{-1}dg)). \quad (151)$$

Sabemos que $g(x)$ é um mapa de S^3 em $SU(2)$, então podemos expressar esse termo em coordenadas explícitas. A equação fundamental usada é:

$$\text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}(g^{-1}dg)^3. \quad (152)$$

Essa integral nos dá um número inteiro n , que representa o **grau do mapa** [15].

Se $g(x)$ for trivial ($g_0(x) = e$ para todo x), então temos $A = 0$, o que implica:

$$\int_{S^4} \text{tr}(F \wedge F) = 0. \quad (153)$$

Ou seja, a configuração de gauge correspondente é **topologicamente trivial** [16]. Isso significa que o número de Pontryagin associado ao vácuo é $n = 0$.

Agora consideramos um caso não trivial onde $g(x)$ tem um **número de winding não zero**. Para um instanton, a conexão A é:

$$A = \frac{1}{r}(x_4 - ix_k\sigma_k)d\frac{1}{r}(x_4 + ix_l\sigma_l). \quad (154)$$

Essa expressão pode ser simplificada escolhendo um ponto específico, como o **Pólo Norte** ($x_4 = 1, x = 0$):

$$A = i\sigma_k dx_k. \quad (155)$$

O cálculo do termo de Chern-Simons então resulta em:

$$\text{tr}(A \wedge dA \wedge dA) = 12dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \quad (156)$$

A integral sobre S^3 dá:

$$\int_{S^3} \text{tr}(A \wedge dA \wedge dA) = 24\pi^2. \quad (157)$$

Substituindo na equação para n :

$$n = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{tr}(F \wedge F) = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}(g^{-1}dg)^3. \quad (158)$$

Isso nos dá $n = 1$, caracterizando um **instanton de unidade**.

Se agora consideramos uma função $g_n(x)$ construída como $g_n = (g_1)^n$, a integral será proporcional a n , pois estamos essencialmente empilhando n cópias do mesmo mapa g_1 .

Isso leva à generalização:

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}(g^{-1}dg)^3 = \frac{1}{2} \int_{S^4} \text{tr}(F \wedge F) = \frac{1}{2} \int_{S^4} \text{tr}\left(\frac{iF}{2\pi}\right)^2. \quad (159)$$

Assim, obtemos um **conjunto infinito de soluções** indexadas por n , que representam **diferentes setores topológicos** da teoria de gauge. [15]

O número de Pontryagin n é um **invariante topológico** que caracteriza diferentes classes de configurações de gauge sobre S^4 . Ele é obtido através da integral da **densidade**

de Pontryagin $\text{tr}(F \wedge F)$, que pode ser reescrita, via Stokes, em termos da **forma de Chern-Simons** em S^3 .

O número de Pontryagin n está relacionado diretamente à existência de instantons — soluções não perturbativas das equações de Yang-Mills no vácuo. Essas soluções minimizam a ação euclidiana e correspondem a transições quânticas entre diferentes setores de vácuo da teoria de gauge. Isso é crucial na compreensão da violação de processos de conservação quântica, como a violação da conservação do número bariônico na QCD via o mecanismo de túnel entre diferentes setores topológicos. [1]

Em termos físicos, n classifica as configurações de gauge em setores distintos, que não podem ser continuamente deformados entre si sem cruzar uma configuração de energia infinita. Isso implica que a teoria quântica de campos sobre um espaço-tempo como S^4 não possui um único vácuo, mas uma torre infinita de vácuos caracterizados por n . A presença de instantons possibilita transições entre esses vácuos, levando a efeitos como a violação de CP na QCD.

Logo, o número de Pontryagin desempenha um papel central na compreensão das configurações topológicas da teoria de Yang-Mills. Ele quantifica a complexidade topológica das configurações de gauge e está intimamente ligado à estrutura do vácuo da teoria. Em termos físicos, os instantons associados a esses números desempenham um papel fundamental em processos quânticos não perturbativos, como o confinamento de quarks na QCD e a geração de massa dinâmica. Portanto, a existência de um espectro infinito de setores topológicos reflete a rica estrutura da teoria de gauge e suas consequências físicas. [15]

4 Conclusão

A presente monografia explorou a interseção entre matemática e física teórica, com ênfase nos fibrados e nas conexões para a formulação de teorias modernas. Iniciando por uma apresentação dos conceitos matemáticos dos fibrados e as conexões de fibrados, pode ser explorado aplicações físicas, começando pela teoria de gauge, onde foi demonstrado como essa estrutura fornece a base para a compreensão dos campos eletromagnéticos.

