



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



MARYANE PELLEGRINO BUENO

**GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS: FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES DA TEORIA
DOS GRAFOS**

SÃO CARLOS
2025

MARYANE PELLEGRINO BUENO

**GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS: FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES DA TEORIA
DOS GRAFOS**

Monografia do Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Departamento de Matemática
da Universidade Federal de São Carlos,
para obtenção do título de Licenciatura em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Souza Fagundes

SÃO CARLOS
2025



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 18/2025/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

MARYANE PELLEGRINO BUENO

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS: FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES DA TEORIA DOS GRAFOS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 16 de julho de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

| Cargo/Função | Nome Completo |
|-------------------|------------------------|
| Orientador | Pedro Souza Fagundes |
| Membro da Banca 1 | Alex Carlucci Rezende |
| Membro da Banca 2 | Maykel Boldrin Belluzi |



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Souza Fagundes, Professor(a) Adjunto(a)**, em 03/09/2025, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alex Carlucci Rezende, Professor(a) do Ensino Superior**, em 03/09/2025, às 15:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maykel Boldrin Belluzi, Professor(a) Adjunto(a)**, em 03/09/2025, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1955590** e o código CRC **87AF2ED0**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.026346/2025-32

SEI nº 1955590

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por me conceder força, coragem e persistência ao longo da graduação, especialmente nos momentos mais desafiadores dessa caminhada.

À minha mãe, minha base e inspiração, expresso minha gratidão profunda por todo o amor, paciência e apoio incondicional. Sua dedicação foi essencial para que eu pudesse trilhar este percurso.

Ao meu marido, agradeço por estar ao meu lado em todos os momentos, oferecendo incentivo, compreensão e suporte.

Estendo meus agradecimentos ao Prof. Dr. Pedro Souza Fagundes, meu orientador, por sua atenção cuidadosa e pelas valiosas contribuições durante o desenvolvimento deste trabalho. Sua orientação foi fundamental para a construção deste projeto.

Agradeço, também, aos professores que compõem a banca examinadora pela disponibilidade em participar deste momento e pelo tempo dedicado à leitura, análise e discussão do trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar os fundamentos da Teoria dos Grafos, com ênfase nos grafos eulerianos e hamiltonianos, destacando suas principais propriedades, teoremas e aplicações práticas. A partir da análise do problema das pontes de Königsberg, são introduzidas as origens e as bases que deram início ao desenvolvimento da teoria dos grafos. Os grafos eulerianos são abordados com base no Teorema de Euler e no Algoritmo de Fleury, enquanto os grafos hamiltonianos são estudados por meio de teoremas, especialmente o de Ore, além de outros critérios relevantes. Na parte final, são discutidas aplicações clássicas da teoria, como o problema do menor caminho, o problema do carteiro chinês e o problema do caixeiro viajante, evidenciando sua utilidade em contextos cotidianos. O trabalho busca consolidar a compreensão desses conceitos e incentivar o aprofundamento dos estudos na área.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos. Grafo Euleriano. Grafo Hamiltoniano. Aplicações de Grafos.

ABSTRACT

This work aims to present the fundamentals of Graph Theory, with an emphasis on Eulerian and Hamiltonian graphs, highlighting their main properties, theorems, and practical applications. Beginning with the analysis of the Königsberg bridge problem, it introduces the origins and foundational concepts that gave rise to Graph Theory. Eulerian graphs are studied based on Euler's Theorem and Fleury's Algorithm, while Hamiltonian graphs are studied through theorems, especially Ore's Theorem, as well as other relevant criteria. In the final section, classical applications are discussed, such as the shortest path problem, the Chinese postman problem, and the traveling salesman problem, demonstrating the practical relevance of Graph Theory in everyday contexts. The study seeks to consolidate understanding of these concepts and encourage further exploration in the field.

Keywords: Graph Theory. Eulerian Graph. Hamiltonian Graph. Graph Applications.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 – As sete pontes de Königsberg | 8 |
| Figura 1.2 – Representação de Euler das pontes de Königsberg | 8 |
| Figura 2.1 – Grafo com múltiplas arestas e loops | 10 |
| Figura 2.2 – Grafo G | 10 |
| Figura 2.3 – Grafo de Platão (Cubo) | 11 |
| Figura 2.4 – Grafo simples G | 11 |
| Figura 2.5 – Grafo nulo N_3 | 11 |
| Figura 2.6 – Grafo J | 12 |
| Figura 2.7 – Grafo K | 13 |
| Figura 2.8 – Subgrafo de G | 13 |
| Figura 2.9 – Grafo original G | 13 |
| Figura 2.10 – Exemplo de união de grafos | 14 |
| Figura 2.11 – Grafo conexo G | 14 |
| Figura 2.12 – Grafo desconexo H | 14 |
| Figura 3.1 – Grafo Euleriano | 15 |
| Figura 3.2 – Grafo Semi-Euleriano | 16 |
| Figura 3.3 – Grafo Não-Euleriano | 16 |
| Figura 3.4 – Exemplo Grafo Euleriano G | 17 |
| Figura 3.5 – Exemplo Grafo Euleriano J | 18 |
| Figura 3.6 – Exemplo de Grafo | 21 |
| Figura 3.7 – Grafo Euleriano J Direcionado | 22 |
| Figura 3.8 – Grafo Euleriano J sem a aresta gk | 22 |
| Figura 3.9 – Grafo Euleriano J sem as arestas gk e kj | 23 |
| Figura 3.10 – Grafo Euleriano J apenas com a aresta fg | 23 |
| Figura 4.1 – Grafo hamiltoniano | 24 |
| Figura 4.2 – Grafo Semi-Hamiltoniano | 25 |
| Figura 4.3 – Grafo Não-Hamiltoniano | 25 |
| Figura 4.4 – Exemplo de grafo Hamiltoniano | 26 |
| Figura 4.5 – Exemplo de grafo Hamiltoniano - Pentágono | 26 |
| Figura 4.6 – Grafo não-hamiltoniano | 28 |
| Figura 4.7 – Grafo depois da retirada dos vértices | 28 |
| Figura 4.8 – Grafo de Petersen | 29 |
| Figura 5.1 – Grafo L | 30 |
| Figura 5.2 – Grafo L depois da primeira iteração | 31 |
| Figura 5.3 – Grafo L depois da segunda iteração | 31 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.4 – Grafo L depois da terceira iteração | 32 |
| Figura 5.5 – Grafo L depois da quarta iteração | 32 |
| Figura 5.6 – Grafo G Semi-Euleriano Ponderado | 33 |
| Figura 5.7 – Grafo G Euleriano | 34 |
| Figura 5.8 – Grafo Hamiltoniano Ponderado | 35 |

SUMÁRIO

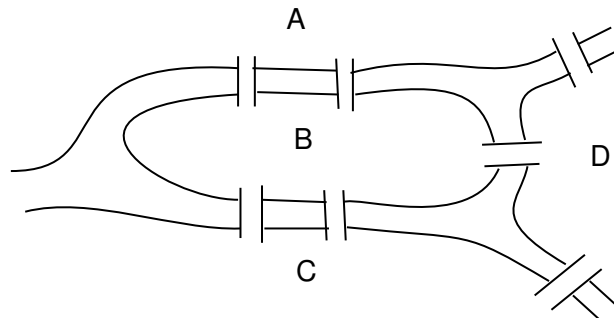
| | | |
|----------|---------------------------------|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 8 |
| 2 | CONCEITOS PRELIMINARES | 10 |
| 3 | GRAFOS EULERIANOS | 15 |
| 4 | GRAFOS HAMILTONIANOS | 24 |
| 5 | APLICAÇÕES | 30 |
| 5.1 | O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO | 30 |
| 5.2 | O PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS | 33 |
| 5.3 | O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE | 34 |
| 6 | CONCLUSÃO | 36 |

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos teve sua origem a partir de uma questão surgida na antiga cidade de Königsberg, na Prússia Oriental (atualmente Kaliningrado, na Rússia). O rio Pregel cortava a cidade, formando duas ilhas conectadas entre si e às margens do rio por sete pontes (ver Figura 1.1). O problema que intrigava os habitantes era simples de enunciar: seria possível realizar um passeio pela cidade atravessando todas as pontes uma única vez, sem repetir nenhuma?

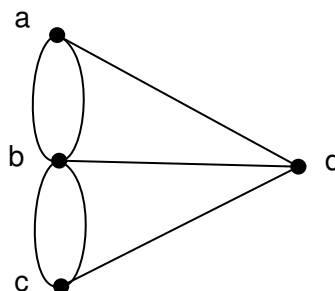
Esse enunciado, que ficou conhecido como o problema das pontes de Königsberg, é discutido com mais detalhes na literatura, como no trabalho de Venkataraman (2024) e no de Wilson (1996), que analisa a solução proposta por Euler e sua importância para a formulação da Teoria dos Grafos.

Figura 1.1 – As sete pontes de Königsberg



Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler analisou esse problema e provou que tal percurso era, de fato, impossível. Para isso, ele propôs uma representação abstrata da situação: cada porção de terra foi tratada como um ponto (vértice), e cada ponte, como uma ligação entre os pontos (aresta). A partir dessa modelagem, descrita na Figura 1.2, Euler observou que o número de conexões (ou grau) de cada vértice era fundamental para a existência de um percurso que passasse por todas as pontes uma única vez — o que hoje conhecemos como trajeto euleriano. Como todos os vértices do grafo construído a partir do problema tinham grau ímpar, a travessia desejada não era possível.

