UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

RAPHAEL CARLINI ZAMBON

CÔNICAS: UMA FORMA INTERESSANTE PARA ABORDAR O TEMA NO ENSINO MÉDIO

SÃO CARLOS, SP
JANEIRO DE 2026

Raphael Carlini Zambon

Cônicas: uma forma interessante para abordar o tema no ensino médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do(a) Professor(a) Doutor(a) Tomas Edson Barros.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Tomas Edson Barros

São Carlos, SP
Janeiro de 2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Raphael Carlini Zambon, realizada em 09/01/2026.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Tomas Edson Barros (UFSCar)

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho (UFCG)

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Zambon, Raphael Carlini

CÔNICAS: UMA FORMA INTERESSANTE PARA ABORDAR O TEMA NO ENSINO MÉDIO. / Raphael Carlini Zambon -- 2026.
105f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Tomas Edson Barros
Banca Examinadora: Tomas Edson Barros, Daniel Cordeiro de Moraes Filho, Paulo Antonio Silvani Caetano
Bibliografia

1. Cônicas . 2. Geometria analítica . 3. Ensino médio . I. Zambon, Raphael Carlini. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

Dedico à minha amada Ana Cecília Sanches Cerqueira por todo seu apoio, amor e carinho, aos meus queridos pais Arnaldo e Márcia por minha formação pessoal e moral e à minha filha Alice.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), cujos ensinamentos e orientações foram fundamentais para a minha trajetória acadêmica. Sem a dedicação desses profissionais, seria improvável que eu chegasse até aqui. Agradeço ao Professor João Carlos Vieira Sampaio, à Professora Luciene Nogueira Bertoncello, à Professora Grazielle Feliciani Barbosa, ao Professor Wladimir Seixas, ao Professor Paulo Antônio Silvani Caetano, ao Professor Pedro Luiz Aparecido Malaguti, ao professor Ivo Machado da Costa e ao Professor José Antônio Salvador, por compartilharem seus conhecimentos e experiências de forma excepcional. Um agradecimento especial ao meu professor e orientador Tomas Edson Barros, cujas aulas de Matemática Discreta e Fundamentos de Cálculo foram essenciais para a minha formação. Sua abordagem motivadora, suas dinâmicas inovadoras e em especial suas estórias em sala de aula contribuíram significativamente para reacender minha paixão pela prática docente, renovando minha esperança na educação matemática. Também expresso minha gratidão aos colegas de curso, que, direta ou indiretamente, enriqueceram minha jornada com suas experiências e contribuições. Embora alguns tenham ficado pelo caminho, seu impacto foi significativo. Destaco especialmente o Luís, grande parceiro nas aulas e estudos, cujo apoio foi fundamental para meu desempenho ao longo do curso, bem como Márcio e Matheus, por todo o percurso compartilhado até a conclusão do mesmo. Além disso, registro meu profundo reconhecimento à minha amiga Flávia Spoto, ao IFSP – Araraquara e aos meus alunos do 4° ano do curso técnico em mecânica integrado ao ensino médio, turma de 2022, cujas colaborações foram indispensáveis na confecção deste projeto. Sem a dedicação dessas pessoas, seria impossível realizar este trabalho. Agradeço a Ana Cecília, meu amor, pois sem sua ajuda, paciência e incomparável contribuição nada disso poderia ser concebido. E, finalmente, agradeço a Deus, pois estou aqui.

"As raízes da educação são amargas, mas os frutos são doces."

Aristóteles

Resumo

O presente trabalho investiga a contribuição de materiais manipulativos e tecnologias, especificamente modelagem matemática e uso do geogebra, no ensino e aprendizagem das cônicas, conteúdo que muitas vezes é negligenciado pelos professores de matemática do ensino médio e no qual parte dos alunos encontra muita dificuldade. O estudo analisou se a utilização da modelagem e da tecnologia melhoraram a compreensão e o desempenho dos alunos, adotando uma metodologia baseada em desafios práticos e atividades em laboratório de informática. Fundamentado na teoria construtivista, o trabalho destaca a importância da interação ativa do indivíduo com o ambiente para a aprendizagem. O projeto foi estruturado com objetivo de propor a descoberta das cônicas pelos alunos através da modelagem, aprofundando o tema com as aulas teóricas e realizando a complementação detalhada do assunto com o uso do geogebra. Divididos em grupos para a confecção dos modelos começa a descoberta. As aulas foram elaboradas a partir das dúvidas e enganos dos alunos ao concretizar os modelos, além do acréscimo natural proveniente do conteúdo obrigatório para o ensino médio. A modelagem, a resolução de problemas e a interação tecnológica com as cônicas, acabou proporcionando uma vivência única, diferente e contextualizada dos conceitos matemáticos apresentados.

Palavras-chave: Cônicas, Geogebra, modelos manuais.

Abstract

The present study examines the role of manipulatives and digital technologies—specifically mathematical modeling and the use of GeoGebra—in the teaching and learning of conic sections, a topic often overlooked by high school mathematics teachers and one in which many students encounter considerable difficulty. The research investigated whether these approaches enhanced students' understanding and performance, employing a methodology centered on practical challenges and computer-lab activities. Grounded in constructivist theory, the work emphasizes the importance of active learner engagement with the environment as a catalyst for meaningful learning.

The project was designed to lead students to discover the conic sections through hands-on modeling, subsequently deepening their knowledge via theoretical instruction and enriching it with detailed exploration using GeoGebra. Group work in the creation of physical models initiated the discovery process. The lessons were developed in response to students' questions and misconceptions arising during model construction, as well as to meet the curricular requirements of high school mathematics.

Through modeling, problem-solving, and technological interaction with the conic sections, students experienced the mathematical content in a distinctive, contextualized, and engaging way.

Keywords: Conic sections, Geogebra, manipulative models.

Lista de ilustrações

Lista de referências das ilustrações

Figura 1 – disponível em: https://www.ime.unicamp.br/ãpmat/elipsoide-elipse-e-sua-propriedade-refletora/

Figuras 2 e 3 – imagens criadas pelo orientador deste trabalho, professor Dr. Tomas Edson Barros.

Figura 4 – disponível em: https://militares.estrategia.com/public/questoes/ilustra-propriedade822778c676/

Figuras 5 à 9 – imagens criadas pelo orientador deste trabalho, professor Dr. Tomas Edson Barros.

Figuras 10 à 34 – imagens criadas pelo autor, Raphael Carlini Zambon.

Figuras 35 à 41 – LEITE, Isabel Cristina Costa. Explorando seções cônicas. **geogebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hy5hkvf3. Acesso em: 17 abr. 2025.

Figuras 42 à 48 – Lista 10 - Cônicas. **ime-unicamp**. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/ṽalle/PastCourses/gaal10.pdf. Acesso em: 20 abr. 2025.

Figuras 49 à 62 – JÚLIA, Ana. Cônicas. **Projeto Medicina**. Disponível em: https://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/422/matematica_ geometria_analitica_conicas_exercicios.pdf. Acesso em: 22 abr. 2025.

Figuras 63 e 64 – TDIC, Matemá. Elipse - Equações. **geogebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hdejymy3. Acesso em: 15 maio 2025.

Figuras 65 e 66 – TIMBOLA, Flávia Aguirre. Circunferência. **geogebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/pqq7hdva. Acesso em: 15 maio 2025.

Figuras 67 e 68 – VITAL, Thiago. Equação da Hipérbole. **geogebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/yx6zudwh. Acesso em: 15 maio 2025.

Figura 69 – TDIC, Matemá. Equação da parábola. **geogebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/whptaxce. Acesso em: 15 maio 2025.

Figura 70 – CARPANESE, Igor. Parabola. **geogebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/uU4zPpxM. Acesso em: 15 maio 2025.

Figura 71 – imagem criada pelo autor deste trabalho, Raphael Carlini Zambon.

Figura 72 – imagens criadas pelo orientador deste trabalho, professor Dr. Tomas Edson Barros.

Sumário

1 Introdução

Como saber o gosto sem nunca ter experimentado? Como guardar na memória um momento que não foi vivenciado? É impossível abstrair determinadas experiências, sem antes tê-las sentido das mais variadas formas sensoriais possíveis.

Do mesmo modo, o aluno que não concretiza determinados conceitos, com certeza, tem muito mais dificuldades de imaginar e interpretar determinadas situações, aplicações ou problematizações da realidade, principalmente no que tange a Matemática, e ainda mais, no caso da Geometria Analítica, que é o tema do presente trabalho.

O próprio Descartes, pai da Geometria Analítica, corrobora: "Muitas vezes as coisas que me pareceram verdadeiras, quando comecei a concebê-las, tornaram-se falsas". (Descartes, 1637)

Ninguém pode negar que a Geometria Analítica (G.A. para os íntimos) é um dos principais momentos ao longo da história da Matemática, permitindo um avanço significativo da disciplina e de toda ciência que ela pode envolver. Que momento mágico, diria Galvão Bueno.

Esse é o ramo da Matemática, que estuda a Geometria por meio de processos algébricos, ou seja, duas partes da Matemática que pareciam como água e óleo, a partir do surgimento da Geometria Analítica, estão juntas, e de forma tão intrínseca, que o seu desenvolvimento conseguiu trazer novas perspectivas e transformar matemáticas que pareciam consolidadas. Essa nova forma de entender a geometria, foi além do ponto de vista euclidiano e, após certo avanço, os estudos analíticos trouxeram à tona várias outras geometrias impensadas até então.

Um exemplo é a Geometria Hiperbólica de Lobachevsky onde, dada uma reta e um ponto fora dela, existem infinitas retas paralelas à reta dada, que passam por este ponto. Em outro exemplo, a Geometria Elíptica, as retas paralelas nem existem. Idéias difíceis de assimilar do ponto de vista euclidiano, em outras geometrias são realidades.

E o que falar sobre como o avanço da G.A. nos permitiu entender e saber que existem outras dimensões além da largura, altura e profundidade?

Pois é, teorias modernas (como a teoria das supercordas) sugerem a existência de dez ou onze dimensões, todas registradas e estudadas inicialmente do ponto de vista analítico.

Ao saber que a G.A. possibilitou, possibilita e continuará possibilitando avanços como esses, é fácil perceber como este tema é interessante, além de ser um dos conteúdos obrigatórios para os alunos de ensino médio em todo o território nacional e uma das principais disciplinas em qualquer curso superior que envolva, de forma razoável, a Matemática. Sendo assim, estes são importantes fatores na escolha deste ramo da Matemática como referência para este trabalho.

Já, entre tantas possibilidades interessantes que a Geometria Analítica permite conhecer, escolher as cônicas como exemplo dentro da G.A., se dá pela sua complexidade e principalmente pelo pouco uso desta, por parte da maioria dos professores do ensino médio, que normalmente encerram o estudo da G.A. com as circunferências e, no máximo, a posição relativa entre elas. Desse modo, o trabalho que se apresenta, pode ser futura referência para aqueles que pretendem se arriscar com o ensino das cônicas.

Esclarecidos esses pontos, primeiramente, será destacada a história da Geometria Analítica e a teoria a ser desenvolvida em sala de aula. Seguinte a isso falaremos sobre a aplicação do projeto, que começa através de uma atividade prática, onde as cônicas serão "descobertas" e visualizadas. Também falaremos sobre as aulas teóricas, destacando os principais conteúdos, aplicações e problematizações para as cônicas e, para confirmar, que todas as cônicas foram expostas e todos os seus detalhes foram escancarados, mostraremos como utilizamos recursos computacionais para destacar os 4 casos principais das cônicas, além dos casos degenerados.

Para a conclusão deste trabalho, foi aplicada uma avaliação com questões divididas entre questões de múltipla escolha e questões dissertativas, que foram analisadas para verificar ou não a eficiência das atividades propostas para a melhor compreensão do tema e, consequentemente, como a concretização de determinados conteúdos pode influenciar na sua abstração.

Então, após analisar os dados referentes a avaliação e comparar o que os alunos sabiam sobre o tema antes e depois do projeto, concluímos este trabalho analisando as evidências permitidas em ser encontradas através dele.

2 Aspectos Históricos das Cônicas

2.1 A origem das cônicas na Grécia Antiga

A origem das seções cônicas remonta à Grécia Antiga, período em que a Matemática se desenvolvia fortemente associada à geometria e à filosofia. As cônicas — circunferência, elipse, parábola e hipérbole — surgiram a partir da interseção de um plano com um cone circular reto, sendo inicialmente investigadas não por sua utilidade prática, mas como objetos de estudo puramente geométricos.

O primeiro matemático conhecido por estudar essas curvas foi Menaechmus, por volta do século IV a.C. Discípulo de Platão e contemporâneo de Euclides, Menaechmus teria descoberto as cônicas ao tentar resolver o famoso problema da duplicação do cubo, ou problema délico. Esse desafio consistia em encontrar a aresta de um cubo que tivesse o dobro do volume de outro, o que levou Menaechmus a considerar a interseção de parábolas e hipérboles para chegar a soluções geométricas que hoje reconhecemos como envolvidas na resolução de equações cúbicas (Heath, 1981).

Com o tempo, outros matemáticos gregos passaram a estudar essas curvas. Embora Euclides tenha mencionado algumas propriedades das cônicas em seus escritos, foi Apolônio de Perga, no século III a.C., quem deu à teoria das cônicas uma forma sistematizada, nomeando-as como conhecemos hoje e explorando suas propriedades com grande profundidade. No entanto, os fundamentos lançados por Menaechmus serviram como base para toda essa construção posterior.

As cônicas, nesse contexto, não eram tratadas com coordenadas algébricas, como hoje, mas sim como figuras geométricas. Essa abordagem refletia a concepção grega de Matemática como uma ciência das formas perfeitas e eternas, desenvolvida a partir de axiomas e deduções lógicas (Boyer; Merzbach, 2012).

A importância desses estudos iniciais é notável, pois, apesar de serem motivados por problemas filosófico-matemáticos, as cônicas viriam a desempenhar papéis centrais em diversas áreas do conhecimento, como a astronomia de Kepler, a física de Newton e a geometria analítica de Descartes.

2.2 Menaechmus e a descoberta das seções cônicas

Menaechmus foi um matemático grego do século IV a.C., conhecido por sua ligação com a Academia de Platão e por ser discípulo de Eudoxo de Cnido. Embora muito pouco se saiba sobre sua vida pessoal, suas contribuições para a geometria foram fundamentais, especialmente no que se refere à descoberta das seções cônicas.

A motivação principal de Menaechmus para estudar essas curvas geométricas teria sido a tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo, também conhecido como problema délico. Esse desafio consistia em encontrar a aresta de um cubo que tivesse o dobro do volume de outro, ou seja, resolver geometricamente a equação $x^3 = 2a^3$, o que equivale a encontrar a raiz cúbica de dois. Menaechmus percebeu que a solução poderia ser obtida através da interseção entre uma parábola e uma hipérbole (Heath, 1981; Boyer; Merzbach, 2012).

Para isso, ele estudou os diferentes cortes que um plano podia fazer sobre um cone circular reto, o que deu origem a três curvas distintas: a elipse, a parábola e a hipérbole. Embora os nomes ainda não estivessem formalizados na época, sua descrição geométrica já estava bem desenvolvida. Os registros históricos indicam que Menaechmus foi o primeiro a tratar essas curvas como seções planas de um cone, uma abordagem revolucionária para seu tempo.

A importância de seu trabalho não se limitou apenas à resolução do problema do duplo cubo, mas também abriu caminho para uma nova forma de pensar a geometria, antecipando, de forma rudimentar, conceitos que seriam posteriormente aprofundados por Apolônio de Perga. Apesar de suas obras não terem sobrevivido, muitos dos seus resultados foram preservados por comentadores posteriores, como Proclo e Pappus de Alexandria.

Segundo Boyer e Merzbach (2012), a obra de Menaechmus exemplifica o modo como os gregos uniam investigação filosófica e rigor matemático. Sua aplicação da geometria pura a problemas práticos e abstratos demonstra uma sofisticação que influenciaria toda a tradição matemática ocidental.

2.3 Apolônio de Perga e a sistematização das cônicas

Apolônio de Perga, ativo entre os séculos III e II a.C., foi um dos mais notáveis matemáticos da Grécia helenística, reconhecido especialmente por sua obra *Cônicas*, na qual sistematizou o estudo das seções cônicas iniciadas por Menaechmus. Nascido em Perga, uma cidade da Ásia Menor, Apolônio foi aluno da escola de Alexandria, possivelmente discípulo de seguidores de Euclides, e desenvolveu sua carreira em meio ao florescimento intelectual promovido pelos sucessores de Alexandre, o Grande.

Sua principal contribuição foi justamente a formalização do estudo das cônicas em uma obra dividida originalmente em oito livros — dos quais quatro chegaram completos até os dias atuais, enquanto os demais foram parcialmente preservados por traduções árabes. Nessa obra, Apolônio introduz os nomes *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, estabelecendo uma terminologia definitiva que ainda é usada na matemática contemporânea (Heath, 1896; Boyer; Merzbach, 2012).

Diferentemente de Menaechmus, que abordava as cônicas como interseções geométricas do cone por planos, Apolônio tratou as curvas por meio de métodos geométricos, mas sem recorrer ao cone tridimensional. Seu estudo partia de definições mais abstratas e rigorosas, estabelecendo propriedades fundamentais como excentricidade, diretrizes, focos e relações métricas entre elementos das curvas. De acordo com Heath (1896), os livros III e IV da obra *Cônicas* já apresentam uma investigação detalhada das propriedades dessas curvas, evidenciando um grau de sofisticação matemática surpreendente para a época.

Além de sua contribuição técnica, Apolônio também foi um elo entre a matemática clássica e os desenvolvimentos posteriores da geometria analítica. Seus métodos, ainda que geométricos, anteciparam de forma notável conceitos que seriam formalizados mais de 1800 anos depois por matemáticos como Descartes e Fermat.

Pappus de Alexandria, em seus comentários, reconheceu a profundidade da obra de Apolônio, chamando-o de o “Grande Geômetra” (Toomer, 1990). A influência de sua obra se estende não apenas à matemática pura, mas também à astronomia, especialmente na modelagem dos movimentos planetários, como foi feito por Kepler no século XVII, ao utilizar a elipse para descrever a órbita dos planetas.

Apolônio consolidou, assim, o estudo das cônicas como um campo independente dentro da matemática, transformando observações geométricas iniciais em uma teoria unificada e duradoura.

2.4 Euclides, Arquimedes e Pappus: contribuições complementares

Embora o estudo sistemático das cônicas seja atribuído majoritariamente a Menaechmus e, posteriormente, a Apolônio de Perga, outros matemáticos gregos desempenharam papéis importantes no desenvolvimento e na consolidação do conhecimento sobre essas curvas. Entre eles destacam-se Euclides, Arquimedes e Pappus de Alexandria.

Euclides, ativo por volta de 300 a.C., é amplamente conhecido por sua obra *Os Elementos*, que serviu de base para o ensino da geometria por mais de dois milênios. Embora sua obra não trate diretamente das cônicas com a profundidade de Apolônio, acredita-se que ele tenha escrito um tratado hoje perdido intitulado *Seções de Cônicas*, mencionado por Pappus de Alexandria (Toomer, 1990). Tal tratado provavelmente estabelecia fundamentos geométricos importantes para o desenvolvimento posterior do tema. Além disso, a lógica axiomática empregada por Euclides influenciou profundamente a abordagem rigorosa adotada por Apolônio em sua obra.

Arquimedes, contemporâneo e talvez até conhecido de Apolônio, também investigou aspectos das cônicas, embora seu foco estivesse frequentemente voltado a aplicações práticas e mecânicas. Em sua obra *Sobre os Espelhos e os Cônicos*, Arquimedes estudou a reflexão da luz sobre superfícies curvas e demonstrou que um feixe de luz paralelo incidente sobre uma parábola é refletido para seu foco — uma propriedade que seria fundamental séculos mais tarde na construção de antenas parabólicas e telescópios astronômicos (Dijksterhuis, 1987). Ele também utilizou propriedades da parábola para calcular áreas sob curvas, antecipando métodos integrais utilizados posteriormente por Newton e Leibniz.

Pappus de Alexandria, por sua vez, viveu por volta do século IV d.C. e é frequentemente considerado o último grande geômetra da Antiguidade. Sua principal obra conhecida, *Coleções Matemáticas*, consiste em um compêndio de resultados e comentários sobre trabalhos matemáticos anteriores, incluindo os de Euclides, Apolônio e Arquimedes. É graças a Pappus que muitos conhecimentos antigos foram preservados, sobretudo as ideias sobre as cônicas que ele registrou em seus comentários sobre os oito livros de Apolônio (Heath, 1896; Boyer; Merzbach, 2012).

Pappus também introduziu o chamado *Teorema de Pappus*, relacionado a centros de gravidade e rotação de figuras planas, que, embora não trate diretamente das cônicas, demonstra seu domínio da geometria avançada e da aplicação de conceitos geométricos a problemas físicos, algo alinhado ao espírito investigativo dos autores anteriores.

Assim, embora nem sempre associados diretamente às cônicas como Apolônio o é, Euclides, Arquimedes e Pappus desempenharam papéis fundamentais na construção da base teórica e na transmissão do conhecimento que possibilitaram o avanço da geometria e, com ela, o estudo aprofundado das curvas cônicas.

2.5 René Descartes e a geometria analítica

René Descartes (1596–1650) foi um filósofo, matemático e cientista francês cuja obra marcou uma ruptura entre a matemática clássica da Antiguidade e a moderna matemática algébrica e analítica. Seu principal feito nesse campo foi a criação da geometria analítica, também chamada de geometria cartesiana, que estabeleceu uma ponte entre a álgebra e a geometria — permitindo representar curvas geométricas por equações e vice-versa.

A obra fundamental de Descartes nesse contexto foi *La Géométrie*, publicada em 1637 como um apêndice ao seu livro filosófico *Discurso do Método*. Nela, ele introduz o sistema de coordenadas cartesianas e propõe a ideia de que qualquer curva pode ser representada por uma equação em um plano com dois eixos perpendiculares. Esse princípio revolucionário permitiu, pela primeira vez, estudar figuras geométricas de forma algébrica e resolver problemas geométricos por meio de equações (Descartes, 2009).

No que se refere às cônicas, Descartes não apenas retomou os estudos dos gregos antigos como também deu a elas uma nova abordagem. A partir da análise das equações do segundo grau com duas variáveis, ele demonstrou que elipses, parábolas e hipérboles podiam ser descritas por equações quadráticas no plano cartesiano. Dessa forma, Descartes estabeleceu uma classificação algébrica das cônicas, deslocando o enfoque do corte de cones para a análise das equações associadas às curvas (Boyer; Merzbach, 2012).

Sua abordagem influenciou diretamente o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal por

Newton e Leibniz no final do século XVII, além de ter sido decisiva para o avanço da Física e da Engenharia moderna. Além disso, o método cartesiano consolidou o uso do plano como ferramenta analítica, contribuindo para que as cônicas passassem a ser tratadas dentro de um sistema coordenado, tornando-as mais acessíveis ao estudo e aplicação.

Embora Descartes tenha sido contemporâneo de outros matemáticos importantes, como Pierre de Fermat — que também contribuiu para a geometria analítica e o estudo de curvas —, seu método se destaca pela sistematização e pela base filosófica racionalista, que visava a clareza e a evidência lógica como fundamentos do conhecimento científico.

Como observa Boyer (2012), "a geometria de Descartes constituiu a verdadeira porta de entrada para a matemática moderna", abrindo caminho para a álgebra linear, a topologia, e, especialmente, para o estudo avançado das curvas planas, entre elas as cônicas, agora plenamente inseridas em um contexto analítico.

2.6 Germinal Pierre Dandelin e as esferas de Dandelin

Germinal Pierre Dandelin (1794–1847) foi um matemático, engenheiro e oficial militar belga-francês, conhecido por sua contribuição à geometria por meio do desenvolvimento das chamadas *esferas de Dandelin*, uma construção geométrica que fornece uma elegante justificativa para as propriedades focais das seções cônicas. Embora não tenha sido o primeiro a estudar essas curvas, Dandelin trouxe uma nova perspectiva para sua compreensão ao início do século XIX, conectando propriedades espaciais dos cones com características planas das cônicas.

As *esferas de Dandelin* são esferas inscritas em um cone, tangentes tanto ao cone quanto ao plano que o intersecta. Quando um plano corta um cone circular reto formando uma seção cônica (elipse, parábola ou hipérbole), Dandelin demonstrou que os pontos de tangência da esfera com o plano são precisamente os focos da cônica resultante. Esse resultado fornece uma prova geométrica elegante e rigorosa do fato de que a soma (ou diferença, no caso da hipérbole) das distâncias de qualquer ponto da cônica aos focos é constante — uma das propriedades fundamentais dessas curvas (Coolidge, 1968).

Antes da abordagem de Dandelin, as propriedades focais das cônicas, já eram conhecidas desde os estudos de Apolônio, mas sua demonstração partia de métodos puramente planos ou elementares. A introdução das esferas, porém, permitiu uma demonstração tridimensional mais intuitiva e geral, valorizando tanto a interpretação espacial das cônicas quanto seu tratamento analítico.

A importância do trabalho de Dandelin está não apenas em sua aplicação direta à teoria das cônicas, mas também em seu papel na transição da geometria clássica para uma abordagem mais moderna e visual. Segundo Boyer e Merzbach (2012), "as esferas de Dandelin representam uma das mais belas conexões entre geometria sólida e plana, com aplicações que transcendem a teoria pura e alcançam a óptica, a mecânica celeste e a engenharia".

Além disso, a construção de Dandelin influenciou o ensino da matemática, pois fornece uma interpretação didática acessível das propriedades das cônicas, frequentemente utilizada em livros e cursos introdutórios de geometria analítica e descritiva.

Apesar de ter produzido outras contribuições em áreas como álgebra e física, Germinal Pierre Dandelin é lembrado sobretudo por essa construção, que leva seu nome e perpetua sua importância no estudo das curvas cônicas até os dias atuais.

2.7 Importância das cônicas ao longo da história da matemática

As seções cônicas — circunferência, elipse, parábola e hipérbole — constituem um dos mais antigos e duradouros campos de estudo da Matemática, com impacto que atravessa milênios e se projeta em diferentes áreas do conhecimento humano. Desde os primeiros registros da Antiguidade até os avanços científicos modernos, as cônicas desempenharam um papel fundamental tanto no desenvolvimento teórico da Matemática quanto em suas aplicações práticas.

A trajetória histórica dessas curvas começa com Menaechmus, que as explorou na tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo. Posteriormente, Apolônio de Perga consolidou a teoria das cônicas, atribuindo-lhes os nomes ainda hoje utilizados e estabelecendo suas principais propriedades geométricas. A partir da Idade Moderna, com René Descartes e o surgimento da geometria analítica, as cônicas deixaram de ser tratadas exclusivamente como seções de um cone tridimensional para serem descritas por equações em um sistema de coordenadas bidimensional, o que abriu caminho para análises mais profundas e generalizações algébricas (Descartes, 2009; Boyer; Merzbach, 2012).

A importância dessas curvas, no entanto, não se restringe à matemática pura. Na física, a parábola descreve o movimento de projéteis em condições ideais, enquanto as órbitas planetárias descritas por Kepler no século XVII são elipses, base fundamental das leis do movimento planetário. Já a hipérbole aparece no estudo de fenômenos como a propagação de ondas eletromagnéticas e órbitas de cometas. A circunferência, por sua vez, está presente em inúmeros contextos práticos e teóricos, desde engrenagens até definições fundamentais de distância e simetria.

Além da física e da astronomia, as cônicas também são relevantes na engenharia, na arquitetura e na óptica. Um exemplo clássico é o espelho parabólico, utilizado em faróis, antenas e telescópios, cuja propriedade de refletir os raios paralelos para um único foco foi formalmente demonstrada por Arquimedes (Dijksterhuis, 1987). Outro exemplo são as lentes elípticas utilizadas para concentrar ou dissipar luz, baseadas nas propriedades reflexivas da elipse.

Germinal Pierre Dandelin, ao introduzir sua construção com esferas, contribuiu para uma melhor compreensão da geometria espacial das cônicas, revelando relações harmônicas entre as seções planas e os elementos tridimensionais do cone. Tal abordagem não apenas enriqueceu o estudo teórico, mas também trouxe aplicações didáticas relevantes até os dias atuais (Coolidge, 1968).

Portanto, as cônicas não apenas ilustram o poder da abstração matemática, como também revelam a capacidade da Matemática de modelar, explicar e prever fenômenos naturais e artificiais. Sua trajetória histórica demonstra como o conhecimento matemático se constrói de forma cumulativa, atravessando séculos, culturas e paradigmas científicos, mantendo-se sempre relevante.

