

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

PEDRO IGNÁCIO LIMA GADÊLHA JARDIM

**ESTIMATIVA DA RIGIDEZ AXIAL E CAPACIDADE DE CARGA DE PILARES DE
MADEIRA PARCIALMENTE REFORÇADOS POR MATERIAIS COMPÓSITOS
LAMINADOS**

SÃO CARLOS

2026

PEDRO IGNÁCIO LIMA GADÊLHA JARDIM

**ESTIMATIVA DA RIGIDEZ AXIAL E CAPACIDADE DE CARGA DE PILARES DE
MADEIRA PARCIALMENTE REFORÇADOS POR MATERIAIS COMPÓSITOS
LAMINADOS**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Christoforo

Área de concentração: Estruturas e Geotecnia

SÃO CARLOS

2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Pedro Ignácio Lima Gadêlha Jardim, realizada em 02/06/2026.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. André Luis Christoforo (UFSCar)

Prof. Dr. Leandro José da Silva (UFSJ)

Profa. Dra. Marília da Silva Bertolini (UNESP)

Prof. Dr. Leonardo Gonçalves Pedroti (UFV)

Prof. Dr. Eduardo Chahud (UFMG)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

RESUMO

JARDIM, P. I. L. G. **Estimativa da rigidez axial e capacidade de carga de pilares de madeira parcialmente reforçados por materiais compósitos laminados**. 2026. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2026.

A madeira é um material amplamente utilizado em construções desde a antiguidade, comumente encontrada em construções históricas em todo o planeta. Como a madeira é um material biodegradável, as construções históricas que a utilizam como tipologia estrutural, sem o conhecimento das técnicas atuais de garantia da durabilidade deste elemento, necessitam de maiores cuidados quanto sua proteção. Foram observados diversos estudos que abordam técnicas de reforço e recuperação de estruturas de madeira, sendo a utilização de polímeros reforçados com fibras (PRF) uma solução com crescente interesse da comunidade científica. Observou-se uma lacuna nos estudos publicados quanto à aplicação do reforço localizado de PRF em pilares de madeira com aberturas longitudinais concêntricas. Dessa forma, a obtenção de uma equação para a determinação da carga última e rigidez axial se faz necessária para a viabilização do método de reforço. O presente estudo propôs equações capazes de descrever a rigidez axial e a carga última de pilares de madeira com abertura longitudinal e com reforço parcial de PRF, considerando fatores multiplicadores referentes à instabilidade e o efeito do confinamento gerado pelo reforço. Para a previsão do modelo, foi adotado o uso de um algoritmo evolutivo 'caixa-branca': regressão simbólica. Esta solução foi considerada por possuir uma elevada capacidade de avaliação dos dados e interpretação física, permitindo o dinamismo topológico do modelo gerado. A geração de dados para a aplicação da regressão simbólica foi feita por meio de um amplo estudo paramétrico, via simulação pelo método dos elementos finitos, contando com 1392 modelos. Foram considerados os seguintes parâmetros: a espécie da madeira, o diâmetro e o comprimento do pilar, a proporção da abertura, o tipo de fibra, a quantidade de camadas e o espaçamento do PRF. Os resultados do estudo paramétrico revelaram que a eficácia do reforço não é universal, sendo estritamente ditada pelo modo de colapso dominante. Em peças esbeltas, a aplicação de baixas taxas de PRF otimizou a resposta estrutural ao gerar confinamento local e mitigar deformações transversais precoces. Em contrapartida, em pilares robustos, taxas elevadas de reforço demonstraram eficiência marginal devido a falhas prematuras induzidas por concentrações de tensão na interface madeira-compósito. Os modelos preditivos gerados a partir da regressão simbólica apresentam expressiva robustez estatística, obtendo $R^2 = 0,92$ para previsão da capacidade de carga de pilares avaliados experimentalmente em outros estudos, e superam modelos empíricos preexistentes na literatura por introduzirem uma variância ligeiramente conservadora, garantindo que eventuais desvios atuem a favor da segurança estrutural.

Palavras-chave: Pilares de madeira, polímeros reforçados com fibras, regressão simbólica, reforço estrutural, método dos elementos finitos.

ABSTRACT

JARDIM, P. I. L. G. **Estimation of axial stiffness and load capacity of timber columns partially reinforced by laminated composite materials**. 2026. Thesis (PhD in Civil Engineering) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2026.

Wood is a material widely used in construction since antiquity, commonly found in historical buildings around the planet. As wood is a biodegradable material, historical buildings that use it as a structural typology, without the knowledge of current techniques to ensure the durability of this element, require greater care regarding their protection. Several studies have been observed addressing techniques for strengthening and recovering timber structures, with the use of fiber-reinforced polymers (FRP) being a solution of growing interest in the scientific community. A gap was observed in published studies regarding the application of localized FRP reinforcement in timber columns with longitudinal openings. Thus, obtaining an equation to determine the ultimate load and axial stiffness is necessary to make the strengthening method viable. The present study proposed an equation capable of describing the ultimate load of timber columns with longitudinal openings and partial FRP reinforcement, considering multiplying factors related to instability and the confinement effect generated by the reinforcement. Furthermore, a factor for adjusting the axial stiffness was also proposed. For this, a broad parametric study was carried out through finite element method simulations, comprising 1392 models. The following parameters were considered: wood species, column diameter and length, opening proportion, fiber type, number of layers, and FRP spacing. For the model prediction, a 'white-box' evolutionary algorithm was adopted: symbolic regression. This solution was chosen due to its high capacity for data evaluation and physical interpretation, allowing for the topological dynamism of the generated model. The results of the parametric study revealed that the effectiveness of the reinforcement is not universal, being strictly dictated by the dominant collapse mode. In slender members, the application of low FRP rates optimized the structural response by generating local confinement and mitigating early transverse deformations. In contrast, in robust columns, excessive reinforcement demonstrated marginal efficiency due to premature failures induced by stress concentrations at the wood-composite interface. The predictive models generated by symbolic regression show significant statistical robustness ($R^2 = 0.92$ for load capacity) and surpass pre-existing empirical models in the literature by introducing a slightly conservative variance, ensuring that eventual deviations act in favor of structural safety.

Keywords: Timber columns, fiber-reinforced polymers, symbolic regression, structural strengthening, finite element method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Edifício Mjøstårnet.	10
Figura 2 – Redução da seção transversal por ataque de cupins.....	11
Figura 3 – Quantidade de estudos publicados sobre reforço de estruturas de madeira e uso do PRF na madeira.	13
Figura 4 – Coocorrência dos termos adotados nos títulos dos trabalhos sobre reforço na madeira.....	14
Figura 5 – Representação da fase matriz e dispersa da madeira.	19
Figura 6 – Estrutura macroscópica da madeira.....	19
Figura 7 – Indicações das direções longitudinal (L), radial (R) e tangencial (T) da madeira.....	20
Figura 8 – Pilares com reforço contínuo e parcial.....	22
Figura 9 – Pilar reforçado com barras de aço pela técnica NSM e compósitos laminados colados externamente.	24
Figura 10 – Pilar reforçado com compósito particulado.	24
Figura 11 – Classificação hierárquica dos materiais compósitos.	25
Figura 12 – Fluxograma geral de regressão simbólica baseado em programação genética.	33
Figura 13 – Procedimentos da revisão bibliográfica sistemática.	37
Figura 14 – Fluxograma PRISMA da revisão sistemática.....	39
Figura 15 – Ano de publicação dos artigos da revisão sistemática.....	40
Figura 16 – Classificação dos artigos conforme os critérios de qualidade.....	41
Figura 17 – Mapa de relação entre as palavras-chave da amostra.....	42
Figura 18 – Abordagem dos estudos encontrados na amostra.	43
Figura 19 – Arranjo das amostras ensaiadas à compressão axial por Li <i>et al.</i> (2013): reforço toroidal (a), hélice única (b), hélice dupla (c), hélice cruzada (d) e hélice contínua (e). Dimensões em mm.....	47
Figura 20 – Amostras ensaiadas por Yang <i>et al.</i> (2021).....	48
Figura 21 – Pilares ensaiados por Zhou <i>et al.</i> (2021): compressão centrada e reforço em intervalos (a), compressão centrada e reforço contínuo (b), flexão composta e reforço em intervalos (c) e flexão composta e reforço contínuo (d).	49
Figura 22 – Amostras reforçadas com fios de 48 mil filamentos: reforço helicoidal contínuo (a) e parcial (b).	50

Figura 23 – Compósitos estudados por Wang <i>et al.</i> (2023): PRFC (a), C2G1 (b), C2A1G1 (c), C1A2G1 (d), CoGa (e) e CoAa (f).	51
Figura 24 – Dispersão entre os índices de reforço com o incremento da resistência dos pilares.	55
Figura 25 – Diagrama do reforço (a) e amostras ensaiadas (b)	57
Figura 26 – Esquema de fabricação (a) e corte frontal dos pilares (b)	58
Figura 27 – Indicação das variáveis adotadas para determinação de β_B	59
Figura 28 – Condição de contorno do modelo para análise de flambagem elástica (unidades em mm)	64
Figura 29 – Modelo instável sob controle de carregamento (<i>snap-through</i>) e deslocamento (<i>snap-back</i>)	65
Figura 30 – Representação da abertura considerada: pilar íntegro (a), 25% do diâmetro (b) e 50 % do diâmetro (c)	67
Figura 31 – Representação dos espaçamentos considerados: metade (a), o dobro (b) e o mesmo valor (c) de b_{PRF}	68
Figura 32 – Pilar considerado para validação	79
Figura 33 – Instrumentação do ensaio	80
Figura 34 – Curva força-deslocamento dos pilares de referência: sem reforço (a) e com reforço (b)	81
Figura 35 – Modo de falha dos pilares do estudo de referência: sem reforço (a) e com reforço (b)	82
Figura 36 – Força-deslocamento da validação das propriedades elásticas e de resistência: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b)	84
Figura 37 – Força-deslocamento da validação da imperfeição geométrica inicial: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b)	87
Figura 38 – Análise do erro e tempo de processamento do teste de sensibilidade de malha: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b)	89
Figura 39 – Força-deslocamento do teste de sensibilidade de malha: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b)	90
Figura 40 – Tensões de compressão no modelo sem reforço (a) e com reforço (b) e deformação plástica no modelo sem reforço (c) e com reforço (d)	91
Figura 41 – Força-deslocamento do modelo validado: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b)	92
Figura 42 – Pilar de referência com reforço parcial	93

Figura 43 – Comportamento dos pilares de referência: sem (a) e com reforço (b) ...	94
Figura 44 – Modo de falha dos pilares: sem reforço (a) e com reforço (b).....	95
Figura 45 – Força-deslocamento da validação da imperfeição geométrica inicial: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).....	96
Figura 46 – Força-deslocamento do teste de sensibilidade de malha: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).....	97
Figura 47 – Análise do erro e tempo de processamento do teste de sensibilidade de malha: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).....	98
Figura 48 – Tensões axiais no modelo sem reforço (a) e com reforço (b) e deformação plástica no modelo sem reforço (c) e com reforço (d).	99
Figura 49 – Histograma dos resultados de capacidade de carga (a) e rigidez axial (b) obtidos no estudo paramétrico.....	105
Figura 50 – Correlação de Spearman para variáveis dimensionais (a) e adimensionais (b).	106
Figura 51 – Gráficos de superfície para previsão de F_{max} : $E_0 \times D$ (a), $E_0 \times L$ (b), $f_{co} \times$ D (c) e $f_{co} \times L$ (d).....	107
Figura 52 – Gráficos de superfície para previsão de K : $E_0 \times D$ (a), $E_0 \times L$ (b), $f_{co} \times D$ (c) e $f_{co} \times L$ (d).	108
Figura 53 – Histograma da variação da capacidade de carga e rigidez axial em relação aos modelos sem reforço.....	109
Figura 54 – Correlação de Spearman para variáveis dimensionais (a) e adimensionais (b).	110
Figura 55 – Influência da taxa de reforço e comprimento do pilar na capacidade de carga e rigidez dos pilares: C20 (a), C30 (b), C40 (c) e C50 (d).....	111
Figura 56 – Funções assintóticas do fator χ : $\varepsilon_m = 2,4\%$ (a) e $\varepsilon_m = 4\%$ (b).	117
Figura 57 – Comportamento de flambagem: Euler \times Tetmajer.....	118
Figura 58 – Superfície resposta de λ_t pelo método de Brant.	120
Figura 59 – Superfície de resposta para o fator χ	121
Figura 60 – Análise de sensibilidade local para uma variação de 1%.....	122
Figura 61 – Sensibilidade (em kN) de F_{pilar} ao variar dos parâmetros em 1%.	122
Figura 62 – Efeito da interação de Da/D com outras variáveis na sensibilidade.	123
Figura 63 – Superfície de resposta de η	125
Figura 64 – Análise de sensibilidade local para uma variação de 1%.....	126
Figura 65 – Índice de variância de Sobol para η	127

Figura 66 – Desempenho do modelo para previsão da capacidade de carga.....	129
Figura 67 – Dispersão: valor predito × resíduos.....	129
Figura 68 – Gráfico de dispersão da previsão da capacidade de carga: Dong <i>et al.</i> (2015b) (a), Liu <i>et al.</i> (2022) (b) e regressão (c).....	134
Figura 69 – Diagrama de Taylor do modelo proposto e do de Liu <i>et al.</i> (2022).....	135

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades estruturais dos principais laminados de PRF	26
Tabela 2 – Critérios de qualidade revisão sistemática	39
Tabela 3 – Propriedades da madeiras caracterizadas na amostra	44
Tabela 4 – Propriedades dos compósitos estudados por Wang <i>et al.</i> (2023).....	52
Tabela 5 – Parâmetros de desempenho encontrados nos artigos com PRF como reforço.....	54
Tabela 6 – Parâmetros de desempenho encontrados nos artigos com PRF como reforço.....	56
Tabela 7 – Propriedades das madeiras adotadas no estudo paramétrico	66
Tabela 8 – Resumo dos diâmetros e das abertura dos pilares.....	67
Tabela 9 – Propriedades dos compósitos adotados no estudo paramétrico.....	68
Tabela 10 – Configuração dos modelos do teste de sensibilidade de malha	78
Tabela 11 – Propriedades do laminado de PRFC	79
Tabela 12 – Propriedades das madeiras adotadas no estudo de validação.....	84
Tabela 13 – Erro na validação das propriedades elásticas e de resistência.....	86
Tabela 14 – Erro na validação da imperfeição geométrica inicial.....	87
Tabela 15 – Erro no teste de sensibilidade de malha	89
Tabela 16 – Propriedades da madeira utilizada por Wang <i>et al.</i> (2023)	94
Tabela 17 – Propriedades do PRFC utilizado por Wang <i>et al.</i> (2023).....	94
Tabela 18 – Erro na validação da imperfeição geométrica inicial.....	97
Tabela 19 – Erro no teste de sensibilidade de malha	99
Tabela 20 – Resumo dos modelos validados.....	102
Tabela 21 – Métricas dos modelos obtidos para χ	115
Tabela 22 – Métricas dos modelos obtidos para η	123
Tabela 23 – Métricas dos modelos obtidos para F_{max} (Equação 35).....	128
Tabela 24 – Métricas da formulação clássica para K	131
Tabela 25 – Métricas da formulação para K com fator κ	131
Tabela 26 – Análise do erro na predição da capacidade de carga de pilares analisados experimentalmente	133

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AFRP	– <i>Aramid fiber-reinforced polymer</i>
BFRP	– <i>Basalt fiber-reinforced polymer</i>
CFRP	– <i>Carbon fiber-reinforced polymer</i>
CV	– Coeficiente de variação
GFRP	– <i>Glass fiber-reinforced polymer</i>
FRP	– <i>Fiber-reinforced polymer</i>
LaPES	– Laboratório de Pesquisa em Engenharia de <i>Software</i>
MEF	– Método dos elementos finitos
MLC	– Madeira lamelada colada
MLCC	– Madeira lamelada colada cruzada
PRF	– Polímero reforçado com fibras
PRFA	– Polímero reforçado com fibras de aramida
PRFB	– Polímero reforçado com fibras de basalto
PRFC	– Polímero reforçado com fibras de carbono
PRFV	– Polímero reforçado com fibras de vidro
PRISMA	– <i>Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses</i>
RBS	– Revisão bibliográfica sistemática
StArt	– <i>Stade of the Art Through Systematic Review</i>
UFSCar	– Universidade Federal de São Carlos

LISTA DE SÍMBOLOS

b	– Largura do laminado/seção
b_c	– Coeficiente de conversão
d	– Densidade
f	– Resistência
f_{c0}	– Resistência à compressão paralela às fibras
f_{c90}	– Resistência à compressão perpendicular às fibras
$f_{c,L}$	– Resistência à compressão longitudinal
$f_{c,R}$	– Resistência à compressão radial
$f_{c,T}$	– Resistência à compressão tangencial
f_{t0}	– Resistência à tração paralela às fibras
f_{t90}	– Resistência à tração perpendicular às fibras
f_v	– Resistência ao cisalhamento
$f_{v,LR}$	– Resistência ao cisalhamento no plano longitudinal-radial
$f_{v,LT}$	– Resistência ao cisalhamento no plano longitudinal-tangencial
$f_{v,RT}$	– Resistência ao cisalhamento no plano radial-tangencial
n	– Quantidade de camadas de PRF
r	– Raio
r_g	– Raio de giração
r_p	– Correlação de Pearson
r_s	– Correlação de Spearman
ρ	– Perímetro
pf	– Probabilidade de falha
ρ_w	– Tensão de restrição no núcleo da madeira
s	– Espaçamento entre laminados
t	– Espessura
A	– Área da seção transversal
A_n	– Área líquida da seção transversal
CV	– Coeficiente de variação
D	– Diâmetro
E_0	– Módulo de elasticidade paralelo às fibras
E_{90}	– Módulo de elasticidade perpendicular às fibras
E_L	– Módulo de elasticidade longitudinal
E_R	– Módulo de elasticidade radial
E_T	– Módulo de elasticidade transversal
EI	– Rigidez à flexão
G	– Módulo de cisalhamento
I	– Momento de inércia
L	– Comprimento

L_0	– Comprimento de flambagem
$MAPE$	– Erro percentual absoluto médio
P	– Força resistente
P_a	– Capacidade de carga axial última para pilares ocios de madeira
P_{aB}	– Capacidade de carga axial última para pilares ocios de madeira reforçados com PRFB
R	– Coeficiente de plasticidade
R^2	– Coeficiente de determinação
U	– Deslocamento
UR	– Rotação
V	– Volume
V_R	– Taxa volumétrica de reforço
α	– Coeficiente de regressão
β	– Coeficiente de intensidade do confinamento
β_B	– Coeficiente de adesão do PRFB
γ	– Fator de redução de resistência devido a rachaduras no pilar
ε	– Deformação
ε_u	– Deformação última
η	– Fator de confinamento
κ	– Fator de ajuste da rigidez axial
λ	– Coeficiente de esbeltez
ν	– Coeficiente de Poisson
ρ	– Taxa de reforço
σ	– Desvio padrão
σ_0	– Tensão de escoamento
σ_1	– Tensão normal na direção 1
σ_2	– Tensão normal na direção 2
σ_3	– Tensão normal na direção 3
σ_{12}	– Tensão de cisalhamento no plano 12
σ_{13}	– Tensão de cisalhamento no plano 13
σ_{23}	– Tensão de cisalhamento no plano 23
φ	– Coeficiente de estabilidade axial
χ	– Fator de instabilidade
Ω_f	– Domínio de falha
Ω_s	– Domínio de sobrevivência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	JUSTIFICATIVA.....	12
1.2	PROBLEMA DE PESQUISA	15
1.3	OBJETIVOS.....	15
1.3.1	<i>Objetivo geral</i>	15
1.3.2	<i>Objetivos específicos</i>	16
2	ASPECTOS FUNDAMENTAIS	18
2.1	PROPRIEDADES DA MADEIRA COMO MATERIAL ESTRUTURAL	18
2.2	TÉCNICAS DE REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA	21
2.3	COMPÓSITOS LAMINADOS DE POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRAS: DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES 25	
2.4	FUNDAMENTOS DA REGRESSÃO SIMBÓLICA.....	31
2.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO.....	34
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SISTEMÁTICA: UTILIZAÇÃO DE COMPÓSITOS LAMINADOS DE PRF PARA REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA	37
3.1	MÉTODO DA REVISÃO SISTEMÁTICA	37
3.2	ANÁLISE BIBLIOMÉTRICA E QUALITATIVA DA AMOSTRA.....	39
3.3	CONTEXTO DOS ESTUDOS SOBRE REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA COM PRF ...	42
3.4	SÍNTESE DOS ESTUDOS ENCONTRADOS E SUAS DESCOBERTAS.....	46
3.5	ANÁLISE DO DESEMPENHO MECÂNICO DOS PILARES REFORÇADOS.....	52
3.6	MÉTODOS ANALÍTICOS PARA PROJETO DE REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA	56
3.7	CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO.....	60
4	MÉTODO DE PESQUISA	63
4.1	CONFIGURAÇÃO DA SIMULAÇÃO E ANÁLISE NÃO-LINEAR: FLAMBAGEM ELÁSTICA E PÓS-FLAMBAGEM	63
4.2	DEFINIÇÃO DO ESTUDO PARAMÉTRICO	65
4.3	PROTOCOLO DE AVALIAÇÃO DO ESTUDO PARAMÉTRICO.....	68
4.4	MODELOS DE REGRESSÃO SIMBÓLICA	70

4.4.1	<i>Configurações do script de processamento da regressão simbólica</i>	70
4.4.2	<i>Definições dos modelos a serem gerados</i>	72
4.4.3	<i>Avaliação dos modelos de regressão simbólica</i>	73
5	VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO	76
5.1	REPRODUÇÃO DO ESTUDO DE SIHA, ZHOU E YANG (2021)	78
5.1.1	<i>Apresentação do estudo e dos modelos de referência</i>	78
5.1.2	<i>Procedimentos para a validação do modelo</i>	82
5.1.3	<i>Validação do modelo</i>	84
5.2	REPRODUÇÃO DO ESTUDO DE WANG ET AL. (2023)	93
5.2.1	<i>Apresentação do estudo e dos modelos de referência</i>	93
5.2.2	<i>Validação do modelo</i>	96
5.3	CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO	101
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	104
6.1	ANÁLISE DO ESTUDO PARAMÉTRICO	104
6.2	MODELOS PREDITIVOS PROPOSTOS POR REGRESSÃO SIMBÓLICA	114
6.2.1	<i>Análise dos modelos de regressão para o fator de instabilidade</i>	115
6.2.2	<i>Análise dos modelos de regressão para o fator de confinamento</i>	123
6.2.3	<i>Análise da formulação proposta para previsão da capacidade de carga</i>	128
6.2.4	<i>Análise da formulação proposta para previsão da rigidez axial</i>	130
6.3	COMPARAÇÃO DO MODELO PREDITIVO PROPOSTO COM MODELOS DA LITERATURA	132
7	CONCLUSÕES	138
8	REFERÊNCIAS	142
	APÊNDICE – ARTIGOS SELECIONADOS PARA A REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SISTEMÁTICA	167

1 INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

Os pilares de madeira são elementos estruturais fundamentais para garantia da estabilidade em diversas construções, possibilitando uma combinação única de estética, sustentabilidade e desempenho estrutural.

O desenvolvimento de produtos engenheirados, como a madeira lamelada colada (MLC) e a madeira lamelada colada cruzada (MLCC), permitiu o avanço tecnológico das estruturas de madeira, consolidando-as como alternativa viável, inovadora e sustentável em projetos de médio e grande porte. Como exemplo, destaca-se o edifício Mjøstårnet (Figura 1), na Noruega, com 85 metros de altura e com 18 pavimentos, construído com pilares de MLC e painéis de MLCC (Ilgin; Karjalainen; Pelsmakers, 2022).

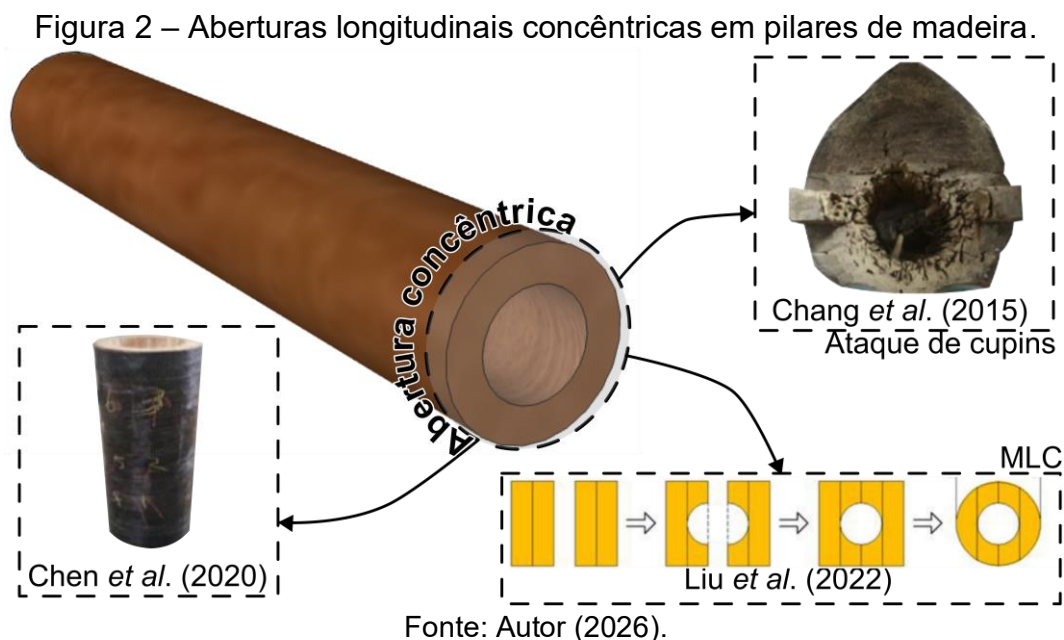
Figura 1 – Edifício Mjøstårnet.



Fonte: Adaptado de Tulebekova, Stamatopoulos e Malo (2025).

O uso de pilares de madeira engenheirada, ainda que crescente, é acompanhado de novos desafios construtivos, sobretudo relacionados à necessidade de compatibilização com outros sistemas e à durabilidade dos elementos. Em edifícios modernos, a passagem de tubulações e demais instalações frequentemente exige aberturas ou adaptações na estrutura, com potencial comprometimento de seu

desempenho estrutural. A Figura 2 apresenta diferentes utilizações de aberturas longitudinais concêntricas em pilares de madeira.



Além disso, a ocorrência de manifestações patológicas pode originar reduções da seção transversal de elementos de madeira e proporcionar situações similares às aberturas por compatibilização. Diversos estudos relatam degradações significativas em pilares de madeira, onde intervenções significativas foram necessárias para a garantia da segurança estrutural e do desempenho em serviço dos elementos degradados (Zhou; Yan, 2015; Qiao; Li; Chen, 2016; Li *et al.*, 2021).

Destaca-se que a madeira é um material amplamente empregado em construções desde o início das civilizações, sendo encontrada com frequência em edificações históricas ao redor do mundo. Sua presença nessas construções é fundamental para a perpetuação da identidade e cultura de diversas sociedades, ao mesmo tempo em que representa um importante testemunho histórico. Por isso, a preservação cuidadosa dessas construções é essencial para garantir a manutenção do patrimônio histórico e cultural da humanidade (Chen, Y.; Guo, 2017; Chorlton; Gales, 2019; Shabani *et al.*, 2020).

Para garantir o desempenho estrutural de pilares com aberturas longitudinais, por compatibilização ou originada por degradação, elementos de reforço podem ser adotados. De acordo com as observações de Valle, Perreira e Nappi (2013), uma das alternativas viáveis para o reforço ou recuperação estrutural de elementos de madeira

é a utilização de lâminas de polímeros reforçados com fibras (PRF), aplicadas ao elemento estrutural por métodos como laminação manual, impregnação ou aspersão. Uma revisão sistemática demonstrou o melhor desempenho relatado na literatura com o uso de laminados de PRF, ao se comparar com métodos tradicionais, como o uso de chapas de aço (Jardim *et al.*, 2025).

A revisão realizada por Albuja-Sánchez, Damián-Chalán e Escobar (2024), aponta as fibras de carbono, de vidro e de aramida como as mais encontradas nos PRF utilizados em estruturas, geralmente associadas a reforços e recuperações estruturais. O uso de polímeros reforçados com fibras de basalto (PRFB) também é encontrado na literatura (Dong *et al.*, 2015; Liu *et al.*, 2022; Zhou *et al.*, 2021).

Entretanto, observou-se uma lacuna no conhecimento atual relacionada à ausência de modelos matemáticos para a determinação da capacidade de carga e rigidez axial de pilares de madeira com aberturas longitudinais parcialmente reforçados com PRF (considerando os diferentes tipos de fibras reforçadoras). A falta de propostas para a determinação dessas propriedades traz insegurança ao projetista e inviabiliza o uso dessa solução.

Desse modo, esta pesquisa se destinou a realizar um estudo paramétrico por meio de simulações numéricas utilizando o método dos elementos finitos (MEF), para avaliar a influência dos diferentes parâmetros físicos e geométricos dos pilares, com abertura longitudinal reforçados parcialmente e propor equações para a estimativa da capacidade de carga e rigidez axial por meio de modelos de regressão simbólica.

1.1 JUSTIFICATIVA

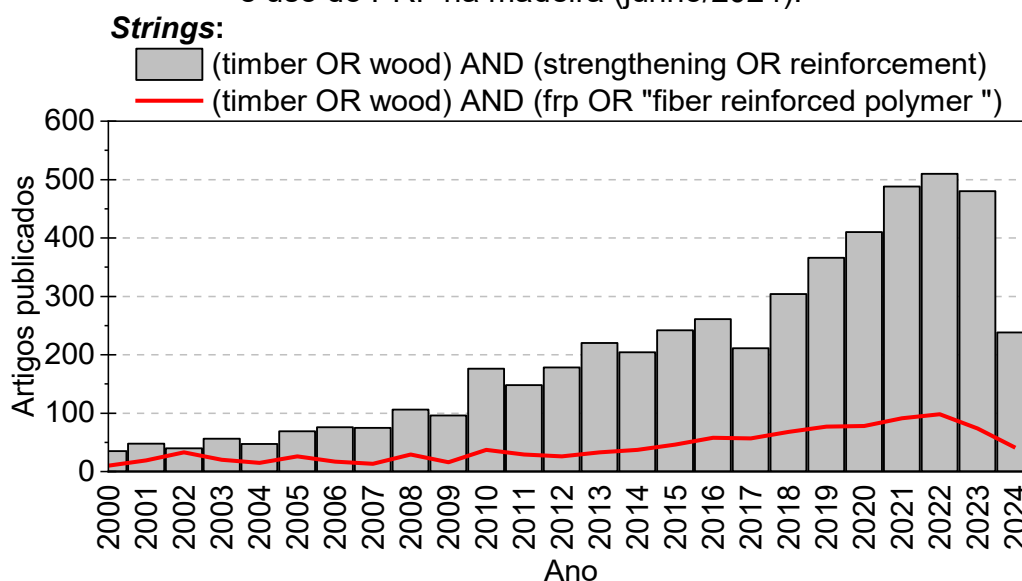
Revisões recentes apontam para o crescimento do setor da madeira engenheirada, demandando por novos estudos que ampliem as possibilidades de utilização desse material e, com isso, ampliem sua viabilidade de uso (De Araujo *et al.*, 2025; De Araujo; Christoforo, 2023). Destaca-se que a ampliação do uso da madeira engenheirada contribui para a redução de emissões de CO₂, o que é relevante na indústria da construção civil por ser uma das mais poluentes do mundo, o que deve ser, cada vez mais, objeto de interesse de políticas públicas internacionais (Arriaga *et al.*, 2023; Chen, J. *et al.*, 2021; De Araujo; Pramreiter; Christoforo, 2025).

Pilares com aberturas longitudinais são comumente empregados em pontes, edifícios e galpões, com diversos estudos nas áreas de concreto moldado *in loco* e pré-moldado e aço (El Debs, 2017; Liang, X.; Sritharan, 2019; Ou, Y.-C. *et al.*, 2010; Su, S. *et al.*, 2024; Zhang, J. *et al.*, 2025). Seu uso é recomendado pela redução do peso próprio da estrutura e possibilidade de embutimento da tubulação. Entretanto, conforme apontado por Zhang *et al.* (2025), a presença da abertura também pode acarretar na redução do desempenho estrutural. Reforços com laminados de PRF podem contribuir para viabilizar esses elementos.

O uso do PRF para reforço de estruturas de concreto armado tem sido amplamente investigado (Amran *et al.*, 2018), com a possibilidade de adoção de documentos normativos específicos para o emprego dessa solução em projetos estruturais (American Concrete Institute, 2017).

Entretanto, ao observar o uso do PRF em estruturas de madeira, a quantidade de publicações é consideravelmente menor e seu uso ainda não é previsto por documentos normativos nacionais ou estrangeiros. A Figura 3 apresenta uma comparação da quantidade de estudos encontrados na base de dados *Web of Science* que versam sobre reforço em estruturas de madeira e o uso do PRF em estruturas de madeira.

Figura 3 – Quantidade de estudos publicados sobre reforço de estruturas de madeira e uso do PRF na madeira (junho/2024).



Fonte: Autor (2026).

danificados, que apresentam perdas de seção transversal. A escassez de pesquisas nesse contexto destaca a relevância do presente estudo, que visou preencher essa lacuna e contribuir para o avanço do conhecimento na área de reforço estrutural de pilares de madeira.

A não homogeneidade da seção transversal ao longo do elemento, devido ao reforço parcial, inviabiliza a utilização dos métodos já desenvolvidos e estudados na literatura. Além disso, a ausência de documentos normativos nacionais ou internacionais que abordem essa técnica específica também representa um desafio na aplicação segura e padronizada desse método de reforço. Enquanto PRF em concreto armado já conta com documentos normativos internacionais (American Concrete Institute, 2017), o mesmo não ocorre para madeira, sobretudo para situações não convencionais como o reforço parcial de pilares.

Diante dessas limitações, torna-se imprescindível a obtenção de uma equação para a determinação da capacidade de carga e rigidez axial desses elementos, de forma a viabilizar a utilização desse método de reforço em pilares de madeira. Essa equação é necessária e fundamental para garantir a segurança e a eficácia desse procedimento de reforço, proporcionando a base técnica e científica que atualmente está ausente na literatura.

1.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Como pode ser determinada, com precisão e segurança, a rigidez axial e a capacidade de carga de pilares de madeira parcialmente reforçados por materiais compósitos laminados, em situações de aberturas longitudinais, considerando as limitações dos documentos normativos, dos métodos tradicionais e as características físicas e geométricas dos sistemas?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

Elaborar uma equação para determinação da carga última e rigidez axial de pilares de madeira com abertura longitudinal e reforçados parcialmente com

compósitos laminados de PRF com base na proporção da abertura na madeira, nas propriedades físicas, mecânicas e geométricas do pilar, no tipo de fibra de reforço e na quantidade de camadas do reforço.

1.3.2 Objetivos específicos

- Verificar a influência da proporção da abertura longitudinal na carga última e rigidez axial de pilares de madeira;
- Verificar a influência da variação do número de camadas de reforço parcial de PRF e o tipo de fibra utilizada na carga última e rigidez axial de pilares de madeira;
- Verificar a influência da variação da espécie de madeira na carga última e rigidez axial do elemento em uma situação de reforço parcial utilizando PRF;
- Verificar a influência das características geométricas e espaçamento do PRF na carga última e rigidez axial do elemento em uma situação de reforço parcial;
- Elaborar equações para estimar a capacidade de carga e rigidez axial de pilares com abertura longitudinal e reforço parcial de PRF;
- Comparar a precisão das equações existentes na literatura para a capacidade de carga de pilares com reforço parcial com o modelo proposto.

2 ASPECTOS FUNDAMENTAIS

2 ASPECTOS FUNDAMENTAIS

Este capítulo apresenta conceitos fundamentais que visam garantir o embasamento técnico-científico para a apresentação do método de estudo adotado e posterior discussão dos resultados. A seção “propriedades da madeira como material estrutural” apresenta informações da anatomia e macroestrutura da madeira, bem como sua anisotropia e os reflexos dessa característica no desenvolvimento de modelos estruturais.

A seção dedicada às “técnicas de reforço de pilares de madeira” apresenta os conceitos fundamentais para a recuperação e o incremento da capacidade de carga dessas estruturas, contrastando as soluções consolidadas na literatura. Complementarmente, a seção 2.3 introduz os compósitos laminados de PRF, discutindo suas classificações, propriedades gerais e os critérios de falha clássicos aplicáveis ao material.

A seção “fundamentos da regressão simbólica” destaca a origem, funcionamento e o potencial de aplicação dessa técnica na engenharia estrutural. O capítulo encerra-se com uma síntese integrativa, que correlaciona os temas abordados e garante o suporte necessário para o desenvolvimento das análises realizadas nos capítulos posteriores.

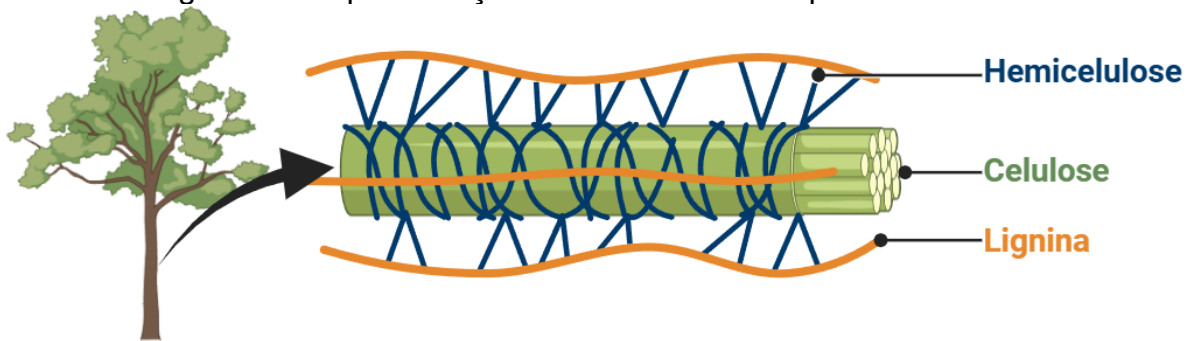
2.1 PROPRIEDADES DA MADEIRA COMO MATERIAL ESTRUTURAL

A madeira é um material versátil, com alta razão resistência-densidade, possuindo grande durabilidade quando tratada corretamente, sendo um dos principais materiais para aplicações na engenharia estrutural. Entretanto, há uma grande variação de suas propriedades devido a fatores como a classe (angiosperma e gimnosperma) e espécie da árvore, região do tronco escolhida para o corte (alburno ou cerne), condições de crescimento da árvore e sua idade, dentre outros (Coradin; Camargos, 2002; Mania *et al.*, 2020).

Por sua composição anatômica, a madeira é considerada um compósito natural altamente anisotrópico, conforme ilustrado na Figura 5, com sua fase matriz composta predominantemente por lignina e hemicelulose e sua fase dispersa composta por celulose (Mania *et al.*, 2020; Waliszewska *et al.*, 2019). Qualquer ação que ocasione uma variação do comportamento desses componentes possui impacto

direto nas propriedades estruturais da madeira utilizada (González-Díaz; Alonso-López, 2017). Desse modo, não é possível realizar uma previsão exata do comportamento da madeira.

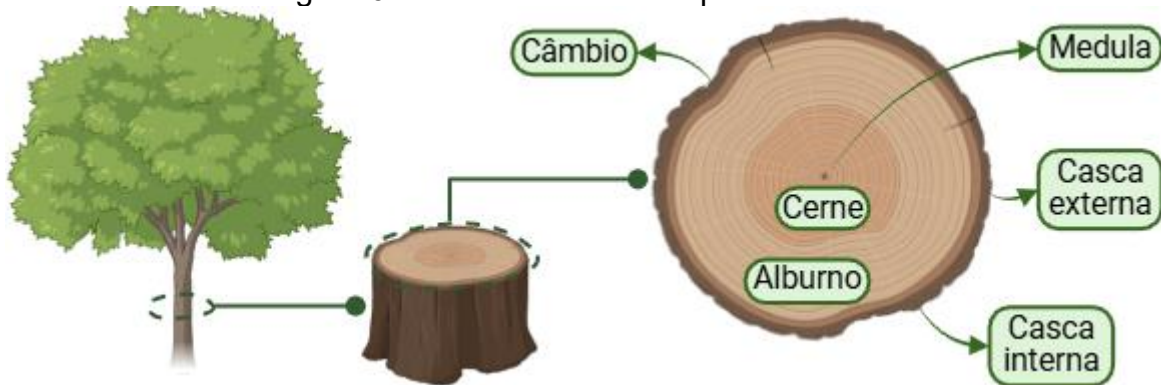
Figura 5 – Representação da fase matriz e dispersa da madeira.



Fonte: Autor (2026), criado com BioRender.com.

Ao observar a estrutura macroscópica da madeira, também é possível apontar variações em sua composição. O tronco das árvores é composto pela medula, cerne, alburno, câmbio, casca interna e externa, respectivamente, na direção radial (Dinwoodie, 2004; Pfeil; Pfeil, 2017). Essa estrutura é ilustrada na Figura 6. As peças utilizadas pela engenharia estrutural são comumente extraídas do cerne e do alburno e possuem comportamentos distintos.

Figura 6 – Estrutura macroscópica da madeira.



Fonte: Autor (2026), criado com BioRender.com.

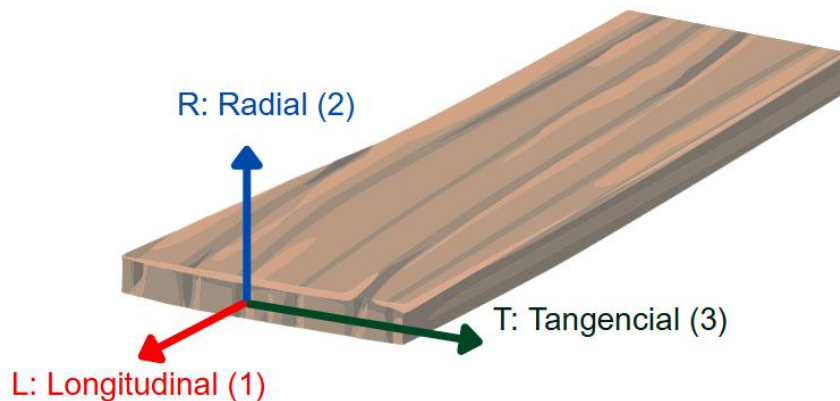
Tanto o cerne quanto o alburno possuem, em geral, a responsabilidade pela sustentação da árvore e condução dos fluidos na direção da raiz até a copa. Entretanto, considerando o crescimento exogênico da árvore, o cerne consiste em uma região mais antiga e parte das células responsáveis pelo transporte de fluidos passa a ser desativada, fazendo com que sua função principal passe a se limitar à sustentação. Isso faz com que as peças retiradas dessa região tendam a ser mais

duráveis e com maior resistência quando comparadas com o alburno (Calil Júnior *et al.*, 2019; Coradin; Camargos, 2002; Dinwoodie, 2004).

Por sua vez, o alburno é uma região mais jovem do tronco e que ainda possui a capacidade de transporte da seiva bruta. Por conta disso, as peças retiradas dessa região tendem a apresentar um comportamento mais higroscópico quando comparado com o cerne, além de permitirem a penetração de agentes protetores com mais facilidade (Calil Júnior *et al.*, 2019; Dinwoodie, 2004; Pfeil; Pfeil, 2017). Essas variações fazem com que o corte das peças a serem usadas nas estruturas de madeira interfira diretamente nas propriedades do elemento estrutural.

Devido sua alta anisotropia, para que se possa se utilizar o material em problemas de engenharia, a madeira tem seu comportamento simplificado para um material ortotrópico (Figura 7). Desse modo, suas propriedades são determinadas em função das três direções ortogonais em relação às fibras (longitudinal, radial e transversal).

Figura 7 – Indicações das direções longitudinal (L), radial (R) e tangencial (T) da madeira.



Fonte: Autor (2026).

Considerando a baixa probabilidade de o corte do elemento possuir uma direção verdadeiramente radial, as propriedades da direção tangencial são adotadas para todas as direções perpendiculares às fibras. Essa consideração é amplamente adotada para análises analíticas e numéricas com resultados satisfatórios (Fajdiga *et al.*, 2019; Khelifa *et al.*, 2014; Mascia, Nilson Tadeu; Lahr, 2006), encontrado amparo, inclusive, em documentos normativos nacionais (ABNT, 2022a) e internacionais (CEN, 2004).

De forma geral, a utilização da madeira como componente estrutural deve ser precedida de uma campanha experimental para caracterização de suas propriedades

físico-mecânicas. Entretanto, há poucos laboratórios especializados nesse tipo de ensaio (Almeida *et al.*, 2020; Dias; Lahr, 2004). Desse modo, na impossibilidade em realizar a caracterização da madeira em laboratório, o documento normativo brasileiro da ABNT, a NBR 7190-1 (2022a) intitulada “Projeto de estruturas de madeira”, permite a adoção de valores representativos para as principais propriedades da madeira. Para isso, deve-se considerar se a árvore de origem é conífera ou folhosa, se provém de floresta nativa ou plantada, bem como a classe de resistência da madeira. Essa previsão também é encontrada em documentos normativos internacionais (CEN, 2016).

Além dos valores padronizados para as propriedades da madeira previstos nos documentos normativos (ABNT, 2022a; CEN, 2016), por vezes é necessária a correlação entre propriedades para que seja possível a obtenção de todos os valores desejados referentes ao comportamento da madeira. Apesar dos documentos normativos apresentam diversas correlações para essa finalidade, alguns pesquisadores apontaram que a adoção das formulações propostas pode conduzir a resultados equivocados, destacando a importância da determinação das propriedades da madeira de forma experimental (Aquino *et al.*, 2022; Lahr; Chahud; Arroyo; Christoforo; Rodrigues; Almeida; Aquino, 2021; Lahr; Chahud; Arroyo; Christoforo; Rodrigues; Almeida; Aquino; *et al.*, 2021; Wolenski *et al.*, 2019).

2.2 TÉCNICAS DE REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA

Conforme definido por Bolina, Tutikian e Helene (2019), o reforço consiste em uma intervenção que aumente o desempenho estrutural. Existem diversas técnicas de reforço estrutural, sendo possível o uso de elementos internos ao pilar, que não alteram sua geometria e pouco impactam sua estética, ou elementos externos que, apesar de não preservar a estética tradicional desse tipo de elemento, tende a apresentar desempenho superior (Harte; Dietsch, 2015; Jardim *et al.*, 2025; Valle; Pereira; Nappi, 2013).

Além de reforços previstos em etapa de projeto, antes da construção, diversos estudos se dedicaram a analisar o reforço e a recuperação de elementos já executados e degradados, com redução de seu desempenho estrutural. Com o eventual surgimento das diversas possíveis manifestações patológicas em estruturas de madeira em uso, são necessárias intervenções para a garantia do desempenho

estrutural adequado aos elementos afetados, nas quais a definição do método adotado deve considerar diversos fatores de viabilidade como logística, técnica, estética etc. (Riggio; Tomasi; Piazza, 2014; Valle; Pereira; Nappi, 2013).

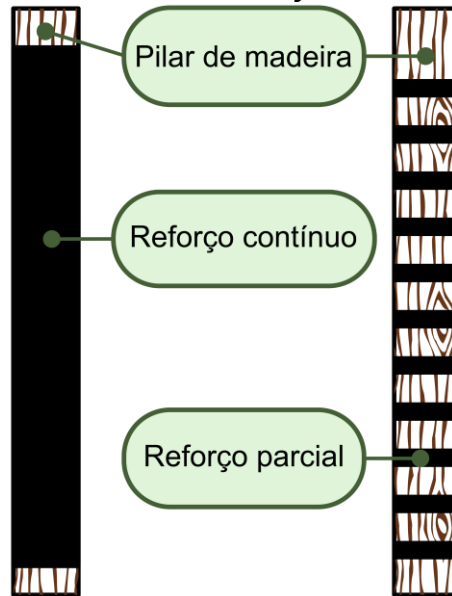
Parisi e Piazza (2007) destacam que o reforço dessas estruturas deve garantir a remoção completa das fontes de degradação, já que a remoção inadequada dos agentes deletérios à estrutura pode ocasionar no agravamento do processo de apodrecimento da madeira e aumentar o grau de dificuldade em reparos futuros.

Reforços com elementos de aço são tradicionalmente empregados em estruturas de madeira, especialmente àquelas que necessitam de recuperação estrutural. A técnica mais comumente observada consiste em fixar chapas de aço nas faces externas dos pilares, com resultados positivos no aumento da resistência à flexocompressão (Branco; Dietsch; Tannert, 2021). Porém, essa solução requer proteções adicionais para prevenir a oxidação do aço.

Em contrapartida, conforme sintetizado por Jardim *et al.* (2025), restaurações e recuperações estruturais com PRF, mesmo com baixas taxas de reforço, podem gerar aumentos na capacidade de carga e rigidez significativos e superiores aos obtidos com elementos de aço. Entre as diversas técnicas e tecnologias disponíveis, destaca-se o uso de laminados colados externamente (EBR). Essa solução consiste no envolvimento da seção transversal do pilar com mantas, tecidos ou laminados, saturados em resina epóxi, criando um efeito de confinamento e reduzindo as deformações transversais (Nadim *et al.*, 2019; Siha; Zhou; Yang, 2021; Wang *et al.*, 2023).

Esse tipo de reforço pode cobrir toda a superfície lateral do pilar (reforço contínuo) ou ser aplicado como “anéis” espaçados (reforço parcial). A diferença entre essas soluções é ilustrada na Figura 8. Embora o reforço contínuo tenda a proporcionar uma maior capacidade de suporte, mas o parcial é mais econômico e ainda oferece aumentos expressivos de resistência, sendo eficaz na limitação do deslocamento lateral (Liu *et al.*, 2022; Siha; Zhou; Yang, 2021; Wang *et al.*, 2023).

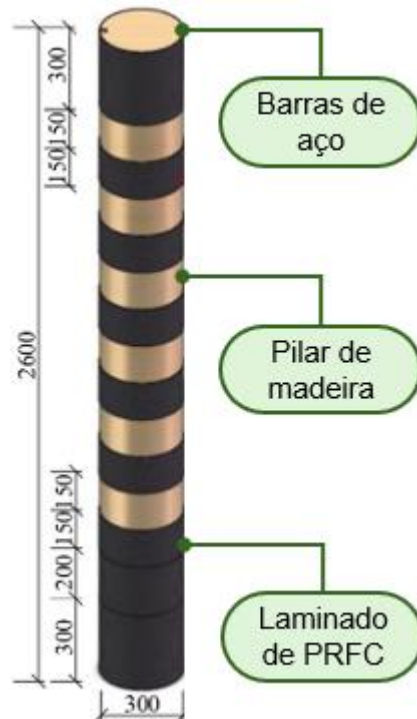
Figura 8 – Pilares com reforço contínuo e parcial.



Fonte: Autor (2026).

Uma das técnicas de reforço comumente estudada para estruturas de madeira consiste na fixação de barras na superfície do elemento reforçado (Figura 9), chamada de *near surface mounted* (NSM), sendo observado o uso de barras de aço (Christoforo *et al.*, 2022) e de PRF (Assis *et al.*, 2024). Apesar disso, apenas um estudo que aplica esta técnica em pilares foi encontrado. Siha e Zhou (2023) estudaram quatro configurações distintas de reforço em pilares de madeira, porém a técnica NSM foi aplicada em conjunto com compósitos laminados fixados externamente. Os autores observaram que o reforço foi capaz de aumentar a rigidez inicial e o desempenho hysterético dos pilares estudados. Apesar disso, estudos apontam limites de melhoria no desempenho de elementos que adotam essa técnica de reforço, onde seu uso é mais significativo com baixas taxas de reforço (Assis *et al.*, 2024; Christoforo *et al.*, 2022; Siha; Zhou, 2023).

