UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação das Graduações da Álgebra de Jordan das Matrizes Triangulares Superiores e suas relações com as Identidades Polinomiais Graduadas

Gabriel Santana Monteiro

São Carlos-SP
Fevereiro de 2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação das Graduações da Álgebra de Jordan das Matrizes Triangulares Superiores e suas relações com as Identidades Polinomiais Graduadas

Gabriel Santana Monteiro

Orientador: Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Fevereiro de 2026

Monteiro, Gabriel Santana

Classificação das Graduações da Álgebra de Jordan das Matrizes Triangulares Superiores e sua relação com as Identidades Polinomiais Graduadas / Gabriel Santana Monteiro -- 2026.
116f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Dimas José Gonçalves
Banca Examinadora: Dimas José Gonçalves, Manuela da Silva Souza, Humberto Luiz Talpo
Bibliografia

1. Graduações de Álgebras. 2. Álgebra de Jordan das Matrizes Triangulares Superiores. 3. Identidades Polinomiais Graduadas. I. Monteiro, Gabriel Santana. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Curso de Mestrado do candidato Gabriel Santana Monteiro, realizada em 27/02/2026.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFSCar)

Profa. Dra. Manuela da Silva Souza (UFBA)

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa produzido pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho a todos que fizeram parte da minha vida
e a toda comunidade acadêmica de Matemática.

Agradecimentos

A Deus, por ter concedido a bênção de viver, por iluminar e guiar meu caminho todos os dias, por trazer a luz mesmo diante dos obstáculos e por me conceder os dons da sabedoria e da bondade para compartilhar com todos ao meu redor.

À minha família: aos meus pais, Hermes Mário Monteiro e Marlei Monteiro Santana, por proporcionarem o possível e o impossível na minha vida, por estarem presentes durante todo o período da graduação até este momento do mestrado, mesmo com a distância, e por tornarem a maioria dos meus dias mais confortáveis. Sou eternamente grato pelos seus esforços, muitas vezes feitos sem medir ou pensar na natureza da situação, por tê-los como guias e mentores, e pelos ensinamentos que carregam e transmitem em cada etapa da minha vida. Pelo apoio, carinho e amor. Agradeço também ao meu irmão, Ícaro Santana Monteiro, por me encorajar nas situações em que mais necessitei e pelos momentos de diversão, tanto com os jogos quanto com as conversas descontraídas no *Discord*.

Ao professor Dimas José Gonçalves, pelos seus ensinamentos e conselhos que contribuíram fortemente para a minha formação acadêmica durante este período. Agradeço pela orientação cuidadosa, pela disponibilidade constante para esclarecer dúvidas e pela forma rigorosa e, ao mesmo tempo, generosa com que conduziu a orientação. Sua dedicação, organização, conselhos, paciência e clareza de ideias foram fundamentais para meu desenvolvimento e para a elaboração desta pesquisa, ampliando minha compreensão e meus conhecimentos sobre a área de Álgebra e, mais especificamente, sobre PI-álgebras, além de fortalecer meu amadurecimento científico como pesquisador. Sou profundamente grato por toda essa trajetória.

Ao longo da minha jornada na graduação, conheci e reencontrei pessoas que se tornaram fundamentais e pilares essenciais em minha vida. Hoje, apesar da distância, sempre estiveram e se fizeram presentes todos os dias, sendo companheiras, portos seguros e verdadeiras amigas. Destaco, em especial, Alanis Rodrigues Nogueira, Bruna Luíza Messias Alves e Rebeca Marjorie Souza dos Santos. Cada uma pela valiosíssima amizade, por serem minha rede de apoio, de onde sempre tiro parte das minhas forças para me manter firme, por terem apoiado fortemente minha decisão de seguir na carreira acadêmica como pesquisador e docente e por tudo o que me proporcionaram até o momento. Muito obrigado!

À professora e amiga Fernanda Gonçalves de Paula, da Universidade Estadual de Santa Cruz, por ter me apresentado e inserido na área de Álgebra com Identidades Polinomiais, por meio dos estudos realizados nas quatro iniciações científicas e de todas as demais oportunidades, orientações e conselhos que deixaram marcas profundas e inspiradoras na minha trajetória. Tenho imensa admiração e gratidão por tudo, pois foram momentos fundamentais e essenciais para meu amadurecimento pessoal e profissional durante a graduação.

À minha psicóloga, pelo apoio, acolhimento, orientação e suporte profissional, que tiveram impacto importante no meu bem-estar e equilíbrio emocional durante esta jornada.

Às pessoas que, em momentos diversos deste mestrado, contribuíram de alguma forma para a minha caminhada: Gabriela Lye Watanabe, Letícia Gabriele Ribeiro Rocumba, Laurinda Aparecida Ferreira de Morais, Amanda Santos Araújo e Odete Lara Melo Budtinger. Agradeço pelas vivências e experiências, pelo convívio e pelo apoio oferecido ao longo do percurso, contribuindo para um ambiente acadêmico mais acolhedor e colaborativo.

Aos membros da banca, professora Manuela da Silva Souza e professores Humberto Luiz Talpo e Dimas José Gonçalves, pela avaliação cuidadosa deste trabalho e pelas valiosas sugestões que contribuíram significativamente para seu aprimoramento.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar, pelo ensino de qualidade e pelas contribuições oferecidas ao longo da minha formação acadêmica. Em especial, Alex Carlucci Rezende, Humberto Luiz Talpo, Igor Leite Freire, José Ruidival Soares dos Santos Filho, Luiz Roberto Hartmann Júnior e Thaís Maria Dalbelo, cujas disciplinas, indicações, estágio, ensinamentos e conversas enriqueceram de forma significativa este percurso.

Em nome das alunas Lara Borlina Arantes, Marcela Eduarda Belini de Souza e Yuu Higa, agradeço a todos os alunos e alunas do meu estágio na UFSCar, da turma (01/2025) de Fundamentos de Álgebra, pelo acolhimento, participação e presença tanto nas aulas que ministrei quanto nas monitorias. Essa experiência foi a minha primeira oportunidade de preparar e ministrar aulas, elaborar listas e exercícios avaliativos, aplicar provas e conduzir também atividades nas monitorias. Foi um período de grande aprendizado e crescimento pessoal e profissional, no qual pude desenvolver habilidades docentes e compreender mais profundamente a responsabilidade e a importância do trabalho externo e interno em sala de aula. Tenho sincero apreço e admiração por essa turma, que marcou de maneira positiva meu início na docência.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela oportunidade de capacitação proporcionada pelo estágio durante este período do mestrado e pelo apoio financeiro, que tornaram possível a realização dos meus estudos e a minha permanência na universidade.

À UFSCar, Universidade Federal de São Carlos, por ter acolhido minha formação neste ciclo acadêmico e por oferecer um ambiente de aprendizado, pesquisa e convivência que contribuiu decisivamente para meu desenvolvimento pessoal e profissional.

"A vida é uma escalada, mas a vista é ótima."

Miley Cyrus

Resumo

Este trabalho aborda a classificação das graduações por grupos da álgebra de Jordan UJ_n, obtida a partir da álgebra associativa $UT_n(\mathbb{K})$ das matrizes triangulares superiores, munida do produto de Jordan. O estudo insere-se no contexto da Teoria das Identidades Polinomiais, na qual graduações desempenham papel central na compreensão de identidades graduadas e na descrição estrutural de PI-álgebras. Nesta perspectiva, analisamos a classificação das graduações de UJ_n com base nos resultados segundo os quais toda G-graduação de UJ_n, para corpos infinitos de característica diferente de 2, pertence a uma de duas classes de graduações: elementar ou *mirror type* (MT). Além disso, duas graduações são isomorfas se, e somente se, satisfazem as mesmas identidades graduadas. Como ainda se conhece relativamente pouco sobre o comportamento das identidades graduadas dessa álgebra, este trabalho busca consolidar e sistematizar os resultados existentes, contribuindo para uma compreensão mais ampla de uma teoria recente e ainda em desenvolvimento.

Palavras-chave: Álgebras Graduadas, identidades polinomiais graduadas, Matrizes triangulares superiores, Graduações elementares, Graduações *mirror type*.

Abstract

This work deals the classification of group gradings on the Jordan algebra UJ_n, obtained from the associative algebra $UT_n(\mathbb{K})$ of upper triangular matrices, equipped with the Jordan product. The study is situated with in the context of Polynomial Identities Theory, in which gradings play a central role in understanding graded identities and in the structural description of PI-algebras. In this context, we analyze the classification of gradings of UJ_n based on the results according to which every G-gradings of UJ_n, over infinite fields of characteristic different from 2, belongs to one of two classes: elementary or mirror type (MT). Moreover, two gradings are isomorphic if and only if they satisfy the same graded identities. Since relatively little is known about the behavior of the graded identities of this algebra, this work seeks to consolidate and systematize the existing results, contributing to a broader understanding of a recent and still developing theory.

Keywords: Graded algebras, graded polynomial identities, Upper triangular matrix, Elementary gradings, mirror type gradings.

Sumário

Introdução

Este trabalho se insere na área de Álgebra e, mais especificamente, no estudo de álgebras com identidades polinomiais, também conhecidas como PI-álgebras (do inglês *Polynomial Identities Algebra*). A Teoria das Identidades Polinomiais (ou PI-Teoria, do inglês *Polynomial Identities Theory*) tem como um dos seus estudos centrais a descrição das identidades polinomiais de uma dada álgebra, isto é, a determinação de um conjunto gerador das identidades polinomiais que essa álgebra satisfaz. Mais precisamente, uma identidade polinomial para uma álgebra é um polinômio em variáveis não associativas que se anula quando avaliado em quaisquer elementos da álgebra. Assim, uma PI-álgebra é uma álgebra que possui uma identidade polinomial não trivial.

Sejam A uma álgebra associativa sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $a, b \in A$ quaisquer. Sendo a característica de $\mathbb{K}$ diferente de 2, podemos considerar em A o produto de Jordan $a \circ b = \frac{1}{2} \cdot (ab + ba)$, o qual torna o espaço vetorial A uma álgebra de Jordan, que denotamos por A^+. Em particular, estamos interessados na álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ com entradas num corpo $\mathbb{K}$, denotada por $UT_n = UT_n(\mathbb{K})$. Desta maneira, denotamos por $UJ_n = UJ_n(\mathbb{K})$ a álgebra de Jordan $UT_n(\mathbb{K})^+$ obtida a partir do espaço vetorial $UT_n(\mathbb{K})$ munido com o produto de Jordan.

As identidades polinomiais de UJ_2 foram descritas em [14], no caso em que $\mathbb{K}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2 e 3. Em [9], os autores descreveram as identidades polinomiais para UJ_2 quando a característica do corpo $\mathbb{K}$ é 3 e também quando $\mathbb{K}$ é finito. Alterando a definição do produto de Jordan, com a remoção do fator $\frac{1}{2}$, e considerando o caso em que a característica de $\mathbb{K}$ é 2, tem-se que a álgebra UT_2 é uma álgebra de Lie e suas identidades polinomiais foram descritas em [17] e [18], nos casos em que $\mathbb{K}$ é finito e infinito, respectivamente. No entanto, para $n \geqslant 3$, a descrição das identidades polinomiais de UJ_n torna-se consideravelmente mais complexa e permanece em aberto. Uma abordagem alternativa, utilizada com sucesso em diversos contextos dentro da PI-Teoria, consiste em estudar a álgebra por meio de suas possíveis graduações por grupos.

A estrutura graduada revela simetrias internas e permite identificar componentes homogêneos cujos comportamentos refletem propriedades profundas da álgebra. Em muitos casos, graduações distintas correspondem a diferentes conjuntos de identidades polinomiais graduadas, o que torna natural investigar quais graduações são possíveis para uma dada álgebra e como elas se relacionam entre si.

Assim, outra noção fundamental neste trabalho é a de graduação de uma álgebra. Sejam G um grupo e A uma álgebra. Dizemos que A é uma álgebra G-graduada se existe uma decomposição, em subespaços, $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ tal que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ para quaisquer $g, h \in G$. Os elementos dos subespaços A_g são chamados homogêneos de grau g. Esta noção de graduação fornece uma decomposição de A em subespaços vetoriais compatível com a estrutura multiplicativa da álgebra e do grupo, permitindo estudar suas propriedades a partir do comportamento de suas componentes homogêneas.

O estudo de álgebras graduadas teve início no âmbito de Álgebra Comutativa, cujo intuito era generalizar as propriedades de anéis de polinômios. Na Álgebra Associativa, o desenvolvimento dessa teoria esteve intimamente ligado aos trabalhos de Wall, iniciados em [22], que classificou álgebras simples de dimensão finita sobre o grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$, e posteriormente aos resultados de Kemer, que evidenciaram a importância das graduações, veja [12] e [13]. Tornou-se então claro o papel das álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas e de suas identidades polinomiais.

Quanto às G-graduações em $UT_n(\mathbb{K})$, uma série de resultados consolidou a classificação de graduações em diferentes cenários. Inicialmente foi provado em [21] que toda G-graduação de $UT_n(\mathbb{K})$ é, a menos de isomorfismo graduado, uma G-graduação elementar. Em [6], obtiveram a classificação e a descrição quanto às identidades polinomiais graduadas quando $\mathbb{K}$ é um corpo infinito. Esse resultado foi seguido por [10], que tratou do caso em que $\mathbb{K}$ é um corpo finito.

Voltamos nossa atenção para a álgebra UJ_n. Quando $n = 2$, toda $\mathbb{Z}_2$-graduação de UJ_2 foi descrita em [14], com contribuições posteriores em [4] e [11]. Nesse contexto, Koshlukov e Yasumura (2017) obtiveram uma classificação para as graduações de UJ_n. Os autores provaram em [15] que se $\mathbb{K}$ é infinito com característica diferente de 2, então toda G-graduação de UJ_n, a menos de isomorfismo graduado, é uma das duas famílias distintas de graduações:

(1) elementares, nas quais todas as matrizes canônicas $E_{i,j}$, com $i \leqslant j$, são homogêneas, e que podem ser determinadas por uma sequência de graus, a menos de reversão;

(2) ou, *mirror type* (MT), em que pares de entradas simétricas com respeito ao eixo secundário são homogêneos e compartilham graus compatíveis com a involução natural de $UT_n(\mathbb{K})$.

Ademais, em [15] os autores provaram ainda que duas G-graduações de UJ_n são isomorfas como álgebras graduadas se, e somente se, elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais graduadas.

Posto isto, o objetivo central desta dissertação é apresentar, detalhar e sistematizar os resultados obtidos em [15] sobre a classificação das graduações de UJ_n e suas identidades graduadas, que constitui nossa referência principal.

O texto está dividido em três capítulos. O primeiro capítulo contém conceitos, exemplos e resultados básicos da teoria, bem como os objetos de estudo são introduzidos. No segundo capítulo são apresentados os conceitos dessas duas famílias de graduações (elementares e MT) de UJ_n, descrevendo e classificando cada uma delas, com construções formais, exemplos, resultados e critérios de distinção. O terceiro e último capítulo é dedicado ao estudo de todas as graduações de UJ_n, apresentando a classificação geral e mostrando que estas são exatamente todas as graduações possíveis de UJ_n, e classificando quanto às identidades graduadas.

Para uma boa compreensão deste trabalho, faz-se necessário que o(a) leitor(a) tenha uma familiaridade com noções básicas de Álgebra Linear e Abstrata, veja as referências [3], [7], [8] e [16].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentados os conceitos preliminares que constituem a base teórica necessária ao desenvolvimento desta dissertação. Iniciamos com o estudo da noção de álgebra, estrutura cuja compreensão é fundamental para a formulação, nas seções posteriores, dos principais elementos da teoria de álgebras graduadas.

O objetivo central deste capítulo é estabelecer o aparato teórico essencial que sustentará as noções e os resultados desenvolvidos nos capítulos seguintes. Entre os tópicos abordados encontram-se: álgebras e algumas propriedades básicas, involuções, álgebras livres, identidades polinomiais e PI-álgebras, além da teoria de álgebras graduadas, involuções graduadas e identidades graduadas.

Ao longo do texto, denotamos por $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário e, a menos que haja indicação contrária, todos os espaços vetoriais e álgebras serão considerados sobre $\mathbb{K}$. Ademais, destacamos que grande parte da fundamentação aqui apresentada se apoia nas referências [7], [19] e [20], que serviram como suporte teórico para a elaboração deste capítulo. Ressaltamos novamente que é necessário a familiaridade com noção básicas de Álgebra Linear e Abstrata, veja as referências [3], [8] e [16].