3 Introdução à Geometria Analítica e às Cônicas

3.1 Fundamentos da Geometria Analítica

A geometria analítica é um ramo da matemática que une os conceitos da álgebra com os da geometria, permitindo representar figuras geométricas por meio de equações. Sua criação é atribuída a René Descartes, que no século XVII estabeleceu as bases dessa disciplina ao introduzir o sistema de coordenadas cartesianas, possibilitando a tradução de problemas geométricos em expressões algébricas (Descartes, 2009).

Como destacam Barros e Carvalho (2011), a geometria analítica "constitui um campo de articulação entre a álgebra e a geometria, promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e da abstração matemática, além de favorecer a modelagem de situações reais".

3.1.1 O plano cartesiano

O plano cartesiano, também chamado de sistema de coordenadas cartesianas, é a base da geometria analítica. Ele foi idealizado por René Descartes no século XVII, como parte de sua proposta de unificar álgebra e geometria. Esse sistema consiste em um plano dividido por dois eixos perpendiculares entre si: o eixo horizontal, denominado eixo das abscissas (eixo x), e o eixo vertical, denominado eixo das ordenadas (eixo y) (Descartes, 2009).

A interseção entre os dois eixos define a origem do sistema, identificada pelo ponto de coordenadas (0,0) a partir da origem, é possível localizar qualquer ponto no plano por meio de um par ordenado (x,y), no qual o primeiro número representa a posição no eixo horizontal e o segundo, no eixo vertical.

O plano cartesiano é dividido em quatro quadrantes, numerados no sentido anti-horário a partir do quadrante superior direito:

1° quadrante: $x > 0$ e $y > 0$
2° quadrante: $x < 0$ e $y > 0$
3° quadrante: $x < 0$ e $y < 0$
4° quadrante: $x > 0$ e $y < 0$

Essa estrutura permite representar graficamente pontos, retas, funções e curvas. O plano cartesiano tornou-se uma ferramenta essencial não apenas na matemática pura, mas também em áreas aplicadas como a física, a engenharia e a economia, ao permitir a visualização e análise de fenômenos a partir de representações geométricas.

Como explicam Lima e Carvalho (2003), o plano cartesiano "constitui uma das mais poderosas criações da matemática, pois fornece um ambiente visual e operacional para o estudo das relações numéricas e algébricas".

Além disso, a adoção do plano cartesiano como base para o estudo das cônicas permite compreender essas curvas não apenas como objetos geométricos, mas também como expressões algébricas. Essa abordagem será aprofundada nas seções seguintes deste capítulo.

3.1.2 Coordenadas de um ponto

No contexto da geometria analítica, cada ponto do plano cartesiano é identificado por um par ordenado (x,y) chamado de coordenadas do ponto. Esses valores representam, respectivamente, a posição do ponto em relação ao eixo das abscissas (horizontal) e ao eixo das ordenadas (vertical).

A interpretação geométrica dessas coordenadas é direta: o valor de x indica a distância do ponto em relação ao eixo y, positiva se estiver à direita da origem e negativa se estiver à esquerda. O valor de y, por sua vez, mede a distância do ponto em relação ao eixo x sendo positiva quando acima da origem e negativa quando abaixo.

Por exemplo, o ponto P(3,2) localiza-se três unidades à direita do eixo vertical e duas unidades acima do eixo horizontal. Já o ponto Q(-4,-1) encontra-se quatro unidades à esquerda do eixo y e uma unidade abaixo do eixo x.

Essas coordenadas permitem não apenas localizar geometricamente os pontos no plano, mas também realizar operações matemáticas fundamentais, como o cálculo da distância entre dois pontos, do ponto médio de um segmento ou da inclinação de uma reta.

Segundo Carvalho e Barros (2011), "[...]as coordenadas cartesianas tornam possível a tradução de situações geométricas em linguagem algébrica, facilitando tanto a resolução quanto a generalização de problemas".

O conceito de coordenadas também é base para o estudo das funções matemáticas, pois cada função pode ser interpretada como uma associação entre pares ordenados. Essa abordagem será particularmente relevante quando tratarmos das curvas cônicas, cujas propriedades geométricas derivam diretamente das equações algébricas construídas a partir de coordenadas.

3.1.3 Distância entre dois pontos

Na geometria analítica, o cálculo da distância entre dois pontos no plano cartesiano é uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras. Dados dois pontos quaisquer A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2) a distância d entre eles é definida pela seguinte fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Quando x_1 é diferente de x_2 e y_1 é diferente de y_2 a fórmula apresentada resulta da construção de um triângulo retângulo cujos catetos são as diferenças das abscissas e das ordenadas entre os dois pontos. O segmento AB, portanto, corresponde à hipotenusa, e sua medida é obtida pela aplicação do Teorema de Pitágoras no plano cartesiano.

Por exemplo, se os pontos A e B tiverem coordenadas A(1,2) e B(4,6) então a distância entre eles será:

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2}$$

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

Essa medida é essencial em diversas situações matemáticas e aplicações práticas, como na determinação do comprimento de segmentos de reta, na verificação de alinhamento de pontos, em cálculos de áreas e na própria análise das curvas planas, como as cônicas. Além disso, a noção de distância no plano cartesiano é a base para o conceito de métrica euclidiana, que define a geometria do espaço plano em duas dimensões.

De acordo com Lima e Carvalho (2003), "a definição da distância entre pontos no plano permite tratar problemas geométricos sob uma perspectiva algébrica, viabilizando análises precisas e generalizações que não seriam possíveis apenas com ferramentas da geometria clássica".

Essa métrica será usada nas seções seguintes para a dedução das equações das cônicas, especialmente na caracterização da elipse, da hipérbole e da parábola, que envolvem relações de distância entre pontos e focos.

3.1.4 Ponto médio de um segmento

O ponto médio de um segmento de reta é o ponto que o divide em duas partes congruentes, ou seja, de igual comprimento. Na geometria analítica, esse ponto pode ser determinado algebricamente a partir das coordenadas de suas extremidades.

Sejam A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2) dois pontos no plano cartesiano, as coordenadas do ponto médio M do segmento AB são dadas pela fórmula:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Essa fórmula resulta da média aritmética das abscissas e das ordenadas dos pontos extremos do segmento. O ponto médio é, portanto, o centro do segmento, e sua determinação é útil em diversas aplicações, como a construção de mediatrizes, a localização de centros de figuras geométricas e a simetria de pontos em relação ao eixo cartesiano.

Por exemplo, dados os pontos A(2,3) e B(6,7) o ponto médio M será:

$$M = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{8}{2}, \frac{10}{2}\right)$$

$$M = (4,5)$$

O ponto médio também é empregado no estudo de curvas como as cônicas. No caso da circunferência, por exemplo, o centro é o ponto médio de um diâmetro. De forma semelhante, em elipses e hipérboles com eixos principais paralelos aos eixos cartesianos, o centro da curva pode ser determinado a partir do ponto médio entre seus vértices.

Segundo Barros e Carvalho (2011), "o ponto médio é uma das ferramentas elementares da geometria analítica, pois permite localizar posições centrais com precisão, além de contribuir para o estudo de simetrias e transformações geométricas".

Esse conceito será fundamental nas próximas seções deste capítulo, quando trataremos das equações reduzidas das cônicas e de seus deslocamentos no plano por meio de translações de eixo.

3.1.5 Equação da reta: formas geral e reduzida

Na geometria analítica, a reta é uma das figuras fundamentais e pode ser representada por meio de equações que descrevem sua inclinação, posição no plano e relação com os eixos cartesianos. A equação da reta é uma expressão algébrica que relaciona as coordenadas dos pontos que pertencem a essa reta. As formas mais utilizadas para expressar a equação de uma reta são a forma geral e a forma reduzida.

A forma geral da equação da reta é dada por:

$$Ax + By + C = 0$$

Nessa expressão, A, B e C são constantes reais, com pelo menos um dos coeficientes A ou B diferente de zero. Essa forma é bastante utilizada por sua generalidade e por permitir representar retas verticais e horizontais, além de facilitar certos cálculos algébricos, como a verificação de alinhamento de pontos.

Já a forma reduzida, também chamada de forma explícita ou função afim, é derivada da forma geral e assume a seguinte estrutura:

$$y = mx + n$$

onde:

· **m** é o coeficiente angular da reta, que representa a inclinação (ou declividade) da reta em relação ao eixo x, é igual a tangente do ângulo que a reta faz com a horizontal;

· **n** é o coeficiente linear, que indica o ponto onde a reta intercepta o eixo y, ou seja, o valor de y quando x=0.

O coeficiente angular m pode ser calculado a partir de dois pontos distintos A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2) pertencentes à reta, utilizando a fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

que remete ao fato de que a tangente de um ângulo no triângulo retângulo é a divisão do cateto oposto $y_2 - y_1$ pelo cateto adjacente $x_2 - x_1$. Essa razão representa a variação da ordenada pela variação da abscissa entre dois pontos da reta.

· se m > 0, a reta é crescente

· se m < 0, a reta é decrescente

· se m = 0, a reta é constante

· se a reta é vertical, a divisão por zero impossibilita a definição de m.

A equação da reta é essencial no estudo de diversas curvas, pois muitas delas, como a parábola e a hipérbole, envolvem retas tangentes, diretrizes ou assíntotas. Segundo Carvalho e Barros (2011), "a representação algébrica da reta é a base do raciocínio geométrico-analítico, pois permite o estudo de posições relativas entre figuras e a resolução de sistemas que modelam situações geométricas".

Na abordagem moderna da geometria analítica, as equações de retas também são fundamentais para determinar interseções com outras curvas, como as cônicas, permitindo resolver sistemas de equações que representam essas intersecções no plano.

3.2 A Circunferência

A circunferência é uma das mais elementares e conhecidas curvas planas. Geometricamente, ela é definida como o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto fixo, chamado centro. Essa distância constante é denominada raio da circunferência.

No plano cartesiano, se o centro da circunferência for o ponto C(a,b) e o raio for r > 0 a equação reduzida da circunferência é dada por:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Essa equação representa todos os pontos (x,y) cuja distância ao centro (a,b) é exatamente igual a r. Quando o centro está na origem do plano, ou seja, no ponto

(0,0) a equação assume uma forma ainda mais simples:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Essa é a chamada equação canônica da circunferência, e corresponde ao caso particular em que a figura está centralizada na origem, o que facilita sua análise geométrica.

Além da forma reduzida, também se pode representar a circunferência por meio da equação geral, que é obtida a partir da expansão da forma reduzida. Essa equação tem a seguinte estrutura:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Nessa expressão, os coeficientes D, E e F estão relacionados com o centro e o raio da circunferência, podendo ser identificados por meio de completamento de quadrados ou comparação com a forma reduzida.

A circunferência é a única das cônicas cujos eixos de simetria sempre podem estar paralelos com o eixo horizontal e o vertical e cujos focos se concentram no próprio centro. Ela também possui simetria radial, sendo amplamente empregada em situações que exigem equilíbrio geométrico, como no estudo de engrenagens, ondas circulares e movimentos circulares uniformes.

Segundo Carvalho e Barros (2011), "a circunferência ocupa papel de destaque na geometria analítica não apenas por sua simplicidade, mas por sua presença constante em problemas de simetria, rotação e medidas angulares".

Na matemática escolar e universitária, a circunferência também é fundamental como ponto de partida para o estudo das outras cônicas, pois sua equação possui forma semelhante à da elipse — sendo, inclusive, considerada um caso particular da elipse quando os eixos possuem o mesmo comprimento.

3.2.1 Definição geométrica

Geometricamente, a circunferência é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto fixo denominado centro. Essa distância constante é chamada de raio. Assim, para todo ponto P(x,y) pertencente à circunferência, a distância entre P e o centro C(a,b) é igual a r, ou seja:

$$d(P, C) = r$$

A partir dessa definição, aplica-se o conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano para obter a equação da circunferência. Sendo P(x,y) um ponto genérico da curva e C(a,b) o centro, a equação é deduzida pela relação:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, elimina-se a raiz quadrada:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Essa é a equação reduzida da circunferência, que expressa, de forma algébrica, a definição geométrica do conjunto de todos os pontos que estão a uma distância r do ponto fixo (a,b)

Quando o centro coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas, ou seja, quando a=0 a equação se simplifica ainda mais, assumindo a forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Essa definição fundamenta a construção da circunferência tanto na geometria clássica quanto no contexto analítico, sendo essencial para o estudo da simetria circular e das propriedades métricas da figura. Como destacam Lima e Carvalho (2003), a circunferência é uma das expressões mais simples do conceito de lugar geométrico e serve como modelo para a compreensão inicial de curvas algébricas no plano.

3.2.2 Equação reduzida da circunferência

A equação reduzida da circunferência é a forma mais direta e funcional de expressar, em termos algébricos, a definição geométrica dessa curva plana.

Como visto anteriormente, aplicando a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Essa expressão é chamada de equação reduzida justamente por apresentar de forma explícita os parâmetros geométricos fundamentais.

Por exemplo, a equação:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

representa uma circunferência com centro no ponto $(2, -1)$ e o raio $\mathrm{r} = 3$, pois $\mathrm{r}^2 = 9$. A interpretação geométrica dessa equação facilita a construção gráfica da figura, pois permite identificar imediatamente sua posição e tamanho no plano.

No caso especial em que o centro da circunferência está na origem (0,0), a equação reduz-se a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Essa forma canônica é amplamente usada em exercícios iniciais e aplicações básicas, sendo também importante em contextos de simetria e movimento circular.

Como afirmam Carvalho e Barros (2011), a equação reduzida da circunferência "possibilita uma transição suave entre a geometria clássica e a linguagem algébrica, favorecendo a visualização e a modelagem de fenômenos circulares no plano".

Além disso, essa equação é ponto de partida para outras análises, como a dedução da equação geral da circunferência, a verificação da posição relativa entre pontos e a curva, e o estudo de tangentes, secantes e cordas.

3.2.3 Equação geral da circunferência

A equação geral da circunferência é a forma expandida da equação reduzida e expressa a curva em um formato polinomial do segundo grau, permitindo sua análise dentro de sistemas algébricos mais amplos. Essa equação é obtida a partir da expansão da forma reduzida:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Desenvolvendo os produtos notáveis, tem-se:

$$x^2 - ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

Chamando:

D = -2a
E = -2b
F = a^2 + b^2 - r^2

chegamos à equação geral da circunferência:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F$$

Essa forma é útil especialmente quando se deseja verificar se uma equação do segundo grau representa de fato uma circunferência, bem como para a comparação e o estudo de posições relativas entre curvas e pontos, como no caso de sistemas com retas ou outras cônicas.

Por exemplo, considere a equação geral:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$$

Para identificar os elementos da circunferência, pode-se completar os quadrados:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) - 9 = 12$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = 12$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 12 + 9 + 4$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Conclui-se que a circunferência tem centro em $(2, -3)$ e raio r = 5. Esse processo mostra como a equação geral pode ser convertida para a forma reduzida por meio do completamento de quadrados, técnica frequentemente explorada em análises algébricas.

Segundo Lima e Carvalho (2003), "a equação geral permite estudar a circunferência em contextos mais amplos, como interseções com outras curvas e soluções de sistemas, revelando sua utilidade para além da simples representação geométrica".

3.3 A Elipse

A elipse é uma das curvas cônicas obtida a partir da interseção de um plano oblíquo com um cone circular duplo, em uma inclinação menor do que a do gerador do cone, sem que o plano seja paralelo à base. Trata-se de uma curva fechada e simétrica que apresenta grande relevância tanto na matemática pura quanto em diversas áreas aplicadas, como a astronomia, a física e a engenharia.

A elipse é uma curva simétrica em relação a ambos os eixos e ao centro, e possui aplicações notáveis. Uma das mais conhecidas é na astronomia: segundo as leis de Kepler, os planetas descrevem órbitas elípticas ao redor do Sol, que ocupa um dos focos da elipse. Além disso, propriedades acústicas e óticas da elipse são exploradas na construção de auditórios, antenas e lentes.

Uma das propriedades mais importantes e interessantes é a propriedade refletora da elipse. Por exemplo, quando uma onda sonora se origina em um dos focos de uma elipse, a onda sonora será refletida na elipse e volta para o outro foco e, além disso, a reta (s) perpendicular a reta (t) tangente à elipse no ponto (T) que reflete a onda é bissetriz do ângulo formado por um dos focos, o ponto de tangência e o outro foco. Podemos observar melhor através da figura a seguir:

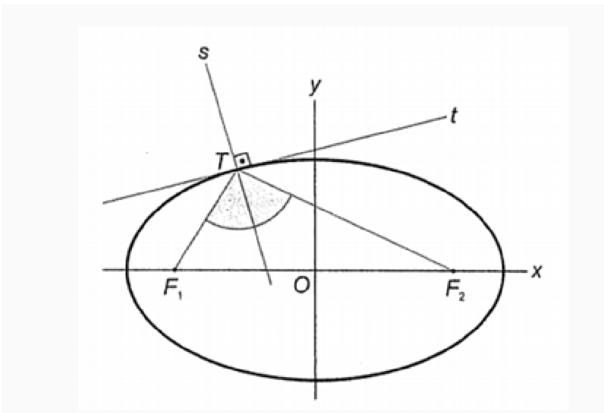


Figura 1 – propriedade refletora da elipse

Como observam Boyer e Merzbach (2012), " a elipse, embora menos intuitiva que a circunferência, revela estruturas de simetria mais sutis e desempenha papel crucial nos modelos físicos do universo desde o século XVII".

A compreensão da elipse no plano cartesiano exige análise de suas equações e elementos, o que será desenvolvido nas seções seguintes, a começar pela definição e equação reduzida da elipse com centro na origem.

3.3.1 Definição geométrica

A elipse é definida geometricamente como o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, é constante. Essa constante é igual ao comprimento do eixo maior da elipse, que liga os dois vértices mais afastados da curva (Stewart, 2018).

Sejam F_1 e F_2 pontos de um plano π e seja a um número real tal que 2a > d(F_1, F_2), podemos definir a elipse com focos F_1 e F_2 e eixo maior medindo 2a, como sendo o conjunto dos pontos P(x,y) do plano π , tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

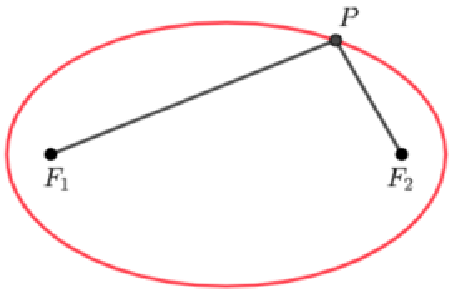


Figura 2 – definição da elipse

Destacamos a seguinte terminologia e notação:

- F_1 e F_2 são focos da elipse;
- O centro da elipse é o ponto médio do segmento F_1F_2;
- O eixo maior da elipse é o segmento de reta que contém os focos F_1 e F_2 e com extremos em dois pontos A_1 e A_2 da elipse;
- O eixo menor da elipse é o segmento de reta perpendicular ao eixo maior, que passa pelo centro da elipse e tem extremos B_1 e B_2 na elipse.
- Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são os vértices da elipse. Com isso, observamos que o eixo maior mede 2a e denotaremos a medida do eixo menor por 2b e a distância entre os focos F_1 e F_2 por 2c.

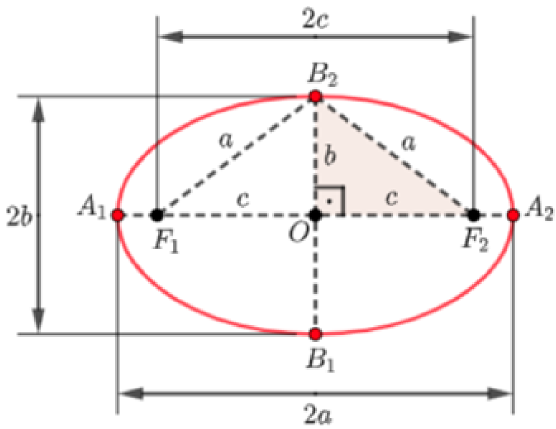


Figura 3 – elementos da elipse

A elipse é sempre uma curva fechada e simétrica em relação ao eixo maior, ao eixo menor e ao seu centro. Quando os focos coincidem, ou seja, quando c=0 a elipse se reduz a uma circunferência, o que revela que esta é um caso particular da elipse.

A relação entre os três parâmetros principais da elipse é dada por:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Essa equação mostra que os focos se afastam do centro da elipse à medida que a diferença entre a e b aumenta. Quanto maior a diferença, mais "achatada" será a elipse. Essa razão é descrita pelo conceito de excentricidade,

$$e = \frac{c}{a}$$

que indica o grau de alongamento da curva.

Além do valor teórico, a definição geométrica da elipse possui inúmeras aplicações práticas. Um exemplo clássico é o das propriedades acústicas da curva: se dois pontos forem colocados nos focos de uma elipse desenhada em uma sala, qualquer som emitido de um dos pontos será refletido e concentrado no outro, devido às propriedades reflexivas da elipse. Essa característica é aproveitada em ambientes como salões elípticos e em dispositivos ópticos (Courant; Robbins, 1996).

A elipse é, portanto, uma curva rica em propriedades simétricas e funcionais, sendo amplamente empregada na modelagem de fenômenos naturais e em aplicações tecnológicas, além de servir como ponte entre a geometria clássica e a representação analítica.

3.3.2 Equação reduzida da elipse com centro na origem

A equação reduzida da elipse é a forma algébrica que expressa, no plano cartesiano, a definição geométrica dessa curva, considerando sua posição em relação aos eixos coordenados. Essa forma é válida quando a elipse está centrada na origem (0,0) e seus eixos estão alinhados com os eixos x e y

Existem duas formas principais da equação reduzida, dependendo da orientação do eixo maior:

1. Quando o eixo maior está sobre o eixo x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Quando o eixo maior está sobre o eixo y:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Nessas equações:

- a representa no semieixo maior, a distância do centro até os vértices no eixo principal;

· b representa no semieixo menor, a distância do centro até os vértices no eixo secundário;

· O ponto (x,y) é qualquer ponto da elipse;

· A equação a relação constante entre as distâncias ao longo da curva.

A elipse possui dois focos localizados ao longo do eixo maior, à distância c do centro, e essa distância é calculada pela relação:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Dessa forma, conhecendo os valores de a e b, pode-se determinar a localização dos focos F_1 e F_2 que influenciam diretamente nas propriedades ópticas e simétricas da curva.

Por exemplo, a equação:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

representa uma elipse com centro na origem, semieixo maior a = 3 no eixo x, e semieixo menor b = 2 no eixo y. Os focos estão sobre o eixo x, à distância

$$c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

da origem.

A equação reduzida é especialmente útil para representar graficamente a elipse e para a análise de seus elementos geométricos, como vértices, eixos e focos. Além disso, é ponto de partida para transformações como translações, que reposicionam a curva sem alterar sua forma.

Como observam Barros e Carvalho (2011), “ a equação reduzida da elipse permite o tratamento sistemático da curva no plano cartesiano, facilitando a análise de simetrias e relações métricas fundamentais”.

Essa forma algébrica será base para a seção seguinte, na qual se abordará a translação da elipse, deslocando seu centro para um ponto genérico (h,k) do plano.

3.3.3 Equação reduzida da elipse

A translação da elipse consiste no deslocamento da curva no plano cartesiano a partir da origem para um novo ponto (h,k) sem alterar seu formato nem a orientação de seus eixos. Ou seja, os eixos da elipse continuam paralelos aos eixos coordenados, mas o centro da curva passa a ser o ponto (h,k) em vez da origem (0,0).

A equação reduzida da elipse, nesse novo contexto, é escrita da seguinte forma:

1. Quando o eixo maior está paralelo ao eixo x:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

2. Quando o eixo maior está paralelo ao eixo y:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Nessas equações:

· (h,k) representa o centro da elipse;

· a é o semieixo maior;

· b é o semieixo menor;

· A curva mantém suas propriedades métricas: focos, excentricidade, vértices e simetrias.

A translação é uma transformação importante no estudo das cônicas, pois facilita a análise da curva independente da sua posição no plano. Além disso, essa modificação não afeta os eixos nem a orientação da elipse, diferentemente da rotação, que aqui não será abordada, conforme definido na proposta deste trabalho.

Um exemplo prático de equação com translação é:

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Essa equação representa uma elipse com centro no ponto $(2, -3)$, semieixo maior a = 4 (paralelo ao eixo x) e semieixo menor b = 3.

A translação é essencial para aplicações geométricas e físicas, pois permite posicionar a elipse conforme as necessidades de um problema real. Como apontam Stewart e Clegg (2018), "o deslocamento do centro da curva não altera sua essência matemática, mas amplia sua utilidade prática em modelagens que exigem liberdade de posicionamento no plano".

Dessa forma, a translação da elipse amplia o alcance da análise geométrica e fornece flexibilidade para representar curvas em contextos diversos, mantendo intactas as propriedades fundamentais da elipse.

3.3.4 Elementos da elipse: focos, vértices e excentricidade

A compreensão completa da elipse envolve o conhecimento de seus principais elementos geométricos: focos, vértices e excentricidade. Esses elementos são fundamentais para caracterizar a forma, a posição e as propriedades ópticas e métricas da curva.

· Centro (C): é o ponto de interseção entre os eixos maior e menor. Na equação reduzida com translação, ele é representado por (h,k). É o ponto equidistante dos focos, vértices e co-vértices.

· Eixo maior e vértices: o eixo maior é o segmento que atravessa a elipse de um vértice ao outro, passando pelo centro, e tem comprimento 2a onde a > b. Os vértices são os pontos extremos do eixo maior e estão localizados a uma distância a do centro. Se a elipse está com eixo maior sobre o eixo x, os vértices são $(h \pm a, k)$ se o eixo maior está sobre o eixo y, os vértices são$(h, k \pm a)$:

· Eixo menor e co-vértices: o eixo menor é perpendicular ao eixo maior, com comprimento 2b. Os co-vértices estão a uma distância b do centro, nos pontos $(h \pm b, k)$ ou $(h, k \pm b)$ dependendo da orientação da elipse.

· Focos (F_1 e F_2): os focos são dois pontos localizados sobre o eixo maior, equidistantes do centro. Estão situados a uma distância c do centro, onde:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Portanto, os focos têm coordenadas:

$(h \pm c, k)$ se o eixo maior for o horizontal,
$(h, k \pm c)$ se o eixo maior for o vertical.

A soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos dois focos é sempre igual a 2a conforme sua definição geométrica.

· Excentricidade (e): a excentricidade da elipse mede o "achatamento" da curva e é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

com $0 < \mathrm{e} < 1$.

Quando e se aproxima de zero, a elipse se torna mais "circular"; quanto mais próximo de 1, mais alongada e achatada ela se torna. A circunferência é um caso particular de elipse em que a = b, portanto c = 0 e 'e' = 0.

Esses elementos são essenciais não apenas para a representação gráfica da elipse, mas também para suas aplicações práticas. Por exemplo, na astronomia, as órbitas elípticas dos planetas têm o Sol em um dos focos, o que confere à elipse um papel fundamental na descrição do movimento celeste conforme as Leis de Kepler (Boyer; Merzbach, 2012).

Como destacam Lima e Carvalho (2003), "o estudo detalhado dos elementos da elipse permite compreender não só suas propriedades geométricas, mas também sua funcionalidade na modelagem de fenômenos naturais".

3.4 A Hipérbole

A hipérbole é uma das seções cônicas obtidas quando um plano corta um cone circular duplo de forma que o ângulo do plano com o eixo do cone é menor do que o ângulo da geratriz. Diferentemente da elipse e da circunferência, a hipérbole é uma curva aberta, composta por duas ramificações simétricas, que se estendem indefinidamente em direções opostas.

A hipérbole possui diversas propriedades interessantes:

· É simétrica em relação aos eixos transversal (que é o eixo que contém os vértices e os focos), e conjugado (que é o eixo que passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao eixo transversal);

· Possui duas assíntotas, que são retas que a curva se aproxima indefinidamente, mas nunca toca;

· As assíntotas delimitam visualmente a abertura da curva e são fundamentais na construção gráfica da hipérbole.

Assim como ocorre com a elipse, a hipérbole pode ser estudada por meio de sua equação reduzida, que será abordada na próxima seção. Essa equação depende da orientação do eixo transversal (horizontal ou vertical) e da posição do centro da curva.

Na física, a hipérbole aparece, por exemplo, na descrição das órbitas de objetos que escapam do campo gravitacional de um corpo celeste, como sondas espaciais ou cometas com trajetórias não elípticas. Também tem aplicações em acústica, óptica e engenharia elétrica — por exemplo, no funcionamento das antenas hiperbólicas e na construção de instrumentos de reflexão sonora.

A propriedade de reflexão da hipérbole afirma que a reta tangente à hipérbole em um ponto P é também bissetriz do ângulo formado por um dos focos, o ponto de tangência e o outro foco. Como consequência, temos que todo raio incidente que passa por um dos focos do espelho hiperbólico é refletido em direção ao outro foco.