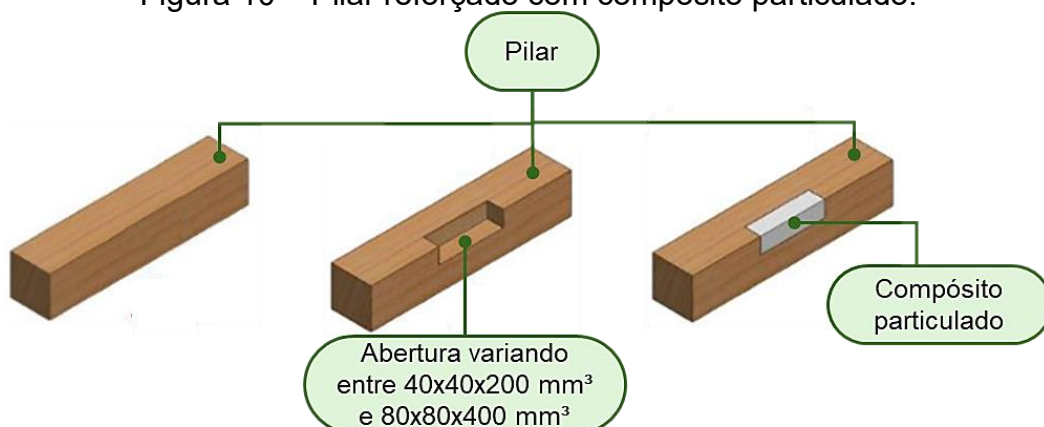
Figura 9 – Pilar reforçado com barras de aço pela técnica NSM e compósitos laminados colados externamente.



Fonte: Adaptado de Siha e Zhou (2023).

O uso de compósitos particulados é uma técnica também pouco explorada para reforço de pilares de madeira. O estudo realizado por Carvalho *et al.* (2016), utilizou um compósito particulado de resina epóxi reforçado com cimento Portland branco, desenvolvido por Panzera *et al.* (2010), em pilares com perda de seção, conforme ilustrado na Figura 10. Os autores observaram que o reforço não só foi capaz de recuperar o desempenho do pilar de referência (íntegro), como também superar. Com isso, essa aplicação se destina a situações de reparo e recuperação desses elementos e não como uma solução de reforço para etapa de projeto.

Figura 10 – Pilar reforçado com compósito particulado.



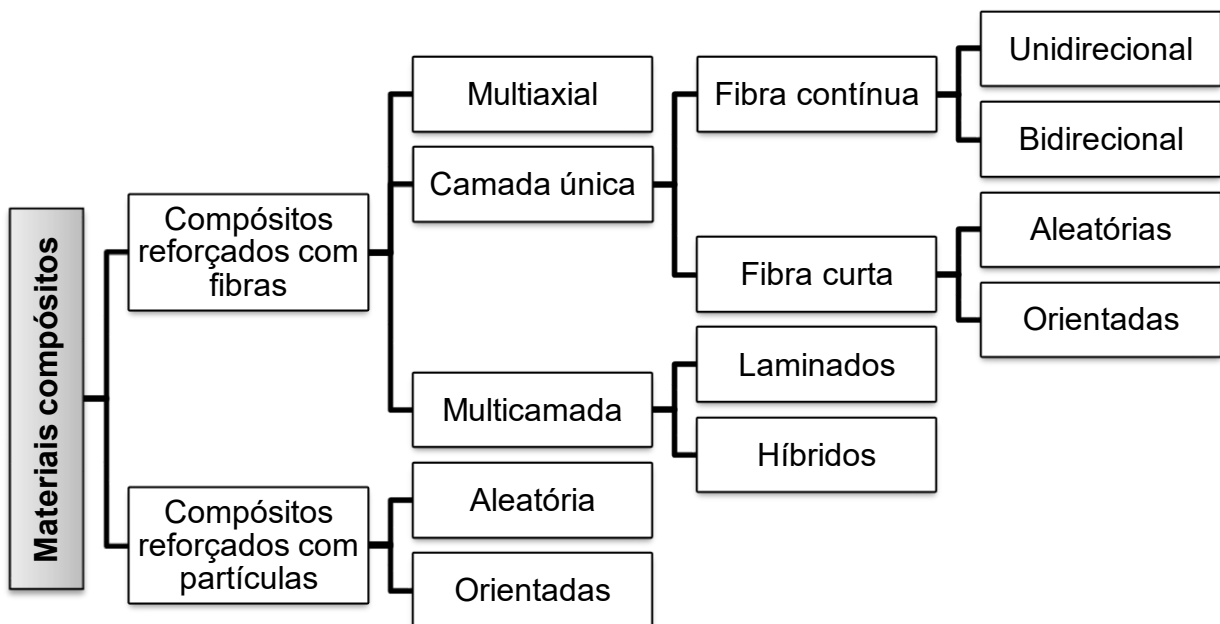
Fonte: Adaptado de Carvalho *et al.* (2016).

2.3 COMPÓSITOS LAMINADOS DE POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRAS: DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Conforme apresentado por Callister e Rethwisch (2016), os compósitos são materiais multifásicos, onde suas fases constituintes devem ser quimicamente diferentes e separadas por uma interface distinta. Geralmente são constituídos por duas fases: fase matriz e fase dispersa. As propriedades do compósito são obtidas em função das propriedades de suas fases constituintes por meio do princípio da ação combinada.

Em razão dos diversos fatores que influenciam suas propriedades, os materiais compósitos possuem um comportamento estrutural de maior complexidade quando comparados com os materiais isotrópicos tradicionais, conforme apontado por Neto e Pardini (2016). A composição de um material compósito pode considerar diferentes tipos de matrizes (cerâmicas, metálicas e poliméricas) e de reforços (fibras, partículas). A Figura 11 apresenta uma classificação hierárquica dos diferentes tipos de compósitos.

Figura 11 – Classificação hierárquica dos materiais compósitos.



Fonte: Adaptado de Neto e Pardini (2016).

Conforme apresentado na Figura 11, ao utilizar fibras como fase dispersa a orientação dessas fibras pode ocorrer de forma multiaxial, por camadas isoladas ou por multicamadas (Neto; Pardini, 2016). Já foi identificado que a orientação das fibras possui impacto direto no comportamento mecânico da estrutura, onde elementos

reforçados com PRF adotando fibras contínuas apresentaram melhores resultados do que os compósitos com orientação aleatória, bem como as fibras contínuas unidirecionais garantiram resistências superiores à tração e flexão (Yu *et al.*, 2019). Ainda, foi observado que a consideração multicamadas de PRF é capaz de aumentar a capacidade portante e melhorar a rigidez e a ductilidade do elemento reforçado, com efeitos mais significativos encontrados em reforços com até três camadas (Motlagh; Gholipour; Ebrahimi, 2012; Ursache; Cerbu; Hadär, 2024).

A revisão realizada por Albuja-Sánchez, Damián-Chalán e Escobar (2024), aponta as fibras de carbono, de vidro e de aramida como as mais encontradas nos PRF utilizados em estruturas, geralmente associados a reforços e recuperações estruturais. Entretanto, o PRFB também é um compósito comumente encontrado na literatura (Schober *et al.*, 2015; Zhou *et al.*, 2021). A Tabela 1 apresenta as propriedades usuais para os principais laminados de PRF encontrados na literatura. Destaca-se que os polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC), de basalto (PRFB) e de vidro (PRFV) emitem menos CO₂ e necessitam de menor energia para sua fabricação quando comparados com o aço (Sbahieh; Tahir; Al-Ghamdi, 2022).

Tabela 1 – Propriedades estruturais dos principais laminados de PRF

Compósito	Densidade (g/cm ³)	Módulo de elasticidade (GPa)	Resistência à tração (MPa)	Alongamento (%)
PRFA	1,25-1,4	41-125	1720-2540	1,9-4,4
PRFB	2,6-2,8	70-90	2757	2,2
PRFC	1,5-1,6	120-580	600-3690	0,5-1,7
PRFV	1,25-2,1	35-51	483-690	1,2-3,1

Fonte: Adaptado de ACI 440.1R (2015) e Amran *et al.* (2018)

A eficiência do reforço depende da qualidade da adesão entre o compósito e o substrato. A recomendação operacional da literatura consiste em lixar, limpar e garantir a remoção completa dos contaminantes da superfície da madeira imediatamente antes da colagem, a fim de evitar processos de inativação química da superfície que prejudicam a aderência. Quando o reforço for realizado com placas pultrudadas pré-fabricadas, a superfície do reforço que terá contato com a madeira também deve ser preparada anteriormente (Al-Mashgari *et al.*, 2024; Branco; Dietsch; Tannert, 2021; Cruz; Custódio, 2010).

A aplicação do adesivo deve ser realizada de maneira uniforme por meio de pincel ou rolo, compondo uma camada primária. Após a fixação do reforço, uma nova camada de adesivo costuma ser aplicada, visando a proteção e a melhoria da qualidade da colagem. Na sequência, deve-se pressionar o laminado para garantir a impregnação da resina nas fibras e expulsar eventuais concentrações de ar, garantindo a uniformidade da superfície (Abadel; Khan; Masmoudi, 2021; Al-Mashgari *et al.*, 2024; Balanco *et al.*, 2021).

Dada sua composição, os compósitos reforçados com fibras são geralmente tratados como materiais ortotrópicos e sua falha deve ser prevista por critérios adequados para este tipo de material. Diversos modelos foram desenvolvidos para essa finalidade, como os critérios de Hill, Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman e Hashin, possuindo nuances específicos. Destaca-se que os compósitos laminados são ortotrópicos, com propriedades definidas para as três direções ortogonais do material, e os critérios de falha desenvolvidos para esses materiais são estendidos para análise de falha da madeira (Almeida, 2022; Mascia, Nilson Tadeu; Todeschini; Nicolas, 2013; Mendonça, 2019; Nicolas, 2006).

Proposto em 1950 por Roadney Hill, o critério de Hill (1950) é uma extensão do critério de von Mises (1913) para materiais anisotrópicos, concebido para considerar a anisotropia ocasionada por grandes deformações plásticas em um metal com comportamento inicial isotrópico (Mendonça, 2019). A Equação 1 apresenta o critério de Hill (1950) para o estado triaxial de tensões.

$$F \cdot (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2 \cdot L \cdot \sigma_{23}^2 + 2 \cdot M \cdot \sigma_{13}^2 + 2 \cdot N \cdot \sigma_{12}^2 = 1 \quad \text{Eq. 1}$$

Na Equação 1, as constantes F , G , H , L , M e N representam relações de propriedades de resistência do material, sendo obtidas pela Equação 2. Essas constantes são multiplicadas pelas tensões atuantes (σ) no material, considerando cada eixo axial (1, 2 e 3) e plano ortogonal (12, 13 e 23). A falha do material ocorre quando a igualdade apresentada na Equação 1 não for atendida e o resultado encontrado for superior a 1. Valores inferiores indicam que o material não falhou (Mendonça, 2019).

$$\begin{cases} F = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) & L = \frac{3}{2 \cdot R_{23}^2} \\ G = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) & M = \frac{3}{2 \cdot R_{13}^2} \\ H = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2} \right) & N = \frac{3}{2 \cdot R_{12}^2} \end{cases} \quad \text{Eq. 2}$$

Para determinação das propriedades de resistência, o critério de Hill (1950) prevê uma relação de diferentes coeficientes de plasticidade (R), onde as tensões resistentes axiais e nos planos de cisalhamento são relacionadas com a tensão de escoamento do material (σ_0), conforme a Equação 3.

$$\begin{cases} R_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} & R_{12} = \frac{\sigma_{12} \cdot \sqrt{3}}{\sigma_0} \\ R_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0} & R_{13} = \frac{\sigma_{13} \cdot \sqrt{3}}{\sigma_0} \\ R_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_0} & R_{23} = \frac{\sigma_{23} \cdot \sqrt{3}}{\sigma_0} \end{cases} \quad \text{Eq. 3}$$

Apesar de sua simples implementação computacional, destaca-se que o critério de Hill (1950) não considera a diferença de resistência entre tração e compressão e não prevê adequadamente as falhas consideradas frágeis, ocasionadas por tensões de tração ou cisalhamento (Christoforo *et al.*, 2022; Xu, B. H. *et al.*, 2009). Destaca-se que o critério de Hill (1950) é comumente encontrado em programas comerciais de análise de estruturas pelo método dos elementos finitos.

O critério de Tsai-Hill (1968) consiste na modificação do critério de Hill (1950), considerando um plano de isotropia transversal nas direções 2 e 3 do compósito (Mascia, Nilson T.; Simoni, 2013). Essa hipótese é válida nos casos em que a espessura do compósito laminado for consideravelmente maior do que o diâmetro das fibras, distribuídas de forma uniforme. A Equação 4 apresenta o critério de Tsai-Hill (1968) para o estado biaxial de tensões, com f_t e f_v denotando, respectivamente a resistência à tração na direção 1 ou 2 e a resistência ao cisalhamento.

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_{t1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{f_{t2}} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{f_{t1}^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{f_v} \right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 4}$$

Destaca-se que esse critério também não considera as resistências de tração e compressão conjuntamente (Mascia, Nilson T.; Simoni, 2013). Considerando seu plano isótopo, a necessidade de considerar tanto a resistência à tração, quanto a compressão é satisfeita considerando a Equação 4 para $\sigma_1 \geq 0$ e $\sigma_2 \geq 0$, a Equação 5 para $\sigma_1 \leq 0$ e $\sigma_2 \geq 0$, a Equação 6 para $\sigma_1 \leq 0$ e $\sigma_2 \leq 0$ e a Equação 7 para $\sigma_1 \geq 0$ e $\sigma_2 \leq 0$. Desse modo, a implementação deste critério é considerada trabalhosa (Mascia, Nilson T.; Simoni, 2013)

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_{c1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{f_{t2}}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{f_{t1}^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{f_v}\right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 5}$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_{c1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{f_{c2}}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{f_{t1}^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{f_v}\right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 6}$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_{t1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{f_{c2}}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{f_{t1}^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{f_v}\right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 7}$$

O critério de Tsai-Wu (1971) amplia o critério de Hill (1950), permitindo que a previsão da falha do material ocorra tanto por tensões axiais, quanto por tangenciais. Por considerar a assimetria de resistência do material, o modelo proposto é válido para todo o sistema de coordenadas, sendo indicado para análises em estados múltiplos de tensão (Mendonça, 2019). A Equação 8 apresenta o critério de Tsai-Wu (1971), considerando sua aplicação em compósitos ortotrópicos analisados no estado plano de tensões.

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + F_{44} \cdot \sigma_{12}^2 = 1 \quad \text{Eq. 8}$$

Da Equação 8, os valores do coeficiente de termos lineares e quadráticos de resistência (F_i e F_{ij} , respectivamente) são obtidos por meio de ensaios de tração, compressão e cisalhamento, paralelos e longitudinais às fibras, com exceção de F_{12} , que requer ensaios biaxiais.

Entre os coeficientes utilizados na Equação 8, destaca-se o F_{12} que é obtido por meio de ensaios biaxiais. Esse tipo de ensaio é de difícil execução e controle tecnológico, dificultando a implementação do método. Com isso, pesquisadores posteriores se dedicaram a simplificar o critério de Tsai-Wu (1971) para que o coeficiente F_{12} pudesse ser substituído por outro parâmetro de mais fácil obtenção.

Conforme apresentado por Mascia e Simoni (2013), há uma restrição para que o coeficiente F_{12} esteja no intervalo apresentado na Equação 9. Os demais coeficientes podem ser obtidos pela Equação 10.

$$-\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} < F_{12} < \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \quad \text{Eq. 9}$$

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}} & F_{22} = \frac{1}{f_{t2} \cdot f_{c2}} \\ F_2 = \frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}} & F_{44} = \frac{1}{f_{v12}^2} \\ F_{11} = \frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c1}} \end{cases} \quad \text{Eq. 10}$$

Mendonça (2019) descreve o critério de Hoffman (1967) como uma extensão do critério de Hill (1950), por permitir uma avaliação da falha do material tanto por tração quanto por compressão, bem como uma simplificação do critério de Tsai-Wu (1971), onde a constante F_{12} (Equação 8) é substituída por uma relação obtida com a resistência de tração e compressão do material, conforme apresentado na Equação 11. As demais constantes também são substituídas. Desse modo, o critério de Hoffman (1967) é apresentado na Equação 12.

$$F_{12} = -\frac{1}{2 \cdot f_{t1} \cdot f_{c1}} \quad \text{Eq. 11}$$

$$\frac{\sigma_1^2}{f_{t1} \cdot f_{c1}} + \frac{\sigma_2^2}{f_{t2} \cdot f_{c2}} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{f_{t1} \cdot f_{c1}} + \left(\frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}} \right) \cdot \sigma_1 + \left(\frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}} \right) \cdot \sigma_2 + \frac{\sigma_{12}^2}{f_{v12}^2} = 1 \quad \text{Eq. 12}$$

Pela inclusão de termos lineares que diferenciam as resistências de tração e compressão, este critério tem sido aplicado tanto em materiais frágeis, quanto dúcteis (Mascia, Nilson T.; Simoni, 2013).

O critério de Hashin (1980) permite prever a falha de compósitos laminados reforçados por fibras unidirecionais transversalmente isotrópicas, considerando a falha tanto na fase matriz quanto na fibra, diferenciando as falhas por tensões de compressão e de tração. As equações 13 e 14 apresentam os critérios para falha por compressão e tração, respectivamente, para a fibra. Por sua vez, as equações 15 e 16 apresentam os critérios para falha por compressão e tração, respectivamente, para a fase matriz.

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_{t1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{f_{12}}\right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 13}$$

$$\sigma_1 = -f_{c1} \quad \text{Eq. 14}$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{f_{t2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{f_{12}}\right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 15}$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{2 \cdot f_{23}}\right)^2 + \left[\left(\frac{f_{c2}}{2 \cdot f_{23}}\right)^2 - 1\right] \cdot \frac{\sigma_2}{f_{c2}} + \left(\frac{\sigma_{12}}{f_{12}}\right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 16}$$

2.4 FUNDAMENTOS DA REGRESSÃO SIMBÓLICA

A regressão simbólica (RS) consiste em um método de programação genética que visa obter um modelo com ajuste elevado a uma determinada amostra, associando as variáveis independentes com operadores matemáticos, o que se difere de outros modelos de regressão (linear, polinomial, quantílica, logística etc.) que se destinam a obter coeficientes numéricos para funções previamente estabelecidas (Koza, 2003).

O funcionamento da RS ocorre por meio de aprendizado supervisionado, com uma estrutura de otimização multiobjetivo, visando minimizar o erro de predição e a complexidade do modelo de forma concomitante (Cranmer, 2023). Os primeiros estudos que abordaram o uso da regressão simbólica são creditados a Gerwin (1974) e Langley (1977).

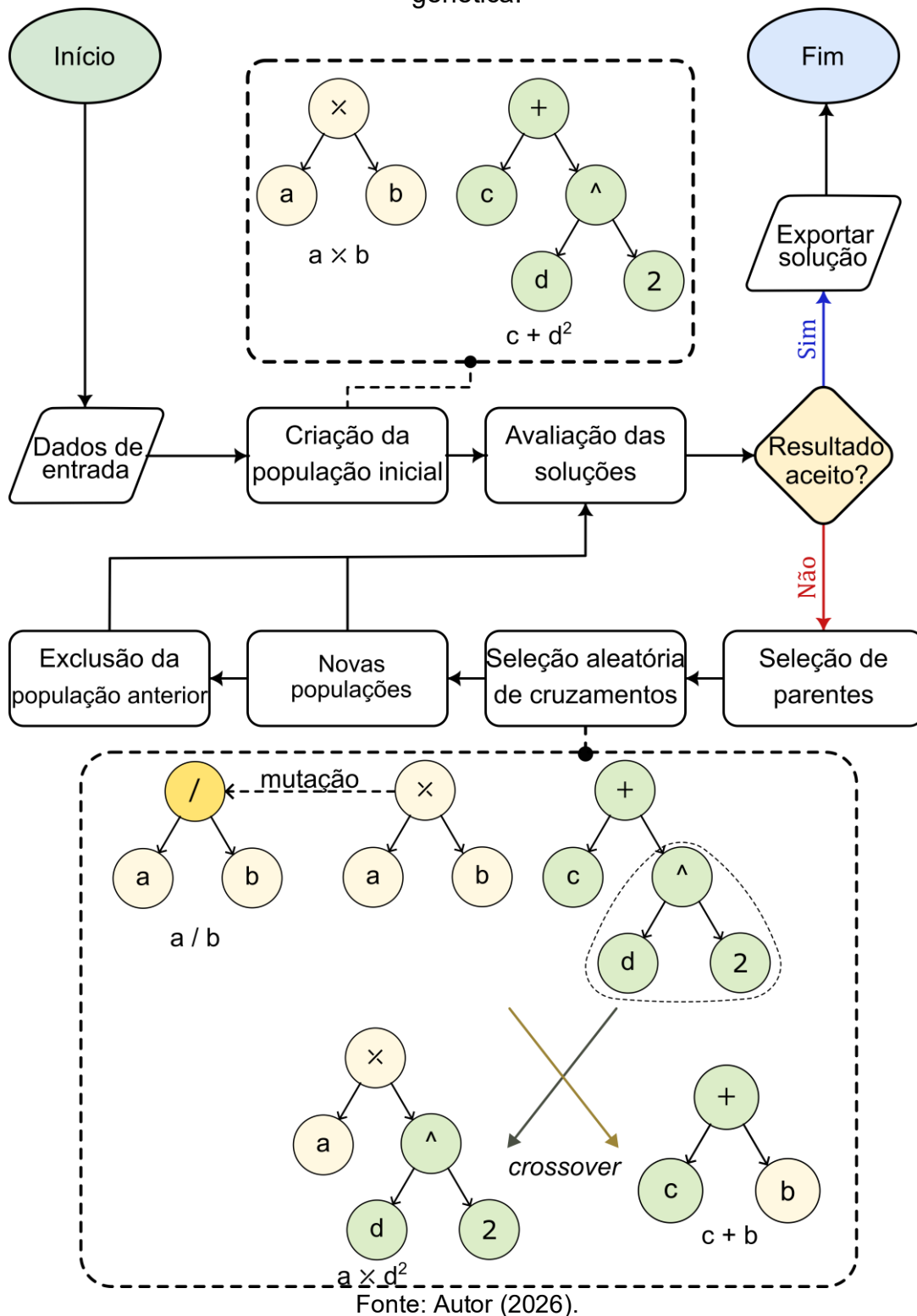
Estruturalmente, um modelo de RS é obtido a partir de um conjunto de dados, gerando expressões matemáticas aleatórias (indivíduos) a partir das variáveis de interesse, geralmente estruturadas como árvores hierárquicas. Com isso, cria-se uma população inicial de indivíduos e inicia-se um processo iterativo de avaliação de aptidão (*fitness*), onde o desempenho dos indivíduos é avaliado, geralmente por meio do erro absoluto médio (MAE) ou do erro percentual absoluto médio (MAPE), utilizando dados de treinamento. Para evitar equações longas, redundantes ou com *overfitting* (com excesso de sobreajuste), costuma-se adotar um fator de parcimônia, que tem como finalidade a penalização de modelos complexos, forçando o algoritmo a buscar um equilíbrio entre precisão e simplicidade (Abdusalamov; Hillgärtner; Itskov, 2023; Agapitos *et al.*, 2019; Angelis; Sofos; Karakasidis, 2023; Rebello *et al.*, 2024).

Os indivíduos com melhores pontuações de aptidão possuem maior probabilidade de serem selecionados para reprodução. Métodos como a seleção por torneio são comumente adotados nesta etapa. Os indivíduos selecionados passam por novos operadores genéticos para gerar descendentes (novas equações), compondo a geração seguinte (Abdusalamov; Hillgärtner; Itskov, 2023; Cao; Sun; Chen, 2024). Os principais operadores adotados são:

- Cruzamento (*crossover*): troca de subárvores inteiras entre duas expressões genitoras, combinando características de ambas para gerar novas equações;
- Mutação: modifica-se uma parte da expressão de um único indivíduo aleatoriamente, ajudando a manter a diversidade do modelo e a evitar que a busca fique presa em ótimos locais;
- Reprodução ou elitismo: as melhores equações podem ser copiadas diretamente para a próxima geração sem alterações, garantindo que boas soluções não se percam.

Com isso, a nova geração passa novamente pelo ciclo de avaliação, seleção e operação genética. Esse processo iterativo permite uma melhora gradual das soluções até que o critério de parada seja satisfeito. Abdusalamov *et al.* (2023) destacam que, teoricamente, populações grandes com um alto número de gerações costumam conduzir a ajustes elevados, tendendo a modelos ideais. Esses conceitos são sintetizados na Figura 12.

Figura 12 – Fluxograma geral de regressão simbólica baseado em programação genética.



Alguns estudos sobre engenharia estrutural apresentaram resultados promissores ao adotar a RS. Desses, K. Megahed se destaca, propondo modelos para previsão da capacidade de carga de pilares mistos de aço-concreto sob carregamento centrado (R^2 entre 96,7% e 97%) e excêntrico ($R^2 = 96%$) (Megahed, 2025a, b;

Megahed; Mahmoud; Abd-Rabou, 2024). Também foram propostos modelos para resistência ao cisalhamento de vigas parede, com R^2 atingindo até 99,7%, e de mísulas de concreto armado ($R^2 = 86,2\%$) (Megahed, 2024a, b).

Spozito *et al.* (2025) elaboraram um modelo para correção da previsão da capacidade de carga de blocos de concreto armado com quatro estacas sob pilares retangulares, alcançando um MAPE de 1,37%. Liang *et al.* (2023) obtiveram um $R^2 = 99\%$ na previsão da resistência à punção de lajes de concreto armado com PRF. Por sua vez, o modelo de Alotaibi e Islam (2023) para determinar a resistência à compressão de pilares prismáticos de alvenaria confinados por PRF apresentou um $R^2 = 91\%$.

Alguns estudos sobre estruturas de madeira foram encontrados. Silva, Reis *et al.* (2025) propuseram modelos simples de RS para estimar o carregamento limite de serviço em painéis CLT biapoiados considerando duas espécies de pinus. A análise foi baseada em simulações numéricas considerando o comportamento linear físico e geométrico, obtendo modelos com $R^2 \cong 100\%$ e MAPE inferior a 1%. Complementarmente, Silva, Aguiar *et al.* (2025) apresentaram um coeficiente para ajustar a capacidade preditiva do método da analogia de cisalhamento na obtenção da rigidez efetiva à flexão de painéis CLT para diferentes espécies de pinus e eucalipto, obtendo um $R^2 = 98,34\%$ e MAPE = 0,425%.

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Conforme destacado neste capítulo, a natureza altamente anisotrópica da madeira impõe desafios à previsão exata de seu comportamento mecânico. Embora a simplificação para um comportamento ortotrópico seja uma prática amplamente aceita e normatizada, a caracterização experimental permanece como a alternativa mais confiável frente às incertezas das correlações normativas vigentes.

No que tange às técnicas de reforço, constatou-se que a intervenção em pilares de madeira exige um equilíbrio entre eficiência técnica, viabilidade logística e preservação estética. O emprego de compósitos laminados de PRF destaca-se como uma solução eficaz, superando em muitos cenários os métodos tradicionais com aço, notadamente pela capacidade de confinamento e redução de deformações transversais. Contudo, a eficácia dessas soluções é estritamente dependente da preparação rigorosa da superfície de colagem.

Quanto aos critérios de falha, embora modelos abrangentes como o de Hashin (1980) existam, a implementação desses critérios é trabalhosa. Critérios que dependem do fator F_{12} , como Tsai-Wu (1971), possuem esse fator como um desafio, pois a realização de ensaios biaxiais na madeira não é usualmente realizada em todos os laboratórios. O critério de Hill (1950), ainda que possua limitações, é amplamente adotado em estudos numéricos sobre estruturas de madeira (Kawecki, 2021; Mascia, Nilson Tadeu; Simoni, 2012; Szczecina, 2023), incluindo estudos que avaliam o comportamento de pilares de madeira (Kia; Valipour; Ghanbari-Ghazijahani, 2024; Liu *et al.*, 2022; Xu, F. *et al.*, 2024), refletindo a necessidade de métodos que equilibrem precisão e simplicidade computacional.

Por fim, este capítulo explorou o potencial da RS como ferramenta de otimização multiobjetivo capaz de associar precisão e parcimônia na modelagem de fenômenos complexos. A aplicação bem-sucedida da RS em estruturas de madeira, conforme observado nos estudos de Silva, Aguiar *et al.* (2025) e Silva, Reis *et al.* (2025), ratifica o potencial desta técnica para aprimorar a predição do desempenho de elementos estruturais, servindo como suporte fundamental para as análises e discussões desenvolvidas neste estudo.

**3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SISTEMÁTICA:
UTILIZAÇÃO DE COMPÓSITOS LAMINADOS DE
PRF PARA REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA**

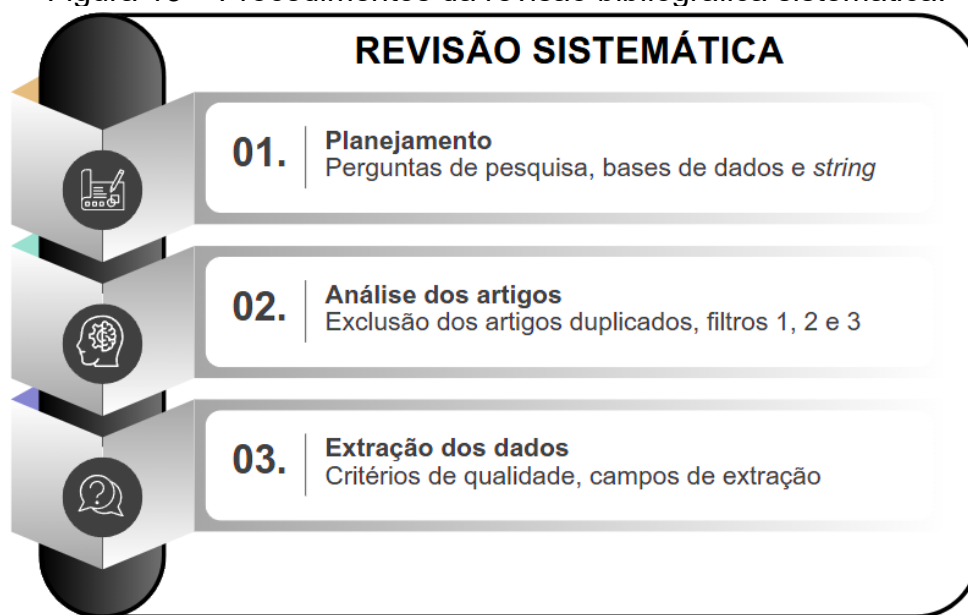
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SISTEMÁTICA: UTILIZAÇÃO DE COMPÓSITOS LAMINADOS DE PRF PARA REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA

O presente capítulo tem como objetivo apresentar a revisão bibliográfica sistemática (RBS) realizada para se obter o estado da arte sobre a utilização de compósitos laminados de PRF para reforço de pilares de madeira, bem como apresentar as formulações existentes na literatura para verificação desse elemento.

3.1 MÉTODO DA REVISÃO SISTEMÁTICA

Os procedimentos de análise e extração de dados foram realizados por meio do *software* StArt, desenvolvimento pelo LaPES/UFSCar. Para uniformização das etapas da revisão, foi adotado o procedimento ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Procedimentos da revisão bibliográfica sistemática.



Fonte: Autor (2026).

A revisão sistemática foi realizada em junho de 2024, adotando como base de dados para obtenção dos artigos as plataformas *Engineering Village* e *Web of Science*. Essas bases de dados foram definidas após diversos testes e a seleção de duas grandes bases representando as duas maiores editoras atuais: Elsevier e Clarivate. A adoção da *Engineering Village* se deu para otimizar as etapas de seleção da amostra inicial, visto que os principais resultados encontrados em outras plataformas mais usuais, como *Scopus* e *Science Direct*, retornariam um volume maior de artigos inicialmente, porém a amostra final tendeu a ser a mesma em todos

os testes preliminares realizados. Foram definidas perguntas de pesquisa e os termos representativos para atendimento dos objetivos da revisão.

A definição da *string* foi realizada por meio dos termos “*timber*”, “*strengthening*”, “*column*” e “*fiber reinforced polymer*”. Por meio de operadores booleanos, os termos adotados foram unidos para que os resultados encontrados apresentassem todas as palavras escolhidas. Visando uma maior abrangência da busca, palavras com mesmo significado, ou similar, aos termos adotados foram elencadas na *string*, sendo definida como:

- ("timber" OR "wood") AND ("strengthening" OR "reinforcement") AND ("column" OR "pillar") AND (“fiber reinforced polymer” OR “FRP”).

As perguntas de pesquisa consideradas foram:

- Como os compósitos laminados de PRF são utilizados em reforços de pilares de madeira?
- Qual a influência das propriedades físicas e mecânicas do PRF e da madeira no desempenho do pilar?
- Quais métodos matemáticos são adotados pela literatura para dimensionamento de pilares de madeira reforçados com PRF?

Na etapa de análise dos artigos, após exclusão dos registros duplicados (artigos presentes em ambas as bases de dados), foram selecionados os artigos que respondessem às perguntas elaboradas e que fossem capazes de contribuir com a proposta da revisão. A análise foi realizada considerando três filtros: seleção, elegibilidade e inclusão.

No filtro de seleção, os títulos, palavras-chave e resumos dos artigos extraídos das buscas foram lidos com intuito de identificar os artigos que claramente não versavam sobre o objeto da revisão. No filtro de elegibilidade foi realizada a leitura da introdução e conclusão dos artigos que foram incluídos pelo filtro de seleção. O objetivo foi compreender o contexto e objetivo dos estudos e suas contribuições. No filtro de inclusão os artigos foram lidos integralmente, sendo classificados uma última vez quanto sua inclusão na amostra considerada para a revisão sistemática. Ao término de cada filtro, os artigos que possuíam dados de interesse eram aprovados para o próximo filtro, sendo excluído os demais. Por fim, os artigos aprovados nos três filtros foram utilizados para extração dos dados de interesse.

A etapa final do processo de definição da amostra é a extração dos dados, em que os trabalhos são classificados quanto os critérios de qualidade (Tabela 2)

visando analisar a amostra de forma qualitativa acerca da capacidade da amostra para as respostas das perguntas de pesquisa estipuladas. Por fim, foram definidos diversos campos de extração, baseados nas perguntas de pesquisa, para organização e comparação das informações obtidas.

Tabela 2 – Critérios de qualidade revisão sistemática

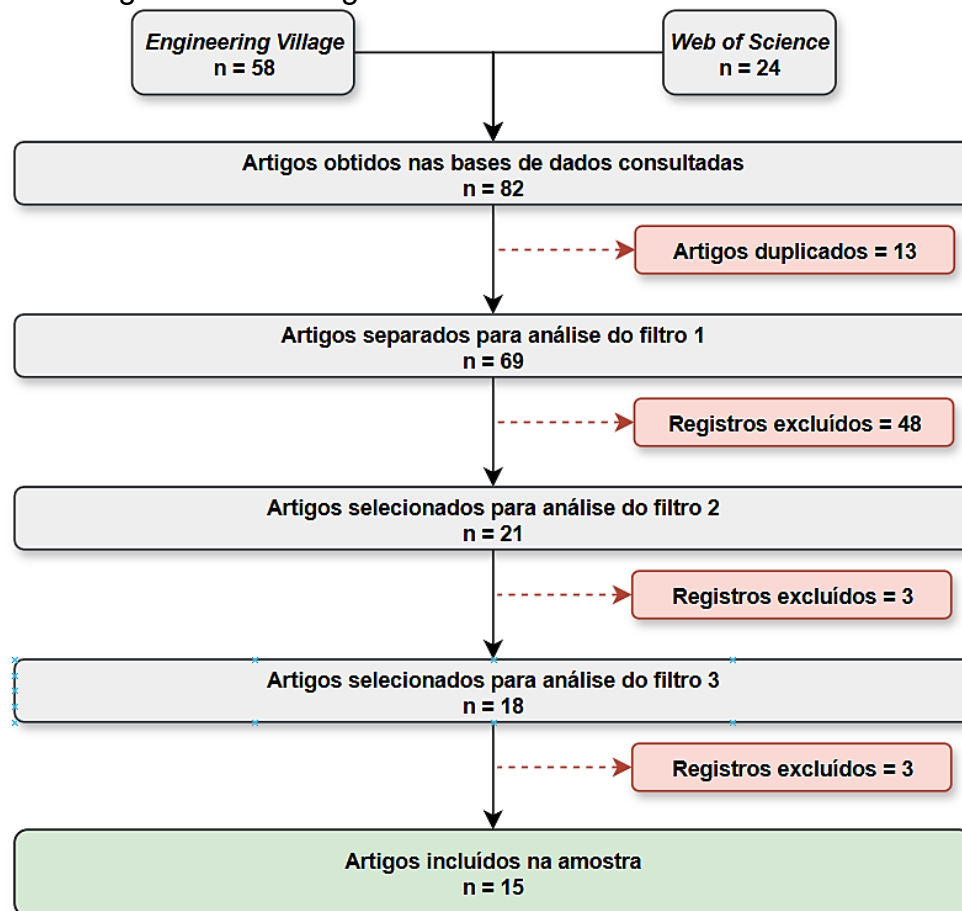
Critério	Descrição
Q1	O artigo apresenta as propriedades físicas e mecânicas caracterizadas da madeira?
Q2	O artigo apresenta as propriedades físicas e mecânicas do PRF?
Q3	O artigo apresenta/utiliza algum método analítico para análise do reforço?

Fonte: Autor (2026).

3.2 ANÁLISE BIBLIOMÉTRICA E QUALITATIVA DA AMOSTRA

Com a obtenção da amostra, foram selecionados 15 artigos para compor a base de dados consultada, correspondendo a 21,74% dos registros obtidos das bases de dados, desconsiderando os trabalhos duplicados. A Figura 14 apresenta o fluxograma PRISMA, onde a quantidade de artigos removidos em cada etapa é detalhada.

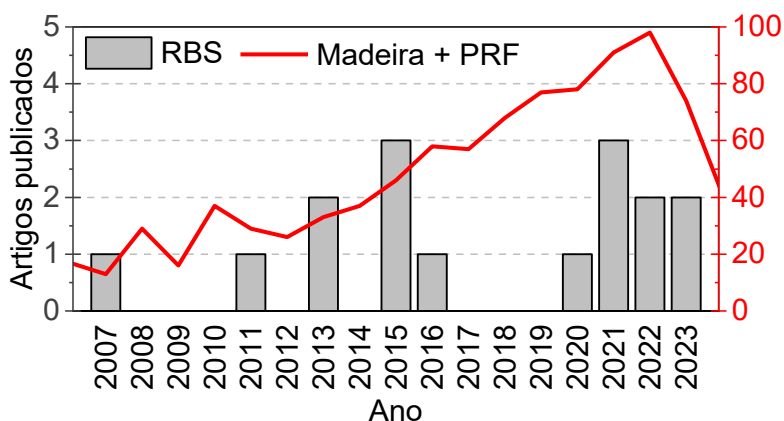
Figura 14 – Fluxograma PRISMA da revisão sistemática.



Fonte: Autor (2026).

Em síntese, os artigos não incluídos na amostra geralmente foram excluídos por não utilizarem PRF como elemento de reforço ou por não analisar pilares de madeira, sendo a maioria voltado para outros materiais estruturais, porém também foram obtidos artigos que visavam recuperar outros elementos de madeira, como painéis e vigas, fora do escopo desta revisão. A Figura 15 apresenta a distribuição dos artigos selecionados conforme o ano de publicação.

Figura 15 – Ano de publicação dos artigos da revisão sistemática.

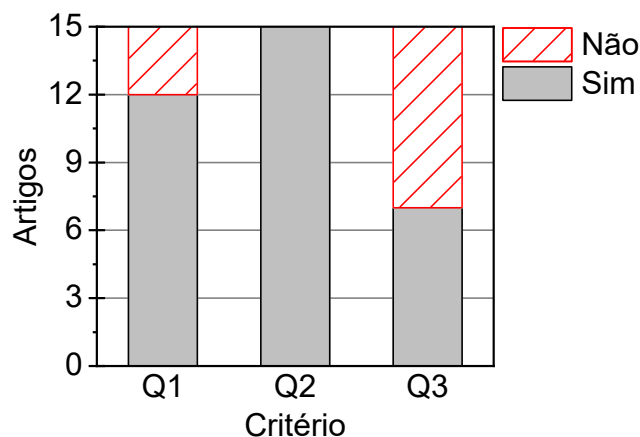


Fonte: Autor (2026).

Da Figura 15, destaca-se que os anos de 2015 e 2021 foram os de maior ocorrência de publicação no tema abordado. Ainda assim, destaca-se a pequena quantidade de publicações anuais no assunto o que aponta uma importante necessidade de incentivo à publicação de artigos sobre o tema. Pode-se observar também que os estudos sobre reforço de pilares de madeira com PRF não acompanharam a tendência de crescimento das demais pesquisas sobre uso de PRF na madeira, já destacado como de menor interesse quando comparado com a quantidade de publicações sobre reforços em estruturas de madeira (Figura 3).

Durante a realização dos filtros (etapa de análise dos artigos, Figura 13) foi observado um volume consideravelmente superior de estudos sobre vigas de madeira reforçadas com PRF, o que confirma os dados apresentados na Figura 15. Cabe destacar que o comportamento estrutural de pilares possui grande distinção de outros elementos, geralmente submetidos predominantemente à flexão, como vigas e painéis. Quanto aos critérios de qualidade presentes na Tabela 2, a quantidade de artigos que atenderam cada critério é apresentada na Figura 16.

Figura 16 – Classificação dos artigos conforme os critérios de qualidade.



Fonte: Autor (2026).

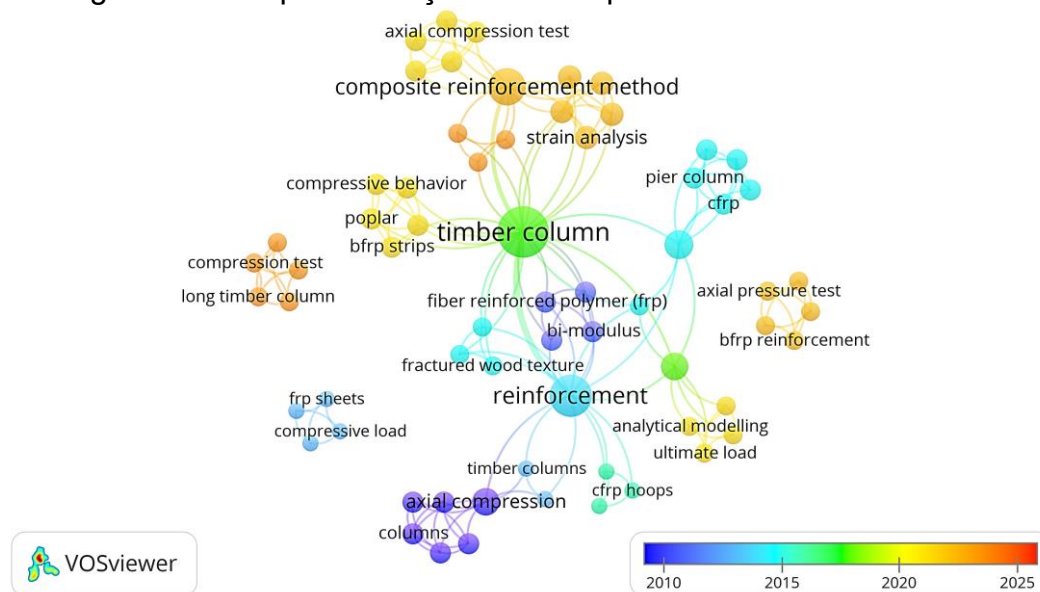
Destaca-se que o critério de qualidade sobre a apresentação das propriedades físicas e mecânicas do PRF (Q2) foi atendido por 100% da amostra, sendo seguido pelo critério Q1, com 80% da amostra apresentando as informações sobre as propriedades da madeira. Destaca-se que, em geral, o PRF foi obtido de empresa especializada, possuindo um controle de produção. Isso pode justificar a facilidade em se obter e fornecer os valores das propriedades do compósito.

A quantidade e precisão das informações da madeira variou consideravelmente em cada artigo, com poucos estudos realizando um processo de caracterização completo. Isso pode ser justificado pela dificuldade em se caracterizar a madeira adequadamente, sendo necessária a realização de diversos ensaios com diferentes equipamentos para a obtenção de todas as suas propriedades. A maior parte dos estudos obtiveram apenas o módulo de elasticidade longitudinal e a resistência à compressão longitudinal da madeira.

O critério Q3 foi atendido por sete artigos (46,7%) presentes na amostra, indicando que existe uma preocupação em se propor técnicas de dimensionamento analítico para pilares reforçados com PRF. Os artigos que falam sobre o tema abordaram equações para diferentes finalidades, sendo abordados em maior detalhe no Capítulo 3.6.

A Figura 17 apresenta um mapa relacionando as palavras-chave encontradas nos artigos. O mapa relaciona os termos utilizados em conjunto, indicando a quantidade de repetições por meio do tamanho da palavra e a evolução dos termos adotados ao passar dos anos.

Figura 17 – Mapa de relação entre as palavras-chave da amostra.



Fonte: Autor (2026).

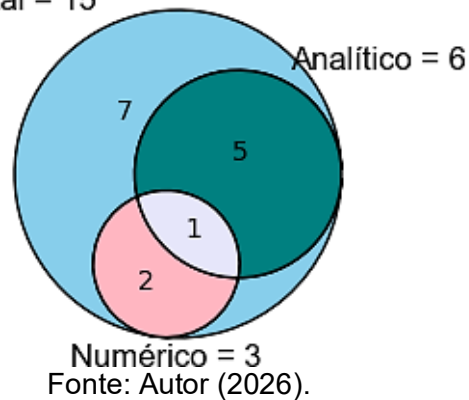
Com base na Figura 17, os termos “*timber column*”, “*reinforcement*” e “*composite reinforcement method*” foram os mais encontrados. Isso indica que os termos definidos para a composição da *string* de busca foram adequados para esta revisão, pois, eventualmente, poderiam surgir termos distintos adotados pela amostra.

Destaca-se que, ainda que existam agrupamentos distintos, as palavras-chave adotadas são similares, indicando ensaios de compressão axial, com variações do tipo de fibra do compósito laminado e algumas indicações de simulações numéricas. A baixa quantidade de artigos encontrados (Figura 14) e a similaridade dos temas abordados nos artigos em geral (Figura 17), indicam a importância na realização de novos estudos que possam elucidar possíveis temas ainda não abordados. Os próximos capítulos se destinam a realizar análises mais específicas da amostra e dar luz para novas possibilidades de pesquisas sobre pilares de madeira reforçados com laminados de PRF.

3.3 CONTEXTO DOS ESTUDOS SOBRE REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA COM PRF

Ao analisar a amostra obtida, foram encontrados estudos que realizaram investigações experimentais, numéricas e analíticas. A Figura 18 apresenta a quantidade de artigos que adotou cada uma dessas abordagens. Não foram encontrados estudos de caso ou outras abordagens que avaliem o reforço sendo aplicado em pilares pertencentes a estruturas reais.

Figura 18 – Abordagem dos estudos encontrados na amostra.
Experimental = 15



Ao avaliar as espécies de madeira utilizadas nos artigos, foram encontradas oito coníferas e três folhosas, correspondendo a 53,33% e 20% da amostra, respectivamente. Cinco artigos (33,3%) não identificaram a espécie de madeira adotada. Dos artigos que apresentaram informações sobre a madeira, dez relataram algum procedimento de caracterização. As informações sobre as propriedades das madeiras presentes na amostra são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades da madeiras caracterizadas na amostra

Espécie	E_0 (MPa)	E_{90} (MPa)	G (MPa)	f_{c0} (MPa)	f_{c90} (MPa)	f_{t0} (MPa)	f_{t90} (MPa)	f_v (MPa)	Referência
<i>Cinnamomum camphora</i>	-	-	-	35,6	-	111,4	-	-	Dong <i>et al.</i> (2015a)
<i>Cinnamomum camphora</i>	7254	-	-	23,2	-	-	-	-	Chen <i>et al.</i> (2020)
<i>Cunninghamia lanceolata</i>	-	-	-	25,2	-	-	-	-	Xiong e Su (2015)
<i>Cunninghamia lanceolata</i>	9167	1100	656	29	5,5	27	3,1	5,9	Wang <i>et al.</i> (2023)
<i>Cunninghamia lanceolata</i>	7956	-	-	24,7	-	60,2	-	-	Xiong, Lu e Xue (2016)
<i>Paulownia</i>	4420	-	-	22,6	6,4	85,7	6,3	-	Yang <i>et al.</i> (2021)
<i>Pinus koraiensis</i>	12142	-	-	35	-	73,2	-	-	Siha e Zhou (2023, 2022)
<i>Populos</i>	8431	910	915	38,6	-	118,9	-	-	Zhou <i>et al.</i> (2021)
<i>Pseudotsuga menziesii</i>	17440	-	-	54,8	5,5	-	-	-	Siha, Zhou e Yang (2021)

Nota: E_0 e E_{90} : módulo de elasticidade paralelo e perpendicular às fibras, respectivamente; G: módulo de cisalhamento; f_{c0} e f_{c90} : resistência à compressão paralela e perpendicular às fibras, respectivamente; f_{t0} e f_{t90} : resistência à tração paralela e perpendicular às fibras, respectivamente; f_v : resistência ao cisalhamento.

Fonte: Autor (2026).

Da Tabela 3, destaca-se que os estudos conduzidos por Siha e Zhou (2023, 2022) apresentam as mesmas propriedades para a *Pinus koraiensis* utilizada, indicando que possivelmente se tratam de estudos complementares com a mesma amostra de madeira. A resistência à compressão paralela às fibras (f_{c0}) foi a propriedade com maior número de medições, sendo seguida pelo módulo de elasticidade (E_0) e resistência à tração (f_{t0}) paralelos às fibras.

Isso evidencia a dificuldade em se caracterizar elementos de madeira e reforça a importância de equações que visam estimar propriedades de difícil obtenção de forma indireta. Ainda assim, por conta da grande variabilidade das propriedades da madeira, sua alta anisotropia e características anatômicas, a obtenção de propriedades da madeira por métodos indiretos deve ser usada com cautela.

Alguns documentos normativos, como o europeu (CEN, 2016) e o brasileiro (ABNT, 2022), estabelecem correlações entre propriedades que não correspondem aos dados apresentados na Tabela 3. Para obtenção do módulo de elasticidade transversal (G), o documento normativo europeu indica a divisão do E_0 por 16. Entretanto, para a espécie de *Populus*, essa consideração resultaria em um erro de até 42,4%. O módulo de elasticidade perpendicular às fibras (E_{90}) também resultaria em grandes taxas de erro (até 72,2%) se fosse determinado pelas correlações presentes no documento normativo ($E_0/15$ para folhosas e $E_0/30$ para coníferas).

Ao observar a geometria dos pilares ensaiados, constatou-se que a maioria dos trabalhos estudaram pilares de seção transversal circular, totalizando 11 artigos que adotaram essa geometria. Apenas cinco estudos consideraram a utilização de pilares com seção transversal quadrada. O trabalho realizado por Dong *et al.* (2015b) foi o único que considerou as duas geometrias de seção transversal, sendo encontrada uma maior eficiência ao se adotar o reforço nos pilares quadrados.

Os estudos de Chen *et al.* (2020) e Liu *et al.* (2022) consideraram pilares de seção circular vazada. Esses estudos são importantes por considerar possíveis degradações na madeira, que ocorrem comumente na região próxima da medula (Björdal; Elam, 2021; Martín; López, 2023). Liu *et al.* (2022) apontam que o método de dimensionamento presente no documento normativo chinês (SAC, 2017) não é aplicável para pilares com perda de seção transversal e propõe um ajuste ao método. Destaca-se que a baixa quantidade de estudos sobre esse tipo de pilar não favorece o emprego dessa técnica de reforço em situações em que há pilares degradados.