1.1 Conceitos básicos de Álgebras

Esta seção é dedicada ao estudo de álgebras, apresentando um dos principais objetos que são as matrizes triangulares superiores. Introduzimos as noções de subálgebras, ideais, homomorfismos de álgebras e álgebras de Jordan. Examinamos alguns exemplos para facilitar a compreensão dos conceitos, bem como apresentamos resultados necessários para sustentar os argumentos empregados nos lemas, proposições e teoremas dos capítulos seguintes.

Definição 1.1.1. Uma álgebra $(A,+,\odot,\cdot)$ sobre $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $(A,+,\cdot)$ equipado com uma operação binária

$$\odot : A \times A \to A,$$

que é distributiva em cada variável e compatível com a multiplicação por escalares. Em outras palavras, para quaisquer $a, b, c \in A$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, valem:

(i) $(a+b) \odot c = a \odot c + b \odot c \quad$ e $\quad a \odot (b+c) = a \odot b + a \odot c$;

(ii) $\alpha \cdot (a \odot b) = (\alpha \cdot a) \odot b = a \odot (\alpha \cdot b)$.

Entendendo essa estrutura apresentada, como de costume, definamos algumas propriedades importantes nesta teoria, uma delas, relacionada ao produto, é apresentada na definição a seguir.

Definição 1.1.2. Dizemos que uma álgebra $(A, +, \odot, \cdot)$ é:

(a) associativa quando $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$ para quaisquer $a, b, c \in A$;

(b) comutativa quando $a \odot b = b \odot a$ para quaisquer $a, b \in A$;

(c) unitária (ou, com unidade) quando existe $1_A \in A$ de modo que

$$a \odot 1_A = a = 1_A \odot a$$

para todo $a \in A$.

Usualmente, para simplificar a notação, denotamos a álgebra $(A, +, \odot, \cdot)$ apenas por A. Essa simplicidade também é adotada para espaços vetoriais, grupos e outras estruturas algébricas. Além disso, para $a, b \in A$, é comum escrevermos ab em vez de $a \odot b$. Do mesmo modo, quando não houver ambiguidade, utilizamos αb no lugar de $\alpha \cdot b$, para $\alpha \in \mathbb{K}$.

Vejamos agora um exemplo importante e recorrente neste trabalho, para facilitar o entendimento das definições apresentadas.

Exemplo 1.1.3. O espaço vetorial $UT_n(\mathbb{K})$ de todas matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, equipado com o produto usual de matrizes, é uma álgebra. Mais precisamente, dados $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in UT_n(\mathbb{K})$, o produto $C = AB = (c_{ik})$ é definido por

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}, \qquad 1 \leqslant i, k \leqslant n.$$

De fato, primeiramente, sejam $A, B, C \in UT_n(\mathbb{K})$. Para a distributividade à esquerda, escrevamos

$$D = (A+B)C = (d_{ik}).$$

Desta maneira, obtemos

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij} + b_{ij}] c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij} c_{jk} + b_{ij} c_{jk}] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{jk},$$

o que mostra que

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Procedendo-se de maneira análoga, temos

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Para a compatibilidade com escalares, sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A, B \in UT_n(\mathbb{K})$. Então, devemos ter

$$\begin{aligned}
[\alpha \cdot A]B &= \Big(\sum_{j=1}^{n} [\alpha a_{ij}] b_{jk}\Big) \\
&= \alpha \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\Big) \\
&= \alpha \cdot [AB] \\
&= \alpha \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\Big) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} [\alpha b_{jk}]\Big) \\
&= A[\alpha \cdot B].
\end{aligned}$$

Portanto, $UT_n(\mathbb{K})$ satisfaz todas as condições da Definição 1.1.1 e, assim, é uma álgebra.

O exemplo acima apresenta um dos objetos mais relevantes deste trabalho: a álgebra das matrizes triangulares superiores. Diante disso, observamos que esta álgebra apresentada possui algumas propriedades com relação a operação de produto. Desta maneira, $UT_n(\mathbb{K})$ é classificada da seguinte maneira:

Afirmação 1.1.4. A álgebra $UT_n(\mathbb{K})$ é associativa com unidade.

Sejam $A, B, C \in UT_n(\mathbb{K})$. Definamos

$$U = AB = (u_{ik}) \quad \text{e} \quad V = BC = (v_{jl}).$$

Então, a (i,l)-entrada das matrizes UC e AV são iguais, pois:

$$\begin{aligned}
(UC)_{il} &= \sum_{k=1}^{n} u_{ik} c_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\Big) c_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} c_{kl}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_{jl} \\
&= (AV)_{il}.
\end{aligned}$$

Assim, $(AB)C = A(BC)$, mostrando que o produto é associativo.

Agora, seja $I_n \in UT_n(\mathbb{K})$, onde $I = (\delta_{ij})$ em que δ_{ij} é o símbolo de *Kronecker* dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Seja $A \in UT_n(\mathbb{K})$. Escrevamos

$$G = AI_n = (g_{ij}).$$

Então,

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij},$$

ou seja,

$$G = AI_n = A.$$

Usando um raciocínio análogo ao anterior, resulta em

$$I_nA = A.$$

Logo, obtemos

$$I_nA = A = AI_n$$

para qualquer $A \in UT_n(\mathbb{K})$ e assim, I_n é a unidade em $UT_n(\mathbb{K})$.

Consequentemente, segue-se que $UT_n(\mathbb{K})$ é a álgebra associativa das matrizes triangulares superiores, com a unidade sendo a matriz

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

que é chamada matriz identidade de ordem $n \times n$.

É importante destacarmos, no Exemplo 1.1.3, as matrizes $E_{i,j}$, chamadas matrizes canônicas (ou elementares), para $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Cada $E_{i,j}$ é de ordem n e possui uma única entrada não nula, igual a 1, na i-ésima linha e j-ésima coluna, isto é,

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & (i). \\ (j) & \end{array}$$

Com isso, observamos que a matriz identidade é escrita como combinação linear de matrizes canônicas, a saber,

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i} = E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{n,n}.$$

Essa decomposição evidencia como cada entrada de uma matriz geral pode ser controlada individualmente a partir dessas matrizes canônicas. Além disso, recordemos que o produto entre essas matrizes é dado por

$$E_{i,j}E_{l,k} = \begin{cases} E_{i,k}, & \text{se } j = l \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Esses fatos serão úteis em diversos momentos ao longo deste trabalho, pois nos fornece uma ferramenta conveniente para manipularmos elementos de $UT_n(\mathbb{K})$ de forma explícita.

Antes de abordarmos as noções de subálgebra e de ideal, convém destacar um subconjunto particularmente importante de qualquer álgebra: o seu centro. Esse conjunto reúne os elementos que comutam com todos os demais e, portanto, desempenham papel fundamental na descrição de certos tipos de involuções apresentadas posteriormente.

Definição 1.1.5. Seja A uma álgebra. Definimos o subconjunto $Z(A)$ de A como sendo

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$$

e dizemos que $Z(A)$ é o centro da álgebra A.

Uma vez apresentada a noção de centro de uma álgebra, passamos agora para a noção de subálgebra, que descreve subconjuntos de uma álgebra que preservam sua estrutura algébrica. Tal conceito permite identificar partes de uma álgebra que, por si só, herdam naturalmente as operações definidas no ambiente maior.

Definição 1.1.6. Sejam A uma álgebra e S um subespaço vetorial de A. Dizemos que S é uma subálgebra de A se é fechado para o produto, ou seja, $s_1, s_2 \in S$ implica em $s_1 s_2 \in S$.

Por exemplo, o centro $Z(A)$ de uma álgebra A é uma subálgebra de A. No que segue, vejamos um dos conceitos estruturais mais fundamentais em Álgebra: o de ideal. Assim como ocorre na Teoria de Anéis, os ideais desempenham papel essencial na construção de quocientes, na análise de homomorfismos e na classificação de resultados universais, como o Teorema dos Homomorfismos.

Definição 1.1.7. Sejam A uma álgebra e I um subespaço vetorial de A. Dizemos que I é um ideal de A se $xa, ax \in I$ para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$.

Embora todo ideal seja, em particular, um subespaço vetorial de A, as noções de subálgebra e ideal diferem de maneira essencial. Enquanto uma subálgebra exige apenas o fechamento em relação ao produto de seus próprios elementos, um ideal requer estabilidade em relação à multiplicação por elementos arbitrários da álgebra.

Em particular, todo ideal de uma álgebra A é uma subálgebra de A, mas a recíproca nem sempre é verdadeira. Dessa forma, a condição adicional imposta na definição de ideal garante que o produto no espaço quociente esteja bem definido, o que nos permite introduzir a seguir a noção de álgebra quociente.

Definição 1.1.8. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. O espaço vetorial quociente A/I munido do produto

$$(a+I)(b+I) = (ab)+I,$$

para quaisquer $a,b \in A$, é denominado álgebra quociente de A por I. Por simplicidade, denotamos a classe lateral $(a+I)$ simplesmente por $\overline{a}$.

A noção de álgebra gerada por um conjunto será particularmente útil em construções posteriores, como na definição de álgebras livres e no estudo de identidades polinomiais. Antes disso, definamos o conceito de subálgebra gerada por um conjunto.

Definição 1.1.9. Sejam A uma álgebra e $S \subseteq A$ um subconjunto não vazio de A. Definimos a subálgebra gerada por S, denotada por $\langle S \rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S.

Por exemplo, se A é uma álgebra associativa, então $\langle S \rangle$ é o subespaço vetorial de A gerado pelos elementos $s_1 s_2 \cdots s_n$ tais que $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$, $n \geq 1$.

Definição 1.1.10. Sejam A uma álgebra e $S \subseteq A$ um subconjunto não vazio de A. Dizemos que A é uma álgebra gerada por S se A coincide com a sua subálgebra gerada por S.

A seguir, apresentamos uma ferramenta extremamente importante e recorrente em diversas áreas da Álgebra: os homomorfismos. Essas aplicações preservam as estruturas envolvidas e o comportamento dos objetos de estudo, permitindo compreender um espaço desconhecido a partir de outro já conhecido.

Em Álgebra Linear, tal objeto é denominado de maneira diferenciada, como Transformação linear ou mapa linear, em razão da estrutura particular dos espaços vetoriais. No entanto, a ideia e a noção permanecem essencialmente as mesmas. Assim, definamos a seguir o conceito de homomorfismo de álgebras.

Definição 1.1.11. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo das álgebras A e B quando $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para quaisquer $a,b \in A$. Além disso, quando A e B são álgebras com unidade, assumimos $\varphi(1_A) = 1_B$ onde 1_A e 1_B são as unidades de A e B, respectivamente.

As designações utilizadas para os homomorfismos de álgebras coincidem com aquelas adotadas na Teoria de Anéis. Entre elas, destacamos duas que serão relevantes mais adiante:

(*i*) Um homomorfismo $\varphi : A \to B$ bijetivo é chamado isomorfismo de A sobre B. Em tal situação, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas, que é denotado por $A \cong B$ (ou, $A \overset{\varphi}{\cong} B$).

(*ii*) Quando o homomorfismo tem domínio e contradomínio iguais, isto é, $\varphi \colon A \to A$, ele recebe o nome de endomorfismo de A. O conjunto de todos os endomorfismos de A será denotado por

$$End(A) = \{\varphi \colon A \to A \mid \varphi \text{ é endomorfismo}\}.$$

De modo similar a Teoria de Anéis, definamos o núcleo e a imagem de φ, isto é,

$$ker(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0_B\} \quad \text{e} \quad im(\varphi) = \{\varphi(a) \in B \mid a \in A\},$$

respectivamente. Além disso, não é tão difícil verificar que $ker(\varphi)$ e $im(\varphi)$ possuem estruturas de ideal de A e subálgebra de B, respectivamente. Enunciemos agora dois resultados familiares que são o Teorema dos Homomorfismos para álgebras e o seu corolário.

Teorema 1.1.12 (Teorema dos Homomorfismos)**.** *Sejam I um ideal de A e $\varphi \colon A \to B$ um homomorfismo de álgebras tal que $I \subseteq ker(\varphi)$. Então, a função*

$$\overline{\varphi} \colon {}^{A}\!/_{I} \to B$$

dada por $\overline{\varphi}(a+I) = \varphi(a)$ é um homomorfismo de álgebras.

Corolário 1.1.13 (Teorema dos Isomorfismos)**.** *Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, então*

$${}^{A}\!/_{ker(\varphi)} \cong im(\varphi).$$

A seguir, estabelecemos alguns conceitos e propriedades importantes que serão frequentemente usados nos próximos capítulos. Começamos definindo um objeto que desempenhará papel central na caracterização das álgebras de Jordan, que permite analisar de forma mais precisa o comportamento do produto em álgebras não associativas.

Definição 1.1.14. Sejam A uma álgebra e $a,b,c \in A$. Dizemos que

$$(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$$

é o associador de a,b e c, respectivamente.

Antes de apresentarmos a noção de álgebra de Jordan, vejamos um resultado que caracteriza a associatividade a partir do comportamento do associador.

Lema 1.1.15. *Se o associador de quaisquer três elementos de uma álgebra A for nulo, então A é associativa.*

Como observamos, esse lema fornece uma ferramenta útil para verificar quando uma álgebra é associativa, simplificando a verificação de propriedades estruturais em exemplos futuros.

Agora, apresentamos a noção de álgebra de Jordan, que introduzirá o principal objeto de estudo deste trabalho. Trata-se de uma classe de álgebras com propriedades atribuídas através do associador definido anteriormente.

Definição 1.1.16. Consideremos $char(\mathbb{K}) \neq 2$ e seja A uma álgebra comutativa. Dizemos que A é uma álgebra de Jordan quando $(a^2, b, a) = 0$ para quaisquer $a, b \in A$. Em outras palavras, A é dita de Jordan se satisfaz as seguintes condições:

(i) $ab = ba$,

(ii) $((a^2)b)a = (a^2)(ba)$

para todos $a, b \in A$.

Um fato que observamos na definição acima é que toda álgebra associativa comutativa é uma álgebra de Jordan. No entanto, nem toda álgebra é de Jordan. Desta maneira, existe um procedimento natural que permite construir uma álgebra de Jordan a partir de qualquer álgebra associativa. Para tanto, definamos um produto simetrizado que servirá como ferramenta para formalizar esse processo.

Definição 1.1.17. Consideremos $char(\mathbb{K}) \neq 2$ e seja A uma álgebra associativa. Dados $a, b \in A$, definimos o produto de Jordan $a \circ b$ como sendo

$$a \circ b = \frac{1}{2} \cdot (ab + ba).$$

Apresentamos a seguir uma maneira de obter uma álgebra de Jordan a partir de uma álgebra A associativa dada.

Lema 1.1.18. *Seja A uma álgebra associativa. O espaço vetorial A equipado com o produto de Jordan é denotado por A^+. Então, A^+ é uma álgebra de Jordan.*

Demonstração. Sejam $a, b \in A$. Então devemos ter:

(1) $a \circ b = \frac{1}{2} \cdot (ab + ba) = \frac{1}{2} \cdot (ba + ab) = b \circ a.$

(2) Inicialmente, percebamos que $a \circ a = a^2$ pois

$$a \circ a = \frac{1}{2} \cdot (aa + aa) = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + a^2) = \frac{1}{2} \cdot (2a^2) = a^2.$$

Diante disso, temos

$$\begin{aligned}
(a^2)\circ(b\circ a) &= (a^2)\circ\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(ba+ab)\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(a^2(ba+ab))+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot((ba+ab)a^2)\right]\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(a^2ba+a^2ab+baa^2+aba^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(a^2ba+a^3b+ba^3+aba^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(a^2ba+ba^2a+aa^2b+aba^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot((a^2b+ba^2)a)+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(a(a^2b+ba^2))\right]\\
&= \left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(a^2b+ba^2)\right]\circ a\\
&= ((a^2)\circ b)\circ a.
\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos que A^+ é uma álgebra de Jordan. □

O lema acima formaliza o processo que toda álgebra associativa pode ser transformada em uma álgebra de Jordan. Em particular, sendo $char(\mathbb{K})\neq 2$, definamos o produto de Jordan na álgebra associativa $UT_n(\mathbb{K})$ e denotamos a álgebra $UT_n(\mathbb{K})^+$ como sendo $UJ_n(\mathbb{K})$, que é a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores $n\times n$ sobre $\mathbb{K}$.

A seguir, apresentamos propriedades fundamentais satisfeitas por toda álgebra de Jordan, que serão frequentemente utilizadas posteriormente.

Lema 1.1.19. *Sejam A uma álgebra de Jordan e $u,v,w\in A$. Valem as seguintes relações:*

(1) $(w,v,u)=-(u,v,w)$

(2) $(v,u,w)=(u,v,w)-(u,w,v)$.