Figura 1.2 – Representação de Euler das pontes de Königsberg



Esse trabalho pioneiro não apenas solucionou o problema das pontes de Königsberg,

como também estabeleceu as bases da Teoria dos Grafos, uma área da Matemática que estuda estruturas formadas por objetos (vértices) e suas conexões (arestas).

Desde então, a Teoria dos Grafos tem sido continuamente desenvolvida e aplicada em diversas situações, como no planejamento de redes de transporte, na análise de circuitos elétricos e em modelos químicos, conforme descrito por [Wilson \(1996\)](#), além de outros contextos que envolvem estruturas relacionais, como os grafos sociais. Esses grafos se mostram eficazes na representação de relações sociais e políticas, permitindo visualizar conexões entre indivíduos, grupos ou nações com base em interações como afinidade, comunicação ou alianças. Como destacam [Aldous e Wilson \(2000\)](#), esse tipo de representação é útil em diversos contextos, desde relações interpessoais até acordos diplomáticos, evidenciando sua ampla aplicabilidade nas ciências sociais.

Diante dessa relevância, este Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo consolidar os conhecimentos sobre a Teoria dos Grafos, explorando seus principais conceitos, teoremas e aplicações. Todas as figuras apresentadas neste trabalho foram elaboradas pela autora com o auxílio da ferramenta [Mathcha \(2025\)](#).

No Capítulo 2, serão apresentados conceitos e definições preliminares que servirão de base para os temas desenvolvidos nos capítulos seguintes. O Capítulo 3 será dedicado ao estudo dos grafos eulerianos, com a exposição de teoremas fundamentais. Nesse capítulo, o Teorema de Euler será utilizado para demonstrar por que o famoso problema das pontes de Königsberg não admite solução.

Em seguida, o Capítulo 4 abordará os grafos hamiltonianos, apresentando suas definições, propriedades e teoremas relevantes que enriquecem a compreensão estrutural desses grafos e sua distinção em relação aos eulerianos.

Por fim, o Capítulo 5 será voltado para algumas aplicações clássicas da Teoria dos Grafos. Serão discutidos problemas como o problema do menor caminho, o problema do carteiro chinês e o problema do caixeiro viajante, que ilustram a importância dessa teoria na modelagem e resolução de problemas envolvendo otimização de rotas, conectividade e percursos eficientes.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo apresenta os conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos, essenciais para a compreensão do tema e que também serão retomados ao longo dos capítulos seguintes. Para a construção e embasamento teórico deste conteúdo, utilizou-se principalmente o livro *Introduction to Graph Theory*, de Wilson (1996).

Serão abordados neste capítulo conceitos como: grafos, grafos simples, passeios, trajetos, caminhos, subgrafos, grafos conexos, entre outros, de modo a fornecer uma base sólida para o desenvolvimento das próximas discussões.

Definição 1. Grafo G é definido como um par $G = (V(G), E(G))$, sendo $V(G)$ um conjunto finito e não vazio de elementos chamados **vértices**, e $E(G)$ uma família finita de pares não ordenados de elementos (não necessariamente distintos) de $V(G)$, chamados **arestas**.

O uso da palavra “família” permite a existência de múltiplas arestas, em outras palavras, é possível que múltiplas arestas partam de um mesmo vértice. Uma aresta $\{v, w\}$ une os vértices v e w , e é abreviada para vw . Note que cada laço ww une o vértice w a si mesmo, o que denominamos de **loop**. Alguns exemplos de grafos são dados nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 abaixo. Em particular, na Figura 2.1, $V(G)$ é o conjunto $\{u, v, w, z\}$, e $E(G)$ consiste nas arestas uv (três vezes), vw , uz (duas vezes) e ww (duas vezes).

Figura 2.1 – Grafo com múltiplas arestas e loops

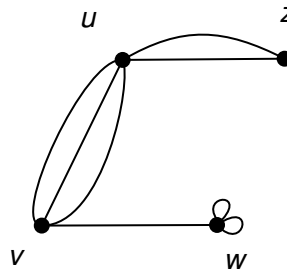


Figura 2.2 – Grafo G

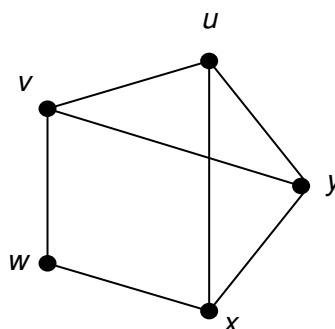
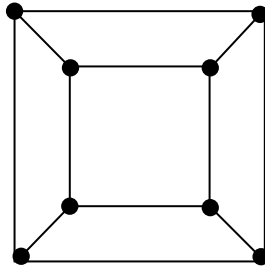


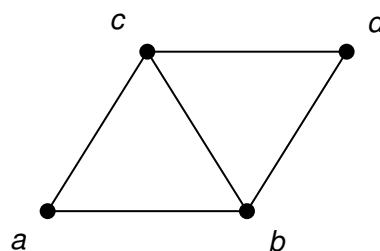
Figura 2.3 – Grafo de Platão (Cubo)



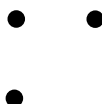
Definição 2. Um **grafo simples** G consiste em um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de elementos chamados **vértices** e um conjunto finito $E(G)$ de pares não ordenados distintos de elementos distintos de $V(G)$, chamados **arestas**.

Em resumo, um grafo simples G é aquele que não possui *loops* e não possui múltiplas arestas entre os vértices, há no máximo uma aresta unindo um dado par de vértices. Assim, todo grafo simples é um grafo, mas nem todo grafo é um grafo simples.

Por exemplo, o grafo da Figura 2.1 não é um grafo simples, pois temos no conjunto $E(G)$ os elementos: uv (três vezes), vw , uz (duas vezes) e ww (duas vezes). Já a Figura 2.4 abaixo representa o grafo simples G , cujo conjunto de vértices $V(G)$ é $\{a, b, c, d\}$, e cujo conjunto de arestas $E(G)$ consiste nas arestas ab , bc , ca , cd e db , ou seja, com arestas distintas e sem *loops*.

Figura 2.4 – Grafo simples G 

Definição 3. Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**. Denotamos o grafo nulo com n vértices por N_n . O grafo nulo N_3 é mostrado na Figura 2.5. Note que cada vértice de um grafo nulo é isolado.

Figura 2.5 – Grafo nulo N_3 

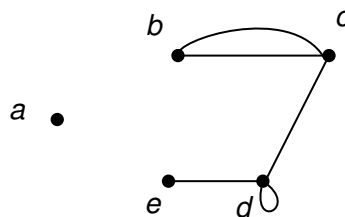
Definição 4. Dizemos que dois vértices u e v de um grafo G são **adjacentes** se existir uma aresta uv ligando-os e, nesse caso, os vértices u e v são **incidentes** a essa aresta. Da mesma forma, duas arestas distintas são adjacentes se tiverem um vértice em comum.

Por exemplo, na Figura 2.2, os vértices x e y são adjacentes, pois existe a aresta xy ligando-os. Além disso, as arestas wx e xy são adjacentes, pois possuem o vértice x em comum.

Definição 5. O **grau** de um vértice v de um grafo J é o número de arestas incidentes com v , e é escrito como $\text{gr}(v)$. Como convenção adotamos que um *loop* em v contribui em 2 (ao invés de 1) para o grau de v . Um vértice de grau 0 é um **vértice isolado** e um vértice de grau 1 é um **vértice-fim**.

Por exemplo, o grafo da Figura 2.6 consiste em: um vértice isolado de grau 0 (a); um vértice-fim de grau 1 (e); um vértice de grau 2 (b); um vértice de grau 3 (c); e um vértice de grau 4 com um *loop* (d).

Figura 2.6 – Grafo J



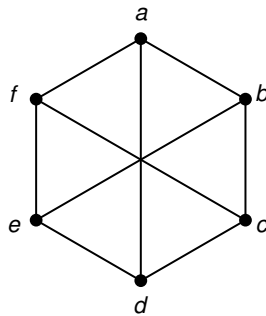
Definição 6. Dado um grafo K , um **passeio** em K é uma sequência finita de arestas da forma $v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{m-1} v_m$, denotada por $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$, na qual quaisquer duas arestas consecutivas são adjacentes ou idênticas. Tal passeio determina uma sequência de vértices v_0, v_1, \dots, v_m . Chamamos v_0 de vértice inicial e v_m de vértice final do passeio, e falamos de um passeio de v_0 até v_m . O número de arestas em um passeio é chamado de seu **comprimento**.

Por exemplo, na Figura 2.7, $a \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow f$ é um passeio de comprimento 7 de a até f .

Definição 7. Um passeio em que todas as arestas são distintas é um **trajeto**. Um trajeto é fechado se $v_0 = v_m$.

Considere a Figura 2.7, nela $c \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow f$ é um trajeto e $c \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow c$ é um trajeto fechado.