Ao observar os tipos de PRF utilizados nos estudos, o PRFC foi o mais adotado, estando presente em 12 artigos, sendo seguido pelo PRFB (5 artigos) e PRFA (3 artigos). Destaca-se que, em geral, os estudos não realizam a caracterização do compósito, sendo informadas as propriedades indicadas pelos fabricantes. O estudo de Wang *et al.* (2023) foi o único trabalho da amostra que se propôs a analisar a utilização de fibras híbridas, mesclando PRFC, PRFV e PRFA. A técnica proposta, bem como as demais encontradas na amostra, é discutida no Capítulo 3.4.

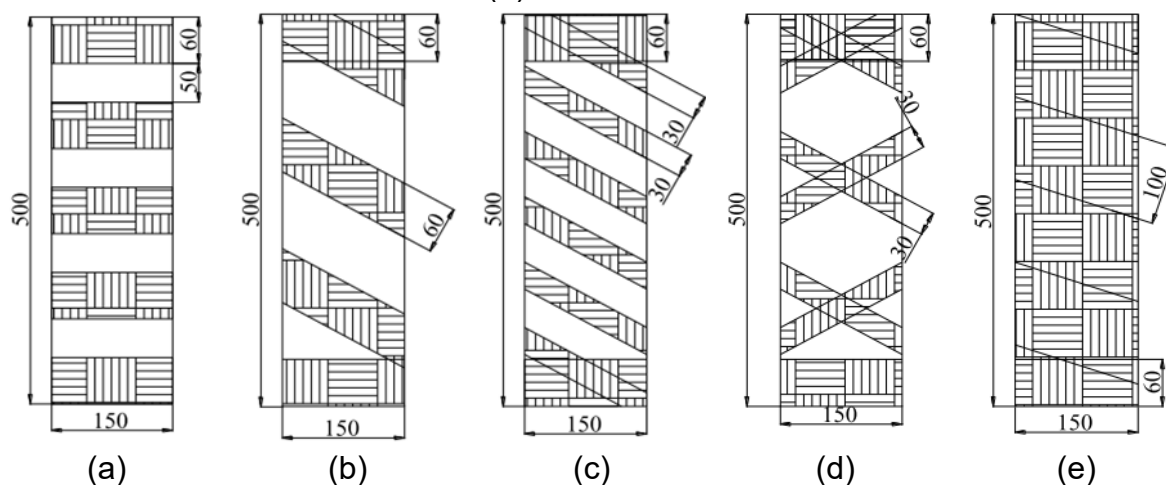
3.4 SÍNTESE DOS ESTUDOS ENCONTRADOS E SUAS DESCOBERTAS

A efetividade da utilização dos compósitos laminados de PRF foi amplamente corroborada pela amostra, apresentando melhores desempenhos mecânicos quando comparado com outros métodos de reforço, como o aço (Siha; Zhou; Yang, 2021; Xiong; Lu; Xue, 2016). Ainda assim, os diferentes estudos coletados apresentaram nuances e finalidades distintas.

Zhu *et al.* (2013) avaliaram diferentes tipos, camadas e arranjos de PRF em pilares de seção retangular. Os autores observaram que o desempenho mecânico dos pilares foi melhorado ao se adotar duas camadas de PRF, porém ao analisar os elementos com três camadas foi observada uma redução da resistência. O mesmo comportamento também foi observado por Xiong e Su (2015).

Li *et al.* (2013) avaliaram diferentes distribuições do PRF, avaliando o invólucro do reforço com geometria toroidal e diferentes configurações de hélice (Figura 19). Os compósitos fixados em formato helicoidal foram aplicados com uma inclinação aproximada de 28°. Os autores observaram que apesar do reforço helicoidal proporcionar uma menor deformação lateral, a capacidade de carga (compressão axial) é significativamente superior ao se adotar o reforço toroidal.

Figura 19 – Arranjo das amostras ensaiadas à compressão axial por Li *et al.* (2013): reforço toroidal (a), hélice única (b), hélice dupla (c), hélice cruzada (d) e hélice contínua (e). Dimensões em mm.



Fonte: Li *et al.* (2013).

Dong *et al.* (2015b) compararam o uso de PRFC, PRFA e PRFB, com reforço *crossply* contínuo e em intervalos, para reforço de pilares de madeira com seção transversal circular e quadrada. Neste estudo, foi encontrado um aumento geral na capacidade de carga dos pilares de seção quadrada entre 69% e 103%, enquanto para os pilares de seção circular o aumento variou entre 35% e 83%. Os autores destacam que, para além do aumento da resistência, rigidez e ductilidade (Zhu *et al.*, 2013), o reforço com PRF atenuou o desenvolvimento de rachaduras e, diferentemente do encontrado em outros estudos (Chen, Q. *et al.*, 2020; Liu *et al.*, 2022; Zhou *et al.*, 2021), foi capaz de alterar o modo de falha de frágil para dúctil.

O maior aumento da capacidade de carga foi encontrado nos pilares de seção quadrada com duas camadas de PRFB e reforço com intervalos, enquanto a maior ductilidade foi obtida com o uso do PRFA. Os autores destacam que não foi encontrada uma relação proporcional entre a carga máxima e a quantidade de camadas de reforço. Em outro estudo, Dong *et al.* (2015a) destacam que o aumento na capacidade de carga encontrada variou entre 68,9% e 100,2%.

Yang *et al.* (2021) investigaram a utilização do PRFV também em regiões internas do pilar. Para isso, consideraram pilares compostos por um, dois e quatro núcleos de madeira (Figura 20). Na interface desses núcleos, bem como nas faces externas, foram colados laminados *crossply* de PRFV. Os autores observaram que o reforço contribuiu para a resistência global, rigidez e estabilidade do elemento, assim como o confinamento da madeira e proporcionou uma falha mais dúctil.

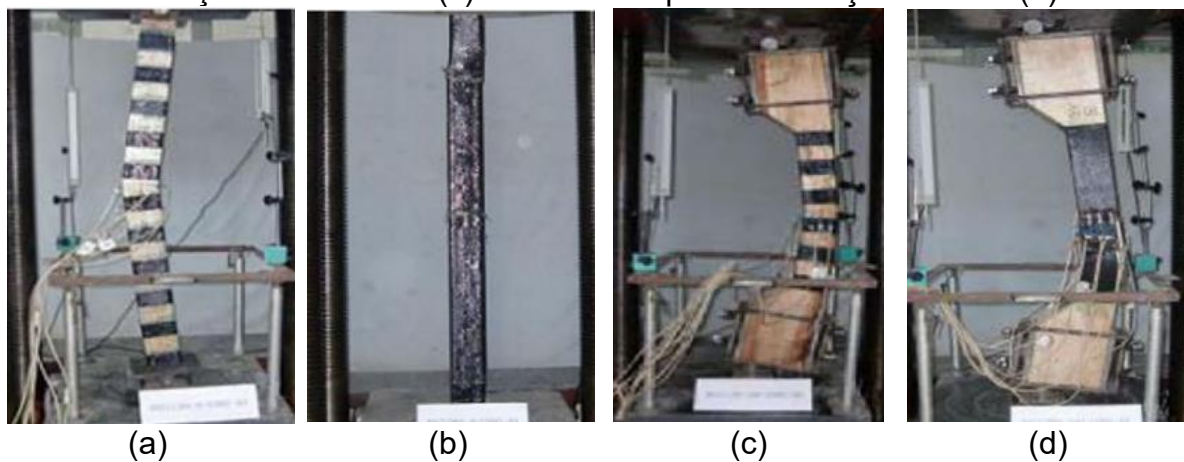
Figura 20 – Amostras ensaiadas por Yang *et al.* (2021).

Fonte: Adaptado de Yang *et al.* (2021).

A utilização de PRF para reforçar pilares circulares com perda de seção transversal foi realizada por Chen *et al.* (2020) e Liu *et al.* (2022). Chen *et al.* (2020) reforçaram pilares danificados com PRFC, enquanto Liu *et al.* (2022) adotaram PRFB. Chen *et al.* (2020) observaram que o reforço não foi capaz de modificar o modo de falha, sendo obtido pela deformação excessiva à compressão, sendo similar o comportamento encontrado por Liu *et al.* (2022). O aumento da capacidade de carga dos pilares de Liu *et al.* (2022) chegou a 26,65%. Ainda assim, destaca-se a baixa quantidade e abrangência de estudos sobre pilares danificados reforçados com PRF.

Zhou *et al.* (2021) analisaram experimentalmente pilares de madeira reforçados com PRFB sob compressão simples e flexão composta, tanto com reforço contínuo quanto em intervalos (Figura 21). O compósito PRFB utilizado foi adquirido da empresa *Xinjiang Tuoxin Basalt Fiber Products Co. Ltd.*, sendo fixado com resina epóxi bicomponente misturada na proporção de 3:1 (massa). Os autores foram os únicos que avaliaram os pilares submetidos à flexão composta, situação comumente encontrada em estruturas reais.

Figura 21 – Pilares ensaiados por Zhou *et al.* (2021): compressão centrada e reforço em intervalos (a), compressão centrada e reforço contínuo (b), flexão composta e reforço em intervalos (c) e flexão composta e reforço contínuo (d).



Fonte: Zhou *et al.* (2021).

Para os pilares submetidos à compressão composta, Zhou *et al.* (2021) observaram um aumento de até 65% na capacidade de carga nos pilares com reforço contínuo e com duas camadas de PRFB, bem como a variação das deformações internas do pilar, onde a deformação longitudinal aumentou em até 30,69%, porém a lateral diminuiu em até 66,64%. A falha típica encontrada foi a de tração por flexão, sendo observado que os pilares com reforço em intervalos eram mais suscetíveis a danos nas regiões de madeira com defeitos naturais e sem a presença do reforço. Esse efeito também foi observado por Zhu *et al.* (2013).

Nos pilares submetidos à flexão composta, a falha predominante encontrada por Zhou *et al.* (2021) se deu pela ocorrência da instabilidade das fibras da madeira no sentido longitudinal, na região comprimida, aumentando a tensão de tração do reforço e ocasionando na falha. Para esses elementos, foi encontrado um aumento de até 30,43% na capacidade de suporte (no pilar com duas camadas contínuas de PRFB) e um aumento das deformações longitudinal e transversal em até 41,85% e 230,86% respectivamente.

Os estudos conduzidos por Siha e Zhou (2023, 2022) avaliaram o desempenho dos pilares de madeira reforçados com PRF submetidos a carregamentos cíclicos. Os pilares reforçados estavam propensos a falhar em ciclos de 90 mm ou 108 mm de deslocamento e as curvas histeréticas mostraram que o reforço com compósitos melhorou a capacidade de carga e o desempenho de deformação, com aumento da carga de pico em 60,1% e do deslocamento final em 89,4% (Siha; Zhou, 2023). As curvas histeréticas das colunas reforçadas foram mais

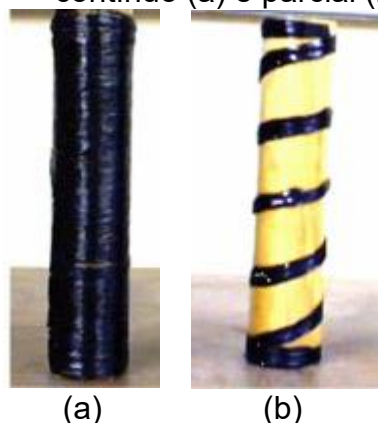
cheias, indicando melhor desempenho de dissipação de energia. As tiras de PRFC dispostas em intervalos mostraram melhor capacidade de deformabilidade, com uma taxa de aumento de cerca de 74,4%, enquanto as colunas totalmente revestidas melhoraram a capacidade de suporte lateral e deformação (Siha; Zhou, 2022).

O método de reforço composto melhorou a capacidade de suporte (60,1%) e o desempenho de deformação das colunas de madeira (89,4%) (Siha; Zhou, 2022). O estudo paramétrico realizado mostrou que o aumento das cargas axiais reduziu a rigidez inicial, bem como as cargas máximas (Siha; Zhou, 2023). Nestes estudos, o modo de falha encontrado foi frágil, por tração paralela às fibras da madeira, localizada na região inferior do pilar (Siha; Zhou, 2023, 2022). Apesar do PRF não ter modificado o modo de falha, os autores relatam que houve influência no tempo de surgimento da falha e na magnitude do dano.

Foram encontrados estudos que avaliaram o desempenho do reforço com compósitos laminados híbridos ou com componentes não convencionais, proporcionando uma avaliação inovadora deste recurso empregado no reforço de pilares de madeira.

O estudo de Najm, Secaras e Balaguru (2007) utilizou uma matriz de geopolímero, composta por uma resina inorgânica de polissialato de baixa viscosidade. Foram utilizadas fibras de carbono de 7 μm de diâmetro, sendo envolvidos pela matriz em fios com 3 mil e 48 mil filamentos. A Figura 22 apresenta o corpo de prova reforçado.

Figura 22 – Amostras reforçadas com fios de 48 mil filamentos: reforço helicoidal contínuo (a) e parcial (b).



Fonte: Namj, Secaras e Balaguru (2007).

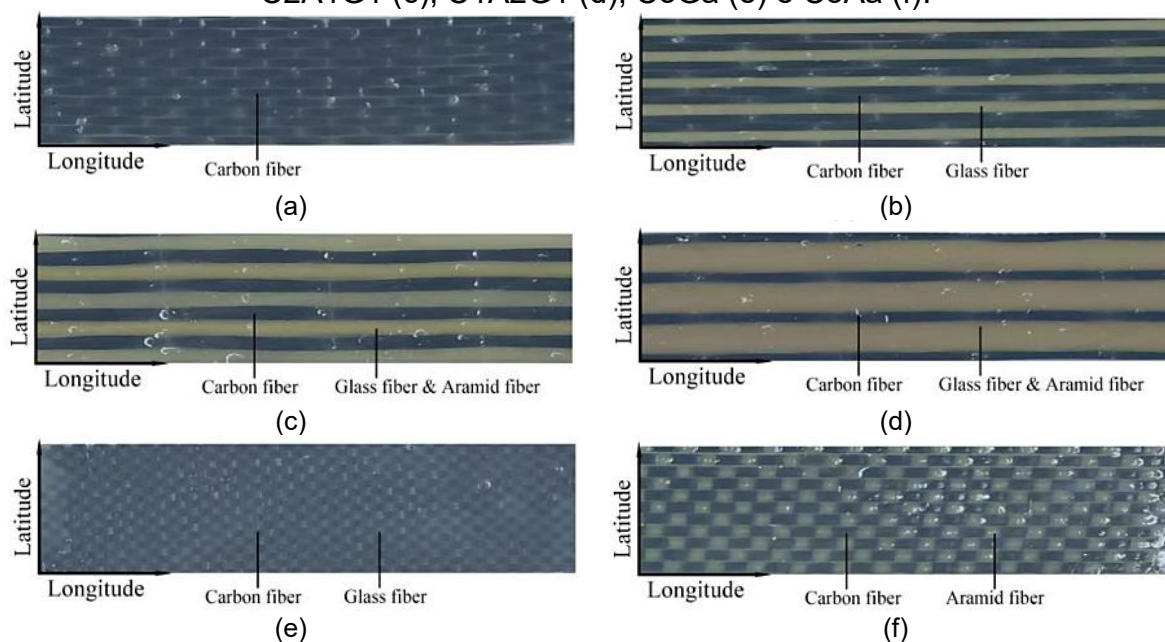
Os pilares de madeira reforçados mostraram um aumento significativo na capacidade de carga em comparação com os não reforçados. O confinamento com

fibras de carbono aumentou a resistência das colunas, permitindo que suportassem maiores cargas antes da falha e retardando a propagação de fissuras e rachaduras. A falha das colunas reforçadas ocorreu de maneira mais gradual e controlada em comparação com as colunas não reforçadas. O uso de uma matriz inorgânica em combinação com fibras de carbono mostrou ser uma técnica eficaz para reforçar colunas de madeira, apesar de não ser comparada com PRFC tradicional.

Segundo os autores Namj, Secaras e Balaguru (2007), a matriz inorgânica proporcionou uma boa aderência entre a madeira e as fibras de carbono, melhorando a integridade estrutural das colunas reforçadas. Os resultados indicaram que a técnica de confinamento com fibras de carbono e matriz inorgânica pode ser aplicada para melhorar a durabilidade e a capacidade de carga de estruturas de madeira existentes.

O uso de fibras híbridas foi analisado por Wang *et al.* (2023), onde laminados unidirecionais de PRFC foram comparados com os híbridos de PRFC:PRFV (C2G1), com proporção 2:1, de PRFC:PRFA:PRFV (C2A1G1), com proporção 2:1:1, de PRFC:PRFA:PRFV (C1A2G1), com proporção 1:2:1, e com os bidirecionais de PRFCxPRFV (CoGa) e PRFCxPRFA (CoAa), onde o primeiro compósito foi adotado na direção longitudinal e o segundo na direção transversal do laminado. Os compósitos são apresentados na Figura 23 e suas propriedades na Tabela 4.

Figura 23 – Compósitos estudados por Wang *et al.* (2023): PRFC (a), C2G1 (b), C2A1G1 (c), C1A2G1 (d), CoGa (e) e CoAa (f).



Fonte: Wang *et al.* (2023).

Tabela 4 – Propriedades dos compósitos estudados por Wang *et al.* (2023)

Compósito	f_{PRF}		ϵ_{PRF}	
	Valor (MPa)	CV (%)	Valor (%)	CV (%)
PRFC	2607	4,3	1,23	6,28
C2G1	2213	5,4	1,49	7,2
C2A1G1	2763	6,7	2,05	8,7
C1A2G1	2415	7,6	2,47	5,2
CoGa	2922	15,3	1,66	17,9
CoAa	2718	16,3	1,72	19,5

Nota: f_{PRF} = resistência do PRF (à tração); ϵ = deformação última

Fonte: Adaptado de Wang *et al.* (2023).

Os compósitos híbridos bidirecionais apresentaram resultados positivos, com o CoGa atingindo capacidades de carga entre três e cinco vezes superiores aos compósitos unidirecionais. O CoAa apresentou uma capacidade resistente entre 23% e 30% inferior ao CoGa.

Dentre os híbridos unidirecionais, com as fibras do compósito dispostas na direção perpendicular às fibras da madeira, o laminado C2A1G1 foi o que obteve o melhor desempenho, com 26,73% de aumento na capacidade resistente ao se adotar o reforço completo e 20,15% ao se adotar o reforço com intervalos. O C1A2G1 apresentou uma ductilidade ligeiramente superior que o C2A1G1.

3.5 ANÁLISE DO DESEMPENHO MECÂNICO DOS PILARES REFORÇADOS

De posse dos dados presentes na amostra, foi possível estabelecer índices físicos e geométricos dos pilares reforçados com o desempenho mecânico encontrado pelos autores. Para isso, foi determinada a taxa volumétrica de reforço (ρ), por meio da Equação 17, e a razão entre o módulo de elasticidade do PRF e da madeira (E_{PRF}/E_0).

$$\rho(\%) = \frac{V_{PRF}}{V_{madeira}} \cdot 100 = \frac{A_{PRF} \cdot L_{PRF}}{A_{madeira} \cdot L_{madeira}} \cdot 100 = \frac{t_{PRF} \cdot p_{PRF} \cdot n_{PRF} \cdot L_{PRF}}{A_{madeira} \cdot L_{madeira}} \cdot 100 \quad \text{Eq. 17}$$

Onde A_{PRF} , V_{PRF} , L_{PRF} , t_{PRF} , p_{PRF} e n_{PRF} denotam, respectivamente, a área da seção transversal, o volume, o comprimento, a espessura, o perímetro e a quantidade de camadas de PRF. A consideração da taxa V_R para analisar o reforço em pilares é considerada adequada, sendo também utilizada por Zhou *et al.* (2021), pois pode ser

utilizada tanto para pilares com reforço contínuo, abrangendo toda a superfície do elemento, quanto para reforços com intervalos, com camadas de PRF espaçadas entre si.

Os índices de reforço dos pilares foram relacionados com a variação encontrada para a capacidade de carga (Δf) do elemento estrutural, apresentada na Equação 18.

$$\Delta f (\%) = \frac{\Delta f_{\text{reinforced}} - \Delta f_{\text{unreinforced}}}{\Delta f_{\text{unreinforced}}} \cdot 100 \quad \text{Eq. 18}$$

Desse modo, foi possível sintetizar os dados encontrados a fim de comparar o desempenho mecânico dos pilares. A Tabela 5 apresenta os índices calculados por meio dos dados obtidos da amostra. Cabe destacar que algumas propriedades, como a espessura, número de camadas do PRF ou E_0 , não foram apresentadas em alguns estudos (Chen *et al.*, 2020; Dong *et al.*, 2015a; Li *et al.*, 2013; Najm; Secaras; Balaguru, 2007; Xiong; Lu; Xue, 2016; Zhu *et al.*, 2013), impedindo que fossem considerados na Tabela 5 e na análise posterior. O estudo de Xiong e Su (2015) também não foi considerado por consistir em um reforço em emendas de pilar por entalhe, tendo como modelo de referência um pilar íntegro (sem emenda), não sendo possível associar os resultados dos autores com os outros estudos. Ainda assim, foi possível obter as informações completas de 42 pilares ensaiados em laboratório.

Tabela 5 – Parâmetros de desempenho encontrados nos artigos com PRF como reforço

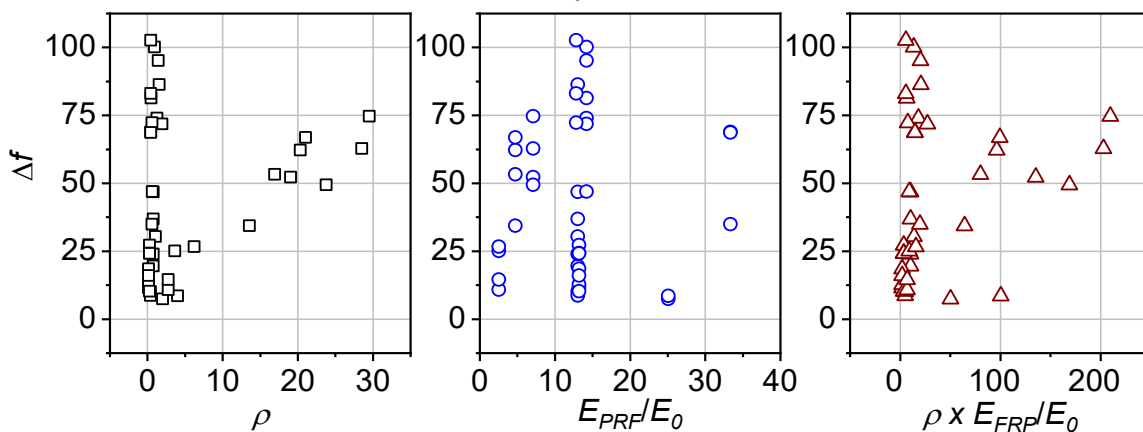
Referência	ρ (%)	E_{PRF}/E_0	Δf (%)	Referência	ρ (%)	E_{PRF}/E_0	Δf (%)
Liu <i>et al.</i> (2022)	2,75	2,54	10,81	Zhou <i>et al.</i> (2021)	0,79	13,05	23,91
Liu <i>et al.</i> (2022)	2,75	2,54	14,57	Zhou <i>et al.</i> (2021)	1,58	13,05	86,38
Liu <i>et al.</i> (2022)	3,66	2,54	25,12	Zhou <i>et al.</i> (2021)	1,06	13,05	30,43
Liu <i>et al.</i> (2022)	6,22	2,54	26,65	Zhou <i>et al.</i> (2023)	2,00	25,09	7,41
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,48	14,20	81,38	Zhou <i>et al.</i> (2023)	4,00	25,09	8,56
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,96	14,20	100,20	Yang <i>et al.</i> (2021)	13,56	4,74	34,34
Dong <i>et al.</i> (2015b)	1,44	14,20	95,20	Yang <i>et al.</i> (2021)	19,03	7,11	52,30
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,44	12,82	102,70	Yang <i>et al.</i> (2021)	16,95	4,74	53,33
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,44	33,36	68,87	Yang <i>et al.</i> (2021)	23,78	7,11	49,38
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,64	14,20	46,89	Yang <i>et al.</i> (2021)	20,34	4,74	62,18
Dong <i>et al.</i> (2015b)	1,28	14,20	74,01	Yang <i>et al.</i> (2021)	28,54	7,11	62,74
Dong <i>et al.</i> (2015b)	1,92	14,20	71,86	Yang <i>et al.</i> (2021)	21,03	4,74	66,85
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,59	12,82	72,32	Yang <i>et al.</i> (2021)	29,51	7,11	74,67
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,59	33,36	34,92	Siha, Zhou e Yang (2021)	0,16	13,19	11,46
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,44	12,82	83,05	Siha, Zhou e Yang (2021)	0,28	13,19	27,20
Dong <i>et al.</i> (2015b)	0,44	33,36	68,70	Siha, Zhou e Yang (2021)	0,16	13,19	12,71
Zhou <i>et al.</i> (2021)	0,40	13,05	10,19	Siha, Zhou e Yang (2021)	0,28	13,19	10,26
Zhou <i>et al.</i> (2021)	0,40	13,05	8,70	Siha, Zhou e Yang (2021)	0,16	13,19	18,57
Zhou <i>et al.</i> (2021)	0,79	13,05	36,88	Siha, Zhou e Yang (2021)	0,28	13,19	24,27
Zhou <i>et al.</i> (2021)	0,79	13,05	19,57	Siha, Zhou e Yang (2021)	0,16	13,19	16,03
Zhou <i>et al.</i> (2021)	0,79	13,05	46,78	Siha, Zhou e Yang (2021)	0,28	13,19	24,23

Fonte: Autor (2026).

Dos índices analisados, a taxa V_R apresentou as maiores taxas de variação, com um valor médio de 5,05%, desvio padrão de 8,52% e coeficiente de variação de 168,59%. Isso indica que a literatura tem aplicado o reforço com diferentes proporções, o que é considerado positivo para esta revisão por permitir avaliar o impacto dessa variação no desempenho do reforço. O estudo que adotou a maior taxa ρ foi o de Yang *et al.* (2021), com 29,51%, que adotou um envelopamento completo da face externa do pilar e também inseriu o reforço em regiões internas. A média encontrada para a relação E_{PRF}/E_0 foi de 12,89%, com desvio padrão de 7,64% e coeficiente de variação de 59,28%. Os índices médios encontrados podem ser considerados como um ponto de partida para análises de reforço em pilares de madeira reais.

Os dados apresentados na Tabela 5 são apresentados na Figura 24, relacionando os índices de reforço (ρ e E_{PRF}/E_0) com Δf . Por se tratar de índices relacionados a diferentes grandezas (ρ = geométrica e E_{PRF}/E_0 = física), o produto delas também foi considerado.

Figura 24 – Dispersão entre os índices de reforço com o incremento da resistência dos pilares.



Fonte: Autor (2026).

Conforme apresentado na Figura 24, foi encontrada uma concentração maior de modelos com ρ inferior a 5% e E_{PRF}/E_0 inferior a 20%. Os gráficos não apresentaram um padrão nítido de dispersão, nem ao considerar o produto dos índices de reforço.

Ainda assim, com as informações apresentadas na Tabela 5, foi possível realizar o teste de correlação por meio da determinação do coeficiente de correlação de Spearman (r_s) para avaliar a relação não linear entre os indicadores ρ e E_{PRF}/E_0 e

o Δf . Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6, onde os valores grifados são os que apresentaram correlação.

Tabela 6 – Parâmetros de desempenho encontrados nos artigos com PRF como reforço

Coeficiente	Todos os dados			Apenas reforço completo		
	ρ	E_{PRF}/E_0	$\rho \cdot E_{PRF}/E_0$	ρ	E_{PRF}/E_0	$\rho \cdot E_{PRF}/E_0$
r_s	0,276	0,010	0,399	0,581	-0,159	<u>0,618</u>
Valor-p	0,077	0,952	0,009	0,005	0,480	0,002

Fonte: Autor (2026).

O teste de correlação de Spearman mostrou que existe uma correlação positiva entre o produto da taxa ρ e E_{PRF}/E_0 e o aumento da capacidade de carga de pilares totalmente revestidos com PRF. O valor-p encontrado indica que essa correlação é significativa ($\alpha < 5\%$).

3.6 MÉTODOS ANALÍTICOS PARA PROJETO DE REFORÇO DE PILARES DE MADEIRA

Por fim, os artigos que apresentaram métodos de dimensionamento foram analisados e suas abordagens são apresentadas e comparadas neste capítulo. Ao todo, oito artigos apresentaram métodos analíticos para previsão do desempenho mecânico de pilares de madeira reforçados com PRF. Em sua maioria, os artigos se dedicaram a apresentar formulações para previsão da capacidade de carga desses pilares. Foi observado que alguns estudos (Li, L. *et al.*, 2013; Xiong; Lu; Xue, 2016; Xiong; Su, 2015) tomaram como fundamento formulações desenvolvidas para pilares de concreto armado confinados, sendo um material com maior volume de estudo do que pilares de madeira.

O estudo conduzido por Li *et al.* (2013) adotou como fundamento o estudo de Mirmiran e Shahawy (1997) sobre o confinamento proporcionado por compósitos de PRF em pilares de concreto armado para discutir os resultados encontrados em laboratório. Após adaptar a formulação para os materiais adotados no estudo, Li *et al.* (2013) apresentam a Equação 19 para previsão da resistência adicional à compressão fornecida pelo reforço.

$$\Delta f = -\frac{t}{r} \cdot E_{PRF} \cdot \varepsilon_{PRF} \quad \text{Eq. 19}$$

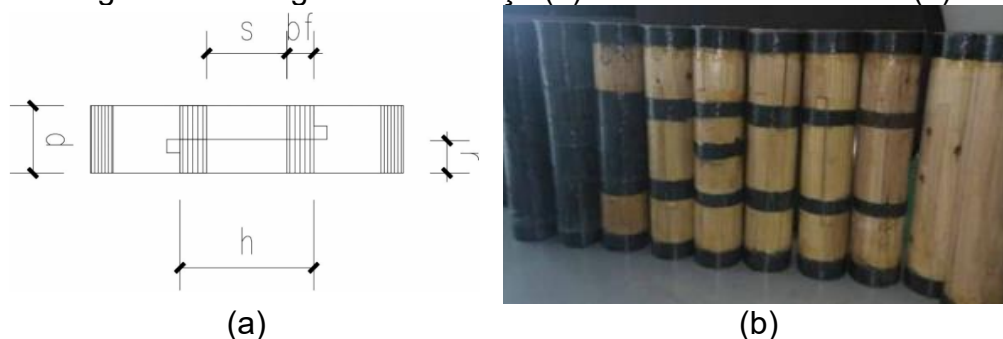
Onde t , r e ε_{PRF} denotam a espessura do compósito, o raio do pilar de madeira (seção circular) e a deformação do PRF, respectivamente.

Xiong, Lu e Xue (2016) e Xiong e Su (2015) também fundamentaram a equação adotada em um estudo sobre pilares de concreto (Richart; Brandtzaeg; Brown, 1929). A proposta apresentada por Xiong, Lu e Xue (2016) adota um coeficiente de intensidade do confinamento (β_1) e um fator de redução de resistência devido a rachaduras no pilar (γ_1). O modelo adaptado é apresentado na Equação 20.

$$f = \frac{\gamma_1}{1 - \beta_1 \cdot \frac{b_{PRF} \cdot t_{PRF} \cdot \nu \cdot E_{PRF}}{2 \cdot r^2}} \cdot f_{c0} \quad \text{Eq. 20}$$

Onde b_{PRF} denota a largura do laminado de PRF e ν o coeficiente de Poisson da madeira. No trabalho de Xiong e Su (2015), a modificação do modelo de cálculo, originalmente proposto para pilares de concreto (Richart; Brandtzaeg; Brown, 1929), foi realizada para a previsão da resistência de pilares reforçados com PRF que possuam emendas (Figura 25). A Equação 21 apresenta a modificação proposta.

Figura 25 – Diagrama do reforço (a) e amostras ensaiadas (b)



Fonte: Xiong e Su (2015).

$$f = \gamma \cdot f_{c0} + \beta_2 \cdot \frac{t_{PRF} \cdot \varepsilon_{PRF} \cdot b_{PRF} \cdot E_{PRF}}{r \cdot (b_{PRF} + s)} \quad \text{Eq. 21}$$

Onde γ_1 e β_2 consistem, respectivamente, no coeficiente de redução de resistência do pilar e no coeficiente de intensidade da restrição pelo PRF e r , b_{PRF} e s denotam, respectivamente, o raio do pilar, o comprimento da lâmina de reforço do pilar e o espaçamento entre os laminados (Figura 25a). A força resistente (P) dessa ligação foi determinada considerando o parâmetro de cálculo apresentado na Equação 22, resultado na Equação 23.

$$\xi = \frac{b_{PRF}}{b_{PRF} + s} \quad \text{Eq. 22}$$

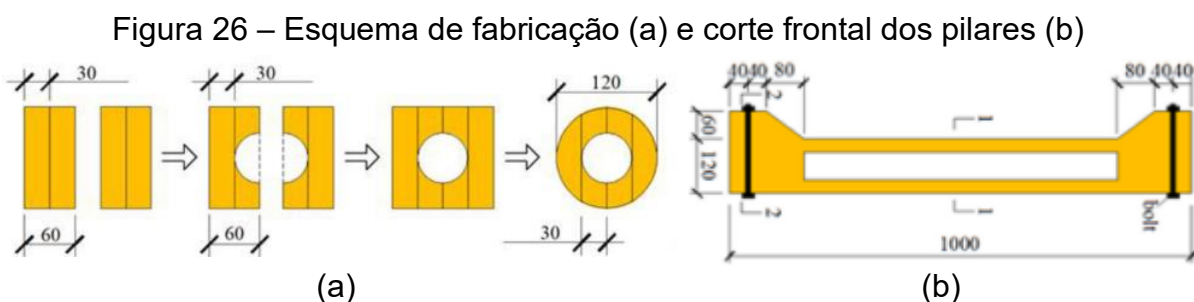
$$P = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\gamma_1 \cdot f_{c0} - \beta_2 \cdot \xi \cdot \frac{t_{PRF} \cdot \varepsilon_{PRF} \cdot E_{PRF}}{r} \right) \quad \text{Eq. 23}$$

Dong *et al.* (2015b) propuseram uma formulação para determinação da carga máxima de pilares de madeira reforçados com PRF, apresentada na Equação 24, considerando as hipóteses: carregamento perfeitamente concêntrico até sua falha, inexistência de deslizamento relativo entre PRF e a madeira e a falha do pilar ocorre por rachaduras de cisalhamento.

$$P = \left[1 + \alpha \cdot \left(\frac{2 \cdot E_{PRF} \cdot \varepsilon_{PRF} \cdot t_{PRF} \cdot n_{PRF}}{d \cdot f_{c0}} \right)^{b_c} \right] \cdot f_{c0} \cdot A_{madeira} \quad \text{Eq. 24}$$

Onde α é um coeficiente de regressão definido como 0,61 e b_c é um coeficiente de conversão equivalendo a -0,05. Destaca-se que o modelo proposto exige poucas propriedades, sendo a maioria geométrica, assim como o modelo de Xiong e Su (2015) e Xiong, Lu e Su (2016), facilitando sua utilização quando não se dispõe de equipamentos para uma caracterização completa da madeira. Ao comparar os resultados experimentais obtidos com o estimado pela Equação 24, Dong *et al.* (2015b) encontraram erros de até 20%.

Liu *et al.* (2022) observaram que o método de dimensionamento presente no documento normativo chinês (SAC, 2017) não apresenta resultados adequados para o reforço de pilares de madeira colada com perda de seção transversal (Figura 26). Essa imprecisão também é mostrada no estudo de Zhou *et al.* (2021). Com isso, Liu *et al.* (2022) apresentaram uma modificação do método de cálculo, conforme apresentado na Equação 25.



Fonte: Liu *et al.* (2022).

$$P_{aB} = P_a + \frac{79.45}{1 + 10^{0.02 \cdot (58.86 - \beta_B \cdot P_a)}} \quad \text{Eq. 25}$$

Onde P_{aB} e P_a são o valor da capacidade de carga axial última para pilares ocos de madeira reforçadas com PRFB e a capacidade de carga axial última desses pilares sem o reforço (kN), respectivamente; e β_B denota o coeficiente de adesão do PRFB. O P_a , determinado conforme o no documento normativo chinês (SAC, 2017) é apresentado na Equação 26 e o coeficiente β_B na Equação 27.

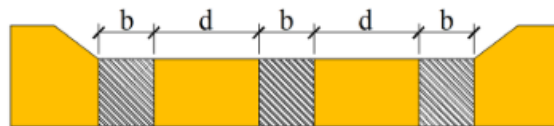
$$P_a = \varphi \cdot A_n \cdot f_c \quad \text{Eq. 26}$$

$$\beta_B = \rho \cdot \frac{b}{b + d} \quad \text{Eq. 27}$$

Da Equação 26, φ é o coeficiente de estabilidade axial (Equação 28), A_n é a área líquida da seção transversal do pilar e f_c denota a resistência à compressão da madeira. Da Equação 27, ρ é a taxa de reforço do PRFB ($A_{PRF} / A_{madeira}$), b é o comprimento da lâmina de reforço e d é a distância entre as lâminas de reforço, ambos em relação ao sentido longitudinal do pilar, conforme apresentado na Figura 27.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{a_c \cdot \pi^2 \cdot \beta \cdot E_k}{\lambda^2 \cdot f_{ck}} & \text{se } \lambda > c_c \cdot \sqrt{\frac{\beta \cdot E_k}{f_{ck}}} \\ \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2 \cdot f_{ck}}{b_c \cdot \pi^2 \cdot \beta \cdot E_k}} & \text{se } \lambda \leq c_c \cdot \sqrt{\frac{\beta \cdot E_k}{f_{ck}}} \end{cases} \quad \text{Eq. 28}$$

Figura 27 – Indicação das variáveis adotadas para determinação de β_B



Fonte: Liu *et al.* (2022).

Da Equação 28, a_c , b_c e c_c são coeficientes de correlação obtidos no documento normativo chinês (SAC, 2017), λ é a esbeltez do elemento comprimido e E_k e f_{ck} consistem no módulo de elasticidade e resistência à compressão característicos.

Ao adotar a Equação 25, Liu *et al.* (2022) realizaram a estimativa da resistência dos cinco pilares reforçados estudados, com um erro variando entre -

1,38% e 1,67%. Destaca-se que a equação proposta pelos autores é considerada simples e permite ser aplicada em pilares com reforços em intervalos. Porém, é dependente de coeficientes apresentados no documento normativo chinês (SAC, 2017), que devem ser avaliados para que sejam aplicados em outros territórios.

No estudo conduzido por Yang *et al.* (2021), onde o reforço também foi considerado na região interna do pilar (Figura 20), a equação proposta foi fundamentada no critério de falha de Tsai-Wu (1971), sendo obtida a Equação 29.

$$P = \frac{A_w}{2 \cdot F_{11}} \cdot \left\{ -(F_1 + 4 \cdot F_{12} \cdot p_w) \pm \sqrt{(F_1 + 4 \cdot F_{12} \cdot p_w)^2 - 4 \cdot F_{11} \cdot [2 \cdot (F_{22} + F_{23}) \cdot p_w^2 + 2 \cdot p_w - 1]} \right\} + \frac{A_l}{2 \cdot F_{11}} \cdot \left\{ -(F'_1 + 4 \cdot F'_{12} \cdot f_{t3}) \pm \sqrt{(F'_1 + 2 \cdot F'_{12} \cdot f_{t3})^2 - 4 \cdot F'_{11} \cdot [2 \cdot F'_{22} \cdot f_{t3}^2 + 2 \cdot f_{t3} - 1]} \right\} + f_{FRP} \cdot A_{FRP} \quad \text{Eq. 29}$$

Onde F_1 , F_{11} , F_{12} , F_{22} , F_{23} , F'_1 , F'_{12} e F'_{22} consistem em parâmetros de resistência calculados pelo método de Tsai-Wu (1971), p_w é a tensão de restrição que atua no núcleo da madeira (Equação 30), A_l é a área da seção transversal do reforço interno e f_{t3} é a resistência transversal do PRF interno.

$$p_w = -m \cdot \frac{t_{FRP}}{L_c} \cdot f_{FRP} \quad \text{Eq. 30}$$

Da Equação 30, L_c é o comprimento do segmento do núcleo de madeira e m é o coeficiente de confinamento.

Destaca-se que para a aplicação do método de Yang *et al.* (2021), se faz necessária uma caracterização completa da madeira e do reforço, de forma a poder determinar os parâmetros de resistência, dependentes das resistências à tração e compressão transversais e longitudinais da madeira, bem como a resistência ao cisalhamento. Desse modo, o método pode apresentar dificuldade em ser aplicado em situações em que todas essas informações não estejam disponíveis. Ainda assim, o erro encontrado pelos autores variou entre -17,6% e 8,9%, sendo similar aos outros modelos encontrados nesta revisão.

3.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

A RBS permitiu obter dados valiosos sobre as técnicas e métodos existentes para reforço de pilares de madeira com PRF, destacando os modelos matemáticos

utilizados para verificação analítica da capacidade de carga desses elementos. Foi observado que, apesar do crescente interesse no desenvolvimento de pesquisas sobre o tema, a aplicação desse reforço necessita de maiores investigações.

As informações obtidas destacam a importância em propor um novo modelo matemático para a previsão do desempenho estrutural de pilares de madeira com aberturas longitudinais reforçados com compósitos laminados de PRF. Este modelo ainda pode possuir aplicação na recuperação da estruturas de madeira que tiveram perda de seção transversal em razão de manifestações patológicas.

Em situação de reforço de pilares reais de madeira, dificilmente serão conhecidas todas as propriedades do elemento e a estimativa indireta de propriedades da madeira pode conduzir a resultados irreais. Desse modo, o estabelecimento de métodos de dimensionamento a partir de poucas propriedades é fundamental. A literatura dispõe de modelos de cálculo para pilares de madeira reforçados com PRF com sua precisão variando em até 20%, conforme o modelo, porém não apresenta uma formulação para estimativa da capacidade de carga ou rigidez axial de pilares com abertura longitudinal e reforço parcial.

Foi encontrada uma correlação positiva fraca entre os índices de reforço (produto da taxa volumétrica de reforço e a relação E_{PRF}/E_0) e o aumento da capacidade de carga dos pilares totalmente revestidos com PRF. Em geral, a adoção de duas camadas de PRF tende a proporcionar um melhor desempenho estrutural, enquanto o uso de três camadas não foi um consenso na amostra. As formulações encontradas na literatura não abordam essas variáveis de forma ampla, sendo limitadas pelos recursos disponíveis.

Desse modo, a realização de estudos que avaliem a utilização do PRF em pilares com aberturas longitudinais, bem como a proposição de modelos analíticos abrangentes que possibilite seu emprego com diferentes tipos de fibras e diferentes configurações do pilar é fundamental para possibilitar ações de reforços mais eficientes e seguras, permitindo a elaboração de projetos compatibilizados ou recuperações de elementos com essa degradação.

4 MÉTODO DE PESQUISA

4 MÉTODO DE PESQUISA

O presente estudo foi realizado por meio simulação paramétrica por elementos finitos. Os dados obtidos foram analisados e utilizados para elaboração de modelos de regressão simbólica. Neste capítulo foi detalhado o método adotado, contendo: configuração da simulação numérica, definição do estudo paramétrico e protocolo de avaliação do estudo paramétrico e elaboração do modelo de regressão.

4.1 CONFIGURAÇÃO DA SIMULAÇÃO E ANÁLISE NÃO-LINEAR: FLAMBAGEM ELÁSTICA E PÓS-FLAMBAGEM

Para realização do estudo, foi adotado o **software ABAQUS/CAE** para simulação por elementos finitos. Todos os procedimentos de modelagem foram realizados por meio da elaboração de *scripts* em Python, o que proporcionou maior agilidade e precisão durante esta etapa.

O pilar de madeira foi modelado como elemento sólido, enquanto o reforço foi modelado como elemento de casca. Foi adotado o critério de Hill (1950) para previsão do comportamento plástico da madeira, conforme observados em estudos similares (Kia; Valipour; Ghanbari-Ghazijahani, 2024; Liu *et al.*, 2022; Xu, F. *et al.*, 2024). O PRF foi considerado com um comportamento elástico linear até a ruptura frágil, conforme adotado em outros estudos (Alves *et al.*, 2024; Liu *et al.*, 2022; Zhou *et al.*, 2021). Ou seja, não foi adotado nenhum critério de falha para o PRF.

A interação entre esses materiais foi considerada de forma a garantir uma perfeita aderência, sem a ocorrência de deslizamento relativo na interface pilar-reforço. Para isso foi utilizada a configuração *tie* no *software* de elementos finitos. Essa consideração é comumente adotada para elementos cuja falha não ocorra nessa interface (Nowak; Jasieńko; Czepizak, 2013; Zhou *et al.*, 2021). Destaca-se que essa consideração sugere um cenário ótimo e geralmente observado em estudos experimentais, porém a aderência é afetada pela qualidade da execução e do adesivo adotado, podendo resultar em perda de eficiência da solução em condições desfavoráveis (Lee *et al.*, 2019; Yang *et al.*, 2021).

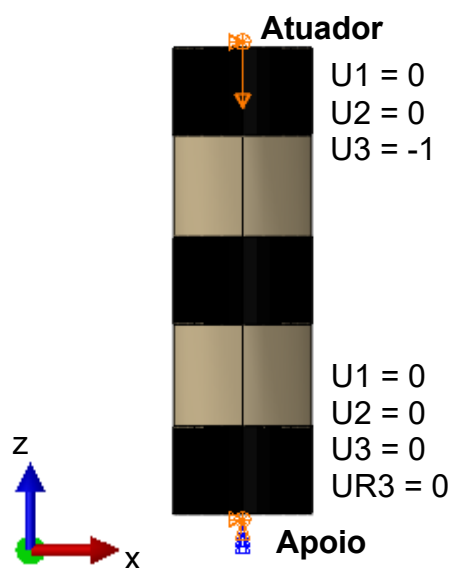
Todos os modelos, tanto os de validação quanto os do estudo paramétrico, foram simulados em duas etapas distintas: a primeira etapa consistiu na previsão da flambagem elástica (*buckle*) do pilar, que visou fornecer os dados sobre esse

comportamento para a etapa posterior; e a simulação pós-flambagem (*post-buckle*), onde o comportamento estrutural dos pilares foi obtido considerando as **imprecisões geométricas e os modos de instabilidade** gerados na análise de flambagem elástica.

Esse tipo de simulação é comumente encontrado em trabalhos com elementos de paredes finas, como as estruturas de aço, com poucos estudos que relatam o uso do método em estruturas de madeira (Xu, F. *et al.*, 2024). Entretanto, conforme ilustrado no Capítulo 5, a consideração desse comportamento foi fundamental para a obtenção do desempenho adequado do elemento estudado. Neste contexto, este estudo diferencia-se ao abordar de forma detalhada o comportamento pós-flambagem desses elementos, contribuindo para o aprofundamento do conhecimento sobre a resposta real das estruturas e preenchendo uma importante lacuna identificada nos estudos anteriores.

Todos os modelos foram simulados inicialmente para obtenção dos três primeiros autovalores e autovetores da matriz de rigidez do pilar, sendo que o primeiro foi utilizado para a simulação pós-flambagem. Para isso, foram consideradas as propriedades elásticas da madeira e do PRF e um deslocamento unitário aplicado conforme Figura 28, com U e UR representando os deslocamentos e rotações impostos no sistema, respectivamente, e 1, 2 e 3 denotando as direções x , y e z , respectivamente.

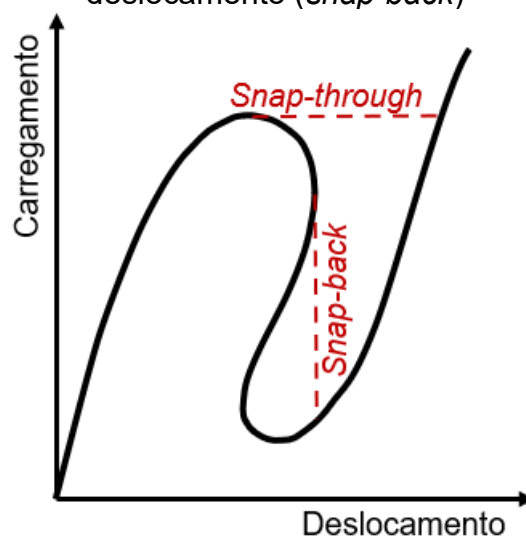
Figura 28 – Condição de contorno do modelo para análise de flambagem elástica (unidades em mm)



Fonte: Autor (2026).

A simulação pós-flambagem foi realizada por meio do algoritmo modificado de Riks, originalmente apresentado por Riks (1979) e posteriormente modificado (Crisfield, 1981; Powell; Simons, 1981; Ramm, 1981), ou método do comprimento de arco (*arc-length method*). Este método é eficiente para análise de estruturas com pontos críticos, como a ocorrência de instabilidades, pela capacidade em prever “fenômenos de salto” (*snap-through* e *snap-back*), o que não pode ser feito com métodos incrementais usuais como Newton-Raphson (Fafard; Massicotte, 1993; Ferreira; Serpa, 2005). Ou seja, ao ultrapassar o carregamento limite de instabilidade, o incremento não é capaz de encontrar equilíbrio (Alves Filho, 2012). A Figura 29 ilustra o conceito de *snap-through* e *snap-back*.

Figura 29 – Modelo instável sob controle de carregamento (*snap-through*) e deslocamento (*snap-back*)



Fonte: Autor (2026).

Dessa forma, o processamento foi configurado com um comprimento de arco inicial de 10^{-4} , tendo 10^{-25} como comprimento de arco mínimo. A configuração da malha de elementos finitos e a imperfeição geométrica dos pilares foi objeto de validação, bem como as propriedades dos materiais adotados.

4.2 DEFINIÇÃO DO ESTUDO PARAMÉTRICO

Foram elaborados modelos de pilares biapoiados com diferentes configurações para estudo da influência que causam no elemento. Para a realização do estudo paramétrico, os seguintes parâmetros foram analisados: a espécie da

madeira, o diâmetro e o comprimento do pilar, a proporção da abertura, o tipo de fibra, a quantidade de camadas e o espaçamento do PRF.

Foram definidas espécies de madeira para representar as classes C20, C30, C40 e C50 das coníferas. A escolha pelas coníferas se deu pela quantidade prevalente desse gênero na revisão sistemática (Capítulo 3). A Tabela 7 apresenta as propriedades físicas e mecânicas das espécies de madeira adotadas para a realização do estudo paramétrico.

Tabela 7 – Propriedades das madeiras adotadas no estudo paramétrico

Propriedade	C20	C30	C40	C50
Espécie	<i>Pinus radiata</i>	<i>Cunninghamia lanceolata</i>	<i>Larix gmelinii</i>	<i>Pinus sylvestris</i>
E_L (MPa)	8000	9167	14870	14300
E_R (MPa)	320	1100	1318	700
E_T (MPa)	320	689	866	545
G_{LR} (MPa)	500	656	1102	1230
G_{LT} (MPa)	500	600	872	800
G_{RT} (MPa)	50	70	79	800
ν_{LR}	0,48	0,35	0,42	0,03
ν_{LT}	0,48	0,028	0,02	0,04
ν_{RT}	0,2	0,4	0,62	0,38
f_{cL} (MPa)	18	29	38,3	48,5
f_{cR} (MPa)	8,9	5,5	10,7	5,2
f_{cT} (MPa)	8,9	5,5	8,96	7,6
f_{vLR} (MPa)	3,8	5,9	10,3	7,5
f_{vLT} (MPa)	3,8	5,8	10,71	7,3
f_{vRT} (MPa)	3,8	0,7	2,3	2,3
Referência	Li <i>et al.</i> (2020)	Wang <i>et al.</i> (2023)	Zhang <i>et al.</i> (2022)	Pěňčík (2015)

Nota: C20 a C50: Classes de resistência; L, R, T: Direções ortotrópicas longitudinal, radial e tangencial, respectivamente; E_i : Módulo de elasticidade na direção i ; G_{ij} : Módulo de elasticidade transversal no plano ij ; ν_{ij} : Coeficiente de Poisson no plano ij ; f_{ci} : Resistência à compressão em i ; f_{vij} : Resistência ao cisalhamento no plano ij .

Fonte: Autor (2026).