Demonstração. Para $u,v,w\in A$, tem-se:

(1) $(w,v,u)=(wv)u-w(vu)=u(wv)-(vu)w=-(-u(wv)+(vu)w)=-((uv)w-u(vw))=-(u,v,w)$.

(2)

$$\begin{aligned}
(u,v,w)-(u,w,v) &= (uv)w-u(vw)-[(uw)v-u(wv)]\\
&= (uv)w-u(vw)-(uw)v+u(wv)\\
&= (uv)w-(uw)v-u(wv)+u(wv)\\
&= (uv)w-(uw)v\\
&= (vu)w-v(uw)\\
&= (v,u,w),
\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. □

Lema 1.1.20. *Seja A uma álgebra de Jordan. Então*

$$((uv)c)d+((ud)c)v+((vd)c)u=(uv)(cd)+(uc)(vd)+(ud)(vc)$$

para todos $u,v,c,d\in A$.

Demonstração. Como A é uma álgebra de Jordan, temos $(u^2,c,u)=0$ para todos $u,c\in A$. Em particular, $((u+v)^2,c,(u+v))=0$ para todos $u,v,c\in A$. Como o associador é "linear" em cada uma das suas entradas, devemos ter:

$$\begin{aligned}
0 &= ((u+v)^2,c,(u+v))\\
&= ((u^2+2uv+v^2),c,(u+v))\\
&= (u^2,c,u)+2(uv,c,u)+(v^2,c,u)+(u^2,c,v)+2(uv,c,v)+(v^2,c,v)\\
&= 0+2(uv,c,u)+(v^2,c,u)+(u^2,c,v)+2(uv,c,v)+0\\
&= 2(uv,c,u)+(v^2,c,u)+(u^2,c,v)+2(uv,c,v). \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Substituindo u por $u+d$ em (1.1), tem-se:

$$2((u+d)v,c,(u+d))+(v^2,c,(u+d))+((u+d)^2,c,v)+2((u+d)v,c,v)=0. \qquad (1.2)$$

Expandindo cada termo de (1.2), e utilizando novamente (1.1), os termos

$$2(uv,c,u)+(v^2,c,u)+(u^2,c,v)+2(uv,c,v) \quad \text{e} \quad 2(dv,c,d)+(v^2,c,d)+(d^2,c,v)+2(dv,c,v)$$

se anulam. Consequentemente, obtemos

$$2(uv,c,d)+2(dv,c,u)+2(ud,c,v)=0.$$

Multiplicando a expressão acima por $\frac{1}{2}$ em ambos os lados da igualdade, temos:

$$(uv,c,d)+(dv,c,u)+(ud,c,v)=0.$$

Com isso, devemos ter:

$$((uv)c)d-(uv)(cd)+((dv)c)u-(dv)(cu)+((ud)c)v-(ud)(cv)=0.$$

Logo, obtemos:

$$((uv)c)d+((ud)c)v+((vd)c)u=(uv)(cd)+(uc)(vd)+(ud)(vc),$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 1.1.21. *Seja A uma álgebra de Jordan. Então*

$$((uv)c)d+((ud)c)v+((vd)c)u = ((uv)d)c+((uc)d)v+((vc)d)u$$

para todos $u,v,c,d \in A$.

Demonstração. Dados $u,v,c,d \in A$, segue-se do lema anterior que

$$\begin{aligned} ((uv)c)d+((ud)c)v+((vd)c)u &= (uv)(cd)+(uc)(vd)+(ud)(vc) \\ &= (uv)(dc)+(ud)(vc)+(uc)(vd) \\ &= ((uv)d)c+((uc)d)v+((vc)d)u, \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. □

As relações obtidas nos Lemas 1.1.20 e 1.1.21 desempenham papel importante na manipulação de expressões envolvendo associadores, simplificando diversos cálculos ao longo do texto.

1.2 Involuções

Passamos agora ao estudo das involuções, que são antiautomorfismos que permitem decompor álgebras em subespaços simétricos e antissimétricos. Posto isto, esta seção é dedicada aos conceitos, exemplos e resultados que servirão como ferramentas para o desenvolvimento deste trabalho. Apresentamos a noção de involução, exemplificando através da álgebra definida no Exemplo 1.1.3 (tanto no caso particular $n=2$ quanto para o geral). Ao final, enunciamos a classificação das involuções do primeiro tipo de $UT_n(\mathbb{K})$ obtida por Di Vincenzo, Koshlukov e La Scala em [5].

Definição 1.2.1. Sejam A uma álgebra associativa com unidade e $*\colon A \to A$ uma função. Dizemos que $*$ é uma involução em A se, para quaisquer $a,b \in A$ temos:

(a) $(a+b)^* = a^* + b^*$;

(b) $(ab)^* = b^* a^*$;

(c) $(a^*)^* = a$.

Dizemos ainda que A é uma álgebra com involução $*$ e denotamos por $(A,*)$.

Podemos definir uma involução no Exemplo 1.1.3 (para $n=2$) da seguinte maneira:

Exemplo 1.2.2. Definamos $*\colon UT_2(\mathbb{K}) \to UT_2(\mathbb{K})$ como sendo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

onde $a,b,c \in \mathbb{K}$. Mostremos que $*$ é uma involução em $UT_2(\mathbb{K})$. Sejam $A,B \in UT_2(\mathbb{K})$ onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Então, devemos ter:

(a) $(A+B)^* = A^* + B^*$, pois

$$\begin{aligned}
(A+B)^* &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}^* \\
&= \begin{pmatrix} a_{22}+b_{22} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{11}+b_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{22} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{pmatrix} \\
&= A^* + B^*.
\end{aligned}$$

(b) $(AB)^* = B^*A^*$ porque

$$\begin{aligned}
(AB)^* &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}^* \\
&= \begin{pmatrix} a_{22}b_{22} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{11}b_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{22}a_{22} & b_{22}a_{12}+b_{12}a_{11} \\ 0 & b_{11}a_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{22} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} \\
&= B^*A^*
\end{aligned}$$

(c) $(A^*)^* = A$ uma vez que

$$(A^*)^* = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

Logo, $*$ é uma involução sobre $UT_2(\mathbb{K})$.

O exemplo acima servirá como modelo para casos de maior dimensão. Uma vez estabelecida a noção de involução, torna-se natural decompor a álgebra conforme a ação dessa operação. Para isto, definiremos a seguir tal decomposição e seus elementos.

Definição 1.2.3. Seja $(A,*)$ uma álgebra com involução $*$. Dizemos que $a \in A$ é um elemento simétrico se $a^* = a$. Dizemos também que $a \in A$ é um elemento antissimétrico quando $a^* = -a$. Desta maneira, os seguintes subconjuntos de A:

$$A^{(+)} = \{a \in A : a^* = a\} \quad \text{e} \quad A^{(-)} = \{a \in A : a^* = -a\}$$

são chamados de componentes simétrica e antissimétrica, respectivamente.

Se a involução acima é uma transformação linear (por exemplo, involução do primeiro tipo como veremos no que segue), então as duas componentes são subespaços vetoriais de A e, por meio da igualdade

$$a = \frac{a+a^*}{2} + \frac{a-a^*}{2},$$

vale que $A = A^{(+)} \oplus A^{(-)}$. Essa decomposição será especialmente útil quando tratarmos da classificação das involuções de $UT_n(\mathbb{K})$ e de graduações seguidas por uma involução. Vejamos um exemplo para facilitar a compreensão.

Exemplo 1.2.4. Da involução definida no Exemplo 1.2.2, podemos extrair os seguintes subespaços simétrico e antissimétrico:

$$UT_2(\mathbb{K})^{(+)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{e} \quad UT_2(\mathbb{K})^{(-)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{K} \right\}.$$

Dada uma matriz $A \in UT_2(\mathbb{K})^{(+)}$, temos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{11} I_2 + a_{12} E_{1,2}.$$

Assim, uma base para $UT_2(\mathbb{K})^{(+)}$ é dada pelo conjunto linearmente independente $\{I_2, E_{1,2}\}$. Agora, sendo $B \in UT_2(\mathbb{K})^{(-)}$ obtemos

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{11} \end{pmatrix} = b_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = b_{11} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = b_{11}(E_{1,1} - E_{2,2}).$$

Portanto, uma base para $UT_2(\mathbb{K})^{(-)}$ é o conjunto linearmente independente $\{E_{1,1} - E_{2,2}\}$.

A seguir, apresentamos um outro exemplo de involução em $UT_2(\mathbb{K})$, que inverte o sinal das entradas fora da diagonal e gera estruturas distintas sobre a mesma álgebra

Exemplo 1.2.5. A função $s\colon UT_2(\mathbb{K}) \to UT_2(\mathbb{K})$ definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

onde $a,b,c \in \mathbb{K}$, é uma involução sobre $UT_2(\mathbb{K})$. A prova de tal fato segue-se de maneira análoga ao Exemplo 1.2.2.

Entre as involuções possíveis, há uma classe relevante nesta literatura chamada involução do primeiro tipo, pois preserva o centro da álgebra e apresenta o bom comportamento estrutural. Assim, definamos a seguir tal noção.

Definição 1.2.6. Seja A uma álgebra associativa com unidade. Dizemos que $*$ é uma involução do primeiro tipo em A se $*$ for uma involução e $a^* = a$ para todo $a \in Z(A)$.

Em particular, segue-se da definição acima que

$$(\lambda a + b)^* = \lambda a^* + b^*$$

e assim, toda involução do primeiro tipo é uma transformação linear. Mas, nem toda involução é uma transformação linear. Por exemplo, a involução $*\colon UT_2(\mathbb{C}) \to UT_2(\mathbb{C})$ definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} \overline{c} & -\overline{b} \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix},$$

onde $a,b,c \in \mathbb{C}$ e $\overline{a}$ denota o conjugado de a, não é uma transformação linear. De fato, para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $A \in UT_2(\mathbb{C})$, temos

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*.$$

Como, em geral, $\lambda \neq \overline{\lambda}$, obtemos

$$\lambda A^* \neq \overline{\lambda} A^*.$$

A partir do Exemplo 1.2.4, notemos que a involução do Exemplo 1.2.2 é do primeiro tipo. A seguir, comentamos um pouco, sem se aprofundar muito, sobre o caso geral de todas as involuções do primeiro tipo em $UT_n(\mathbb{K})$ descritas em [5].

Exemplo 1.2.7. Consideremos a álgebra $UT_n(\mathbb{K})$ das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Tomemos a matriz permutação J em $M_n(\mathbb{K})$ dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definamos $*\colon UT_n(\mathbb{K}) \to UT_n(\mathbb{K})$ como sendo $A^* = JA^tJ$ onde A^t denota a matriz transposta de A. Observamos, com simplicidade, que $*$ satisfaz as condições de involução:

(a) $(A+B)^* = J(A+B)^tJ = J(A^t+B^t)J = JA^tJ + JB^tJ = A^* + B^*$;

(b) $(AB)^* = J(AB)^tJ = JB^tA^tJ = JB^tI_nA^tJ = JB^t(JJ)A^tJ = (JB^tJ)(JA^tJ) = B^*A^*$;

(c) $(A^*)^* = (JA^tJ)^* = J(JA^tJ)^tJ = J(J^t(A^t)^tJ^t)J = (JJ^t)A(J^tJ) = I_nAI_n = A$

onde I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$ e notemos que $J = J^{-1}$. Além disso, com relação às matrizes canônicas, notamos que $E_{i,j}^*$ é dada por $E_{n-j+1,n-i+1}$. De fato, denotamos por $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{K}^n$, onde e_k é o vetor coluna cuja única entrada não nula é 1 na k-ésima posição. Com isso, tem-se

$$E_{i,j} = e_i e_j^t.$$

Pela definição de $*$, temos

$$E_{i,j}^* = JE_{i,j}^tJ = JE_{j,i}J.$$

Como $Je_k = e_{n-k+1}$ para todo k, temos

$$\begin{aligned} JE_{j,i}J &= J(e_je_i^t)J \\ &= (Je_j)(e_i^tJ) \\ &= e_{n-j+1}e_{n-i+1}^t \\ &= E_{n-j+1,n-i+1}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$E_{i,j}^* = E_{n-j+1,n-i+1}.$$

Para ilustrar a involução acima, consideremos o caso particular $n = 5$ no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.8. Seja $A \in UT_5(\mathbb{K})$ onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Então, a transposta de A é dada por

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & 0 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando A^t à esquerda pela matriz permutação

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$JA^t = \begin{pmatrix} a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, obtemos

$$A^* = JA^tJ = \begin{pmatrix} a_{55} & a_{45} & a_{35} & a_{25} & a_{15} \\ 0 & a_{44} & a_{34} & a_{24} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Ainda considerando $UT_n(\mathbb{K})$, temos outra involução definida a partir do Exemplo 1.2.7.

Exemplo 1.2.9. Seja $n = 2m$ um inteiro par. Tomemos a matriz D em $M_n(\mathbb{K})$ dada por

$$D = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix},$$

onde I_m é a matriz identidade de ordem $m \times m$. Definamos uma involução s em $UT_n(\mathbb{K})$ pondo

$$A^s = DA^*D^{-1}$$

para toda matriz $A \in UT_n(\mathbb{K})$, em que $*$ é a involução definida no Exemplo 1.2.7. Procedendo de maneira análoga ao Exemplo 1.2.7, prova-se que s é uma involução chamada simplética de $UT_n(\mathbb{K})$.

Para melhorar a compreensão, vejamos a seguir o caso particular $n = 4$ (isto é, $m = 2$) da involução definida acima.

Exemplo 1.2.10. Consideremos $A \in UT_4(\mathbb{K})$ onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Então, devemos ter as matrizes

$$A^* = JA^tJ = \begin{pmatrix} a_{44} & a_{34} & a_{24} & a_{14} \\ 0 & a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como D é uma matriz diagonal, multiplicando A^* à esquerda pela matriz D, temos

$$DA^* = \begin{pmatrix} a_{44} & a_{34} & a_{24} & a_{14} \\ 0 & a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{22} & -a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{11} \end{pmatrix}.$$

Logo, obtemos

$$A^s = DA^*D^{-1} = DA^*D = \begin{pmatrix} a_{44} & -a_{34} & -a_{24} & -a_{14} \\ 0 & a_{33} & -a_{23} & -a_{13} \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Antes de enunciarmos o resultado que Di Vincenzo, Koshlukov e La Scala obtiveram em [5], definamos o conceito de homomorfismo de álgebras com involução para que, desta maneira, apresentemos essa classificação das involuções do primeiro tipo de $UT_n(\mathbb{K})$.

Definição 1.2.11. Sejam $(A,*)$ e $(B,\bullet)$ álgebras com involuções e $\varphi\colon (A,*) \to (B,\bullet)$ uma aplicação. Dizemos que φ é um homomorfismo de álgebras com involução (ou, $*$-homomorfismo) se φ for um homomorfismo de álgebras e para todo $a \in A$ tem-se $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^\bullet$.

A partir disso, podemos dizer que álgebras com involução $(A,*)$ e $(B,\bullet)$ são isomorfas se existe um $*$-isomorfismo $\varphi\colon (A,*) \to (B,\bullet)$, isto é, se houver um $*$-homomorfismo bijetivo. Quando isso ocorre, denotamos por $(A,*) \cong (B,\bullet)$.

O teorema a seguir classifica as involuções do primeiro tipo de $UT_n(\mathbb{K})$.

Teorema 1.2.12. [5] *Sejam $*$ e s as involuções do primeiro tipo definidas nos Exemplos 1.2.7 e 1.2.9 da álgebra $UT_n(\mathbb{K})$. Se $\bullet$ é uma involução do primeiro tipo em $UT_n(\mathbb{K})$ e n é par, então*

$$(UT_n(\mathbb{K}),\bullet) \cong (UT_n(\mathbb{K}),*) \quad \text{ou} \quad (UT_n(\mathbb{K}),\bullet) \cong (UT_n(\mathbb{K}),s),$$

$$e \quad (UT_n(\mathbb{K}),*) \ncong (UT_n(\mathbb{K}),s).$$

Caso contrário, se n é ímpar, então

$$(UT_n(\mathbb{K}),\bullet) \cong (UT_n(\mathbb{K}),*).$$

Essa classificação mostra que toda involução do primeiro tipo de $UT_n(\mathbb{K})$ é isomorfa a uma das duas involuções fundamentais apresentadas nos Exemplos 1.2.7 e 1.2.9, o que reduz substancialmente a análise de casos.

1.3 Álgebras livres

Nesta seção, apresentamos o ambiente em que discutiremos as identidades polinomiais das álgebras de Jordan. Deste modo, o intuito aqui é definir a noção de álgebra de Jordan livre. Para isto, vejamos inicialmente a definição de álgebra livre.