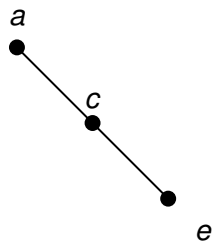
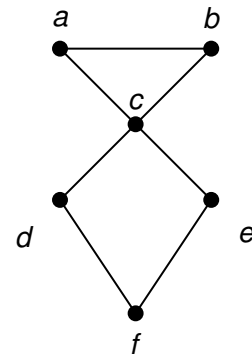
Definição 8. Se em um trajeto os vértices v_0, v_1, \dots, v_m são distintos (exceto, possivelmente, $v_0 = v_m$), então o trajeto é um **caminho**. Um caminho é fechado se $v_0 = v_m$ e um caminho fechado contendo pelo menos uma aresta é um **ciclo**.

Figura 2.7 – Grafo K 

Considere a Figura 2.7, nela $a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow f$ é um caminho e $a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow a$ é um ciclo.

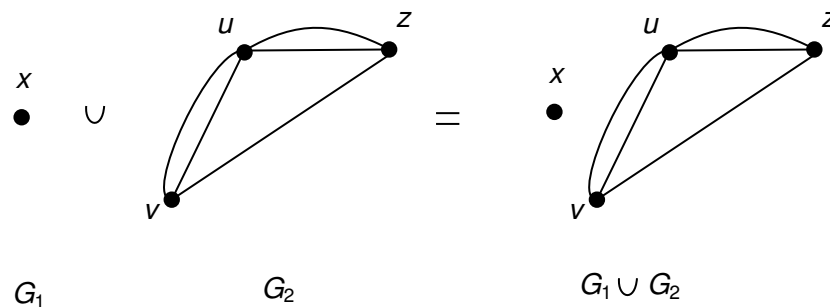
Definição 9. Um **subgrafo** de um grafo G é um grafo cujos vértices pertencem a $V(G)$ e cujas arestas pertencem a $E(G)$.

A Figura 2.8 é um subgrafo do grafo G apresentado na Figura 2.9, pois os vértices a, c e e do subgrafo pertencem a $V(G)$, e as arestas ac e ce pertencem a $E(G)$.

Figura 2.8 – Subgrafo de G Figura 2.9 – Grafo original G 

Definição 10. Sejam os dois grafos $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ e $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, onde $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos disjuntos, então a **união** $G_1 \cup G_2$ é o grafo com conjunto de vértices $V(G_1) \cup V(G_2)$ e conjunto de arestas $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Figura 2.10 – Exemplo de união de grafos



Definição 11. Um grafo é **conexo** se ele não pode ser expresso como a união de dois grafos, ou seja, deve existir um caminho entre cada par de vértices.

Na Figura 2.11 a seguir conseguimos encontrar um caminho para cada par de vértices. Por exemplo, considere que gostaríamos de encontrar um caminho para os vértices v_1 e w_1 . Dois dos possíveis caminhos podem ser descritos como $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow w_2 \rightarrow w_1$ e $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow w_2 \rightarrow w_1$. Essencialmente, conseguimos traçar esses caminhos devido a existência da aresta v_3w_2 . Já na Figura 2.12 não conseguimos encontrar nenhum caminho que ligue os vértices v_1 e w_1 , por exemplo.

Figura 2.11 – Grafo conexo G

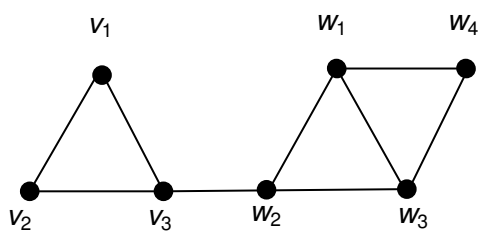
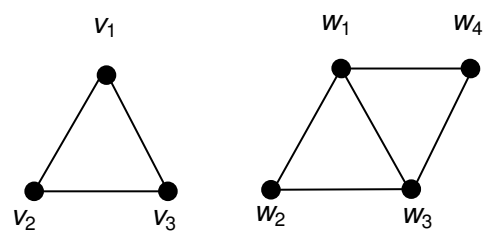


Figura 2.12 – Grafo desconexo H



Evidentemente, qualquer grafo desconexo H (ver Figura 2.12) pode ser expresso como a união de grafos conexos, sendo cada um desses grafos denominado **componente conexa** de H . Por exemplo, na Figura 2.12, o grafo H possui duas componentes conexas.

Definição 12. Chamamos de **ponte** uma aresta cuja remoção aumenta o número de componentes conexas de um grafo, ou seja, uma aresta que é a única ligação entre duas partes do grafo.

Na Figura 2.11, por exemplo, a aresta v_3w_2 é uma ponte, pois sua retirada resulta em um grafo desconexo, conforme ilustrado na Figura 2.12, que passa a ter duas componentes conexas.

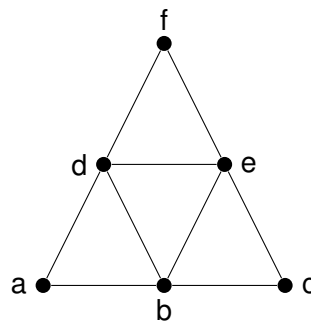
3 GRAFOS EULERIANOS

Este capítulo tem como objetivo apresentar e compreender os grafos eulerianos, um tipo particular de grafo relacionado à possibilidade de percorrer todas as arestas sem repeti-las. Serão discutidos elementos fundamentais para a caracterização desses grafos, como teoremas, lemas e um corolário, com destaque para o Teorema de Euler, o Handshaking Lemma e o Algoritmo de Fleury. Como principal referência teórica, utilizou-se o livro *Introduction to Graph Theory*, de Wilson (1996).

Definição 13. Um grafo conexo G é **euleriano** se existe um trajeto fechado que contém cada aresta de G . Tal trajeto é um **trajeto euleriano**.

Note que esta definição exige que cada aresta seja percorrida exatamente uma vez. Um exemplo dessa definição é a Figura 3.1 em que podemos construir o seguinte trajeto: $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow a$.

Figura 3.1 – Grafo Euleriano



Observe que a definição não impõe restrições sobre a repetição de vértices, permitindo, portanto, sua ocorrência múltipla. Esse é o caso no exemplo acima, onde os vértices a , b , d e e aparecem mais de uma vez.

Definição 14. Um grafo não-euleriano G é **semi-euleriano** se existe algum trajeto que contém todas as arestas de G .

Note que o grafo semi-euleriano é um caso particular dos grafos não-eulerianos.

A principal diferença entre um grafo euleriano e um semi-euleriano está na existência de um trajeto fechado: em grafos eulerianos, é possível percorrer todas as arestas partindo e chegando ao mesmo vértice; já nos grafos semi-eulerianos, existe um trajeto não-fechado que percorre todas as arestas. Um exemplo da definição de grafos semi-eulerianos é a Figura 3.2 em que podemos construir o seguinte trajeto: $d \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e$.

A Figura 3.3 é, por sua vez, um exemplo de grafo não-euleriano em que não conseguimos construir nenhum trajeto.

Com base no Teorema 16, será reafirmado e demonstrado que ambos os grafos não são eulerianos.

Figura 3.2 – Grafo Semi-Euleriano

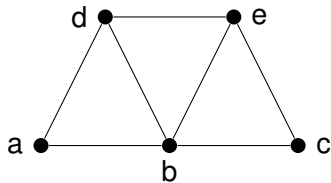
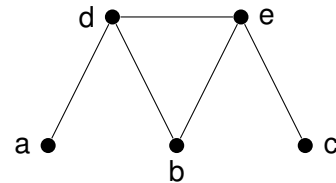


Figura 3.3 – Grafo Não-Euleriano



O lema a seguir será utilizado na demonstração do Teorema 16, que é uma caracterização dos grafos eulerianos, obtida por Euler em 1736.

Lema 15. *Se G é um grafo no qual o grau de cada vértice é pelo menos 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração. Se G possui laços ou múltiplas arestas, o resultado é trivial. Podemos, portanto, supor que G é um grafo simples. Seja v um vértice qualquer de G . Construímos um passeio $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$ de forma indutiva, escolhendo v_1 como um vértice adjacente a v e, para cada $i \geq 1$, escolhendo v_{i+1} como qualquer vértice adjacente a v_i , exceto v_{i-1} ; a existência de tal vértice é garantida por nossa hipótese. Como G possui apenas um número finito de vértices, eventualmente devemos escolher um vértice que já foi escolhido anteriormente. Seja v_k o primeiro desses vértices a ser escolhido novamente. Então, a parte do caminho que está entre as duas ocorrências de v_k forma o ciclo necessário. \square

Teorema 16. (Euler, 1736). *Seja G um grafo conexo. Então G é euleriano se, e somente se, o grau de cada vértice de G for par.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que G é euleriano, então existe um trajeto euleriano P de G . Sempre que P passa por um vértice, há uma contribuição de 2 para o grau desse vértice. Como cada aresta aparece exatamente uma vez em P , cada vértice deve ter grau par.

(\Leftarrow) A demonstração será conduzida por indução sobre o número de arestas de G . Considere inicialmente o caso em que G possui 0 arestas; nesse caso, G é euleriano por vacuidade.

Suponha, agora, a hipótese de indução: todo grafo conexo com até $n - 1$ arestas, no qual cada vértice possui grau par, é euleriano.