Foram considerados três comprimentos distintos para os pilares, sendo eles: o comprimento da referência (800 mm), 1900 mm e 3000 mm. O valor de 3000 mm foi definido por ser considerado uma medida comum de pé direito em edificações e 1900 mm consiste em um valor intermediário.

Definidos os comprimentos do estudo paramétrico, a variação do diâmetro da seção transversal do pilar ocorreu em razão da esbeltez do elemento (Equação 31), de forma que os valores adotados refletiram o cenário encontrado na revisão

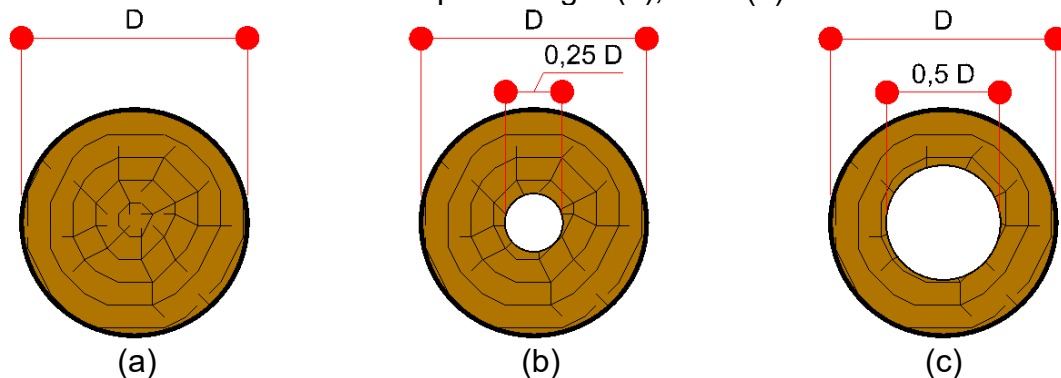
sistemática. Os dados coletados nas revisões apresentam uma esbeltez média e máxima de 29,44 ($\sigma = 21,38$ e $CV = 72,63\%$) e 80, respectivamente

$$\lambda = \frac{L_0}{r_g} \quad \text{Eq. 31}$$

Destaca-se que todos os modelos que compõe esse estudo paramétrico atendem o limite máximo de esbeltez presente na ABNT NBR 7190-1 (2022a) e BS 5268-2 (2002).

A configuração da abertura foi considerada conforme apresentado na Figura 30. Foi considerada uma abertura concêntrica ao pilar, similar ao que se pratica em estruturas de concreto pré-moldado (El Debs, 2017; Xia *et al.*, 2024). No caso de pilares degradados, essa região (medula) se justifica por ser um possível alvo de ataques de xilófagos em algumas espécies de coníferas (Björdal; Elam, 2021; Martín; López, 2023) e a literatura já demonstrou interesse no reforço nesse tipo de situação (Chen, Q. *et al.*, 2020; Liu *et al.*, 2022). Diferentes proporções de abertura foram consideradas: 0% (pilar íntegro), 25% e 50% do diâmetro do pilar. A Tabela 8 apresenta os valores dos diâmetros do pilar e das aberturas para cada comprimento de pilar, totalizando 18 modelos a serem analisados.

Figura 30 –abertura considerada: pilar íntegro (a), 25% (b) e 50 % do diâmetro (c).



Fonte: Autor (2026).

Tabela 8 – Resumo dos diâmetros e das abertura dos pilares.

Comprimento (cm)	Diâmetro do pilar (mm)		Diâmetro da abertura (mm)			
	A	B	25%		50%	
			A	B	A	B
80	105	40	26,3	10	52,5	20
190	255	95	63,8	23,8	127,5	47,5
300	400	150	100	38	200	75

Nota: A: $\lambda \cong 24,44$; B: $\lambda \cong 80$.

Fonte: Autor (2026).

Foram analisados três tipos de fibras reforçadoras para o PRF: aramida, carbono e basalto. Estas foram escolhidas por serem as mais utilizadas em trabalhos correlatos. Foi verificado o comportamento do elemento reforçado utilizando uma camada de reforço e três camadas, sendo indicado na literatura como valor limite para garantia da ductilidade (LI *et al.*, 2022). As propriedades dos compósitos estão apresentadas na Tabela 9.

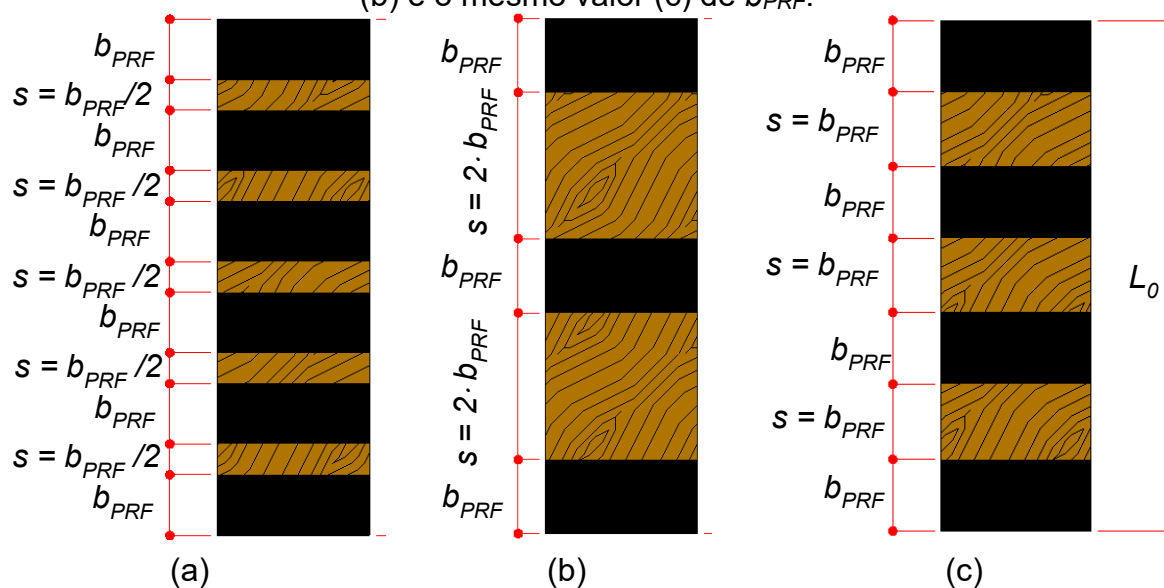
Tabela 9 – Propriedades dos compósitos adotados no estudo paramétrico

Compósito	t (mm)	E_{PRF} (GPa)	f_{PRF} (MPa)	Referência
PRFA	0,24	103	2980	Dong <i>et al.</i> (2015a)
PRFB	0,132	110	3200	Zhou <i>et al.</i> (2021)
PRFC	0,167	230	3400	Siha e Zhou (2021)

Fonte: Autor (2026).

O espaçamento adotado entre os laminados teve suas variações determinadas em razão da largura do PRF. Foi padronizado uma largura próxima de 100 mm para o compósito, seguindo as práticas encontradas na RBS (Dong *et al.*, 2015a; 2015b; Liu *et al.*, 2022; Wang *et al.*, 2023; Xiong; Lu; Xue, 2016; Zhu *et al.*, 2013) e a quantidade de reforço foi adequada para que o espaçamento entre os laminados fosse igual, metade e o dobro da largura do PRF, conforme ilustrado na Figura 31. Considerando as três variações de propriedades, três de espaçamento e duas de camadas, foram adotadas 18 diferentes configurações de reforço a serem estudadas.

Figura 31 – Representação dos espaçamentos considerados: metade (a), o dobro (b) e o mesmo valor (c) de b_{PRF} .



Fonte: Autor (2026).

Ao todo, o estudo paramétrico foi composto por 1368 modelos (4 espécies de madeira \times 18 variações geométricas \times 18 variações de reforço + 72 variações sem reforço), totalizando 2736 simulações numéricas (flambagem + pós-flambagem).

4.3 PROTOCOLO DE AVALIAÇÃO DO ESTUDO PARAMÉTRICO

Este capítulo apresenta os métodos de tratamento e análise dos dados obtidos no estudo paramétrico. Todas as verificações descritas nesta seção foram feitas por meio de *scripts* próprios desenvolvidos em Python 3. Entre as bibliotecas utilizadas, destacam-se: *NumPy*, *Pandas*, *Seaborn*, *SciPy*, *Plotnine* e *Sklearn*.

Inicialmente, os resultados de capacidade de carga e rigidez axial foram analisados para verificar a representatividade do espaço de busca. A distribuição de frequências foi avaliada via histogramas para identificar a presença de valores atípicos e o grau de assimetria das respostas.

Os resultados do estudo paramétrico foram analisados para verificação da influência das propriedades variadas, variáveis independentes (x_i), na capacidade resistente e rigidez axial do pilar (y_i), sendo adotado o teste de correlação de Spearman (r_s), conforme Equação 32 (Spearman, 1904). Este teste também foi adotado para as demais análises de correlação realizadas na análise do modelo de regressão simbólica.

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^n \left(R(x_i) - \frac{n+1}{2} \right) \cdot \left(R(y_i) - \frac{n+1}{2} \right)}{n \cdot (n^2 - 1) / 12} \quad \text{Eq. 32}$$

Onde $R(x_i)$ e $R(y_i)$ denotam o *ranking* das variáveis x e y , respectivamente e n o número total de amostras ($n = 1368$). Os resultados encontrados podem variar entre -1 e 1, onde, quanto mais próximos a esses, mais forte a correlação entre as variáveis (Montgomery; Runger, 2018).

A escolha pelo teste de Spearman justifica-se por sua capacidade em detectar associações monotônicas entre variáveis, sem pressupor homocedasticidade ou distribuição normal dos dados, diferentemente da correlação de Pearson, sendo amplamente empregado em estudos na engenharia (Brehm; Zabel; Bucher, 2010; Costa *et al.*, 2016; Hogg; McKean; Craig, 2013).

A interpretação da força de correlação varia conforme a fonte consultada. Cohen (1988) sugere considerar os valores $\pm 0,1$, $\pm 0,3$ e $\pm 0,5$ como indicativos de correlação fraca, moderada e forte, respectivamente. Montgomery e Runger (2018), adotam critérios mais restritivos, considerando como forte a correlação de $|r_s| \geq 0,8$ e como moderada a correlação $0,8 > |r_s| \geq 0,5$. Neste estudo, foram consideradas as recomendações de Montgomery e Runger (2018).

Para investigar a sinergia entre as variáveis aleatórias, foram geradas superfícies de resposta tridimensionais, permitindo a visualização do acoplamento entre variáveis, além da identificação de zonas de transição de comportamento estrutural que análises monotônicas omitiriam.

A influência do reforço parcial foi quantificada através da variação percentual do desempenho em relação aos modelos de referência (sem reforço), conforme a Equação 33.

$$\Delta X = \frac{X_{\text{reforçado}} - X_{\text{referência}}}{X_{\text{referência}}} \quad \text{Eq. 33}$$

Onde X representa F_{max} ou K .

4.4 MODELOS DE REGRESSÃO SIMBÓLICA

O presente estudo utilizou a biblioteca PySR (versão 1.5.5), uma ferramenta desenvolvida na Universidade de Cambridge, no Reino Unido, e amplamente recomendada na literatura por sua eficiência computacional, flexibilidade e facilidade de configuração de suas opções de processamento (Cranmer, 2023; Tonda, 2025; Tsoi *et al.*, 2024). Desenvolvida originalmente na linguagem Julia, a biblioteca foi adaptada para integração total com o ambiente *Python* (Cranmer, 2023).

Para o processamento, foram configurados os seguintes parâmetros: número de iterações, tamanho da população, operadores binários, operadores unários, função de erro, critério de seleção do modelo, tamanho máximo da equação, coeficiente de parcimônia, penalidade por falha dimensional e tempo limite de processamento. Os demais critérios permaneceram com os valores padrões.

4.4.1 Configurações do *script* de processamento da regressão simbólica

O número de iterações foi definido com um valor elevado para garantir que o algoritmo interrompa o processamento apenas se o critério de seleção for atendido ou se o tempo limite considerado for atingido. Para este estudo, após diversos testes, foi definido um tempo máximo de 12h. Destaca-se que esse tempo é superior ao adotado em outros estudos como o de Aldabagh *et al.* (2024), que adotou 8h, Megahed (2024a, 2025b), que adotou 4h, e Silva *et al.* (2025), que adotou 6h. Isso se deve à complexidade observada na interação entre as variáveis independentes com a dependente.

O tamanho da população inicial foi definido como 50, sendo esse um valor usualmente adotado na literatura por garantir diversidade genética suficiente para o espaço de busca de funções mecânicas sem redundância excessiva, facilitando a convergência em problemas com número moderado de variáveis (Megahed, 2024b, 2025b; Megahed; Mahmoud; Abd-Rabou, 2024).

A configuração dos operadores binários (*binary_operators*) permite que sejam escolhidos operadores aritméticos, lógicos ou de comparação para compor o modelo. Visando obter um modelo matematicamente simplificado, foram definidos os operadores binários de soma ("+"), subtração ("-"), multiplicação ("*") e divisão ("/"), seguindo o padrão de outros estudos (Megahed, 2024a; Silva; Reis; *et al.*, 2025).

Por sua vez, os operadores unários (*unary_operators*) se destinam a realizar operações sobre um único operando, sendo classificados no PySR em categorias como: básicos, exponenciais e logarítmicos, trigonométricos, hiperbólicos, operadores especiais e de arredondamento. Neste estudo, após diversos testes, foram adotados os seguintes operadores: raiz quadrada ("sqrt") e potência ao quadrado ("square").

A função de erro pode ser aplicada elemento a elemento (*elementwise_loss*), permitindo obter as métricas da predição de forma individual, ou uma função objetivo (*loss_function*), onde as métricas são determinadas de forma global. Neste estudo, foi utilizada a função de erro elemento a elemento, equivalente ao erro quadrático médio, conforme Guruprasad *et al.* (2023). A Equação 34 apresenta a função de erro em linguagem Julia, com x e y denotando, respectivamente, o valor predito e o valor referência.

$$\text{loss}(x,y) = (x - y)^2 \quad \text{Eq. 34}$$

Para o critério de seleção do modelo (*model_selection*), adotou-se o parâmetro "best", que instrui o algoritmo a buscar a equação de fronteira de Pareto com o melhor balanço entre acurácia e simplicidade matemática (Cranmer, 2023). O tamanho máximo da equação (*maxsize*) foi fixado em 30 nós, garantindo espaço suficiente para interações complexas entre as variáveis geométricas e de material, sendo o mesmo valor adotado em outros estudos (Megahed, 2024a, 2025b; Silva; Reis; *et al.*, 2025). Por sua vez, o coeficiente de parcimônia (*parsimony*) se destina a penalizar o superajuste (*overfitting*) de expressões excessivamente longas. Após diversos testes, foi adotado um valor de 0,001.

Por fim, um dos parâmetros mais críticos configurados foi a penalidade por falha dimensional (*dimensional_constraint_penalty*). Para garantir a consistência física das equações frente à mecânica das estruturas, foram realizados diversos testes de penalidade, onde o valor de 10^{20} foi definido para garantir a restrição de constantes adimensionais (*dimensionless_constants_only*). Essa configuração exigiu que o algoritmo respeitasse estritamente as unidades do Sistema Internacional (SI), impedindo operações algébricas fisicamente inconsistentes, como a soma de tensões com comprimentos, resultando em formulações preditivas dimensionalmente adequadas.

4.4.2 Definições dos modelos a serem gerados

Após uma longa etapa preliminar de calibração, observou-se que a alta dispersão obtida para as variáveis dependentes tendia a sombrear estatisticamente o ganho de desempenho promovido pelo reforço. Como consequência, o algoritmo demorava um tempo consideravelmente superior para obter combinações fisicamente consistentes. Para contornar este fenômeno e garantir modelos fisicamente interpretáveis, uma estratégia de modelagem em múltiplos estágios baseada na proposição de fatores multiplicadores adimensionais foi adotada. Desse modo, a previsão estrutural foi subdividida em dois termos aditivos principais. O valor de F_{max} foi definido conforme a Equação 35, enquanto K foi definido conforme a Equação 36.

$$F = f_{c0} \cdot A_{liq} \cdot \chi \cdot \eta \quad \text{Eq. 35}$$

$$K = \frac{E \cdot A_{liq}}{L} \cdot \kappa \quad \text{Eq. 36}$$

Onde A_{liq} corresponde à área líquida do pilar (Equação 37), o fator χ , é referente à correção da capacidade de carga dos pilares (reforçados ou não) por instabilidade, enquanto os fatores η e κ denotam a correção devido ao reforço parcial. Ou seja, o algoritmo de regressão simbólica foi configurado para obter esses três fatores.

$$A_{liq} = \frac{\pi \cdot (D^2 - D_a^2)}{4} \quad \text{Eq. 37}$$

Essa abordagem reduziu significativamente a dimensionalidade do espaço de busca em cada processamento, preveniu a criação de termos inadequados cruzados (pilar \times reforço) e garantiu que o dimensionamento do reforço no modelo final possuía sentido físico claro.

Para obter os fatores adimensionais (χ , η e κ), foram estabelecidas propriedades físicas e mecânicas também adimensionais como variáveis independentes dos modelos: deformação específica da madeira e do reforço (Equação 38), taxa volumétrica de reforço (Equação 17), relação entre espaçamento do reforço e o diâmetro do pilar (s/D), relação entre os diâmetros do pilar e da abertura (D_a/D), relação entre o módulo de elasticidade do reforço e da madeira (E_{PRF}/E_0) e o índice de esbeltez líquida do pilar (Equação 39).

$$\varepsilon_m = \frac{f_{c0}}{E_0} \quad \varepsilon_{PRF} = \frac{f_{PRF}}{E_{PRF}} \quad \text{Eq. 38}$$

$$\lambda_{liq} = \frac{4 \cdot L}{\sqrt{D^2 - D_a^2}} \quad \text{Eq. 39}$$

4.4.3 Avaliação dos modelos de regressão simbólica

A capacidade de predição dos modelos de regressão foi avaliada por meio do coeficiente de determinação ajustado (R^2_{adj}), erro absoluto médio (MAE), raiz do erro quadrático médio (RMSE) e erro percentual médio absoluto (MAPE), apresentados nas equações 40, 41, 42 e 43, respectivamente.

$$R^2_{adj} = 1 - \left(\frac{(1 - R^2) \cdot (n - 1)}{n - p - 1} \right) \quad \text{Eq. 40}$$

$$MAE = n^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n |y_{referência} - y_{calculado}| \quad \text{Eq. 41}$$

$$RMSE = \sqrt{n^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{referência} - y_{calculado})^2} \quad \text{Eq. 42}$$

$$MAPE(\%) = 100 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_{calculado,i} - y_{referência,i}}{y_{referência,i}} \right| \quad \text{Eq. 43}$$

Onde n representa o número total de amostras do conjunto de dados, p corresponde ao número de termos ou grau de complexidade penalizável do modelo, $y_{referência,i}$ é o valor alvo da variável dependente e $y_{calculado,i}$ é a resposta predita pela equação gerada. O coeficiente de determinação (R^2) foi determinado conforme a Equação 44, com \bar{y} representando a média aritmética dos valores observados.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_{calculado,i} - y_{referência,i})^2}{\sum_{i=1}^n (y_{referência,i} - \bar{y}_{referência})^2} \quad \text{Eq. 44}$$

Com a definição inicial do modelo, foram realizados testes de sensibilidade das variáveis para avaliar o impacto percentual gerado por uma perturbação de 1% em cada parâmetro isolado. Além disso, a variância global foi avaliada pelo método

de Sobol, onde o impacto direto e isolado de cada variável (S_1) e sua relação com índices totais (S_T) permitiu avaliar a sinergia entre as variáveis do modelo (Saltelli *et al.*, 2007).

5 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

5 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

A realização de um estudo paramétrico por meio de simulação numérica deve ser precedida de uma validação do modelo adotado, sendo comumente realizada com base em ensaios experimentais. Considerando a amplitude do estudo paramétrico proposto, foi desenvolvido um *script* em Python para modelagem completa dos pilares de forma otimizada e com ampla possibilidade de modificação dos parâmetros. Para garantia da capacidade de reprodução de pilares reais, foram realizadas duas validações de ensaios de pilares reforçados parcialmente com PRF, com diferenças geométricas e físicas. Adicionalmente, os pilares sem reforço presentes nos artigos escolhidos para validação também foram simulados a partir do *script*. Ao final, os modelos validados foram comparados para definição das configurações adotadas para a realização do estudo paramétrico.

O processo de validação ocorreu de forma sistematizada. Inicialmente foi avaliada a curva força-deslocamento dos pilares para verificação da capacidade de reprodução qualitativa desse comportamento com os dados disponíveis. Nessa etapa, uma medição do erro da previsão da capacidade de carga e da rigidez axial (K) foi realizada, conforme Equação 45. O valor de K foi calculado conforme Equação 46, com a carga (P) e o deslocamento (U) referentes ao ponto da curva força-deslocamento equivalente a 40% da força máxima.

$$Erro(\%) = \frac{|X_{Simulação} - X_{Experimental}|}{X_{Experimental}} \cdot 100 \quad \text{Eq. 45}$$

$$K = \frac{P_{0,4}}{U_{0,4}} \quad \text{Eq. 46}$$

Para a elaboração dos modelos de validação, no caso dos estudos que não dispunham de todos os dados, algumas propriedades da madeira precisaram ser estimadas, tendo como base o valor das propriedades obtidas pelos resultados experimentais, disponíveis no estudo de referência (geralmente E_L e f_{cL}). Desse modo, foram consideradas correlações presentes em documentos normativos brasileiros e na literatura. As correlações baseadas na literatura consideraram estudos de caracterização da mesma espécie de madeira do estudo de referência e, se possível, da mesma localidade.

Todas as simulações de validação que necessitaram de complemento para determinação das propriedades foram testadas com as correlações presentes na ABNT NBR 7190-1 (2022a) e ABNT NBR 7190-3 (2022b), conforme apresentado na Equação 47.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_R = E_T = E_L / 20 \\ G_{LR} = G_{LT} = G_{RT} = E_L / 16 \\ f_{cR} = f_{cT} = 0,25 \cdot f_{cL} \\ f_{vLR} = f_{vLT} = f_{vRT} = 0,12 \cdot f_{cL} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 47}$$

A presença de imperfeições geométricas pode contribuir significativamente no comportamento estrutural de pilares (Bai; Keller, 2009). Estruturas reais tendem a apresentar desvios em relação à geometria retilinearmente idealizada, o que influencia na trajetória de equilíbrio desses elementos (Reis; Camotim, 2000). Ao consultar a literatura, foi encontrado apenas o estudo de Qi *et al.* (2019) que descreve o nível de imperfeição adotado para simulação de pilares de madeira, sendo adotado um valor equivalente a $L/500$.

Dada a influência desse parâmetro no comportamento de elementos comprimidos, foram simulados três níveis de imperfeição geométrica: $L/1500$, $L/1000$ e $L/500$. A precisão na obtenção da P_{max} e de K (Equação 45) e a proximidade da curva força-deslocamento de cada simulação foram comparados com os estudos de referência para adoção do nível de imperfeição mais adequado.

Com a elaboração de um modelo com comportamento próximo às referências, foram realizados testes de sensibilidade da malha de elementos finitos, sendo essa uma etapa fundamental para garantia da precisão do comportamento do modelo e para a otimização do tempo de processamento (Arroyo; Lahr; Christoforo, 2022).

Os testes consistiram em variar a geometria do elemento finito (hexaédrico e tetraédrico), seu tamanho (10 mm, 15 mm, 20 mm e 25 mm) e a utilização da integração reduzida para elementos hexaédricos. A Tabela 10 apresenta as variações adotadas, bem como o código alfanumérico adotado para identificação dos modelos. A precisão na obtenção da P_{max} e de K (Equação 45) e a proximidade da curva força-deslocamento de cada simulação foram comparados com o estudo de referência para adoção da configuração de malha mais adequada.

Tabela 10 – Configuração dos modelos do teste de sensibilidade de malha

Id.	Código do elemento	Geometria	Integração reduzida	Tamanho (mm)
H10	C3D8	Hexaédrica	Não	10
H10R	C3D8R	Hexaédrica	Sim	10
H15	C3D8	Hexaédrica	Não	15
H15R	C3D8R	Hexaédrica	Sim	15
H20	C3D8	Hexaédrica	Não	20
H20R	C3D8R	Hexaédrica	Sim	20
H25	C3D8	Hexaédrica	Não	25
H25R	C3D8R	Hexaédrica	Sim	25
T10	C3D10	Tetraédrica	-	10
T15	C3D10	Tetraédrica	-	15
T20	C3D10	Tetraédrica	-	20
T25	C3D10	Tetraédrica	-	25

Fonte: Autor (2026).

Por fim, o modo de falha do modelo com as configurações de simulação verificadas foi avaliado para garantir a reprodução adequada do comportamento do respectivo estudo de referência.

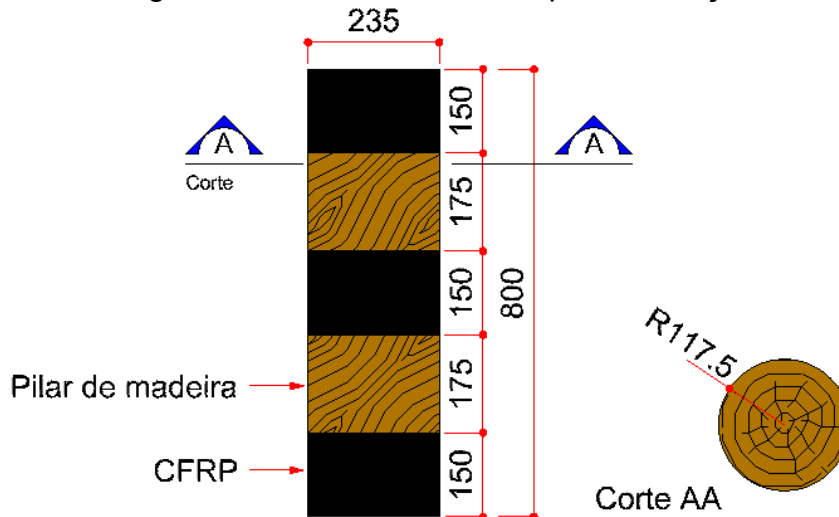
5.1 REPRODUÇÃO DO ESTUDO DE SIHA, ZHOU E YANG (2021)

O estudo de Siha, Zhou e Yang (2021) foi escolhido por conter diversas características comumente observadas nos pilares de madeira presentes na revisão sistemática apresentada no Capítulo 3, como o uso de madeira conífera, seção transversal em formato circular, uso de PRFC e reforço parcial. Neste capítulo é apresentado o estudo de Siha, Zhou e Yang (2021), os procedimentos para a validação do modelo experimental dos autores, a execução da validação do modelo e o teste de sensibilidade da malha de elementos finitos.

5.1.1 Apresentação do estudo e dos modelos de referência

Siha, Zhou e Yang (2021) ensaiaram pilares de madeira reforçados parcialmente com PRFC, com 80 cm de comprimento. Dentre outras configurações, o modelo tido como referência, denominado como TC-0-S, consistiu em reforços em intervalos, conforme apresentado na Figura 32. Após a validação do modelo com reforço, o modelo de referência utilizado por Siha, Zhou e Yang (2021), sem reforço, denominado TC-0-N, também foi simulado para validar a condição sem compósito.

Figura 32 – Pilar considerado para validação



Fonte: Adaptado de Siha, Zhou e Yang (2021).

A madeira utilizada pelos autores foi o Abeto de Douglas (nome em inglês: *Douglas Fir*, nome em científico: *Pseudotsuga menziesii*). O valor do E_L foi obtido por meio do ensaio realizado no estudo de referência, contando com cinco corpos de prova de madeira sem reforço, calculado conforme Equação 48, conforme os documentos normativos brasileiro e europeu (ABNT, 2022a; CEN, 2012). O valor calculado foi 6,33 GPa e 24,87 MPa para E_L e f_{cL} , respectivamente. As demais propriedades foram objeto de investigação.

$$E_L = \frac{\sigma_{50\%} - \sigma_{10\%}}{\varepsilon_{50\%} - \varepsilon_{10\%}} \quad \text{Eq. 48}$$

O PRFC foi adquirido de uma empresa, com suas propriedades obtidas pelos dados do fabricante e informadas na Tabela 11, e sua fixação se deu por resina epóxi bicomponente. Apesar do autor não apresentar maiores informações sobre o compósito, como o percentual de matriz e fibras adotadas e modo de fabricação, foi possível identificar que se trata de um laminado *crossply* a partir imagens disponíveis.

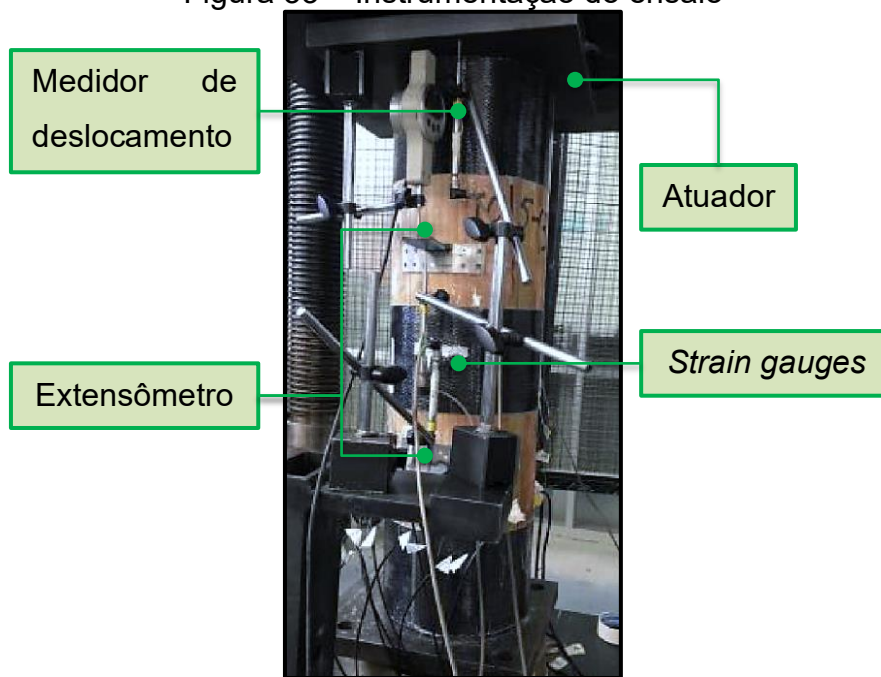
Tabela 11 – Propriedades do laminado de PRFC

Propriedade	Valor
t (mm)	0,167
E_{PRF} (GPa)	≥ 230
f_{PRF} (MPa)	≥ 3400
ε_u	$\geq 0,016$

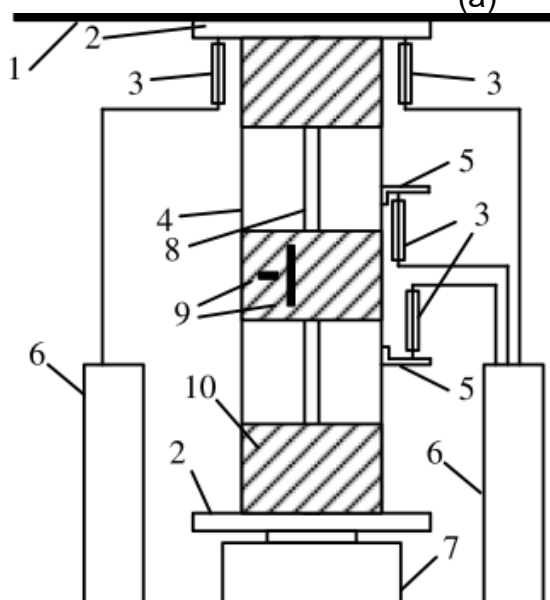
Fonte: Adaptado de Siha, Zhou e Yang (2021).

Siha, Zhou e Yang (2021) confeccionaram cinco pilares para cada modelo. Os ensaios foram realizados em uma máquina de testes com capacidade de 6000 kN. A instrumentação, apresentada na Figura 33, permitiu o monitoramento contínuo das forças aplicadas e dos deslocamentos axiais nos pilares.

Figura 33 – Instrumentação do ensaio



(a)



1. Máquina de ensaio
2. Atuador
3. Medidor de deslocamento
4. Pilar de madeira
5. Extensômetro
6. Rack de instrumentos
7. Sensor de pressão
8. Barra de aço e adesivos
9. *Strain gauges*
10. Lâminas de PRFC

(b)

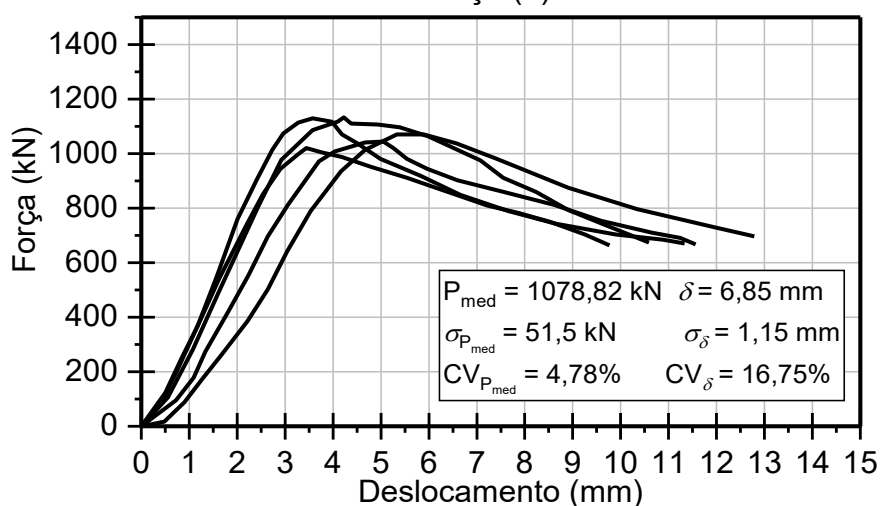
Fonte: Adaptado de Siha, Zhou e Yang (2021).

O protocolo de carregamento consistiu inicialmente em uma aplicação controlada de força, à razão de 1 kN/s até atingir 500 kN, com posterior mudança para uma velocidade de deslocamento constante em 0,5 mm/min, permitindo o registro

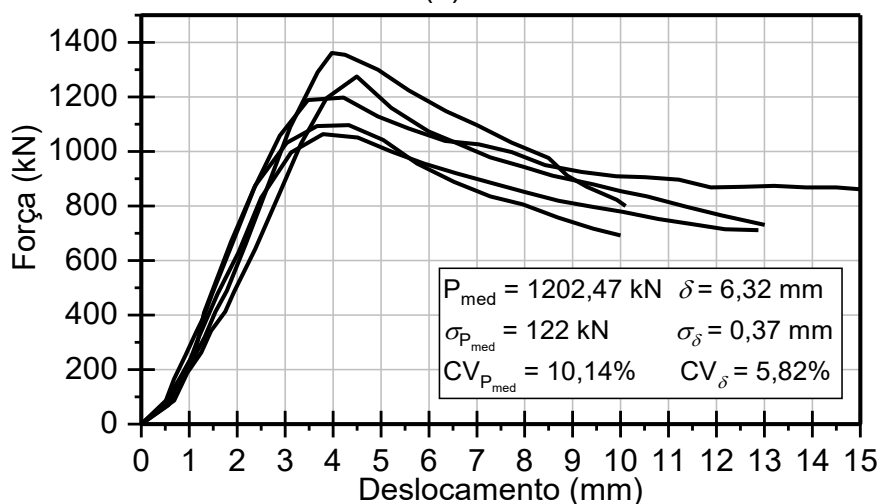
detalhado do comportamento próximo ao pico de carga. O critério de término do ensaio foi fixado quando a força atingiu 70% do valor máximo registrado para aquele espécime, a fim de evitar colapso excessivo e danos à instrumentação, conforme as diretrizes do protocolo experimental.

Com os ensaios realizados, os resultados encontrados foram apresentados na Figura 34. Para os modelos sem reforço, foi encontrada uma força máxima média de 1078,82 kN ($\sigma = 51,5$ kN e CV = 4,78%) e um deslocamento médio no ponto de força máxima de 6,85 mm ($\sigma = 1,15$ mm e CV = 16,75%). Para os modelos reforçados, foi obtida uma força máxima média de 1202,47 kN ($\sigma = 122$ kN e CV = 10,14%) e um deslocamento médio no ponto de força máxima de 6,32 mm ($\sigma = 0,37$ mm e CV = 5,82%), 11,46% superior e 7,65% inferior ao modelo sem reforço, respectivamente.

Figura 34 – Curva força-deslocamento dos pilares de referência: sem reforço (a) e com reforço (b)



(a)

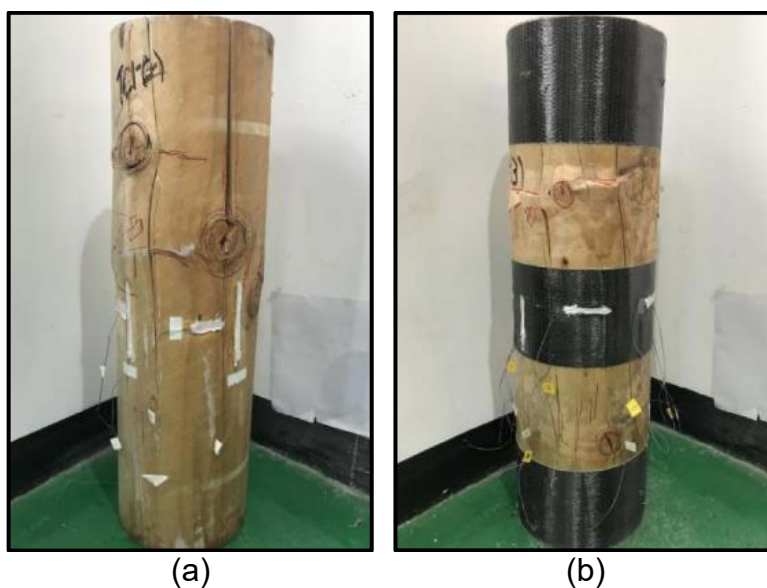


(b)

Fonte: Adaptado de Siha, Zhou e Yang (2021).

O modo de falha encontrado por Siha, Zhou e Yang (2021) foi por esmagamento da madeira, conforme apresentado na Figura 35. Destaca-se que não foram encontradas falhas no compósito ou na interface pilar-reforço. A contribuição do compósito devido ao efeito de confinamento foi observada pelos autores, com a região reforçada permanecendo íntegra enquanto a falha foi identificada na região do pilar sem a presença do reforço.

Figura 35 – Modo de falha dos pilares do estudo de referência: sem reforço (a) e com reforço (b)



Fonte: Adaptado de Siha, Zhou e Yang (2021).

5.1.2 Procedimentos para a validação do modelo

Como o estudo de referência não dispunha de todas as informações necessárias para a simulação, foram adotados dois trabalhos da literatura que caracterizaram a mesma espécie de madeira adotada no estudo de Siha, Zhou e Yang (2021) e a relação encontrada entre as propriedades foi avaliada. O primeiro estudo consiste no trabalho desenvolvido por Kia *et al.* (2024) e a Equação 49 apresenta as relações entre as propriedades deste estudo. O segundo estudo consiste no trabalho desenvolvido por Xu *et al.* (2024) e as relações entre as propriedades deste estudo estão apresentadas na Equação 50. Estas correlações foram comparadas com as obtidas pela ABNT NBR 7190-1 (2022a) e ABNT NBR 7190-3 (2022b) (Equação 47).

$$\left\{ \begin{array}{l} E_R = E_T = E_L / 30,52 \quad f_{cR} = f_{cT} = f_{cL} / 2,4 \\ G_{LR} = G_{LT} = E_L / 15,26 \quad f_{vLR} = f_{vLT} = f_{vRT} = f_{cL} / 15 \\ G_{RT} = G_{LR} / 13,47 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 49}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_R = E_L / 23,53 \quad f_{cR} = 0,17 \cdot f_{cL} \\ E_T = E_L / 32,07 \quad f_{cT} = 0,16 \cdot f_{cL} \\ G_{LR} = E_L / 12,83 \quad f_{vLR} = f_{vLT} = 0,24 \cdot f_{cL} \\ G_{LT} = G_{LR} / 1,22 \quad f_{vRT} = 0,1 \cdot f_{cL} \\ G_{RT} = G_{LR} / 11,16 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 50}$$

Desse modo, as propriedades que foram adotadas para início do estudo de validação são apresentadas na Tabela 12. Destaca-se que os valores dos coeficientes de Poisson da combinação obtida pelos documentos normativos brasileiros foram obtidos da publicação do Departamento de Agricultura dos EUA (United States Department of Agriculture, 2010), dada a ausência dessas informações nas normas nacionais.

A precisão na obtenção da P_{max} e de K (Equação 45), bem como a concordância das curvas força-deslocamento simuladas com as de referência, foram utilizados como critérios para identificar o conjunto de propriedades mais adequado à espécie em estudo.

Tabela 12 – Propriedades das madeiras adotadas no estudo de validação

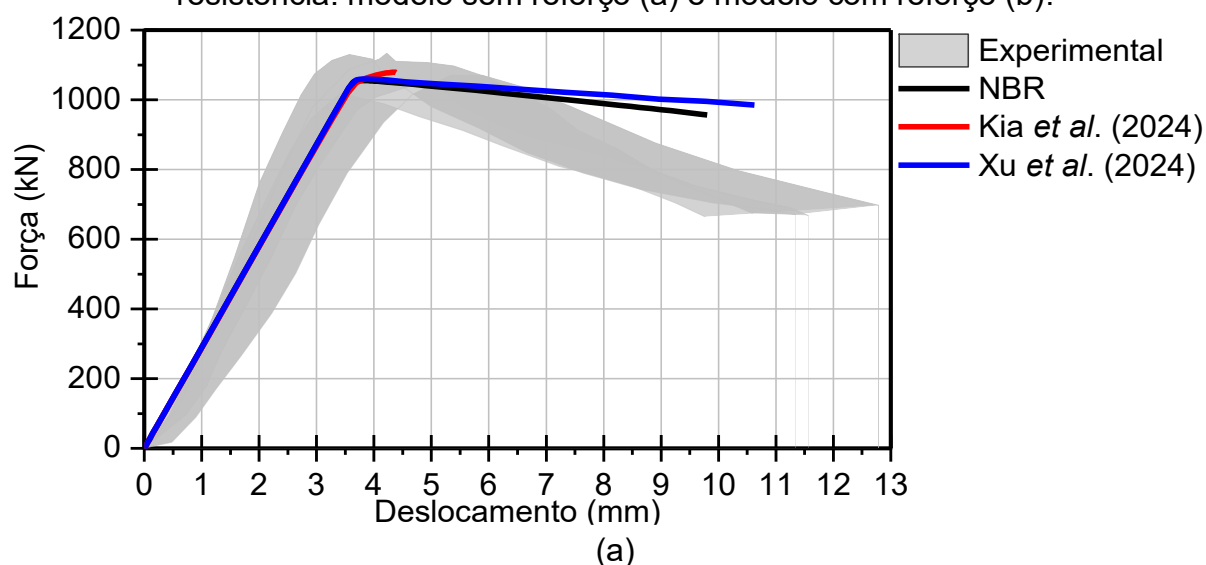
Propriedade	NBR	Kia <i>et al.</i> (2024)	Xu <i>et al.</i> (2024)
E_L (MPa)	6330	6330	6330
E_R (MPa)	266,67	207,4	269,02
E_T (MPa)	266,67	207,4	197,38
G_{LR} (MPa)	333.34	414,81	493,37
G_{LT} (MPa)	333.34	414,81	404,4
G_{RT} (MPa)	333.34	30,79	44,21
ν_{LR}	0,292	0,292	0,45
ν_{LT}	0,449	0,449	0,29
ν_{RT}	0,39	0,31	0,39
f_{cL} (MPa)	24,87	24,87	24,87
f_{cR} (MPa)	6,22	10,36	4,23
f_{cT} (MPa)	6,22	10,36	3,98
f_{vLR} (MPa)	2,98	1,66	5,97
f_{vLT} (MPa)	2,98	1,66	5,97
f_{vRT} (MPa)	2,98	1,66	2,49

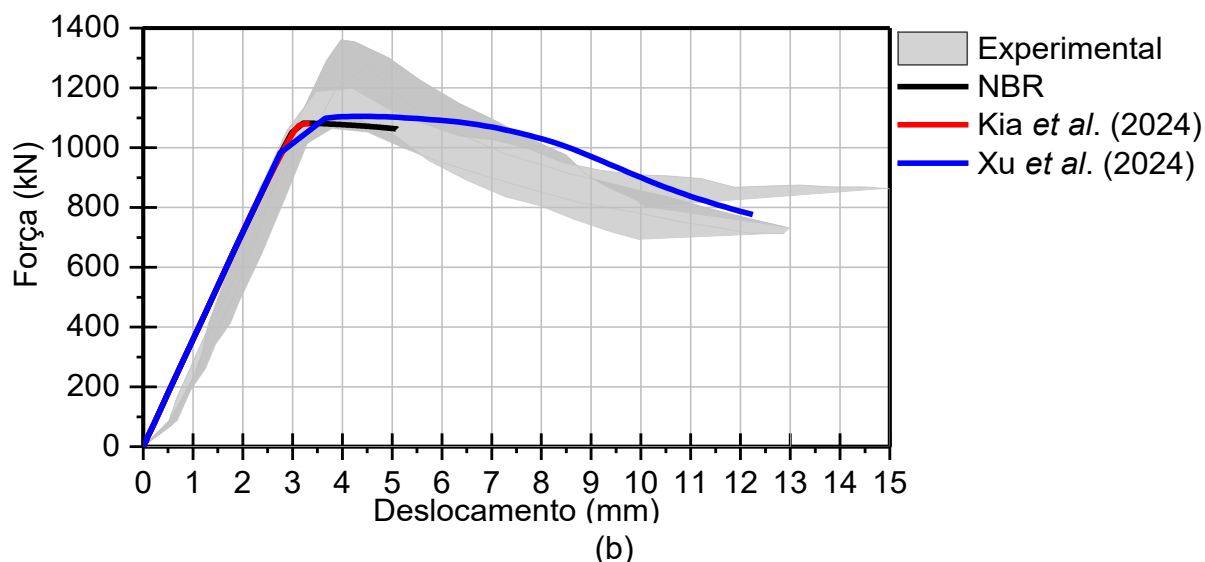
Fonte: Autor (2026).

5.1.3 Validação do modelo

As diferentes propriedades elásticas e de resistência apresentadas na Tabela 12 foram testadas e o comportamento força-deslocamento dos modelos é apresentado na Figura 36.

Figura 36 – Força-deslocamento da validação das propriedades elásticas e de resistência: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).





Destaca-se a similaridade de comportamento atingido pelo modelo numérico, independente da correlação de propriedades adotada. Não foram observadas variações de comportamento dentro do regime elástico dos modelos, o que denota que essa fase foi governada pelo módulo de elasticidade longitudinal e a participação das demais propriedades não foi suficiente para modificar seu comportamento. Um efeito diferente ocorreu dentro do regime inelástico.

Na reprodução do pilar sem reforço (Figura 36a), os modelos baseados nas correlações de Xu *et al.* (2024) e da NBR 7190 (ABNT, 2022a, 2022b) apresentaram um comportamento similar, próximo de um elastoplástico perfeito. Por sua vez, o modelo baseado nas correlações de Kia *et al.* (Kia; Valipour; Ghanbari-Ghazijahani, 2024) apresentou uma tendência de endurecimento pós escoamento, porém a simulação falhou por convergência numérica antes de atingir o pico. Estratégias alternativas de controle de convergência, como a modificação do comprimento de arco, foram tentadas sem sucesso.

Ao observar o resultado do modelo com reforço (Figura 36b), constatou-se que as propriedades obtidas por meio do método brasileiro (ABNT, 2022a, 2022b) e por Kia *et al.* (Kia; Valipour; Ghanbari-Ghazijahani, 2024) apresentaram resultados similares até o pico de carga, porém o modelo novamente abortou ao atingir esse patamar. O modelo elaborado a partir das correlações obtidas do estudo de Xu *et al.* (2024) apresentou um comportamento pós-pico mais próximo ao observado experimentalmente, sugerindo melhor representação da progressão da falha e da ductilidade do pilar reforçado.

A Tabela 13 apresenta o erro encontrado para P_{max} e K encontrada nos modelos testados, calculado conforme Equação 45, comparando com o valor obtido por Siha, Zhou e Yang (2021) em seu estudo experimental.

Tabela 13 – Erro na validação das propriedades elásticas e de resistência

Modelo	P_{max} (kN) [Erro (%)]		K (kN/mm) [Erro (%)]	
	Sem reforço	Com reforço	Sem reforço	Com reforço
NBR	1055,55 [2,2]	1082,13 [10]	289,9 [8,5]	358,7 [21,5]
Kia <i>et al.</i> (Kia; Valipour; Ghanbari-Ghazijahani, 2024)	1078,82 [0]	1080,05 [10,2]	288,78 [8,1]	358,92 [21,6]
Xu <i>et al.</i> (2024)	1059,25 [1,8]	1104,61 [8,1]	289,74 [8,5]	359,11 [21,6]

Fonte: Autor (2026).

Conforme apresentado na Tabela 13, todos os modelos apresentaram excelente precisão, principalmente para os modelos sem reforço. Apesar do erro de P_{max} dos pilares com reforço serem superiores, o erro ainda é considerado aceitável ao comparar com estudos similares (Khelifa *et al.*, 2016; Kim; Harries, 2010), estando também dentro da variação encontrada no estudo experimental (Figura 34). Ao se observar a K , foi constatado um erro mais elevado, chegando a 21,6%.

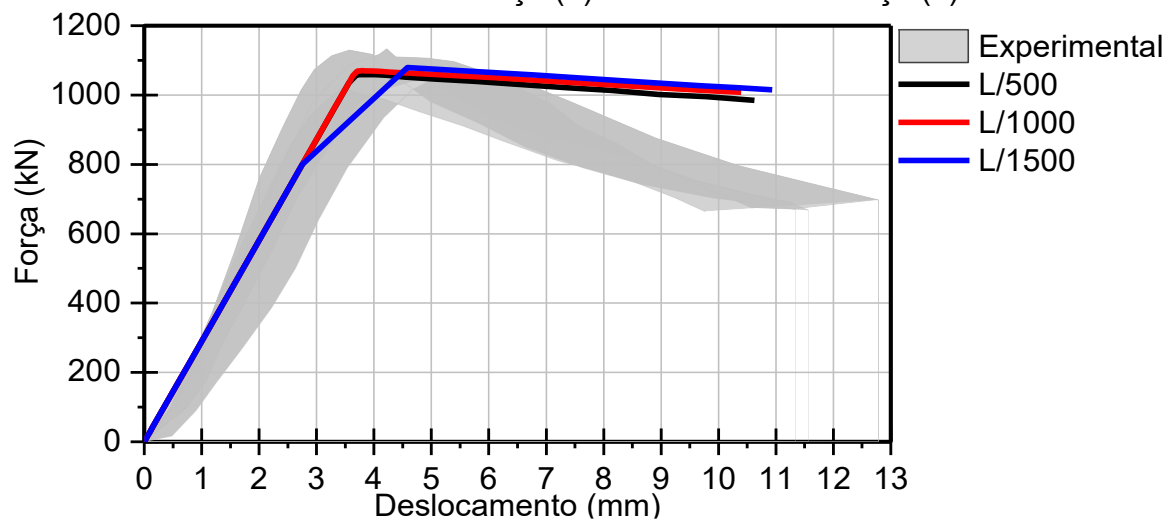
Destaca-se que, conforme observado em outros estudos que simularam elementos de madeira (Alves *et al.*, 2024; Assis *et al.*, 2024), esse tipo de simulação geralmente conduz a resultados com maior rigidez, visto que o modelo numérico não reproduz as diversas imperfeições ocasionalmente presentes no modelo experimental (como nós, fissuras e variações geométricas). Apesar de existirem técnicas para a previsão da presença de nós (Baño; Arriaga; Guaita, 2013; Saad; Lengyel, 2023, 2022), informações que permitam prevê-los no modelo raramente estão disponíveis.