Veja:

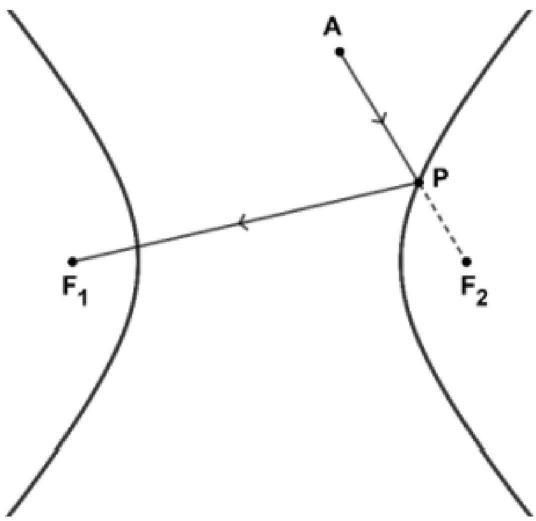


Figura 4 – propriedade refletora da hipérbole

De acordo com Stewart (2018), "a hipérbole, por ser uma curva aberta e simetricamente oposta em seus ramos, expressa relações espaciais em que a diferença de distâncias é a grandeza invariável, o que a torna útil em sistemas onde posições relativas variam, mas suas relações diferenciais permanecem constantes".

Na próxima seção, será apresentada a equação reduzida da hipérbole, que formaliza sua representação no plano cartesiano.

3.4.1 Definição geométrica

A hipérbole é definida geometricamente como o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é constante. Essa constante é positiva e corresponde a 2a, onde 'a' representa a distância entre o centro da hipérbole, que é o ponto médio entre os focos, e cada um de seus vértices, que são os pontos onde o eixo transverso cruza a hipérbole.

Sejam F_1 e F_2 os dois focos da hipérbole e P(x,y) um ponto pertencente à curva. A propriedade fundamental é expressa por:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

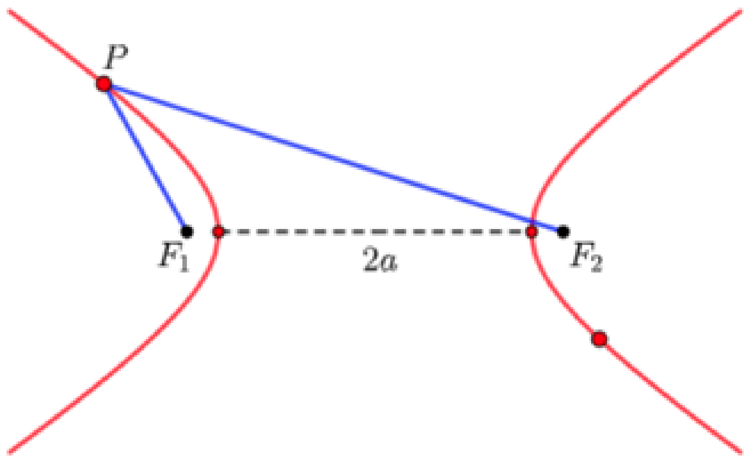


Figura 5 – definição da hipérbole

Diferentemente da elipse, na qual se soma as distâncias aos focos, na hipérbole se considera a diferença absoluta dessas distâncias. Essa característica resulta na forma aberta e dupla da curva, com dois ramos simétricos que se afastam indefinidamente.

O centro da hipérbole, representado pelo ponto (h,k), é o ponto médio entre os focos, e divide a hipérbole em dois ramos opostos. O eixo transversal é o segmento que liga os dois vértices, ao longo do qual se encontram os focos. Já o eixo conjugado é perpendicular ao eixo transversal e determina a largura da abertura da curva.

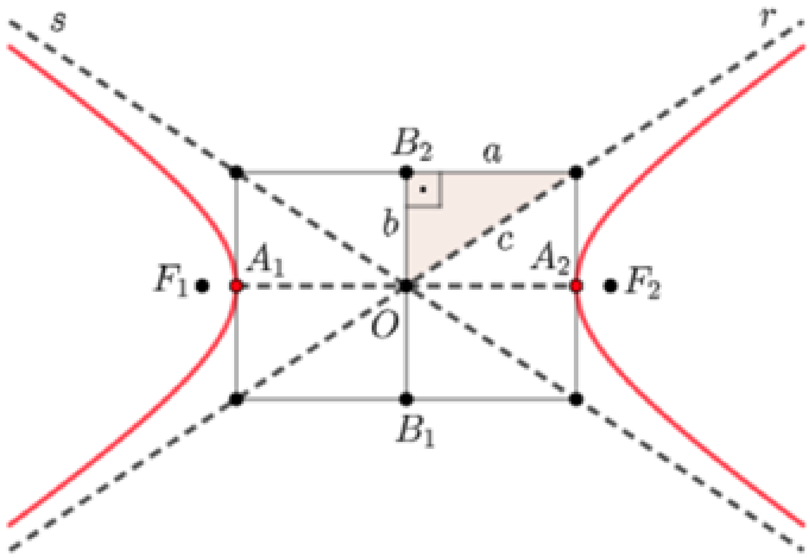


Figura 6 – elementos da hipérbole

A distância entre o centro e os focos é representada por c, e a relação entre os parâmetros a, b e c é dada por:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

onde:

· a é a distância do centro até cada vértice (sobre o eixo transversal),

· b está associado ao eixo conjugado e é fundamental para definir a inclinação das assíntotas,

· c é a distância do centro até cada foco.

As assíntotas da hipérbole são retas que a curva se aproxima indefinidamente, sem nunca as tocar, e são fundamentais para descrever sua abertura. A existência dessas assíntotas é uma das principais diferenças da hipérbole em relação à elipse.

Segundo Boyer e Merzbach (2012), "a definição geométrica da hipérbole expressa uma simetria que não resulta do equilíbrio entre distâncias absolutas, mas da constância de uma diferença, o que a torna particularmente útil para modelar fenômenos que envolvem contraste ou oposição".

A geometria da hipérbole será formalizada, na próxima seção, por meio de sua equação reduzida, que permite sua análise no plano cartesiano a partir da álgebra.

3.4.2 Equação reduzida da hipérbole com centro na origem

A equação reduzida da hipérbole é a forma algébrica que expressa, no plano cartesiano, a definição geométrica dessa curva, considerando sua posição em relação aos eixos coordenados. Essa forma é válida quando a hipérbole está centrada na origem (0,0) e seus eixos estão alinhados com os eixos x e y.

Existem duas formas principais da equação reduzida, dependendo da orientação do eixo maior:

1. Quando o eixo transversal à hipérbole está sobre o eixo x:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Quando o eixo transversal à hipérbole está sobre o eixo y:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Nessas equações:

· a representa no eixo transversal, a distância do centro até os vértices no eixo principal;

· b representa no semieixo conjugado e é fundamental para definir a inclinação das assíntotas, que possuem equações

$$y = \pm\frac{bx}{a}$$

se o eixo focal for o eixo x ou

$$y = \pm\frac{ax}{b}$$

se o eixo focal for o eixo y;

· O ponto (x,y) é qualquer ponto da hipérbole;

· A equação ser igual a 1 representa a relação constante entre as distâncias ao longo da curva.

A hipérbole possui dois focos localizados ao longo do eixo que é transversal a ela, à distância c do centro, e essa distância é calculada pela relação:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dessa forma, conhecendo os valores de a e b, pode-se determinar a localização dos focos F_1 e F_2 que influenciam diretamente nas propriedades ópticas e simétricas da curva.

Por exemplo, a equação:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

representa uma hipérbole com centro na origem, a = 3 no eixo x, b = 2 no eixo y. Os focos estão sobre o eixo x, à distância

$$c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

da origem.

A equação reduzida é especialmente útil para representar graficamente a hipérbole e para a análise de seus elementos geométricos, como vértices, eixos e focos. Além disso, é ponto de partida para transformações como translações, que reposicionam a curva sem alterar sua forma.

Como observam Barros e Carvalho (2011), " a equação reduzida da hipérbole permite o tratamento sistemático da curva no plano cartesiano, facilitando a análise de simetrias e relações métricas fundamentais".

Essa forma algébrica será base para a seção seguinte, na qual se abordará a translação da hipérbole, deslocando seu centro para um ponto genérico (h,k) do plano.

3.4.3 Equação reduzida da hipérbole

A translação da hipérbole consiste no deslocamento da curva no plano cartesiano a partir da origem para um novo ponto (h,k) sem alterar seu formato nem a orientação de seus eixos. Ou seja, os eixos da hipérbole continuam paralelos aos eixos coordenados, mas o centro da curva passa a ser o ponto (h,k) em vez da origem (0,0).

A equação reduzida da hipérbole, nesse novo contexto, é escrita da seguinte forma:

1. Quando o eixo transversal à hipérbole está paralelo ao eixo x:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

com a > b.

2. Quando o eixo transversal à hipérbole está paralelo ao eixo y:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

com a > b.

Nessas equações:

· (h,k) representa o centro da hipérbole;

· a é a distância do vértice sobre o semieixo transversal até o centro;

· b está sobre o semieixo conjugado e está relacionado à inclinação das assíntotas, cujas equações são:

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$$

se o eixo focal for paralelo ao eixo x ou

$$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$$

se o eixo focal for paralelo ao eixo y.

· A curva mantém suas propriedades métricas: focos, assíntotas, vértices e simetrias.

A translação é uma transformação importante no estudo das cônicas, pois permite analisar a curva em qualquer posição no plano. Além disso, essa modificação não afeta os eixos nem a orientação da hipérbole, diferentemente da rotação, que aqui não será abordada, conforme definido na proposta deste trabalho.

Um exemplo prático de equação com translação é:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Essa equação representa uma hipérbole com centro no ponto $(2,-3)$, distância do centro até o vértice a = 4 (paralelo ao eixo x), b = 3 e

$$c = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Já as assíntotas são:

$$y + 3 = \pm\frac{3}{4}(x-2)$$

A translação é essencial para aplicações geométricas e físicas, pois permite posicionar a hipérbole conforme as necessidades de um problema real. Como apontam Stewart e Clegg (2018), "o deslocamento do centro da curva não altera sua essência matemática, mas amplia sua utilidade prática em modelagens que exigem liberdade de posicionamento no plano".

Dessa forma, a translação da hipérbole amplia o alcance da análise geométrica e fornece flexibilidade para representar curvas em contextos diversos, mantendo intactas as propriedades fundamentais da hipérbole.

3.4.4 Elementos da hipérbole: focos, vértices e assíntotas

A compreensão completa da hipérbole envolve o conhecimento de seus principais elementos geométricos: focos, vértices e assíntotas. Esses elementos são fundamentais para caracterizar a forma, a posição e as propriedades ópticas e métricas da curva.

· Centro (C): é o ponto de interseção entre os eixos transversal e conjugado. Na equação reduzida com translação, ele é representado por (h,k). É o ponto equidistante dos focos, vértices e de b.

· Eixo transversal e vértices: o eixo transversal é o segmento que atravessa a hipérbole de um vértice ao outro, passando pelo centro, e tem comprimento 2a. Os vértices são os pontos extremos do eixo transversal e estão localizados a uma distância 'a' do centro. Se a hipérbole está com eixo transversal paralelo ao eixo x, os vértices são $(h \pm a, k)$ e se o eixo transversal está paralelo ao eixo y, os vértices são $(h, k \pm a)$.

· Eixo conjugado é perpendicular ao eixo transversal, com comprimento 2b e extremidades nos pontos $(h \pm b, k)$ ou $(h, k \pm b)$ dependendo da orientação da elipse.

· Focos (F_1 e F_2): os focos são dois pontos localizados sobre o eixo transversal, equidistantes do centro. Estão situados a uma distância c do centro, onde:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Portanto, os focos têm coordenadas:

$(h \pm c, k)$ se o eixo transversal for o horizontal,
$(h, k \pm c)$ se o eixo transversal for o vertical.

O módulo da diferença das distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos dois focos é sempre igual a 2a conforme sua definição geométrica.

Esses elementos são essenciais não apenas para a representação gráfica da hipérbole, mas também para suas aplicações práticas.

3.5 A Parábola

A parábola é uma cônica obtida quando um plano intersecta apenas uma das folhas de um cone circular reto em uma inclinação paralela à de sua geratriz. Ao contrário da circunferência, elipse e hipérbole, a parábola possui apenas um foco e uma diretriz, e é sempre uma curva aberta e simétrica em relação ao seu eixo principal.

A parábola é uma curva de grande importância na matemática e em áreas aplicadas, especialmente na física, na engenharia e na arquitetura. Uma de suas propriedades mais notáveis é a propriedade refletora: qualquer raio paralelo ao eixo de simetria que incide na parábola é refletido em direção ao foco. Por isso, superfícies parabólicas são utilizadas em antenas, refletores e faróis automotivos (Stewart, 2018). Como ressaltam também Courant e Robbins (1996), "a parábola é a única curva plana que reflete todos os raios paralelos ao seu eixo em direção ao foco, conferindo a ela propriedades funcionais únicas".

Veja:

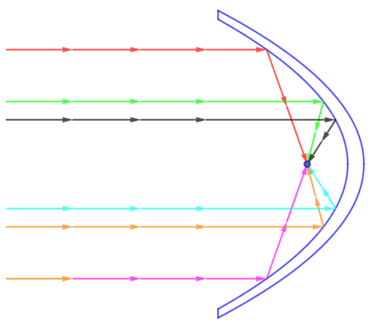


Figura 7 – propriedade refletora da parábola

Além disso, a parábola representa graficamente o movimento de corpos em queda livre com velocidade inicial não vertical, ou seja, o movimento de um projétil em um campo gravitacional uniforme sem resistência do ar — um dos exemplos mais clássicos da cinemática.

Como destacam Barros e Carvalho (2011), "a parábola é uma curva simples em aparência, mas rica em propriedades geométricas e aplicações práticas, o que a torna uma das mais estudadas na transição entre geometria e álgebra".

Na próxima seção, a definição será formalizada por meio de sua equação reduzida e adaptada para casos com translação.

3.5.1 Definição geométrica e equação reduzida

A parábola é definida geometricamente como o lugar geométrico dos pontos do plano que estão equidistantes de um ponto fixo (o foco, F) e de uma reta fixa (a diretriz, d). Em termos formais, dado um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz), a parábola é o conjunto de todos os pontos P(x,y) do plano tais que:

$$dist(P, F) = dist(P, d)$$

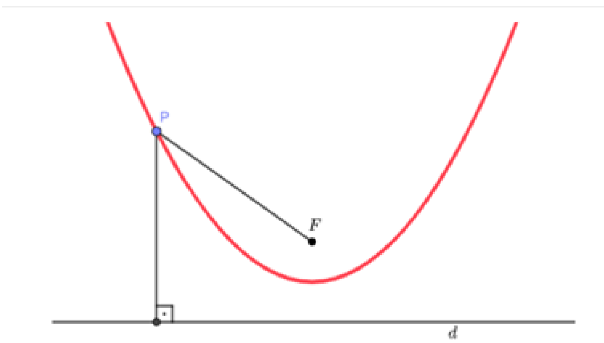


Figura 8 – definição da parábola

Essa definição expressa a simetria fundamental da parábola: qualquer ponto pertencente à curva mantém a mesma distância ao foco e à diretriz, o que permite construir a equação da parábola por meio da igualdade entre duas expressões de distância.

Quando o vértice da parábola está na origem (0,0), o foco está no ponto (0,p) e a diretriz é a reta y $= -p$, a equação da parábola com eixo de simetria vertical é:

$$dist(P, F) = dist(P, d)$$

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 - 2py = 2py$$

$$4py = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

ou, quando o vértice não está na origem, mas em (h,k), a equação da parábola com eixo de simetria vertical é:

$$dist(P, F) = dist(P, d)$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-p)^2} = |y + p - k|$$

$$(x-h)^2 + (y-p-k)^2 = (y+p-k)^2$$

$$(x-h)^2 + y^2 + p^2 + k^2 - 2py - 2ky + 2kp + p^2 = y^2 + p^2 + k^2 + 2yp - 2yk - 2pk$$

$$(x-h)^2 - 2py + 2kp = 2py - 2pk$$

$$4py - 4pk = (x-h)^2$$

$$y - k = \frac{(x-h)^2}{4p}$$

Nesse caso:

- (h,k) é o vértice da parábola,
- p é a distância entre o vértice e o foco (ou entre o vértice e a diretriz),
- O foco está em (h,k+p)
- A diretriz é a reta y = k$-p$.

Se a parábola for orientada horizontalmente, com concavidade voltada para a direita ou esquerda, a equação será:

$$x - h = \frac{(y-k)^2}{4p}$$

Por exemplo, a equação:

$$y + 2 = \frac{(x-1)^2}{8}$$

representa uma parábola com vértice em $(1, -2)$, eixo vertical e portanto com foco em (1,0) e diretriz em y = -4.

Em outro exemplo, a equação:

$$y - 1 = \frac{(x+2)^2}{12}$$

representa uma parábola com vértice em $(-2, 1)$, abertura para cima e distância p = 3. O foco estará no ponto $(-2, 4)$ e a diretriz na reta y = -2.

A definição geométrica, portanto, permite compreender a parábola tanto como um objeto puramente matemático quanto como um modelo aplicado à realidade física.

Segundo Lima e Carvalho (2003), "a equação reduzida da parábola revela sua natureza funcional e sua relação direta com a função quadrática, o que facilita sua aplicação em contextos gráficos, físicos e algébricos".

Essas representações algébricas permitem modelar trajetórias, construir refletores, estudar comportamentos balísticos e explorar a simetria da parábola em diversos contextos, como já foi citado anteriormente.

3.5.2 Sobre a translação da parábola

A translação é uma ferramenta essencial no estudo e na aplicação da parábola, pois permite encaixar a curva em diferentes contextos geométricos e funcionais. Além disso, essa modificação não altera suas propriedades métricas, como simetria, foco, diretriz e distância focal.

Como observam Stewart e Clegg (2018), "a translação das curvas no plano cartesiano não é apenas uma técnica algébrica, mas um recurso geométrico que amplia o poder expressivo das funções e permite a adaptação de modelos às mais variadas situações reais".

Por fim, vale destacar que a translação é frequentemente utilizada na modelagem de trajetórias de projéteis, no posicionamento de antenas parabólicas e na construção de gráficos de funções quadráticas em diferentes sistemas de coordenadas.

3.5.3 Elementos da parábola: foco, vértice e diretriz

Os elementos fundamentais da parábola — foco, vértice e diretriz — são responsáveis por caracterizar suas propriedades geométricas, sua simetria e seu comportamento reflexivo, que a tornam especialmente relevante na matemática e em aplicações físicas e tecnológicas.

· Vértice (V): é o ponto que representa o "ponto de dobra" da parábola. Ele está equidistante do foco e da diretriz e é o ponto de máxima ou mínima da curva, dependendo da orientação (abertura para cima, para baixo, para a direita ou esquerda). Em equações com translação, o vértice tem coordenadas (h,k).

· Foco (F): é o ponto fixo que, junto da diretriz, define a parábola. Ele se encontra a longo do eixo de simetria da parábola, a uma distância p do vértice.

- Para parábolas com eixo vertical: o foco está em (h,k+p) se a parábola abre para cima, ou (h, k$-p$) se abre para baixo.
- Para parábolas com eixo horizontal: o foco está em (h+p,k) se a parábola abre para a direita, ou (h$-p$,k) se para a esquerda.

· Diretriz (d): é a reta fixa que, assim como o foco, define a parábola. Ela é perpendicular ao eixo de simetria da curva e também está a uma distância p do vértice, mas no sentido oposto ao foco.

- Para parábolas com eixo vertical: a diretriz tem equação y = k$-p$ (ou y = k+p dependendo da orientação).

- Para parábolas com eixo horizontal: a diretriz tem equação x = h$-p$ (ou x = h+p).

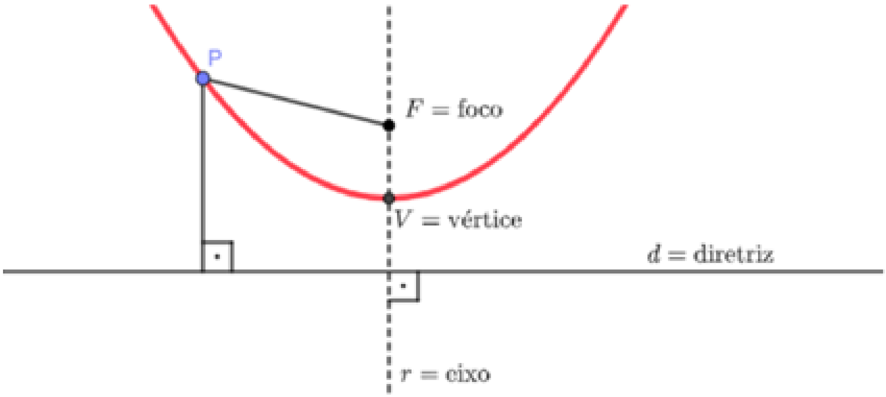


Figura 9 – elementos da parábola

Esses três elementos estão ligados à definição geométrica da parábola, baseada na equidistância entre o ponto da curva e os dois elementos fixos — foco e diretriz.

A parábola também possui um eixo de simetria, que passa pelo foco e pelo vértice, sendo perpendicular à diretriz. Esse eixo determina a orientação da curva e sua simetria bilateral.

Outra característica importante, que destacamos anteriormente é que todo raio que incide paralelamente ao eixo de simetria é refletido em direção ao foco, o que confere à parábola propriedades reflexivas fundamentais, especialmente na construção de refletores parabólicos, antenas e telescópios.

Como ressaltam Courant e Robbins (1996), "a elegância da parábola está no fato de que, com apenas um foco e uma diretriz, ela mantém uma estrutura geométrica estável, cuja simplicidade resulta em aplicações práticas surpreendentemente eficientes".

Esses elementos são fundamentais para a análise, construção gráfica e modelagem da parábola em diversos contextos, especialmente quando aplicados ao estudo da física, óptica e funções quadráticas.

4 Uma forma interessante para estudar cônicas com alunos do ensino médio

Não é de hoje meu incômodo com o fato de que eu, a exemplo dos meus professores e da maioria dos professores do ensino médio, não falava sobre cônicas com meus alunos praticamente nunca, por todos os motivos mais clichês que possamos enumerar.

Por exemplo, como a BNCC não detalha o ensino de cônicas de forma explícita no currículo do Ensino Médio, essa questão torna-se aliada ao pouco tempo que os professores têm para dar cabo daquilo que esta previsto como conteúdo obrigatório.

Outros fatores que culminam no tempo necessário para trabalhar o tema são a dificuldade de abstração e visualização que essa área da Matemática envolve, bem como a própria complexidade que ela trás consigo, ainda mais aqui no Brasil, onde a defasagem no ensino desta disciplina é muito grande e só agrava esta questão.

Não podemos deixar de citar a baixa incidência nos processos seletivos, principalmente vestibulares, que são alvo da maioria dos jovens em idade escolar no nosso país.

Dito isso, nosso trabalho visa solucionar algumas dessas problemáticas através de uma sequência didática interessante, que possa auxiliar àqueles que, como eu, acham importante trazer esse conteúdo à tona.

4.1 Objetivos Almejados

Propomos uma sequência de atividades didáticas na tentativa de atingir os seguintes objetivos:

- Sanar a dificuldade de abstração e visualização.
- Superar a dificuldade matemática e o pré-requisito.
- Organizar a gestão do tempo.

Além destes, também temos como objetivos específicos, apresentar:

- Informações sobre a história do surgimento das cônicas.
- Os conceitos da Geometria Analítica que são abordados no ensino das cônicas.
- Uma metodologia diferenciada para usar nas aulas de Matemática.
- Estatísticas mostrem quanto os alunos evoluíram seu conhecimento sobre o tema.
- Interdisciplinaridade.

Esta sequência didática foi desenvolvida da seguinte forma:

- Questionário de conhecimento.
- Definição e Explicação sucinta da definição de CONE e de SECÇÕES CÔNICAS.
- Modelagem concreta de Cones.
- Um pouco de História.

- Introdução de cones usando o GEOGEBRA.
- Teoria e exercícios.
- De volta ao Geogebra.
- Avaliação Teórica e reaplicação do Questionário de conhecimento.

4.2 Sobre a aplicação da sequência didática

Sou professor do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo - Campus de Araraquara, no interior do estado de São Paulo. E, escolhi para aplicar este projeto, a turma do 4° ano do Curso Técnico em Mecânica Integrado ao Ensino Médio, pois o conteúdo se relaciona de forma direta com a área em que o curso atua. Isso, sem mencionar o enorme carinho que tenho por eles e eles por mim (fui escolhido paraninfo da turma por eles), então eu não queria passar pela vida deles sem "marcá-los"com a ideia de que a matemática pode ser ensinada e aprendida de forma diferente.

Essa turma ingressou em 2022, com 42 alunos. Entretanto, com o passar dos anos, a evasão foi significativa, primeiro pelo fato do curso ser de quatro anos, então, ao fim do terceiro ano, muitos alunos optam pela transferência para outra instituição, visando realizar os concursos vestibulares. Além disso, por conta de uma greve de funcionários e professores ocorrida em 2024, com duração de cem dias, o medo do prejuízo que poderiam sofrer, fez com que muitos alunos optassem por procurar outra escola.

Sendo assim, participaram do nosso projeto, os 24 alunos remanescentes. Onde apenas seis são mulheres e dois alunos possuem necessidades especiais (um com transtorno do espectro autista e outro sem diagnóstico conclusivo). É relevante dizer também que os alunos dessa turma já haviam trabalhado conteúdos importantes que são pré-requisitos para estudar as cônicas:

- no segundo ano do ensino médio estudaram as funções do segundo grau, cujo gráfico é uma parábola com eixo paralelo ao eixo das ordenadas.

- no terceiro ano estudaram em geometria analítica: ponto médio, baricentro do triângulo, distância entre dois pontos, alinhamento de três pontos, áreas do paralelogramo e do triângulo, equação da reta, posição relativa entre as retas no plano cartesiano (especialmente paralelismo e perpendicularismo) e distância entre um ponto e uma reta.

Dito isso, com duração total de 2 meses, com 3 aulas por semana e começando com uma aula de cinquenta minutos, no dia 20 de março de 2025 (todas as aulas citadas neste trabalho têm essa mesma duração), o projeto teve seu ponta pé inicial.

4.3 Questionário de Conhecimento

A primeira medida relacionada a nossa sequência didática foi coletar dados com os alunos sobre o conhecimento que eles já possuíam sobre as cônicas.

Dessa forma, no dia em que iniciamos o projeto o seguinte questionário foi aplicado para que eles respondessem de forma anônima.

QUESTIONÁRIO

1- Você sabe o que são CÔNICAS? Caso saiba, cite exemplos.

2- Nomeie as figuras

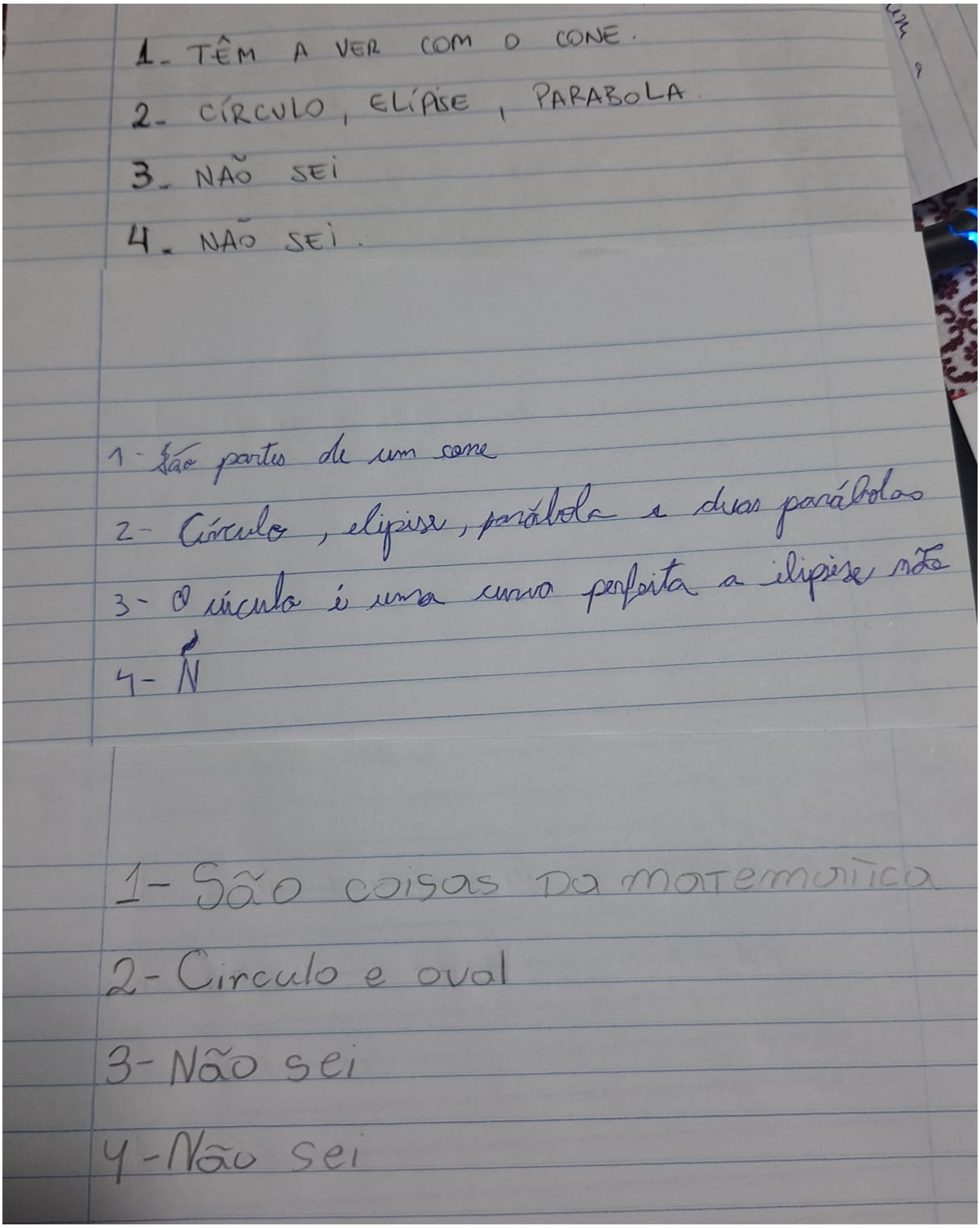
Figura 10 – cônicas

3- Àquelas figuras que você nomeou, você saberia definir alguma delas? Em caso afirmativo, faça isso.