Definição 1.3.1. Sejam $\mathcal{C}$ uma classe de álgebras e $A \in \mathcal{C}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. Dizemos que A é uma álgebra livre na classe $\mathcal{C}$, livremente gerada por X, se, para toda álgebra $R \in \mathcal{C}$, toda aplicação $f\colon X \to R$ admite uma extensão a um homomorfismo de álgebras $\varphi\colon A \to R$. Nesse caso, a cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada posto de A.

Posto isto, seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. Denotamos por X' o conjunto $X \cup \{(,)\}$ dos elementos x_i de X adicionados por parênteses tanto pela esquerda quanto pela direita. Interpretamos X como um alfabeto cujas letras (ou símbolos) são os elementos de X. Vamos considerar agora todas as sequências finitas $u_1u_2\ldots u_k$ de elementos de X'. Dizer que duas sequências $u_1u_2\ldots u_n$ e $v_1v_2\ldots v_m$ são iguais significa dizer que $n = m$ e $u_i = v_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Construiremos de forma recursiva um subconjunto de X', denotado por $M\{X\}$, da seguinte maneira:

(*i*) Cada elemento x_i de X pertence a $M\{X\}$;

(*ii*) Todo $(x_i)(x_j)$ pertence a $M\{X\}$. Prosseguindo, todo elemento da forma $(x_l)\Big((x_i)(x_j)\Big)$ ou $\Big((x_i)(x_j)\Big)(x_l)$ pertence a $M\{X\}$. E também $\Big((x_i)(x_j)\Big)\Big((x_l)(x_k)\Big)$ pertence a $M\{X\}$;

(*iii*) De modo geral, dados $u, v \in M\{X\}$, definimos $(u)(v) \in M\{X\}$;

(*iv*) Nenhuma outra sequência pertence a $M\{X\}$.

Os elementos de $M\{X\}$ são chamados de palavras não associativas dos elementos de X. Como estamos trabalhando com álgebras unitárias, adicionamos ao conjunto $M\{X\}$ uma nova palavra, denotada por 1, de modo que, dados $x_i \in X$ e $u \in M\{X\}$ temos

$$x_i 1 = x_i = 1 x_i \quad \text{e} \quad (u)1 = (u) = 1(u).$$

Obtendo assim o conjunto $M\{X\} \cup \{1\}$. Posto isto, denotamos por $\mathbb{K}\{X\}$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base $M\{X\} \cup \{1\}$. Definamos um produto em $\mathbb{K}\{X\}$ da seguinte maneira:

$$\left(\alpha 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) \cdot \left(\beta 1 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j\right) = (\alpha\beta)1 + \sum_{j=1}^{m} (\alpha\beta_j)(v_j) + \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i)(u_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\alpha_i\beta_j)[(u_i)(v_j)],$$

onde $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$ e $u_i, v_j \in M\{X\}$ para todos i, j. Assim, $\mathbb{K}\{X\}$ é uma álgebra unitária. Os elementos de $\mathbb{K}\{X\}$ são chamados polinômios não associativos.

A álgebra $\mathbb{K}\{X\}$ tem a seguinte propriedade universal:

Teorema 1.3.2. [24] *Sejam A uma álgebra com unidade e $\varphi\colon X \to A$ uma aplicação. Então, existe um único homomorfismo $\overline{\varphi}\colon \mathbb{K}\{X\} \to A$ que estende φ.*

A construção anterior nos conduz naturalmente ao conceito de álgebra absolutamente livre, essencial para o estudo das identidades polinomiais:

Definição 1.3.3. Dizemos que $\mathbb{K}\{X\}$ é a álgebra absolutamente livre, livremente gerada por X.

Agora, estamos interessados em relacionar $\mathbb{K}\{X\}$ com a classe das álgebras de Jordan. Para isto, vamos considerar o ideal J de $\mathbb{K}\{X\}$ gerado pelos polinômios

$$[f,g] = fg - gf \quad \text{e} \quad (f^2, g, f) = ((f^2)g)f - (f^2)(gf)$$

onde $f, g \in \mathbb{K}\{X\}$. Desta maneira, denotamos por $J(X)$ a álgebra quociente ${}^{\mathbb{K}\{X\}}\!/_{J}$. Com isso, a afirmação a seguir formaliza a universalidade da álgebra de Jordan livre, garantindo que ela desempenha para as álgebras de Jordan o mesmo papel que álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle X\rangle$ desempenha para as álgebras associativas, veja página 9 em [2].

Afirmação 1.3.4. $J(X)$ é livre na classe das álgebras de Jordan unitárias.

Seja A uma álgebra de Jordan. Consideremos $\varphi\colon X \to A$ uma aplicação. Como $\mathbb{K}\{X\}$ é livre, existe um homomorfismo $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{K}\{X\} \to A$ definido como

$$\tilde{\varphi}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)),$$

estendendo φ. Notemos que $[f,g], (f^2, g, f) \in ker(\tilde{\varphi})$ pois

$$\tilde{\varphi}([f,g]) = \Big[\tilde{\varphi}(f), \tilde{\varphi}(g)\Big] = \tilde{\varphi}(f)\tilde{\varphi}(g) - \tilde{\varphi}(g)\tilde{\varphi}(f) = \tilde{\varphi}(f)\tilde{\varphi}(g) - \tilde{\varphi}(f)\tilde{\varphi}(g) = 0,$$

e

$$\tilde{\varphi}\Big((f^2,g,f)\Big) = ((\tilde{\varphi}(f)^2)\tilde{\varphi}(g))\tilde{\varphi}(f) - (\tilde{\varphi}(f)^2)(\tilde{\varphi}(g)\tilde{\varphi}(f)) = 0.$$

Posto isto, devemos ter $J \subseteq ker(\tilde{\varphi})$, onde J é o ideal de $\mathbb{K}\{X\}$ gerado pelos polinômios $[f,g]$ e (f^2,g,f) para todos $f,g \in \mathbb{K}\{X\}$.

Então, pelo Teorema dos Homomorfismos, a aplicação $\overline{\varphi}\colon J(X) \to A$ dada por $\overline{\varphi}(f+J) = \tilde{\varphi}(f)$ está bem definida e, além disso, é um homomorfismo de álgebras estendendo φ. Logo, $J(X)$ é livre na classe das álgebras de Jordan unitárias.

Assim, a álgebra $J(X)$ pode ser interpretada como um ambiente universal em que todas as álgebras de Jordan se realizam como quocientes. Com essa construção da álgebra absolutamente livre e do ideal que impõe as relações de Jordan, estamos aptos a introduzir o objeto universal que servirá como ambiente de todos os polinômios que são identidades polinomiais e estudaremos na próxima seção. Diante disso, temos a seguinte definição:

Definição 1.3.5. Dizemos que $J(X)$ é a álgebra de Jordan unitária livre, livremente gerada por X.

É importante mencionar que, dado um polinômio (ou monômio) $f \in \mathbb{K}\{X\}$ não associativo, temos que $f+J$ é um polinômio (ou monômio) em $J(X)$. Mas a partir daqui, identificamos, por simplicidade, o elemento $f+J$ por f em $J(X)$. Além disso, sendo $f \in J(X)$, escrevamos $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ para exibir as variáveis $x_1,x_2,\ldots,x_n \in X$ que aparecem (possivelmente) em f. Diante disso, podemos estabelecer as seguintes noções:

(i) Um monômio de f é cada monômio u que aparece em f;

(ii) Seja $f \in J(X)$ um polinômio não nulo dado por

$$f = \sum_{j=1}^{t} \alpha_j u_j$$

onde $0 \neq \alpha_j \in \mathbb{K}$ e u_j são monômios não associativos em X. O grau de um monômio u_j é o número de variáveis de X que ocorrem em u_j (incluindo as repetições), denotado por $\deg(u_j)$. Além disso, o grau de u_j na variável x_i é definido como sendo a quantidade de vezes que x_i aparece em u_j, que denotaremos por $\deg_{x_i}(u_j)$. Definimos o grau do polinômio f como

$$\deg(f) = \max\{\deg(u_j) \mid 1 \leq j \leq t\}.$$

Analogamente, o grau de f na variável x_i, denotado por $\deg_{x_i}(f)$, é definido como

$$\deg_{x_i}(f) = \max\{\deg_{x_i}(u_j) \mid 1 \leq j \leq t\};$$

(iii) Dizemos que um polinômio $f \in J(X)$ é homogêneo em x_i quando todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. Chamamos f de multihomogêneo se for homogêneo em todas variáveis;

(iv) Seja $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um monômio de $J(X)$. Definimos o multigrau de u como sendo a n-upla $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ onde $d_i = \deg_{x_i}(u)$. Se $f \in J(X)$ é um polinômio de grau d, então f pode ser escrito de forma única como

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d,$$

onde f_k é a soma de todos os monômios de f de grau total k. Dizemos que os polinômios f_k são as componentes homogêneas de f. Além disso, se $f \in J(X)$, a soma de todos os monômios de f com um mesmo multigrau é chamada de componente multihomogênea de f.

(v) Dizemos que $f \in J(X)$ é um polinômio linear em x_i se for homogêneo em x_i com grau 1. Um polinômio $f \in J(X)$ é dito multilinear se todos seus monômios têm grau exatamente 1 em cada variável x_i.

1.4 Identidades polinomiais e PI-Álgebras

O objetivo desta seção é apresentar uma classe muito importante de álgebras que são as álgebras com identidades polinomiais. Veremos também a estrutura que o conjunto das identidades polinomiais possui.

Definição 1.4.1. Sejam $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in J(X)$ e A uma álgebra de Jordan com unidade. O polinômio f é chamado identidade polinomial para A (ou de A) quando

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Em outras palavras, dizemos que A satisfaz f. Dizemos ainda que A é uma álgebra com identidade polinomial (ou, PI-álgebra) se satisfaz alguma identidade polinomial não trivial.

Para ilustrar essa definição, apresentamos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.4.2. A álgebra de Jordan $UJ_2(\mathbb{K})$ satisfaz o polinômio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6).$$

De fato, sejam $a, b, c \in UJ_2(\mathbb{K})$ dadas por

$$a = \alpha E_{1,1} + \beta E_{1,2} + \gamma E_{2,2}, \quad b = \tilde{\alpha} E_{1,1} + \tilde{\beta} E_{1,2} + \tilde{\gamma} E_{2,2} \quad \text{e} \quad c = \alpha' E_{1,1} + \beta' E_{1,2} + \gamma' E_{2,2}.$$

Assim, temos

$$a \circ b = \alpha\tilde{\alpha} E_{1,1} + \delta_{a \circ b} E_{1,2} + \gamma\tilde{\gamma} E_{2,2}$$

onde $\delta_{a \circ b} = \dfrac{1}{2}(\alpha\tilde{\beta} + \beta\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}\beta + \tilde{\beta}\gamma)$. Desta maneira, obtemos

$$(a \circ b) \circ c = \alpha\tilde{\alpha}\alpha' E_{1,1} + \delta_1 E_{1,2} + \gamma\tilde{\gamma}\gamma' E_{2,2}$$

para algum $\delta_1 \in \mathbb{K}$. De maneira análoga, temos

$$a \circ (b \circ c) = \alpha\tilde{\alpha}\alpha' E_{1,1} + \delta_2 E_{1,2} + \gamma\tilde{\gamma}\gamma' E_{2,2}$$

para algum $\delta_2 \in \mathbb{K}$. Subtraindo as duas expressões, obtemos

$$(a,b,c) = (a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (\delta_1 - \delta_2)E_{1,2}.$$

Logo, para quaisquer $a,b,c \in UJ_2(\mathbb{K})$, o associador (a,b,c) é sempre um múltiplo escalar de $E_{1,2}$.

Como $E_{1,2} \circ E_{1,2} = E_{1,2}^2 = 0$ em $UJ_2(\mathbb{K})$, para quaisquer $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 \in UJ_2(\mathbb{K})$, temos

$$(a_1,a_2,a_3)(a_4,a_5,a_6) = 0.$$

Portanto, o polinômio

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (x_1,x_2,x_3)(x_4,x_5,x_6)$$

é uma identidade polinomial para $UJ_2(\mathbb{K})$ e assim, $UJ_2(\mathbb{K})$ é uma PI-álgebra de Jordan.

Sendo A uma álgebra de Jordan, denotamos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A, ou seja,

$$T(A) = \{f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in J(X) : f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 0,\ \forall a_1,a_2,\ldots,a_n \in A\}.$$

Não é tão difícil verificar que $T(A)$ é um ideal de $J(X)$. Além disso, notemos que A é uma PI-álgebra se, e somente se, $T(A) \neq \{0\}$. Diante desse ideal de $J(X)$, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.4.3. *Seja A uma álgebra de Jordan. Denotemos por Φ o conjunto de todos os homomorfismos $\varphi : J(X) \to A$ de $J(X)$ em A. Então, $f \in T(A)$ se, e somente se, $f \in \bigcap_{\varphi\in\Phi} Ker(\varphi)$.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in T(A)$ (ou seja, A satisfaz f). Dado $\varphi\colon J(X) \to A$ um homomorfismo arbitrário, temos

$$\varphi(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)) = f(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\ldots,\varphi(x_n)) = 0,$$

porque $\varphi(x_i) \in A$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$. Logo, $f \in \bigcap_{\varphi\in\Phi} Ker(\varphi)$. Reciprocamente, suponhamos que $f \in \bigcap_{\varphi\in\Phi} Ker(\varphi)$. Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_n \in A$ e consideremos uma aplicação $h\colon X \to A$ de modo que $h(x_i) = a_i$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$. Pela propriedade universal de $J(X)$, existe um único homomorfismo $\varphi\colon J(X) \to A$ tal que $\varphi|_X = h$. Desta maneira, obtemos

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = f(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\ldots,\varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)) = 0.$$

Logo, f é uma identidade polinomial para A, isto é, $f \in T(A)$. $\square$

A proposição acima descreve o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra em termos dos núcleos de homomorfismos, revelando uma estrutura ideal natural. A partir deste resultado e pela propriedade universal de $J(X)$, podemos definir uma estrutura muito importante na literatura da PI-Teoria que é o T-ideal, pois nos fornece algumas propriedades e comportamentos das álgebras que satisfazem identidades polinomiais.

Definição 1.4.4. Dizemos que um ideal I de $J(X)$ é um T-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo $\varphi \in End(J(X))$.

Em outras palavras, dizer que I é um T-ideal de $J(X)$ significa dizer que I é um ideal de $J(X)$ e

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in I$$

para todos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, g_2, \ldots, g_n \in J(X)$. Ou seja, podemos trocar as variáveis de $f \in I$ por quaisquer polinômios de $J(X)$ que ainda assim obteremos um polinômio em I. Tal propriedade dos T-ideais é dita invariância por endomorfismos de $J(X)$.

Notemos que o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra de Jordan é um T-ideal de $J(X)$. Reciprocamente, dado um T-ideal I qualquer, segue-se que

$$T\left({}^{J(X)}\!/_{I} \right) = I,$$

ou seja, os conceitos estão intimamente relacionados.

Antes de nos aprofundarmos em alguns resultados envolvendo T-ideais, destacamos uma propriedade fundamental que assegura a existência de T-ideais gerados por qualquer conjunto de polinômios, essencial para a definição subsequente e para alguns métodos usados na classificação de identidades polinomiais.

Proposição 1.4.5. *A interseção de uma família qualquer de T-ideais é um T-ideal.*

Demonstração. Seja $\{I_\lambda\}_{\lambda \in M}$ uma família de T-ideais e consideremos $I = \bigcap_{\lambda \in M} I_\lambda$. Como a interseção de ideais é um ideal, segue-se que I é um ideal. Agora, sejam $f \in I$ e $\varphi \in End(J(X))$. Assim, $f \in I_\lambda$ para todo $\lambda \in M$. Como cada I_λ é um T-ideal, devemos ter $\varphi(f) \in I_\lambda$ para todo $\lambda \in M$. Desta maneira, temos $\varphi(f) \in I$ e então, I ainda é um T-ideal. □

Posto isto, obtemos a seguinte definição:

Definição 1.4.6. Dado S um subconjunto de $J(X)$ qualquer, definimos o T-ideal gerado por S como sendo a interseção de todos T-ideais que contêm S e será denotado por $\langle S \rangle^T$. Desta maneira, dizemos que $\langle S \rangle^T$ é o menor T-ideal que contém S.