Em síntese, modelo elaborado a partir das correlações obtidas do estudo de Xu *et al.* (2024) apresentou uma reprodução adequada do comportamento força-deslocamento (Figura 36) e um erro adequado ao prever a capacidade de carga do pilar de referência, com e sem reforço, apresentando um erro de 1,8% e 8,1%, respectivamente, bem como a rigidez axial, com erros de 8,5% e 21,6%. Uma possível justificativa para esse menor erro é a origem da madeira: o estudo de Siha, Zhou e Yang (2021) foi realizado na China e as correlações adotadas no Brasil podem não refletir com precisão as espécies de outras regiões. Apesar do erro mais elevado na previsão da rigidez axial do pilar com reforço, os resultados encontrados ainda são

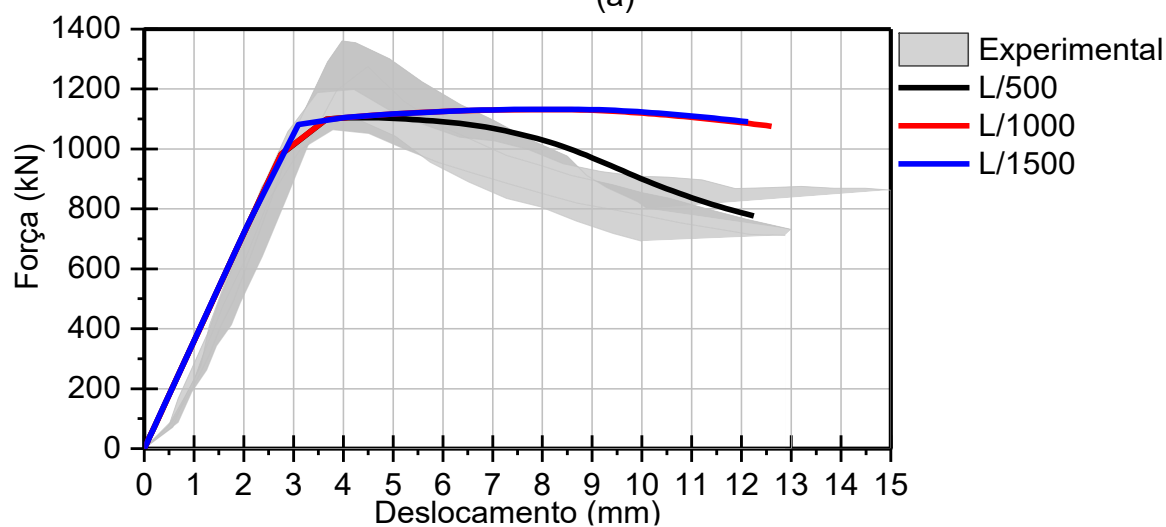
considerados adequados. Desse modo, essas correlações foram eleitas para a análise do fator de imperfeição geométrica inicial do modelo.

Os resultados obtidos ao variar o fator de imperfeição geométrica inicial do modelo, em termos da curva força-deslocamento, estão apresentados na Figura 37 e o erro da capacidade de carga dos modelos está apresentado na Tabela 14.

Figura 37 – Força-deslocamento da validação da imperfeição geométrica inicial: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).



(a)



(b)

Fonte: Autor (2026).

Tabela 14 – Erro na validação da imperfeição geométrica inicial

Modelo	P_{max} (kN) [Erro (%)]		K (kN/mm) [Erro (%)]	
	Sem reforço	Com reforço	Sem reforço	Com reforço
L/500	1059,25 [1,8]	1104,61 [8,1]	289,74 [8,5]	359,11 [21,6]
L/1000	1069,58 [0,9]	1131,65 [5,9]	289,82 [8,5]	359,41 [21,7]
L/1500	1079,46 [0,1]	1132,64 [5,8]	289,84 [8,5]	359,59 [21,8]

Fonte: Autor (2026).

Os modelos sem reforço (Figura 37a) apresentaram um comportamento similar, com exceção do início do escoamento, onde o pilar mais retilíneo (L/1500) apresentou um patamar intermediário ao se aproximar dos 3 mm de deslocamento, atingindo o pico de carga ao se aproximar dos 5 mm de deslocamento. Os demais apresentaram um comportamento perfeitamente linear até o pico de carga. Na região inelástica do gráfico, todos os pilares apresentaram um comportamento próximo ao elastoplástico perfeito. Destaca-se que os pilares de referência apresentaram redução de resistência após o pico do ensaio. Nessa análise, os fatores de L/500 e L/1000 foram considerados os mais adequados.

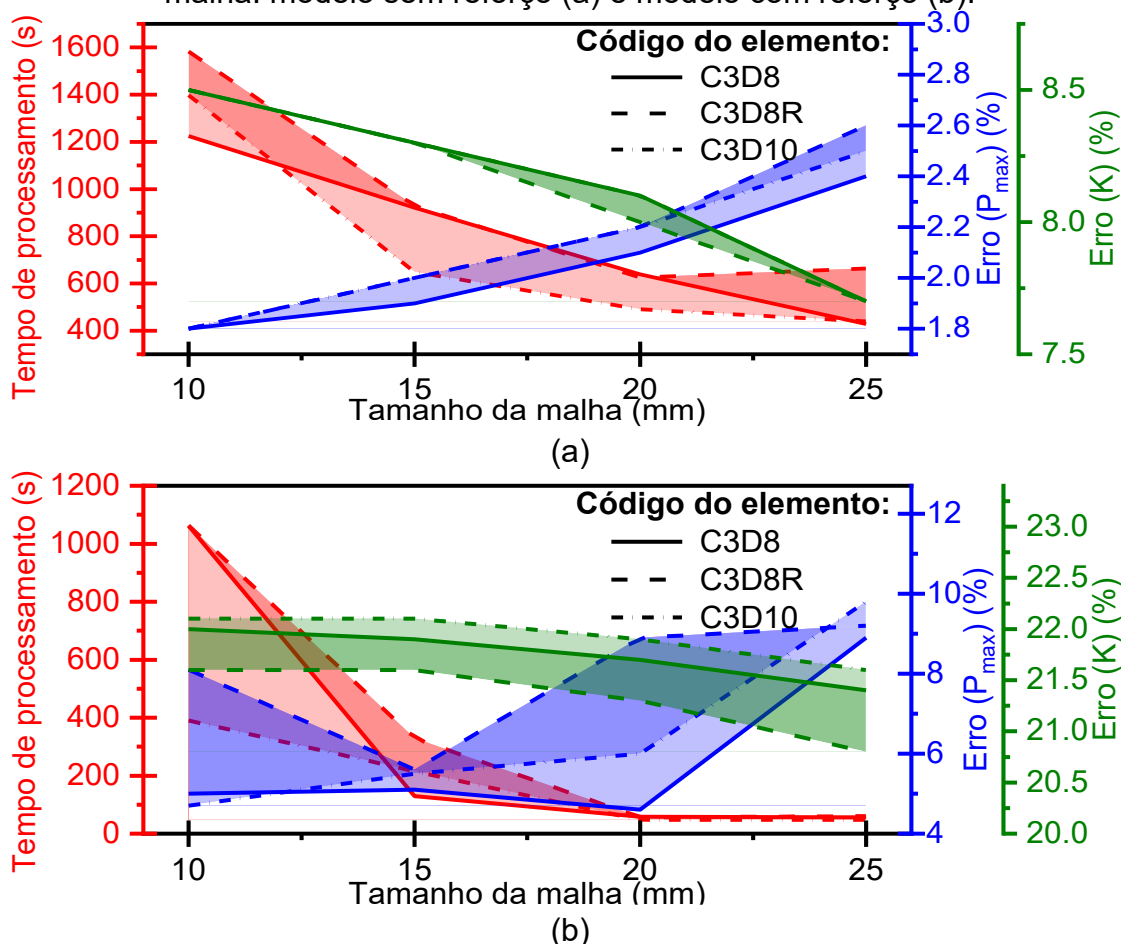
Na Figura 37b, foi possível observar que os modelos com menor fator de imperfeição geométrica inicial (L/1000 e L/1500) não previram adequadamente o comportamento inelástico do pilar, se aproximando de um comportamento elastoplástico. Apesar do erro ter diminuído (Tabela 14), a carga máxima não corresponde à região esperada, ocorrendo depois dos 8 mm de deslocamento, enquanto no estudo experimental ocorreu próximo aos 4 mm. Desse modo, a consideração do fator de imperfeição de L/500 foi considerada mais adequado.

Ao avaliar o erro encontrado (Tabela 14), foi observado que os valores apresentaram baixa variação. O valor de K para ambas as configurações (com e sem reforço) apresentou oscilações mínimas. Para P_{max} , o fator de L/1500 apresentou a maior precisão entre os testes realizados, enquanto os maiores erros foram encontrados com o fator L/500. Ainda assim, todos os modelos apresentaram erros dentro dos limites aceitáveis para esse tipo de simulação.

Apesar de menores erros, os fatores L/1000 e L/1500 não previram adequadamente o comportamento pós-pico dos pilares de referência com reforço. Considerando que o fator L/500 foi considerado adequado para previsão do pilar com e sem reforço, bem como apresenta erros aceitáveis, esse fator foi considerado para a realização do teste de sensibilidade de malha.

Foi realizado um teste de sensibilidade de malha, conforme Tabela 10. Inicialmente, o erro na previsão de P_{max} e de K foi comparado com o tempo de processamento, conforme apresentado na Figura 38. Os valores de erro encontrados são apresentados na Tabela 15.

Figura 38 – Análise do erro e tempo de processamento do teste de sensibilidade de malha: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).



Nota: Configuração do computador: CPU 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-12600KF, 3,69 GHz, 16 threads, 64 GB ram, GPU AMD Radeon RX 6600 8 GB.
 Fonte: Autor (2026).

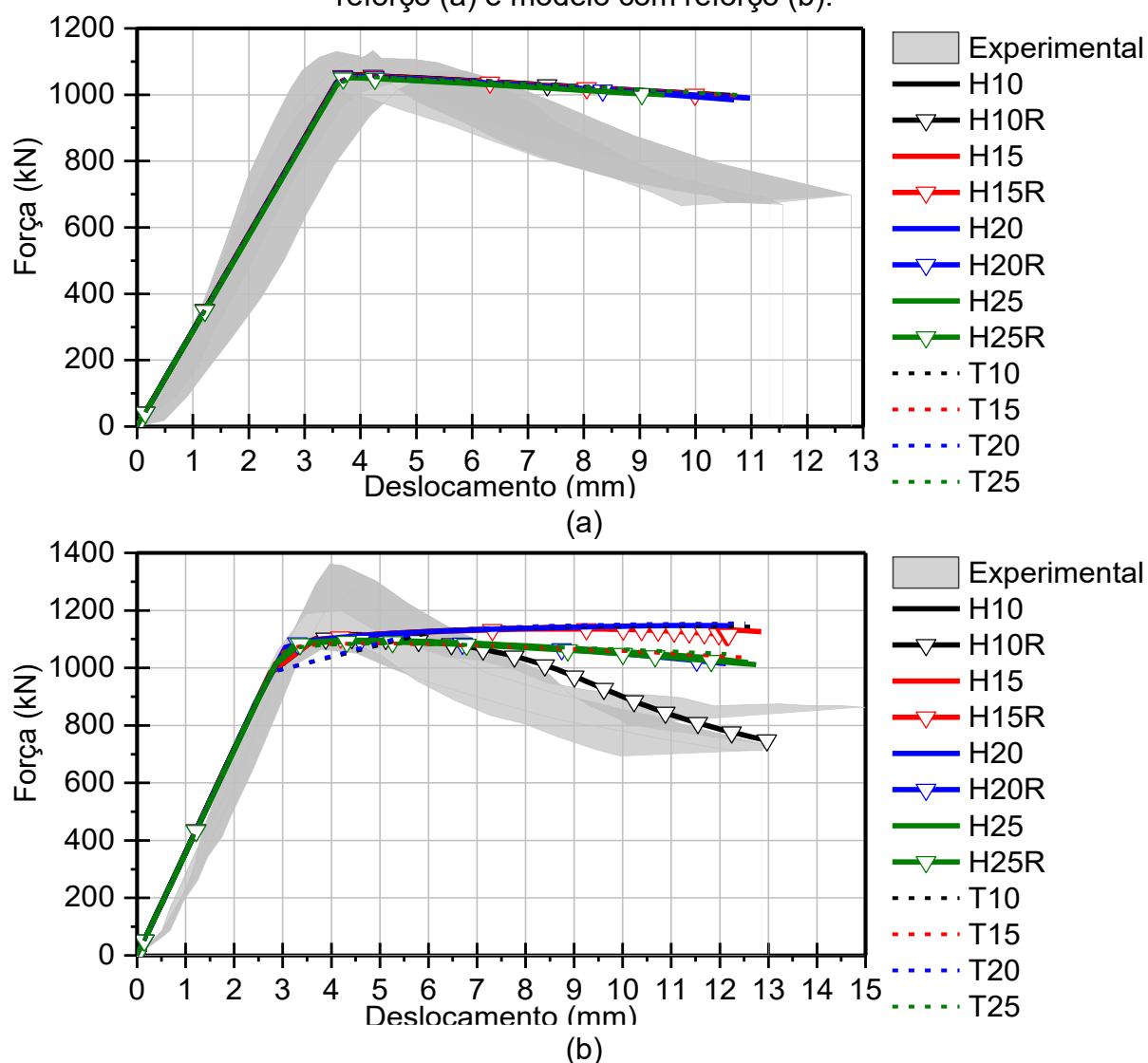
Tabela 15 – Erro no teste de sensibilidade de malha

Modelo	P_{max} (kN) [Erro (%)]		K (kN/mm) [Erro (%)]	
	Sem reforço	Com reforço	Sem reforço	Com reforço
H10	1059,31 [1,8]	1142,23 [5]	289,75 [8,5]	360,23 [22]
H10R	1059,25 [1,8]	1104,61 [8,1]	289,74 [8,5]	359,11 [21,6]
H15	1057,59 [2]	1141,54 [5,1]	289,3 [8,3]	359,95 [21,9]
H15R	1057,42 [2]	1135,44 [5,6]	289,28 [8,3]	358,98 [21,6]
H20	1055,17 [2,2]	1147,62 [4,6]	288,66 [8,1]	359,33 [21,7]
H20R	1054,91 [2,2]	1095,62 [8,9]	288,63 [8]	358,08 [21,3]
H25	1051,63 [2,5]	1096,05 [8,9]	287,72 [7,7]	358,34 [21,4]
H25R	1051,31 [2,6]	1091,56 [9,2]	287,67 [7,7]	356,71 [20,8]
T10	1059,71 [1,8]	1146,13 [4,7]	289,76 [8,5]	360,61 [22,1]
T15	1058,37 [1,9]	1084,74 [9,8]	289,32 [8,3]	360,41 [22,1]
T20	1056,48 [2,1]	1154,06 [4]	288,69 [8,1]	359,88 [21,9]
T25	1053,37 [2,4]	1084,6 [9,8]	287,74 [7,7]	358,98 [21,6]

Fonte: Autor (2026).

Os erros obtidos para K , novamente, não sofreram variações severas, o que denota a maior contribuição do E_L (propriedade não variada e utilizada para determinação das demais propriedades) no intervalo elástico-linear. Os erros de P_{max} apresentaram maior variação, entre 1,8% e 9,8%. Destaca-se que os menores erros foram encontrados nos pilares sem reforço. Os resultados obtidos em termos da curva força-deslocamento estão apresentados na Figura 39.

Figura 39 – Força-deslocamento do teste de sensibilidade de malha: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).



Fonte: Autor (2026).

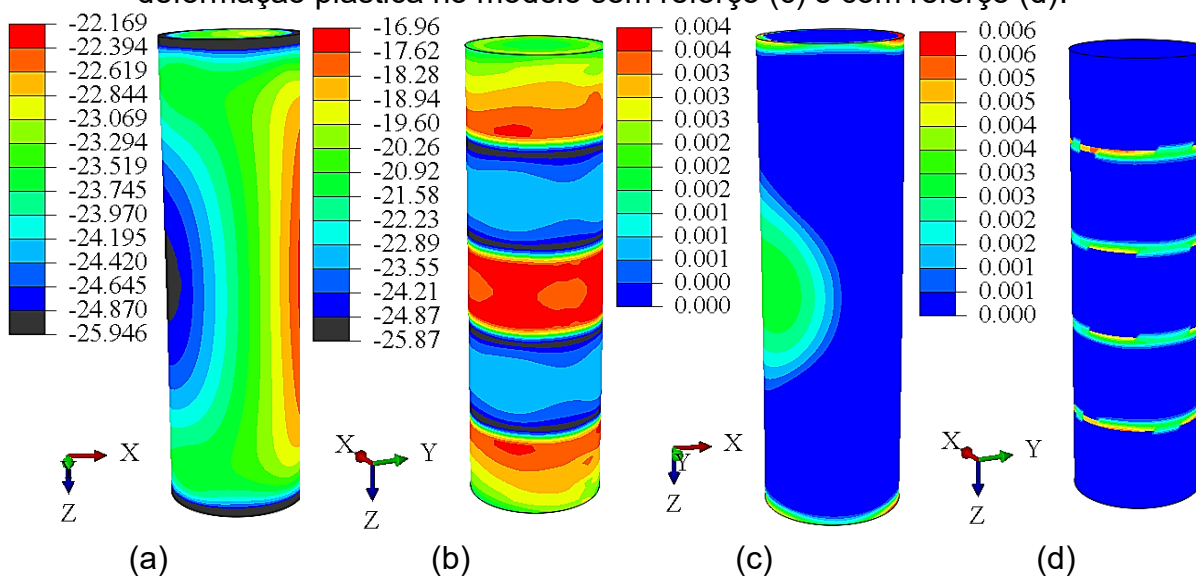
Dos resultados apresentados na Figura 39, o modelo com elementos hexaédricos com oito nós e integração reduzida (H10R) foi o único capaz de reproduzir o comportamento pós pico do pilar, sendo obtido um comportamento elastoplástico nos demais. Destaca-se que, apesar do erro encontrado foi de 8,1% para P_{max} do pilar

com reforço, este valor está dentro da variação relatada no estudo de referência (CV = 10,14%). Os demais modelos, apesar de apresentarem menores percentuais de erro, obtiveram esse resultado pelo endurecimento pós-pico no regime inelástico, o que não foi encontrado no estudo experimental.

Ao analisar estudos sobre simulação de pilares de madeira, observou-se uma prevalência de erros de até 10% (Khelifa *et al.*, 2016; Kim; Harries, 2010). Desse modo, o modelo elaborado com as correlações das propriedades conforme Xu *et al.* (2024), o fator de imperfeição geométrica inicial de $L/500$ e composto por elementos hexaédricos com oito nós e integração reduzida (C3D8R) de 10 mm foi considerado adequado para previsão do pilar ensaiado por Siha, Zhou e Yang (2021).

Por fim, as tensões de compressão atuantes no pilar com a configuração validada, bem como a deformação plástica, são apresentadas na Figura 40. Destaca-se que o modo de falha variou com a presença do reforço.

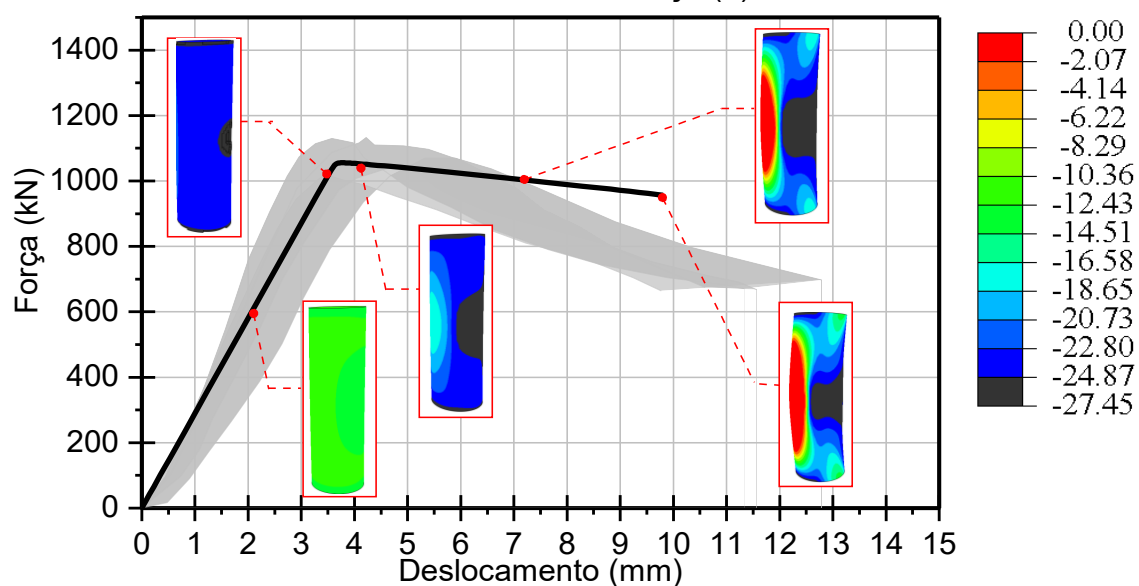
Figura 40 – Tensões de compressão no modelo sem reforço (a) e com reforço (b) e deformação plástica no modelo sem reforço (c) e com reforço (d).



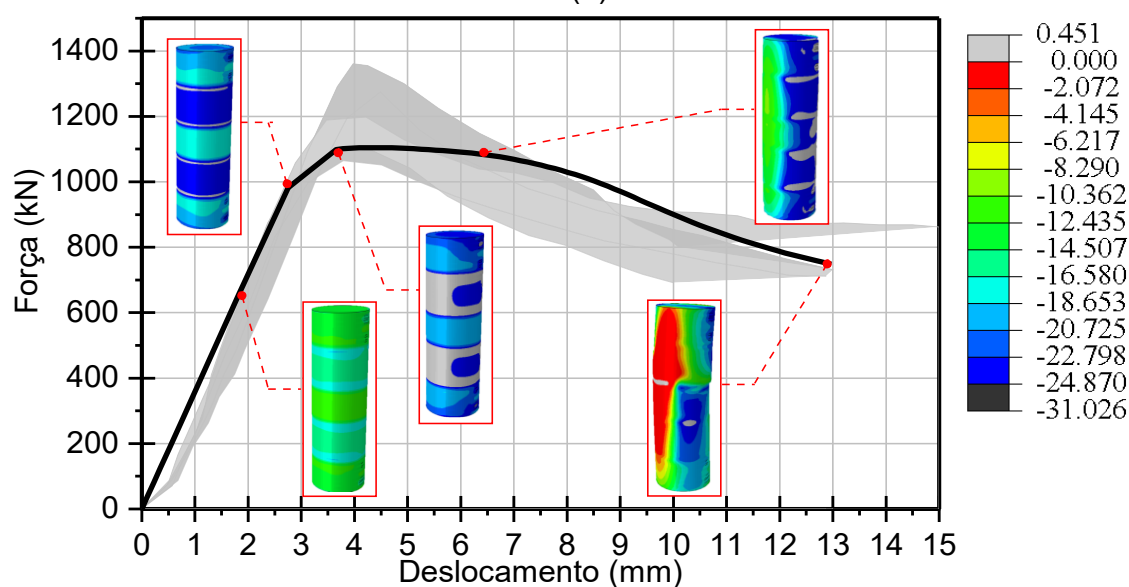
No modelo sem reforço, as tensões críticas e deformação plástica ocorreram na região do contato com o atuador e em um dos lados da região central do pilar. A diferença de padrão de comportamento ao se comparar com o modelo de referência (Figura 35) possivelmente ocorreu em razão da presença de nós, que nitidamente influenciou o pilar analisado em laboratório. A concentração de esforços observadas nesse modelo pode se justificar pelo fator de imperfeição geométrica inicial.

Ao se analisar o modelo com reforço, foi observado o esmagamento do pilar, assim como o modelo de referência, porém em uma região mais próxima do reforço. Isso pode ser explicado, novamente, pela presença de nós na madeira, como pode ser visto na Figura 35. Desse modo, o comportamento encontrado foi considerado adequado ao modelo de referência. A Figura 41 apresenta os detalhes do comportamento pilar durante a simulação, onde as regiões cinzas representadas nas imagens do modelo são as que superam a resistência à compressão do pilar.

Figura 41 – Força-deslocamento do modelo validado: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).



(a)



(b)

Fonte: Autor (2026).

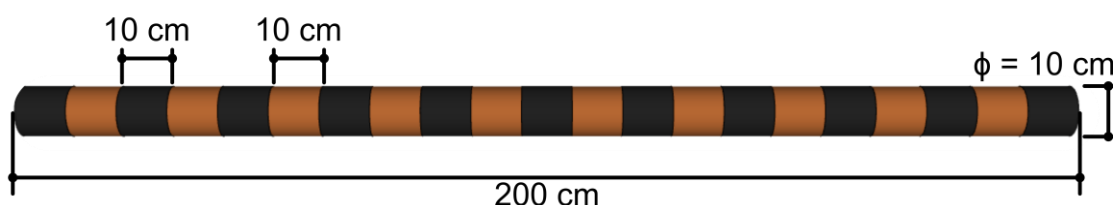
5.2 REPRODUÇÃO DO ESTUDO DE WANG *et al.* (2023)

O trabalho desenvolvido por Wang *et al.* (2023) foi escolhido em razão dos autores avaliarem um pilar com esbeltez elevada ($\lambda = 80$), ao se comparar com o valor médio observado na revisão sistemática ($\lambda_{\text{med}} = 29,44$), sendo o pilar com maior esbeltez que compõe o Capítulo 3. A validação deste modelo atesta a capacidade de reprodução do *script* elaborado e permite a consideração deste valor de esbeltez no estudo paramétrico. Neste capítulo é apresentado o estudo de Wang *et al.* (2023) e a execução da validação do modelo, com o teste de sensibilidade da malha de elementos finitos.

5.2.1 Apresentação do estudo e dos modelos de referência

Wang *et al.* (2023) estudaram o uso de diferentes compósitos laminados híbridos usados como reforço em pilares de madeira. Os pilares possuíam 2000 mm de comprimento e 100 mm de diâmetro. Os autores avaliaram reforços parciais e contínuos. Os reforços parciais eram compostos por lâminas com 100 mm de largura, com 100 mm de espaçamento. A Figura 42 apresenta o pilar com reforço parcial tomado como referência.

Figura 42 – Pilar de referência com reforço parcial.



Fonte: Adaptado de Wang *et al.* (2023)

Neste estudo, foi adotada a espécie *Cunninghamia lanceolata*, com suas propriedades devidamente caracterizadas, conforme Tabela 16. Destaca-se que os autores forneceram todas as propriedades necessárias para simulação numérica, determinadas por meio de caracterização em laboratório, sem a necessidade de se validar correlações para a reprodução do pilar.

Tabela 16 – Propriedades da madeira utilizada por Wang *et al.* (2023)

Direção/Plano	E (MPa)	G (MPa)	ν	f_c (MPa)	f_v (MPa)
1	9167 [7,04]	-	-	29 [5,66]	-
2	1100 [4,39]	-	-	5,5 [4,86]	-
3	689 [8,67]	-	-	5,5 [3,29]	-
12	-	656 [4,76]	0,35 [6,65]	-	5,9 [5,93]
13	-	600 [8,72]	0,028 [6,44]	-	5,8 [7,74]
23	-	70 [5,17]	0,4 [4,59]	-	0,7 [7,35]

Nota: Os valores apresentados são médios, com o desvio padrão dentro do colchete.

Fonte: Adaptado de Wang *et al.* (2023)

O reforço do modelo simulado foi executado com PRFC unidirecional (Toray T300-3K), fixado por meio de resina epóxi bicomponente. As propriedades disponíveis, informadas pelo fabricante, são apresentadas na Tabela 17.

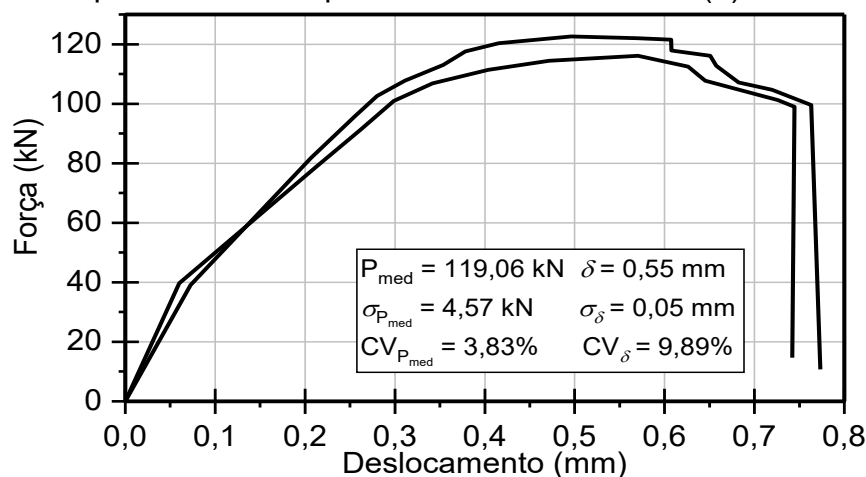
Tabela 17 – Propriedades do PRFC utilizado por Wang *et al.* (2023)

Propriedade	Valor
t (mm)	0,16
E_{PRF} (GPa)	230
f_{PRF} (MPa)	3530
ϵ_u	0,015

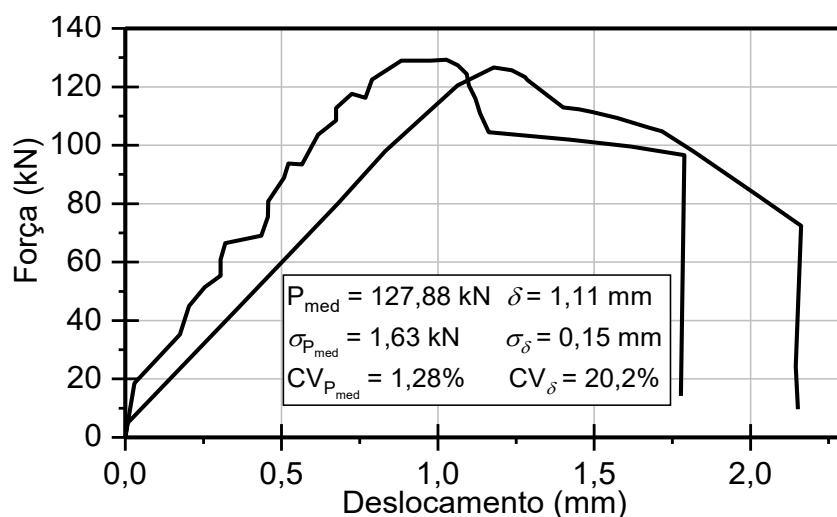
Fonte: Adaptado de Wang *et al.* (2023)

Foram ensaiados dois pilares com a configuração escolhida (Figura 42) em uma máquina de ensaios hidráulica, com velocidade de ensaio de 0,5 mm/s. Os resultados obtidos pelos autores, em termos da curva força-deslocamento, para os pilares com e sem reforço, são apresentados na Figura 43.

Figura 43 – Comportamento dos pilares de referência: sem (a) e com reforço (b)



(a)

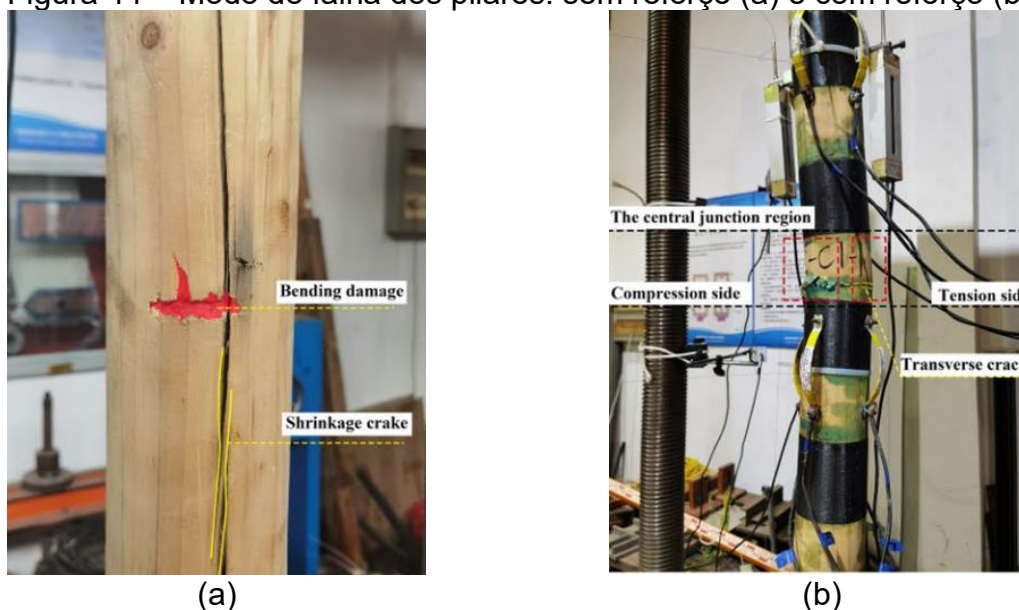


(b)

Fonte: Adaptado de Wang *et al.* (2023).

Conforme apresentado na Figura 44, no modelo sem reforço, foi observado dano devido à flexão acompanhado de rachaduras longitudinais. No modelo com reforço, a falha ocorreu predominantemente pela fratura transversal das lâminas de PRFC na face tracionada e pelo esmagamento severo das fibras de madeira na zona comprimida. Esse modo de falha foi possivelmente induzido pela ocorrência da flambagem global, em razão da elevada esbelteza do elemento. Esse comportamento demonstrou que o compósito garantiu o confinamento local até o limite de instabilidade do pilar.

Figura 44 – Modo de falha dos pilares: sem reforço (a) e com reforço (b)



(a)

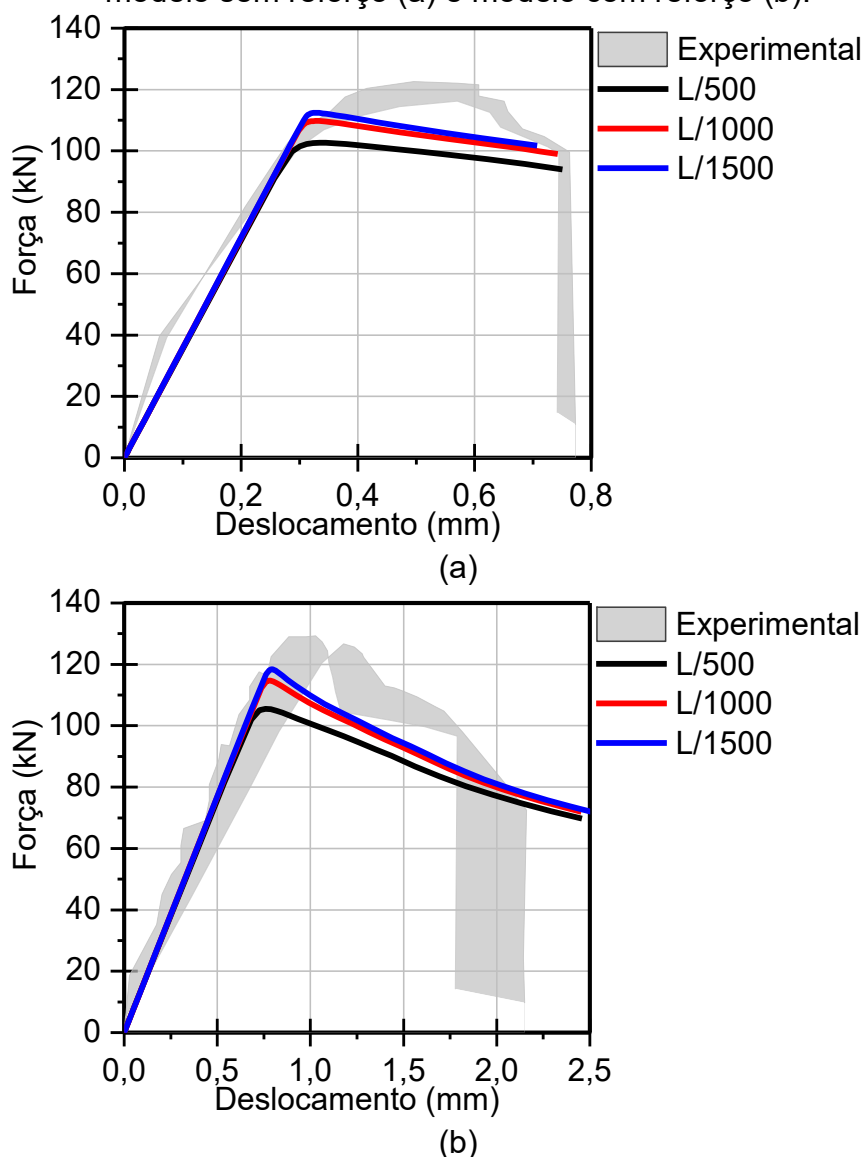
(b)

Fonte: Adaptado de Wang *et al.* (2023).

5.2.2 Validação do modelo

A validação do modelo teve início com a verificação da sensibilidade do fator de imperfeição geométrica inicial. Os resultados obtidos nas simulações dos pilares com e sem reforço são apresentados na Figura 45.

Figura 45 – Força-deslocamento da validação da imperfeição geométrica inicial: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).



Fonte: Autor (2026).

Observou-se que o impacto do fator de imperfeição foi mais perceptível ao avaliar o modelo de Wang *et al.* (2023) do que o obtido no modelo de Siha, Zhou e Yang (2021) (Figura 37). Isso pode ser justificado pelo maior índice de esbeltez, acentuando os efeitos de segunda ordem. Nesta análise, os modelos com menor

imperfeição inicial apresentaram um comportamento mais similar ao obtido na referência. A Tabela 18 apresenta os valores de erro obtidos para P_{max} e K .

Tabela 18 – Erro na validação da imperfeição geométrica inicial

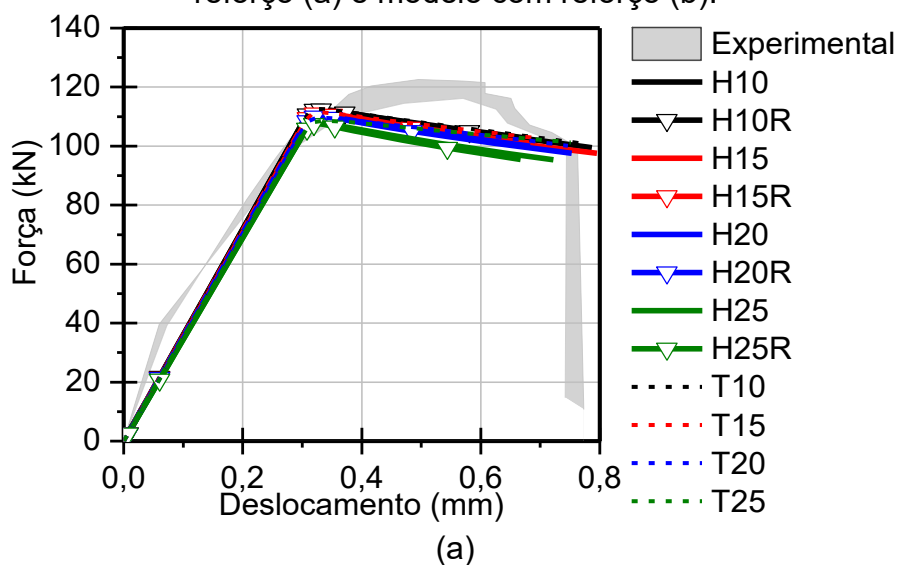
Modelo	P_{max} (kN) [Erro (%)]		K (kN/mm) [Erro (%)]	
	Sem reforço	Com reforço	Sem reforço	Com reforço
L/500	102,65 [13,8]	105,55 [17,5]	354,57 [2]	152,14 [2,2]
L/1000	109,75 [7,8]	114,77 [10,3]	358,27 [1]	153,82 [1,1]
L/1500	112,42 [5,6]	118,42 [7,4]	358,96 [0,8]	154,14 [0,9]

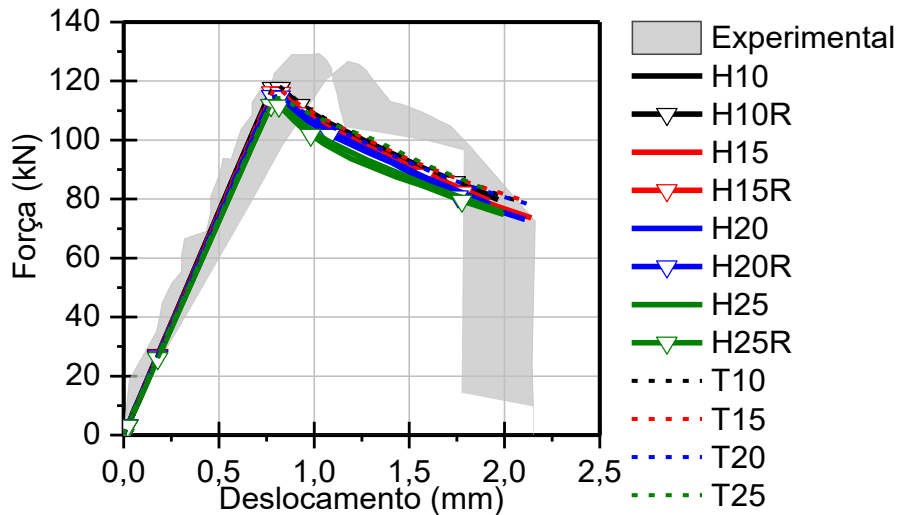
Fonte: Autor (2026).

Conforme observado na Figura 45 e da Tabela 18, notou-se que a adoção de imperfeições geométricas mais severas, como $L/500$, penalizou excessivamente a capacidade de carga dos modelos. Com isso, a amplificação prematura dos momentos de segunda ordem levou a desvios na obtenção de P_{max} de até 17,5%.

Por sua vez, os modelos com fator de $L/1500$ apresentaram melhor aderência com a curva experimental, permitindo simular a fase linear e a transição elastoplástica com maior precisão. Para esta configuração, os erros de capacidade de carga reduziram para 5,6% (sem reforço) e 7,4% (com reforço), ao mesmo tempo em que K foi estimada com alta precisão, com erros de 0,8% e 0,9%. Diante desses resultados, a imperfeição de $L/1500$ foi validada e selecionada para a execução do teste de sensibilidade de malha. Os resultados obtidos no teste de malha são apresentados na Figura 46, na Figura 47 e na Tabela 19.

Figura 46 – Força-deslocamento do teste de sensibilidade de malha: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).

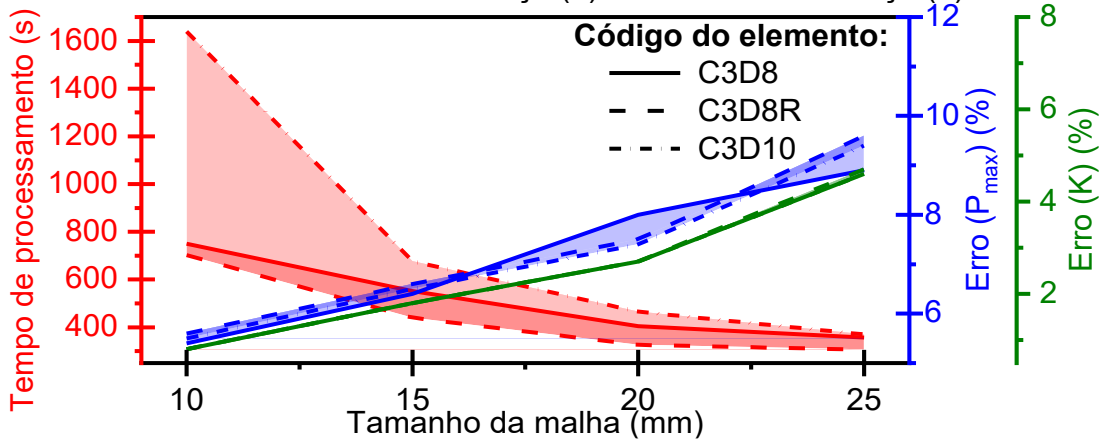




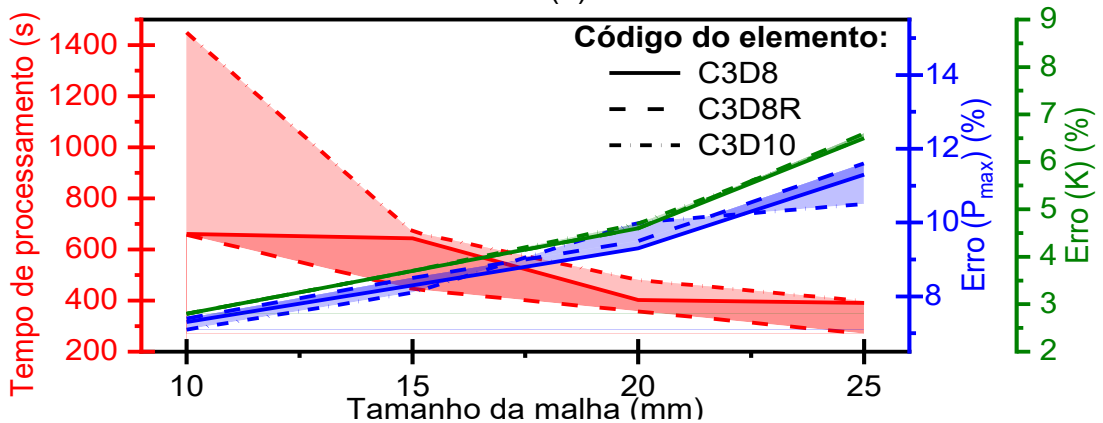
(b)

Fonte: Autor (2026).

Figura 47 – Análise do erro e tempo de processamento do teste de sensibilidade de malha: modelo sem reforço (a) e modelo com reforço (b).



(a)



(b)

Nota: Configuração do computador: CPU 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-12600KF, 3,69 GHz, 16 threads, 64 GB ram, GPU AMD Radeon RX 6600 8 GB.

Fonte: Autor (2026).

Tabela 19 – Erro no teste de sensibilidade de malha

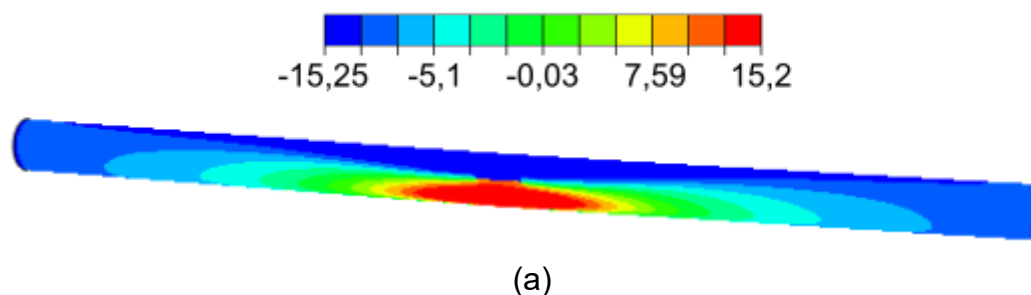
Modelo	P_{max} (kN) [Erro (%)]		K (kN/mm) [Erro (%)]	
	Sem reforço	Com reforço	Sem reforço	Com reforço
H10	112,49 [5,5]	118,54 [7,3]	358,97 [0,8]	151,19 [2,8]
H10R	112,42 [5,6]	118,46 [7,4]	358,95 [0,8]	151,19 [2,8]
H15	111,29 [6,5]	117,21 [8,3]	355,36 [1,8]	149,68 [3,7]
H15R	111,2 [6,6]	116,99 [8,5]	355,33 [1,8]	149,66 [3,7]
H20	110,24 [7,4]	116,04 [9,3]	352,06 [2,7]	148,29 [4,6]
H20R	110,1 [7,5]	115,79 [9,5]	352,03 [2,7]	148,27 [4,6]
H25	107,86 [9,4]	113,4 [11,3]	344,99 [4,6]	145,31 [6,5]
H25R	107,59 [9,6]	113,06 [11,6]	344,92 [4,7]	145,27 [6,6]
T10	112,62 [5,4]	118,76 [7,1]	358,98 [0,8]	151,2 [2,8]
T15	111,41 [6,4]	117,47 [8,1]	355,37 [1,8]	149,68 [3,7]
T20	109,59 [8]	115,14 [10]	351,87 [2,7]	148,2 [4,7]
T25	108,52 [8,9]	114,51 [10,5]	345,04 [4,6]	145,33 [6,5]

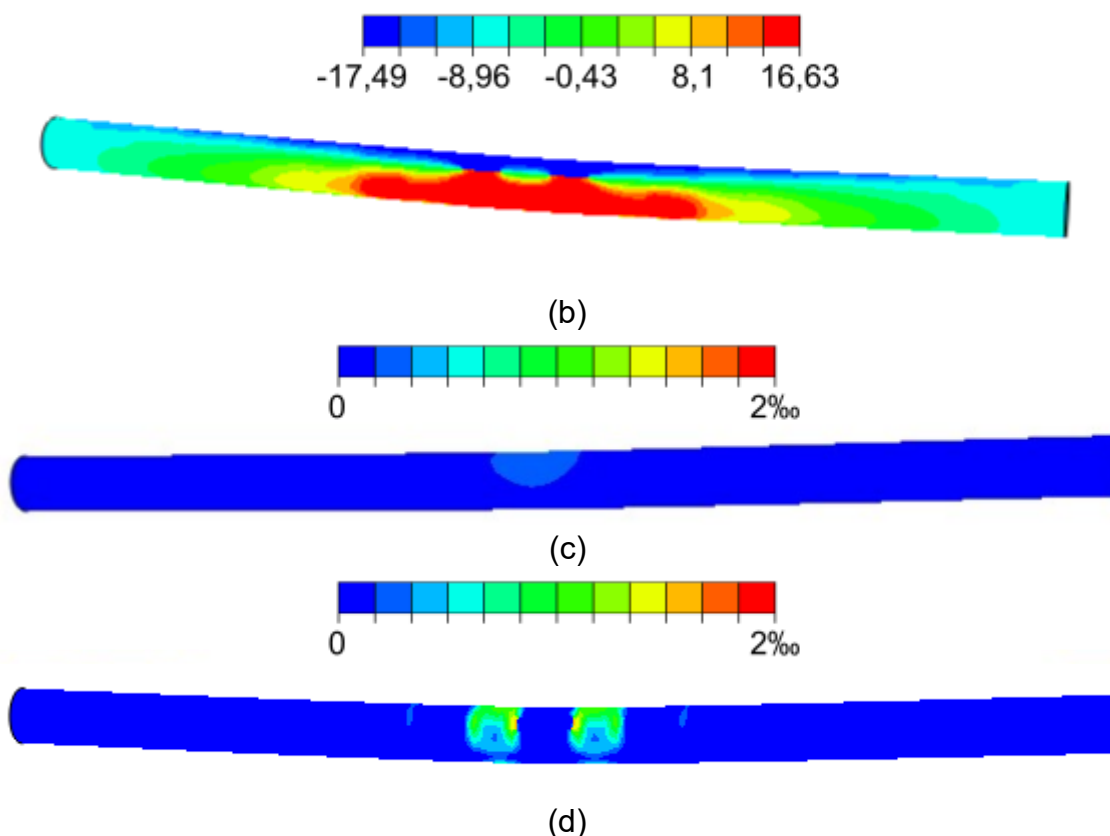
Fonte: Autor (2026).

Ao avaliar os resultados do estudo de sensibilidade de malha, constatou-se que o refinamento influenciou a precisão na obtenção da capacidade resistente. Malhas mais grosseiras (como H25 e H25R) subestimaram a capacidade de carga com erros superiores a 11,6%, devido à menor capacidade de capturar os gradientes de tensão durante a plastificação da madeira.

O modelo H10R forneceu a predição mais acurada, onde os erros para a capacidade de carga variaram entre 5,6% e 7,4%, e para a rigidez inicial, entre 0,8% e 2,8%. Embora o modelo demande maior tempo de processamento se comparado às malhas mais grossas, o custo computacional permanece viável e justificável pelo ganho em precisão. Dessa forma, a malha de elementos C3D8R com 10 mm foi definida como a mais apropriada para a representação do modelo. Por fim, a Figura 48 apresenta as tensões axiais e deformações plásticas observadas na simulação do modelo H10R em seu para o pico de carga.