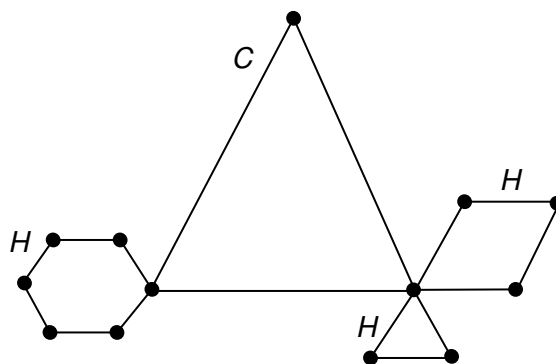
Seja agora G um grafo conexo com n arestas e cada vértice de grau par. Como G é conexo, cada vértice possui grau pelo menos 2 e, portanto, pelo Lema 15, G contém um ciclo C . Se C contiver todas as arestas de G , então G é Euleriano, e a demonstração está concluída. Caso contrário, removemos de G as arestas de C para formar um novo grafo H , possivelmente desconexo, com menos arestas que G , e no qual cada vértice ainda tem grau par. Note que

os vértices não pertencentes ao ciclo C permanecem com seus graus inalterados, enquanto os vértices que pertencem a C têm seus graus reduzidos em dois devido ao ciclo. Como todos os graus em G eram pares, e a subtração de dois mantém a paridade, os graus dos vértices em H permanecem pares.

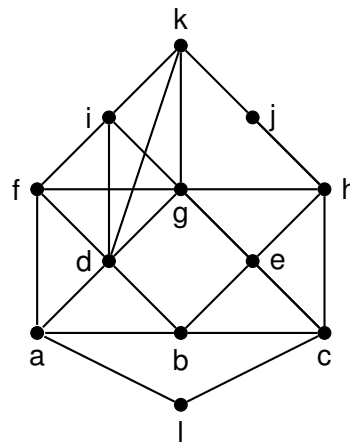
Pela hipótese de indução, cada componente conexa de H possui um trajeto euleriano. Como cada componente de H tem pelo menos um vértice em comum com C , devido à conexão, obtemos o trajeto Euleriano desejado de G ao seguir as arestas de C até alcançar um vértice não isolado de H , traçar o trajeto euleriano da componente conexa de H que contém esse vértice, sair pelo mesmo vértice que usamos para entrar nesta componente e então continuar ao longo das arestas de C até alcançar um vértice pertencente a outra componente conexa de H , e assim por diante. Todo o processo termina quando retornamos ao vértice inicial, o que é possível já que estamos percorrendo um ciclo. Ao final desse processo, obtemos um trajeto euleriano que percorre todas as arestas de G , o que implica que G é um grafo euleriano, concluindo assim a demonstração para o caso em que G possui n arestas. \square

A ideia da prova pode ser vista no grafo da Figura 3.4 abaixo.

Figura 3.4 – Exemplo Grafo Euleriano G



Decidir se o grafo da Figura 3.5 abaixo é ou não euleriano seria complexo sem o auxílio do Teorema 16, dada a sua quantidade de vértices e arestas. No entanto, ao aplicarmos o teorema, determinamos os graus de cada vértice: $gr(a) = 4$, $gr(b) = 4$, $gr(c) = 4$, $gr(d) = 6$, $gr(e) = 4$, $gr(f) = 4$, $gr(g) = 6$, $gr(h) = 4$, $gr(i) = 4$, $gr(j) = 2$, $gr(k) = 4$ e $gr(l) = 2$ e constatamos que todos os vértices apresentam grau par. Portanto, de acordo com o Teorema 16, o grafo J é euleriano.

Figura 3.5 – Exemplo Grafo Euleriano J 

Contudo, ainda resta a questão: como encontrar um trajeto euleriano nesse grafo? A resposta está na aplicação do algoritmo de Fleury, que será abordado ainda neste capítulo. Antes disso, porém, será apresentado o Corolário 17 referente aos grafos semi-eulerianos, o qual decorre do Teorema 16.

Corolário 17. Um grafo conexo é semi-euleriano se, e somente se, ele tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que G é semi-euleriano. Isto significa que existe um trajeto em G que contém todas as suas arestas exatamente uma vez. Nosso objetivo é mostrar que exatamente dois vértices em G possuem grau ímpar.

Seja P um trajeto que percorre todas as arestas de G e denote por v o vértice inicial de P e por u o vértice final de P . Como G não é euleriano (ou seja, não possui um trajeto euleriano), devemos ter $u \neq v$. Queremos mostrar que u e v são os únicos vértices de grau ímpar em G .

Escrevemos o trajeto P como $P = vw_1w_2 \cdots w_mu$, com $w_i \in V(G)$. Defina o conjunto de vértices intermediários como $W = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Se $W \cap \{u, v\} = \emptyset$ então para qualquer $w_i \in W$, sempre que P entra em w_i por uma aresta, ele deve sair por outra. Isso implica que o grau de cada w_i deve ser um número par. Já para os vértices extremos do trajeto, ou seja, u e v , esses têm grau ímpar, pois o trajeto inicia em v e termina em u , sem a obrigação de sair novamente desses vértices.

Agora resta o caso $W \cap \{u, v\} \neq \emptyset$, e vamos assumir, sem perda de generalidade, que $v \in W$ (o caso $u \in W$ é análogo). Se $v = w_1$, então temos um *loop*, que por sua vez contribui em 2 unidades para o grau de v . Caso $v = w_1 = w_2$, continuamos com um *loop* e grau 4 em v . Ao sairmos desse *loop*, iremos contribuir com exatamente uma aresta, e portanto teremos grau ímpar em v . Ao continuar percorrendo o trajeto P , caso voltemos ao vértice v precisaremos sair dele já que o trajeto termina em u e $u \neq v$. Logo o grau de v continuará como a soma de um número par mais 1, ou seja, ímpar. Concluímos que $gr(v)$ é ímpar. Analogamente mostramos que $gr(u)$ é ímpar. Note também que o grau de cada $w_i \in W \setminus \{u, v\}$ deve ser par, isso porque

ao entrar em um vértice por uma aresta, é necessário sair dele por outra, pois os w_i estão localizados no interior do trajeto. Portanto, no trajeto P , u e v são os únicos vértices de grau ímpar.

Resta mostrar que $V(G) = W \cup \{u, v\}$, ou seja, no trajeto P temos todos os vértices de G . Sabemos que $W \cup \{u, v\} \subset V(G)$. Se não valesse a igualdade, então existiriam vértices de G que não foram listados no trajeto P . Como o trajeto P passou por todas as arestas de G , então teríamos G como a união disjunta de dois subgrafos, contradizendo o fato de G ser conexo. Portanto, concluímos que $V(G) = W \cup \{u, v\}$ e logo u e v são exatamente os dois vértices de G de grau ímpar.

(\Leftarrow) Agora, suponha que G tem exatamente dois vértices de grau ímpar, digamos u e v . Nosso objetivo é provar que G é semi-euleriano, ou seja, que existe um trajeto contendo todas as arestas exatamente uma vez.

Defina um novo grafo $\tilde{G} = G + uv$, ou seja, adicionamos uma nova aresta ligando u a v . No grafo \tilde{G} , todos os vértices têm grau par, pois u e v tinham grau ímpar em G e a adição da aresta uv os tornou pares. Além disso, \tilde{G} continua conexo, pois G era conexo e a adição de uma aresta não pode desconectá-lo.

Pelo teorema de Euler, sabemos que um grafo conexo em que todos os vértices possuem grau par admite um trajeto euleriano, ou seja, um trajeto que percorre todas as arestas exatamente uma vez. Assim, existe um trajeto euleriano em \tilde{G} .

Agora, removemos a aresta uv desse trajeto euleriano. Como o trajeto era fechado, a remoção da aresta uv transforma esse trajeto em um trajeto que começa em u e termina em v , percorrendo todas as arestas de G exatamente uma vez. Isso mostra que G é semi-euleriano. \square

A partir deste ponto, será necessária uma breve preparação teórica para a demonstração do Algoritmo de Fleury.

Definição 18. Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com $|V| = m$ vértices e $|E| = n$ arestas. Definimos a **matriz de incidência** $M \in \mathbb{N}^{m \times n}$ de G da seguinte forma:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } v_i \text{ é incidente à aresta } e_j, \text{ mas } e_j \text{ não é um } loop \text{ em } v_i; \\ 2, & \text{se } e_j \text{ é um } loop \text{ em } v_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como exemplo, considere a Figura 2.6, com vértices $V = \{a, b, c, d, e\}$ e arestas $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, em que:

- e_1 e e_2 conectam os vértices b e c ,
- e_3 conecta c e d ,
- e_4 é um *loop* no vértice d ,

– e_5 conecta d e e .

A matriz de incidência $M \in \mathbb{N}^{5 \times 5}$, com linhas correspondendo aos vértices a, b, c, d, e e colunas às arestas e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , é então:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lema 19. (Handshaking Lemma) Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então, vale que

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E|.$$

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = m$ vértices e $|E| = n$ arestas, onde múltiplas arestas e *loops* são permitidos.

Considerando a Definição 18, sabemos que a soma das entradas de cada linha é exatamente o grau do vértice v_i daquela linha, portanto, obtemos $\sum_{v \in V} gr(v)$.

Por outro lado, vamos agora somar coluna por coluna. Observe que a soma das entradas de cada coluna é exatamente igual a 2, já que toda aresta liga dois vértices. Como temos $n = |E|$ colunas, então a soma total deverá ser $2|E|$.