4- Você conhece alguma equação matemática que represente alguma das figuras ilustradas na segunda questão?

Vale destacar que, com o auxílio do retroprojetor, as perguntas colocadas no telão uma por vez, para que a pergunta seguinte não trouxesse respostas às perguntas anteriores, e cada um dos alunos respondeu individualmente a todas elas.

Veja alguns exemplos de questionário respondido:



1. TÊM A VER COM O CONE.
2. CÍRCULO, ELÍPSE, PARABOLA.
3. NÃO SEI
4. NÃO SEI.

1 - São partes de um cone
2- Círculo, elipise, parábola e duas parábolas
3- O círculo é uma curva perfeita a elipise não
4- N

1- São coisas da matemática
2- Circulo e oval
3- Não sei
4- Não sei

Figura 11 – exemplos de questionários 1, 2 e 3

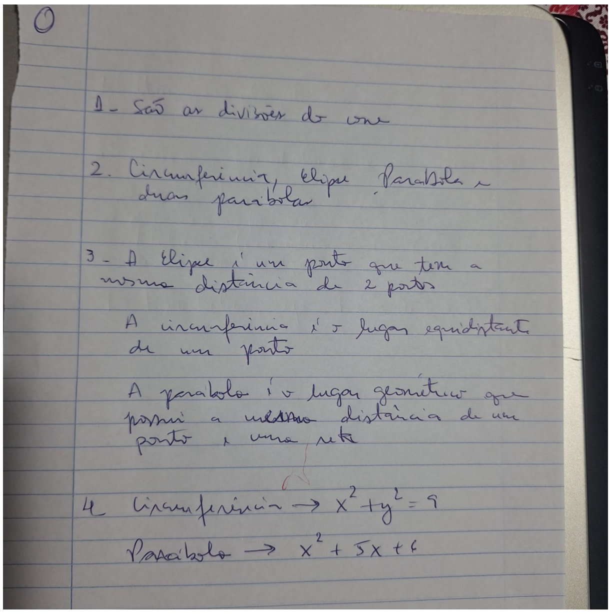

1- São as divisões do cone
2. Circunferência, Elipse, Parabola e duas parabola
3- A Elipse é um ponto que tem a mesma distância de 2 pontos
A circunferência é o lugar equidistante de um ponto
A parabola é o lugar geométrico que possui a mesma distância de um ponto e uma reta
4- Circunferência → $x^2+y^2=9$
Parabola → x^2+5x+6

Figura 12 – exemplo de questionário 4

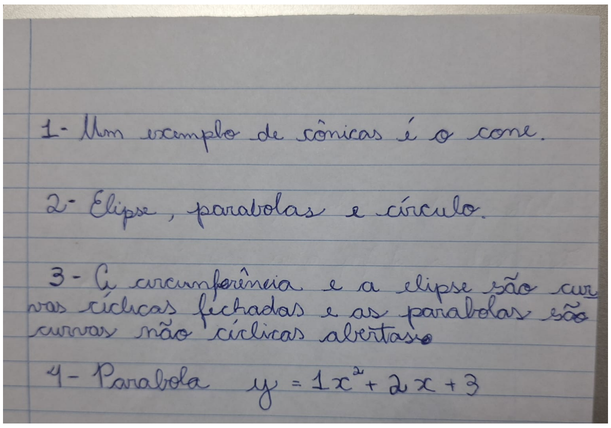

1- Um exemplo de cônicas é o cone.
2- Elipse, parabolas e círculo.
3- A circunferência e a elipse são curvas cíclicas fechadas e as parabolas são curvas não cíclicas abertas.
4- Parabola $y = 1x^2 + 2x + 3$

Figura 13 – exemplo de questionário 5

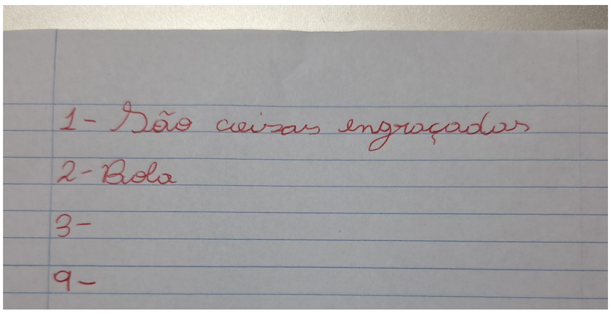

1- São coisas engraçadas
2- Bola
3-
4-

Figura 14 – exemplo de questionário 6

Sobre a primeira pergunta do questionário, a maioria dos alunos respondeu que não sabe o que são cônicas. Se dividirmos as respostas em alunos que relacionaram cônicas a cone e os que não relacionaram, temos que 6/24 alunos, relacionaram cônicas a cone. E, como é possível perceber pelos exemplos de questionários destacados essa relação não é precisa.

Já, sobre a segunda questão, todos os alunos, identificaram a circunferência, como circunferência ou círculo e 21/24 alunos, identificaram à elipse e a parábola. Contudo, ninguém identificou a hipérbole e um detalhe interessante é que, 15 alunos nominaram a hipérbole como "duas parábolas".

Na terceira pergunta pudemos perceber uma grande fragilidade sobre o conceito de definição, a qual pode ser constatada pelos exemplos de resposta encontrados nas imagens dos questionários logo acima.

Dito isso, apenas 3/24 alunos definiram corretamente a circunferência e metade dos alunos definiram corretamente a parábola. Ninguém definiu corretamente a elipse e muito menos a hipérbole.

Com relação a quarta questão, apenas 3/24 alunos conheciam a equação da circunferência e 15/24 alunos conheciam a equação da parábola.

4.4 Definição e explicação sucinta da noção de CONE e de SECÇÕES CÔNICAS

Na mesma aula em que o questionário foi aplicado, fazendo alguns desenhos em perspectiva na lousa, apresentei o cone reto aos alunos, pois a visão de cone que eles tinham era, na verdade, a visão de um segmento do cone de apenas uma folha e não de um cone infinito que possui duas folhas. Destacamos então alguns elementos importantes nos desenhos, para conectar a ideia que eles possuíam e a nova realidade de cone que se apresentava.

Como já haviamos percebido a fragilidade no conceito de definição que os alunos carregavam consigo, antes de definir formalmente o cone, para que a definição fizesse sentido para eles, foram destacados os seguintes elementos do cone:

- Vértice Comum: As duas folhas do cone se encontram em um único ponto, chamado vértice.

- Eixo Comum: Elas compartilham a mesma linha de simetria, ou eixo. O eixo é perpendicular às bases (se existissem) do cone.

- Bases Imaginárias/Abertas: Diferente de um segmento de cone reto de uma folha (que tem uma base circular), o cone não possui bases fechadas; suas aberturas se estendem infinitamente (em um contexto de geometria analítica).

- Geratrizes: Para dar significado as geratrizes, definimos o cone: "Sejam t e g duas retas concorrentes no espaço tridimensional, um cone com eixo de simetria t e geratriz g é a superfície obtida pela rotação de g em torno do eixo t e, qualquer reta pertencente ao cone e que passe pelo seu vértice, que é o ponto onde t e g se cruzam, também é chamada de geratriz do cone.'

- Secções Cônicas: O cone reto é fundamental no estudo das seções cônicas, que podemos definir da seguinte maneira: "Dado um cone $\mathcal{C}$ então, qualquer curva que pode ser obtida como a intersecção de um plano com o cone $\mathcal{C}$ é uma secção cônica.

4.5 Modelagem concreta de Cones

Após ser trabalhada a definição de cone, a classe foi dividida em 4 grupos de 6 alunos cada, cujo trabalho era modelar um segmento de cone reto de uma folha e seccioná-lo de todas as formas que lhes fossem convenientes.

Mesmo sabendo que para apresentar a hipérbole corretamente precisaríamos do cone completo, optamos por modelar como citado no parágrafo anterior para facilitar esse procedimento, uma vez que os exemplos concretos ao nosso redor (chapéu de festa infantil, vasos, casquinha de sorvete...) trazem muito mais possibilidades de visualizar o cone com apenas uma folha do que o cone completo. Sem contar o fato de que, modelar o vértice que conecta as duas folhas, aumentaria consideravelmente a dificuldade deste procedimento.

Conversamos então sobre que materiais usar na confecção dos modelos e que os modelos poderiam ser ocos ou maciços, mas não foram acrescentadas maiores orientações para a realização das secções. Isso porque, a minha ideia inicial era que os grupos trouxessem diferenças nas suas secções, ou até mesmo que não percebessem algum modo de seccionar. Contudo, essa era a ideia retrógrada de um ex-aluno que cresceu fazendo suas pesquisas em enciclopédias e não estava levando em consideração as facilidades que a internet proporciona.

A partir do dia 20 de março, os grupos tiveram 3 semanas para realizar este trabalho, devendo apresentar seus modelos no dia 10 de abril. Enquanto isso, ao longo dessas três semanas, revisamos os conceitos da Geometria Analítica que eram pré-requisito para começar a tratar com as cônicas, e claro que, conforme surgiam dúvidas e dificuldades para modelar, conversamos sobre isso nesse tempo também.

Então, chegado o dia 10 de abril, aconteceu o momento mais aguardado e cativante do trabalho, o momento em que os alunos apresentaram sua modelagem das cônicas.

Como dito anteriormente, a ideia era que os alunos seccionassem os cones sem maiores instruções. Contudo, bem sabemos que hoje em dia nada se faz sem o auxílio da internet, sem um tutorial no youtube ou algo parecido.

O interessante nisso é que, apesar de seccionarem o cone quase todo de forma correta, a pesquisa que eles acabaram realizando, para fazer esses cortes, contribuiu muito com outros aspectos, principalmente os aspectos históricos. Nomes como de Apolônio, Manaechmus, Euclides e Descartes vieram à tona.

A pesquisa feita por eles também promoveu um breve debate sobre as geometrias plana e espacial, uma vez que, uns defendiam que as cônicas eram espaciais e outros defendiam que eram planas. E então, depois de esclarecer a questão, todos entenderam que essas figuras são planas, mas podem ocupar, também, um lugar no espaço. Essa abordagem, permitiu incluir nesse diálogo, o plano cartesiano e o espaço cartesiano de uma forma interessante, e estes ganharam um novo significado para os alunos.

É importante destacar que nem tudo foi tão perfeito neste momento do projeto. Vamos lembrar, que em um parágrafo anterior, eu disse que os alunos seccionaram o cone 'quase' que corretamente. Apesar de terem encontrado auxílio na internet, um dos quatro grupos, não entendeu que a parábola deveria ser uma secção paralela à geratriz e, por isso, realizaram uma secção com inclinação, mas não a mesma da geratriz.

Seguem os modelos apresentados pelos estudantes:

Grupo 1: modelos em acrílico e papel cartão.

Figura 15 – circunferência e elipse em acrírlico

Figura 16 – tentativa de parábola (1) em acrílico

Figura 17 – tentativa de parábola (2) em acrílico

Figura 18 – hipérbole (2) em acrílico

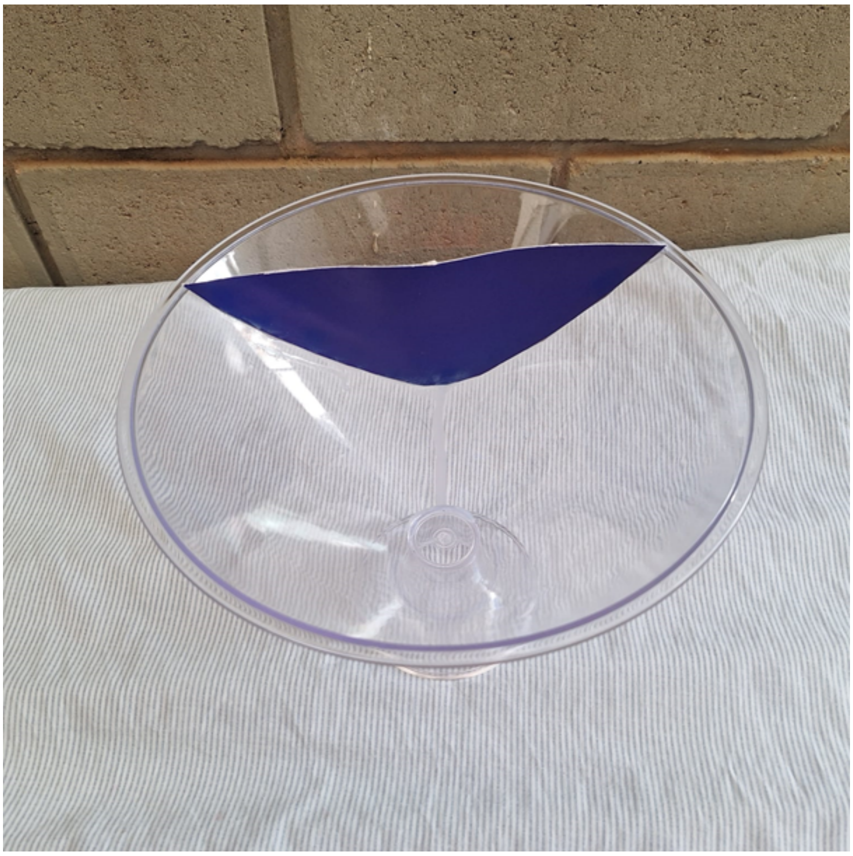


Figura 19 – hipérbole (1) em acrílico

Grupo 2: modelos em argila e guache

Figura 20 – cones em argila

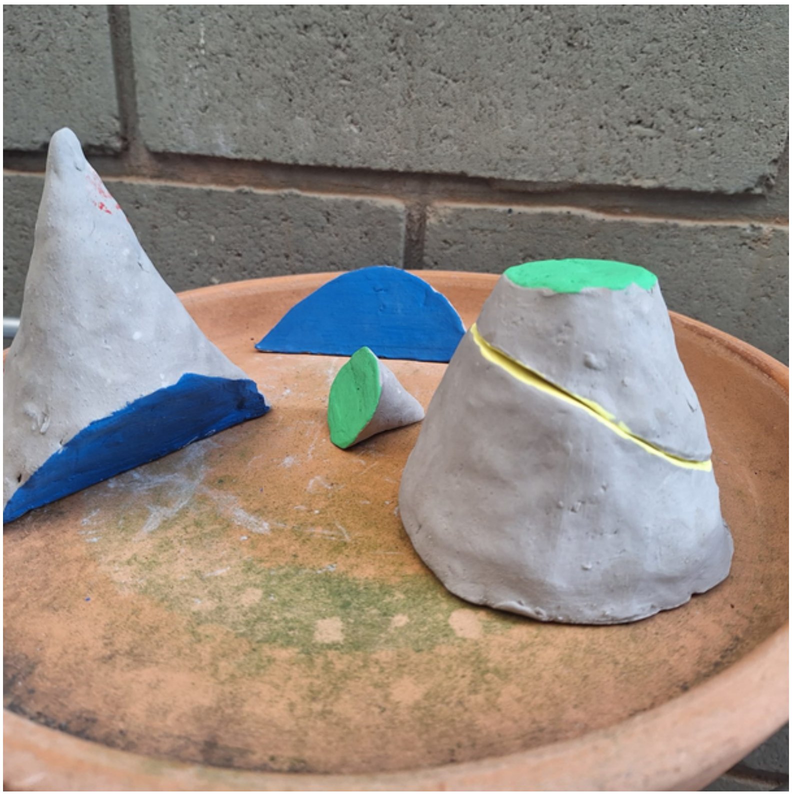


Figura 21 – circunferência e parábola em argila

Figura 22 – circunferência, elipse, hipérbole e parábola em argila

Grupo 3: modelo impresso em 3 dimensões

Figura 23 – cone - impressão 3D

Figura 24 – circunferência - impressão 3D

Figura 25 – elipse - impressão 3D

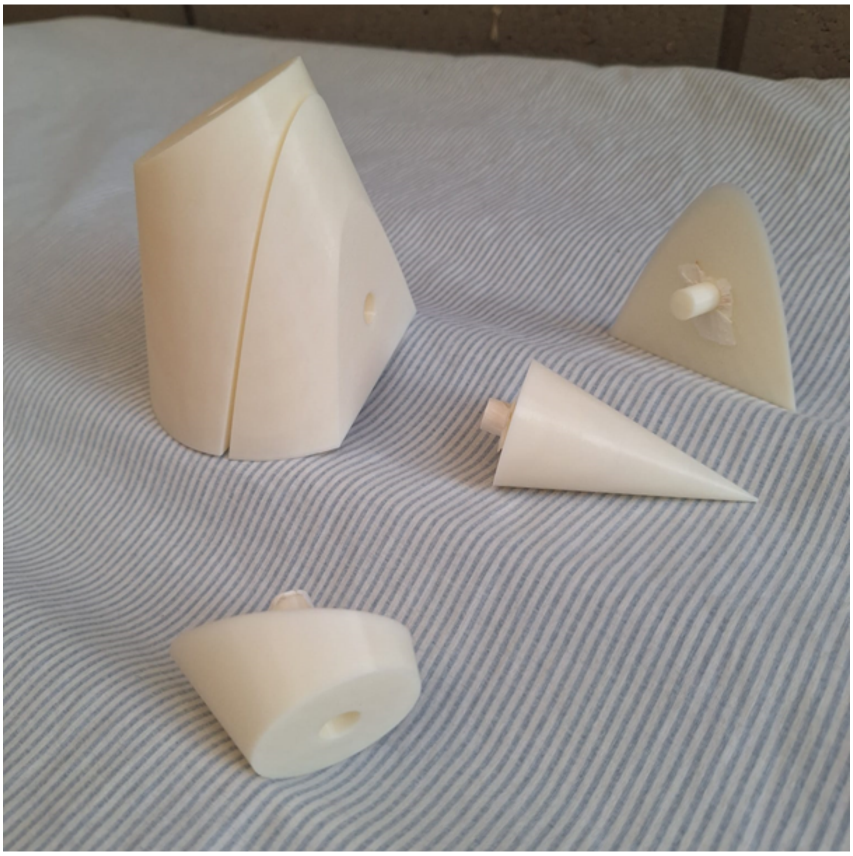


Figura 26 – hipérbole - impressão 3D

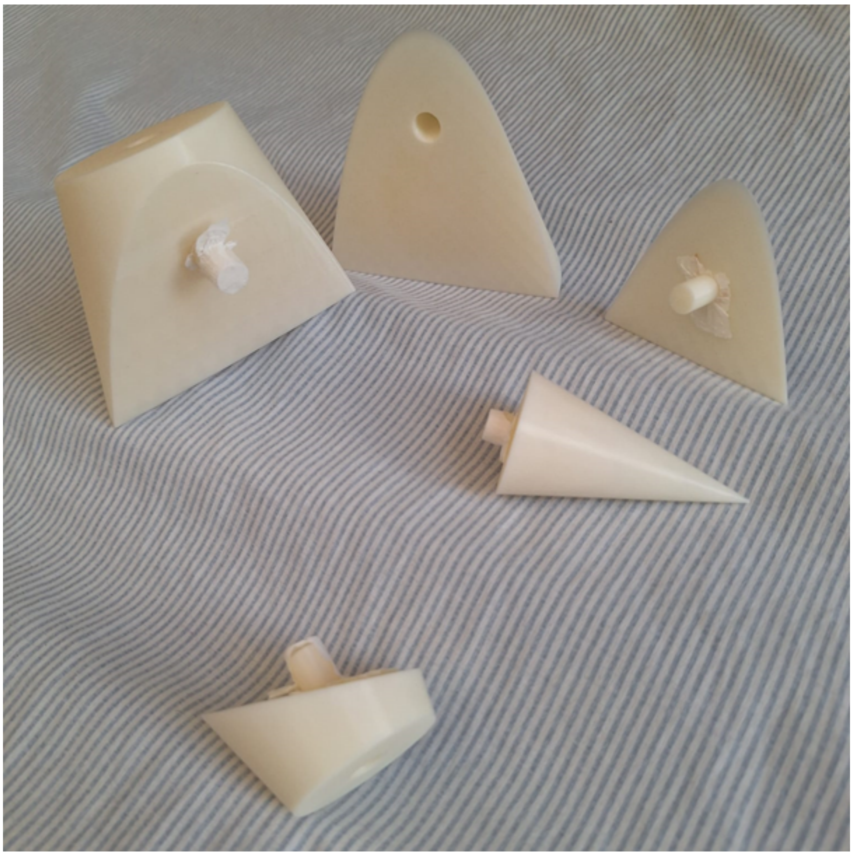


Figura 27 – parábola - impressão 3D

Grupo 4: modelo em isopor e imã

Figura 28 – cone em isopor

Figura 29 – circunferência em isopor

Figura 30 – elipse em isopor

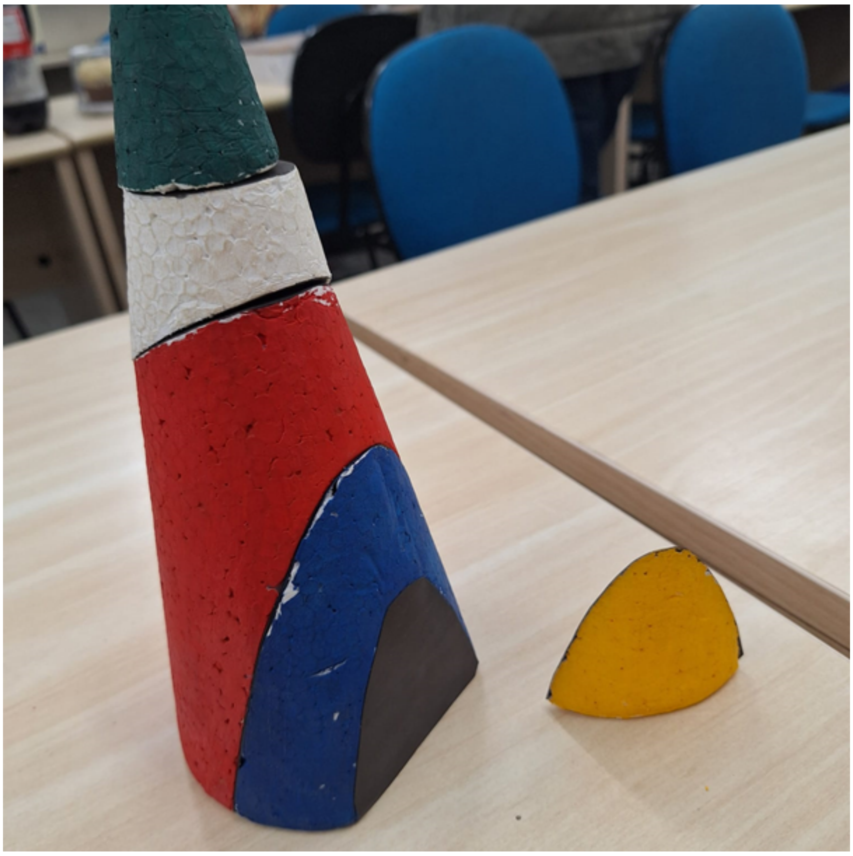


Figura 31 – hipérbole em isopor

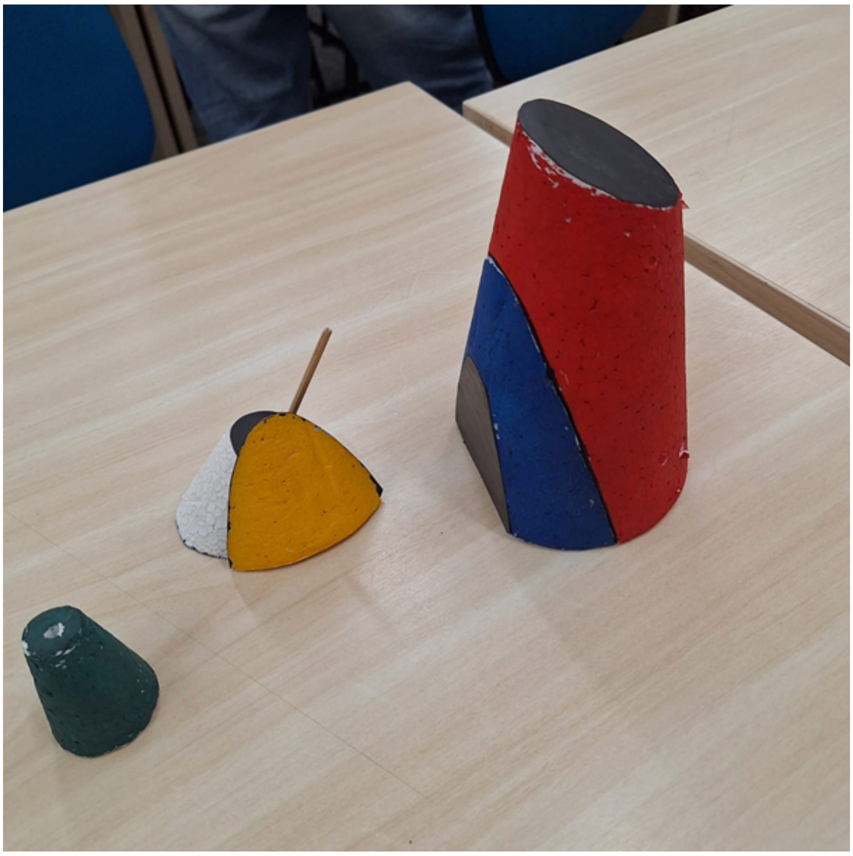


Figura 32 – elipse e hipérbole em isopor

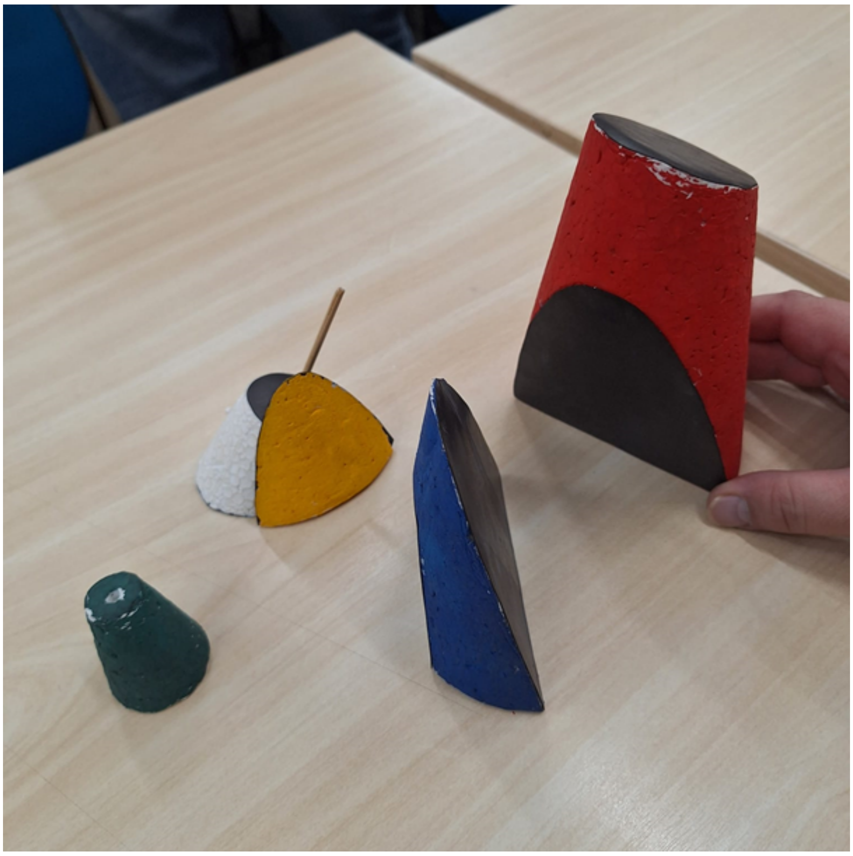


Figura 33 – parábola em isopor

Figura 34 – circunferência, elipse, hipérbole e parábola em isopor

4.6 Um pouco de História

Na semana seguinte, dia 15 de abril, duas aulas foram destinadas a história das cônicas, pois os alunos levantaram questões relacionadas a isso quando fizeram as apresentações dos seus modelos. Todos os grupos haviam pesquisado na internet como deveriam seccionar seus cones, então nomes como o de Manaecmus, Descartes e principalmente Apolônio de Perga, foram citados.