Do ponto de vista prático, por uma adaptação do que segue-se da demonstração da Proposição 2.2.5 em [7], o T-ideal de $J(X)$ gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $J(X)$ gerado pelo conjunto

$$\Big\{ u_n(\cdots(u_2(u_1 f(g_1, g_2, \ldots, g_n)))\cdots) \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S,\ u_i, g_i \in J(X), i = 1, 2, \ldots, n \Big\}.$$

Em geral, procuramos um "bom" conjunto de geradores para um dado T-ideal de modo que torne mais simples a descrição dos seus elementos.

Os dois próximos resultados são adaptações das Proposições 1.30 e 1.31 de [2] ao contexto de álgebras de Jordan. Em particular, consideramos o caso da álgebra de polinômios não associativos $J(X)$ munida da estrutura de álgebra de Jordan. As demonstrações seguem de forma idêntica às apresentadas em [2], razão pela qual serão omitidas.

Proposição 1.4.7. *Sejam I um T-ideal de $J(X)$ e $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$. Se $\mathbb{K}$ é infinito, então cada componente multihomogênea de f pertence a I. Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multihomogêneos.*

Proposição 1.4.8. *Se I é um T-ideal de $J(X)$ e $char(\mathbb{K}) = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Recordemos que o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra de Jordan J forma um T-ideal de $J(X)$. Uma das principais linhas de pesquisa da área consiste em encontrar um conjunto gerador para $T(J)$. Neste sentido, os dois resultados acima são importantes, pois a partir deles, basta procurarmos por geradores multihomogêneos ou multilineares quando o corpo é infinito de característica maior ou igual a 3 ou igual a 0, respectivamente.

1.5 Álgebras Graduadas

Nesta seção, apresentamos a noção de graduação em álgebras, que permite decompor o espaço vetorial em componentes homogêneas associadas a elementos de um grupo que se comportam bem em relação ao produto. Além disso, esta seção é dedicada também aos conceitos como álgebra de Jordan graduada livre, identidades polinomiais graduadas para as álgebras de Jordan e involuções graduadas. Ao longo desta seção, G denotará um grupo com notação multiplicativa.

Definição 1.5.1. Seja A um álgebra. Dizemos que A possui uma G-graduação (ou, é uma álgebra G-graduada) se A é decomposta como uma soma direta de subespaços vetoriais

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

que satisfazem a condição

$$A_g A_h \subseteq A_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$.

Os subespaços vetoriais A_g são chamados componentes homogêneas de A e definimos $A_g A_h$ como o subespaço vetorial gerado pelo conjunto

$$\{ab \mid a \in A_g \text{ e } b \in A_h\}.$$

De acordo com a definição anterior, para cada $a \in A$ existem únicos $a_g \in A_g$ de modo que

$$a = \sum_{g \in G} a_g \ \text{(soma finita).}$$

Ademais, dizemos ainda que $a \in A$, $a \neq 0$, é homogêneo de grau g (ou simplesmente, homogêneo) se $a \in A_g$ e denotemos o G-grau de a como sendo $\partial_G(a) = g$.

Vejamos agora um exemplo para facilitar a compreensão.

Exemplo 1.5.2. Consideremos a álgebra $A = UT_n(\mathbb{K})$. Sejam G um grupo e $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$. Para $\lambda \in G$, definamos

$$A_\lambda = \operatorname{span}\{E_{i,j} \mid g_i^{-1} g_j = \lambda, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}.$$

Como cada elemento de $UT_n(\mathbb{K})$ é combinação linear das matrizes canônicas $E_{i,j}$, por construção, para cada par $i \leqslant j$, existe um único $\lambda \in G$ de modo que $g_i^{-1} g_j = \lambda$ e portanto, os subespaços A_λ geram $UT_n(\mathbb{K})$, isto é,

$$UT_n(\mathbb{K}) = \sum_{\lambda \in G} A_\lambda.$$

Em particular, temos $E_{i,i} \in A_1$ pois satisfazem $g_i^{-1} g_i = 1$.

Suponhamos agora que, para um número finito de λ temos

$$\sum_{t=1}^{m} x_{\lambda_t} = 0, \quad x_{\lambda_t} \in A_{\lambda_t}.$$

Escrevamos cada x_{λ_t} como

$$x_{\lambda_t} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij}^{(t)} E_{i,j},$$

onde, por definição de A_λ, os coeficientes $\alpha_{ij}^{(t)}$ são não nulos (possivelmente) apenas para $g_i^{-1} g_j = \lambda_t$. Assim, temos

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \Big(\sum_{t=1}^{m} \alpha_{ij}^{(t)} \Big) E_{i,j} = 0.$$

Como as matrizes $E_{i,j}$, com $i \leqslant j$, são linearmente independentes, obtemos

$$\sum_{t=1}^{m} \alpha_{ij}^{(t)} = 0 \tag{1.3}$$

para todo $i \leqslant j$. Mas, para um par fixo (i, j), apenas um dos λ_t satisfaz $g_i^{-1} g_j = \lambda_t$, ou seja, em (1.3) todos os coeficientes $\alpha_{ij}^{(t)}$ são nulos, exceto possivelmente um deles. Porém, como o somatório em (1.3) é nulo, tal possível exceção também é nula. Assim, todos $\alpha_{ij}^{(t)}$ são nulos e cada $x_{\lambda_t} = 0$. Acabamos de mostrar que

$$UT_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in G} A_\lambda.$$

Denotemos por $\deg(E_{i,j})$ os G-graus das matrizes canônicas $E_{i,j}$. Consideremos $E_{i,j}$ e $E_{k,l}$ tais que $g_i^{-1}g_j = \alpha$ e $g_k^{-1}g_l = \beta$. Lembremos o seguinte fato:

$$E_{i,j}E_{l,k} = \begin{cases} E_{i,k}, & \text{se } j = l \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Desta maneira, sendo $j = l$ temos

$$\deg(E_{i,j}E_{j,k}) = \deg(E_{i,k}) = g_i^{-1}g_k = g_i^{-1}(g_jg_j^{-1})g_k = (g_i^{-1}g_j)(g_j^{-1}g_k) = \deg(E_{i,j})\deg(E_{j,k}).$$

Como $\alpha\beta = (g_i^{-1}g_j)(g_j^{-1}g_k) = g_i^{-1}g_k$, obtemos $E_{i,j}E_{l,k} \in A_{\alpha\beta}$. Se $j \neq l$ temos $0 \in A_{\alpha\beta}$. Assim, em qualquer caso, temos

$$A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha\beta}.$$

Logo, obtemos uma G-graduação para $UT_n(\mathbb{K})$.

A construção acima fornece um exemplo importante de graduação, em que o conjunto de graus são determinados a partir das posições das entradas não nulas das matrizes triangulares superiores.

A seguir, vejamos o conceito de graduação para subestruturas das álgebras graduadas.

Definição 1.5.3. Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um subespaço vetorial $B \subseteq A$ é graduado quando

$$B = \bigoplus_{g\in G}(B \cap A_g),$$

ou seja, quando todo $b \in B$ se escreve de maneira única como

$$b = \sum_{g\in G} b_g,$$

onde $b_g \in B \cap A_g$ para todo $g \in G$.

No que segue, veremos um conceito interessante que é o suporte da graduação, pois tal conjunto registra precisamente os elementos $g \in G$ para os quais a componente homogênea A_g é não nula.

Definição 1.5.4. Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. O conjunto

$$\operatorname{supp}(A) = \{g \in G : A_g \neq 0\}$$

é chamado suporte da graduação de A. Em outras literaturas, dizemos também suporte da álgebra A.

Embora a decomposição da álgebra seja indexada por todo o grupo G, apenas os elementos pertencentes ao suporte da álgebra A, de fato, contribuem para a estrutura graduada. Ou seja, o suporte sintetiza a informação sobre quais componentes da graduação participam de maneira não trivial na decomposição da álgebra.

Ademais, em geral, $\text{supp}(A)$ não é um subgrupo de G. De fato, tomemos $n = 2$ no Exemplo 1.5.2, $G = \{1, a, a^2\}$ um grupo cíclico e $(g_1, g_2) = (1, a)$. Notemos que

$$\deg(E_{1,1}) = \deg(E_{2,2}) = 1 \quad \text{e} \quad \deg(E_{1,2}) = a.$$

Desta maneira,

$$\text{supp}\Big(UT_2(\mathbb{K})\Big) = \{1, a\}.$$

Como $a^2 \notin \text{supp}\Big(UT_2(\mathbb{K})\Big)$, segue-se que o suporte não é subgrupo de G.

Agora, apresentaremos algumas propriedades que nos auxiliarão no desenvolvimento deste trabalho. A próxima proposição assegura que a unidade de uma álgebra graduada está sempre concentrada na componente de grau neutro, um fato recorrente nos resultados posteriores.

Proposição 1.5.5. *Seja A uma álgebra G-graduada com unidade. Então $1_A \in A_1$ onde 1 é o elemento neutro do grupo G.*

Demonstração. Consideremos uma G-graduação em A, ou seja,

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g.$$

Assim, existem $1, g_1, \ldots, g_n \in G$ dois a dois distintos de modo que

$$1_A = a_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{g_i}$$

onde $a_1 \in A_1$ e $a_{g_i} \in A_{g_i}$, com $i = 1, \ldots, n$. Sejam $h \in G$ e $a_h \in A_h$ arbitrários. Então, multiplicando, na igualdade anterior, por a_h pela esquerda, temos

$$a_h = a_h a_1 + a_h \sum_{i=1}^{n} a_{g_i} = a_h a_1 + \sum_{i=1}^{n} a_h a_{g_i}.$$

Uma vez que A é G-graduada, devemos ter

$$a_h a_1 \in A_h A_1 \subseteq A_h \quad \text{e} \quad a_h a_{g_i} \in A_h A_{g_i} \subseteq A_{hg_i}.$$

Além disso, como $a_h \in A_h$ tem-se

$$a_h = a_h + 0 + \cdots + 0.$$

Por hipótese, $h, hg_1, \ldots, hg_n$ são dois a dois distintos e os elementos de A são escritos de maneira única. Então,

$$a_h a_1 = a_h \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} a_h a_{g_i} = 0,$$

o que implica em

$$a_h a_1 = a_h,\ a_h a_{g_1} = 0,\ a_h a_{g_2} = 0,\ \ldots,\ a_h a_{g_n} = 0.$$

Provamos que $a_h a_1 = a_h$ para todo elemento homogêneo a_h, ou seja, $aa_1 = a$ para todo $a \in A$. De maneira análoga, mostra-se que $a_1 a = a$ para todo $a \in A$. Portanto, $a_1 = 1_A$ e $1_A \in A_1$, como era o desejado. $\square$

Proposição 1.5.6. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Se $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ é uma álgebra G-graduada, então*

$$A = \bigoplus_{hN\in G/N} A_{hN}$$

é uma álgebra $\left(G/N\right)$-graduada, considerando

$$A_{hN} = \bigoplus_{\substack{g\in G\\ hN=gN}} A_g.$$

Demonstração. Observemos inicialmente que A_{hN} não depende da escolha do representante da classe lateral hN pois, se $\tilde{h}N = hN$ então $A_{\tilde{h}N} = A_{hN}$. Notemos também que, como cada A_{hN} é soma direta de subespaços A_g com $g \in hN$ tem-se que A_{hN} é um subespaço de A. Além disso, a soma dos subespaços de A_{hN} é exaustiva, isto é, gera toda a álgebra A pois, dado um elemento $x \in A$ segue-se que

$$x = \sum_{g\in G} x_g$$

com $x_g \in A_g$ para apenas finitos termos não nulos, e como cada x_g pertence a A_{hN}, devemos ter

$$x = \sum_{hN\in G/N} \left(\sum_{g\in hN} x_g \right).$$

Assim, temos

$$A = \sum_{hN\in G/N} A_{hN}.$$

Agora, se supormos que

$$\sum_{i=1}^{m} y_{h_iN} = 0, \quad y_{h_iN} \in A_{h_iN},$$

onde as classes h_iN são distintas, obtemos uma decomposição finita

$$\sum_{g\in G} y_g = 0$$

escrevendo cada y_{h_iN} como $\sum_{g\in h_iN} y_g$. Como A é G-graduada, segue-se diretamente que $y_g = 0$ e consequentemente, temos $y_{h_iN} = 0$. Logo, obtemos

$$A = \bigoplus_{hN\in G/N} A_{hN}.$$

Sejam $a \in A_{hN}$ e $b \in A_{kN}$ dados por

$$a = \sum_{g\in hN} a_g, \quad a_g \in A_g, \quad \text{e} \quad b = \sum_{t\in kN} b_t, \quad b_t \in A_t.$$

Assim, $a_g b_t \in A_{gt}$. Como $hNkN = (hk)N$ temos $gt \in (hk)N$. Então $a_g b_t \in A_{(hk)N}$ e

$$ab = \sum_{g\in hN} \sum_{t\in kN} a_g b_t \in A_{(hk)N},$$

isto é,

$$A_{hN}A_{kN} \subseteq A_{(hk)N}.$$

Portanto, A é uma álgebra $\left({}^{G}\!/\!{}_{N}\right)$-graduada. $\square$

Proposição 1.5.7. *Seja* $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ *uma álgebra* G*-graduada. Se* I *é um ideal* G*-graduado de* A*, então* ${}^{A}\!/\!{}_{I}$ *é uma álgebra* G*-graduada*

$$ {}^{A}\!/\!{}_{I} = \bigoplus_{g\in G} \left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_g ,$$

sendo $\left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_g = {}^{(A_g+I)}\!/\!{}_{I}$*, isto é,*

$$\left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_g = \{a+I : a \in A_g\}.$$

Demonstração. Seja $a \in A$. Como A é uma álgebra G-graduada, temos

$$a = \sum_{g\in G} a_g,$$

para alguns $a_g \in A_g$. Sendo $a+I$ um elemento em ${}^{A}\!/\!{}_{I}$, temos

$$a+I = \Big(\sum_{g\in G} a_g\Big) + I = \sum_{g\in G}(a_g+I).$$

Para cada $g \in G$, temos $a_g + I \in \left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_g$. Desta maneira, obtemos

$$a+I \in \sum_{g\in G} \left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_g .$$

Suponhamos que

$$\sum_{g\in G}(a_g+I) = 0.$$

Desta maneira, devemos ter

$$\sum_{g\in G} a_g \in I.$$

Por hipótese, I é um ideal G-graduado de A. Então, para cada $g \in G$ temos $a_g \in I$. Com isso, temos $a_g + I = 0$ e assim, obtemos

$$ {}^{A}\!/\!{}_{I} = \bigoplus_{g\in G} \left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_g .$$

Por fim, sejam $(a_g+I) \in \left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_g$ e $(a_h+I) \in \left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_h$, onde $a_g \in A_g$ e $a_h \in A_h$. Então, temos

$$(a_g+I)(a_h+I) = (a_ga_h)+I.$$

Como A é uma álgebra G-graduada, temos

$$a_g a_h \in A_g A_h \subseteq A_{gh}.$$

Portanto, obtemos $(a_g a_h) + I \in \left[{}^{A}\!/\!{}_{I}\right]_{gh}$. □

Proposição 1.5.8. *Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Se B e C são ideais G-graduados de A, com*

$$B = \bigoplus_{g\in G} B_g, \qquad C = \bigoplus_{g\in G} C_g, \qquad B_g, C_g \subseteq A_g,$$

então $B \cap C$ é um ideal G-graduado de A, isto é,

$$B \cap C = \bigoplus_{g\in G} (B \cap C)_g,$$

sendo $(B\cap C)_g = B_g \cap C_g$.

Demonstração. Seja $u \in B \cap C$. Como B e C são G-graduados, escrevemos

$$u = \sum_{g\in G} u_g, \quad u_g \in B_g \qquad \text{e} \qquad u = \sum_{g\in G} w_g, \quad w_g \in C_g.$$

Pela unicidade da decomposição homogênea em A, segue-se que $u_g = w_g$ para todo $g \in G$ e assim, temos

$$u_g \in B_g \cap C_g \quad \text{e} \quad u \in \bigoplus_{g\in G} B_g \cap C_g.$$

Assim, obtemos

$$B \cap C \subseteq \bigoplus_{g\in G} B_g \cap C_g.$$

Reciprocamente, se $x \in \bigoplus_{g\in G} B_g \cap C_g$ é dado por

$$x = \sum_{g\in G} x_g,$$

onde $x_g \in B_g \cap C_g$, então $x_g \in B_g$ e $x_g \in C_g$ para todo $g \in G$. Logo, devemos ter

$$x \in \bigoplus_{g\in G} B_g = B \quad \text{e} \quad x \in \bigoplus_{g\in G} C_g = C,$$

ou seja, $x \in B \cap C$ e, consequentemente,

$$\bigoplus_{g\in G} B_g \cap C_g \subseteq B \cap C.$$

Por fim, se $u \in B_g \cap C_g$ e $v \in B_h \cap C_h$, então

$$\begin{cases} u \in B_g, & u \in C_g, & g \in G \\ v \in B_h, & v \in C_h, & h \in G \end{cases}.$$

Desta maneira, obtemos

$$uv \in B_{gh} \quad \text{e} \quad uv \in C_{gh}.$$

Logo,

$$uv \in B_{gh} \cap C_{gh},$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

Dados I_1 e I_2 subespaços vetoriais de uma álgebra A, denotamos por I_1I_2 o seguinte subespaço vetorial de A:

$$I_1I_2 = \text{span}\{xy : x \in I_1,\ y \in I_2\}.$$

Proposição 1.5.9. *Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Se I_1 e I_2 são ideais graduados de A, então I_1I_2 é um ideal graduado de A.*

Demonstração. Como I_1 e I_2 são ideais graduados, temos decomposições

$$I_1 = \bigoplus_{g\in G}(I_1)_g \qquad \text{e} \qquad I_2 = \bigoplus_{h\in G}(I_2)_h,$$

onde $(I_1)_g = I_1 \cap A_g$ e $(I_2)_h = I_2 \cap A_h$.