Figura 48 – Tensões axiais (MPa) no modelo sem reforço (a) e com reforço (b) e deformação plástica no modelo sem reforço (c) e com reforço (d).





Fonte: Autor (2026).

Ao avaliar as tensões axiais, foi constatado uma configuração de flexocompressão, similar ao modelo de referência. Os valores extremos de tensão de compressão atingidos no modelo numérico foram de aproximadamente 15 MPa no pilar sem reforço e 17,5 MPa no pilar com reforço. Por sua vez, as faces opostas registraram elevadas tensões de tração, sendo 15,2 MPa e 16,6 MPa, respectivamente.

Nota-se que os valores de compressão estão abaixo da resistência característica do material caracterizado no ensaio ($f_c = 29$ MPa). Esta divergência não indica um erro na simulação, mas sim a manifestação do fenômeno de instabilidade elástica (flambagem global). Devido à elevada esbelteza do pilar de Wang *et al.* (2023), o colapso estrutural tende a ser governado pela amplificação dos momentos fletores de segunda ordem e não pelo esmagamento puro da seção transversal. Esse campo de tensões corrobora perfeitamente o modo de falha experimental relatado pelos autores (Figura 44).

As deformações plásticas equivalentes confirmam este comportamento. No modelo sem reforço, a deformação plástica máxima foi incipiente, chegando a $5 \cdot 10^{-4}$, indicando que a ruptura ocorreu de forma quase abrupta por perda de estabilidade

geométrica ainda no regime elástico do material. Por outro lado, no modelo com reforço parcial, a deformação plástica alcançou valores próximos de 2%. Isso evidencia que o compósito exerceu um efeito de confinamento local nas regiões de maior momento fletor, restringindo parcialmente a deformação transversal e permitindo que as fibras de madeira na zona comprimida plastificassem em maior grau antes do colapso global, o que justifica o ligeiro ganho de capacidade de carga e de ductilidade observado na curva força-deslocamento.

5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE A VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

O comportamento observado nos modelos validados se contrasta e evidencia o efeito do reforço e da esbeltez do pilar no comportamento do elemento e na transição do estado limite último: de uma falha governada pela capacidade material para uma falha governada pela capacidade geométrica.

Na primeira validação (Siha; Zhou; Yang, 2021), a esbeltez reduzida permitiu que a seção transversal atingisse estados de tensão próximos ao limite de escoamento da madeira (25 MPa) de maneira mais uniforme, com a falha ocorrendo pelo esmagamento das fibras, com a plastificação precedendo a ruína. Assim, enquanto este modelo do falhou por esgotamento da capacidade material, o modelo de Wang *et al.* (2023) falhou por esgotamento da capacidade geométrica, fenômeno que o modelo numérico atual conseguiu capturar e reproduzir com alta fidelidade.

A validação demonstrou que a sensibilidade do modelo ao fator de imperfeição inicial é proporcional à esbeltez. Para o modelo de Siha, Zhou e Yang (2021), o fator $L/500$ foi considerado adequado. Por sua vez, para o modelo Wang *et al.* (2023), a aplicação de $L/500$ penalizou excessivamente a rigidez, sendo necessário o ajuste para $L/1500$.

A Destaca-se que a adoção do fator de imperfeição geométrica inicial de $L/500$ conduziu a resultados adequados e a favor da segurança para o pilar com índice esbeltez intermediária presente no estudo de Siha, Zhou e Yang (2021). No entanto, constatou-se que a simulação de pilares com índice de esbeltez elevado, como no modelo de Wang *et al.* (2023), exige maior rigidez na predição da configuração geométrica defeituosa, sendo o fator $L/1500$ o responsável por garantir uma previsão aderente sem superestimar a flambagem. Em ambos os cenários de validação, a adoção de elementos hexaédricos contínuos de integração reduzida (C3D8R)

combinados a uma malha de 10 mm garantiu estabilidade numérica, capturando corretamente os modos de falha por esmagamento e instabilidade global.

Os parâmetros analisados durante a etapa de validação do modelo numérico foram resumidos e apresentados na Tabela 20, sendo adotados para a simulação paramétrica.

Tabela 20 – Resumo dos modelos validados

Referência	Fator de imperfeição geométrica	Elemento finito		Erro (%) ^a		Modo de falha
		Código	Tamanho (mm)	P_{max}	K	
Siha, Zhou e Yang (2021)	L/500	C3D8R	10	1,8 [8,5]	8,1 [21,6]	Adequado
Wang <i>et al.</i> (2023)	L/1500	C3D8R	10	5,6 [7,4]	0,8 [2,8]	Adequado

Nota: a: o valor fora dos colchetes é referente ao pilar sem reforço e o valor dentro dos colchetes é referente ao pilar reforçado.

Fonte: Autor (2026).

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos após a realização das simulações numéricas consideradas no estudo paramétrico. Primeiramente, foram avaliados os efeitos dos parâmetros selecionados sobre a capacidade de carga e rigidez axial dos pilares simulados, de modo a identificar sua influência estrutural nesses elementos. Em seguida, foram desenvolvidos e analisados modelos de regressão simbólica, com o objetivo de selecionar as equações mais adequadas para estimativa dos parâmetros de interesse.

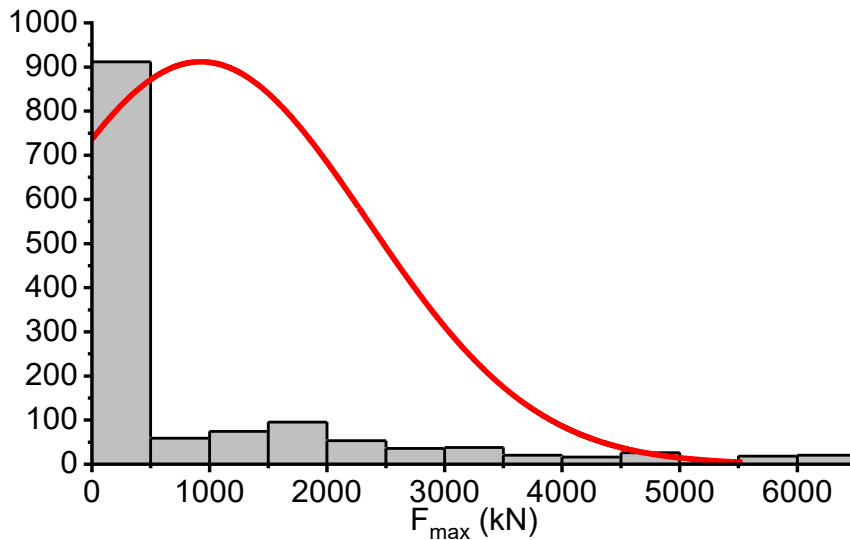
Os resultados das equações selecionadas foram comparados com os valores obtidos a partir de equações já apresentadas na literatura, aplicando essas equações aos pilares do estudo paramétrico e pilares ensaiados experimentalmente, catalogados a partir da RBS (Capítulo 3). Destaca-se que não foram encontradas equações na literatura para estimar a rigidez axial de pilares de madeira com reforço parcial. Com isso, apenas a equação proposta via regressão simbólica foi avaliada quanto sua precisão ao se aplicar aos pilares catalogados.

Por fim, é apresentado o estudo de confiabilidade estrutural da equação proposta, incluindo a sugestão de um coeficiente de ponderação próprio, de modo a garantir um índice de confiabilidade compatível com os requisitos estabelecidos em documentos normativos.

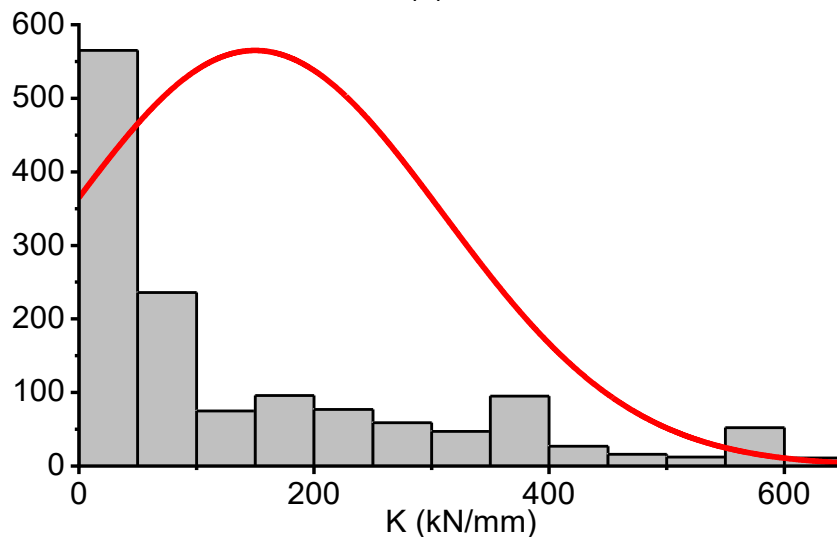
6.1 ANÁLISE DO ESTUDO PARAMÉTRICO

O estudo paramétrico foi analisado quanto a capacidade de carga (F_{max}) e rigidez axial (K). Os resultados obtidos são apresentados neste capítulo. A variação obtida para as variáveis dependentes é apresentada na Figura 49.

Figura 49 – Histograma dos resultados de capacidade de carga (a) e rigidez axial (b) obtidos no estudo paramétrico.



(a)



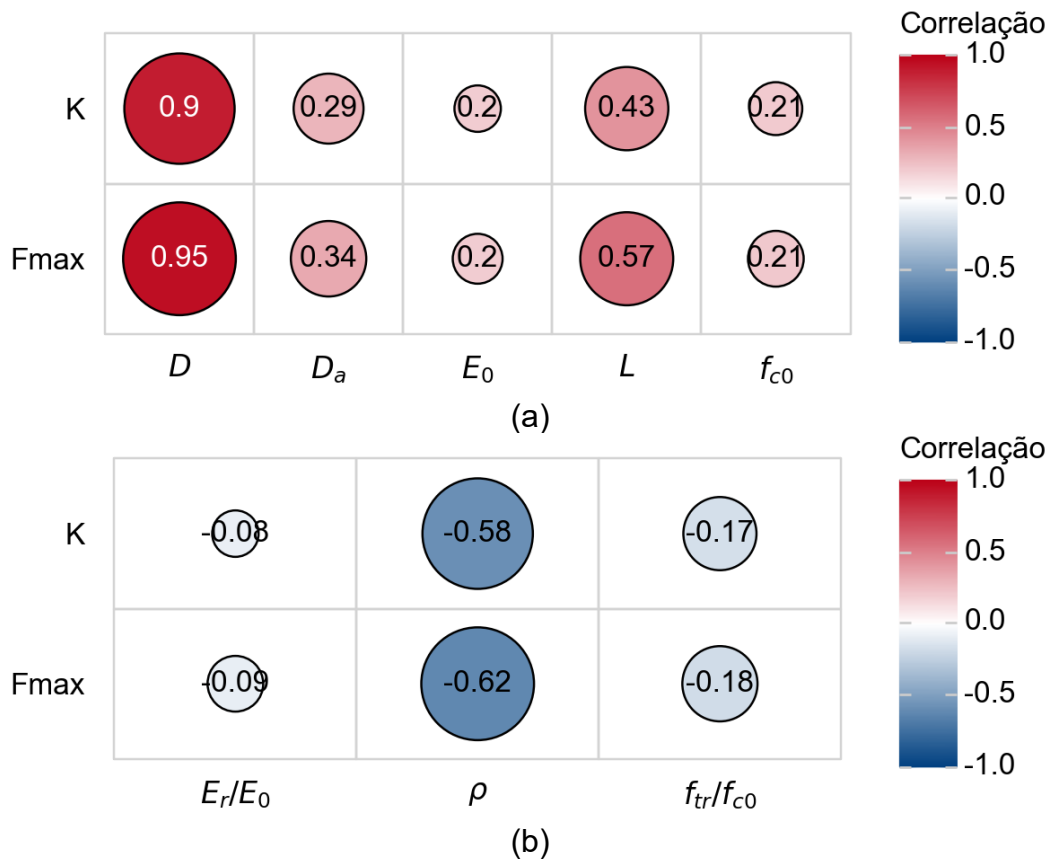
(b)

Fonte: Autor (2026).

Observa-se que ambos os histogramas apresentam uma distribuição assimétrica positiva, indicando que a maior concentração de modelos se situa em faixas de menor resistência e rigidez axial, mas com a presença de *outliers* de alto desempenho, sendo obtido até 6000 kN para F_{max} e 600 kN/mm para K .

Para identificar o grau de associação entre as variáveis independentes e as respostas estruturais, foi realizado o teste de correlação de Spearman, com os resultados apresentados na Figura 50.

Figura 50 – Correlação de Spearman para variáveis dimensionais (a) e adimensionais (b).



Fonte: Autor (2026).

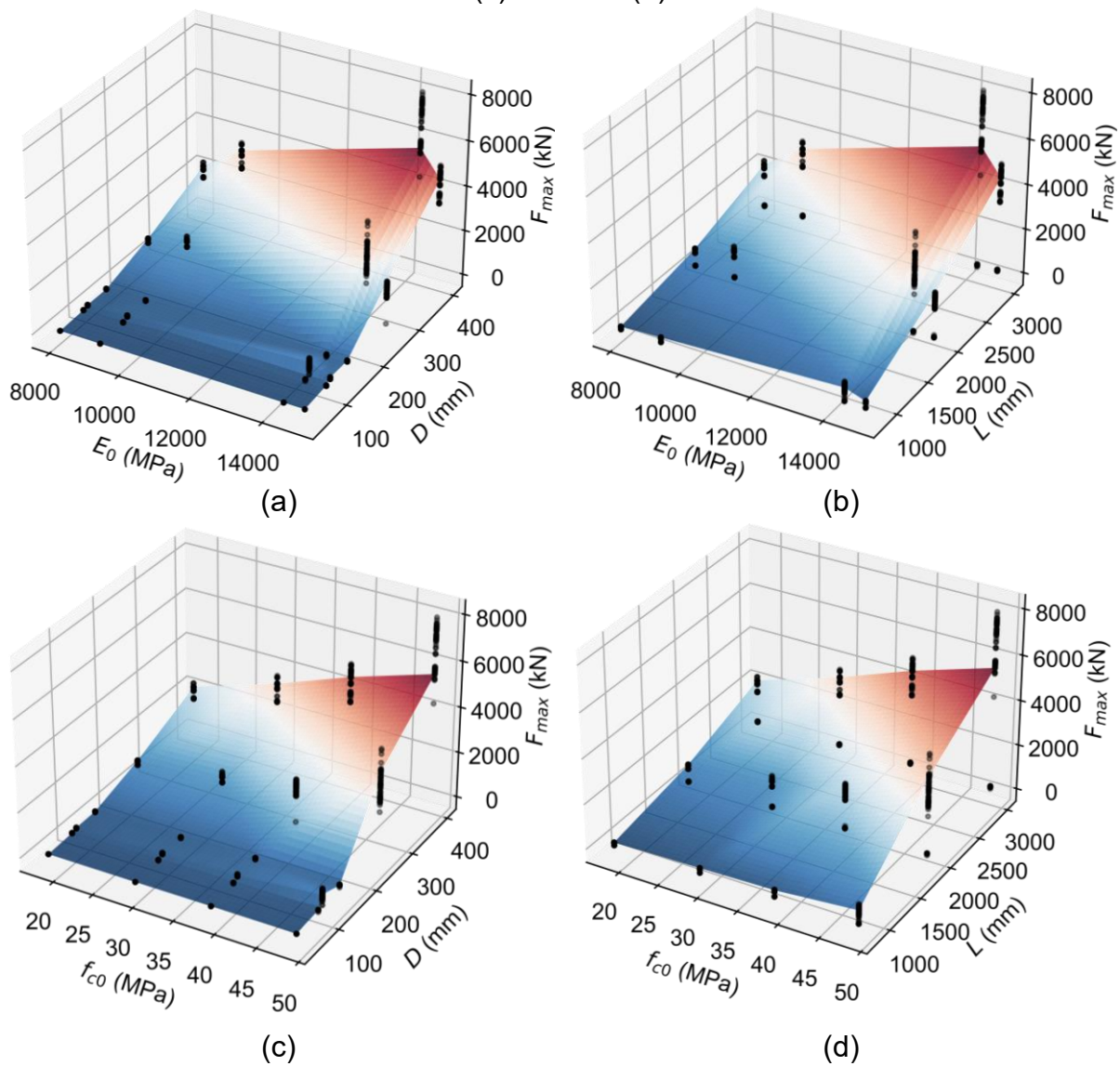
Destaca-se que o diâmetro do pilar apresentou a correlação mais forte com as variáveis dependentes ($r_s = 0,95$ para F_{max} e $r_s = 0,9$ para K), dado que a área da seção transversal e o momento de inércia são funções diretas desta dimensão. O comprimento apresentou correlação moderada ($r_s = 0,57$ para F_{max}), indicando que o efeito da esbeltez e da instabilidade global está presente, mas sua influência é atenuada por outras interações com os demais parâmetros.

Ao analisar as métricas adimensionais, observou-se que as correlações isoladas são baixas ou contraintuitivas. A taxa de reforço apresentou correlação negativa moderada de $r_s = -0,62$ para F_{max} e de $r_s = -0,58$ para K . Esse resultado sugere que, no estudo paramétrico, o incremento isolado de ρ não garante o aumento proporcional da capacidade se não houver um acoplamento adequado com a geometria do pilar. Destaca-se que a razão E_0/E_r e f_{c0}/f_{tr} apresentaram correlações quase nulas, inferiores a 0,18.

Com isso, o efeito da interação entre os parâmetros variados nas variáveis preditivas foi avaliado. A análise da superfície de resposta mostrou padrões

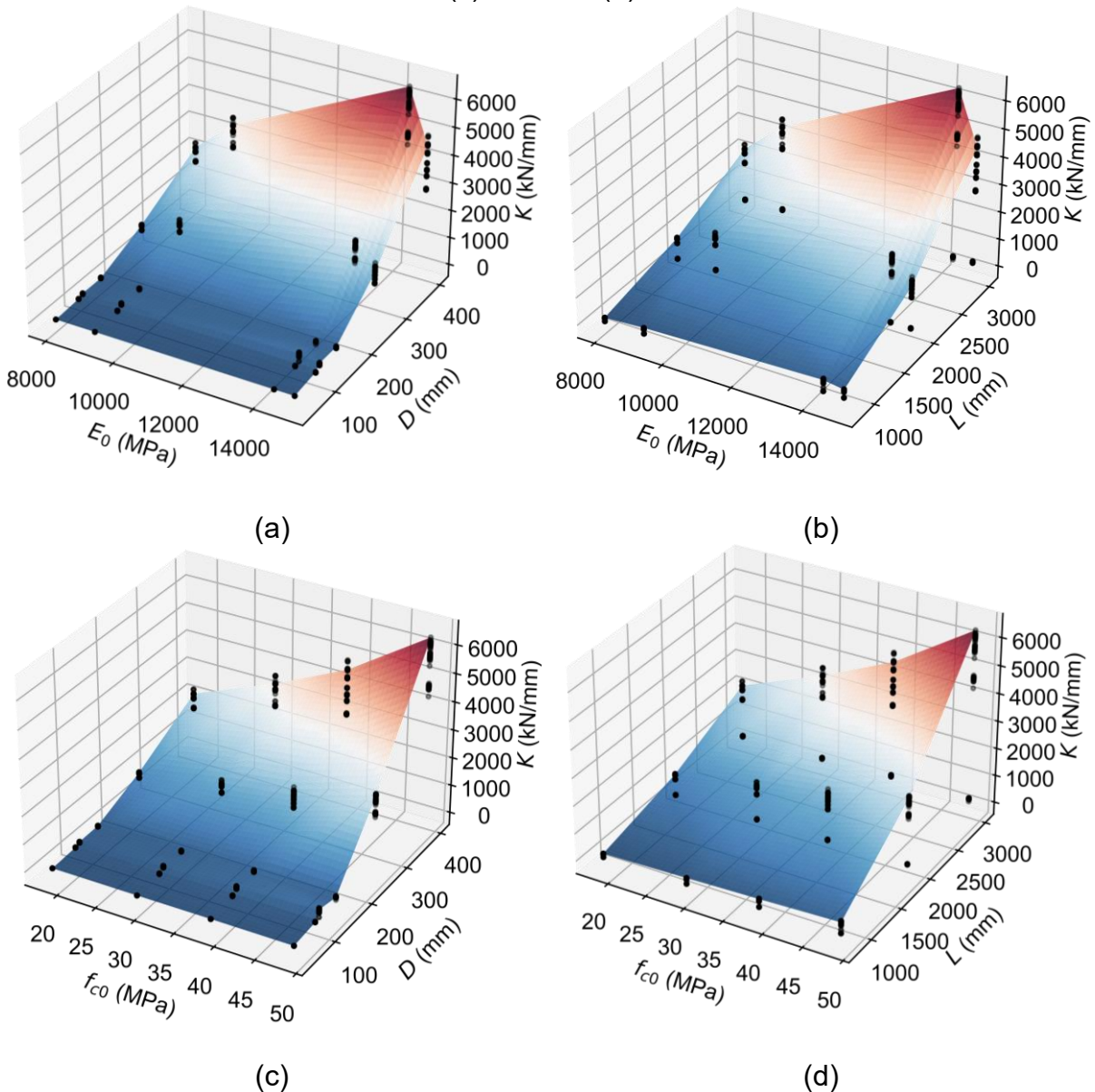
irregulares para quase todas as combinações. Entretanto, foi observado uma sinergia entre as propriedades físicas e mecânicas da madeira com as variáveis D e L na previsão de F_{max} e K , com um crescimento não linear da capacidade de carga (Figura 51) e um comportamento mais irregular ao analisar a rigidez axial (Figura 52).

Figura 51 – Gráficos de superfície para previsão de F_{max} : $E_0 \times D$ (a), $E_0 \times L$ (b), $f_{c0} \times D$ (c) e $f_{c0} \times L$ (d).



Fonte: Autor (2026).

Figura 52 – Gráficos de superfície para previsão de K : $E_0 \times D$ (a), $E_0 \times L$ (b), $f_{co} \times D$ (c) e $f_{co} \times L$ (d).



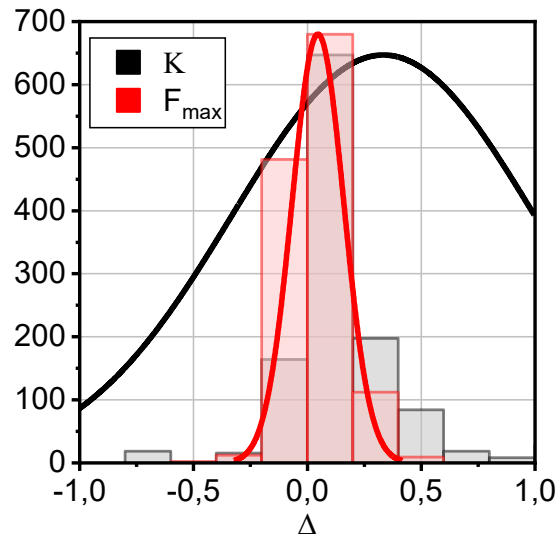
Fonte: Autor (2026).

A variação de E_0 e f_{co} foram mais relevantes em elementos de maior diâmetro ou comprimento. Ou seja, apesar de algumas variáveis não serem identificadas como significativas no teste de Spearman, sua combinação com outras variáveis pode implicar em impactos relevantes para a estrutura. Esse efeito também foi observado em outros estudos (Mahmoudabadi; Camp; Ahmad, 2026).

Após a análise do desempenho global dos pilares, a influência dos parâmetros na variação do desempenho estrutural, em relação aos elementos sem reforço parcial, foi avaliada. A Figura 53 apresenta o histograma da variação do desempenho dos pilares reforçados, comparados com os respectivos modelos sem a presença de

reforço. Observa-se que ambas as curvas de distribuição normal estão deslocadas à direita da origem, indicando a melhoria de desempenho proporcionada pelo reforço.

Figura 53 – Histograma da variação da capacidade de carga e rigidez axial em relação aos modelos sem reforço.



Fonte: Autor (2026).

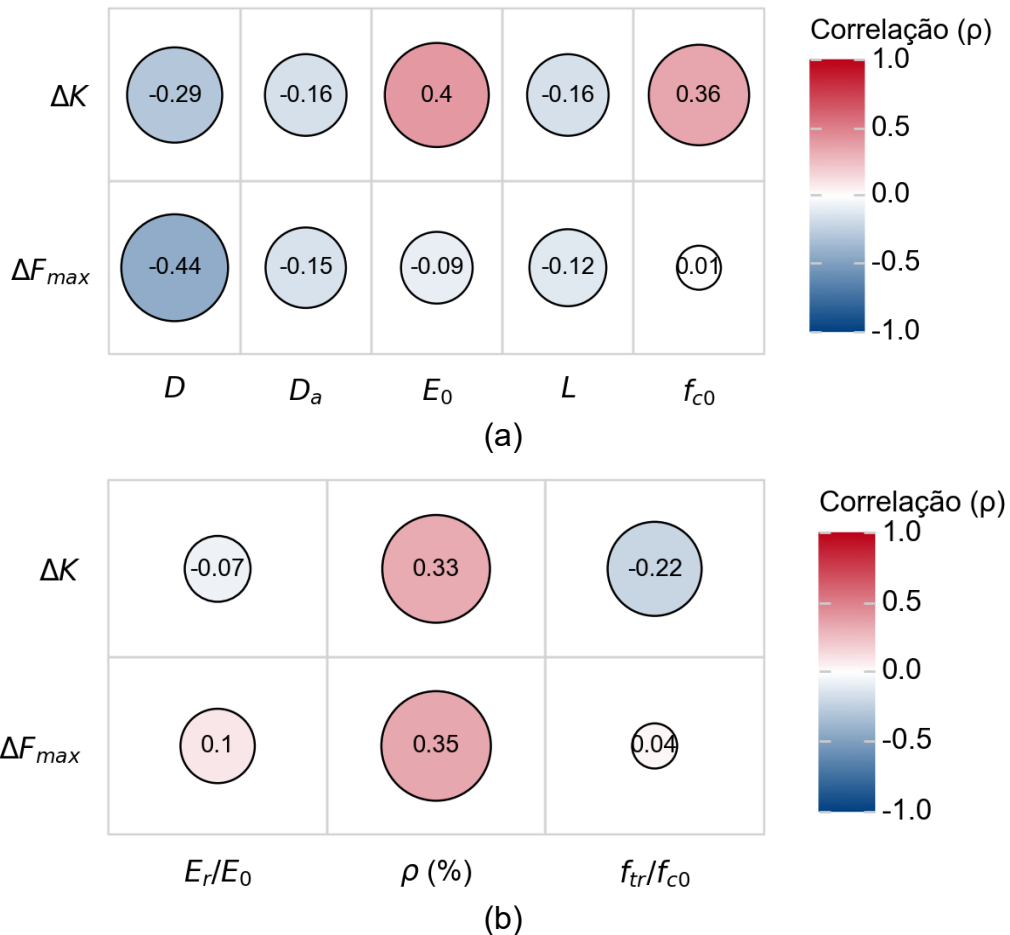
Apesar do ganho médio, destaca-se que a dispersão é distinta entre as curvas. A variação da capacidade de carga possui uma menor dispersão, indicando que os ganhos de resistência tendem a ser menos sensíveis às variações aleatórias dos parâmetros avaliados. Por sua vez, a variação de K apresentou uma dispersão elevada. Essa diferença de comportamento sugere que o mecanismo de contribuição do reforço para a rigidez é mais complexo do que para a resistência.

Esse efeito pode ser explicado pela elevada resistência e comportamento elástico linear até a ruptura dos laminados de PRF, atuando como um envelope que estabiliza o núcleo de madeira, tornando a carga de pico menos dependente de pequenas variações na rigidez local do substrato (Rashid; Bahrami, 2023).

No estudo de Ou *et al.* (2026), o confinamento gerado pelo reforço foi capaz de conter a propagação de fendas longitudinais e o esmagamento das fibras de celulose, mesmo com a presença de nós.

Em geral, foi observado um ganho médio de 4,6% para F_{max} e de 33,3% para K . O teste de Spearman para as variáveis com maior impacto na variação de K e F_{max} é apresentado na Figura 54.

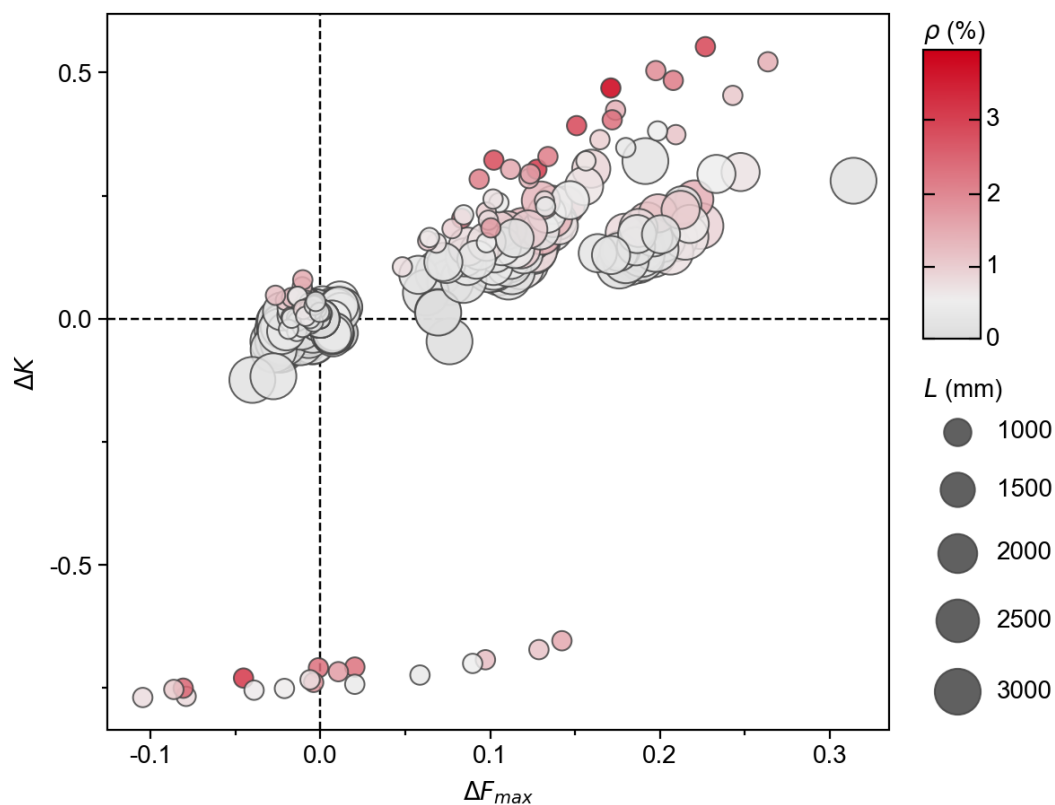
Figura 54 – Correlação de Spearman para variáveis dimensionais (a) e adimensionais (b).



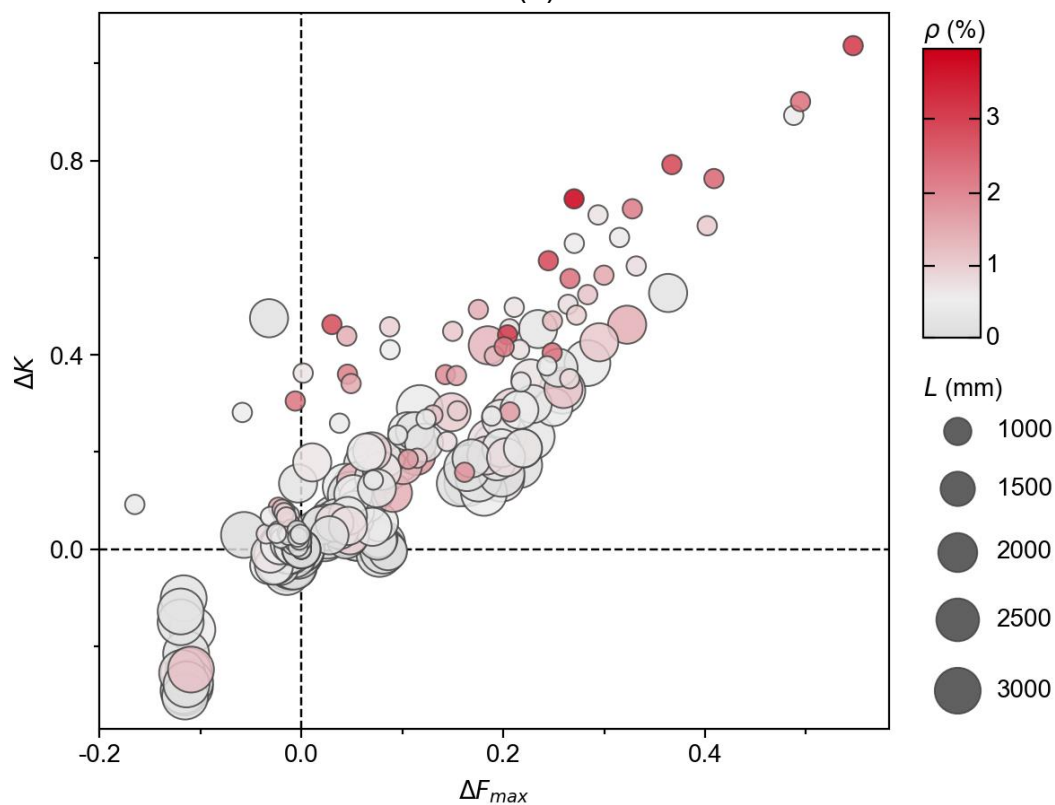
Ao contrastar os resultados observados na Figura 54 com os da Figura 50, observa-se que pilares com maior diâmetro possuem correlação negativa, indicando que a efetividade do reforço aumenta para elementos de menor diâmetro (mais esbeltos). As variáveis referentes ao reforço apresentaram correlação quase nula quando avaliadas individualmente e foram omitidas da Figura 54.

Apesar do baixo fator de correlação da maioria dos parâmetros, o acoplamento das variáveis tende a influenciar o comportamento do pilar, o que não é identificado por correlações monotônicas globais (Mahmoudabadi; Camp; Ahmad, 2026). Considerando isso, a Figura 55 compara a variação de K e F_{max} para os pilares com diferentes classes de resistência, identificando a ρ e o L de cada modelo.

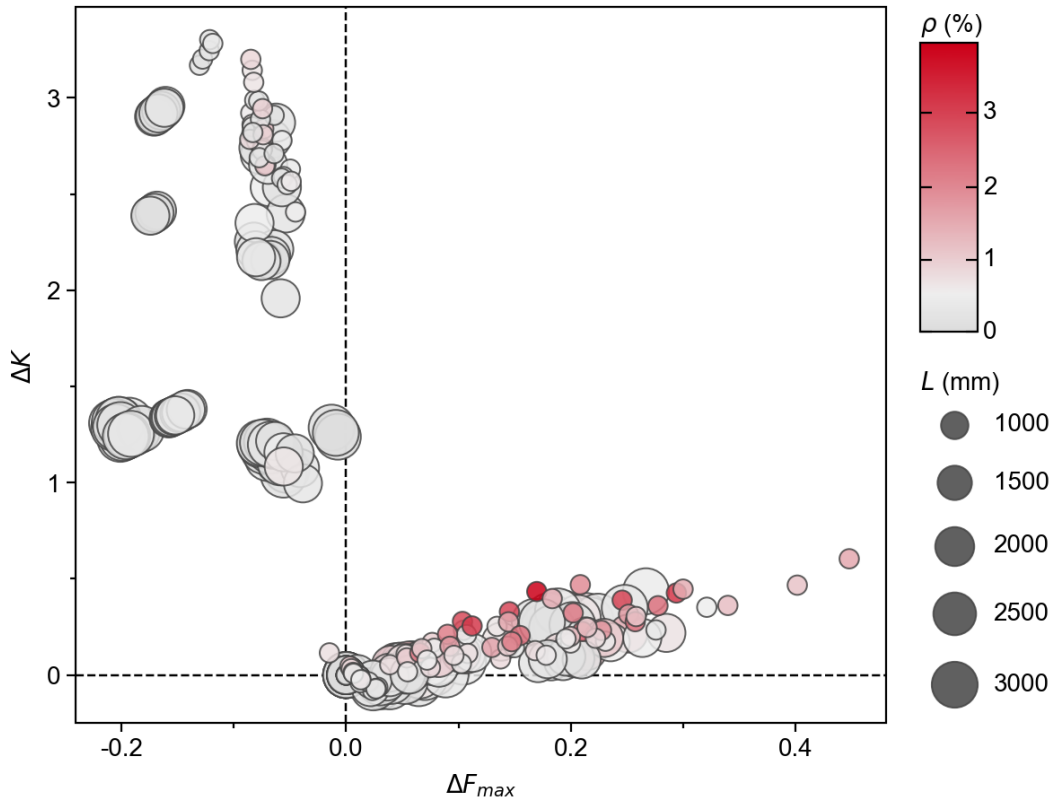
Figura 55 – Influência da taxa de reforço e comprimento do pilar na capacidade de carga e rigidez dos pilares: C20 (a), C30 (b), C40 (c) e C50 (d).



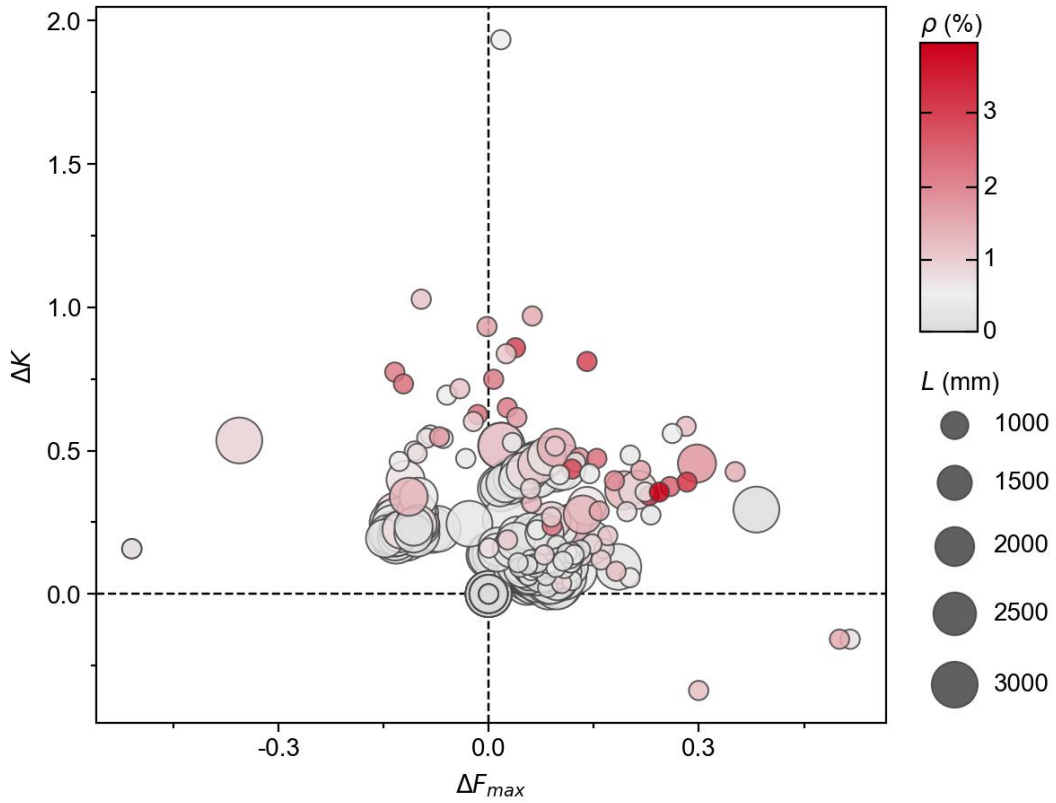
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: Autor (2026).

Avaliando a Figura 55, foi observado que os modelos situados na zona com redução mútua da capacidade de carga e rigidez axial correspondem aos pilares com maior abertura central e maior índice de esbeltez.

Destaca-se que, para os dados da classe C20, os modelos com menor esbeltez ($\lambda \cong 29,33$) apresentaram ganho discreto de rigidez axial de 0,2%, porém com redução média de 0,5% na capacidade de carga, enquanto os pilares com maior esbeltez ($\lambda = 80$) obtiveram um ganho médio de 12,5% na capacidade de carga e de 8,8% na rigidez axial.

Os modelos de classe C30 com menor esbeltez apresentaram uma redução média de 0,44% na capacidade de carga e um ganho médio de 1,3% na rigidez axial, enquanto nos pilares com maior esbeltez foi obtido um ganho de 12,4% para F_{max} e 22,4% para K .

Ao avaliar os modelos C40, foi observado que o comportamento mudou consideravelmente. Os pilares de menor esbeltez apresentaram uma redução média de 5,3% na capacidade de carga, porém a rigidez axial média aumentou em 175%. Diferente dos modelos anteriores, o desempenho dos pilares de maior esbeltez foi menos impactado pelo reforço, com ganhos médios de 12,8% e 13,5% para a capacidade de carga e rigidez axial, respectivamente.

Por sua vez, os pilares menos esbeltos da classe C50 apresentaram um ganho médio de 8,2% na capacidade de carga e de 8,8% na rigidez axial. Para os modelos mais esbeltos a capacidade de carga aumentou 2,1%, enquanto a rigidez aumentou em 37%.

A análise da Figura 55 permitiu observar que, em madeiras de classe inferior (C20/C30), o reforço proporcionou ganhos mais homogêneos (tanto para K , quanto para F_{max}), enquanto em madeiras de classe superior (C40/C50), os ganhos foram mais expressivos em propriedades específicas, porém acompanhados de uma maior sensibilidade à perda de desempenho na variável oposta. Ou seja, com o aumento da classe de resistência, foi obtido um desacoplamento entre a capacidade de carga e a rigidez axial.

A variação do comportamento dos pilares conforme o índice de esbeltez adotado neste estudo é corroborado pela literatura. Qi *et al.* (2019) observaram em seu estudo experimental que pilares de madeira com índice de esbeltez até 43,2 falharam exclusivamente por esmagamento do pilar na região de interseção para a região reforçada. Por sua vez, os pilares com $\lambda > 57$ falharam exclusivamente em

razão da instabilidade global. Com isso, a esbeltez do pilar tende a prejudicar a efetividade do reforço, mascarando os possíveis benefícios estruturais com a antecipação de fenômenos de instabilidade.

Embora a tendência central do estudo paramétrico aponte para ganhos de desempenho, foi observado modelos com ΔK ou $\Delta F_{max} < 0$. Um possível justificativa reside na concentração de tensões na transição da região reforçada (com maior rigidez) para a região sem reforço (menor rigidez). Essa concentração de tensões pode induzir um gradiente de curvatura abrupto, podendo antecipar modos de instabilidade, amplificando esforços de segunda ordem juntamente com o fator de imperfeição geométrica considerado (Timoshenko; Gere, 1963). Ou seja, para esses casos, o reforço aumenta o módulo de elasticidade equivalente da seção, mas não é capaz de mitigar a flambagem global prematura.

Lin *et al.* (2020), observaram que a variação de confinamento causado pelo reforço parcial altera a rigidez axial e comportamento global de pilares de concreto armado, com a resposta global governada pela região menos confinada.

A influência da taxa de reforço também variou conforme a classe da madeira, contribuindo em maior grau para a melhoria da rigidez para madeiras mais resistentes e de forma mais equilibrada entre K e F_{max} para madeiras com menor resistência.

Em síntese, esses resultados evidenciam que o comportamento de pilares de madeira reforçados parcialmente avaliados neste estudo possuem um comportamento complexo, não podendo ser descrito de forma satisfatória por meio de correlações diretas ou modelos lineares simples, o que justifica o emprego do modelo de regressão simbólica. Destaca-se que essa observação já foi realizada em outros estudos (Mahmoudabadi; Camp; Ahmad, 2026).

6.2 MODELOS PREDITIVOS PROPOSTOS POR REGRESSÃO SIMBÓLICA

Nesta seção são apresentadas as formulações obtidas a partir do banco de dados gerado pelo estudo paramétrico. A estrutura desta seção é composta por: análise dos modelos de regressão para o fator de instabilidade, análise dos modelos de regressão para o fator de confinamento, análise da formulação proposta para previsão da capacidade de carga e análise da formulação proposta para a previsão da rigidez axial.

6.2.1 Análise dos modelos de regressão para o fator de instabilidade

Após a primeira etapa de processamento dos modelos de regressão, foram selecionadas três equações para estimativa do fator de redução da capacidade de carga dos pilares sem reforço. Os modelos se destacaram por apresentar alto desempenho. A Equação 51 apresenta os modelos obtidos, com suas métricas individualmente apresentadas na Tabela 21. Destaca-se que a complexidade de cada equação consiste na quantidade de nós (Figura 12) necessários para compor o modelo. Outros modelos na mesma faixa de complexidade também foram gerados, porém as formulações eram semelhantes, alterando apenas casas decimais das constantes.

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_{14} &= \left(0,015 + \frac{0,26}{44,17 - \lambda_{liq}} - \varepsilon_m \right) \cdot \lambda_{liq} + \left(\frac{D_a}{D} \right)^2 \\ \chi_{18} &= 1,55 + \left[\frac{564,76 - 16,07 \cdot \lambda_{liq}}{(\lambda_{liq} - 41) \cdot \left(\lambda_{liq} + 10,55 \cdot \frac{D_a}{D} \right)} \right] - \lambda_{liq} \cdot (\varepsilon_m + 0,01) \\ \chi_{23} &= \left[\left(\frac{D_a}{D} \right)^3 - 0,73 \right] + \frac{0,006 - \frac{4,12 \cdot 10^{-5}}{\lambda_{liq}} + 6,8 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_m} + \frac{6,4}{42,4 - \lambda_{liq}} \end{aligned} \right. \quad \text{Eq. 51}$$

Tabela 21 – Métricas dos modelos obtidos para χ

Complexidade	R ² adj	MAE	MAPE (%)	RMSE	Overfitting	Teste-F	p-valor
14	0,976	0,037	6,61	0,047	0	3795	<<0,05
18	0,982	0,034	5,28	0,040	0	5116	<<0,05
23	0,987	0,027	4,89	0,034	0	7431	<<0,05

Fonte: Autor (2026)

Conforme apresentado na Tabela 21, todos os modelos gerados pelo algoritmo apresentam aderência elevada aos dados simulados, sem a presença de *overfitting*. Os testes F realizados confirmam a significância estatística dos modelos (p-valor << 0,05). Com a precisão encontrada, além da complexidade das equações, as características físicas foram avaliadas para definição do fator definitivo.

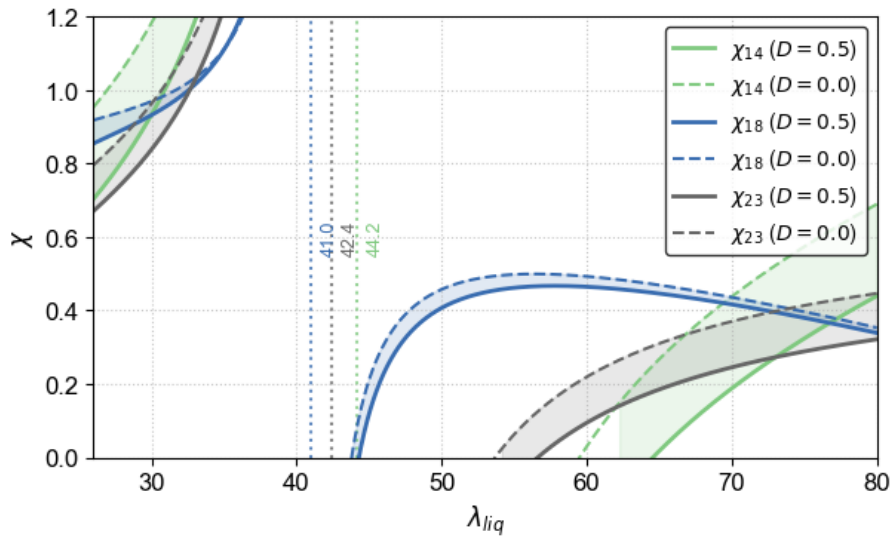
O modelo χ_{14} foi o matematicamente mais enxuto, identificando uma interação linear entre a esbeltez líquida e a deformação da madeira. Apesar disso, este modelo trata a redução de seção transversal de forma aditiva e desacoplada das demais variáveis. Isso sugere que o impacto da diminuição percentual da seção transversal é similar para qualquer valor de esbeltez.

Por outro lado, o modelo χ_{23} apresentou o melhor desempenho estatístico do conjunto. Apesar disso, essa equação possui elevada complexidade e difícil implementação prática. O ganho marginal de desempenho não justifica a elevação da complexidade. Além disso, o termo central do modelo possui constantes na ordem de 10^{-5} que são divididas sucessivamente pela deformação da madeira. Como ε_m tipicamente possui ordem de grandeza de 10^{-3} , esse escalonamento matemático pode induzir a uma hipersensibilidade numérica indesejada. Destaca-se que esse efeito é comumente observado em algoritmos de aprendizado de máquina que priorizam a minimização do resíduo em detrimento da estabilidade do modelo (Burnham; Anderson, 2002; Chapra; Canale, 2009; Trefethen; Bau, 1997).

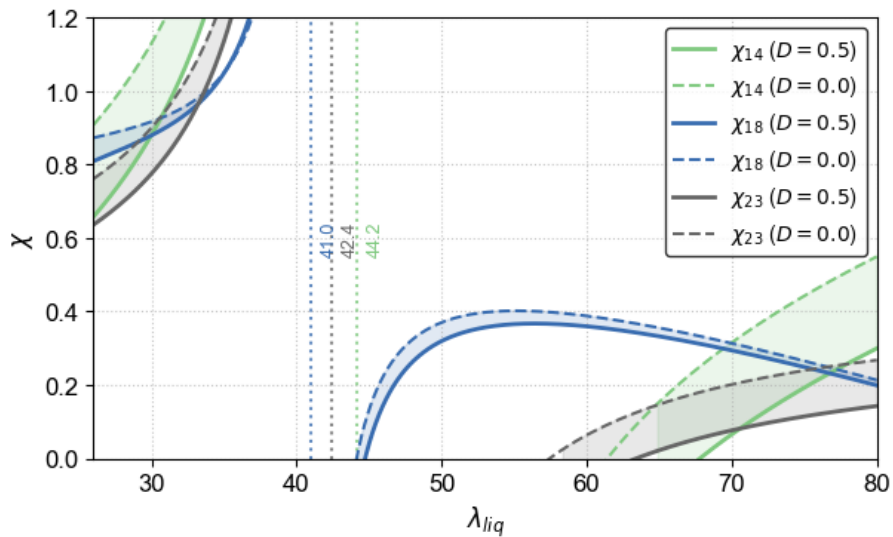
O modelo χ_{18} , por sua vez, atingiu um equilíbrio intermediário entre desempenho preditivo e coerência analítica. O modelo foi capaz de criar um acoplamento físico direto entre as variáveis, considerando a variação da influência que a redução da seção transversal possui para diferentes índices de esbeltez, traduzindo os fenômenos observados no estudo paramétrico.

Uma característica partilhada por todos os modelos foi a presença de assíntotas (Figura 56), originando singularidades matemáticas com valores assintóticos fisicamente irrealistas. Isso ocorreu, possivelmente, em razão do algoritmo ter sido capaz de identificar a transição do modo de falha dominante: esmagamento das fibras para pilares de menor esbeltez e instabilidade elástica global para pilares mais esbeltos.

Figura 56 – Funções assintóticas do fator χ : $\varepsilon_m = 2,4\text{‰}$ (a) e $\varepsilon_m = 4\text{‰}$ (b).