Como estamos contando as mesmas incidências de duas maneiras diferentes, concluímos que $\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E|$. Provamos, portanto, que a soma dos graus de todos os vértices de G é igual ao dobro do número de arestas. Como consequência, essa soma é um número par. \square

Teorema 20. (Algoritmo de Fleury). Seja G um grafo euleriano. Então, a seguinte construção é sempre possível e produz um trajeto euleriano em G .

Comece em qualquer vértice u e percorra as arestas de forma arbitrária, obedecendo apenas às seguintes regras:

- a) apague as arestas à medida que forem percorridas e, caso algum vértice fique isolado, apague-o também;
- b) em cada etapa, utilize uma ponte apenas se não houver outra alternativa.

Demonstração. Vamos demonstrar que, ao remover arestas de um grafo G utilizando o algoritmo de Fleury, o grafo resultante permanece conexo em todas as etapas do processo.

A prova será por indução no número de arestas removidas.

Base da indução: Se G é Euleriano, então é conexo e todos os seus vértices possuem grau par. Ao remover uma única aresta de G , obtemos um novo grafo G' com uma aresta a

menos. O grafo G' permanece conexo porque já existia um trajeto euleriano, o que garante que qualquer par de vértices estava conectado. Ao remover uma aresta, o trajeto euleriano original ainda assegura a conexão entre todos os vértices.

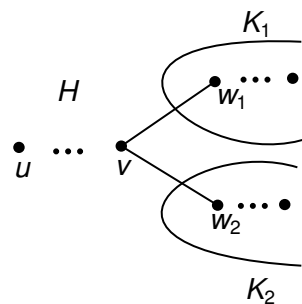
Passo indutivo: Suponha que, após a remoção de k arestas a partir do grafo G pelo algoritmo de Fleury, obtivemos um grafo conexo H . Suponha que o algoritmo chegou até um vértice v vindo de um vértice u .

Note que, ao longo do caminho entre os vértices u e v , cada vértice intermediário foi percorrido com uma entrada e uma saída, o que mantém inalterada a paridade de seus graus. Apenas os vértices u e v tiveram suas paridades modificadas: em u houve apenas uma saída, e em v , apenas uma entrada, tornando-os, portanto, vértices de grau ímpar.

Queremos mostrar que a próxima aresta ($k + 1$) a ser removida também não desconecta o grafo.

Suponha, por contradição, que a remoção da próxima aresta adjacente a v desconecte H . Isso implica que H possuía duas ou mais pontes adjacentes a v . De fato, se H não possuísse nenhuma ponte adjacente a v , a remoção de qualquer aresta não causaria desconexão. Se houvesse apenas uma ponte adjacente a v , então o grau de v seria igual a 1 e a remoção dessa ponte isolaria v , que então poderia ser removido do grafo sem desconectá-lo, já que não existiria mais nenhum caminho que passasse por ele. O grafo restante ainda seria conexo. Portanto, a suposição de que a remoção da próxima aresta desconecta o grafo implica que há ao menos duas pontes adjacentes a v . Desse modo, temos a configuração expressa na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Exemplo de Grafo



Suponha que uma dessas pontes seja vw , cuja remoção separa o grafo em duas componentes conexas. Afirmamos que w pertence a uma componente K que não contém u . Isso é verdade, pois, se existissem duas pontes, vw_1 e vw_2 , cuja remoção produzisse componentes K_1 e K_2 com $u \in K_1$ e $u \in K_2$, então haveria um caminho entre w_1 e w_2 , o que contradiz o fato de que vw_1 ou vw_2 seria uma ponte. Logo, tal configuração é impossível.

Observe agora que, em H , os únicos vértices de grau ímpar são u e v , então todos os outros, incluindo w , deveriam ter grau par. No entanto, dentro da componente K , w possui grau ímpar, e pelo Lema 19, deveria haver outro vértice z em K com grau ímpar. Isso leva a uma contradição, pois o grau de z em H — e, conseqüentemente, em K — deve ser par, já que z não

é nem u nem v , e tampouco foi afetado pela remoção de arestas. Concluímos que a remoção da aresta não desconecta o grafo.

Por fim, é necessário mostrar que, ao partir do vértice u , executar o algoritmo de Fleury e retornar a u pela última aresta disponível, percorremos todas as arestas do grafo. Suponha, por absurdo, que reste uma aresta ab não utilizada após o retorno a u . Isso implicaria que a última remoção adjacente a ab realizada desconectou o grafo, o que contraria o que foi demonstrado anteriormente.

Assim, o algoritmo de Fleury garante a construção de um trajeto Euleriano, removendo arestas de forma que o grafo permaneça sempre conexo. \square

Com o auxílio do Teorema 20, estamos agora aptos a responder a questão proposta anteriormente: como encontrar um trajeto euleriano no grafo da Figura 3.5?

Seguindo o algoritmo de Fleury, podemos determinar o seguinte trajeto euleriano:

$$\begin{aligned} g \rightarrow k \rightarrow j \rightarrow h \rightarrow g \rightarrow e \rightarrow h \rightarrow c \rightarrow e \\ \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow l \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow f \rightarrow a \\ \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow i \rightarrow d \rightarrow k \rightarrow i \rightarrow f \rightarrow g \end{aligned}$$

A Figura 3.7 ilustra o grafo euleriano J e trajeto a ser percorrido. Para construí-lo, basta seguir as setas, iniciando no vértice g . À medida que o trajeto é percorrido, as arestas direcionadas devem ser removidas. Por exemplo, a primeira aresta a ser percorrida é $g \rightarrow k$; ao atravessá-la, ela é apagada, resultando na Figura 3.8. Em seguida, percorre-se a aresta $k \rightarrow j$, que também é removida, como mostrado na Figura 3.9. Por fim, a Figura 3.10 apresenta o grafo J com todas as arestas apagadas, restando apenas a última aresta $f \rightarrow g$.

Figura 3.7 – Grafo Euleriano J Direcionado

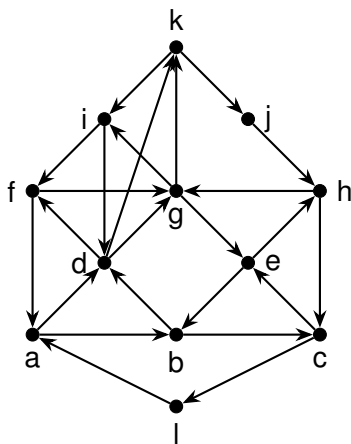


Figura 3.8 – Grafo Euleriano J sem a aresta gk

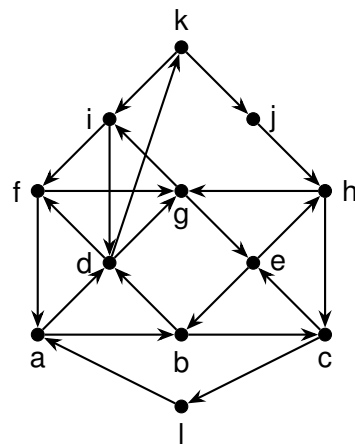


Figura 3.9 – Grafo Euleriano J sem as arestas gk e kj

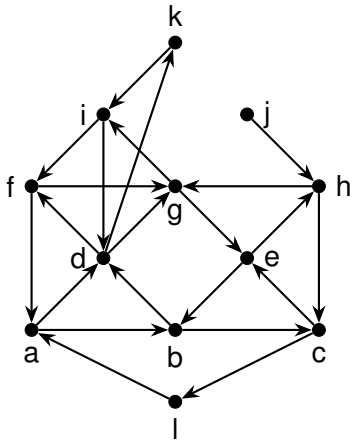
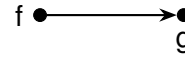


Figura 3.10 – Grafo Euleriano J apenas com a aresta fg



4 GRAFOS HAMILTONIANOS

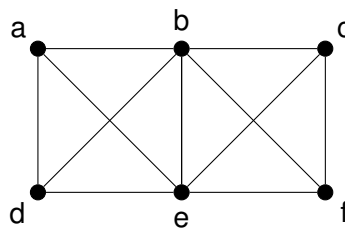
Este capítulo tem como objetivo apresentar os grafos hamiltonianos, um tipo de grafo que se destaca pela existência de ciclos que passam por todos os seus vértices exatamente uma vez.

Serão abordadas definições fundamentais, bem como o corolário de Dirac e teoremas relevantes, entre eles o de Ore, que contribuem para a caracterização desse tipo de grafo. Para embasar teoricamente o conteúdo, utilizou-se como principais referências o livro *Introduction to Graph Theory*, de Wilson (1996) e o *Graph Theory with Applications*, de Bondy e Murty (1976).

Definição 21. Um grafo G é **hamiltoniano** se existe um trajeto fechado passando exatamente uma vez por cada vértice de G , ou seja, se existe um caminho fechado em G que passe por todos os vértices. Observe que tal trajeto deve ser um ciclo, exceto quando G é o grafo nulo N_1 . Esse ciclo é chamado de **ciclo hamiltoniano**.

Por exemplo, podemos construir o seguinte caminho fechado na Figura 4.1: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a$. Observe que, para construir esse caminho fechado, não é necessário percorrer todas as arestas, mas sim visitar todos os vértices uma única vez, passando por cada aresta no máximo uma vez.

Figura 4.1 – Grafo hamiltoniano



Definição 22. Um grafo não-hamiltoniano G é **semi-hamiltoniano** se existe um caminho passando por cada vértice.