Sejam $x \in (I_1)_g$ e $y \in (I_2)_h$. Como A é G-graduada, segue-se que

$$xy \in A_{gh}.$$

Além disso, por definição, temos

$$xy \in I_1I_2.$$

Portanto,

$$(I_1)_g(I_2)_h \subseteq (I_1I_2) \cap A_{gh}.$$

Como todo elemento de I_1I_2 é combinação linear finita de elementos da forma $(I_1)_g(I_2)_h$, obtemos

$$I_1I_2 = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}(I_1)_g(I_2)_h.$$

Para cada $t \in G$, definamos

$$(I_1I_2)_t := \sum_{\substack{g,h\in G \\ gh=t}} (I_1)_g(I_2)_h.$$

Com isso,

$$I_1I_2 = \bigoplus_{t\in G}(I_1I_2)_t,$$

o que mostra que I_1I_2 é um subespaço graduado de A. Como o produto de ideais é novamente um ideal, segue-se que I_1I_2 é um ideal graduado de A. $\square$

A seguir, introduzimos o conceito de involução graduada que combina as duas estruturas discutidas até o momento (graduação e involução).

Definição 1.5.10. Seja A uma álgebra G-graduada equipada com uma involução $*$. Dizemos que A é uma $(G,*)$-álgebra se $(A_g)^* \subseteq A_g$ para todo $g \in G$. Dizemos ainda que $*$ é uma involução graduada em A.

Procedendo-se de maneira natural, vamos definir os homomorfismos de álgebras graduadas. Tais ferramentas servem para preservar as estruturas das álgebras e mantêm as graduações de cada álgebra envolvida.

Definição 1.5.11. Sejam A e B álgebras G-graduadas. Uma aplicação $\varphi\colon A \to B$ é chamada homomorfismo G-graduado se φ é um homomorfismo de álgebras de modo que $\varphi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$.

Do mesmo modo que vimos na Seção 1.1, podemos dar nomes aos homomorfismos de acordo com as condições que são satisfeitas. Daremos destaque para o caso recorrente neste trabalho: Isomorfismo G-graduado (ou, simplesmente Isomorfismo graduado). Desta maneira, definamos a seguir tal noção.

Definição 1.5.12. Sejam A e B álgebras G-graduadas e consideremos $\varphi : A \to B$ um homomorfismo G-graduado de A em B. Dizemos que φ é um isomorfismo G-graduado se φ for bijetivo. Dizemos ainda que A e B são álgebras G-graduadas isomorfas.

Assim como apresentado anteriormente, obtemos de maneira inteiramente análoga ao Teorema dos Isomorfismos da Seção 1.1, a versão graduada desse resultado. Esse teorema permite comparar álgebras preservando simultaneamente as estruturas envolvidas, o que será útil na análise das graduações do próximo capítulo.

No que segue, consideremos a álgebra de Jordan $J(X)$ unitária livre, livremente gerada por X e apresentaremos outro objeto universal. Dado um grupo “abeliano” G, para cada $g \in G$, fixamos um conjunto enumerável de variáveis

$$X_g = \left\{ x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, x_3^{(g)}, \dots \right\}.$$

Assim, definamos

$$X = \bigcup_{g \in G} X_g.$$

Definamos, recursivamente, o G-grau ∂_G em alguns elementos de $J(X)$ da seguinte forma:

(i) Se $x \in X_g$, então $\partial_G(x) = g$.

(ii) Se u e v são monômios de $J(X)$, então $\partial_G(uv) = \partial_G(u)\partial_G(v)$.

Para cada $g \in G$, denotamos por $J(X)_g$ o subespaço de $J(X)$ gerado por todos os monômios $f \in J(X)$ tais que $\partial_G(f) = g$. Percebamos, na definição de produto em $J(X)$, que

$$J(X)_g J(X)_h \subseteq J(X)_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Além disso, devemos ter

$$J(X) = \bigoplus_{g \in G} J(X)_g.$$

Desta maneira, denotamos por $J(X)^{gr}$ a álgebra $J(X)$ com esta graduação e chamamos $J(X)^{gr}$ por álgebra de Jordan unitária livre G-graduada. Além disso, dizemos que um polinômio G-graduado $f \in J(X)^{gr}$ é homogêneo de G-grau g se $f \in J(X)_g$, ou seja, quando $\partial_G(f) = g$.

Observamos que a hipótese de G ser um grupo abeliano é essencial para que a graduação acima esteja bem definida. Como o produto em álgebras de Jordan é comutativo, isto é, $uv = vu$, precisamos ter

$$\partial_G(uv) = \partial_G(vu),$$

o que implica em

$$\partial_G(u)\partial_G(v) = \partial_G(v)\partial_G(u),$$

para quaisquer monômios $u, v \in J(X)$. Assim, a comutatividade do grupo G garante que o grau de um monômio independe da ordem em que os fatores aparecem, assegurando a consistência da estrutura de álgebra G-graduada.

Na sequência, vejamos o conceito de identidades polinomiais graduadas (ou simplesmente, identidades graduadas). Na seção anterior, vimos o que denominamos frequentemente de identidades polinomiais ordinárias. Agora, vamos refinar tal noção levando em conta os graus dos elementos de uma álgebra graduada.

Definição 1.5.13. Seja G um grupo abeliano e seja $A = \underset{g \in G}{\oplus} A_g$ uma álgebra de Jordan G-graduada. Um polinômio G-graduado

$$f(x_{i_1}^{(g_1)}, x_{i_2}^{(g_2)}, \ldots, x_{i_k}^{(g_k)}) \in J(X)^{gr}$$

é uma identidade graduada para A se

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$$

para todos $a_1 \in A_{g_1}, a_2 \in A_{g_2}, \ldots, a_k \in A_{g_k}$.

Exemplos concretos de identidades graduadas serão fornecidos na Seção 3.3. Agora, vejamos o conceito de T-ideal no contexto de graduações de álgebras.

Definição 1.5.14. Um ideal I de $J(X)^{gr}$ é dito ser um T_G-ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $J(X)^{gr}$.

Equivalentemente, na definição acima, dizemos que I é um T_G-ideal de $J(X)^{gr}$ se I é um ideal graduado de $J(X)$ e

$$f(h_1^{(t_1)},\ldots,h_k^{(t_k)}) \in I$$

para todos $f(x_{i_1}^{(t_1)},\ldots,x_{i_k}^{(t_k)}) \in I$ e $h_1^{(t_1)} \in J(X)_{t_1},\ldots,h_k^{(t_k)} \in J(X)_{t_k}$.

Destacamos os seguintes resultados vistos na seção anterior, inserindo no contexto de graduações: quando o corpo é infinito, todo T_G-ideal é gerado por seus polinômios multihomogêneos e, quando a característica do corpo é zero, todo T_G-ideal é gerado por seus polinômios multilineares. As demonstrações de tais resultados seguem as mesmas indicadas para identidades polinomiais ordinárias.

Diante disso, podemos relacionar as identidades polinomiais ordinárias e as graduadas através do seguinte resultado:

Lema 1.5.15. [2] *Consideremos char*$(\mathbb{K}) = 0$. *Sejam A e B álgebras de Jordan. Se A e B possuem G-graduações tais que* $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, *então* $T(A) \subseteq T(B)$. *Ademais, se* $T_G(A) = T_G(B)$ *então*

$$T(A) = T(B).$$

Esse resultado estabelece uma ponte entre as identidades graduadas e as ordinárias, permitindo traduzir informações entre os dois contextos.

CAPÍTULO 2

Graduações da Álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores

Neste capítulo, analisamos duas famílias de graduações da álgebra de Jordan $UJ_n(\mathbb{K})$: as graduações elementares e as graduações *mirror type* (MT). Nossos objetivos aqui são descrever suas principais propriedades estruturais, apresentar critérios práticos para distinguir quando duas dessas graduações não são isomorfas e, por fim, estabelecer uma classificação, a menos de isomorfismo graduado, para cada uma dessas famílias de graduações, a fim de desenvolver as ferramentas necessárias para o capítulo seguinte.

Destacamos aqui que a fundamentação deste capítulo se apoia na referência principal [15]. A primeira seção é dedicada às graduações elementares e notamos que são determinadas por uma única sequência linear de graus atribuídos às matrizes canônicas. Essa simplicidade torna sua estrutura especialmente transparente e simples de trabalhar. Na segunda seção, voltamos a atenção às graduações MT, que incorporam a simetria em torno da diagonal secundária por meio de elementos simétricos e antissimétricos. Essa simetria impõe restrições e cria padrões espelhados no comportamento graduado de $UJ_n(\mathbb{K})$, tornando sua classificação mais delicada.

No decorrer do texto, $\mathbb{K}$ denota um corpo infinito de característica diferente de 2. Por simplicidade, denotamos a álgebra de Jordan $UJ_n(\mathbb{K})$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, equipada do produto de Jordan $a \circ b = \dfrac{1}{2} \cdot (ab + ba)$, como sendo UJ_n. Além disso, como UJ_n está munida do produto de Jordan, o associador de a, b e c é

$$(a,b,c) = (a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c).$$

Em situações nas quais a omissão de parênteses não gere ambiguidade, adotamos a convenção de efetuar os produtos da esquerda para a direita. Por exemplo, o termo $a \circ b \circ c \circ d$ significa realizar o produto na seguinte ordem:

$$\underbrace{(\overbrace{(\underbrace{a\circ b}_{\textcircled{1}})\circ c}^{\textcircled{2}})\circ d}_{\textcircled{3}}\,.$$

De maneira similar para os produtos de 3 ou mais elementos:

$$a_1\circ a_2\circ a_3\circ\cdots\circ a_{n-1}\circ a_n=((((a_1\circ a_2)\circ a_3)\circ\cdots)\circ a_{n-1})\circ a_n.$$

2.1 Graduação Elementar de UJ_n

Começamos com o estudo da graduação elementar, a qual desempenha papel fundamental na caracterização das graduações possíveis de UJ_n. Recordemos que $E_{i,j}$ é a matriz canônica cuja única entrada não nula é 1, situada na (i,j)-entrada. Dada uma matriz $x\in UJ_n$, denotamos por $(x)_{(i,j)}$ a (i,j)-entrada de x.

Para $i,m\in\mathbb{N}$, definamos

$$E_{i:m}=E_{i,i+m},\qquad E_{-i:m}=E_{n-i-m+1,n-i+1},$$

$$(x)_{(i:m)}=(x)_{(i,i+m)},\qquad (x)_{(-i:m)}=(x)_{(n-i-m+1,n-i+1)}.$$

Em outras palavras, podemos dizer que:

- a matriz $E_{i:m}$ é definida como a matriz canônica cuja única entrada não nula é igual a 1 e está localizada na posição $(i,i+m)$. Geometricamente, para obter $E_{i:m}$, partimos da entrada $(1,1)$, deslocamo-nos $i-1$ posições ao longo da diagonal principal até alcançar a posição (i,i) e, em seguida, percorremos m unidades para a direita. Nessa posição $(i,i+m)$ encontra-se a entrada 1, sendo todas as demais entradas nulas. Visualmente, obtemos:

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{linha } i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\\
\begin{array}{ccccccccc} & & \text{coluna } i & & & & \text{coluna } i+m & & \end{array} &
\end{array}$$

- de modo análogo, a matriz $E_{-i:m}$ é definida como a matriz canônica cuja única entrada não nula é igual a 1 e está localizada na posição $(n-i-m+1, n-i+1)$. Geometricamente, para obter $E_{-i:m}$, partimos da entrada (n,n), deslocamo-nos $i-1$ posições ao longo da diagonal principal até alcançar a posição $(n-i+1, n-i+1)$ e, em seguida, percorremos m unidades para cima. Nessa posição $(n-i-m+1, n-i+1)$ encontra-se a entrada 1, sendo todas as demais entradas nulas. Para facilitar a compreensão, vejamos tal matriz:

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{linha } n-i-m+1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{linha } n-i+1 \\ \\ \\
\end{array}
\\
\text{coluna } n-i+1 &
\end{array}
$$

- para encontrar $(x)_{(i:m)}$ e $(x)_{(-i:m)}$ procedemos como em $E_{i:m}$ e $E_{-i:m}$, respectivamente.

Vale ressaltar que, G denotará um grupo com notação multiplicativa e com elemento neutro 1. Caso contrário, indicaremos a notação do grupo, como por exemplo os grupos aditivos $(\mathbb{Z},+)$ e $(\mathbb{Z}_n,+)$.

Definição 2.1.1. Seja G um grupo qualquer. Chamamos uma G-graduação de UJ_n de elementar se todas as matrizes canônicas $E_{i,j}$ são homogêneas na graduação dada.

A partir da definição acima, é natural investigar quais restrições essa exigência feita impõe sobre os graus atribuídos a essas matrizes e como essas informações determinam a graduação como um todo. Assim, o resultado a seguir nos fornece uma certa caracterização das graduações elementares, descrevendo como os graus se organizam em UJ_n.

Lema 2.1.2. *Seja UJ_n equipada com uma G-graduação elementar. Então, devemos ter:*

(i) $\deg(E_{i,i}) = 1$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$*;*

(ii) A sequência

$$\eta = \Big(\deg(E_{1,2}), \deg(E_{2,3}), \ldots, \deg(E_{n-1,n})\Big)$$

define completamente a graduação;

(iii) O suporte

$$\mathrm{supp}(UJ_n) = \{\deg(E_{i,j}) : 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$$

da graduação é comutativo.

Demonstração. Provaremos o item (i). Lembremos que $E_{i,i}$ são as matrizes diagonais da base canônica e satisfazem $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$. Assim,

$$E_{i,i} \circ E_{i,i} = \frac{1}{2} \cdot (E_{i,i}E_{i,i} + E_{i,i}E_{i,i}) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot E_{i,i}^2) = E_{i,i}^2 = E_{i,i}.$$

Aplicando a graduação, obtemos

$$\deg(E_{i,i} \circ E_{i,i}) = \deg(E_{i,i}) \deg(E_{i,i}) = (\deg(E_{i,i}))^2.$$

Por outro lado, temos

$$\deg(E_{i,i} \circ E_{i,i}) = \deg(E_{i,i}).$$

Com isso, $(\deg(E_{i,i}))^2 = \deg(E_{i,i})$ e assim $\deg(E_{i,i}) = 1$.

Mostraremos (ii). Pelo produto das matrizes canônicas, podemos observar que, para $i < j$, os termos $E_{i,j}$ podem ser escritos como

$$E_{i,j} = 2^{j-i} \cdot (E_{i,i+1} \circ E_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ E_{j-2,j-1} \circ E_{j-1,j}).$$

Aplicando a graduação, temos

$$\deg(E_{i,j}) = \deg(E_{i,i+1}) \deg(E_{i+1,i+2}) \cdots \deg(E_{j-2,j-1}) \deg(E_{j-1,j}).$$

Como $E_{i,i+1}, \ldots, E_{j-1,j}$ são exatamente os termos da sequência η, isso mostra que essa sequência determina completamente a graduação.