Nessas duas aulas, realizamos então uma linha do tempo, organizando cronologicamente as contribuições que os alunos trouxeram, de modo que as lacunas deixadas pelos alunos eram preenchidas por mim, acrescentando os nomes e detalhes faltantes desde os primórdios na Grécia até chegar à Germinal Pierre Dandelin.

O material usado como base para estas aulas encontra-se no capítulo dois deste trabalho.

4.7 Introdução de cones usando GEOGEBRA

Mantendo altas as expectativas, no dia 17 de abril, nosso próximo passo foi utilizar o laboratório de informática, para uma aula onde, com a ajuda do geogebra, aplicativo que dispensa apresentações entre os professores da área, trouxemos a mesma visão proporcionada pelos modelos, a visão tridimensional do cone e as suas secções. Aproveitamos a oportunidade também para explorar os casos degenerados e reafirmar como as secções devem ser feitas corretamente. A princípio, a aula seria demonstrativa, mas os alunos estavam muito interessados em por a mão na massa e começar a usar o aplicativo também, coisa essa que eu havia previsto para outro momento, um pouco mais adiante. Decidi então atender o pedido deles, fiz uma apresentação mais célere e, com o auxílio do monitor do laboratório de informática, os alunos foram dispostos em uma dupla por computador e colocados no mesmo ambiante do geogebra que eu estava trabalhando, podendo assim satisfazer um pouco da sua curiosidade. Seguem algumas imagens utilizadas:

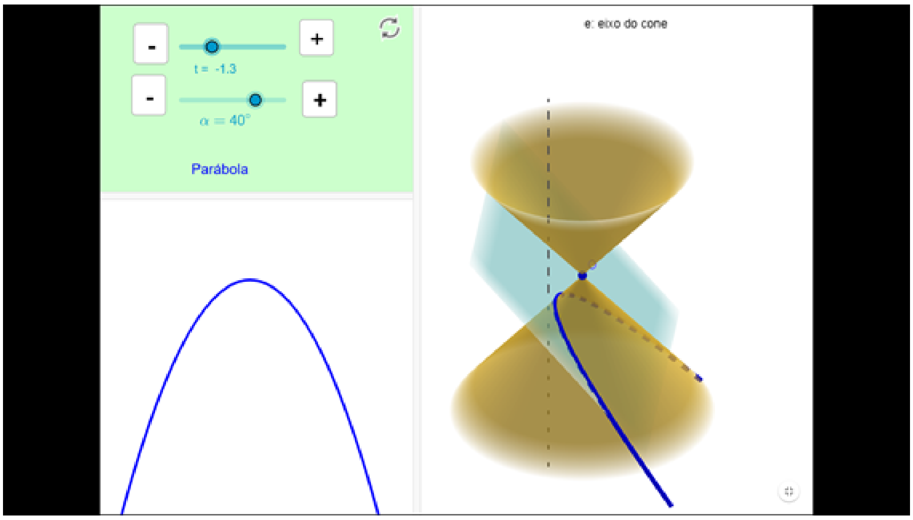


Figura 35 – secção da parábola em geogebra

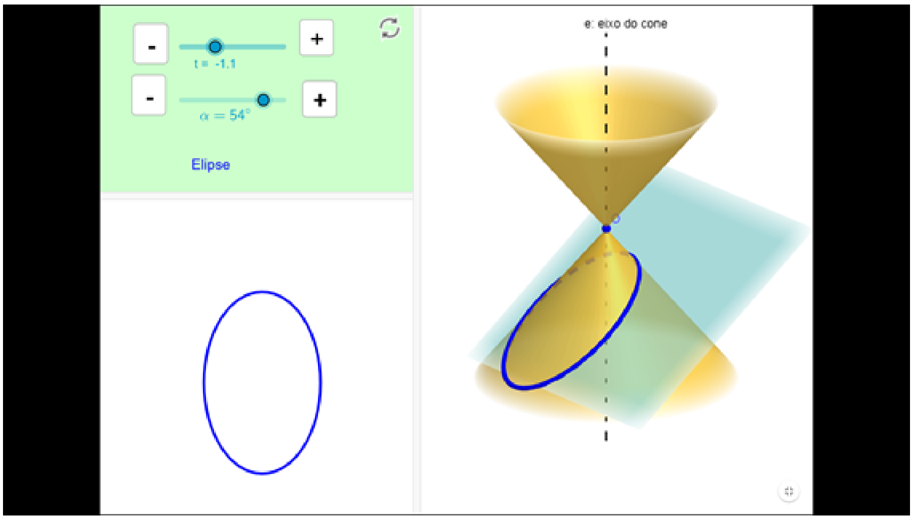


Figura 36 – secção da elipse em geogebra

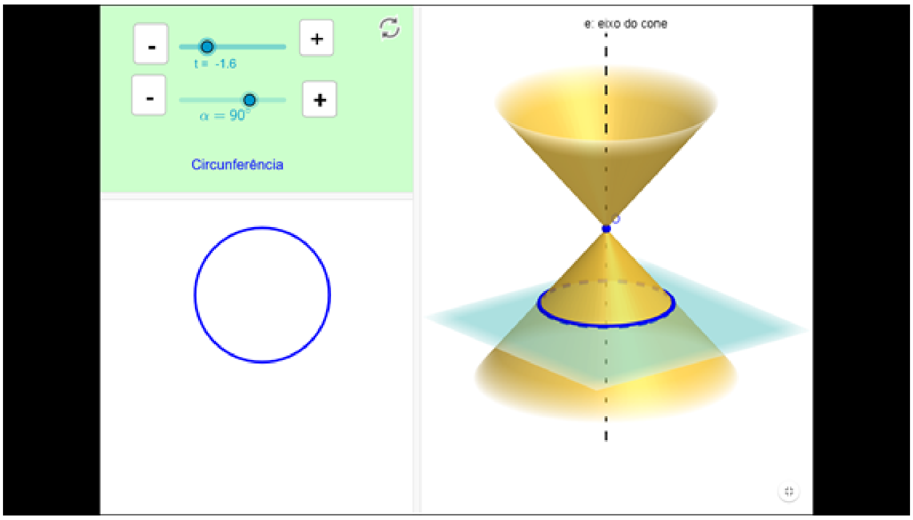


Figura 37 – secção da circunferência em geogebra

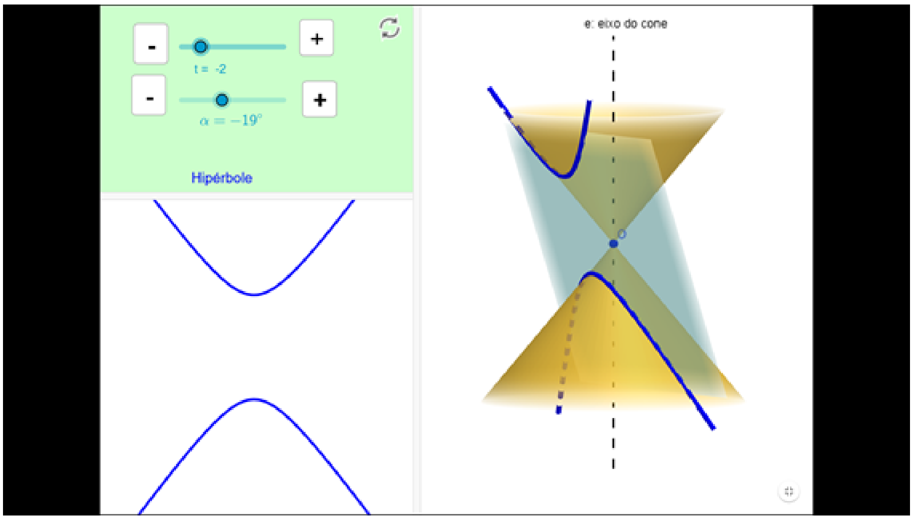


Figura 38 – secção da hipérbole em geogebra

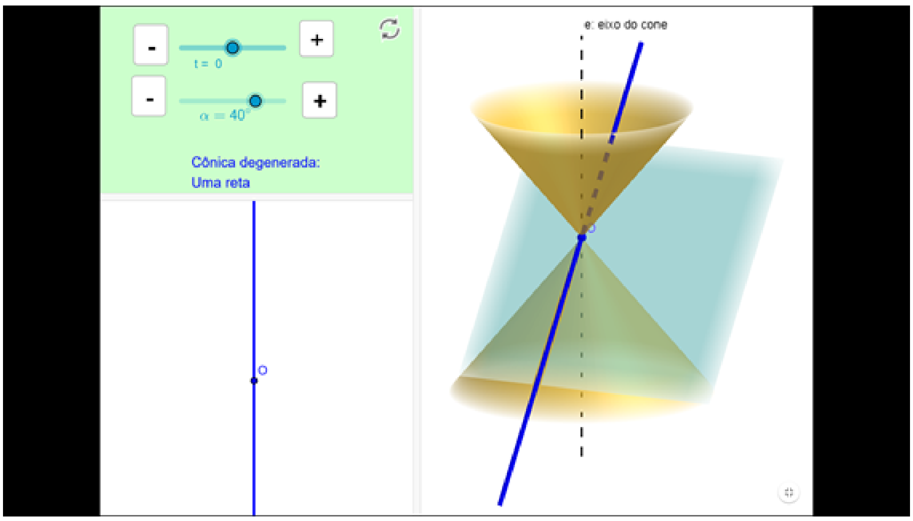


Figura 39 – secção degenerada da parábola - uma reta em geogebra

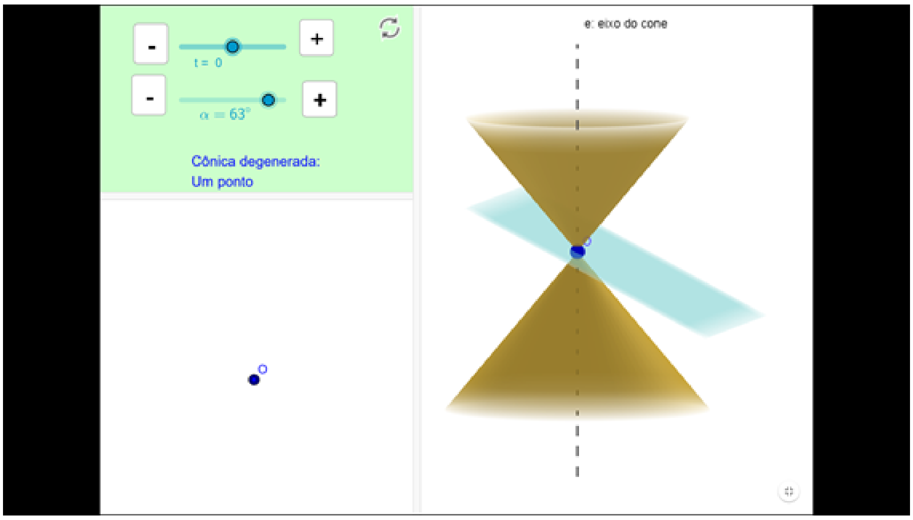


Figura 40 – secção degenerada da elipse - um ponto em geogebra

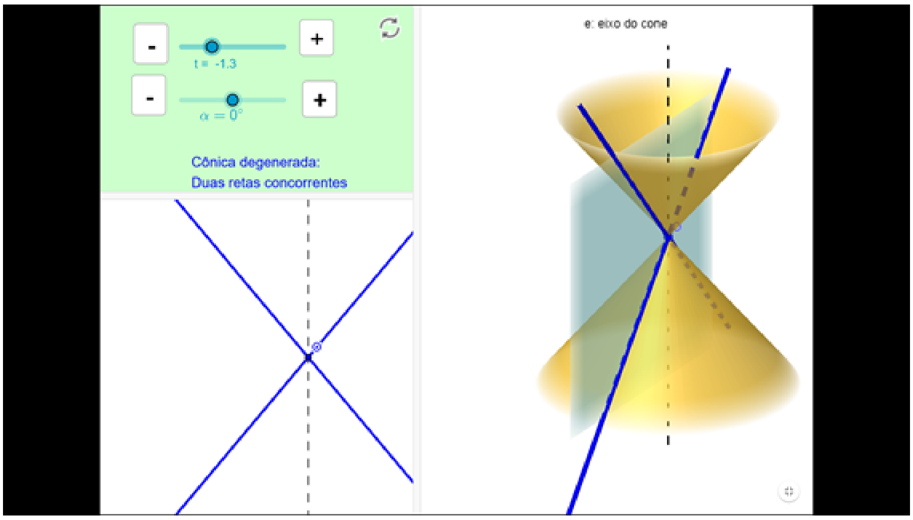


Figura 41 – secção degenerada da hipérbole - retas concorrentes em geogebra

4.8 Teoria e Exercícios

Fomos então ao momento mais maçante para os alunos. As três semanas seguintes (de 22 de abril a 13 de maio) foram de intenso trabalho em sala de aula, onde foram utilizadas 10 aulas para trabalhar a teoria que envolve, circunferências, elipses, hipérboles e parábolas.

O desenvolvimento teórico do conteúdo é, com certeza, o menos empolgante, mas, o mais importante do projeto, e isso ficou claro para os discentes também, pois era fácil perceber o comprometimento deles nessa etapa.

Definimos as quatro cônicas, foram apresentadas as equações canônicas e gerais, como ir de uma à outra com a utilização de exemplos centrados na origem e, posteriormente, com centro em qualquer lugar do plano. Também destacamos os principais elementos de cada cônica (foco, eixos, vértices...). Infelizmente nosso tempo não permitiu estudar a posição relativa entre as estruturas analíticas conhecidas pelos alunos e as cônicas, ou até mesmo das cônicas com as cônicas.

Ao longo das aulas teóricas, os alunos organizaram as informações que lhes foram transmitidas em seu caderno, sendo essa compilação de informações, baseada nos conteúdos do capítulo 3 deste trabalho e, feita em linguagem adequada e fácil de compreender através da sua leitura. Eles também resolveram exercícios e problemas, que foram disponibilizados para eles em forma de listas de exercícios.

Isso os preparou para a avaliação teórica, escrita e individual (famosa prova) e para o questionário que aplicamos inicialmente e que foi reaplicado para o encerramento das atividades, visando comparar as informações obtidas antes e depois do projeto.

Seguem as listas e seus respectivos gabaritos:

LISTA - 1

Exercício 1. Determine a equação geral e esboce o gráfico da cônica dada. Inclua no esboço informações relevantes como o(s) foco(s), o vértice ou centro, o(s) eixo(s) e a reta diretriz no caso da parábola.

a) $(x-3)^2 = 4(y-1)$;

b) $(x+1)^2 = 6y$;

c) $(y-3)^2 = 10(x-9)$;

d) $(y+9)^2 = -4(x+5)$;

e) $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$;

f) $\dfrac{(x+1)^2}{20} + \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$;

g) $\dfrac{(x+1)^2}{20} + \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$;

h) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{(y-2)^2}{27} = 1$;

i) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$;

j) $\dfrac{4(y-1)^2}{9} - \dfrac{4(x-3)^2}{27} = 1$;

k) $\dfrac{(x+3)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1$.

Exercício 2. Identidique e escreva a cônica dada na forma padrão:

a) $x^2 - 10x + 2y + 23 = 0$;

b) $x^2 + 4x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$;

c) $y^2 - 8y + 9x + 16 = 0$;

d) $5y^2 - 6x - 3x^2 - 10y - 13 = 0$;

e) $9x^2 - 18y^2 + 24y - 26 = 0$;

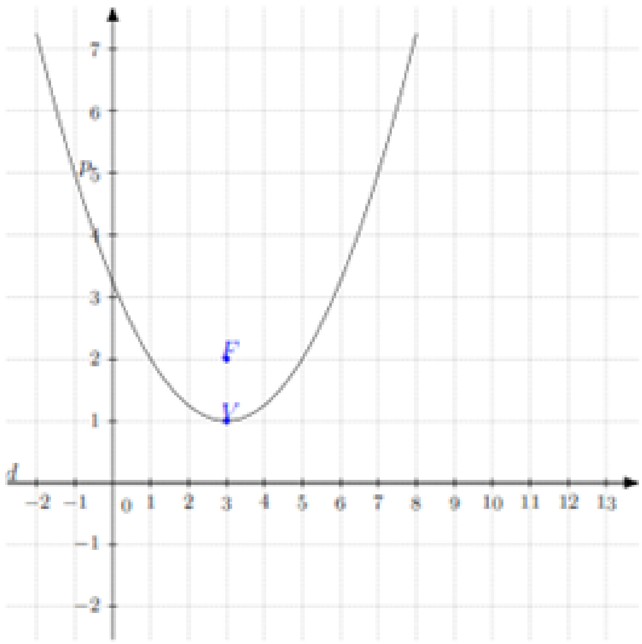
f) $3x^2 - 12x + 2y^2 + 8y + 14 = 0$.

Figura 42 – primeira lista de exercícios - pág.1

RESPOSTAS

Ex. 1:

a) Equação Geral: $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$, Vértice: $V(3,1)$, Foco: $F(3,2)$ e Diretriz: $y = 0$;



b) Equação Geral: $x^2 + 2x - 6y + 1 = 0$, Vértice: $V(-1,0)$, Foco: $F(-1,3/2)$ e Diretriz: $y = -\frac{3}{2}$;

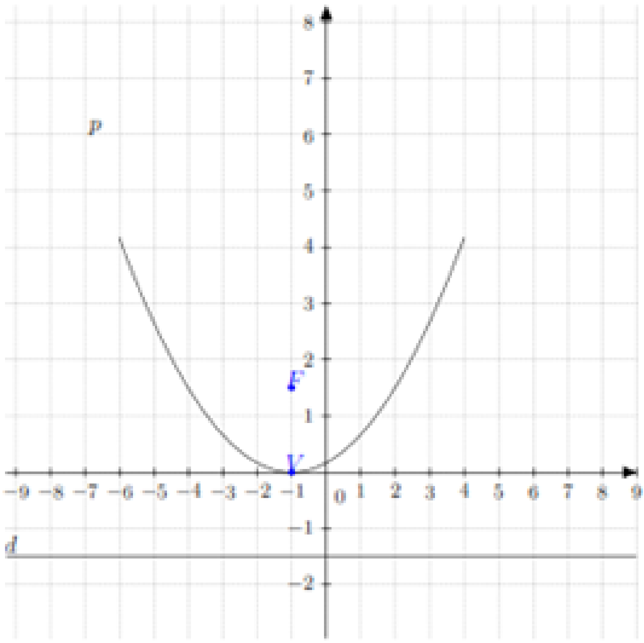
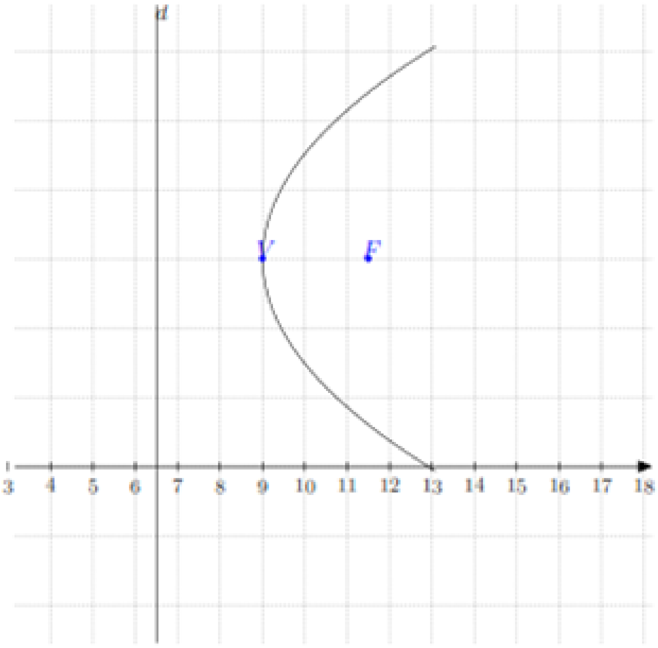


Figura 43 – primeira lista de exercícios - pág.2

c) Equação Geral: $y^2 - 10x - 6y + 99 = 0$**, Vértice:** $V(9,3)$**, Foco:** $F(11.5,3)$ **e Diretriz:** $x = 6.5$;



d) Equação Geral: $y^2 + 4x + 18 + 101 = 0$**, Vértice:** $V(-5,-9)$**, Foco:** $F(-6,-9)$ **e Diretriz:** $x = -4$;

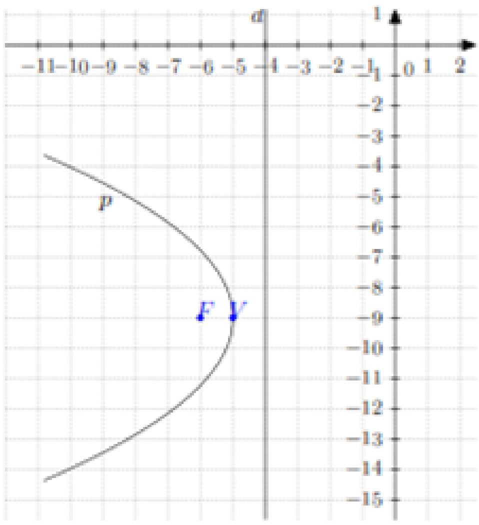
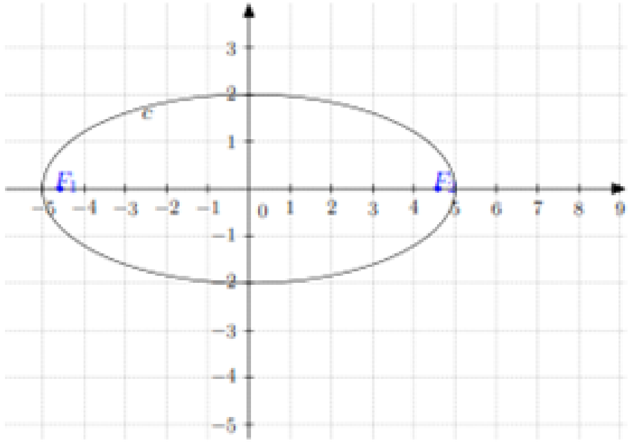
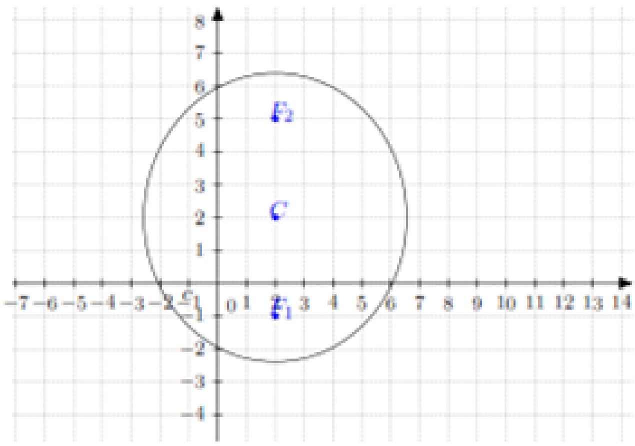


Figura 44 – primeira lista de exercícios - pág.3

e) Equação Geral: $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$, **Centro:** $C(0,0)$, **Focos:** $F_1(-\sqrt{21},0)$ **e** $F_2(+\sqrt{21},0)$;



f) Equação Geral: $25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 236 = 0$, **Centro:** $C(2,2)$, **Focos:** $F_1(2,-1)$ **e** $F_2(2,5)$;



g) Equação Geral: $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 166 = 0$, **Centro:** $C(-1,1)$, **Focos:** $F_1(-1,-3)$ **e** $F_2(-1,5)$;

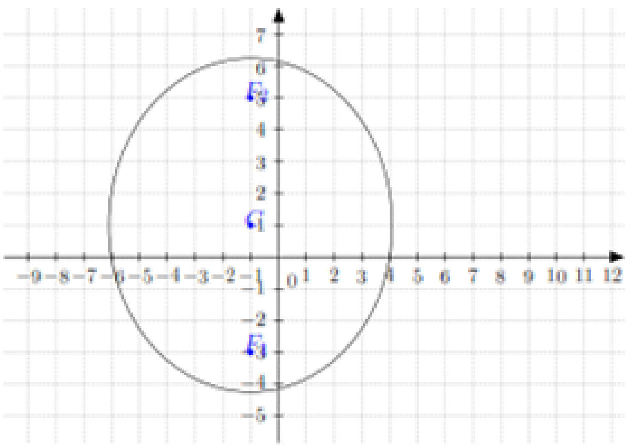
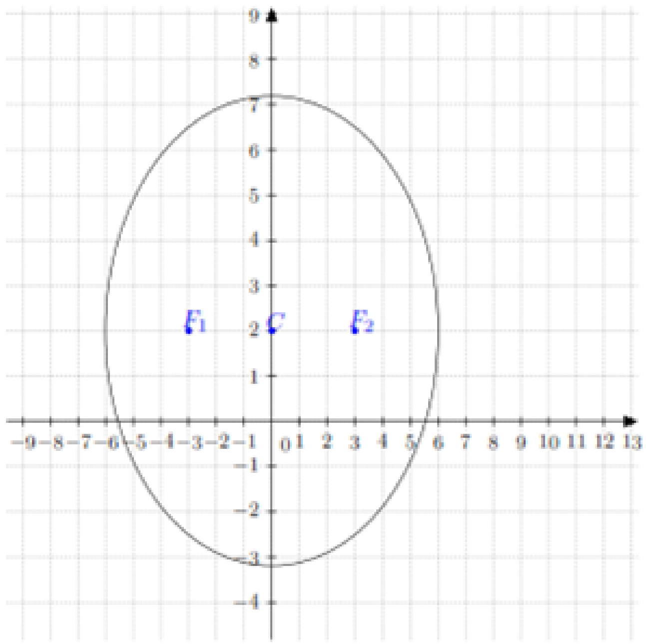


Figura 45 – primeira lista de exercícios - pág.4

h) Equação Geral: $3x^2 + 4y^2 - 16y = 92$, **Centro:** $C(0,2)$, **Focos:** $F_1(-3,2)$ **e** $F_2(3,2)$;



i) Equação Geral: $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$, **Centro:** $C(0,0)$, **Focos:** $F_1(0, 2\sqrt{5})$ **e** $F_2(0, -2\sqrt{5})$;

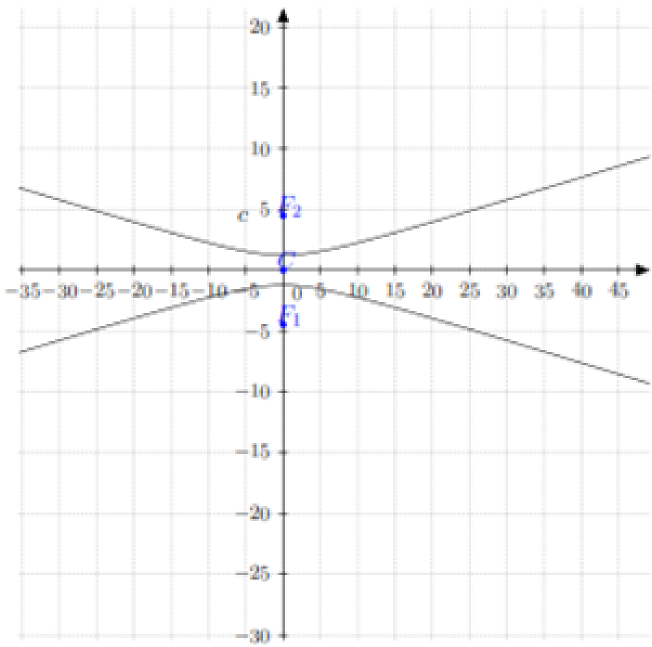
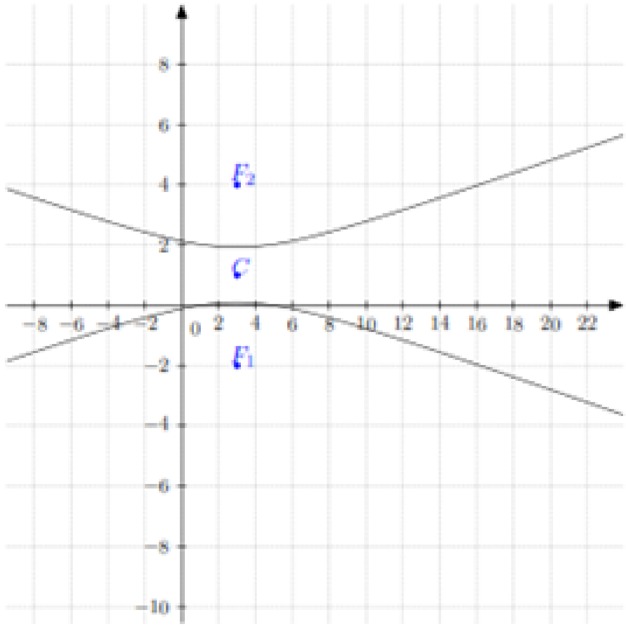
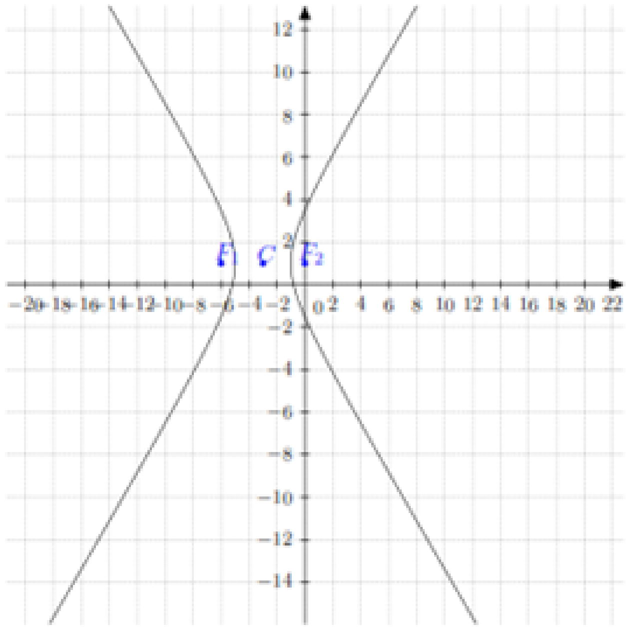


Figura 46 – primeira lista de exercícios - pág.5

j) **Equação Geral:** $4x^2 - 12y^2 - 24x + 24y + 51 = 0$, **Centro:** $C(3,1)$, **Focos:** $F_1(3,-2)$ e $F_2(3,4)$;



k) **Equação Geral:** $5x^2 - 4y^2 + 30x + 8y + 21 = 0$, **Centro:** $C(-3,1)$, **Focos:** $F_1(-6,1)$ e $F_2(0,1)$;



Ex. 2:

a) **Parábola:** $(x-5)^2 = -2(y-1)$;

b) **Elipse:** $\frac{(x+2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$;

Figura 47 – primeira lista de exercícios - pág.6

c) **Parábola:** $(y-4)^2 = -9x$;

d) **Hiperbole:** $\dfrac{(y-2)^2}{3} - \dfrac{(x+1)^2}{5} = 1$;

e) **Hiperbole:** $\dfrac{x^2}{2} - \left(y - \dfrac{2}{3}\right)^2 = 1$;

f) **Elipse:** $\dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(y+2)^2}{3} = 1$.