Na Figura 4.2, é possível construir o seguinte caminho: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d$. Note que, ao retirarmos a aresta ad do grafo não conseguimos mais construir o caminho fechado. Já a Figura 4.3 ilustra um caso em que não é possível construir nenhum caminho que passe por todos os vértices.

Figura 4.2 – Grafo Semi-Hamiltoniano

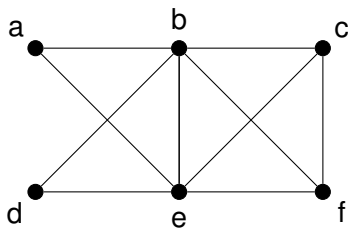
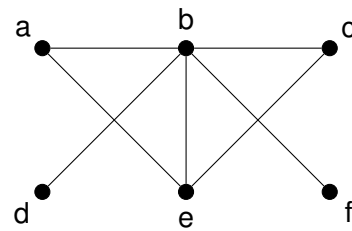


Figura 4.3 – Grafo Não-Hamiltoniano



O Teorema de Ore (1960), que será discutido a seguir, apresenta um critério suficiente para garantir que um grafo seja hamiltoniano.

Teorema 23 (Ore, 1960). Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se

$$\text{gr}(v) + \text{gr}(w) \geq n$$

para cada par de vértices não adjacentes v e w , então G é hamiltoniano.

Demonstração. Suponhamos que o teorema seja falso e derivemos uma contradição. Assim, seja G um grafo não-hamiltoniano com n vértices, que satisfaz a condição dada nos graus dos vértices.

Adicionando arestas extras, se necessário, podemos assumir que G é “apenas” não-hamiltoniano, no sentido de que a adição de qualquer outra aresta transforma G em um grafo hamiltoniano. Note que adicionar arestas extras não viola a condição relacionada aos graus dos vértices, pois eles já satisfazem a condição da soma dos graus. Assim, ao adicionar mais arestas, a soma continuará sendo maior ou igual a n . No caso em que a adição de uma aresta elimina a não adjacência entre dois vértices, não é mais necessário verificar a condição para esses vértices, pois ela deixa de se aplicar.

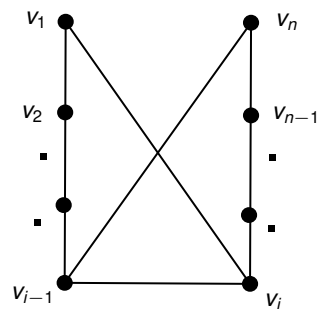
Adicione uma aresta de forma que o grafo G se torne hamiltoniano. Dessa maneira, podemos construir um caminho fechado que passa por todos os vértices. Em seguida, remova uma aresta arbitrária $v_1 v_n$ desse ciclo; assim, garantimos a existência de um caminho que percorre todos os vértices exatamente uma vez, porém este caminho é não fechado. Seja, portanto, esse caminho $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$, que passa por todos os vértices de G . No entanto, como G é não-hamiltoniano, os vértices v_1 e v_n não são adjacentes, e assim $\text{gr}(v_1) + \text{gr}(v_n) \geq n$.

Afirmção: qualquer vértice v_i adjacente a v_1 é tal que v_{i-1} não é adjacente a v_n .

A afirmação é verdade pois caso contrário deve existir algum vértice v_i adjacente a v_1 com a propriedade de que v_{i-1} é adjacente a v_n (ver Figura 4.4). Isso nos dá a contradição necessária, pois conseguiríamos percorrer o seguinte ciclo:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_i \rightarrow v_1$$

Figura 4.4 – Exemplo de grafo Hamiltoniano



Devemos ter $gr(v_n) \leq n - 1$, pois G é simples. Agora, pela afirmação acima devemos ter $gr(v_n) \leq n - 1 - gr(v_1)$. Portanto, isso implica que $gr(v_n) + gr(v_1) \leq n - 1$, mas isso contradiz nossa afirmação de que $gr(v_1) + gr(v_n) \geq n$. Logo, uma contradição.

Portanto, G deve ser um grafo Hamiltoniano. \square

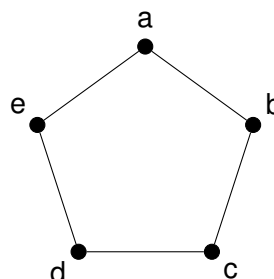
Observe que o Teorema 23 não garante a recíproca. Ou seja, mesmo que um grafo não satisfaça as condições estabelecidas pelo Teorema de Ore, ele ainda pode ser hamiltoniano. Um exemplo disso é o grafo representado na Figura 4.5, no qual podemos descrever o caminho fechado $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow a$. Portanto, trata-se de um grafo hamiltoniano.

Contudo, ao verificarmos as condições do Teorema de Ore, observamos que ele não é satisfeito, pois, para quaisquer dois vértices v e w ,

$$gr(v) + gr(w) < 5,$$

sendo $n = 5$ o número total de vértices. Assim, o grafo da Figura 4.5 é um exemplo de grafo hamiltoniano que não satisfaz as condições do Teorema de Ore.

Figura 4.5 – Exemplo de grafo Hamiltoniano - Pentágono



A análise de grafos hamiltonianos é notoriamente mais complexa do que a de outros tipos de grafos.

Segundo Bondy e Murty (1976):

Em contraste com o caso dos grafos eulerianos, nenhuma condição necessária e suficiente não trivial é conhecida para que um grafo seja hamiltoniano; de fato, o problema de encontrar tal condição é um dos principais problemas não resolvidos da teoria dos grafos. [tradução nossa]

O corolário a seguir apresenta uma forma mais prática de verificar se um grafo é hamiltoniano.

Corolário 24 (Dirac, 1952). Seja G um grafo simples com n ($n \geq 3$) vértices. Se $\text{gr}(v) \geq \frac{n}{2}$ para cada vértice v , então G é Hamiltoniano.

Demonstração. O resultado segue imediatamente do Teorema 23, pois $\text{gr}(v) + \text{gr}(w) \geq n$ para cada par de vértices v e w , sejam eles adjacentes ou não. \square

A definição a seguir é necessária para a compreensão do Teorema 26, o qual apresenta uma desigualdade válida quando se trata de um grafo hamiltoniano.

Definição 25. Denotamos por $\omega(G)$ o número de componentes conexas do grafo G .

Teorema 26. Se $G = (V(G), E(G))$ é hamiltoniano, então, para todo subconjunto próprio não vazio S de V ,

$$\omega(G - S) \leq |S|.$$

Demonstração. Seja C um ciclo hamiltoniano de G , ou seja, um ciclo que passa por todos os vértices de G exatamente uma vez.

Agora, considere um subconjunto próprio e não vazio $S \subset V$, ou seja, $S \neq \emptyset$ e $S \neq V$.

Ao remover os vértices de S do ciclo C , obtemos o subgrafo $C - S$, no qual as arestas ligadas aos vértices eliminados também serão removidas. Como C é um ciclo simples, a remoção de vértices pode desconectá-lo, mas o número de componentes conexas resultantes será no máximo igual ao número de vértices removidos. Assim:

$$\omega(C - S) \leq |S|.$$

Intuitivamente, isso ocorre porque cada vértice removido pode, no máximo, “quebrar” o ciclo em uma nova componente conexa.

Além disso, note que $C - S$ é um subgrafo de $G - S$, pois $C \subseteq G$ e apenas estamos removendo vértices de ambos.

Como $C - S$ possui os mesmos vértices que $G - S$, logo:

$$\omega(G - S) \leq \omega(C - S).$$

Essa desigualdade ocorre porque o subgrafo C pode conter menos conexões (arestas) do que o grafo G . Dessa forma, ao removemos o conjunto de vértices S , o impacto estrutural

em C tende a ser maior do que em G , no sentido de que a remoção pode fragmentar C em um número maior de componentes conexas do que ocorreria em G .

Combinando as duas últimas desigualdades acima, temos:

$$\omega(G - S) \leq \omega(C - S) \leq |S|,$$

o que prova o teorema. □

Como ilustração do Teorema 26 acima, considere o grafo da Figura 4.6. Esse grafo tem nove vértices e ao remover os três indicados em preto, restam quatro componentes conexas, ilustrado na Figura 4.7. Portanto, a desigualdade $\omega(G - S) \leq |S|$ não é satisfeita, e pelo Teorema 26 segue-se que o grafo não é hamiltoniano.