(a)



(b)

Fonte: Autor (2026)

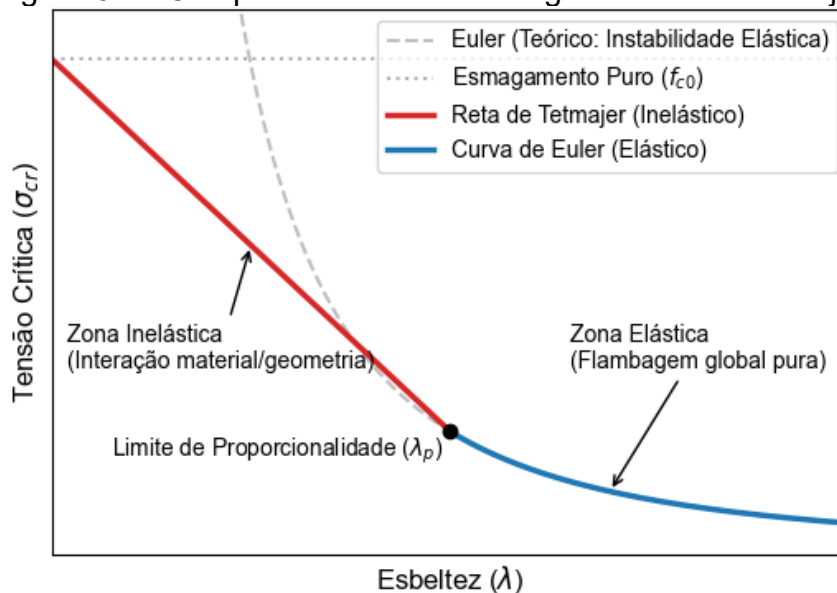
Conforme já destacado na literatura, pilares com esbeltez intermediária sofrem uma complexa interação entre o esmagamento local e instabilidade (Qi *et al.*, 2019), o que deve ter influenciado a evolução das soluções e tende a não ser representada adequadamente pelos modelos eleitos.

As curvas evidenciam o impacto mecânico da taxa de abertura (D_a/D), sendo mais evidentes nos modelos de complexidade 14 e 23. Observou-se que, no domínio à direita do polo de instabilidade, a curva do fator χ com $\varepsilon_m = 4\text{‰}$ é caracterizada por um achatamento mais severo em comparação à encontrada com $\varepsilon_m = 2,4\text{‰}$. Isso evidencia que o modelo entendeu que a menor rigidez elástica da madeira deforma o

pilar precocemente, reduzindo a carga crítica de Euler ($\chi \propto E_0 = f_{c0} \cdot \varepsilon_m^{-1}$) (Timoshenko; Gere, 1963).

Conforme demonstrado por Timoshenko e Gere (1963), pilares reais raramente falham pela flambagem pura de Euler ($\propto \lambda^{-2}$). A falha tende a ocorrer no regime inelástico, governado por uma interação entre o esmagamento do material e a amplificação dos deslocamentos transversais por imperfeições. Diferente da formulação quadrática de Euler válida apenas para peças muito longas e perfeitamente elásticas, a relação linear aproxima-se das fórmulas empíricas clássicas de transição, como a formulação linear de Tetmajer (Figura 57) para flambagem inelástica (Schneider; Vrouwenvelder, 1997; Timoshenko; Gere, 1963).

Figura 57 – Comportamento de flambagem: Euler × Tetmajer.



Fonte: Autor (2026)

Uma observação particular foi feita para o domínio de esbeltez reduzida ($\lambda_{liq} < 35$). Teoricamente, pilares curtos não estão sujeitos à instabilidade global e assumem o esmagamento pleno da seção como ação crítica, justificando a consideração de $\chi = 1$. No entanto, os modelos consideram um decréscimo não linear acentuado de capacidade nesta região.

Uma justificativa para as leituras que indiquem a necessidade de redução de desempenho para essa faixa de elementos reside na redução da seção transversal. Conforme pode ser observado na Figura 56, no domínio à esquerda, quanto menor o índice de esbeltez, maior a influência da razão D_a/D . Isso indica que o efeito de Poisson em conjunto com a redução da seção transversal conduziu a falhas

prematuras por fendilhamento longitudinal ou instabilidade local antes da ocorrência do esmagamento global da seção, conforme observado em estudos experimentais (Chen, Q. *et al.*, 2020; Liu *et al.*, 2022).

Ao avaliar pilares de seção caixão de bambu laminado colado, Su e Zou (2024) e Peng *et al.* (2023) observaram que a redução da espessura das paredes aumenta a suscetibilidade à instabilidade local, ocorrendo acoplada ao descolamento das fibras. Assim, a extrapolação do algoritmo atuou de forma conservadora, penalizando corretamente a fragilidade estrutural da parede oca.

Além dos aspectos elencados, a necessidade e complexidade da adaptação do modelo eleito deve ser considerada. Destaca-se que, com exceção da solução de complexidade 18, o fator de instabilidade aumenta proporcionalmente com a esbeltez líquida, o que é fisicamente incorreto. Espera-se que elementos mais esbeltos sejam mais suscetíveis a fenômenos de instabilidade. Portanto, o χ_{18} foi considerado o mais apto para o seguimento do estudo, porém é fundamental que seja adaptado para que possa ser empregado dentro do domínio deste estudo ($\lambda_{liq} = [26; 80]$).

A estratégia adotada para adaptação do fator eleito consistiu em segmentar a função, isolando a região de singularidade das demais, originando três possíveis fatores (Equação 52). No domínio à esquerda, definido como $\lambda_{liq} \leq 41$, não foi considerada redução por instabilidade. Ao atingir este índice de esbeltez, será definida uma função de transição válida até o valor de λ_{liq} que corresponder ao pico de χ . Isso garante o pressuposto físico de que, quanto maior o fator de esbeltez, mais susceptível aos fenômenos de instabilidade. Com isso, definiu-se um fator de transição (χ_t) por interpolação linear até a função obtida via modelo de regressão (χ_e).

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda_{liq} \leq 41 \\ \chi_t & \text{se } 41 < \lambda_{liq} \leq \lambda_t \\ \chi_e & \text{se } \lambda_{liq} > \lambda_t \end{cases} \quad \text{Eq. 52}$$

Onde,

$$\chi_t = 1 + \left(\frac{\chi_e - 1}{\lambda_t - 41} \right) \cdot (\lambda_t - 41) \quad \text{Eq. 53}$$

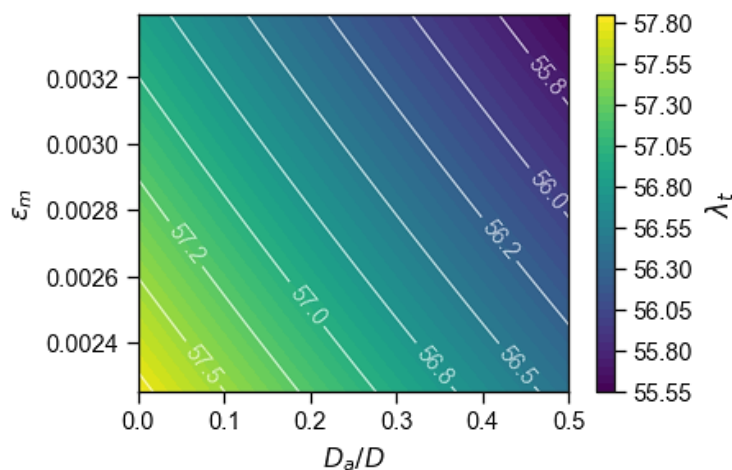
$$\chi_e = \chi_{18} = 1,55 + \left[\frac{564,76 - 16,07 \cdot \lambda_{liq}}{(\lambda_{liq} - 41) \cdot \left(\lambda_{liq} + 10,55 \cdot \frac{D_a}{D} \right)} \right] - \lambda_{liq} \cdot (\varepsilon_m + 0,01) \quad \text{Eq. 54}$$

Para determinação exata de λ_t , deve-se considerar o ponto de máximo global dentro do domínio de interesse ($\lambda_{liq} > 41$). Em geral, esse ponto pode ser obtido por meio do cálculo diferencial ao impor a condição de estacionariedade à primeira derivada (Guidorizzi, 2014). Apesar da possibilidade em aplicar essa solução, o processo de derivação do termo acoplado à parcela linear de esmagamento [$\lambda_{liq} \cdot (\varepsilon_m + c_1)$] origina uma equação polinomial de 4º grau em função de λ_{liq} .

Equações de 4º grau possuem solução algébrica exata por meio do Método de Ferrari (Hefez, 2025). Visando obter uma ordem de grandeza, com auxílio da biblioteca *Sympy*, foi elaborado um *script* em *Python* para obter a solução do polinômio, resultando em uma equação com quase 62 mil caracteres, ocupando 21 páginas. Soluções analíticas desta natureza são classificadas como inviáveis, pois, além de sua complexidade, podem mascarar comportamentos físicos por uma abstração algébrica (Kreyszig, 2016).

Com isso, foi adotado o método de Brant que consiste em uma solução numérica que combina o método da bisseção com interpolação quadrática inversa verificando se o resultado pertence ao domínio de interesse (Chapra; Canale, 2009). O método, bem como os procedimentos posteriores, foi aplicado por meio de um *script* em *Python* utilizando o módulo de otimização da biblioteca *Scipy*. Com isso, foi gerada a superfície de resposta apresentada na Figura 58.

Figura 58 – Superfície resposta de λ_t pelo método de Brant.



Fonte: Autor (2026)

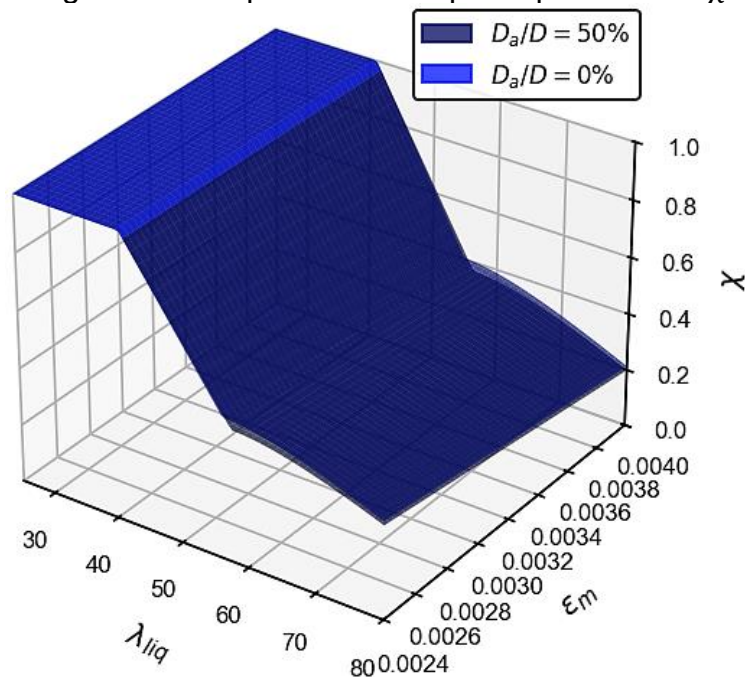
Destaca-se que o comportamento encontrado é essencialmente linear. Com isso, foi possível empregar o um modelo de regressão linear a múltiplas variáveis pelo método dos mínimos quadrados ordinários, sendo obtida a solução apresentada na

Equação 55 com um $R^2 \approx 1$, confirmando a interação linear (Montgomery; Runger, 2018).

$$\lambda_t = 59,52 - 2,69 \cdot \frac{D_a}{D} - 789,42 \cdot \varepsilon_m \tag{Eq. 55}$$

Com isso, foi possível determinar a função completa para χ , conforme apresentado na Figura 59. Destaca-se que o modelo proposto é topologicamente semelhante a outros fatores de redução por instabilidade encontrados na literatura, incluindo as observações seminais de Ayrton e Perry (1886), bem como modelos encontrados em documentos normativos (ABNT, 2024; CEN, 2005).

Figura 59 – Superfície de resposta para o fator χ .

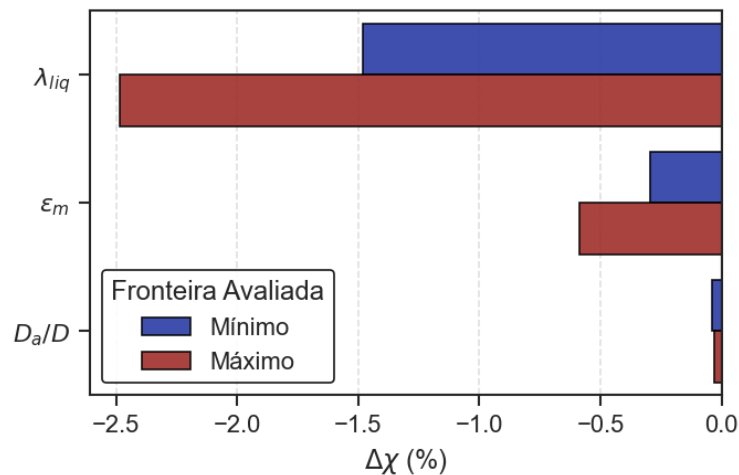


Fonte: Autor (2026)

O modelo final foi avaliado novamente quanto sua capacidade de predição e obteve um desempenho satisfatório com R^2_{adj} de 0,93, MAE = 0,06, RMSE = 0,07 e MAPE = 11,48%, além de ser fisicamente consistente (Ayrton; Perry, 1886; Schneider; Vrouwenvelder, 1997; Timoshenko; Gere, 1963). Com isso, o modelo eleito passou para a etapa de avaliação de suas variáveis.

A análise de sensibilidade local avaliou a perturbação de +1% isolada de cada parâmetro nas fronteiras inferior e superior do domínio. Conforme apresentado na Figura 60, o incremento avaliado resultou em variação negativa para todas as variáveis, sendo coerente com o comportamento físico descrito.

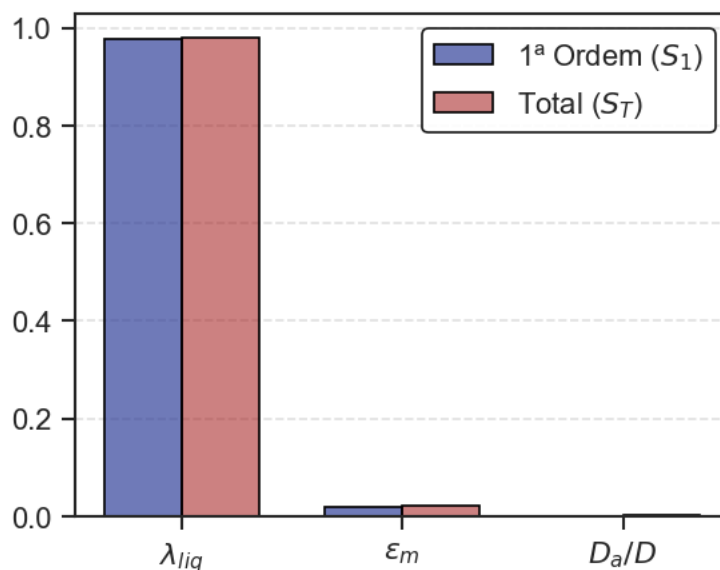
Figura 60 – Análise de sensibilidade local para uma variação de 1%.



Fonte: Autor (2026)

A análise de sensibilidade global de Sobol permitiu observar a hierarquia de dominante no comportamento dos pilares analisados. O índice de primeira ordem apontou que a esbelteza líquida é responsável direta por 97,7% da variância do sistema na zona crítica de instabilidade (Figura 61).

Figura 61 – Sensibilidade (em kN) de F_{pilar} ao variar dos parâmetros em 1%.

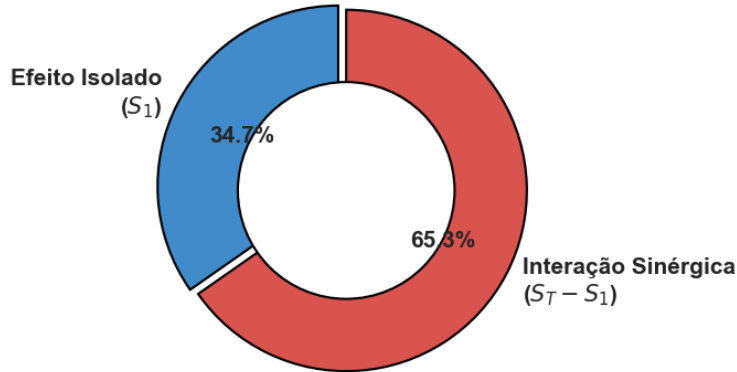


Fonte: Autor (2026)

É importante destacar o fenômeno observado na avaliação da variável de D_a/D . Embora esta variável tenha um impacto consideravelmente inferior às demais variáveis, a decomposição da variância total (Figura 62) revelou que 65,3% do impacto gerado pela abertura longitudinal na instabilidade é originado de interações sinérgicas

com a esbeltez e a deformabilidade do material, não consistindo em um efeito isolado, conforme previsto no modelo χ_{14} (Saltelli *et al.*, 2007).

Figura 62 – Efeito da interação de Da/D com outras variáveis na sensibilidade.



Fonte: Autor (2026)

6.2.2 Análise dos modelos de regressão para o fator de confinamento

Com a definição do fator de instabilidade, os resultados para o fator de confinamento (η) foram avaliados. A Equação 56 apresenta os modelos obtidos, com suas métricas individualmente apresentadas na Tabela 22. Novamente, outros modelos na mesma faixa de complexidade também foram gerados, porém as formulações eram semelhantes, alterando apenas casas decimais das constantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{17} = 1,06 + \varepsilon_m \cdot \lambda_{liq} \cdot (\lambda_{liq} - 56,78) \cdot (\rho - 55,26 \cdot \varepsilon_m + 0,21) \\ \eta_{19} = 1,06 + \varepsilon_m \cdot \lambda_{liq} \cdot [17,4 \cdot \rho - 54,88 \cdot (\lambda_{liq} - 56,42) \cdot (\varepsilon_m - 0,0039)] \\ \eta_{26} = 1,12 + \varepsilon_m \cdot \lambda_{liq} \cdot \left\{ (0,23 - 56,36 \cdot \varepsilon_m) \cdot \left[\rho \cdot \left(\frac{s}{D} \right)^2 + \lambda_{liq} - 58,9 \right] + 12,2 \cdot (\rho - \varepsilon_{PRF}) \right\} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 56}$$

Tabela 22 – Métricas dos modelos obtidos para η

Complexidade	R ² adj	MAE	MAPE (%)	RMSE	Overfitting	Teste-F	p-valor
17	0,863	0,06	78,3	0,08	0	328	<<0,05
19	0,865	0,06	85,4	0,08	0	334	<<0,05
26	0,861	0,06	93,8	0,08	0	323	<<0,05

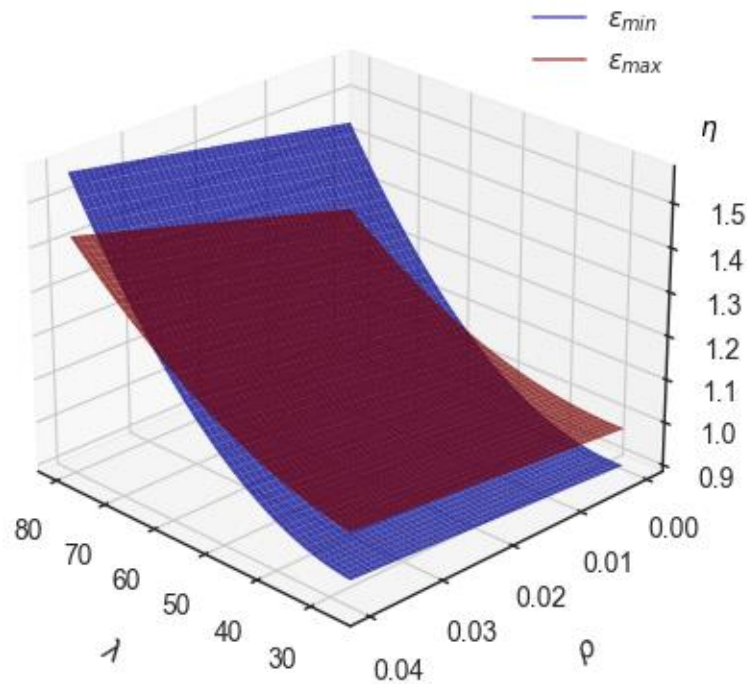
Fonte: Autor (2026)

Dentre os modelos analisados, o η_{17} se destaca por apresentar maior simplicidade. A penalização geométrica, constatada no estudo paramétrico (Figura 54), foi considerada por meio da parábola côncava $\lambda_{liq} \cdot (\lambda_{liq} - 56,78)$, enquanto a contribuição do compósito surge como uma parcela linear não-acoplada. Apesar de sua simplicidade, a ausência de um acoplamento entre a ρ e λ_{liq} sugere que o encamisamento atua de forma independente dos efeitos de segunda ordem, o que contraria as observações experimentais.

O modelo η_{26} , por outro lado, foi obtido considerando todas as variáveis informadas, o que aumentou a complexidade do polinômio de forma significativa. Apesar disso, o desempenho deste modelo é ligeiramente inferior aos demais. Isso sugere que as variáveis adicionais que foram consideradas introduziram mais ruído do que aumento na capacidade de predição. Cabe destacar que a falha não tende a ocorrer no compósito (Siha; Zhou, 2023, 2022; Siha; Zhou; Yang, 2021; Wang *et al.*, 2023; Zhou *et al.*, 2021).

Por tanto, o modelo de complexidade intermediária, η_{19} , foi considerado o modelo ideal para ser adotado (Equação 57). Esta solução apresentou o melhor ajuste de resultados, bem como foi capaz de descrever a essência do fenômeno físico do confinamento gerado pelo reforço. Além disso, o modelo é consistente em todo seu domínio, não havendo combinações que resultem em assíntotas como visto na análise do fator de instabilidade. A superfície de resposta para todo o domínio avaliado é apresentada na Figura 63.

$$\eta = \eta_{19} = 1,06 + \varepsilon_m \cdot \lambda_{liq} \cdot \left[17,4 \cdot \rho - 54,88 \cdot (\lambda_{liq} - 56,42) \cdot (\varepsilon_m - 0,0039) \right] \quad \text{Eq. 57}$$

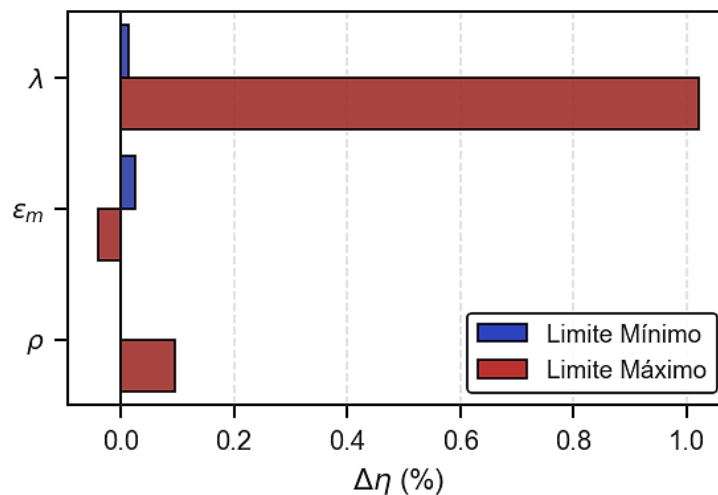
Figura 63 – Superfície de resposta de η .

Fonte: Autor (2026)

A partir da Figura 63, foi observado que, para qualquer nível de esbeltez, o aumento da taxa de reforço eleva o fator η . A inclinação das superfícies demonstra um ganho quase linear no trecho avaliado, o que é coerente com modelos clássicos de confinamento por encamisamento de PRF, bem como com a formulação discutida por Li *et al.* (2013) a partir do ensaio de para pilares similares.

Destaca-se que, nas zonas de maior taxa de reforço, a superfície correspondente à madeira mais deformável possui maior fator η que a superfície da madeira mais rígida. Isso ocorre, possivelmente, em razão da maior deformação lateral que esses pilares estão sujeitos. Por se tratar de um reforço passivo, esta dilatação lateral que mobiliza a atuação do compósito (Schober *et al.*, 2015; Sirimontree; Keawsawasvong; Thongchom, 2021). Conseqüentemente, uma espécie de madeira mais deformável ativa o compósito de forma mais eficiente, induzindo pressões radiais de confinamento superiores e justificando o maior ganho de eficiência. Isso foi confirmado na análise de sensibilidade local ao variar em 1% cada variável nos limites de seu contorno (Figura 64).

Figura 64 – Análise de sensibilidade local para uma variação de 1%.

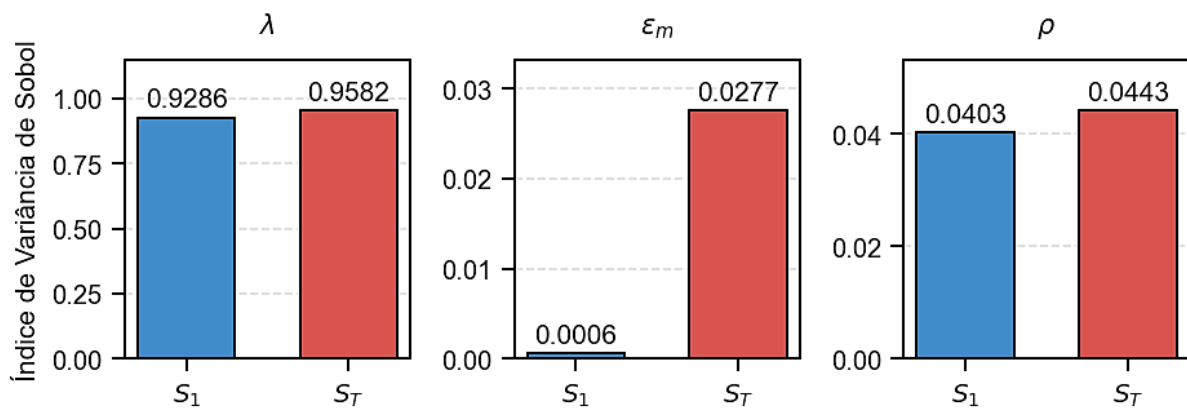


Fonte: Autor (2026)

A análise de sensibilidade local confirmou a assimetria não linear na contribuição das variáveis. Para peças mais robustas, o incremento de 1% de esbeltez resultou em um impacto quase nulo no fator de confinamento (0,02%). Porém, ao avaliar sua influência nos pilares mais esbeltos, foi observado o maior impacto desta análise, ultrapassando 1%, indicando o efeito sinérgico com as demais variáveis.

Possivelmente, o impacto absoluto de ρ ser maior no limite superior deve-se à maior magnitude física da perturbação proporcional. O valor adicional de 1% sobre uma taxa alta representa um volume absoluto maior de PRF adicionado à seção, enquanto as taxas mínimas são próximas à zero ($\rho_{min} = 0,04\%$). Isso é ilustrado de forma qualitativa na Figura 63.

A Figura 65 apresenta a decomposição global da variância calculada pelo método estocástico de Sobol. Os índices S_1 ratificam o domínio exercido pela esbeltez líquida sobre a variância do fator de confinamento, o que é coerente com a estabilidade estrutural clássica (Timoshenko; Gere, 1963). Isto confirma matematicamente que, independentemente da presença do encamisamento, a falha em pilares esbeltos de madeira é primordialmente ditada pela perda de estabilidade geométrica global, restringindo severamente a mobilização da capacidade resistente da seção transversal.

Figura 65 – Índice de variância de Sobol para η .

Fonte: Autor (2026)

Apesar disso, uma constatação importante foi a ação conjunta de ϵ_m e ρ . O efeito de ρ foi consistente e obteve uma variação marginal entre a análise de primeira ordem e a global, similar à esbeltez líquida. Por sua vez, o impacto direto de ϵ_m foi quase nulo, porém seu índice possui um aumento percentualmente expressivo na avaliação de ordem total, demonstrando o impacto dessa variável ao considerar a interação com as demais propriedades. Isso confirma que o encamisamento parcial não atua como um ganho constante e independente.

Esses efeitos corroboram e complementam estudos experimentais da literatura. Liu *et al.* (2022) observaram que o ganho de capacidade de carga não é uma função linear constante da área de encamisamento. Os autores identificaram que a taxa de incremento da resistência cresce até um limite ótimo de confinamento e, a partir desse ponto limiar, o ganho marginal decai significativamente, provando que o volume absoluto de resina e fibra não se traduz em um ganho estrutural independente e proporcional.

Ensaio conduzidos por Zhou *et al.* (2021) revelaram que o encamisamento atua na restrição de deformação transversal de forma altamente dependente do arranjo do compósito e da esbeltez. Os resultados experimentais mostraram que a eficiência do confinamento está intrinsecamente relacionada à geometria da peça.

Do ponto de vista da estabilidade geométrica, Ouyang *et al.* (2011) demonstraram matematicamente a estabilidade não linear em pilares esbeltos reforçados. O modelo de grande deflexão proposto pelos autores provou que a carga crítica de flambagem cresce de forma não linear em resposta a altas percentagens de reforço e à variação da rigidez. Isso ratifica o domínio exercido pela esbeltez global encontrado na análise de Sobol, com a presença de encamisamento parcial

modificando o campo de tensões locais, mas a mobilização total da capacidade resistente da seção continua condicionada à estabilidade elastoplástica global do pilar.

6.2.3 Análise da formulação proposta para previsão da capacidade de carga

Com a fixação da formulação para χ e η , foi possível aplicar a Equação 35 e verificar o desempenho da formulação final proposta na previsão da capacidade de carga dos modelos reforçados e sem reforço. O resultado encontrado está apresentado na Tabela 23.

Tabela 23 – Métricas dos modelos obtidos para F_{max} (Equação 35)

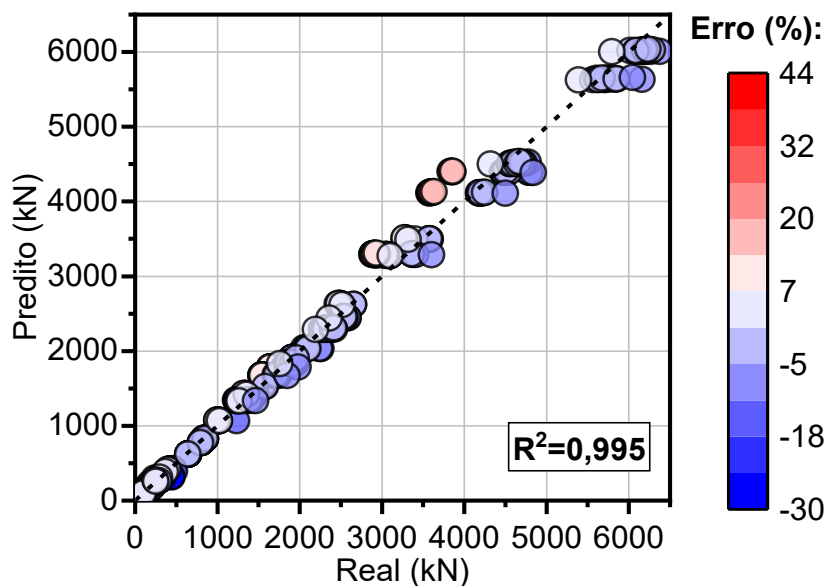
Situação	R ² adj	MAE (kN)	MAPE (%)	RMSE (kN)
Sem reforço	0,994	54,4	7,6	106,7
Reforçado	0,995	44	5,1	102,7

Fonte: Autor (2026)

Os resultados encontrados revelam uma precisão elevada da formulação proposta. O desempenho obtido foi superior até a outros estudos que adotaram regressão simbólica (Alotaibi; Islam, 2023; Megahed, 2025a, b). Isso demonstra que a estratégia adotada em segmentar o modelo em três termos (capacidade de carga líquida teórica, fator de instabilidade e fator de confinamento) foi adequada e permitiu que o algoritmo de regressão capturasse a variância do comportamento estrutural.

Ao avaliar a dispersão dos valores reais \times valores preditos (Figura 66), foi possível identificar uma forte convergência global. Em geral, a variância do erro do modelo de predição se concentra entre -30% e 44%, refletindo a complexidade do elemento simulado.

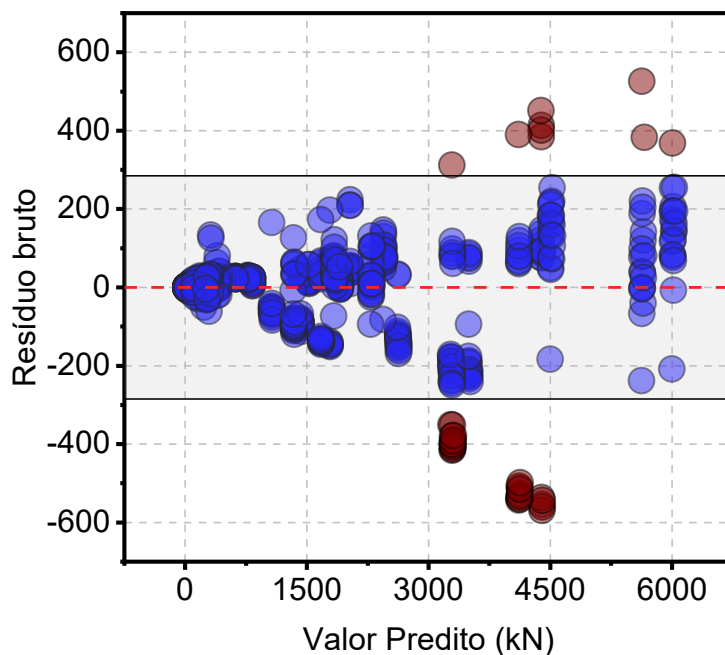
Figura 66 – Desempenho do modelo para previsão da capacidade de carga.



Fonte: Autor (2026)

Destaca-se uma sutil amplificação da variância nos patamares de cargas mais elevadas, o que é mais bem destacado na Figura 67, não comprometendo as métricas de tendência central do modelo (Tabela 23). A avaliação visual da Figura 67 confirma a adequação do modelo, com a distribuição majoritárias das medições em torno da linha de nulidade ($\pm 3 \cdot \sigma$).

Figura 67 – Dispersão: valor predito × resíduos.



Fonte: Autor (2026)

A presença de pontos fora desse intervalo consiste em 4,8%. Ao analisar esses modelos, foi observado que se trata de peças com $\lambda_{liq} \leq 30$, sem abertura ou com abertura de 25%, todas reforçadas. Isso indica que o fator de instabilidade correspondente é 1 e, com isso, a penalidade atribuída aos modelos se deu exclusivamente pela consideração da área líquida da seção transversal e a concentração das tensões na interface da madeira com o reforço influenciou esse resultado.

A limitação encontrada pode ser justificada pelo efeito de escala, uma vez que são modelos que são os modelos que mais se aproximam de elementos volumétricos. O efeito de escala, ou teoria do elo mais fraco de Weibull, descreve como a força de um sistema consiste em uma distribuição exponencial cumulativa, com a resistência (f) dependendo da dimensão do elemento (D) elevada ao número de dimensões do sólido (n_d) dividido por um coeficiente (m) empírico ($f \propto D^{-nd/m}$) (Weibull, 1951). Ao avaliar esse efeito em elementos de madeira, a literatura atesta que peças curtas solicitadas predominantemente à compressão paralela apresentam elevadas variâncias axiais, justificando os resíduos leptocúrticos observados na calibração do modelo (Walley; Rogers, 2022).

6.2.4 Análise da formulação proposta para previsão da rigidez axial

A avaliação inicial dos fatores obtidos, ao comparar com os fatores necessários [$\kappa_{necessário} = K_{numérico} / (E_0 \cdot A_{liq} / L)$] apresentou um limite de ajuste com $R^2 \leq 0,45$, mesmo com 24h de processamento. Além disso, foi constatado que os modelos com melhor ajuste possuíam uma topologia e conseqüente superfície de resposta quase idêntica.

Esse limite pode ser justificado em razão da elevada dispersão da variação da rigidez axial (Figura 53). Ao avaliar os valores de $\kappa_{necessário}$, foi observado que os valores variavam entre 0,58 e 1,26, com um valor médio de 0,94. A elevada dispersão evidencia que existem diversas não linearidades que afetam os pilares reforçados e apenas um fator adicional não seria capaz de prever esses fenômenos isoladamente.

Inicialmente, destaca-se que a aplicação pura da mecânica clássica (Equação 36) subestima a rigidez axial dos pilares avaliados neste estudo, em média, em 6%, operando contra a margem de segurança. Ainda assim, ao avaliar o desempenho da

formulação sem o fator κ , foi identificado um desempenho elevado, conforme apresentado na Tabela 24, confirmando o leve subdimensionamento do modelo.

Tabela 24 – Métricas da formulação clássica para K .

R²adj	MAPE (%)	RMSE (kN/mm)	Bias (kN/mm)
0,996	8,78	10,27	+5,7

Fonte: Autor (2026)

Apesar disso, e apesar do baixo ajuste ao comparar o fator κ proposto com o $\kappa_{necessário}$, ao incorporar o κ na formulação clássica foi constatada uma melhoria de desempenho e a correção do problema de superestimativa original (Tabela 25).

Tabela 25 – Métricas da formulação para K com fator κ .

R²adj	MAPE (%)	RMSE (kN/mm)	Bias (kN/mm)
0,998	4,75	7,7	-0,26

Fonte: Autor (2026)

Ao observar os dados obtidos, não apenas a variação global do erro foi mitigada, com destaque para a redução de aproximadamente 25% no RMSE e 54% no MAPE, como a tendência de superestimativa foi anulada. Esses achados justificam o emprego do fator κ proposto, conforme Equação 58.

$$\kappa = 1,05 + \lambda_{liq} \cdot \left(\rho^2 + 0,0025 \cdot \frac{D \cdot E_{PRF} \cdot \epsilon_{PRF}}{E_0 \cdot b_{PRF}} - 0,003 \right) \quad \text{Eq. 58}$$

Ao avaliar a topologia do modelo proposto, foi observado que a eficácia do reforço é governada pelo contraste entre a rigidez relativa entre os materiais (E_{PRF}/E_0) e a relação geométrica do pilar (D/b_{PRF}) na mobilização da deformação do reforço. Além disso, destaca-se o acoplamento de λ_{liq} com as demais variáveis, traduzindo a interação observada no comportamento do elemento.

A consideração de ρ^2 atua como um fator de penalização. Ele indica de forma explícita que o ganho de rigidez não cresce infinitamente com a adição de camadas

de polímero. Taxas de reforço excessivas podem precipitar o colapso por concentrações de tensões na interface madeira-reforço antes da mobilização de toda a sua capacidade elástica, conforme observado na avaliação do fator η .

Além disso, observa-se que o algoritmo foi capaz de identificar a Lei de Hooke para o reforço ($E_{PRF} \cdot \varepsilon_{PRF}$), o que indica que o modelo não se trata apenas de um ajuste estatístico, mas de um modelo com significado físico. Sabendo que os compósitos de PRF exibem um comportamento elástico-linear estrito até à ruptura (Albuja-Sánchez; Damián-Chalán; Escobar, 2024), o produto destas duas variáveis é a formulação exata da Lei de Hooke para a tensão última de tração do reforço.

Isto comprova que o modelo preditivo estabeleceu, de forma autônoma, que a restrição à expansão transversal da madeira independe puramente da adição volumétrica de material. Em vez disso, é ditada pela capacidade máxima de tração do encamisamento ($f_{t,PRF}$), normalizada pela rigidez axial da madeira (E_0), e ponderada pela relação geométrica local do reforço parcial (D/b_{PRF}).

6.3 COMPARAÇÃO DO MODELO PREDITIVO PROPOSTO COM MODELOS DA LITERATURA

Com a revisão sistemática apresentada no Capítulo 3, foi possível identificar duas equações já propostas em trabalhos anteriores que podem ser aplicadas em pilares de madeira com abertura longitudinal reforçados parcialmente com PRF para estimativa da capacidade de carga: a Equação 24, proposta por Dong *et al.* (2015b), e a Equação 25, proposta por Liu *et al.* (2022). Neste capítulo, a previsão do desempenho do modelo de regressão proposto para F_{max} foi comparada com os resultados obtidos com as equações de Dong *et al.* (2015b) e Liu *et al.* (2022).

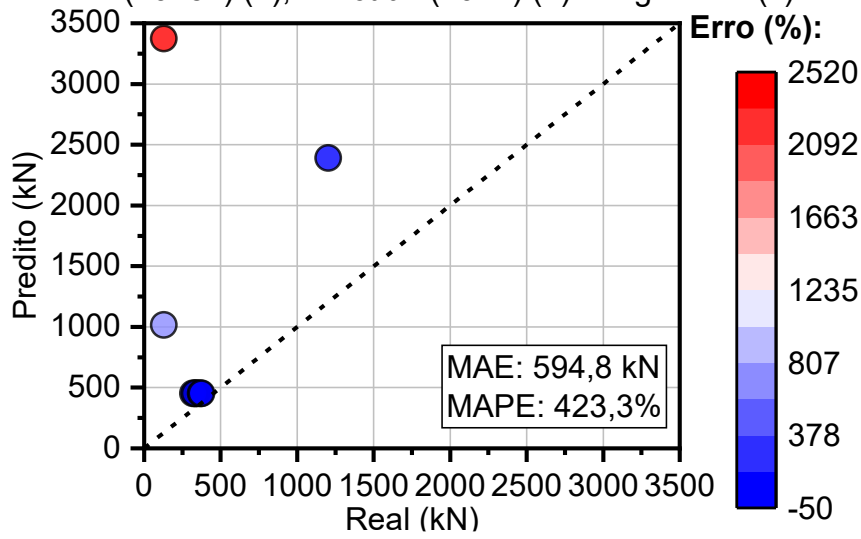
Foram identificados 9 pilares que possuíam dados suficientes para serem avaliados. Ao aplicar as equações da literatura e o modelo de regressão escolhido para a estimativa da capacidade de carga, foi possível encontrar os resultados apresentados na Tabela 26. Os resultados obtidos são apresentados graficamente na Figura 68. Ressalta-se que não foram encontradas equações na literatura para previsão da rigidez axial.

Tabela 26 – Análise do erro na predição da capacidade de carga de pilares analisados experimentalmente

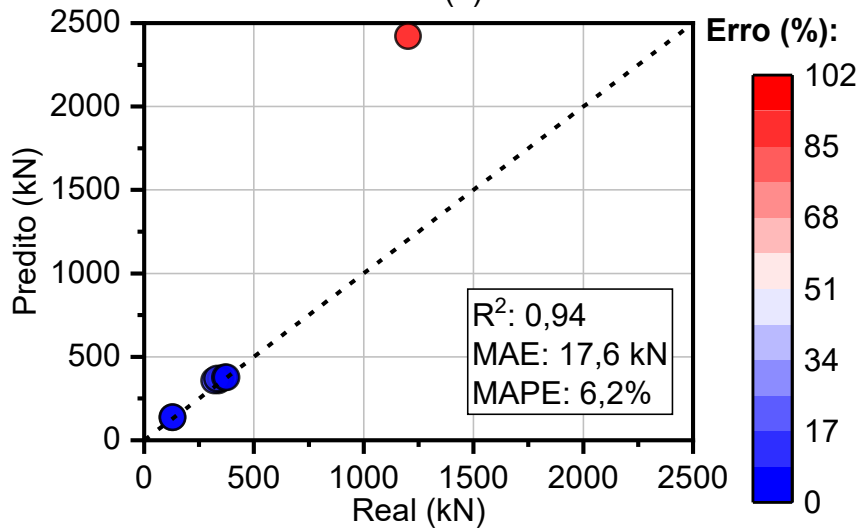
ID	Referência	Capacidade de carga (kN)				Erro (%)		
		Experimental	Dong <i>et al.</i> (2015b)	Liu <i>et al.</i> (2022)	Regressão	Dong <i>et al.</i> (2015b)	Liu <i>et al.</i> (2022)	Regressão
TC-0-S	Siha, Zhou e Yang (2021)	1202,47	2390,08	2423	1061,49	99	102	12
ZRC2-1	Liu <i>et al.</i> (2022)	338,13	450,84	358	326,56	33	6	3
ZRC2-2	Liu <i>et al.</i> (2022)	319,57	450,84	358	326,56	41	12	2
ZRC3-1	Liu <i>et al.</i> (2022)	348,21	450,84	369	326,56	29	6	6
ZRC3-2	Liu <i>et al.</i> (2022)	331,79	450,84	369	326,56	36	11	2
ZRC4-1	Liu <i>et al.</i> (2022)	367,67	450,84	376	352,78	23	2	4
ZRC4-2	Liu <i>et al.</i> (2022)	374,99	450,84	376	352,78	20	0	6
CFRP	Wang <i>et al.</i> (2023)	127,88	1014,30	136	83,92	693	7	34
CFRP	Wang <i>et al.</i> (2023)	129,25	3373,92	136	89,41	2510	5	31

Fonte: Autor (2026).

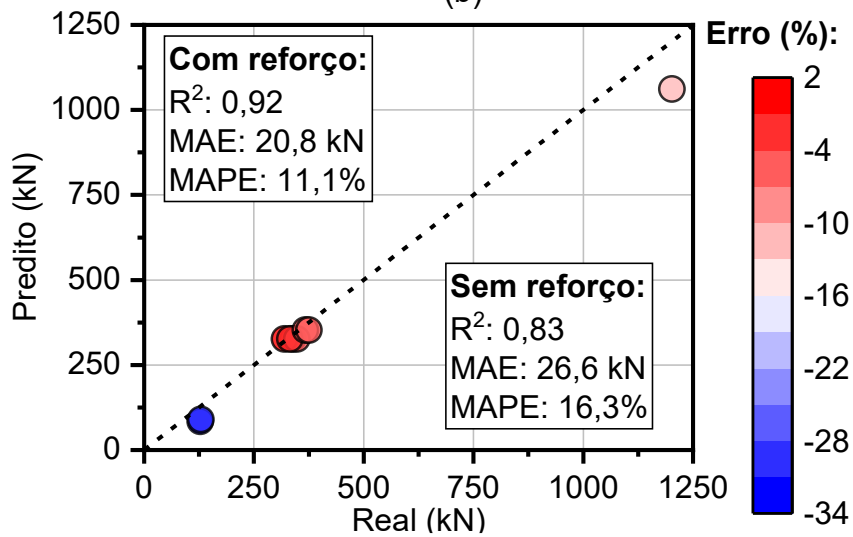
Figura 68 – Gráfico de dispersão da previsão da capacidade de carga: Dong *et al.* (2015b) (a), Liu *et al.* (2022) (b) e regressão (c).



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2026).

Ao analisar o desempenho dos modelos existentes, foi identificado que o modelo elaborado por Dong *et al.* (2015b) foi o que apresentou pior capacidade de predição, tendendo a superestimar o desempenho dos pilares. Destaca-se que o modelo dos autores foi elaborado para pilares robustos ($\lambda \approx 10,7$), enquanto a maior parcela dos pilares catalogados possui 35 e 80 de índice de esbeltez.

O modelo de Liu *et al.* (2022), por sua vez, apresentou um desempenho elevado, superando o modelo proposto por regressão simbólica. Isso se deve, principalmente, em razão de seis dos nove pilares selecionados terem sido ensaiados por eles e, com isso, compõe a base de dados para a proposta de equação dos autores. Ainda assim, este modelo obteve um excelente desempenho ao estimar as amostras de Wang *et al.* (2023).

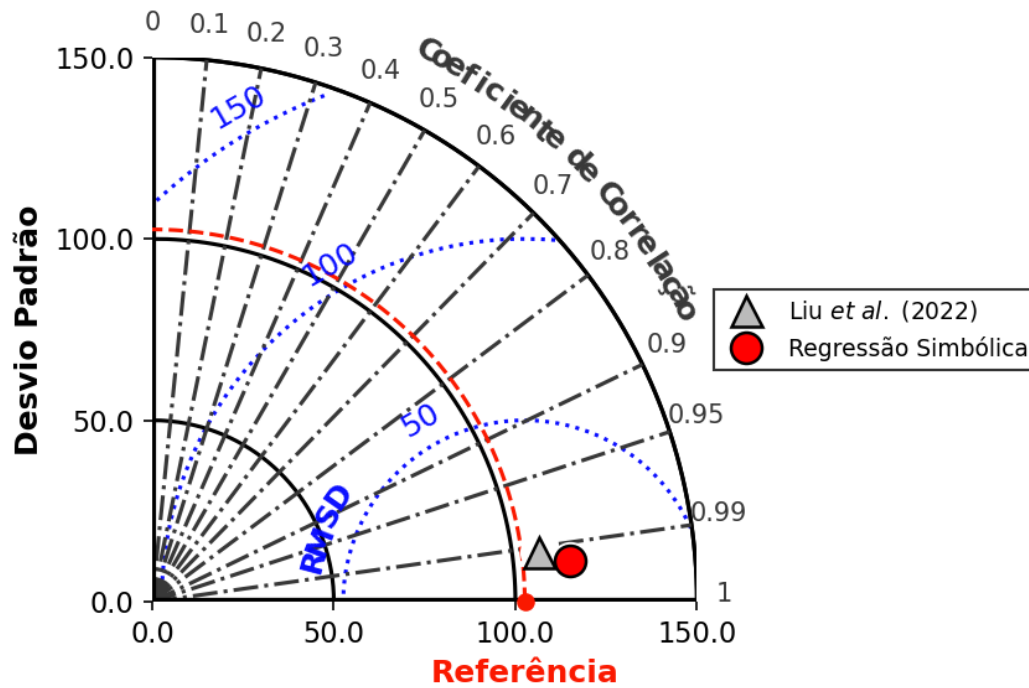
A formulação proposta por Liu *et al.* (2022) consiste na adaptação do documento normativo chinês (SAC, 2017) e é dependente de diversos fatores presentes no documento, calibrados para a realidade da região. Os pilares ensaiados por Wang *et al.* (2023) também tem origem chinesa. Ou seja, o modelo não foi elaborado para ser uma solução universal, mas sim adaptado à realidade local e, possivelmente por isso, também foi capaz de prever com precisão a capacidade de carga dos pilares de Wang *et al.* (2023). A falta de dados de outra origem não permitiu que o método fosse testado com outras espécies de madeira.

Ainda assim, o modelo proposto neste estudo, calibrado com os resultados do estudo paramétrico via elementos finitos, apresentou elevada concordância entre o resultado experimental e o valor predito. Isso reforça que a estratégia adotada foi adequada e, ainda que com uma base de dados escassa, é eficiente na previsão da capacidade de carga de pilares com reforço parcial.

Destaca-se que os demais modelos tendem a superestimar a capacidade de carga, sendo, portanto, contra a segurança da estrutura e exigindo coeficientes de ponderação mais elevados. Apesar do elevado ajuste, a variação encontrada para o modelo baseado em regressão simbólica tende a estimar a capacidade de carga de forma ligeiramente conservadora, estando assim, a favor da segurança.

Por fim, a Figura 69 apresenta o diagrama de Taylor, destacando o desempenho dos modelos com melhor desempenho na previsão da capacidade de carga dos pilares catalogados na Tabela 26.

Figura 69 – Diagrama de Taylor do modelo proposto e do de Liu *et al.* (2022).



Fonte: Autor (2026).

Ao examinar o Diagrama de Taylor, observou-se a proximidade dos modelos em relação ao ponto de referência, que representa os dados experimentais. Ambos os modelos exibem um desempenho estatístico robusto, situando-se na faixa de coeficiente de correlação elevado ($> 0,99$) e reduzido erro quadrático médio centrado ($\text{RMSD} < 50$).

O modelo de Liu *et al.* (2022) posiciona-se ligeiramente mais próximo da referência, apresentando um desvio padrão muito próximo ao real, o que confirma o elevado ajuste decorrente do viés de calibração com os seus próprios ensaios. Em contrapartida, o modelo proposto por regressão simbólica demonstra uma correlação marginalmente superior e um RMSD controlado, embora exiba um desvio padrão ligeiramente superior ao da referência.

Esse comportamento traduz a sensibilidade do modelo em absorver a variabilidade dos dados sem comprometer a tendência geral, consolidando a regressão simbólica como uma alternativa estatisticamente confiável e segura para o dimensionamento estrutural.

7 CONCLUSÕES

7 CONCLUSÕES

Neste estudo, foi realizada uma investigação abrangente e sistematizada sobre o desempenho de pilares de madeira com abertura longitudinal e reforço parcial com PRF. Por meio do emprego de técnicas de programação e simulação numérica, foi possível propor equações para previsão da capacidade de carga e rigidez axial desses pilares, considerando uma robusta base de dados (1368 pilares), com sua eficácia avaliada ao conseguir prever com boa precisão ($R^2 = 0,92$) pilares ensaiados por outros estudos.