Figura 48 – primeira lista de exercícios - pág.7

LISTA 2

Exercícios de Matemática
Geometria Analítica - Cônicas

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO
(Puccamp) Visões do multimundo

1. Agora que assinei a TV a cabo, pressionado pelos filhos adolescentes (e pela curiosidade minha, que não lhes confessei), posso "ampliar o mundo sem sair da poltrona". Foi mais ou menos isso o que me disse, em tom triunfal, a prestativa atendente da empresa, com aquela vozinha treinada que imita à perfeição uma secretária eletrônica. Não é maravilhoso você aprender a fazer um suflê de tubérculos tropicais ou empadinhas e em seguida saltar para um documentário sobre o tribunal de Nuremberg? Se Copérnico (ou foi Galileu?) estivesse vivo, reformularia sua tese: o sol e a terra giram em torno da TV a cabo.

2. Aprendo num programa que elipses e hipérboles (além de serem figuras de linguagem) têm a ver com equações reduzidas... Num outro me garante um economista que o nacionalismo é uma aberração no mundo globalizado (será que isso vale também para as nações do Primeiro Mundo?). Tenho que ir mais devagar com este controle remoto (que, aliás, nunca saberei exatamente como funciona: nem fio tem!).

3. Um filme do meu tempo de jovem: "Spartacus", com Kirk Douglas. Roma já não era, àquela época, um centro imperial de globalização? Escravos do mundo, uni-vos! - conclamaria algum Marx daqueles tempos, convocação que viria a ecoar também em nosso Palmares, tantos séculos depois. Não deixo de me lembrar que, em nossos dias, multidões de expatriados em marcha, buscando sobreviver, continuam a refazer o itinerário dos vencidos.

4. Para as horas de insônia, aconselho assistir a uma partida de golfe. Um verde hipnótico preenche a tela, os movimentos são invariavelmente lentos, cada jogador avalia cuidadosamente a direção do vento, a topografia, os detalhes do terreno, só então escolhendo um tipo de taco. Tudo tão devagarzinho que a gente dorme antes da tacada. Se a insônia persistir, apele para um debate entre especialistas nada didáticos em torno de um tema que você desconheça. Tudo o que sei de genética, por exemplo, e que se resume às velhas leis de Mendel, em nada me serviu para entender o que sejam DNA, doença molecular e citogenética - conceitos que dançaram na boca de dois cientistas que desenvolvem projeto acerca do genoma humano, entrevistados por um repórter que parecia tão perplexo quanto eu. Igualmente obscura foi uma outra matéria, colhida numa mesa-redonda da SBPC: o tema era a unificação da Física quântica com a teoria da relatividade (!) - o que foi feito do pobre Newton que aprendi no meu colegial?

5. Um canal de São Paulo mostra que no centro do "campus" da USP, numa grande área até então descuidada, desenvolve-se um projeto de amostragem da vegetação típica de várias partes do Brasil, de modo que um passante transite de um trechinho de mata atlântica para um cerrado, deste para um recorte de pampa gaúcho ou de caatinga. A idéia me pareceu interessante, deixando-me a vaga impressão de estar ali um "museu da natureza", já que o homem vem se aplicando, por razões ou interesses de toda ordem, em desfigurar ou alterar inteiramente os traços fisionômicos da paisagem original. Que nenhuma "chuva ácida" ou lixo químico venha a comprometer esse projeto.

6. Aprendo também que a TV a cabo e a aberta têm algo em comum: ambas me incitam à geladeira. O correto seria parar no armário e me contentar com o insosso tabletinho de fibras que o médico me recomendou; mas como resistir ao restinho do pudim, que meu filho ainda não viu? Quero acreditar que os alimentos gelados perdem toda a caloria, e que aquela costeletinha de porco no "freezer", depois de passar pelo microondas, torna-se tão inofensiva quanto uma folha de alface... Com tais ilusões, organizo meu lanchinho e o levo para a sala, pronto para fazer uma refeição tão segura quanto a prescrita pela NASA aos astronautas.

7. Confesso que a variedade de opções vai me atordoando. Para mim, que gosto de poesia, é um prazer poder estacionar na BBC: ninguém menos que o saudoso Lawrence Olivier está lendo e comentando alguns poemas ingleses. Que expressão deu o grande ator a um poema de William Blake, que tanto admiro. Mas há quem ache haver tanta poesia em versos quanto numa bem bolada frase de propaganda.

8. Já muito tarde da noite, o Multishow apresenta uma série sobre os grandes compositores.

Figura 49 – segunda lista de exercícios - pág.1

Um maestro alemão expõe suas idéias acerca da música de Bach, discorrendo sobre as supostas bases matemáticas de suas composições, nas quais figuram as seqüências, os arranjos e as combinações. Para alívio meu, no entanto, o maestro também lembrou que a música de Bach se produziu em meio a injunções históricas do final do século XVII e a primeira metade do século XVIII, época na qual o mecenato e a religião eram determinantes, senão para o conteúdo mesmo, ao menos para os modos de produção e divulgação das artes - antes que as revoluções da segunda metade do século viessem a estabelecer novos eixos para a política, para a economia e para a cultura do Ocidente.

9. Finda a bela execução de uma sonata de Bach, passeei por desenhos animados quase inanimados, leilões de tapetes, liquidação de camisas, corrida de cavalos, um professor de cursinho falando sobre eletrólise e anunciando que no segmento seguinte trataria de cadeias carbônicas... Dei uma paradinha no que imaginei ser uma descontraída e inocente reportagem sobre o mundo animal e que era, no entanto, uma aula sobre a digestão dos insetos, em cujo conhecimento pesquisadores se apoiaram para criar plantas transgênicas que resistem ao ataque de espécies indesejadas... Ufa! Corri a buscar repouso num seriado cômico norte-americano, desses com risadas enlatadas e pessimamente traduzidos: sabem qual era a legenda para a frase entre duas pessoas se despedindo, "Give me a ring"? Nada mais, nada menos que: "Dê-me um anel"! Sem falar no espanto de encontrar a Xica da Silva falando em espanhol na TV americana!

10. Morto de tantas peregrinações, desliguei a TV, reduzindo o mundo à minha sala de visitas. Na minha idade, até as viagens virtuais são cansativas.

(Cândido de Castro, inédito)

1. O autor do texto aprendeu que elipses e hipérboles têm equações reduzidas. A expressão $(x^2/100)+(y^2/36)=1$ é a equação reduzida de uma elipse de

a) excentricidade 5/3.
b) distância focal 16.
c) eixo menor igual a 6.
d) eixo maior igual a 10.
e) centro no ponto (5; 6).

2. (Fuvest) Considere a função $f(x)=x\sqrt{(1-2x^2)}$

a) Determine constantes reais α, β e γ de modo que $(f(x))^2 = \alpha[(x^2 + \beta)^2 + \gamma]$

b) Determine os comprimentos dos lados do retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse de equação $2x^2+y^2=1$.

3. (Ufrj) Considere os pontos

P_1 (0, 0), P_2 (1, 1) e P_3 (2, 6).

a) Determine a equação da parábola que passa por P_1, P_2 e P_3 e tem eixo de simetria paralelo ao eixo Y das ordenadas;

b) Determine outra parábola que passe pelos pontos P_1, P_2 e P_3.

4. (Puc-rio) O número de pontos de intersecção das duas parábolas $y=x^2$ e $y=2x^2-1$ é:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

5. (Fuvest) Determine as equações das retas do plano que passam pela origem do sistema de coordenadas e que não interceptam a curva do plano dada pela equação $x^2/4 - y^2/9 = 1$

6. (Unicamp) Dada uma elipse de semi-eixos a e b, calcule, em termos destes parâmetros, a área do quadrado nela inscrito, com lados paralelos aos eixos da elipse.

7. (Ita) Tangenciando externamente a elipse ε_1, tal que ε_1:$9x^2+4y^2-72x-24y+144=0$, considere uma elipse ε_2, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de ε_1 e cujos eixos têm a mesma medida que os eixos de ε_1. Sabendo que ε_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de ε_2 é:

a) (7,3)
b) (8,2)
c) (8,3)
d) (9,3)
e) (9,2)

Figura 50 – segunda lista de exercícios - pág.2

8. (Ita) São dadas as parábolas p :$y=-x^2-4x-1$ e p_2:$y=x^2-3x+11/4$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que r é a reta que contém V_1 e V_2, então a distância de r até à origem é:
a) $5/\sqrt{26}$
b) $7/\sqrt{26}$
c) $7/\sqrt{50}$
d) $17/\sqrt{50}$
e) $11/\sqrt{74}$

9. (Ufpe) Considere dois pontos distintos A e B de um plano. O lugar geométrico dos pontos P deste plano tal que a soma das distâncias de P aos pontos A e B é constante, é uma curva denominada:
a) circunferência
b) parábola
c) hipérbole
d) elipse
e) reta

10. (Unicamp) Uma elipse que passa pelo ponto (0,3) tem seus focos nos pontos (-4,0) e (4,0). O ponto (0,-3) é interior, exterior ou pertence à elipse? Mesma pergunta para o ponto (5/2, 13/5). Justifique sua resposta.

11. (Ufmg) A reta s é paralela à reta de equação $y=3x-4$ e intercepta a parábola de equação $y=2x^2-3x+5$ no ponto de abscissa 1. A equação de s é
a) $x + y - 5 = 0$
b) $x - y + 3 = 0$
c) $3x - y + 1 = 0$
d) $x + 3y - 11 = 0$
e) $3x + y - 7 = 0$

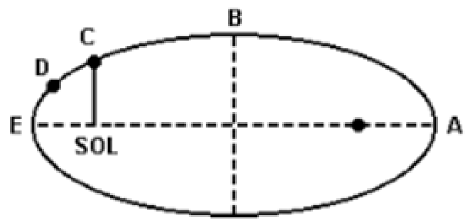
12. (Unesp) Usando apenas o material permitido nesta prova, esboce um gráfico e indique por meio de hachuras o conjunto dos pontos $P(x,y) \in IR^2$ que satisfazem ao seguinte sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \le xy \le 1 \\ x^2 + y^2 \le 2 \end{cases}$$

13. (Ufpe) Analise as seguintes afirmações:

( ) as retas $2x+3y-6=0$ e $2y-3x-2=0$ são paralelas.
( ) o lugar geométrico dos pontos (x,y) do plano Oxy tais que $2x^2+6y-3y^2=9$ é uma elipse.
( ) se $ax+by+c=0$, a, b e c reais, representa uma reta vertical, então b=0.
( ) as curvas $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$ se interceptam no plano Oxy em um único ponto.
( ) o ponto $(1,\sqrt{2}/2)$ é exterior à circunferência $x^2+y^2=1$ e é interior à circunferência $x^2+y^2=2$

14. (Cesgranrio) A segunda lei de Kepler mostra que os planetas se movem mais rapidamente quando próximos ao sol do que quando afastados dele. Lembrando que os planetas descrevem órbitas elípticas nas quais o sol é um dos focos, podemos afirmar que, dos pontos assinalados na figura, aquele no qual a velocidade da Terra é maior é o ponto:



a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

15. (Cesgranrio) O valor do parâmetro m para o qual a reta $y - 1 = m (x - 1)$ é tangente à parábola $y = x^2$ é:
a) -2.
b) -1/2.
c) 0.
d) 1/2.
e) 2.

16. (Cesgranrio) Determine o comprimento do segmento cujos extremos são os pontos de

Figura 51 – segunda lista de exercícios - pág.3

intersecção do círculo $x^2 + y^2 = 2$ com a parábola $y = x^2$.

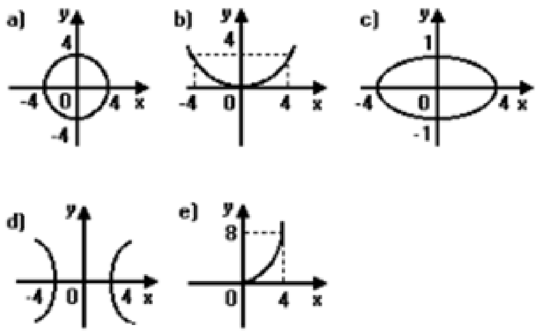
17. (Uff) As equações $y-2x=0$, $y+x^2=0$ e $y^2-x^2+1=0$ representam no plano, respectivamente:
a) uma reta, uma hipérbole e uma parábola
b) uma parábola, uma hipérbole e uma reta
c) uma reta, uma parábola e uma elipse
d) uma elipse, uma parábola e uma hipérbole
e) uma reta, uma parábola e uma hipérbole

18. (Fgv) Em cada sentença a seguir, assinale V se ela for verdadeira e F se for falsa. Caso assinale F, justifique a resposta.
a) $x^2/9 + y^2/4 = 1$, no plano cartesiano, é a equação de uma elipse com excentricidade igual a 0,6.
b) No plano cartesiano, a equação $x^2 - y^2 = 0$ representa uma hipérbole equilátera.
c) No plano cartesiano, a equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ representa uma circunferência.
d) No plano cartesiano, a equação $|2x - y| = 3$ representa um par de retas paralelas.

19. (Pucmg) O gráficos das curvas $x^2 + y^2 = 2$ e $y = x^2$ se interceptam nos pontos A e B. Os valores das abscissas de A e B são:
a) -1 e 0
b) 0 e 1
c) -1 e 1
d) 1 e 2
e) -1 e -2

20. (Unirio) As equações $x^2-9y^2-6x-18y-9=0$, $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ e $x^2-4x-4y+8=0$ representam, respectivamente, uma:
a) hipérbole, uma elipse e uma parábola.
b) hipérbole, uma circunferência e uma reta.
c) hipérbole, uma circunferência e uma parábola.
d) elipse, uma circunferência e uma parábola.
e) elipse, uma circunferência e uma reta.

21. (Cesgranrio) O gráfico que melhor representa a curva de equação $x^2+16y^2=16$ é:



22. (Ita) Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente, $5(x+3)^2-4(y-2)^2=-20$ e $(y-3)^2=4(x-1)$.
Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:
a) A elipse de equação $(x-3)^2/4+(y+2)^2/3=1$
b) A hipérbole de equação $(y+1)^2/5-(x-3)^2/4=1$
c) O par de retas dadas por $y= (3x-1)$
d) A parábola de equação $y^2=4x+4$
e) A circunferência centrada em (9,5) e raio $\sqrt{120}$

23. (Mackenzie) A reta de menor coeficiente angular, que passa por um dos focos da elipse $5x^2 + 4y^2 = 20$ e pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$, tem equação:
a) $3x - y - 3 = 0$
b) $2x - y - 1 = 0$
c) $x - 3y - 7 = 0$
d) $x - 2y - 4 = 0$
e) $x - y + 1 = 0$

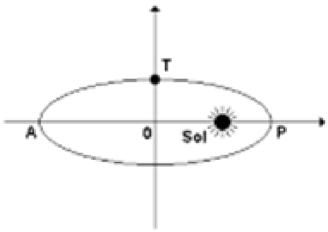
24. (Unb) O cometa Halley tem uma órbita elíptica com eixo maior e eixo menor iguais a 540×10^7 km e 140×10^7 km, respectivamente. Sabendo que o Sol está em um dos focos da elipse, calcule o valor $d/10^7$, em que d é a menor distância entre o Sol e o cometa, medida em quilômetros. Desconsidere a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

Figura 52 – segunda lista de exercícios - pág.4

25. (Unirio) A área do triângulo PF_1F_2, onde P(2,-8) e F_1 e F_2 são os focos da elipse de equação $x^2/25 + y^2/9 = 1$, é igual a:
a) 8
b) 16
c) 20
d) 32
e) 64

26. (Cesgranrio) A equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$ representa, no plano cartesiano, uma curva fechada. A área do retângulo circunscrito a essa curva, em unidades apropriadas, vale:
a) 36
b) 24
c) 18
d) 16
e) 12

27. (Unb) Kepler, astrônomo alemão que viveu antes de Newton, foi o primeiro a enunciar leis que regem o movimento dos planetas em torno do Sol. A Primeira Lei de Kepler afirma que os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos. Em consequência, em alguns pontos, os planetas estão mais próximos do Sol do que em outros. Por exemplo, a Terra chega a 147×10^6km do Sol, em seu periélio (o ponto mais próximo, P), e atinge 152×10^6 km do Sol, em seu afélio (o ponto mais afastado, A), conforme a figura adiante.

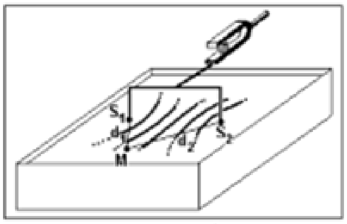


Já a Terceira Lei de Kepler afirma que o período orbital de um planeta (o tempo necessário para ele dar uma volta em torno do Sol) depende da distância média desse planeta em relação ao Sol. De acordo com essa lei, a razão entre o quadrado do período orbital e o cubo da distância média é a mesma para todos os planetas.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
(0) Quando a Terra está na posição T, identificada na figura acima, sua distância do Sol é de $149,5 \times 10^6$ km.
(1) Sabe-se que a excentricidade da elipse é a razão entre a distância do foco ao centro da elipse e a medida do semi-eixo maior. Então, no caso da órbita da Terra, a excentricidade é menor que 1/59.
(2) Um planeta, cuja distância média do Sol seja quatro vezes maior que a distância média entre a Terra e o Sol, tem o período orbital de 16 anos.

28. (Uel) A reta r intercepta o eixo das ordenadas em y=2 e a parábola p em seu vértice. Se a equação de p é $y=3x^2-6x+8$, então r intercepta o eixo das abcissas no ponto
a) (3/4; 0)
b) (2/5; 0)
c) (0; 0)
d) (-1/2; 0)
e) (-2/3; 0)

29. (Unb) Um experimento para estudar a interferência de ondas é montado da seguinte forma: as pontas S_1 e S_2 de um aparelho, imersas em uma cuba d'água, vibram em fase, provocando ondas na superfície da água, conforme ilustra a figura adiante. Um ponto M da superfície da água sofre um deslocamento vertical, Y(t), devido à ação conjunta das duas ondas geradas por S_1 e S_2, descrito pela expressão $Y(t)=2A\cos[(d_2-d_1)\pi/L]\,\mathrm{sen}[(2t\pi/T)-(d_2+d_1)\pi/L]$, em que A, T e L representam, respectivamente, a amplitude, o período e o comprimento de onda, e d_1 e d_2 são, respectivamente, as distâncias do ponto M a S_1 e a S_2.



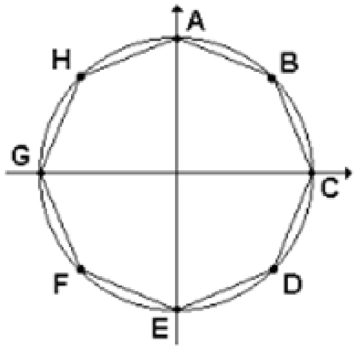
Aparelho vibrando a uma freqüência determinada

Considerando desprezíveis os efeitos da reflexão das ondas na borda da cuba, julgue os itens que se seguem.

Figura 53 – segunda lista de exercícios - pág.5

(1) Os pontos em que a amplitude de Y(t) é igual a zero localizam-se sobre hipérboles de focos S_1 e S_2.
(2) Os pontos em que a amplitude de Y(t) é igual a 2A localizam-se sobre parábolas de focos S_1 e S_2.
(3) Os pontos em que as ondas estão em fase localizam-se sobre elipses de focos S_1 e S_2.

30. (Puccamp) Na figura a seguir tem-se um octógono regular inscrito na circunferência de equação $x^2+y^2-16=0$ e com os vértices A, C, E e G sobre os eixos coordenados.



A medida do lado desse octógono é
a) $16 \cdot \sqrt{(2-\sqrt{2})}$
b) $8 \cdot \sqrt{(2-\sqrt{2})}$
c) $4 \cdot \sqrt{(2-\sqrt{2})}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{2}$

31. (Ita) Considere a circunferência C de equação $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ e a elipse E de equação $x^2+4y^2-4x+8y+4=0$. Então:
a) C e E interceptam-se em dois pontos distintos.
b) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos.
c) C e E são tangentes exteriormente.
d) C e E são tangentes interiormente.
e) C e E têm o mesmo centro e não se interceptam.

32. (Ita) Pelo ponto C:(4, -4) são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y=(x-4)^2+2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:
a) $6\sqrt{12}$
b) $\sqrt{12}$
c) 12
d) 8
e) 6

33. (Uff) Uma reta r é paralela ao eixo x e contém a interseção das parábolas $y=(x-1)^2$ e $y=(x-5)^2$.
A equação de r é:
a) $x = 3$
b) $y = 4$
c) $y = 3x$
d) $x = 4y$
e) $y = x/3$

34. (Uece) A área do quadrilátero cujos vértices são as interseções da elipse $9x^2+25y^2=225$ com os eixos coordenados é igual, em unidades de área, a:
a) 30
b) 32
c) 34
d) 36

35. (Ufu) Em um plano cartesiano π, Q=(x,y) é um ponto arbitrário e P=(1,0) é um ponto fixo. Denotamos por d(A, B) a distância entre quaisquer dois pontos A e B pertencentes a π. Considere o conjunto $C=\{Q \in \pi$ tal que $(\sqrt{2})\, d(G,Q)=d(Q,P)\}$, em que G=(0,0) é a origem de π. Então,

a) C é a parábola de equação $y = -x^2 - (x/2)$.
b) C é a parábola de equação $y = x^2 + 2$.
c) C é a reta de equação $y = (x/2) - (1/4)$.
d) C é o círculo de centro em (1,0) e raio 1.
e) C é o círculo de centro em (-1,0) e raio $\sqrt{2}$.

Figura 54 – segunda lista de exercícios - pág.6

36. (Unicamp) Sejam A e B os pontos de intersecção da parábola $y=x^2$ com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

a) Quais as coordenadas dos pontos A e B?

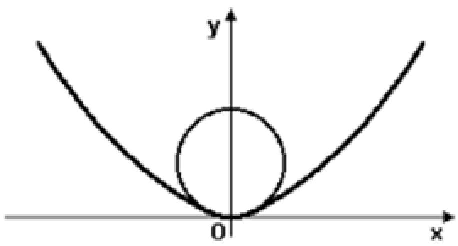
b) Se C é um ponto da circunferência diferente de A e de B, calcule as medidas possíveis para os ângulos $A\hat{C}B$.

37. (Unesp) Considere a elipse de equação $(x^2/25)+(y^2/9)=1$

a) Mostre que o ponto $P=(3,12/5)$ pertence à elipse e calcule a distância de P ao eixo das abscissas.

b) Determine os vértices Q e R da elipse que pertencem ao eixo das abscissas e calcule a área do triângulo PQR, onde $P=(3,12/5)$.

38. (Ufg) A figura mostra, no plano cartesiano, o gráfico da parábola de equação $y = x^2/4$, e uma circunferência com centro no eixo y e tangente ao eixo x no ponto O.



Calcule o raio da maior circunferência, nas condições acima, que tem um único ponto de interseção com a parábola.

39. (Uff) Considere a equação

$(m+n-1)x^2+(m-n+1)y^2+2x+2y-2=0$.

Pode-se afirmar que:

a) Se m=0 e n=2 então a equação representa uma elipse.
b) Se m=n=0 então a equação representa uma reta.
c) Se m=0 e n=1 então a equação representa uma parábola.
d) Se m=1 e n=2 então a equação representa uma hipérbole.
e) Se m=n=1 então a equação representa uma circunferência.

40. (Unirio) Determine a equação da elipse cujo centro é C(1,-2), a qual passa pelos pontos A(2,-2) e B(1,-4), possuindo os seus eixos paralelos aos eixos cartesianos.

41. (Fuvest) A elipse $x^2 + (y^2/2) = 9/4$ e a reta $y = 2x + 1$, do
plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:
a) (-2/3, -1/3)
b) (2/3, -7/3)
c) (1/3, -5/3)
d) (-1/3, 1/3)
e) (-1/4, 1/2)

42. (Ufrj) Sejam F_1 e F_2 os pontos do plano cartesiano de coordenadas $F\ =(-\sqrt{3},0)$ e $F_2=(\sqrt{3},0)$. Determine as coordenadas dos pontos da reta r de equação $x-y=1$ cujas somas das distâncias a F_1 e F_2 sejam iguais a 4 (isto é: determine as coordenadas dos pontos P sobre a reta r que satisfazem $PF_1+PF_2=4$).

Figura 55 – segunda lista de exercícios - pág.7

43. (Ita) Seja o ponto A=(r,0), r>0. O lugar geométrico dos pontos P=(x,y) tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P a A e o dobro do quadrado da distância de P à reta y=-r, é:
a) uma circunferência centrada em (r, -2r) com raio r.
b) uma elipse centrada em (r, -2r) com semi-eixos valendo r e 2r.
c) uma parábola com vértice em (r, -r).
d) duas retas paralelas distando $r\sqrt{3}$ uma da outra.
e) uma hipérbole centrada em (r, -2r) com semi-eixos valendo r.