Por fim, provemos o item (iii). Para isso, definamos

$$t_1 = \deg(E_{1,2}), \quad t_2 = \deg(E_{2,3}), \ldots, \quad t_{n-1} = \deg(E_{n-1,n}).$$

Se $V, W \in UJ_n$ são homogêneos e $V \circ W \neq 0$, segue-se da definição de álgebra de Jordan que

$$\deg(V \circ W) = \deg(W \circ V).$$

Como UJ_n está equipada com uma G-graduação elementar, todas as matrizes canônicas $E_{i,j}$ são homogêneas nessa graduação. Além disso, pela demonstração do item (*ii*), é suficiente verificar que $t_it_j = t_jt_i$, para $i < j$, com $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Temos

$$\begin{aligned} E_{j,j+1} \circ (E_{i,i+1} \circ E_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ E_{j-1,j}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} E_{j,j+1} \circ E_{i,j} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i+1} (E_{j,j+1}E_{i,j} + E_{i,j}E_{j,j+1}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i+1} E_{i,j+1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} E_{i,i+1} \circ (E_{j,j+1} \circ (E_{i+1,i+2} \circ E_{i+2,i+3} \circ \cdots \circ E_{j-1,j})) &= E_{i,i+1} \circ \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i-1} (E_{j,j+1} \circ E_{i+1,j}) \\ &= E_{i,i+1} \circ \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} (E_{j,j+1}E_{i+1,j} + E_{i+1,j}E_{j,j+1}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} (E_{i,i+1} \circ E_{i+1,j+1}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i+1} (E_{i,i+1}E_{i+1,j+1} + E_{i+1,j+1}E_{i,i+1}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i+1} E_{i,j+1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos:

$$E_{i,i+1} \circ (E_{j,j+1} \circ (E_{i+1,i+2} \circ E_{i+2,i+3} \circ \cdots \circ E_{j-2,j-1} \circ E_{j-1,j})) = E_{j,j+1} \circ (E_{i,i+1} \circ E_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ E_{j-1,j}).$$

Sabemos que $E_{i,j+1} \neq 0$. Assim, temos

$$t_it_jt_{i+1} \cdots t_{j-1} = t_jt_it_{i+1} \cdots t_{j-1}.$$

Como G é um grupo, vale a lei do cancelamento e, consequentemente, obtemos $t_it_j = t_jt_i$, com $i < j$, para todos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Logo, $\mathrm{supp}(UJ_n)$ é comutativo. $\square$

Observemos que a ideia para demonstrar o item (*iii*) do lema anterior foi desenvolvida através da noção na teoria de álgebras associativas. Por exemplo, consideremos a álgebra $UT_n(\mathbb{K})$ e as matrizes canônicas $E_{1,2}$, $E_{2,3}$, $E_{3,4}$ e $E_{4,5}$ de $UT_n(\mathbb{K})$. Então, devemos ter

$$(E_{1,2}E_{2,3}E_{3,4})E_{4,5} = E_{1,2}(E_{2,3}E_{3,4}E_{4,5}) = E_{1,5}.$$

Mas agora, considerando UJ_n temos uma estrutura de álgebra de Jordan (isto é, a operação $\circ$ é comutativa) e assim, devemos ter:

$$(E_{1,2} \circ E_{2,3} \circ E_{3,4}) \circ E_{4,5} = E_{1,5} = E_{4,5} \circ (E_{1,2} \circ E_{2,3} \circ E_{3,4})$$

e

$$E_{1,2} \circ (E_{2,3} \circ E_{3,4} \circ E_{4,5}) = E_{1,5} = E_{1,2} \circ (E_{4,5} \circ (E_{2,3} \circ E_{3,4})).$$

Logo, obtemos:

$$E_{1,2} \circ (E_{4,5} \circ (E_{2,3} \circ E_{3,4})) = E_{4,5} \circ (E_{1,2} \circ E_{2,3} \circ E_{3,4}),$$

e assim, tem-se a ideia usada anteriormente.

O lema anterior estabelece uma descrição das graduações elementares, exibindo que o conjunto dos graus das matrizes canônicas é completamente determinado por uma única sequência. Tal fato simplifica significativamente a análise dos resultados posteriores. Ademais, a recíproca desse resultado anterior também é válida, como veremos a seguir.

Lema 2.1.3. *Seja UJ_n equipada com uma G-graduação tal que:*

(i) $\deg(E_{i,i}) = 1$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) as matrizes $E_{1,2}$, $E_{2,3}$, $\ldots$, $E_{n-1,n}$ *são homogêneas.*

Então, a G-graduação de UJ_n é necessariamente elementar.

Demonstração. Definamos $\deg(E_{i,i+1}) = g_i$, onde $g_i \in G$ para todo i. Provemos que cada matriz canônica $E_{i,j}$ é homogênea com

$$\deg(E_{i,j}) = g_i g_{i+1} \cdots g_{j-1}.$$

Por hipótese, $E_{i,i}$ e $E_{i,i+1}$ são homogêneas com graus 1 e g_i, respectivamente. Além disso, sabemos que

$$E_{i,j} = 2^{j-i} \cdot (E_{i,i+1} \circ E_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ E_{j-1,j}).$$

Desta maneira, as matrizes $E_{i,j}$ são escritas como produto de elementos homogêneos, resultando que também são homogêneas. Então,

$$\begin{aligned}
\deg(E_{i,j}) &= \deg(E_{i,i+1} \circ E_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ E_{j-1,j}) \\
&= \deg(E_{i,i+1}) \deg(E_{i+1,i+2}) \cdots \deg(E_{j-1,j}) \\
&= g_i g_{i+1} \cdots g_{j-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, cada matriz canônica $E_{i,j}$ é homogênea e assim, a G-graduação de UJ_n é necessariamente elementar. □

Assim, os Lemas 2.1.2 e 2.1.3 permitem identificar precisamente quando uma graduação é elementar, fornecendo uma certa descrição dessa graduação de UJ_n. Já podemos perceber que, para classificar as graduações elementares de UJ_n é essencial compreender como os graus atribuídos às matrizes canônicas $E_{i,i+1}$ determinam toda a estrutura graduada.

Para tornar essa ideia mais explícita, introduzimos a notação na definição a seguir, que define e codifica de modo compacto os graus desses elementos fundamentais. Essa codificação será especialmente conveniente ao reconstruirmos os graus dos demais $E_{i,j}$ e ao compararmos graduações distintas, bem como graduações determinadas por sequências diferentes. Daqui em diante, G denotará um grupo abeliano.

Definição 2.1.4. Denotemos por (UJ_n, η) a graduação elementar definida por $\eta \in G^{n-1}$. Essa graduação é definida colocando $\deg(E_{i,i+1}) = g_i$ com $g_i \in G$ para cada i, onde $\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$. Além disso, vamos denotar por $\mathrm{rev}(\eta) = (g_{n-1}, g_{n-2}, \ldots, g_1)$ a reversão da sequência η, ou seja, $\mathrm{rev}(\eta)$ é a sequência refletida de η em que a i-ésima posição da nova sequência corresponde à $(n-i)$-ésima posição da sequência original.

A seguir, veremos que, a menos de isomorfismo graduado, as graduações (UJ_n, η) e $(UJ_n, \mathrm{rev}(\eta))$ são as mesmas.

Lema 2.1.5. *Seja $\eta \in G^{n-1}$. A transformação linear $\varphi\colon (UJ_n, \eta) \to (UJ_n, \mathrm{rev}(\eta))$ dada por*

$$\varphi(E_{i,j}) = E_{n-j+1,n-i+1}$$

é um isomorfismo de álgebras G-graduadas.

Demonstração. Para qualquer $A \in UJ_n$, devemos ter:

$$\varphi(A) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}E_{i,j}\right) = \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \varphi(a_{ij}E_{i,j})\right) = \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\varphi(E_{i,j})\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}E_{n-j+1,n-i+1}.$$

Além disso, observemos que, por definição, φ é linear. Assim, provaremos que φ preserva o produto de UJ_n. Como as matrizes canônicas formam uma base para UJ_n, é suficiente provarmos o acima para o produto de tais matrizes. Para tanto, vamos considerar $E_{i,j}$ e $E_{k,l}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{i,j} \circ E_{k,l}) &= \varphi\left(\frac{1}{2}\cdot(E_{i,j}E_{k,l} + E_{k,l}E_{i,j})\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(\varphi(E_{i,j}E_{k,l}) + \varphi(E_{k,l}E_{i,j})\big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(\varphi(\delta_{jk}E_{i,l}) + \varphi(\delta_{li}E_{k,j})\big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(\delta_{jk}\varphi(E_{i,l}) + \delta_{li}\varphi(E_{k,j})\big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(\delta_{jk}E_{n-l+1,n-i+1} + \delta_{li}E_{n-j+1,n-k+1}\big).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{i,j}) \circ \varphi(E_{k,l}) &= \frac{1}{2}\cdot\big(\varphi(E_{i,j})\varphi(E_{k,l}) + \varphi(E_{k,l})\varphi(E_{i,j})\big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(E_{n-j+1,n-i+1}E_{n-l+1,n-k+1} + E_{n-l+1,n-k+1}E_{n-j+1,n-i+1}\big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(\delta_{n-i+1,n-l+1}E_{n-j+1,n-k+1} + \delta_{n-k+1,n-j+1}E_{n-l+1,n-i+1}\big).
\end{aligned}$$

Pelo produto de matrizes canônicas, devemos ter

$$\begin{cases} \delta_{n-i+1,n-l+1} = 1 = \delta_{li}, & \text{se } i = l \\ \delta_{n-k+1,n-j+1} = 1 = \delta_{jk}, & \text{quando } j = k. \end{cases}$$

Logo, obtemos:

$$\varphi(E_{i,j} \circ E_{k,l}) = \varphi(E_{i,j}) \circ \varphi(E_{k,l}).$$

Para finalizar, mostraremos que φ preserva a graduação. Para isto, percebamos que, pela definição de η, devemos ter $\deg(E_{i,i+1}) = g_i$. Como $\varphi(E_{i,i+1}) = E_{n-i,n-i+1}$ e $\operatorname{rev}(\eta) = (g_{n-1}, g_{n-2}, \ldots, g_1)$, obtemos $\deg(E_{n-i,n-i+1}) = g_{n-i}$. Assim, g_i é levado em g_{n-i}, o que mostra que φ preserva a graduação.

Portanto, φ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas. □

Introduzimos agora uma ferramenta combinatória que será essencial para o estudo dos produtos não nulos em UJ_n. Vejamos este conjunto que é formado pelas permutações que preservam os produtos de Jordan não nulos reordenados, servindo como detalhe central para alguns resultados que apresentaremos.

Denotamos por S_m o conjunto das permutações de m elementos e seja t um inteiro onde $1 \leqslant t \leqslant m$. Consideremos $\mathcal{T}_m^{(t)}$ o conjunto das permutações $\sigma \in S_m$ que satisfazem as seguintes condições:

(a) $\sigma(t) = 1$;

(b) Se existem inteiros $k_1, k_2 \geqslant 0$ tais que $k_1 + k_2 \leqslant m - 1$ e

$$\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), \ldots, \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, \ldots, k_1+k_2+1\},$$

então, devemos ter

$$t - k_1 - 1 \geqslant 1 \text{ e } \sigma(t-k_1-1) = k_1+k_2+2,$$

ou

$$t + k_2 + 1 \leqslant m \text{ e } \sigma(t+k_2+1) = k_1+k_2+2.$$

Além disso, denotamos por $\mathcal{T}_m$ o conjunto

$$\bigcup_{t=1}^{m} \mathcal{T}_m^{(t)}.$$

Outra maneira de definirmos $\mathcal{T}_m^{(t)}$ é dada por:

$$\mathcal{T}_m^{(t)} = \{\sigma \in S_m \mid \sigma(1) > \cdots > \sigma(t), \sigma(t) = 1, \sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m)\},$$

isto é, $\mathcal{T}_m^{(t)}$ é o conjunto das permutações σ de $\{1, 2, \ldots, m\}$ composto por:

(i) Uma sequência estritamente decrescente dos primeiros t valores de σ em que o 1 aparece necessariamente na t-ésima posição.

(*ii*) Uma sequência estritamente crescente dos $m-t$ elementos restantes.

Por exemplo, consideremos $\sigma, \tau \in S_5$ como sendo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, devemos ter $\sigma \in \mathcal{T}_5^{(3)} \subset \mathcal{T}_5$ e $\tau \notin \mathcal{T}_5$.

Notamos que, em geral, $\mathcal{T}_m$ não é um subgrupo de S_m. Por exemplo, tomemos $m = 3$ e sejam $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ em $\mathcal{T}_3$. Então, temos

$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Desta maneira, tem-se $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{T}_3$ mas $\sigma_2\sigma_1 \notin \mathcal{T}_3$.

Observamos, entretanto, que $\mathcal{T}_m$ é fechado sobre a permutação reversa. De fato, seja $\rho \in S_m$ a permutação reversa, dada por $\rho(i) = m-i+1$. Seja ainda $\sigma \in \mathcal{T}_m^{(t)}$. Pela definição alternativa de $\mathcal{T}_m^{(t)}$, temos:

$$\sigma(1) > \cdots > \sigma(t-1) > \sigma(t) = 1 \quad \text{e} \quad \sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m).$$

Definamos $\tau := \sigma\rho$. Como ρ é uma permutação, segue-se que

$$\rho(m-t+1) = t,$$

e portanto,

$$\tau(m-t+1) = \sigma(\rho(m-t+1)) = \sigma(t) = 1.$$

Além disso, a composição à direita por ρ inverte a ordem dos índices, de modo que a sequência

$$\sigma(1) > \cdots > \sigma(t-1)$$

corresponde, em τ, à sequência

$$\tau(m) > \cdots > \tau(m-t+2),$$

enquanto a sequência

$$\sigma(t+1) < \cdots < \sigma(m)$$

corresponde, em τ, à sequência

$$\tau(m-t) < \cdots < \tau(1).$$

Assim, τ satisfaz:

(*i*) $\tau(1) > \cdots > \tau(m-t)$,

(*ii*) $\tau(m-t+1) = 1$,

(*iii*) $\tau(m-t+2) < \cdots < \tau(m)$, o que implica

$$\sigma\rho \in \mathcal{T}_m^{(m-t+1)} \subseteq \mathcal{T}_m.$$

Desta maneira, $\mathcal{T}_m$ é fechado sobre a permutação reversa.

Com base nas estruturas apresentadas até aqui, torna-se relevante compreender sob quais condições um produto de matrizes canônicas estritamente triangulares superiores, reordenadas por uma permutação, permanece não nulo quando considerado o produto de Jordan.

Introduzimos o conjunto $\mathcal{T}_m$, que reúne exatamente as permutações com essa propriedade, e então, formalizaremos essa correspondência, estabelecendo que um produto de Jordan reordenado permanece não nulo se, e somente se, a permutação pertence a $\mathcal{T}_m$.

Lema 2.1.6. *Sejam $r_1,\dots,r_m$ matrizes canônicas estritamente triangulares superiores tal que o produto associativo $r_1\cdots r_m \neq 0$, e seja $\sigma \in S_m$. Então, $r_{\sigma^{-1}(1)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$ se, e somente se, $\sigma \in \mathcal{T}_m$.*

Demonstração. Consideremos $r_{\sigma^{-1}(1)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$. Suponhamos, por absurdo, que $\sigma \notin \mathcal{T}_m$. Então, existem inteiros k_1,k_2 positivos tais que $k_1+k_2 \leqslant m-1$ satisfazendo as condições:

$$\{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(2),\dots,\sigma^{-1}(k_1+k_2+1)\} = \{t-k_1, t-k_1+1,\dots,t+k_2\}$$

com $\sigma^{-1}(k_1+k_2+2) \neq t-k_1-1$ e $\sigma^{-1}(k_1+k_2+2) \neq t+k_2+1$.

Como $r_{\sigma^{-1}(1)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$, temos $r_{\sigma^{-1}(1)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+1)} \neq 0$. Por hipótese, $r_1\cdots r_m \neq 0$ e, portanto, $r_{t-k_1}r_{t-k_1+1}\cdots r_{t+k_2} \neq 0$, sendo este o único somando não nulo que aparece em

$$r_{\sigma^{-1}(1)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+1)},$$

a menos de uma potência de $(1/2)^l$, onde $l = k_1+k_2+1$. Assim, se $i = \sigma^{-1}(k_1+k_2+2)$, então

$$\begin{aligned}
r_{\sigma^{-1}(1)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(k_1+k_2+1)}\circ r_i &= \left(\frac{1}{2}\right)^l (r_{t-k_1}r_{t-k_1+1}\cdots r_{t+k_2})\circ r_i \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} (r_{t-k_1}r_{t-k_1+1}\cdots r_{t+k_2}r_i + r_i r_{t-k_1}r_{t-k_1+1}\cdots r_{t+k_2}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $i \neq t+k_2+1$ e $i \neq t-k_1-1$. Dessa forma, devemos ter $r_{\sigma^{-1}(1)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(m)} = 0$, o que gera um absurdo porque $r_{\sigma^{-1}(1)}\circ\cdots\circ r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$. Logo, $\sigma \in \mathcal{T}_m$.