Figura 4.6 – Grafo não-hamiltoniano

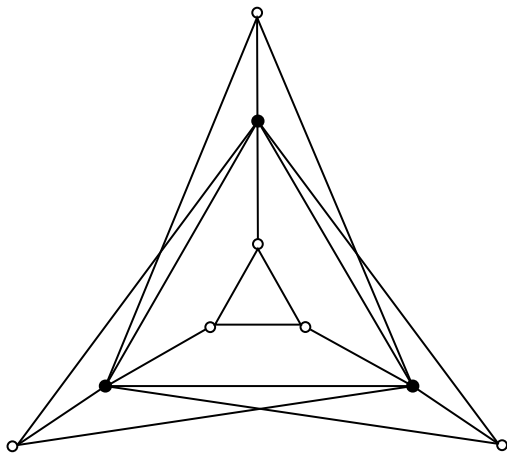
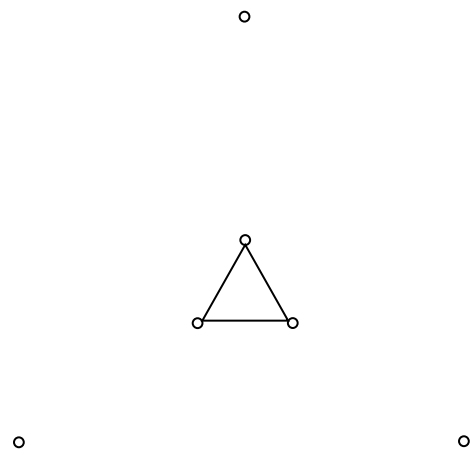


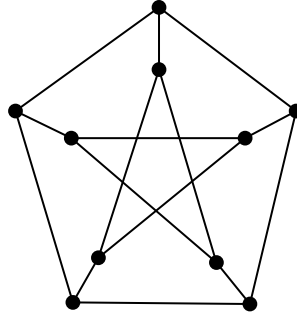
Figura 4.7 – Grafo depois da retirada dos vértices



Assim, vemos que o Teorema 26 pode, às vezes, ser aplicado para mostrar que um grafo é não hamiltoniano. No entanto, esse método nem sempre funciona. Por exemplo, o grafo de Petersen (Figura 4.8) é não hamiltoniano, mas isso não pode ser deduzido usando o Teorema 26.

Neto (2016) apresenta um passo a passo para mostrar que o grafo de Petersen não é hamiltoniano. Para entender melhor a justificativa por trás dessa propriedade, vale a pena consultar a obra completa.

Figura 4.8 – Grafo de Petersen



5 APLICAÇÕES

A Teoria dos Grafos possui ampla aplicação em diversas situações do cotidiano. Nesta seção, descreveremos alguns problemas que podem ser discutidos e/ou resolvidos por meio dessa teoria, especialmente utilizando conceitos como grafos eulerianos e grafos hamiltonianos. Entre os problemas abordados, destacam-se: o Problema do Menor Caminho, discutido por [Aldous e Wilson \(2000\)](#) em *Graphs and Applications: an Introductory Approach*, o Problema do Carteiro Chinês e o Problema do Caixeiro Viajante, conforme discutido nos clássicos livros de [Bondy e Murty \(1976\)](#), *Graph Theory with Applications*, e de [Wilson \(1996\)](#), *Introduction to Graph Theory*.

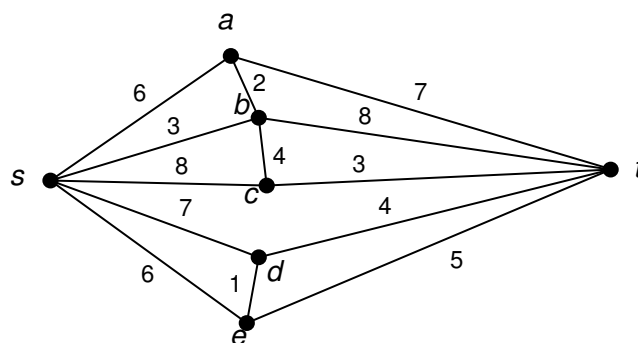
5.1 O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO

O problema abordado nesta seção consiste em encontrar o menor caminho possível que parte de um vértice inicial s e chega a um vértice de destino t em um grafo ponderado, isto é, um grafo conexo no qual cada aresta recebe um número não negativo. Para resolver essa questão, será descrito um algoritmo específico.

Esse algoritmo começa em s e, a partir dele, calcula-se progressivamente a menor distância até os demais vértices do grafo. A cada passo, os vértices acessíveis a partir do vértice atual são analisados, e cada um recebe um rótulo temporário que representa a menor distância conhecida desde s , considerando os caminhos já explorados. Esses rótulos tornam-se definitivos — denominados *potenciais* — quando se confirma que não há caminho mais curto até aquele vértice. Quando o vértice t recebe seu potencial, torna-se possível reconstruir o(s) caminho(s) mais curto(s) de s até t , seguindo os rótulos registrados ao longo do processo.

Como exemplo, considere o grafo L representado na Figura 5.1. Nesse grafo, busca-se encontrar o menor caminho possível partindo do vértice s e chegando ao vértice t .

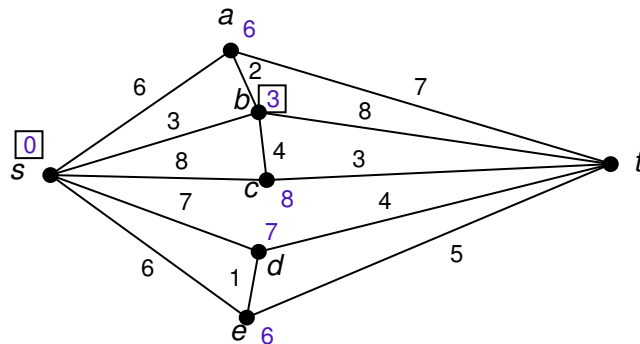
Figura 5.1 – Grafo L



Na **primeira iteração**, a partir do vértice s , é possível alcançar os vértices a , b , c , d e e . Para o vértice inicial s , considera-se o potencial igual a 0. Calculando as distâncias a partir de s ,

obtem-se os rótulos temporários: $sa = 6$, $sb = 3$, $sc = 8$, $sd = 7$ e $se = 6$. Entre essas opções, o menor valor corresponde ao caminho sb , com valor igual a 3. Assim, esse valor é definido como o potencial do vértice b e é indicado na Figura 5.2 por meio de um quadrado.

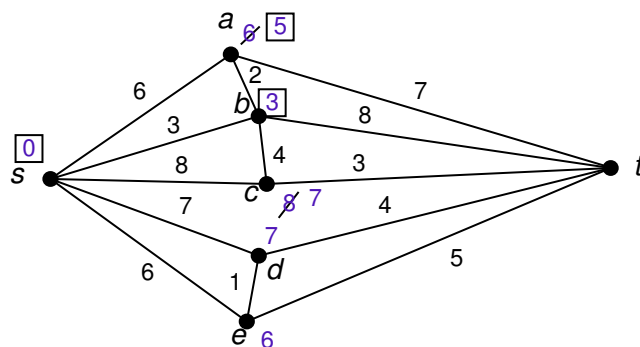
Figura 5.2 – Grafo L depois da primeira iteração



Na **segunda iteração**, considera-se o vértice b , cujo potencial é igual a 3, e analisam-se os vértices que podem ser alcançados a partir dele. Nesse caso, os vértices acessíveis são a e c . Calculando as novas distâncias, obtém-se: $3 + 2 = 5$ para o caminho até a e $3 + 4 = 7$ para o caminho até c . Esses valores estão indicados na Figura 5.3.

Dessa forma, nesta etapa, atribui-se ao vértice a o potencial 5, pois é menor que 7. Vale observar que, anteriormente, o vértice a possuía um rótulo temporário de valor 6, que foi substituído por 5 por representar o menor valor. O mesmo princípio se aplica ao vértice c . Caso o novo valor calculado para um vértice seja menor do que o valor anteriormente atribuído, o rótulo é atualizado. No entanto, se o novo valor for maior, mantém-se o menor valor já registrado.

Figura 5.3 – Grafo L depois da segunda iteração

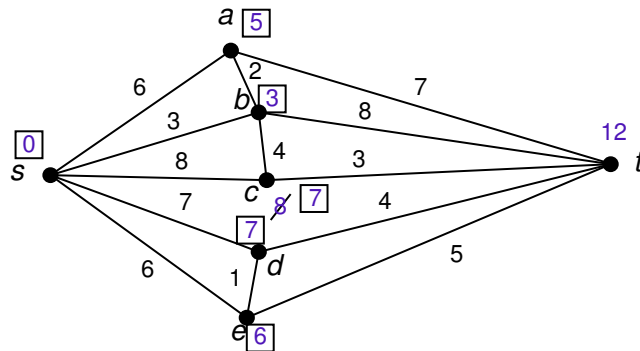


Na **terceira iteração**, parte-se do vértice a , cujo potencial é 5, e verifica-se que, a partir dele, é possível alcançar apenas o vértice t , que é o destino desejado. Assim, atribui-se a t um rótulo temporário correspondente à soma $5 + 7 = 12$, como pode ser visto na Figura 5.4.

No entanto, ainda é necessário considerar os demais vértices que possuem rótulos temporários com os menores valores. São eles: c , d e e . Para o vértice c , adota-se o potencial 7, obtido a partir do caminho que passa por b ; para o vértice d , considera-se o potencial 7,

calculado diretamente a partir de s ; e, por fim, para o vértice e , utiliza-se o potencial 6, também com origem em s .

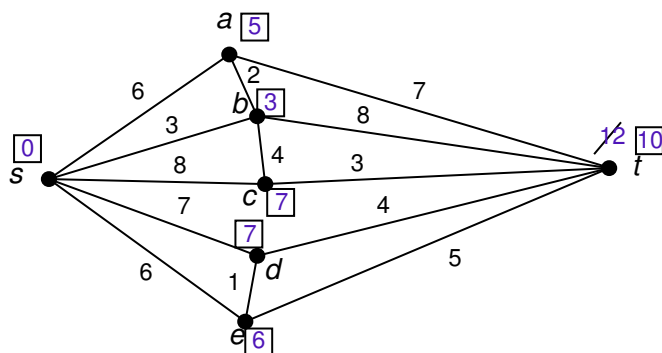
Figura 5.4 – Grafo L depois da terceira iteração



Na **quarta iteração**, analisam-se os caminhos possíveis até o vértice t , a partir dos vértices que possuem potenciais, a saber, b , c , d e e . Por exemplo, ao considerar o vértice b , com potencial 3, e somar o valor da aresta até t (valor 8), obtém-se um novo rótulo temporário para t igual a 11, que já é menor que o valor anteriormente atribuído (12).