O monopolo magnético de Dirac ilustrou o impacto profundo da topologia na física, mostrando que a quantização da carga elétrica pode ser compreendida a partir de considerações sobre a não trivialidade dos fibrados sobre superfícies esfericamente simétricas. Este exemplo não só conecta conceitos de eletromagnetismo clássico e mecânica quântica, mas também antecipa desenvolvimentos mais sofisticados em teorias de campos.

O efeito Aharonov-Bohm, por sua vez, reforça a relevância das conexões no fibrado, evidenciando que o potencial vetorial, muitas vezes considerado um mero artifício matemático, desempenha um papel físico real. A dependência de fases quânticas em torno de regiões onde o campo eletromagnético é nulo ressalta como estruturas globais podem influenciar fenômenos locais.

Na teoria de Yang-Mills, as conexões foram aprofundadas no contexto das interações não abelianas. As soluções clássicas, como os instantons, ampliam nossa compreensão da estrutura topológica de espaços de configuração, estabelecendo um elo com fenômenos como tunelamento quântico e violação de simetrias em altos regimes energéticos.

Esses conceitos culminaram na discussão sobre o papel dos instantons definidos sobre. A classificação topológica dessas soluções, é uma manifestação notável da interação entre geometria diferencial e física. Essa abordagem unificada permite compreender como fenômenos físicos, como a violação de CP em teorias não abelianas, possuem uma fundação geométrica.

De maneira geral, o estudo realizado demonstra como as teorias de gauge e seus elementos associados, incluindo monopolos, o efeito Aharonov-Bohm, Yang-Mills e instantons, fornecem uma linguagem poderosa para descrever fenômenos fundamentais da física moderna. Além de sua elegância teórica, essas ideias possuem aplicações que vão desde a descrição de partículas elementares às bases de propostas para teorias de unificação. Esse trabalho também ressalta o papel essencial da matemática moderna, especialmente da geometria diferencial e topologia, como ferramentas indispensáveis na busca por uma compreensão mais profunda da natureza.

Referências

- [1] Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*, Second Edition. Institute of Physics Publishing.
- [2] [Frankel, 2012] Frankel, T. (2012). *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press.
- [3] Gorodski, C. (2016). *An Introduction to Riemannian Geometry*, Preliminary version 2.
- [4] Yang, C. N., Mills, R. L. (1954). Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, 96, 191.
- [5] Imani, P. (n.d.). *Introduction To Lie Algebras*.
- [6] RUDOLPH, G.; SCHMIDT, M. *Differential Geometry and Mathematical Physics, Part II. Fibre Bundles, Topology and Gauge Fields*. Springer, 2013b.
- [7] AHARONOV, Y.; BOHM, D. The Aharonov-Bohm effect. Part one: Theory. *Physical Review*, v. 115, n. 3, p. 485-491, 1959.
- [8] BAUM, P. Fibrations, connections and gauge theory. **Journal of Geometry and Physics**, v. 10, n. 3, p. 121-145, 1992.
- [9] TONG, D. *Gauge Theory*. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, 2006.
- [10] MARCOLLA, M. *Hopf Fibrations and Dirac Monopoles*. Department of Mathematics, University of British Columbia.
- [11] Polyakov, A. M. (1977). Quark Confinement and Topology of Gauge Theories. *Nuclear Physics B*, 120, 429.
- [12] Peskin, M. E., Schroeder, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.

- [13] Weinberg, S. The Quantum Theory of Fields, Vol. 2: Modern Applications. Cambridge University Press, 1996
- [14] Ramond, P. Field Theory: A Modern Primer. CRC Press, 1997.
- [15] Belavin, A. A., Polyakov, A. M., Schwartz, A. S., Tyupkin, Y. S. (1975). Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations. Physics Letters B, 59(1), 85–87.
- [16] Shifman, M. A. (Ed.). (1994). Instantons in Gauge Theories. World Scientific.
- [17] <https://tex.stackexchange.com/questions/289165/drawing-a-fiber-bundle>
- [18] https://www.researchgate.net/figure/The-Dirac-monopole-is-represented-as-a-red-point-a-The-monopole-alone-creates-a-radial_fig1350322803
- [19] DIRAC, P. A. M. Quantized singularities in the electromagnetic field. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, v. 133, n. 821, p. 60-72, 1931.
- [20] WU, T. T.; YANG, C. N. Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields. Physical Review D, v. 12, n. 12, p. 3845-3857, 1975.