44. (Ita) O coeficiente angular da reta tangente à elipse

$$(x^2/16) + (y^2/9) = 1$$

no primeiro quadrante e que corta o eixo das abcissas no ponto P = (8,0) é
a) $-(\sqrt{3}/3)$
b) -1/2
c) $-(\sqrt{2}/3)$
d) $-(\sqrt{3}/4)$
e) $-(\sqrt{2}/4)$

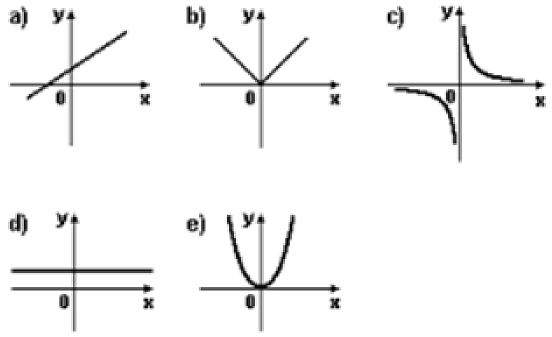
45. (Ufc) Um segmento de reta desloca-se no plano cartesiano de tal forma que uma de suas extremidades permanece sempre no eixo y e o seu ponto médio permanece sempre no eixo x. Então, a sua outra extremidade desloca-se ao longo de uma:
a) circunferência.
b) parábola.
c) reta.
d) elipse.
e) hipérbole.

46. (Puc-rio) As parábolas dadas pelas equações $y=x^2$ e $x=y^2$
a) nunca se encontram.
b) se encontra apenas na origem.
c) se encontram em exatamente dois pontos.
d) se encontram em três pontos.
e) se encontram em quatro pontos.

47. (Ufpi) O gráfico da equação $x^2 - y^2 = 4$ representa uma hipérbole. Os focos dessa hipérbole são:

a) (1/2, 0) e (-1/2, 0)
b) (2, 0) e (-2, 0)
c) $(2\sqrt{2}, 0)$ e $(-2\sqrt{2}, 0)$
d) $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$
e) (0, 1/2) e (0, -1/2)

48. (Ufrs) O produto de duas variáveis reais, x e y, e uma constante. Portanto, dentre os gráficos abaixo, o único que pode representar essa relação é



49. (Ufrj) Uma elipse cuja distância focal mede 1cm está inscrita em um retângulo (de lados paralelos aos eixos principais da elipse) de área igual a $\sqrt{2}$ cm^2. Determine as medidas dos lados do retângulo.

50. (Uff) Na parede retangular de um palácio renascentista, há um vitral circular e, acima dele, na mesma parede, uma estreita faixa reta, conforme a figura:

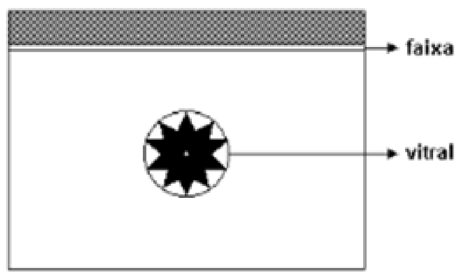
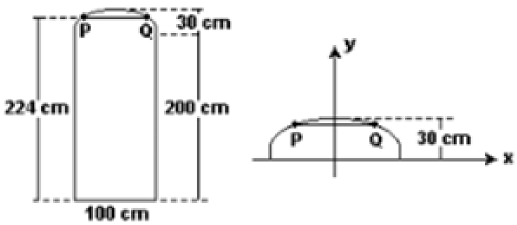


Figura 56 – segunda lista de exercícios - pág.8

Essa parede foi ornamentada com um elemento decorativo em forma de uma curva que tem a seguinte característica: cada ponto da curva está situado a igual distância do centro do vitral e da faixa.
Pode-se afirmar que o elemento decorativo tem a forma de um arco:
a) de elipse
b) de hipérbole
c) de parábola
d) de circunferência
e) de senóide

51. (Uerj) Uma porta colonial é formada por um retângulo de 100cm×200cm e uma semi-elipse.
Observe as figuras:



Na semi-elipse o eixo maior mede 100cm e o semi-eixo menor, 30cm.
Calcule a medida da corda PQ, paralela ao eixo maior, que representa a largura da porta a 224cm de altura.

52. (Ufc) O número de pontos de interseção das curvas $x^2+y^2=4$ e $(x^2/15)+(y^2/2) = 1$ é igual a:
a) 0
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

53. (Ufc) Encontre uma equação da reta tangente à curva $x^2-2x+y^2=0$ no ponto (1, 1).

54. (Fgv) No plano cartesiano, a curva de equações paramétricas x=2cost e y=5sent com $t \in$ IR é:
a) uma senóide
b) uma cossenóide
c) uma hipérbole
d) uma circunferência
e) uma elipse

55. (Ita) Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:
a) de uma elipse.
b) de uma parábola.
c) de uma hipérbole.
d) de duas retas concorrentes.
e) da reta y = - x.

56. (Ita) Sabe-se que uma elipse de equação $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação 3 x+ 2y = 6 é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

57. (Cesgranrio) Uma montagem comum em laboratórios escolares de Ciências é constituída por um plano inclinado, de altura aproximadamente igual a 40cm, com 4 canaletas paralelas e apoiado em uma mesa, forrada de feltro, cuja borda é curvilínea. Sobre a mesa há um ponto marcado no qual se coloca uma bola de gude. A experiência consiste em largar, do alto do plano inclinado, outra bola de gude, a qual, depois de rolar por uma das canaletas, cai na mesa e colide sucessivamente com a borda da mesa e com a primeira bola.
A borda da mesa tem a forma de um arco de:
a) elipse, e o ponto marcado é um de seus focos.
b) parábola, e o ponto marcado é seu foco.
c) hipérbole, e o ponto marcado é um de seus focos.
d) hipérbole, e o ponto marcado é seu centro.
e) circunferência, e o ponto marcado é seu centro.

Figura 57 – segunda lista de exercícios - pág.9

58. (Ufrn) O conjunto dos pontos P = (x,y), que estão a uma mesma distância do ponto F = (0,2) e do eixo ox, no plano cartesiano xy é

a) a parábola de equação $y = (x^2/2) + 4$.

b) a parábola de equação $y = (x^2/4) + 1$.

c) a parábola de equação $y = 4x^2 +1$.

d) a parábola de equação $y = 2x^2 +1$.

59. (Pucmg) O gráfico da curva de equação $(x^2/4) - (y^2/9) = 1$ é uma:

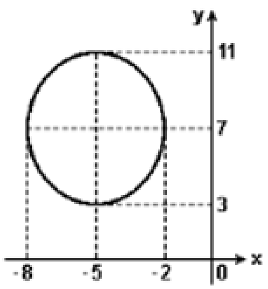
a) circunferência.

b) elipse.

c) hipérbole.

d) parábola.

60. (Unesp) A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é

a) $(x^2/5) + (y^2/7) = 1$.

b) $[(x+5)^2/9] + [(y-7)^2/16] = 1$.

c) $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 1$.

d) $[(x-5)^2/9] + [(y+7)^2/16] = 1$.

e) $[(x+3)^2/5] + [(y-4)^2/7] = 1$.

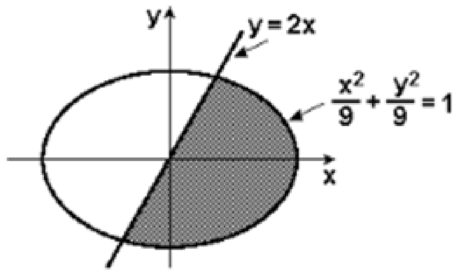
61. (Ufpe) Qual a inclinação da reta que passa pelo ponto (2,4) e que intercepta a parábola $y = x^2$ em um único ponto?

62. (Pucmg) A parábola de equação $y = x^2$ corta a circunferência de centro (0, 0) e raio $\sqrt{2}$ nos pontos A e B. O ponto médio do segmento AB é:

a) (2,0) b) (1,1)

c) (0,1) d) (0,2)

63. (Unifesp) A área sombreada na figura,



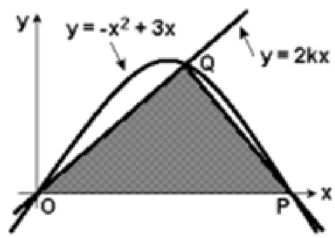
limitada pela elipse e pela reta indicadas, é:

a) π. b) 2π.

c) 3π. d) 4π.

e) 6π.

64. (Unifesp) Na figura, estão representados, no plano cartesiano xOy, a reta de equação $y = 2kx$, $0 \leq k \leq 3/2$, a parábola de equação $y = - x^2 + 3x$ e os pontos O, P e Q de intersecções da parábola com o eixo Ox e da reta com a parábola.



Nestas condições, o valor de k para que a área do triângulo OPQ seja a maior possível é:

a) 1/2.

b) 3/4.

c) 9/8.

d) 11/8.

e) 3/2.

Figura 58 – segunda lista de exercícios - pág.10

65. (Ita) Considere todos os números z = x + iy que têm módulo (√ 7)/2 e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a
a) 25/9
b) 49/16
c) 81/25
d) 25/7
e) 4

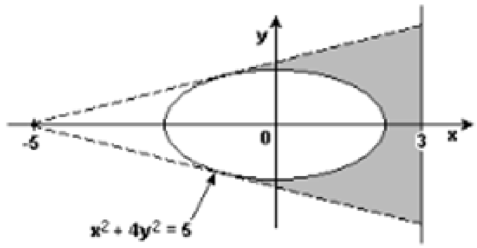
66. (Ita) Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação

$$\det \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288.$$

a) Uma elipse.
b) Uma parábola.
c) Uma circunferência.
d) Uma hipérbole.
e) Uma reta.

67. (Uerj) Num plano cartesiano encontramos a parábola $y = 2x^2$ e as retas paralelas (r): y = 3x e (s): y = 3x + 2. A reta (r) intercepta a parábola em A e B; a reta (s), em C e D. Unindo estes pontos, formamos o trapézio convexo ABCD. Existe, ainda, uma reta (t), paralela às retas (r) e (s), que tangencia a parábola no ponto P.
Determine:
a) a equação da reta (t) e as coordenadas do ponto P;
b) a área do trapézio convexo ABCD.

68. (Uerj) Um holofote situado na posição (-5,0) ilumina uma região elíptica de contorno $x^2 + 4y^2 = 5$, projetando sua sombra numa parede representada pela reta x = 3, conforme ilustra a figura abaixo.



Considerando o metro a unidade dos eixos, o comprimento da sombra projetada é de:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

69. (Ufrj) Determine o comprimento do segmento cujas extremidades são os pontos de interseção da reta y = x + 1 com a parábola $y = x^2$.

70. (Ufrn) Uma seção cônica é obtida a partir da interseção de um cone com um plano. Na figura abaixo, temos um exemplo de uma seção cônica, denominada Elipse. A figura consiste de duas esferas S_1 e S_2 que tangenciam o cone em duas circunferências C_1 e C_2 e tangenciam o plano π nos pontos F_1 e F_2. Os pontos P_1, P_2 e P estão, respectivamente, na interseção de uma reta do cone com as circunferências e a Elipse.

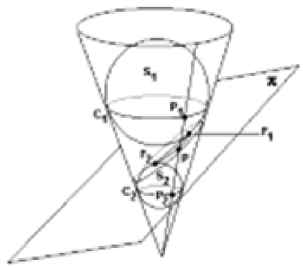


Figura 59 – segunda lista de exercícios - pág.11

A soma das distâncias de P aos pontos F_1 e F_2 é igual a distância
a) entre as duas circunferências.
b) entre P_1 e P_2.
c) entre os centros das duas esferas.
d) entre F_1 e F_2.

71. (Ita) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, -2) são, respectivamente,
a) $\sqrt{3}$ e 1/2.
b) 1/2 e $\sqrt{3}$.
c) $(\sqrt{3})/2$ e 1/2.
d) $\sqrt{3}$ e $(\sqrt{3})/2$.
e) $2\sqrt{3}$ e $(\sqrt{3})/2$.

72. (Unesp) O conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano, com $y \neq 0$, para os quais x e y satisfazem a equação sen $[y/(x^2+1)] = 0$ é uma
a) família de parábolas.
b) família de circunferências centradas na origem.
c) família de retas.
d) parábola passando pelo ponto Q(0,1).
e) circunferência centrada na origem.

73. (Ita) Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número

$$w = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z - 1| + |z + 1| - 3}}$$

pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

Figura 60 – segunda lista de exercícios - pág.12

GABARITO

1. [B]

2. a) α = -2, β = -1/4 e γ = - 1/16
b) 1 e $\sqrt{2}$

3. a) $y = 2x^2 - x$
b) $x = -2/15\, y^2 + 17/15\, y$

4. [C]

5. y = mx, | m | ≥ 3/2 ou x = 0

6. $A = 4\, (a^2.b^2)/(a^2+b^2)$

7. [D]

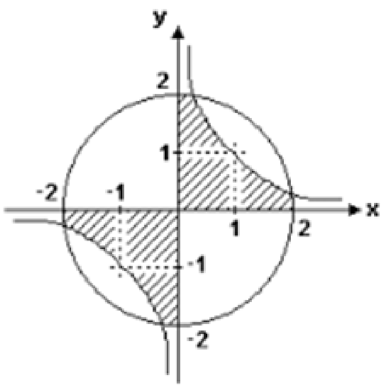
8. [E]

9. [D]

10. (0, -3) pertence a (5/2, 13/5) é exterior à elipse

11. [C]

12. Observe a figura a seguir:



13. F F V F V

14. [E]

15. [E]

16. 2

17. [E]

18. a) FALSA
b) FALSA
c) FALSA
d) VERDADEIRA

19. [C]

20. [C]

21. [C]

22. [E]

23. [E]

24. 9

25. [D]

26. [B]

27. V V F

28. [E]

29. V F V

30. [C]

31. [C]

32. [C]

33. [B]

34. [A]

35. [E]

36. a) A (1; 1) e B (-1; 1)

b) 45° ou 135°

37. a)
I) Substituindo as coordenadas do ponto P na equação da elipse, temos:
$[3^2/25] + [(12/5)^2/9] = 1$, ou seja:

Figura 61 – segunda lista de exercícios - pág.13

1=1
Logo, as coordenadas de P satisfazem à equação da elipse. Portanto, P pertence à elipse.
II) Como a ordenada P é positiva, a distância pedida é 12/5.

b) Q(-5, 0), R(5,0) e A = 12

38. Raio igual a 2

39. [E]

40. $[(x - 1)^2/1] + [(y + 2)^2/4] = 1$

41. [D]

42. Os pontos são (0, -1) e (8/5, 3/5).

43. [E]

44. [D]

45. [D]

46. [C]

47. [C]

48. [C]

49. 1 e $\sqrt{2}$

50. [C]

51. 60 cm

52. [C]

53. y = 1 é a reta procurada

54. [E]

55. [C]

56. P (8/9, 5/3)

57. [B]

58. [B]

59. [C]

60. [B]

61. m = 4.

62. [C]

63. [C]

64. [B]

65. [B]

66. [C]

67. a) (t): y = 3x - (9/8) ou 24x - 8y - 9 = 0
P (3/4; 9/8)
b) 4 u.a.

68. [C]

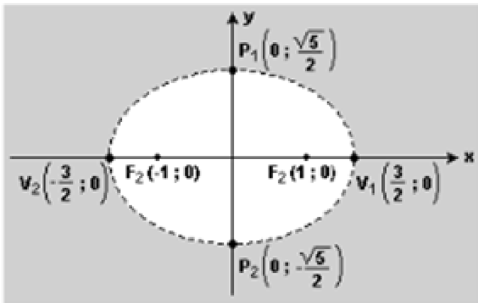
69. $\sqrt{10}$

70. [B]

71. [E]

72. [A]

73.



É o conjunto dos números complexos cujos afixos são os pontos externos à elipse representada acima.

Figura 62 – segunda lista de exercícios - pág.14

4.9 De volta ao GEOGEBRA

Na quinta feira, 15 de maio, retornamos ao laboratório de informática, para mais duas aulas, na verdade, as duas últimas aulas antes da prova e da reaplicação do questionário. Dessa vez, fomos com a intenção de explorar a teoria desenvolvida em sala de aula, observamos as cônicas no plano cartesiano e do ponto de vista analítico, fazendo uso das equações que foram aprendidas e dando ênfase aos elementos principais de cada cônica .

Os alunos foram divididos em seus grupos e, após um sorteio, cada grupo ficou responsável por pesquisar uma das cônicas no geogebra e depois apresentar o resultado aos demais colegas. E, claro, auxiliei-os nas pesquisas e acrescentei o que era conveniente em cada apresentação, o que deixou os alunos mais tranquilos para executar esta tarefa.

Apesar de não explorar teoricamente as rotações, fiz questão de mostrar à eles essa possibilidade, evitando que pudessem pensar que as cônicas estão sempre posicionadas apenas na vertical ou na horizontal.

Seguem algumas imagens das pesquisas que eles fizeram para encerrar este tópico:

GRUPO 1: ELIPSE

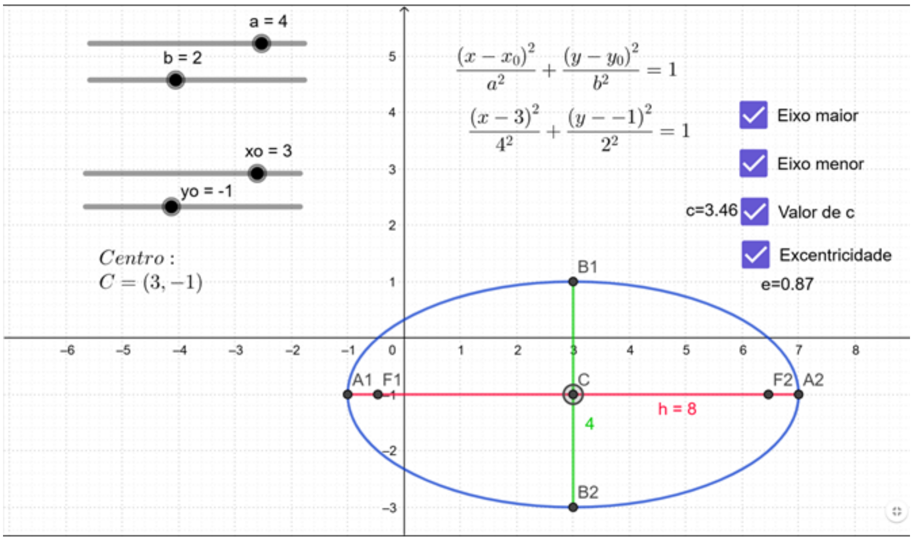


Figura 63 – elipse horizontal no plano cartesiano em geogebra

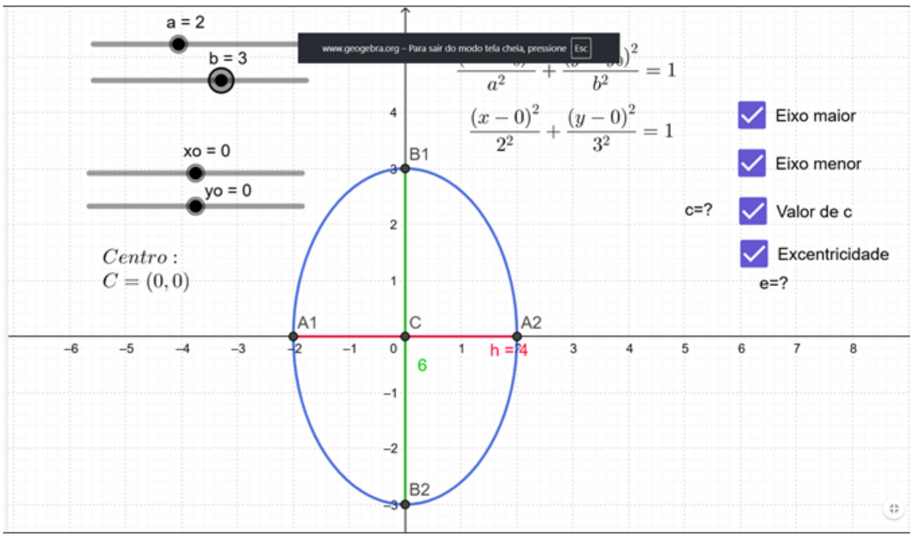


Figura 64 – elipse vertical no plano cartesiano em geogebra

GRUPO 2: CIRCUNFERÊNCIA

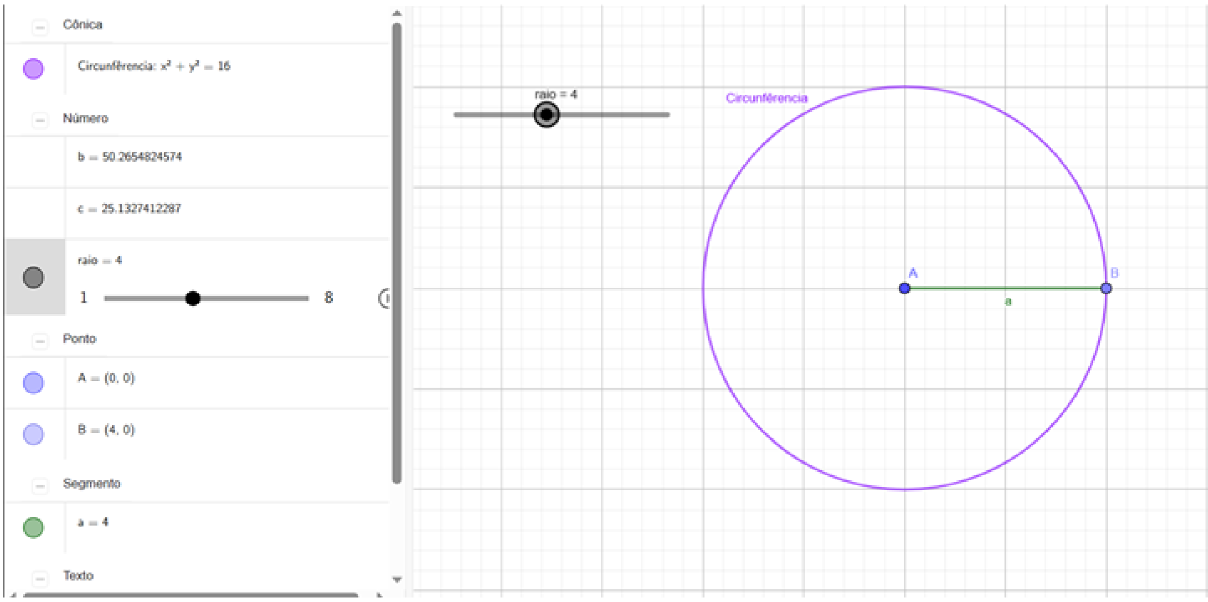


Figura 65 – circunferência com centro na origem do plano cartesiano em geogebra

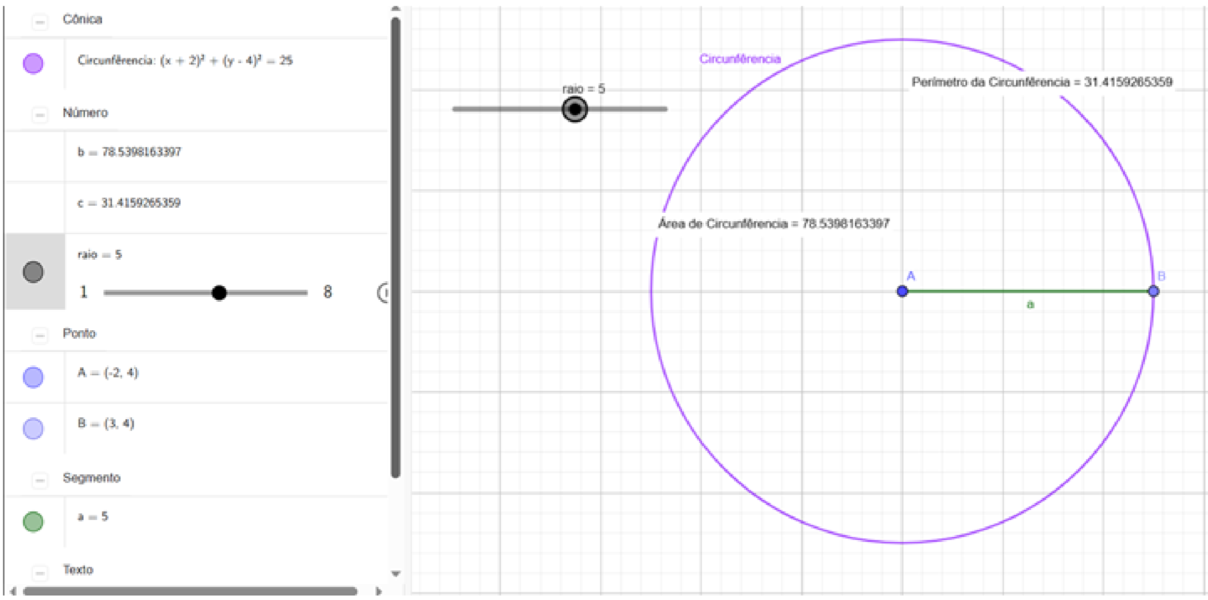


Figura 66 – circunferência no plano cartesiano em geogebra

GRUPO 3: HIPÉRBOLE

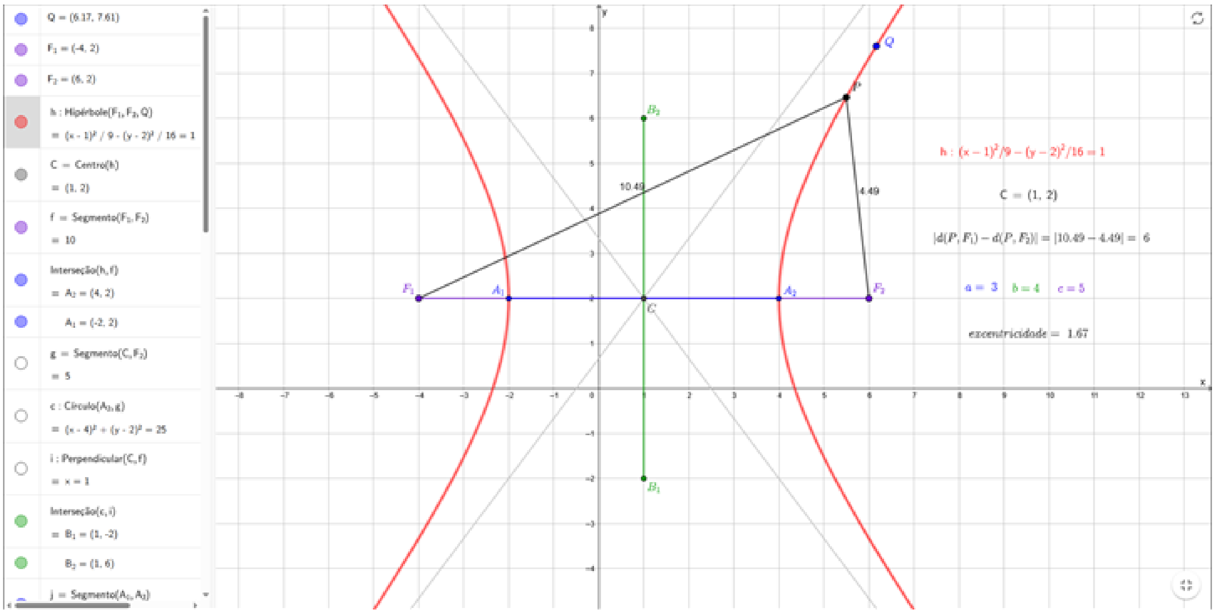


Figura 67 – hipérbole horizontal no plano cartesiano em geogebra

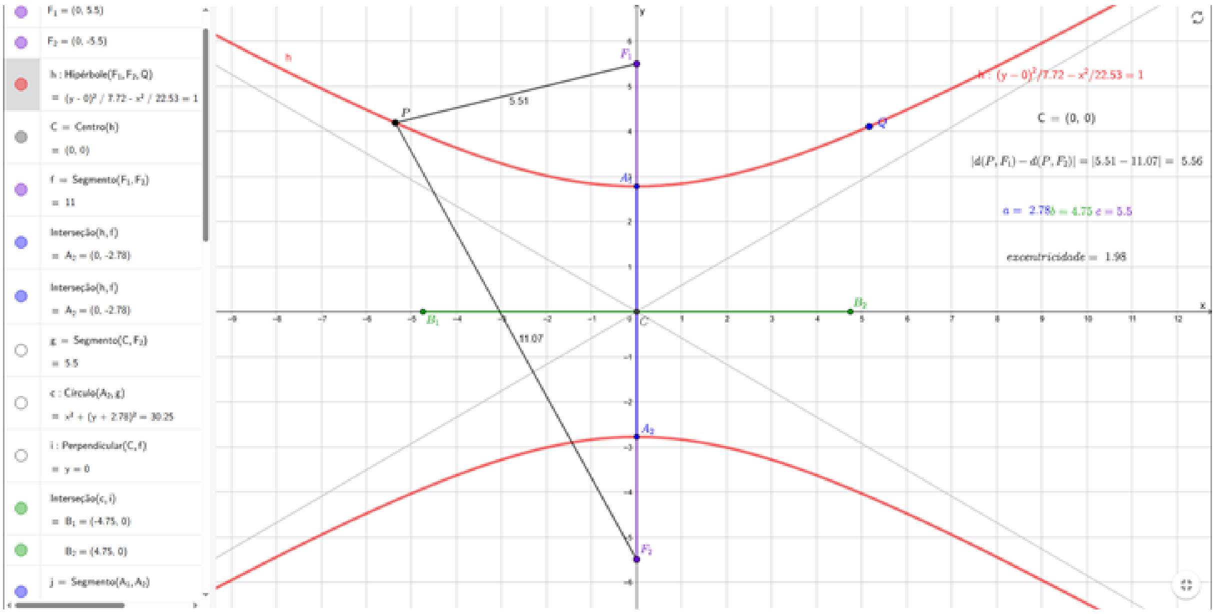


Figura 68 – hipérbole vertical no plano cartesiano em geogebra

GRUPO 4: PARÁBOLA

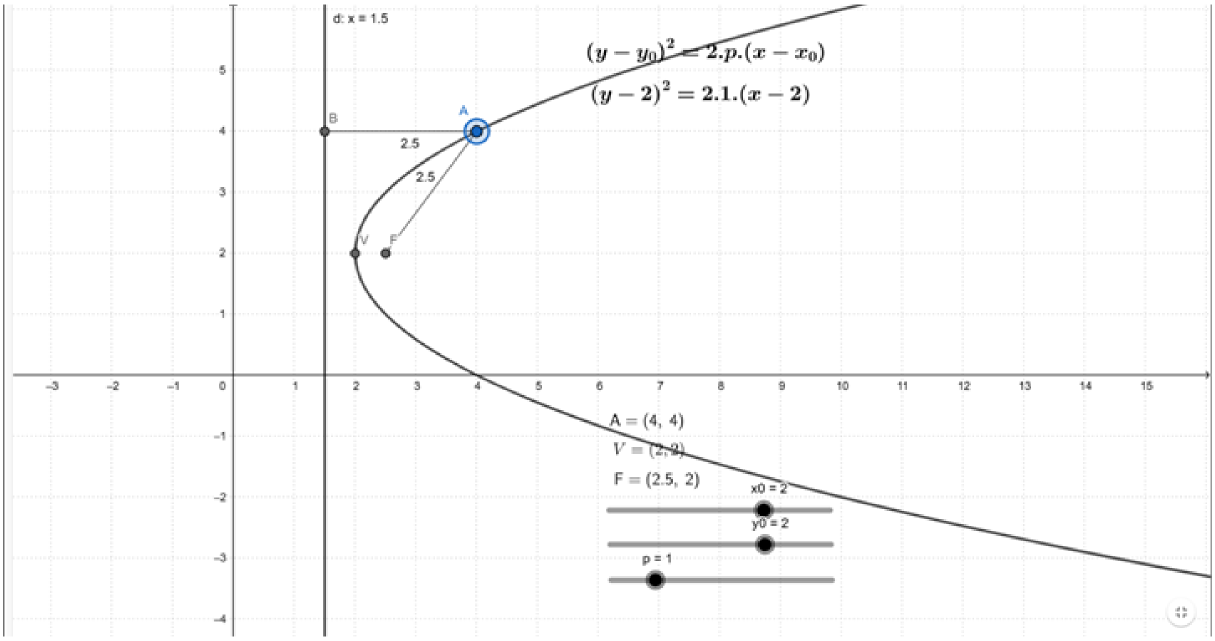


Figura 69 – parábola horizontal no plano cartesiano em geogebra

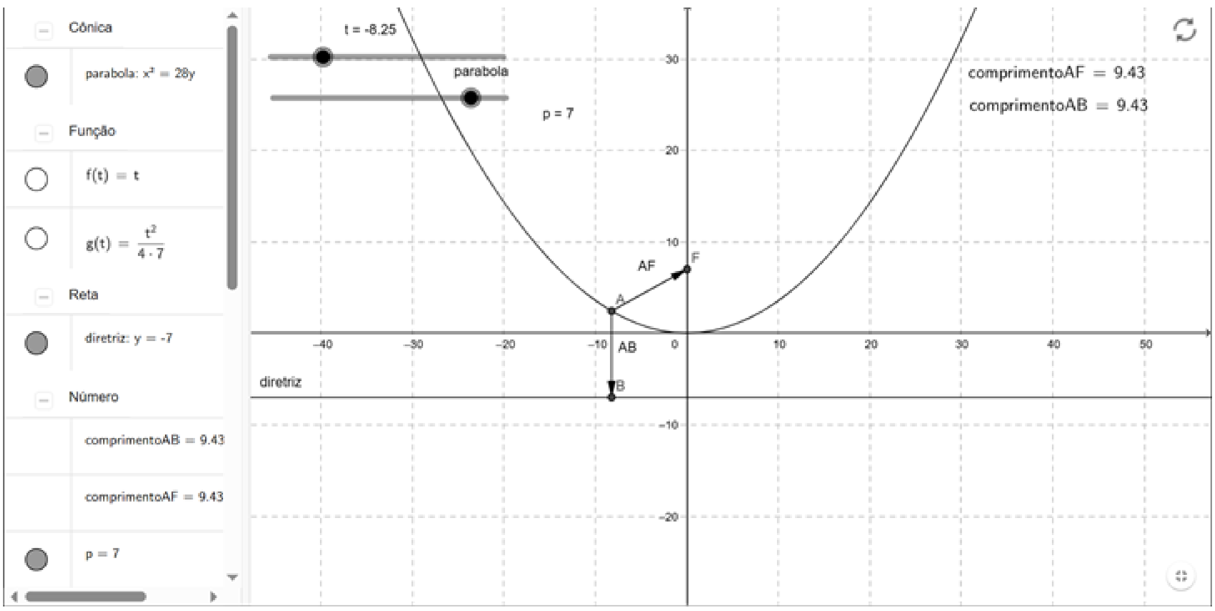


Figura 70 – parábola vertical no plano cartesiano em geogebra

4.10 Avaliação e reaplicação do questionário

4.10.1 Avaliação Teórica

Já na última semana do projeto, mais especificamente, dia 20 de maio, realizamos uma avaliação com duração de duas aulas, cujo resultado obtido foi convertido em parte da nota do 1° bimestre (que começou dia 19 de março e se encerrou dia 24 de maio). Média esta, que também foi composta pela confecção dos modelos, apresentação da cônica pelo grupo no geogebra e resolução das listas de exercícios. Sendo que, todas essas atividades somadas compõe um terço da média do bimestre em voga e o peso maior, dois terços da média é destinado a avaliação teórica.

Esta que segue é a prova a que os alunos foram submetidos:

AVALIAÇÃO SOBRE CÔNICAS

1- Considere as afirmações abaixo sobre uma elipse. Assinale a única alternativa correta:

a) O eixo maior de uma elipse sempre é horizontal.

b) O foco de uma elipse está sempre localizado em um de seus vértices.

c) A soma das distâncias de qualquer ponto da elipse até seus focos é constante.

d) A excentricidade (e) de uma elipse é um número entre 0 e 10.

e) Uma elipse possui três focos, independentemente de sua forma.

2- Considere as seguintes afirmações sobre a hipérbole na geometria analítica. Assinale a alternativa correta:

a) A soma das distâncias de qualquer ponto da hipérbole até seus focos é constante.

b) A excentricidade de uma hipérbole é sempre menor que 1.

c) Os vértices de uma hipérbole estão localizados no eixo maior.

d) A diferença das distâncias de qualquer ponto da hipérbole até seus focos é constante.

e) A hipérbole possui apenas um eixo de simetria.

3- Considere as afirmações abaixo a respeito das parábolas na geometria analítica e marque a alternativa correta:

a) A soma das distâncias de qualquer ponto da parábola a dois focos é constante.

b) A parábola sempre possui dois eixos de simetria.

c) A distância de qualquer ponto da parábola ao foco é igual à distância perpendicular do foco à diretriz.

d) A parábola não possui vértice, mas apenas foco e diretriz.

e) A excentricidade de uma parábola é sempre maior que 1.

4- Obtenha a equação reduzida da parábola P de vértice V (3, 4), foco F(3, 6) e diretriz r: y = 2.

5- Determine a equação reduzida da hipérbole de centro C(2,3), vértice A_2(5,3), e foco F_2(6,3).

6- Determine a equação reduzida da elipse de centro C(3,4), vértice A_2(7,4), e extremo do eixo menor B_1(3,6).

7- Determine a equação reduzida da hipérbole cujo centro é C(3,4), e um dos focos é F_1(0,4). Considere que a hipérbole possui o eixo maior horizontal.

8- (Unicamp) Uma elipse que passa pelo ponto (0,3) tem seus focos nos pontos (-4,0) e (4,0).

a) O ponto (0,-3) é interior, exterior ou pertence à elipse?
b) Mesma pergunta para o ponto (5/2, 13/5). Justifique suas respostas.

9- (Puccamp) A expressão $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ é a equação reduzida de uma elipse de:
a) excentricidade 5/3.
b) distância focal 16.
c) eixo menor igual a 6.
d) eixo maior igual a 10.
e) centro no ponto (5,6).

10- (Fuvest) Determine as equações das retas do plano que passam pela origem do sistema de coordenadas e que não interceptam a curva do plano dada pela equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Como sou parte dos professores que ministraram pouquíssimas vezes o conteúdo de cônicas ao ensino médio e, sinceramente, não me recordo quando isso ocorreu pela última vez antes desse projeto, não tenho como comparar os resultados obtidos nesta avaliação. Portanto, vou apenas apresentar as estatísticas relacionadas.

Cada questão vale 1.0 ponto, sendo que, na questão 8, que é dividida em partes a) e b), temos 0,5 ponto para cada parte.

Questão 1: 20 acertos e 4 erros.
Questão 2: 21 acertos e 3 erros.
Questão 3: 21 acertos e 3 erros.

Questão 4: 15 acertos e 9 erros.
Questão 5: 18 acertos e 6 erros.
Questão 6: 16 acertos e 8 erros.
Questão 7: 10 acertos e 14 erros.
Questão 8: a) 15 acertos e 9 erros. b) 12 acertos e 13 erros.
Questão 9: 14 acertos e 10 erros.
Questão 10: 4 acertos e 20 erros.

Podemos verificar que a média das notas é de aproximadamente 6,35, e que, a distribuição de notas ficou da seguinte maneira: 2 alunos obtiveram nota 10; 1 aluno tirou 9,5; 2 tiraram nota 9; 1 aluno tirou 8,5; 2 alunos tiraram 8; 1 aluno tirou 7,5; 2 alunos tiraram 7; 4 alunos tiraram 6; 3 alunos tiraram 5; 3 alunos obtiveram nota 4; 2 alunos tiraram nota 3 e 1 aluno obteve nota 2.

4.10.2 Reaplicação do Questionário

Já, sobre o questionário, pude encontrar grandes diferenças entre a primeira aplicação (início do projeto) e a segunda (fim do projeto), vamos então às estatísticas e comparações. Para a pergunta: O que são cônicas? Cite exemplos.

- todos os alunos disseram que são as diferentes secções de um cone ou algo parecido. E citaram corretamente os 4 casos principais.
- e ainda, 6/24 alunos citaram corretamente algum caso degenerado.

Na questão dois, onde eles devem identificar visualmente as cônicas através de imagens, todos classificaram as cônicas corretamente.

Na terceira questão, devemos lembrar que os alunos deveriam definir as cônicas que identificassem na questão anterior e, além de entender melhor o que é uma definição e sua importância dentro da área das disciplinas exatas, obtivemos as seguintes estatísticas.

- 21/24 alunos definiram a circunferência como o lugar geométrico equidistante de um ponto, além de destacar que ela é obtida pelo corte perpendicular ao eixo vertical do cone.
- 15/24 alunos definiram a elipse como o lugar geométrico dos pontos de um plano cujas distâncias a dois pontos fixos desse plano têm soma constante e 21/24 alunos disseram que ela é obtida pela interseção de um cone circular reto e um plano que corta todas as suas geratrizes. Vale destacar que 6/24 alunos tentaram definir a elipse mas cometeram erros importantes ao discorrer sobre ela. Por exemplo: “ É o lugar geométrico equidistante de dois pontos. ”

- 21/24 alunos definiram a parábola como o lugar geométrico equidistante de um ponto e uma reta, 14/24 alunos disseram que ela é obtida por corte paralelo a geratriz e outros 7 disseram ser um corte inclinado, mas não destacaram que deveria ser paralelo à geratriz.
- 10/24 alunos definiram a hipérbole como a curva em que é constante a diferença das distâncias de cada um dos seus pontos aos seus focos e 21/24 alunos disseram que se tratava de uma secção paralela à altura do cone.

Sobre a quarta e última questão do questionário, onde os alunos precisavam responder se conheciam alguma equação que representasse alguma das cônicas, todos responderam que sim, mas ao escrever as equações e tentar relacioná-las com as cônicas corretas, chegamos a seguinte conclusão:

- 22/24 alunos relacionaram corretamente a circunferência à sua equação.
- 21/24 alunos relacionaram corretamente a elipse à sua equação.
- 22/24 alunos relacionaram corretamente a parábola à sua equação.
- 21/24 alunos relacionaram corretamente a hipérbole à sua equação.

Portanto, vale a pena destacar que a evolução do grupo, no que diz respeito ao assunto, foi impressionante. Basta analisar as estatísticas relativas à primeira aplicação do questionário e à segunda.

5 CONCLUSÃO

5.1 Aspectos Positivos

A princípio, gostaria de dizer que não é possível expressar como foi gratificante realizar este trabalho, ver os alunos motivados e interessados por um tema tão complexo, foi revigorante, me inspirando a reaplicar o projeto e realizar e criar novos projetos semelhantes a esse.

Foi possível perceber que partir do concreto, e com isso quero dizer, partir da modelagem e do uso do geogebra3D, garantiu que os objetivos de abstração e visualização fossem contemplados com louvor e, não só isso, garantiu também a motivação e o comprometimento que os alunos precisavam, para confrontar suas dificuldades com a teoria que viria a seguir.

Sabemos que a Matemática não é das disciplinas mais queridas, então envolver arte e computação, com certeza foi positivo.

Os alunos entenderam que sua participação era crucial para que o projeto acontecesse de forma satisfatória e significativa, sendo assim, podemos destacar o sucesso obtido ao pensar que o comprometimento desses alunos, fez com que a maioria superasse a defasagem do conhecimento matemático, sem contar a própria dificuldade matemática que o tema traz consigo.

Sozinhos, eles foram capazes de conectar o trabalho de modelagem com o momento do seu aprendizado, visto que todos os grupos realizaram pesquisas para executar o que lhes foi pedido e, assim, ganharam conhecimento sobre os aspectos históricos através dessa pesquisa. Por isso, apresentar a história das cônicas ficou mais fácil e interessante, já que, as contribuições feitas pelos alunos tornaram essa apresentação interativa.

As dúvidas que a pesquisa proporcionou, também foram pertinentes e trouxeram acréscimos a todos ao serem esclarecidas e inseridas adequadamente nos momentos em que trabalhamos a parte teórica das cônicas.

Analisando o questionário aplicado antes e depois da realização do projeto, vimos um ganho extremamente substancial no entendimento das cônicas. Os envolvidos entenderam o que são as cônicas, como identificar qualquer uma delas, principalmente saber as diferenças entre uma hipérbole e uma parábola, compreenderam o que é uma definição e qual a definição de cada uma das 4 cônicas.

Sobre a avaliação que os estudantes realizaram, como era voltada principalmente aos aspectos analíticos das cônicas, pudemos observar que todos absorveram alguma coisa nesse sentido. Uns muito e outros pouco, mas todos conseguiram evoluir.

É possível dizer que o ganho obtido foi muito além do esperado, despertando inclusive o interesse de vários alunos que se diziam desiludidos com a matemática, em retornar sua relação íntima com essa disciplina. E bem sabemos que isso é cada vez mais raro.

Desse modo, podemos concluir que esta sequência didática atingiu a maioria dos seus objetivos, com eficácia maior que a prevista quando elaborada e com certeza poderá ser referência e ajuda para professores do ensino médio. Tanto ao pensar se devem ministrar a parte da geometria analítica das cônicas, como se devem tentar fazer isso de forma diferenciada, incluindo a modelagem, destacando os aspectos históricos, fazendo uso das tecnologias à sua disposição mas principalmente, usando sua criatividade para realizar essa tarefa.

Por fim, meu amor e carinho pelo tema cresceu, eu também atingi pessoalmente meus objetivos, ora por caminhos imprevistos, o que acrescenta tempero e torna tudo mais prazeroso, e, ora por caminhos bem galgados que asseguraram a viabilidade de realização desse meu desejo íntimo em trabalhar com esse conteúdo.

5.2 É possível melhorar?

Algumas coisas podem melhorar, sempre é possível melhorar. Por exemplo: a aplicação do questionário não ser anônima (para o professor), pois dessa forma seria mais fácil coletar dados fiéis a realidade. Até agora não sei se a resposta "são coisas engraçadas' dada na primeira pergunta do questionário (o que são cônicas?), foi dada por um aluno especial ou se foi uma gracinha de algum outro aluno ou se o aluno não leu corretamente a pergunta.

Outro ponto, é que, ao propor inicialmente a modelagem, minha mente arcaica imaginava que os alunos modelariam o cone e o cortariam por várias perspectivas, sem se importar com a maneira "correta" de fazer isso, imaginando que esse seria um processo mais intuitivo e, desse modo, partindo principalmente dos enganos cometidos e dos cortes não realizados nesse processo, faríamos juntos as comparações entre o que um grupo pensou e outro não, ou o que nenhum grupo pensou, para começar a cativá-los. Ledo engano de uma mente presa em seu próprio passado, onde o advento da internet ainda não havia ocorrido.

Pensando nisso, não teria porque, logo na aula inicial, onde dividimos os grupos e é realizada a apresentação do cone, já apresentar as cônicas, com seus nomes e explicar melhor como realizar cada secção. Inclusive indicando sites e leituras adequadas.

Vimos que, em um dos modelos, a parábola não foi seccionada corretamente. Antes de arquivar os modelos, porque não corrigi-los. Fato que permitiria ao grupo que errou entender melhor onde está seu engano, invés de fazer uma correção oral, que é bem mais vazia em significados.

E, essa ideia do parágrafo anterior, ganha ainda mais força, quando observamos que após a reaplicação do questionário, 21/24 alunos ainda associavam a hipérbole à um corte paralelo ao eixo do cone, quando sabemos que ele pode ser feito de qualquer modo, contanto que a inclinação dessa secção deve ser tal que intersecte as duas folhas do cone.

Com respeito ao uso do GEOGEBRA, minha pouca experiência com este aplicativo e falta de conhecimento sobre algumas de suas funcionalidades trouxeram algumas limitações na aplicação do projeto. Todos os ambientes em que estivemos, nenhum foi de minha autoria, utilizamos coisas prontas para esse momento. Se eu dominasse melhor este aplicativo, poderia fazer minhas próprias criações e até, quem sabe, ensinar os alunos a fazer o mesmo. Inclusive, se minhas espertises permitissem, poderia tornar as aulas teóricas menos maçantes.

Por fim, além desses detalhes, podemos pensar em acrescentar boas ideais também. Elas sempre são bem-vindas quando enriquecem o trabalho.

6 PRODUTO EDUCACIONAL

Com base na análise da aplicação da sequência didática que fizemos e descrevemos no capítulo 4, e levando em conta os pontos positivos e negativos expostos no capítulo 5, propomos o seguinte,

Produto Educacional para o Ensino de Cônicas

Público alvo: Alunos do 3°ano do Ensino Médio ou 4° ano do ensino médio integrado ao ensino técnico.

Duração: A quantidade de aulas adequada é 29 ou 30 aulas. Já, a duração do projeto depende da quantidade de aulas semanais que a classe envolvida no projeto tem dessa disciplina. Por exemplo: para três aulas semanais (como no presente trabalho) 10 semanas ou um bimestre. Para cinco aulas semanais como na maioria das escolas 6 semanas.

AULA 1: Questionário de Conhecimento; Definições de Cone e Secção Cônica; Instruções para modelagem de Cones e Secções Cônicas:

- Questionário de conhecimento:

Aplicar o seguinte questionário, para avaliar o conhecimento dos alunos a respeito do tema de estudo, a saber, cônicas.

Questão 1: Você sabe o que são CÔNICAS? Caso saiba, cite exemplos.

Questão 2: Nomeie as figuras:

Figura 71 – cônicas

Questão 3: Àquelas figuras que você nomeou, você saberia definir alguma delas? Em caso afirmativo, faça isso.

Questão 4: Você conhece alguma equação matemática que represente alguma das figuras ilustradas na segunda questão?

- Definições de Cone e Secção Cônica:

Após a aplicação do questionário esclarecer os conceitos de Cone e Secção Cônica.

Definição de Cone: Sejam t e g duas retas concorrentes no espaço tridimensional. Um cone com eixo de simetria t e geratriz g é a superfície obtida pela rotação de g em torno do eixo t.

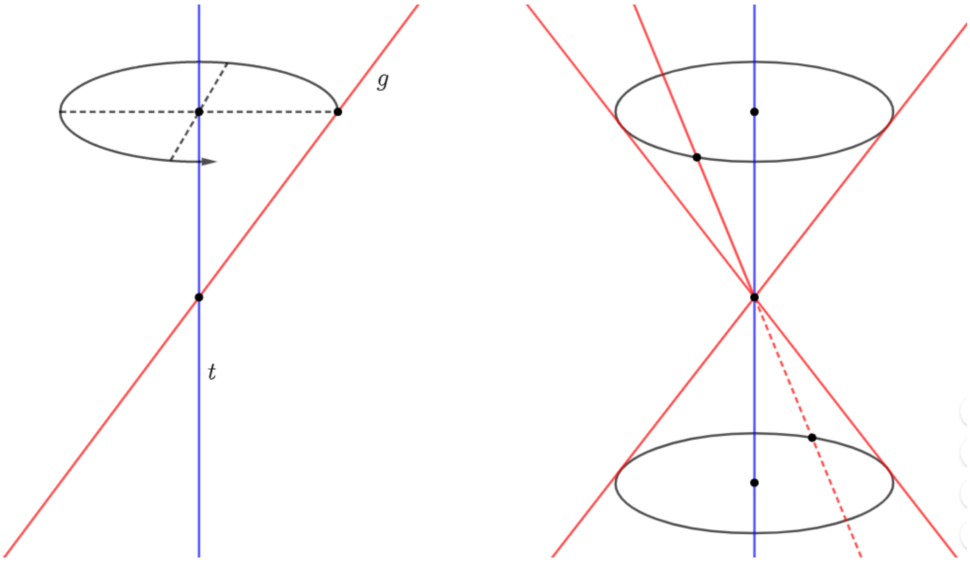


Figura 72 – Definição de Cone

O ponto comum a t e g é chamado vértice do cone. Qualquer reta pertencente ao cone e que passe pelo vértice do cone também é chamada de geratriz do cone.

Definição de Secção cônica: Dado um cone $\mathcal{C}$ então, qualquer curva que pode ser obtida como a intersecção de um plano com o cone $\mathcal{C}$ é chamada de secção cônica.

- Instruções para modelagem de Cones e Secções Cônicas:

Após essa discussão, dividir os alunos em grupos e orientá-los para que cada grupo construa modelos concretos de cones e algumas secções cônicas desses cones. A divisão dos grupos pode ser feito por afinidade se conhecemos o grupo e sabemos que nenhum aluno ficará escanteado, caso contrário os grupos podem ser sorteados para mostrar imparcialidade. Já a confecção dos cones poderá ser feita com plástico, papel cartão, acrílico, isopor, argila, ou outro material acessível e de fácil manuseio. Estipular um período (sugerimos 3 semanas) para a confecção desses cones.

AULAS 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10:

Durante o período de confecção dos cones, fazer uma revisão de geometria analítica sobre os conceitos de: ponto médio, distância entre dois pontos, retas, paralelismo, perpendicularismo e distância entre ponto e reta. Pois esta revisão será necessária para o desenvolvimento da teoria sobre cônicas, usando geometria analítica.

AULA 11: Apresentação dos modelos concretos:

Nesta aula, cada grupo deverá apresentar os modelos que construiu e deverá ser feita discussão sobre falhas e acertos. Caso necessário, dependendo do número de alunos e de grupos formados, poderão ser usadas mais de uma aula para apresentação dos modelos.

AULAS 12 e 13: Um pouco de História:

Expor a história do surgimento e desenvolvimento do estudo das cônicas, explorando as participações de Menaechmus, Apolonio, Euclides, Arquimedes, Pappus, Descartes e

Dandelin.

AULA 14: Introdução de cones usando GEOGEBRA:

Explorar os elementos do cone e das secções cônicas utilizando o GEOGEBRA3D. Isso pode ser feito de dois modos: somente o professor apresenta fazendo uso do retroprojetor e os alunos assistem essa apresentação ou o professor pode permitir que os alunos interajam, manipulando também o GEOGEBRA, contanto que seja possível que todos alunos possam participar, é recomendável, no máximo dois alunos por computador. também é necessário levar em conta os recursos disponíveis na instituição de ensino para decidir como proceder.

AULAS 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 e 24: Teoria e exercícios:

Desenvolver a teoria do estudo de cônicas, seguindo o roteiro do capítulo 3 deste trabalho ou outra referência que julgar adequada, com a definição utilizando a noção de focos e obtenção das equações dessas cônicas, com focos e diretriz "bem posicionados", ou seja, focos sobre um dos eixos coordenados ou sobre retas paralelas a um dos eixos coordenados e reta diretriz também paralela ou coincidente com algum eixo coordenado. Propor listas de exercícios para fixação de conceitos e resolução de problemas.

AULAS 25 e 26: De volta ao GEOGEBRA:

Aplicar no GEOGEBRA o que foi ensinado nas aulas anteriores. Caso seja necessário, esta atividade poderá ser desenvolvida com mais aulas.

AULAS 27, 28 e 29: Avaliação Teórica e reaplicação do questionário de conhecimento:

Aplicar uma avaliação teórica sobre tudo o que foi desenvolvido, com ênfase nas aulas sobre Teoria e exercícios. Sendo que a nota final deverá ser computada da seguinte maneira: 0,7.AT + 0,2.M + 0,05.G + 0.05.L, onde:

- AT = nota da avaliação teórica.
- M = nota da modelagem.
- G = nota do mini-seminário usando o geogebra.
- L = nota da lista de exercícios (escolher entre 20 e 30 exercícios da lista para entregar).

Todas as notas vão de 0 à 10.

É importante ressaltar, que todas as etapas dessa sequência didática, podem ser adaptadas de acordo com a realidade da instituição de ensino em que será aplicada e principalmente o nível de conhecimento matemático dos alunos da turma envolvida. Portanto, o número de aulas previstas neste produto educacional, bem como cada etapa das atividades desenvolvidas estão atrelados a isso.

No Instituto Federal em Araraquara contamos com laboratórios e salas de aula bem equipados e prontos para uso, sem contar que os alunos passam por um disputado processo seletivo para ingressar seus estudos ali, e tudo isso faz diferença ao planejar como será aplicado o projeto.

7 REFERÊNCIAS

BARROS, Paulo Sérgio de; CARVALHO, Jorge. **Geometria Analítica: um enfoque vetorial**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

COOLIDGE, Julian Lowell. **A treatise on the circle and the sphere**. Oxford: Clarendon Press, 1968.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?** 2. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 1996.

DESCARTES, René. **A Geometria**. Tradução e notas de Luiz Henrique de Araújo Dutra. São Paulo: Edusp, 2009. (Obra original publicada em 1637)

DIJKSTERHUIS, Eduard Jan. **Arquimedes**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo – EDUSP, 1987.

HEATH, Thomas L. **The Works of Apollonius of Perga: Including Book I of the Conics and Other Associated Works**. Cambridge: Cambridge University Press, 1896.

HEATH, Thomas L. **A History of Greek Mathematics**. New York: Dover Publications, 1981.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Jorge. **Curso de Geometria Analítica**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

STEWART, James. **Cálculo**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

STEWART, James; CLEGG, Daniel. **Pré-cálculo: matemática para cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

TOOMER, G. J. **Pappus of Alexandria**. In: **Dictionary of Scientific Biography**. Vol. 15. New York: Charles Scribner's Sons, 1990.

MENEZES, Elizabeth. Resumo de geometria analítica. **Estratégia Concursos,** 2023. Disponível em: https://www.estrategiaconcursos.com.br/blog/geometria-analitica. Acesso em: 21 maio 2025.