Destaca-se que a quantidade de pilares disponíveis na literatura para realizar essa análise, bem como a distribuição de seus parâmetros, não permite que sejam obtidas conclusões a respeito da eficiência do modelo em elementos reais. Apesar disso, esta avaliação preliminar indica que o modelo tem potencial de aplicação e deve ser estudado com apoio de campanhas experimentais.

A avaliação do estudo paramétrico revelou que a resposta estrutural de pilares danificados e reforçados é governada por uma interação não linear entre a esbeltez do elemento, a taxa volumétrica de reforço e a severidade do dano transversal. Observou-se que a adição de PRF não resulta em um ganho universal e monotônico de desempenho para todas as configurações.

Confirmou-se que a eficácia do reforço é fundamentalmente ditada pelo modo de colapso dominante. Em pilares com baixa esbeltez, a falha é governada pelo esmagamento das fibras e por concentrações de tensões na interface entre a madeira e o compósito. Nestes casos, o incremento excessivo de reforço demonstrou eficiência reduzida, possivelmente devido ao Efeito de Escala de Weibull, que precipita falhas localizadas antes da mobilização total da área da seção.

Para peças esbeltas, onde a instabilidade global domina a falha, o reforço apresenta um papel de estabilização. Os resultados sugerem que a aplicação do reforço com PRF é mais eficiente quando se utilizam baixas taxas volumétricas, com a finalidade primária de gerar confinamento local e mitigar deformações transversais precoces no entorno da descontinuidade geométrica, em vez de atuar como um incremento puramente resistente de seção.

A aplicação da regressão simbólica provou atuar como uma ferramenta eficiente de descoberta mecânica, capaz de gerar modelos interpretáveis. Além disso,

a estratégia para a composição do modelo para previsão da capacidade de carga se mostrou eficaz e conduziu a resultados com elevado desempenho.

O modelo gerado para o fator de redução χ quantificou com rigor a penalidade imposta pela descontinuidade geométrica. A regressão identificou autonomamente que a perda de seção não atua de forma linear, capturando o efeito tridimensional da concentração de tensões gerada pela abertura longitudinal e ajustando a degradação da capacidade portante de forma proporcional à razão diametral do dano.

A formulação do fator de confinamento η capturou a complexa transição e interação entre os modos de colapso. O modelo incluiu, como limitador analítico, a penalização de segunda ordem sobre taxas elevadas de reforço, representando um limite decorrente da concentração de tensão na interface reforço-madeira. Demonstrou-se que o confinamento só é plenamente mobilizado quando ponderado pela esbeltez líquida do elemento.

Quanto ao fator de rigidez axial κ , o estudo preencheu uma lacuna significativa na literatura ao propor uma formulação inédita para estimar a rigidez axial de pilares de madeira com reforço parcial. O algoritmo deduziu que a restrição à expansão transversal da madeira independe da simples adição de volume de material, sendo fortemente condicionada pela superfície de resposta não linear ditada pela instabilidade. O modelo apresentou alta aderência para capturar a complexa recuperação elástica propiciada pelo encamisamento.

Apesar disso, foi identificado que o efeito do reforço parcial é mais complexo para a rigidez axial e que fenômenos altamente não lineares podem ser analisados isoladamente para poder melhorar a compreensão desse comportamento.

Diante da delimitação deste trabalho e os resultados obtidos, para estudos futuros, sugere-se:

- Realização de ensaios laboratoriais para comprovação experimental dos achados deste estudo;
- Realização de estudo paramétrico considerando pilares submetidos à flexocompressão;
- Avaliação experimental de pilares de madeira folhosa com reforço parcial para verificação da possibilidade de uso dos modelos propostos ou proposição de um coeficiente de adaptação.

- Ampliação das simulações realizadas considerando: pilares de seção retangular, outros tipos de fibras reforçadoras, madeiras folhosas e outras classes de resistência.
- Fatores adicionais para prever a concentração de tensão em pilares robustos devem ser avaliados.
- Aprofundar a análise da rigidez axial e propor novos fatores baseados nos fenômenos críticos.

REFERÊNCIAS

8 REFERÊNCIAS

ABADEL, A. A.; KHAN, M. I.; MASMOUDI, R. Axial capacity and stiffness of post-heated circular and square columns strengthened with carbon fiber reinforced polymer jackets. **Structures**, vol. 33, no. January, pp. 2599–2610, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.05.081>. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.05.081>.

ABDUSALAMOV, R.; HILLGÄRTNER, M.; ITSKOV, M. Automatic generation of interpretable hyperelastic material models by symbolic regression. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 124, no. 9, pp. 2093–2104, 2023. Available at: <https://doi.org/10.1002/nme.7203>.

AGAPITOS, A.; LOUGHRAN, R.; NICOLAU, M.; LUCAS, S.; O'NEILL, M.; BRABAZON, A. A survey of statistical machine learning elements in genetic programming. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 23, no. 6, pp. 1029–1048, 2019. Available at: <https://doi.org/10.1109/TEVC.2019.2900916>.

AL-MASHGARI, H.; LIU, X.; NGYUEN, T.; NGO, T. Performance, methodology and opportunities in FRP strengthening techniques for timber structures: A state-of-the-art review. **Journal of Building Engineering**, vol. 98, no. June, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2024.111073>.

ALBUJA-SÁNCHEZ, J.; DAMIÁN-CHALÁN, A.; ESCOBAR, D. Experimental Studies and Application of Fiber-Reinforced Polymers (FRPs) in Civil Infrastructure Systems: A State-of-the-Art Review. **Polymers**, vol. 16, no. 2, 2024. Available at: <https://doi.org/10.3390/polym16020250>.

ALDABAGH, S.; HOSSAIN, F.; ZHOU, L.; ALAM, M. S. Accuracy and uncertainty of predicted maximum and residual displacements of RC bridge columns under earthquake excitations. **Engineering Structures**, vol. 314, no. May, p. 118342, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118342>. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118342>.

ALMEIDA, J. P. B. **Modelos para estimativa da resistência característica à**

tração inclinada de madeiras folhosas. 2022. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Universidade Federal de São Carlos., 2022. .

ALMEIDA, J. P. B.; COUTO, N. G.; AQUINO, V. B. de M.; WOLENSKI, A. R. V.; PEIXOTO, R. G.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Relações entre propriedades de rigidez para distintas solicitações mecânicas visando projetos de estruturas de madeira. **Ambiente Construído**, vol. 20, no. 2, pp. 25–35, 8 May 2020. Available at: <https://doi.org/10.1590/s1678-86212020000200385>.

ALOTAIBI, K. S.; ISLAM, A. B. M. S. Symbolic Regression Model for Predicting Compression Strength of Prismatic Masonry Columns Confined by FRP. **Buildings**, vol. 13, no. 2, p. 509, 13 Feb. 2023. Available at: <https://doi.org/10.3390/buildings13020509>.

ALVES FILHO, A. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE - análise não linear**. São Paulo: Érica, 2012.

ALVES, L. F.; PESSÔA, P. D. M.; JARDIM, P. I. L. G.; FAUSTINO, E.; DOS SANTOS, H. F.; LAHR, F. A. R.; DE ALMEIDA, D. H.; CHRISTOFORO, A. L. Numerical Evaluation of the Influence of Using Carbon-Fiber-Reinforced Polymer Rebars as Shear Connectors for Cross-Laminated Timber–Concrete Panels. **Buildings**, vol. 14, no. 7, p. 2178, 15 Jul. 2024. DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings14072178>. Available at: <https://www.mdpi.com/2075-5309/14/7/2178>.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **440.2R-17: Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures**. Farmington Hills: American Concrete Institute, 2017. Available at: <https://doi.org/10.14359/51700867>.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 440.1R: Guide for the design and construction of structural concrete reinforced with fiber-reinforced polymer (FRP) bars**. Farmington Hills: American Concrete Institute, 2015.

AMRAN, Y. H. M.; ALYOUSEF, R.; RASHID, R. S. M.; ALABDULJABBAR, H.;

HUNG, C.-C. Properties and applications of FRP in strengthening RC structures: A review. **Structures**, vol. 16, no. July, pp. 208–238, Nov. 2018. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2018.09.008>.

ANGELIS, D.; SOFOS, F.; KARAKASIDIS, T. E. Artificial Intelligence in Physical Sciences: Symbolic Regression Trends and Perspectives. **Archives of Computational Methods in Engineering**, vol. 30, no. 6, pp. 3845–3865, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11831-023-09922-z>. Available at: <https://doi.org/10.1007/s11831-023-09922-z>.

AQUINO, V. B. de M.; SOARES, L. S. Z. R.; RUTHES, H. C.; ARROYO, F. N.; FRAGA, I. F.; LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L. Evaluation of moisture content variation on strength and stiffness properties of Cedrella sp. wood specie. **International Engineering Journal**, vol. 75, no. 2, pp. 111–116, 2022. Available at: <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1590/0370-44672021750069>.

ARRIAGA, F.; WANG, X.; ÍÑIGUEZ-GONZÁLEZ, G.; LLANA, D. F.; ESTEBAN, M.; NIEMZ, P. Mechanical Properties of Wood: A Review. **Forests**, vol. 14, no. 6, 2023. Available at: <https://doi.org/10.3390/f14061202>.

ARROYO, F. N.; LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L. Influência do tamanho da malha em simulações numéricas via elementos finitos. **Revista Internacional de Ciências**, vol. 12, no. 2, pp. 95–107, 31 Aug. 2022. DOI: <https://doi.org/10.12957/ric.2022.63559>. Available at: <https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/ric/article/view/63559>.

ASSIS, L. F.; PEDREIRO, M. R. de M.; JARDIM, P. I. L. G.; SANTOS, H. F. dos; CHRISTOFORO, A. L. Análise de vigas de madeira reforçadas com barras de FRP pela técnica NSM. **Matéria (Rio de Janeiro)**, vol. 29, no. 2, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1590/1517-7076-rmat-2024-0160>.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 7190-1: Projeto de estruturas de madeira. Parte 1: Critérios de dimensionamento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2022a.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 7190-3: projeto de estruturas de madeira. Parte 3: métodos de ensaio para corpos de prova isentos de defeitos para madeiras de florestas nativas**. Rio de Janeiro: ABNT, 2022b.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações**. Rio de Janeiro: ABNT, 2024.

AYRTON, W. E.; PERRY, J. On Struts. **The Engineer**, vol. 24, no. Dec., pp. 513–514, 1886.

BAI, Y.; KELLER, T. Shear Failure of Pultruded Fiber-Reinforced Polymer Composites under Axial Compression. **Journal of Composites for Construction**, vol. 13, no. 3, pp. 234–242, 2009. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)cc.1943-5614.0000003](https://doi.org/10.1061/(asce)cc.1943-5614.0000003).

BALANCO, G. G.; RODRIGUES, E. F. C.; AQUINO, V. B. de M.; PANZERA, T. H.; LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO, A. L. Influence of reinforcement on wood tensile strength submitted to weathering. **Revista Arvore**, vol. 45, 23 Aug. 2021. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-908820210000026>. Available at: <http://www.scielo.br/j/rarv/a/xdZjfGzrPqcdvm3dRPjKW3r/?lang=en>. Accessed: 7 Feb. 2022.

BAÑO, V.; ARRIAGA, F.; GUAITA, M. Determination of the influence of size and position of knots on load capacity and stress distribution in timber beams of *Pinus sylvestris* using finite element model. **Biosystems Engineering**, vol. 114, no. 3, pp. 214–222, 2013. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2012.12.010>.

BJÖRDAL, C. G.; ELAM, J. Bacterial degradation of nine wooden foundation piles from Gothenburg historic city center and correlation to wood quality, environment, and time in service. **International Biodeterioration & Biodegradation**, vol. 164, p. 105288, Oct. 2021. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ibiod.2021.105288>.

BOLINA, F. L.; TUTIKIAN, B. F.; HELENE, P. R. do L. **Patologia de estruturas**. São

Paulo: Oficina de Textos, 2019.

BRANCO, J.; DIETSCH, P.; TANNERT, T. **Reinforcement of Timber Elements in Existing Structures**. Cham: Springer International Publishing, 2021. (RILEM State-of-the-Art Reports). DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-67794-7>. Available at: <http://www.springer.com/series/8780>.

BREHM, M.; ZABEL, V.; BUCHER, C. An automatic mode pairing strategy using an enhanced modal assurance criterion based on modal strain energies. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 329, no. 25, pp. 5375–5392, Dec. 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.07.006>. Available at: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X10004608>.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION (BSI). **BS 5268-2, Structural use of timber — Part 2: Code of practice for permissible stress design, materials and workmanship**. London: BSI, 2002.

BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. **Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach**. 2nd ed. New York: Springer, 2002.

CALIL JÚNIOR, C.; LAHR, F. A. R.; DIAS, A. A.; MARTINS, G. C. A. **Estruturas de Madeira: projetos, dimensionamento e exemplos de cálculo**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Ciência e Engenharia dos Materiais: uma introdução**. 6th ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

CAO, W.; SUN, X.; CHEN, X. Estimation and validation for fatigue properties of steels by symbolic regression. **International Journal of Fatigue**, vol. 186, no. May, p. 108416, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108416>. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108416>.

CARVALHO, A. L. C. de; LEILA, F. M.; DIAS, A. M. S.; CHRISTOFORO, A. L.; SILVA, D. A. L.; SILVEIRA, M. E.; LAHR, F. A. R. Numerical Analyses of Timber Columns Reinforced by Particulate Composite Material. **The Open Construction**

and **Building Technology Journal**, vol. 10, no. 1, pp. 442–449, 29 Jun. 2016.

Available at: <https://doi.org/10.2174/1874836801610010442>.

CHANG, W. S. Repair and reinforcement of timber columns and shear walls - A review. **Construction and Building Materials**, vol. 97, pp. 14–24, 2015. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.07.002>.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Numerical methods for engineers**. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2009.

CHEN, J.; WANG, Y.; SHI, Q.; PENG, X.; ZHENG, J. An international comparison analysis of CO₂ emissions in the construction industry. **Sustainable Development**, vol. 29, no. 4, pp. 754–767, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1002/sd.2172>.

CHEN, Q.; CHEN, C.; YU, F.; SHEN, B.; TAN, C. Experimental Study on CFRP Strengthening Hollow Wooden Column and Strengthening Effect. **IOP Conference Series: Earth and Environmental Science**, vol. 455, no. 1, p. 012009, 1 Feb. 2020. Available at: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/455/1/012009>.

CHEN, Y.; GUO, W. Nondestructive evaluation and reliability analysis for determining the mechanical properties of old wood of ancient timber structure. **BioResources**, vol. 12, no. 2, pp. 2310–2325, 2017. Available at: <https://doi.org/10.15376/biores.12.2.2310-2325>.

CHORLTON, B.; GALES, J. Fire performance of cultural heritage and contemporary timbers. **Engineering Structures**, vol. 201, 2019. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109739>.

CHRISTOFORO, A. L.; GOMES, A. F. F.; ARROYO, F. N.; MASCARENHAS, F. J. R.; SANTOS, H. F. dos; TOPOLNIAK, L.; AKASAKI, J. L. Reinforcement of Timber Beams with Steel Bars: Parametric Analysis Using the Finite Element Method. **Buildings**, vol. 12, no. 7, 2022. Available at: <https://doi.org/10.3390/buildings12071036>.

COHEN, J. **Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences**. 2nd ed. New

York: Lawrence Erlbaum Associates, 1988.

CORADIN, V. T. R.; CAMARGOS, J. A. A. **A estrutura anatômica da madeira e princípios para sua identificação**. Brasília: LPF, 2002. Available at: <http://www.ibama.gov.br>.

COSTA, C.; RIBEIRO, D.; JORGE, P.; SILVA, R.; ARÊDE, A.; CALÇADA, R. Calibration of the numerical model of a stone masonry railway bridge based on experimentally identified modal parameters. **Engineering Structures**, vol. 123, pp. 354–371, Sep. 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.05.044>. Available at: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2352012422000856>.

CRANMER, M. **Interpretable Machine Learning for Science with PySR and SymbolicRegression.jl**. Princeton, 2023. Available at: <http://arxiv.org/abs/2305.01582>.

CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through.” **Computers & Structures**, vol. 13, nos. 1–3, pp. 55–62, Jun. 1981. Available at: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5).

CRUZ, H.; CUSTÓDIO, J. Adhesives for on-site rehabilitation of timber structures. **Journal of Adhesion Science and Technology**, vol. 24, no. 8, pp. 1473–1499, 2010. Available at: <https://doi.org/10.1163/016942410X501089>.

DE ARAUJO, V.; ALVES, L.; JARDIM, P.; ŠVAJLENKA, J.; CHRISTOFORO, A. Massive plywood panels and manufacturers: a comprehensive systematic literature review and case study. **Discover Civil Engineering**, vol. 2, no. 1, p. 54, 19 Mar. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s44290-025-00213-z>. Available at: <https://doi.org/10.1007/s44290-025-00213-z>.

DE ARAUJO, V.; CHRISTOFORO, A. The Global Cross-Laminated Timber (CLT) Industry: A Systematic Review and a Sectoral Survey of Its Main Developers. **Sustainability (Switzerland)**, vol. 15, no. 10, 2023. Available at: <https://doi.org/10.3390/su15107827>.

DE ARAUJO, V.; PRAMREITER, M.; CHRISTOFORO, A. A global policy framework for the circular use of forest biomass as building materials. **Nature Reviews Materials**, vol. 10, no. 3, pp. 170–172, 3 Feb. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41578-025-00780-8>. Available at: <https://www.nature.com/articles/s41578-025-00780-8>.

DIAS, F. M.; LAHR, F. A. R. Estimativa de propriedades de resistência e rigidez da madeira através da densidade aparente. **Scientia Forestalis/Forest Sciences**, no. 65, pp. 102–113, 2004.

DINWOODIE, J. M. **Timber: its nature and behaviour**. 2nd ed. London: E & FN Spon, 2004.

DONG, J. F.; JIA, P.; YUAN, S. C.; WANG, Q. Y. Compressive behaviours of square timber columns reinforced by partial wrapping of FRP sheets. **Materials Research Innovations**, vol. 19, no. March, pp. S1465–S1468, 2015. Available at: <https://doi.org/10.1179/1432891715Z.0000000001593>.

DONG, J. F.; YUAN, S. C.; WANG, Q. Y.; LIANG, W. Influence of fractured wood texture on structural behaviour of timber columns with fibre reinforced polymer reinforcement. **Materials Research Innovations**, vol. 19, no. March, pp. S5546–S5550, 2015. Available at: <https://doi.org/10.1179/1432891714Z.0000000001149>.

EL DEBS, M. K. **Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações**. 2nd ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2017.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **BS EN 1995-1-1: Design of timber structures. Part 1-1: General- Common rules and rules for buildings**. Brussels: Eurocode 5, 2004.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **BS EN 338: Structural timber — Strength classes**. Brussels, 2016. Available at: <http://www.buildingconservation.com/articles/structural-timber-repairs/structural-timber-repairs.htm>.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **EN 408: Timber structures - structural timber and glued laminated timber - determination of some physical and mechanical properties**. Brussels: CEN, 2012.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. 2005.

FAFARD, M.; MASSICOTTE, B. Geometrical interpretation of the arc-length method. **Computers and Structures**, vol. 46, no. 4, pp. 603–615, 1993. Available at: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90389-U](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90389-U).

FAJDIGA, G.; RAJH, D.; NEČEMER, B.; GLODEŽ, S.; ŠRAML, M. Experimental and numerical determination of the mechanical properties of spruce wood. **Forests**, vol. 10, no. 12, 2019. Available at: <https://doi.org/10.3390/F10121140>.

FERREIRA, J. V.; SERPA, A. L. Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 284, nos. 1–2, pp. 133–149, 2005. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.06.025>.

GERWIN, D. Information processing, data inferences, and scientific generalization. **Behavioral Science**, vol. 19, no. 5, pp. 314–325, Sep. 1974. DOI: <https://doi.org/10.1002/bs.3830190504>. Available at: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/bs.3830190504>.

GONZÁLEZ-DÍAZ, E.; ALONSO-LÓPEZ, J. M. Characterization by thermogravimetric analysis of the wood used in Canary architectural heritage. **Journal of Cultural Heritage**, vol. 23, pp. 111–118, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.culher.2016.09.002>. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.culher.2016.09.002>.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5th ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

GURUPRASAD, P.; NAGESH, S.; SAMPATH, A. N.; SALAI SANJAY, S.; JEYAKUMAR, G. Assessing the Efficacy of Symbolic Regression for Scientific Data Classification and Regression. **2023 14th International Conference on Computing**

Communication and Networking Technologies, ICCCNT 2023, no. January, pp. 1–6, 2023. Available at: <https://doi.org/10.1109/ICCCNT56998.2023.10308129>.

HARTE, A. M.; DIETSCH, P. **Reinforcement of timber structures: A state-of-the-art report**. Munich: European Cooperation in Science and Technology, 2015. 235 pp.

HASHIN, Z. **Fatigue failure criteria for unidirectional fiber composites**. Philadelphia, 1980. 30 pp.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2025.

HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. New York: Oxford University Press, 1950.

HOFFMAN, O. The brittle strength of orthotropic materials. **Journal of Composite Materials**, vol. 1, 1967. Available at: <https://doi.org/10.1177/002199836700100210>.

HOGG, R. V.; MCKEAN, J. W.; CRAIG, A. T. **Introduction to Mathematical Statistics**. 7th ed. Boston: Pearson Education, 2013.

ILGIN, H. E.; KARJALAINEN, M.; PELSMAKERS, S. Contemporary tall residential timber buildings: what are the main architectural and structural design considerations? **International Journal of Building Pathology and Adaptation**, vol. 41, no. 6, pp. 26–46, 2022. Available at: <https://doi.org/10.1108/IJBPA-10-2021-0142>.

JARDIM, P. I. L. G.; MONTEIRO, S. N.; AZEVEDO, A. R. G. de; DE ARAÚJO, V. A.; PANZERA, T. H.; CHRISTOFORO, A. L. Preservation and maintenance of wood-based structures of historic buildings: A systematic literature review on structural recovery techniques. **Case Studies in Construction Materials**, vol. 22, no. May, p. e04706, Jul. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2025.e04706>. Available at: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2214509525005042>.

KAWECKI, B. Guidelines for FEM modelling of wood-CFRP beams using ABAQUS. **Archives of Civil Engineering**, vol. 67, no. 4, pp. 175–191, 2021. Available at:

<https://doi.org/10.24425/ace.2021.138493>.

KHELIFA, M.; CELZARD, A.; OUDJENE, M.; RUELLE, J. Experimental and numerical analysis of CFRP-strengthened finger-jointed timber beams. **International Journal of Adhesion and Adhesives**, vol. 68, pp. 283–297, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.04.007>.

KHELIFA, M.; VILA LOPERENA, N.; BLERON, L.; KHENNANE, A. Analysis of CFRP-strengthened timber beams. **Journal of Adhesion Science and Technology**, vol. 28, no. 1, pp. 1–14, 2014. Available at: <https://doi.org/10.1080/01694243.2013.815096>.

KIA, L.; VALIPOUR, H. R.; GHANBARI-GHAZIJAHANI, T. Experimental and numerical investigation of concentric axial loading on bar-reinforced composite timber columns at a large scale. **Structures**, vol. 60, no. June 2023, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.105920>.

KIM, Y. J.; HARRIES, K. A. Modeling of timber beams strengthened with various CFRP composites. **Engineering Structures**, vol. 32, no. 10, pp. 3225–3234, 2010. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.06.011>.

KOZA, J. R. **Genetic Programming: On the Programming of Computers By Means of Natural Selection Complex Adaptive Systems**. London: A Bradford Book, 2003.

KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**. 9th ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LAHR, F. A. R.; CHAHUD, E.; ARROYO, F. N.; CHRISTOFORO, A. L.; RODRIGUES, E. F. C.; ALMEIDA, J. P. B.; AQUINO, V. B. de M. Análise da representatividade da resistência ao cisalhamento paralelo às fibras da classe C60 da norma brasileira de estruturas de madeira. **Revista Materia**, vol. 27, no. 1, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1590/S1517-707620220001.1334>.

LAHR, F. A. R.; CHAHUD, E.; ARROYO, F. N.; CHRISTOFORO, A. L.;

RODRIGUES, E. F. C.; ALMEIDA, J. P. B.; AQUINO, V. B. de M.; SANTOS, H. F. dos. Ratio analysis between compression and shearing of 72 brazilian wood species.

Wood Research, vol. 66, no. 5, 2021. Available at:

<https://doi.org/doi.org/10.37763/wr.1336-4561/66.5.711720>.

LANGLEY, P. W. BACON: A production system that discovers empirical laws. 1977.

IJCAI. 1977.

LEE, I.-H.; SONG, Y.-J.; SONG, D.-B.; HONG, S.-I. Results of Delamination Tests of FRP- and Steel-Plate-Reinforced Larix Composite Timber. **Journal of the Korean Wood Science and Technology**, vol. 47, no. 5, pp. 655–662, 25 Sep. 2019. DOI:

<https://doi.org/10.5658/WOOD.2019.47.5.655>. Available at:

<https://doi.org/10.5658/WOOD.2019.47.5.655>. Accessed: 16 Aug. 2021.

LI, H.; CHEN, B.; FEI, B.; LI, H.; XIONG, Z.; LORENZO, R.; FANG, C.; ASHRAF, M. Mechanical properties of aramid fiber reinforced polymer confined laminated bamboo lumber column under cyclic loading. **European Journal of Wood and Wood Products**, pp. 1–14, 19 Apr. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00107-022-01816-4>.

Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00107-022-01816-4>.

Accessed: 14 May 2022.

LI, L.; YUAN, S. L.; DONG, J. F.; WANG, Q. Y. An Experimental Study on the Axial Compressive Behavior of Timber Columns Strengthened by FRP Sheets with Different Wrapping Methods. **Applied Mechanics and Materials**, vols. 351–352, pp. 1419–1422, Aug. 2013. Available at:

<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.351-352.1419>.

LI, X.; ASHRAF, M.; SUBHANI, M.; KREMER, P.; KAFLE, B.; GHABRAIE, K. Experimental and numerical study on bending properties of heterogeneous lamella layups in cross laminated timber using Australian Radiata Pine. **Construction and Building Materials**, vol. 247, p. 118525, 2020. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118525>. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118525>.

LIANG, S.; SHEN, Y.; GAO, X.; CAI, Y.; FEI, Z. Symbolic machine learning improved

MCFT model for punching shear resistance of FRP-reinforced concrete slabs.

Journal of Building Engineering, vol. 69, no. March, p. 106257, 2023. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2023.106257>. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2023.106257>.

LIANG, X.; SRITHARAN, S. Effects of confinement in square hollow concrete column sections. **Engineering Structures**, vol. 191, no. May, pp. 526–535, 2019. Available

at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.04.034>.

LIN, G.; ZENG, J. J.; TENG, J. G.; LI, L. J. Behavior of large-scale FRP-confined rectangular RC columns under eccentric compression. **Engineering Structures**, vol.

216, no. May, 2020. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110759>.

LIU, R.; WU, Z.; PENG, Q.; ZHANG, Y.; WANG, J. Experimental Study on the Axial Compression Performance of Glued Wood Hollow Cylinders Reinforced with BFRP.

Sustainability, vol. 14, no. 24, 2022. Available at:

<https://doi.org/10.3390/su142416827>.

MAHMOUDABADI, N. S.; CAMP, C. V.; AHMAD, A. Deep Learning-Based Prediction of the Axial Capacity of CFRP-Strengthened Concrete Columns. pp. 1–31, 2026.

MANIA, P.; WRÓBLEWSKI, M.; WÓJCIAK, A.; ROSZYK, E.; MOLIŃSKI, W.

Hardness of densified wood in relation to changed chemical composition. **Forests**,

vol. 11, no. 5, pp. 1–12, 2020. Available at: <https://doi.org/10.3390/F11050506>.

MARTÍN, J. A.; LÓPEZ, R. Biological Deterioration and Natural Durability of Wood in Europe. **Forests**, vol. 14, no. 2, 2023. Available at:

<https://doi.org/10.3390/f14020283>.

MASCIA, Nilson T.; SIMONI, R. A. Analysis of failure criteria applied to wood.

Engineering Failure Analysis, vol. 35, pp. 703–712, 2013. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.07.001>.

MASCIA, Nilson Tadeu; LAHR, F. A. R. Remarks on orthotropic elastic models

applied to wood. **Materials Research**, vol. 9, no. 3, pp. 301–310, 2006. Available at:

<https://doi.org/10.1590/S1516-14392006000300010>.

MASCIA, Nilson Tadeu; SIMONI, R. A. Análise de critérios de resistência aplicados à madeira. 2012. **XIII EBRAMEM: Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira**. Vitória: IBRAMEM, 2012.

MASCIA, Nilson Tadeu; TODESCHINI, R.; NICOLAS, E. A. Avaliação de critério de resistência de materiais anisotrópicos aplicado à madeira utilizando ensaios uniaxiais e biaxiais. **Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural**, vol. 10, no. 2, pp. 5–30, 2013. Available at: <https://doi.org/10.5335/rsee.v10i2.1526>.

MEGAHED, K. Prediction and reliability analysis of shear strength of RC deep beams. **Scientific Reports**, vol. 14, no. 1, pp. 1–15, 2024a. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-64386-w>. Available at: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-64386-w>.

MEGAHED, K. Prediction of the axial compression capacity of ECC-CES columns using adaptive sampling and machine learning techniques. pp. 1–18, 2025a.

MEGAHED, K. STM-based symbolic regression for strength prediction of RC deep beams and corbels. **Scientific Reports**, vol. 14, no. 1, pp. 1–16, 2024b. Available at: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-74803-9>.

MEGAHED, K. Symbolic regression for strength prediction of eccentrically loaded concrete-filled steel tubular columns. **Scientific reports**, vol. 15, no. 1, p. 3085, 2025b. Available at: <https://doi.org/10.1038/s41598-025-85371-x>.

MEGAHED, K.; MAHMOUD, N. S.; ABD-RABOU, S. E. M. Circular rubber aggregate CFST stub columns under axial compression: prediction and reliability analysis. **Scientific reports**, vol. 14, no. 1, p. 26245, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-74990-5>.

MENDONÇA, P. de T. R. **Materiais compostos & estruturas-sanduíche**. 2nd ed. Florianópolis: Orsa Maggiore, 2019.

MIRMIRAN, A.; SHAHAWY, M. Behavior of Concrete Columns Confined by Fiber

Composites. **Journal of Structural Engineering**, vol. 123, no. 5, pp. 583–590, May 1997. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1997\)123:5\(583\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1997)123:5(583)).

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenharia**. 6th ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

MOTLAGH, B.; GHOLIPOUR, Y.; EBRAHIMI, G. H. Experimental investigation on mechanical properties of old wood members reinforced with FRP composite. **Wood Research**, vol. 57, no. 2, pp. 285–296, 2012.

NADIM, H.; ISLAM, M.; MUSTAFIZ, S.; MITRA, D. K. Evaluating the Efficiency of Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) in Increasing the Compressive Strength of Circular Concrete Column. **Journal of Construction and Building Materials Engineering**, vol. 5, no. 3, pp. 33–46, 2019. Available at: <https://www.researchgate.net/publication/358041528>. Accessed: 8 Feb. 2022.

NAJM, H.; SECARAS, J.; BALAGURU, P. Compression Tests of Circular Timber Column Confined with Carbon Fibers Using Inorganic Matrix. **Journal of Materials in Civil Engineering**, vol. 19, no. 2, pp. 198–204, Feb. 2007. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0899-1561\(2007\)19:2\(198\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0899-1561(2007)19:2(198)).

NETO, F. L.; PARDINI, L. C. **Compósitos estruturais: ciência e tecnologia**. 2nd ed. São Paulo: Blucher, 2016.

NICOLAS, E. A. **Estudo de critérios de resistência de materiais anisotrópicos aplicados à madeira**. 2006. Tese (doutorado). Universidade Estadual de Campinas, 2006. .

NOWAK, T. P.; JASIEŃKO, J.; CZEPIZAK, D. Experimental tests and numerical analysis of historic bent timber elements reinforced with CFRP strips. **Construction and Building Materials**, vol. 40, pp. 197–206, 2013. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2012.09.106>.

OU, Y.-C.; WANG, P.-H.; TSAI, M.-S.; CHANG, K.-C.; LEE, G. C. Large-Scale Experimental Study of Precast Segmental Unbonded Posttensioned Concrete Bridge

Columns for Seismic Regions. **Journal of Structural Engineering**, vol. 136, no. 3, pp. 255–264, 2010. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0000110](https://doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0000110).

OU, Y.; TANG, C.; YAN, L.; FAN, Y.; ZHOU, H. Experimental Study on Axial Compressive Behavior of the BFRP-Confined Timber Columns with and Without Knots. **Buildings**, vol. 16, no. 2, pp. 1–19, 2026. Available at: <https://doi.org/10.3390/buildings16020457>.

OUYANG, Y.; YANG, X.; BAO, R. Nonlinear stability of timber column strengthened with fiber reinforced polymer. **Applied Mathematics and Mechanics**, vol. 32, no. 7, pp. 903–916, 2 Jul. 2011. Available at: <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1468-7>.

PANZERA, T. H.; SABARIZ, A. L. R.; STRECKER, K.; BORGES, P. H. R.; VASCONCELOS, D. C. L.; WASCONCELOS, W. L. Propriedades mecânicas de materiais compósitos à base de cimento Portland e resina epoxi. **Cerâmica**, vol. 56, no. 337, pp. 77–82, Mar. 2010. Available at: <https://doi.org/10.1590/S0366-69132010000100013>.

PARISI, M. A.; PIAZZA, M. Restoration and Strengthening of Timber Structures: Principles, Criteria, and Examples. **Practice Periodical on Structural Design and Construction**, vol. 12, no. 4, pp. 177–185, Nov. 2007. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1084-0680\(2007\)12:4\(177\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1084-0680(2007)12:4(177)).

PĚNČÍK, J. Modelling of experimental tests of wooden specimens from scots pine (*Pinus sylvestris*) with the help of anisotropic plasticity material model. **Drvna Industrija**, vol. 66, no. 1, pp. 27–33, 2015. Available at: <https://doi.org/10.5552/drind.2015.1362>.

PENG, J.; KANG, S. B.; SHI, L. L.; YU, X. F.; ZHOU, S. R.; XIONG, G. Local buckling resistance of bamboo scrimber plates in compression. **Case Studies in Construction Materials**, vol. 18, no. May, 2023. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2023.e02146>.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de Madeira**. 6th ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

- POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 17, no. 10, pp. 1455–1467, 20 Oct. 1981. Available at: <https://doi.org/10.1002/nme.1620171003>.
- QI, Y.; XIE, L.; BAI, Y.; LIU, W.; FANG, H. Axial compression behaviours of pultruded GFRP–wood composite columns. **Sensors (Switzerland)**, vol. 19, no. 4, 2019. Available at: <https://doi.org/10.3390/s19040755>.
- RAMM, E. Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points. **Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981. pp. 63–89. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-642-81589-8_5.
- RASHID, P.; BAHRAMI, A. Structural Performance of Infilled Steel – Concrete Composite Comprehensive Review. **Materials**, vol. 16, no. 4, 2023.
- REBELLO, C. M.; COSTA, E. A.; FONTANA, M.; SCHNITMAN, L.; NOGUEIRA, I. B. R. Interpretable Scientific Machine Learning Approach for Correcting Phenomenological Models: Methodology Validation on an ESP Prototype. **Industrial and Engineering Chemistry Research**, vol. 63, no. 44, pp. 19030–19050, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.4c02104>.
- REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade estrutural**. Amadora: McGraw-Hill, 2000.
- RICHART, F. E.; BRANDTZAEG, A.; BROWN, R. L. **The Failure of Plain and Spirally Bound Concrete in Compression**. Urbana: University of Illinois Engineering Experiment Station Bulletin, 1929.
- RIGGIO, M.; TOMASI, R.; PIAZZA, M. Refurbishment of a traditional timber floor with a reversible technique: Importance of the investigation campaign for design and control of the intervention. **International Journal of Architectural Heritage**, vol. 8, no. 1, pp. 74–93, 2014. Available at: <https://doi.org/10.1080/15583058.2012.670364>.
- RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, vol. 15, no. 7, pp. 529–551, 1979.

DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7). Available at:
[http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7).

SAAD, K.; LENGYEL, A. A Parametric Investigation of the Influence of Knots on the Flexural Behavior of Timber Beams. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, vol. 67, no. 1, pp. 261–271, 2023. Available at: <https://doi.org/10.3311/PPci.21360>.

SAAD, K.; LENGYEL, A. Accurate finite element modelling of knots and related fibre deviations in structural timber. **Journal of King Saud University - Engineering Sciences**, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jksues.2022.01.005>. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jksues.2022.01.005>.

SAC. **GB 50005: Code for design of timber structures**. Beijing: National Standard of the People's Republic of China, 2017.

SALTELLI, A.; RATTO, M.; ANDRES, T.; CAMPOLONGO, F.; CARIBONI, J.; GATELLI, D.; SAISANA, M.; TARANTOLA, S. **Global Sensitivity Analysis. The Primer**. Chichester: Wiley, 2007. Available at: <https://doi.org/10.1002/9780470725184>.

SBAHIEH, S.; TAHIR, F.; AL-GHAMDI, S. G. Environmental and mechanical performance of different fiber reinforced polymers in beams. **Materials Today: Proceedings**, vol. 62, pp. 3548–3552, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.398>. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.398>.

SCHNEIDER, J.; VROUWENVELDER, T. Introduction to safety and reliability of structures. **Introduction to safety and reliability of structures**, 1997. Available at: <https://doi.org/10.2749/sed005>.

SCHOBBER, K. U.; HARTE, A. M.; KLIGER, R.; JOCKWER, R.; XU, Q.; CHEN, J. F. FRP reinforcement of timber structures. **Construction and Building Materials**, vol. 97, pp. 106–118, 2015. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.06.020>.

SHABANI, A.; KIOUMARSI, M.; PLEVRIS, V.; STAMATOPOULOS, H. Structural vulnerability assessment of heritage timber buildings: A methodological proposal.

Forests, vol. 11, no. 8, pp. 1–20, 2020. Available at:

<https://doi.org/10.3390/f11080881>.

SIHA, A.; ZHOU, C. Experimental study and numerical analysis of composite strengthened timber columns under lateral cyclic loading. **Journal of Building Engineering**, vol. 67, no. October 2022, p. 106077, May 2023. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2023.106077>.

SIHA, A.; ZHOU, C. Experimental study on hysteretic behavior of circular timber columns strengthened with wrapped CFRP strips and near surface mounted steel bars. **Engineering Structures**, vol. 263, no. January, p. 114416, 2022. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114416>. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114416>.

SIHA, A.; ZHOU, C.; YANG, L. Experimental Study on Axial Compression Behavior on Circular Timber Columns Strengthened with CFRP Strips and Near-Surface Mounted Steel Bars. **Journal of Structural Engineering**, vol. 147, no. 3, p. 04021003, 2021. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0002931](https://doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0002931).

SILVA, G. dos S.; AGUIAR, F. da S.; REIS, E. D.; SANTOS, H. F. dos; FAUSTINO, E.; MASCARENHAS, A. R. P.; CHRISTOFORO, A. L. Shear analogy stiffness adjustment for CLT plates. **BioResources**, vol. 20, no. 3, pp. 7027–7033, 3 Jul. 2025. DOI: <https://doi.org/10.15376/biores.20.3.7027-7033>. Available at:

<https://bioresources.cnr.ncsu.edu/resources/shear-analogy-stiffness-adjustment-for-clt-plates/>.

SILVA, G. dos S.; REIS, E. D.; RODRIGUES, E. F. C.; DOS SANTOS, H. F.; CHRISTOFORO, A. L. Two-dimensional estimation of service load limit in CLT plates. **Engineering Structures**, vol. 328, no. December 2024, 2025. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.119702>.

SIRIMONTREE, S.; KEAWSAWASVONG, S.; THONGCHOM, C. Reinforced concrete columns confined with prestressed steel straps under axial loading. **Journal**

of **Applied Science and Engineering (Taiwan)**, vol. 24, no. 3, pp. 401–406, 2021. Available at: [https://doi.org/10.6180/jase.202106_24\(3\).0015](https://doi.org/10.6180/jase.202106_24(3).0015).

SPEARMAN, C. The Proof and Measurement of Association between Two Things. **The American journal of psychology**, vol. 15, no. 1, pp. 72–101, 1904.

SPOZITO, R. S.; ALMEIDA FILHO, F. M. de; CHRISTOFORO, A. L.; DELALIBERA, R. G.; REIS, E. D.; VELAME BRANCO, A. L. L. Analysis of mechanical behavior of four-pile caps with geometric parameterization of column and cap using numerical models. **Structures**, vol. 80, no. July, 2025. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.109960>.

SU, S.; ZHANG, G.; HAN, Q.; YU, J.; JIA, X.; DU, X. Numerical analysis of high-strength centrifugal precast RC hollow pipe columns using grouted corrugated duct connection: Confinement effect and ductility evaluation. **Engineering Structures**, vol. 301, no. December 2023, p. 117326, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117326>. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117326>.

SU, Y.; ZOU, J. Local stability of glued laminated bamboo columns with box sections under axial compression. **European Journal of Wood and Wood Products**, vol. 82, no. 4, pp. 1171–1185, 2024. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00107-024-02066-2>.

SZCZECINA, M. Study of complexity of numerical models of a strengthened timber beam. **Materials**, vol. 16, no. 3466, 2023. Available at: <https://doi.org/10.3390/ma16093466>.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. 2nd ed. New York: McGraw-Hill International Book Company, 1963.

TONDA, A. Review of PySR: high-performance symbolic regression in Python and Julia. **Genetic Programming and Evolvable Machines**, vol. 26, no. 1, p. 7, 23 Jun. 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10710-024-09503-4>. Available at: <https://link.springer.com/10.1007/s10710-024-09503-4>.

TREFETHEN, Lloyd N.; BAU, D. **Numerical linear algebra**. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1997.

TSAI, S. W. **Strength Theories of Filamentary Structures Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites**. Nova Iorque: Wiley-Interscience, 1968.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. **Journal of Composite Materials**, vol. 5, no. 58, 1971. Available at: <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>.

TSOI, H. F.; RANKIN, D.; CAILLOL, C.; CRANMER, M.; DASU, S.; DUARTE, J.; HARRIS, P.; LIPELES, E.; LONCAR, V. **SymbolFit: Automatic Parametric Modeling with Symbolic Regression**. 2024. 1–50 pp. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.09851>. Available at: <http://arxiv.org/abs/2411.09851>.

TULEBEKOVA, S.; STAMATOPOULOS, H.; MALO, K. A. A Framework for the Estimation of Damping Ratio of Glued–Laminated Buildings by Use of Analysis in the Time Domain. **Materials**, vol. 18, no. 7, pp. 1–15, 2025. Available at: <https://doi.org/10.3390/ma18071545>.

UNITED STATES DEPARTMENT OF AGRICULTURE. **Wood handbook: wood as an engineering material**. Madison: U.S. Forest Service, 2010. Available at: <https://doi.org/10.1161/01.RES.39.4.523>.

URSACHE, Ștefania; CERBU, C.; HADĂR, A. Characteristics of Carbon and Kevlar Fibres, Their Composites and Structural Applications in Civil Engineering—A Review. **Polymers**, vol. 16, no. 1, pp. 1–23, 2024. Available at: <https://doi.org/10.3390/polym16010127>.

VALLE, Â. do; PEREIRA, N. B.; NAPPI, S. C. B. Recommendations for design in preserving historical buildings with wooden structures' roofs. **Advanced Materials Research**, vol. 778, pp. 1072–1079, 2013. Available at: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.778.1072>.

VON MISES, R. Mechanics of solid bodies in the plastically-deformable state.

Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, vol. 4, pp. 582–592, 1913.

WALISZEWSKA, B.; MLECZEK, M.; ZBOROWSKA, M.; GOLIŃSKI, P.; RUTKOWSKI, P.; SZENTNER, K. Changes in the chemical composition and the structure of cellulose and lignin in elm wood exposed to various forms of arsenic.

Cellulose, vol. 26, no. 10, pp. 6303–6315, 2019. Available at:

<https://doi.org/10.1007/s10570-019-02511-z>.

WALLEY, S. M.; ROGERS, S. J. Is Wood a Material? Taking the Size Effect

Seriously. **Materials**, vol. 15, no. 15, 2022. Available at:

<https://doi.org/10.3390/ma15155403>.

WANG, H.; CHUN, Q.; ZHANG, C.; MA, S.; CAO, G.; DONG, Q. Experimental study on the compression behavior of long timber column strengthened with the novel hybrid fiber sheets. **Journal of Wood Science**, vol. 69, no. 1, 2023. Available at:

<https://doi.org/10.1186/s10086-023-02077-2>.

WEIBULL, W. A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 18, no. 3, pp. 293–297, 1951. Available at:

<https://doi.org/10.1115/1.4010337>.

WOLENSKI, A. R. V.; PEIXOTO, R. G.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R.; DIAS, A. M. P. G. Estimativa da resistência característica à tração da madeira na direção paralela às fibras por meio de modelos probabilísticos. **Matéria (Rio de Janeiro)**, vol. 24, no. 4, 2019. Available at: [https://doi.org/10.1590/s1517-](https://doi.org/10.1590/s1517-707620190004.0856)

[707620190004.0856](https://doi.org/10.1590/s1517-707620190004.0856).

XIA, M.; LI, M.; ZONG, Z.; LIN, Y.; LIU, Y. Experimental and numerical study on dynamic behavior of precast segmental CFDST columns under large equivalent explosions. **Journal of Constructional Steel Research**, vol. 220, no. June, p. 108830, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2024.108830>. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2024.108830>.

<https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2024.108830>.

XIONG, X. Y.; LU, X. X.; XUE, R. J. The study on timber pier columns strengthened with CFRP hoops in ancient architecture. **Advanced Composites Letters**, vol. 25, no. 6, pp. 132–136, 2016. Available at:

<https://doi.org/10.1177/096369351602500602>.

XIONG, X. Y.; SU, Z. Y. Experimental study and theoretical analysis of carbon fibre-reinforced polymer strengthening timber pier column. **Materials Research Innovations**, vol. 19, no. March, pp. S51246–S51254, 2015. Available at:

<https://doi.org/10.1179/1432891714Z.0000000001288>.

XU, B. H.; BOUCHAÏR, A.; TAAZOUNT, M.; VEGA, E. J. Numerical and experimental analyses of multiple-dowel steel-to-timber joints in tension perpendicular to grain.

Engineering Structures, vol. 31, no. 10, pp. 2357–2367, 2009. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.05.013>.

XU, F.; MENG, X.; HU, Q.; GAO, Y. Numerical analysis of buckling behaviour of timber-encased steel composite columns under axial compression. **Wood Material Science and Engineering**, vol. 19, no. 1, pp. 112–130, 2024. Available at:

<https://doi.org/10.1080/17480272.2023.2228272>.

YANG, L.; LI, X.; FANG, H.; LIU, W.; HONG, J.; HUI, D.; GAFF, M. Compressive behaviour of wood-filled GFRP square columns with lattice-web reinforcements.

Construction and Building Materials, vol. 310, 2021. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.125129>.

YU, T.; ZHANG, Z.; SONG, S.; BAI, Y.; WU, D. Tensile and flexural behaviors of additively manufactured continuous carbon fiber-reinforced polymer composites.

Composite Structures, vol. 225, no. June, p. 111147, 2019. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111147>.

ZHANG, C.; CHUN, Q.; LIN, Y.; WANG, H.; LI, P. Experimental and nonlinear finite-element analysis study on lateral push resistance of San-dou components

perpendicular and parallel to grain in traditional timber buildings. **Journal of Wood Science**, vol. 68, no. 1, pp. 1–18, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1186/s10086-022-02049-y>. Available at: <https://doi.org/10.1186/s10086-022-02049-y>.

ZHANG, J.; XU, W.; YE, J.; LIU, X. The Mechanical Properties of Reinforced Concrete Columns with Longitudinal Pre-Embedded Holes. **Applied Sciences (Switzerland)**, vol. 15, no. 9, 2025. Available at: <https://doi.org/10.3390/app15095010>.

ZHOU, L.; LIU, Q.; MA, S.; HAN, X. Eccentric compression behavior of long poplar columns externally reinforced by BFRP. **Journal of Wood Science**, vol. 67, no. 1, pp. 1–17, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1186/s10086-020-01934-8>.

ZHU, Y. M.; YUAN, S. C.; HOU, M.; WANG, Q. Y. Square short wood columns strengthened with FRP sheets under compressive load. **Applied Mechanics and Materials**, vols. 256–259, no. PART 1, pp. 1008–1011, 2013. Available at: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.256-259.1008>.

**APÊNDICE – ARTIGOS SELECIONADOS PARA A
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SISTEMÁTICA**

APÊNDICE – ARTIGOS SELECIONADOS PARA A REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SISTEMÁTICA

Título do artigo	Autores	Ano de publicação	Periódico
An Experimental Study on the Axial Compressive Behavior of Timber Columns Strengthened by FRP Sheets with Different Wrapping Methods	Li, Lang Yuan, Shi Lei Dong, Jiang Feng Wang, Qing Yuan	2013	Applied Mechanics and Materials
Compression Tests of Circular Timber Column Confined with Carbon Fibers Using Inorganic Matrix	Najm, Husam Secaras, Jerame Balaguru, Perumalsamy	2007	Journal of Materials in Civil Engineering
Compressive behaviour of wood-filled GFRP square columns with lattice-web reinforcements	Yang, Laiyun Li, Xiaolong Fang, Hai Liu, Weiqing Hong, Junqing Hui, David Gaff, Milan	2021	Construction and Building Materials
Compressive behaviours of square timber columns reinforced by partial wrapping of FRP sheets	Dong, J. F. Jia, P. Yuan, S. C. Wang, Q. Y.	2015	Materials Research Innovations
Eccentric compression behavior of long poplar columns externally reinforced by BFRP	Zhou, Ling Liu, Qing Ma, Shengqiang Han, Xia	2021	Journal of Wood Science
Experimental study and numerical analysis of composite strengthened timber columns under lateral cyclic loading	Siha, A. Zhou, Changdong	2023	Journal of Building Engineering

Continua

Título do artigo	Autores	Ano de publicação	Periódico
Experimental study and theoretical analysis of carbon fibre-reinforced polymer strengthening timber pier column	Xiong, X. Y. Su, Z. Y.	2015	Materials Research Innovations
Experimental Study on Axial Compression Behavior on Circular Timber Columns Strengthened with CFRP Strips and Near-Surface Mounted Steel Bars	A, Siha Zhou, Changdong Yang, Ligan	2021	Journal of Structural Engineering
Experimental Study on CFRP Strengthening Hollow Wooden Column and Strengthening Effect	Chen, Qiang Chen, Chaoyun Yu, Fang Shen, Bo Tan, Cong	2020	IOP Conference Series: Earth and Environmental Science
Experimental study on hysteretic behavior of circular timber columns strengthened with wrapped CFRP strips and near surface mounted steel bars	A, Siha Zhou, Changdong	2022	Engineering Structures
Experimental Study on the Axial Compression Performance of Glued Wood Hollow Cylinders Reinforced with BFRP	Liu, Ruiyue Wu, Zhenzhen Peng, Quan Zhang, Yu Wang, Jiejun	2022	Sustainability
Experimental study on the compression behavior of long timber column strengthened with the novel hybrid fiber sheets	Wang, Haoyu Chun, Qing Zhang, Chengwen Ma, Shiyu Cao, Guang Dong, Qingchong	2023	Journal of Wood Science

Continua

Título do artigo	Autores	Ano de publicação	Periódico
Influence of fractured wood texture on structural behaviour of timber columns with fibre reinforced polymer reinforcement	Dong, J. F. Yuan, S. C. Wang, Q. Y. Liang, W.	2015	Materials Research Innovations
Square short wood columns strengthened with FRP sheets under compressive load	Zhu, Y. M. Yuan, S. C. Hou, M. Wang, Q. Y.	2013	Applied Mechanics and Materials
The study on timber pier columns strengthened with CFRP hoops in ancient architecture	Xiong, X. Y. Lu, X. X. Xue, R. J.	2016	Advanced Composites Letters