Da mesma forma, avaliam-se os demais vértices. Após essa análise, conclui-se que o menor potencial para t é 10, obtido a partir do caminho que parte de c , conforme descrito na Figura 5.5.

Figura 5.5 – Grafo L depois da quarta iteração



Agora que o vértice t possui um potencial definitivo, é possível reconstruir o caminho mais curto realizando o percurso inverso. A partir de t , retorna-se ao vértice c com o valor de 3; de c , segue-se para b com valor de 4; e de b , chega-se ao vértice inicial s com o valor de 3.

$$s \xrightarrow{3} b \xrightarrow{4} c \xrightarrow{3} t$$

Somando esses valores, obtém-se o menor caminho possível de s até t , com valor total igual a 10.

5.2 O PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS

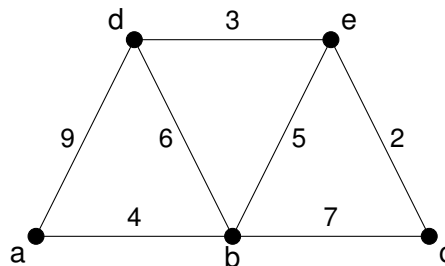
Esse problema consiste em traçar a rota de menor custo que leve o carteiro chinês do ponto de partida por todas as ruas pelo menos uma vez, garantindo que ele retorne ao ponto inicial e evitando repetir ruas sempre que possível.

Reformulando esse desafio em termos da Teoria dos Grafos, podemos representá-lo por um grafo ponderado, no qual os vértices representam os pontos (ou interseções) da cidade, e as arestas representam as ruas que conectam esses pontos. O valor de cada aresta indica o custo (tempo, distância ou esforço) necessário para percorrê-la.

Como o objetivo é percorrer todas as ruas, o problema pode ser reformulado como a busca por um passeio fechado de menor distância que percorra cada rua (aresta) ao menos uma vez. Se o grafo for Euleriano, esse passeio corresponde a um trajeto euleriano. Para encontrá-lo, podemos utilizar o Algoritmo de Fleury, que é especialmente indicado para esse tipo de problema.

Caso o grafo não seja euleriano ainda é possível encontrar uma solução viável, embora mais complexa. Como exemplo, considere o grafo semi-euleriano apresentado na Figura 5.6 abaixo. Embora já tenhamos discutido esse grafo anteriormente, agora iremos retomá-lo, desta vez representando-o como um grafo ponderado.

Figura 5.6 – Grafo G Semi-Euleriano Ponderado



Para encontrar o trajeto semi-euleriano, seguiremos o seguinte método. Primeiramente, identificamos os vértices de grau ímpar do grafo, que neste caso são os vértices d e e . Como um grafo admite um trajeto quando possui exatamente dois vértices de grau ímpar, procuramos um trajeto que comece em d e termine em e , percorrendo cada aresta exatamente uma vez.

Um possível trajeto é:

$$d \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e$$

cuja soma dos pesos das arestas percorridas é:

$$9 + 4 + 6 + 3 + 5 + 7 + 2 = 36.$$

Em seguida, buscamos o menor trajeto de e até d , que é simplesmente a aresta direta

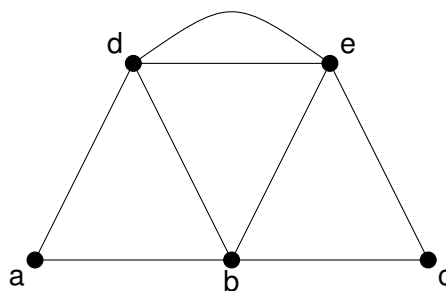
$e \rightarrow d$, com peso igual a 3. Ao combinarmos esse trajeto com o anterior, obtemos um trajeto euleriano, com comprimento total:

$$36 + 3 = 39.$$

Portanto, a menor distância que o carteiro chinês percorrerá é 39.

Observe que, ao adicionar esse menor trajeto entre d e e ao grafo original, todos os vértices passam a ter grau par, tornando o grafo Euleriano. A Figura 5.7 abaixo ilustra essa modificação.

Figura 5.7 – Grafo G Euleriano



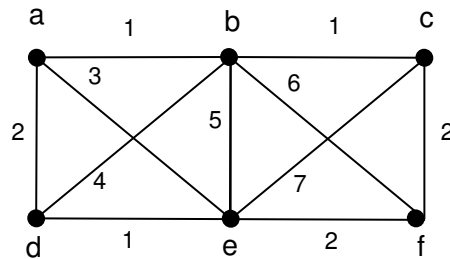
5.3 O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Esse problema consiste em traçar uma rota para que o caixeiro viajante percorra todas as cidades dadas, retornando à cidade de origem, de modo a cobrir a menor distância possível. É importante observar que, para visitar todas as cidades, ele não precisa passar por todas as ruas (arestas), mas sim encontrar o menor trajeto que permita visitar cada cidade exatamente uma vez e retornar ao ponto de partida.

Assim como no problema do carteiro chinês, este também pode ser representado por um grafo ponderado, no qual os valores associados às arestas indicam distâncias, tempo de percurso ou custos. No entanto, diferentemente do problema anterior, aqui buscamos encontrar um ciclo hamiltoniano, ou seja, um ciclo que passe por todos os vértices do grafo exatamente uma vez e retorne ao vértice inicial.

Como exemplo, considere o grafo hamiltoniano ponderado apresentado na Figura 5.8, já discutido anteriormente, agora com pesos atribuídos às arestas.

Figura 5.8 – Grafo Hamiltoniano Ponderado



Um dos caminhos de menor custo possíveis é dado por $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a$, com distância (ou tempo) total igual a 9. Também poderíamos, por exemplo, iniciar no vértice b e seguir o trajeto $b \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow b$, obtendo a mesma distância total.

Um algoritmo para encontrar esse menor trajeto seria calcular a distância total de todas as permutações possíveis entre as cidades. No entanto, essa estratégia rapidamente se torna inviável à medida que o número de cidades aumenta. Para 15 cidades, por exemplo, temos $\frac{14!}{2}$ possibilidades a considerar.

Isso ocorre porque, ao fixar uma cidade como ponto de partida, restam 14 cidades a serem visitadas, o que gera $14!$ combinações de rotas. Como cada ciclo é contado duas vezes (um no sentido horário e outro no anti-horário do ciclo), dividimos por 2. O total de possibilidades, nesse caso, é aproximadamente 4×10^{10} , o que torna o método exaustivo e inviável, até mesmo para computadores.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho buscou apresentar de forma clara e fundamentada os principais conceitos da Teoria dos Grafos, com foco especial nos grafos eulerianos e hamiltonianos. A partir da análise do problema das pontes de Königsberg, que marcou o surgimento da teoria, foi possível compreender como a representação de situações por meio de vértices e arestas se tornou uma ferramenta importante para a resolução de diversos problemas.

O estudo dos grafos eulerianos mostrou como a estrutura do grafo, especialmente o grau de seus vértices, influencia na existência de um trajeto que percorra todas as arestas sem repeti-las. Já no caso dos grafos hamiltonianos, a análise revelou uma maior complexidade teórica, pois não há, até hoje, uma condição necessária e suficiente geral que permita identificar esse tipo de grafo com segurança, o que faz desse tema um dos mais desafiadores da área, conforme discutido por [Bondy e Murty \(1976\)](#).

As aplicações clássicas abordadas, como o problema do menor caminho, o problema do carteiro chinês e o problema do caixeiro viajante, permitiram visualizar como a Teoria dos Grafos pode ser empregada para resolver situações práticas ligadas à otimização, planejamento e organização de rotas. Esses exemplos reforçam a utilidade da teoria para além do campo puramente matemático, alcançando áreas como logística, ciência da computação e redes.

Como próximo passo nos estudos da área, recomenda-se aprofundar no tema de árvores, estruturas que possuem inúmeras aplicações relevantes. Além disso, investigar outras condições suficientes para a existência de ciclos hamiltonianos, conforme abordado por [Bondy e Murty \(1976\)](#), configura uma importante linha de pesquisa teórica. Por fim, é válido aprofundar o estudo das diversas aplicações da Teoria dos Grafos, especialmente em grafos sociais, em problemas envolvendo circuitos elétricos e em diferentes campos da química.

REFERÊNCIAS

ALDOUS, J. M.; WILSON, R. J. **Graphs and Applications: An Introductory Approach**. Berlin: Springer, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 30.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**. London: Macmillan Press, 1976. Citado 4 vezes nas páginas 24, 26, 30 e 36.

Mathcha. **Mathcha - Online Math Editor**. 2025. <<https://www.mathcha.io/>>. Acesso em: 10 jul. 2025. Citado na página 9.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 29.

VENKATARAMAN, G. The Königsberg Bridges Problem and Euler's Solution. **Bulletin of the Mathematics Teachers' Association (India)**, p. 5–12, 2024. [S.l.]. Citado na página 8.

WILSON, R. J. **Introduction to Graph Theory**. 4. ed. Harlow: Pearson Education, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 8, 9, 10, 15, 24 e 30.