Por outro lado, suponhamos que $\sigma \in \mathcal{T}_m$ e seja $\sigma^{-1}(1) = t$. Vamos fazer a seguinte afirmação:

Afirmação 2.1.7. Se $1 \leqslant d \leqslant m$, então

$$\{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(2),\dots,\sigma^{-1}(d)\} = \{t-j,\dots,t,\dots,t+(d-j)-1\}$$

para algum j. É importante ressaltarmos que não temos necessariamente

$$\sigma^{-1}(1) = t-j,\dots,\sigma^{-1}(i) = t,\dots,\sigma^{-1}(d) = t+(d-j)-1,$$

mas sim apenas uma igualdade de conjuntos.

Mostraremos tal afirmação por indução sobre d. Para $d = 1$, obtemos $\{\sigma^{-1}(1)\} = \{t\}$ por definição. Tomando $d = 2$, pela definição de $\mathcal{T}_m$ temos $\sigma^{-1}(2) = t-1$ ou $\sigma^{-1}(2) = t+1$. Assim, devemos ter $\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2)\} = \{t-1, t\}$ ou $\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2)\} = \{t, t+1\}$. Suponhamos então que

$$\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(d)\} = \{t-j, \ldots, t, \ldots, t+(d-j)-1\}$$

para um certo d de modo que $1 \leqslant d < m$ e vejamos para $d+1$. Como $\sigma \in \mathcal{T}_m$, devemos ter, por definição, que $\sigma^{-1}(d+1) = t-j-1$ ou $\sigma^{-1}(d+1) = t+(d-j)$. Dessa forma, obtemos

$$\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(d), \sigma^{-1}(d+1)\} = \{t-j-1, t-j, \ldots, t, \ldots, t+(d-j)-1\} \text{ ou}$$

$$\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(d), \sigma^{-1}(d+1)\} = \{t-j, \ldots, t, \ldots, t+(d-j)-1, t+(d-j)\},$$

o que conclui a Afirmação 2.1.7. Com isso, podemos fazer a seguinte afirmação:

Afirmação 2.1.8. *$r_{\sigma^{-1}(1)} \circ \cdots \circ r_{\sigma^{-1}(d)} \neq 0$ para todo $2 \leqslant d \leqslant m$.*

Provaremos por indução sobre d. Para $d = 2$, por definição de $\mathcal{T}_m$, temos

$$r_{\sigma^{-1}(1)} = r_t \quad \text{e}, \quad r_{\sigma^{-1}(2)} = r_{t-1} \quad \text{ou} \quad r_{\sigma^{-1}(2)} = r_{t+1}.$$

Assim, devemos ter:

$$r_{\sigma^{-1}(1)} \circ r_{\sigma^{-1}(2)} = \frac{1}{2} \cdot (r_t r_{t-1} + r_{t-1} r_t) = \frac{1}{2} \cdot (r_{t-1} r_t)$$

ou

$$r_{\sigma^{-1}(1)} \circ r_{\sigma^{-1}(2)} = \frac{1}{2} \cdot (r_t r_{t+1} + r_{t+1} r_t) = \frac{1}{2} \cdot (r_t r_{t+1}).$$

Em ambos casos, $r_{\sigma^{-1}(1)} \circ r_{\sigma^{-1}(2)} \neq 0$ pois, por hipótese, $r_1 \cdots r_m \neq 0$.

Suponhamos agora que $r_{\sigma^{-1}(1)} \circ \cdots \circ r_{\sigma^{-1}(d)} \neq 0$ para um certo d tal que $2 \leqslant d < m$. Pela Afirmação 2.1.7, existe j de modo que a única maneira que o produto $r_{\sigma^{-1}(1)} \circ \cdots \circ r_{\sigma^{-1}(d)}$ seja não nulo é dado por

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d \cdot \left(r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1}\right).$$

Como $\sigma \in \mathcal{T}_m$, temos

$$r_{\sigma^{-1}(d+1)} = r_{t-j-1} \quad \text{ou} \quad r_{\sigma^{-1}(d+1)} = r_{t+(d-j)}.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
r_{\sigma^{-1}(1)} \circ \cdots \circ r_{\sigma^{-1}(d)} \circ r_{\sigma^{-1}(d+1)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^d \cdot \left(r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1}\right) \circ r_{\sigma^{-1}(d+1)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{d+1} \cdot \left(r_{t-j} \cdots r_{t+(d-j)-1} r_{t-j-1} + r_{t-j-1} r_{t-j} \cdots r_{t+(d-j)-1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{d+1} \cdot \left(r_{t-j-1} r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1}\right)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
r_{\sigma^{-1}(1)} \circ \cdots \circ r_{\sigma^{-1}(d)} \circ r_{\sigma^{-1}(d+1)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{d} \cdot (r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1}) \circ r_{\sigma^{-1}(d+1)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{d+1} \cdot (r_{t-j} \cdots r_{t+(d-j)-1} r_{t+(d-j)} + r_{t+(d-j)} r_{t-j} \cdots r_{t+(d-j)-1}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{d+1} \cdot (r_{t-j} \cdots r_t \cdots r_{t+(d-j)-1} r_{t+(d-j)}).
\end{aligned}$$

Segue-se que, em ambos os casos,

$$r_{\sigma^{-1}(1)} \circ \cdots \circ r_{\sigma^{-1}(d)} \circ r_{\sigma^{-1}(d+1)} \neq 0,$$

pois $r_1 \cdots r_m \neq 0$, provando a afirmação.

Assim, obtemos $r_{\sigma^{-1}(1)} \circ \cdots \circ r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$ o que finaliza a demonstração deste lema. □

O lema acima caracteriza exatamente as permutações que mantêm não nulos os produtos de Jordan de matrizes canônicas. Essa característica, ainda que técnica, será essencial para conectar as propriedades combinatórias de $\mathcal{T}_m$ com a estrutura graduada de UJ_n.

Então, tendo caracterizado as permutações que garantem quando os produtos de Jordan são não nulos, por meio deste conjunto $\mathcal{T}_m$, podemos agora identificar quais sequências de graus estão associadas aos produtos não nulos de matrizes homogêneas.

A seguir, introduzimos formalmente o conceito de sequências η-boas, tanto para o caso associativo quanto no contexto de Jordan, as quais desempenham um papel essencial para os próximos resultados desta seção.

Definição 2.1.9. Seja G um grupo e consideremos (UJ_n, η) uma G-graduação elementar sobre UJ_n. Dizemos que uma sequência $\mu = (a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ é:

(1) η-boa associativa se existem $r_1, \ldots, r_m \in UT_n$ matrizes canônicas estritamente triangulares superiores tais que $r_1 \cdots r_m \neq 0$ e $\deg(r_i) = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Caso contrário, μ é dita η-ruim associativa.

(2) η-boa Jordan se existem $r_1, \ldots, r_m \in UJ_n$ matrizes canônicas estritamente triangulares superiores tais que $r_1 \circ \cdots \circ r_m \neq 0$ e $\deg(r_i) = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Caso contrário, μ é η-ruim Jordan.

Para facilitar o entendimento, o exemplo a seguir ilustra o conceito de sequência η-boa, destacando a relação entre o produto associativo e o produto de Jordan em UJ_n.

Exemplo 2.1.10. Consideremos o grupo $\mathbb{Z}_3$ aditivo e a graduação elementar de UJ_5 dada por

$$\eta = (g_1, g_2, g_3, g_4) = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{2}).$$

Sendo $r_1 = E_{1,2}$, $r_2 = E_{2,4}$ e $r_3 = E_{4,5}$ matrizes canônicas de UJ_5, temos

$$r_1 r_2 r_3 = E_{1,2} E_{2,4} E_{4,5} = E_{1,5} \neq 0.$$

Pelo item (*ii*) do Lema 2.1.2, devemos ter $\deg(r_1) = \overline{0}$ e $\deg(r_3) = \overline{2}$. Notemos que $E_{2,4}$ pode ser escrito da seguinte maneira: $E_{2,4} = 2E_{2,3} \circ E_{3,4}$ e assim, obtemos

$$\deg(E_{2,4}) = \deg(E_{2,3}) + \deg(E_{3,4}) = \overline{1} + \overline{1} = \overline{2}.$$

Então, a sequência $\mu = (\overline{0}, \overline{2}, \overline{2})$ é η-boa associativa. Agora, se considerarmos o produto de Jordan, devemos ter

$$\begin{aligned} r_3 \circ r_2 \circ r_1 &= E_{4,5} \circ E_{2,4} \circ E_{1,2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(E_{4,5} E_{2,4} + E_{2,4} E_{4,5} \right) \circ E_{1,2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(E_{2,5} \circ E_{1,2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(E_{2,5} E_{1,2} + E_{1,2} E_{2,5} \right) \\ &= \frac{1}{4} E_{1,5} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Assim, a sequência $\mu_1 = (\overline{2}, \overline{2}, \overline{0})$ é η-boa Jordan. Sabemos, por argumentos anteriores, que

$$E_{4,5} \circ E_{2,4} \circ E_{1,2} = E_{2,4} \circ E_{1,2} \circ E_{4,5} = E_{1,2} \circ E_{2,4} \circ E_{4,5}.$$

Desta maneira, devemos ter mais duas sequências η-boas Jordan: $\mu_2 = (\overline{2}, \overline{0}, \overline{2})$ e $\mu_3 = (\overline{0}, \overline{2}, \overline{2})$. Para facilitar, segue-se, do Lema 2.1.2, que na entrada (i, j) da tabela abaixo temos os graus de $E_{i,j}$:

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ & & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ & & & \overline{0} & \overline{2} \\ & & & & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

A partir desse exemplo, podemos extrair a seguinte proposição:

Proposição 2.1.11. *Seja G um grupo e consideremos (UJ_n, η) uma G-graduação elementar sobre UJ_n. Então, qualquer sequência $\mu = (a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ de comprimento maior ou igual a n é η-ruim associativa e, em particular, η-ruim Jordan.*

Demonstração. Consideremos uma sequência $\mu = (a_1, \ldots, a_m) \in G^m$ com $m \geqslant n$. Suponhamos, por absurdo, que μ seja η-boa associativa. Por definição, existem matrizes canônicas estritamente triangulares superiores $r_1, \ldots, r_m \in UJ_n$ tais que o produto associativo $r_1 r_2 \cdots r_m \neq 0$ e $\deg(r_i) = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

Como r_k são matrizes canônicas estritamente triangulares superiores, sabemos que cada matriz é escrita da forma E_{i_k,j_k} com $i_k < j_k$ e um produto de tais matrizes é não nulo se, e somente se, $j_k = i_{k+1}$, isto é, os índices se encaixam sequencialmente $i_1 < i_2 < \ldots < i_m < j_m$. Desta maneira, obtemos $m \leqslant n-1$. Logo, para $m \geqslant n$, o produto associativo $r_1 r_2 \cdots r_m$ se anula, contradizendo a hipótese de que μ é η-boa associativa. Deste modo, μ é η-ruim associativa.

Além disso, como o produto de Jordan é definido por $a \circ b = (1/2)(ab+ba)$, segue-se que qualquer produto de Jordan envolvendo m matrizes canônicas, onde $m \geqslant n$, é uma combinação linear de produtos associativos de mesmo comprimento, os quais são todos nulos. Assim, temos $r_1 \circ \cdots \circ r_m = 0$. Logo, a sequência μ é também η-ruim Jordan. □

A proposição anterior nos fornece uma condição simples para que uma sequência seja η-ruim associativa e, em particular, η-ruim Jordan, mostrando que o comprimento da sequência está limitado pela ordem da álgebra. No entanto, o próximo exemplo ilustra que mesmo sequências com comprimento estritamente menor que n podem resultar em produtos de Jordan nulos.

Exemplo 2.1.12. Tomemos o grupo $G = \mathbb{Z}_3$ aditivo e a graduação elementar (UJ_3, η) cujo $\eta = (\overline{1}, \overline{2})$. Seja $\mu = (\overline{1}, \overline{0})$ uma sequência. Apesar que μ tenha comprimento menor do que $n = 3$, segue-se que μ é η-ruim Jordan. De fato, pela graduação dada por $\eta = (\overline{1}, \overline{2})$ temos os graus de $E_{i,j}$ posicionados da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ & \overline{0} & \overline{2} \\ & & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Consideremos as matrizes canônicas estritamente triangulares superiores $r_1 = E_{1,2}$ e $r_2 = E_{1,3}$ em UJ_3. Assim, $\deg(r_1) = \overline{1}$ e $\deg(r_2) = \overline{0}$. Mas, o produto de Jordan $r_1 \circ r_2$ é igual a 0 pois

$$r_1 \circ r_2 = \frac{1}{2} \cdot (E_{1,2}E_{1,3} + E_{1,3}E_{1,2}) = \frac{1}{2}(0+0) = 0.$$

Desta maneira, a sequência $\mu = (\deg(E_{1,2}), \deg(E_{1,3})) = (\overline{1}, \overline{0})$ é η-ruim Jordan.

Introduziremos agora uma família de polinômios associados a cada sequência de graus. Esses polinômios serão usados para traduzir o papel das sequências η-ruim Jordan (ou, η-boa Jordan) para o contexto das identidades graduadas, permitindo analisar o comportamento da álgebra UJ_n.

Definição 2.1.13. Seja $\mu = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in G^m$ uma sequência. Definamos o polinômio

$$f_\mu = f_1^{(a_1)} \circ f_2^{(a_2)} \circ \cdots \circ f_m^{(a_m)}$$

onde

$$f_i^{(a_i)} = \begin{cases} (x_{3i-2}^{(a_i)}, x_{3i-1}^{(a_i)}, x_{3i}^{(a_i)}), & \text{se } a_i = 1 \\ x_i^{(a_i)}, & \text{se } a_i \neq 1 \end{cases}.$$

Para ilustrar a construção introduzida acima, vejamos agora dois exemplos de como associar o polinômio f_μ a sequência μ: sendo uma η-boa Jordan e a outra η-ruim Jordan, bem como sua avaliação em matrizes canônicas triangulares superiores que resultam em produtos de Jordan não nulo e outro nulo, respectivamente. Tais exemplos tornarão mais claro o papel dos polinômios na identificação de identidades graduadas.

Exemplo 2.1.14. Retomemos ao Exemplo 2.1.10. Como o grupo considerado é $(\mathbb{Z}_3,+)$, segue da definição anterior que

$$f_i^{(a_i)} = \begin{cases} (x_{3i-2}^{(a_i)}, x_{3i-1}^{(a_i)}, x_{3i}^{(a_i)}), & \text{se } a_i = \overline{0}; \\ \\ x_i^{(a_i)}, & \text{se } a_i \neq \overline{0}. \end{cases}$$

Considerando a sequência $\mu_3 = (\overline{0},\overline{2},\overline{2})$ η-boa Jordan, devemos ter o polinômio

$$f_{\mu_3} = f_1^{(\overline{0})} \circ f_2^{(\overline{2})} \circ f_3^{(\overline{2})} = (x_1^{(\overline{0})}, x_2^{(\overline{0})}, x_3^{(\overline{0})}) \circ x_2^{(\overline{2})} \circ x_3^{(\overline{2})}.$$

Pelo Exemplo 2.1.10, conhecemos os graus de $E_{i,j}$. Consideremos as seguintes matrizes canônicas $E_{1,2}, E_{2,2}, E_{1,1}$ com graus $\overline{0}$, $E_{2,4}$ e $E_{4,5}$ com graus $\overline{2}$. Substituindo de maneira adequada as variáveis de f_{μ_3} por tais matrizes, obtemos:

$$f_{\mu_3}(E_{1,2}, E_{2,2}, E_{1,1}, E_{2,4}, E_{4,5}) = (E_{1,2}, E_{2,2}, E_{1,1}) \circ E_{2,4} \circ E_{4,5} = \frac{1}{4} \cdot (E_{1,2} \circ E_{2,4} \circ E_{4,5}) = \frac{1}{16} E_{1,5}.$$

Logo, $f_{\mu_3}(E_{1,2}, E_{2,2}, E_{1,1}, E_{2,4}, E_{4,5}) \neq 0$ e assim, f_{μ_3} não é identidade graduada para (UJ_3,η).

Exemplo 2.1.15. Seja $G = \mathbb{Z}_3$ e consideremos (UJ_3,η) a graduação elementar de UJ_3 com $\eta = (\overline{1},\overline{2})$. Usemos a sequência $\mu = (\overline{1},\overline{0})$ do Exemplo 2.1.12, que é η-ruim Jordan. Assim, temos o polinômio

$$f_\mu = f_1^{(\overline{1})} \circ f_2^{(\overline{0})} = x_1^{(\overline{1})} \circ (x_4^{(\overline{0})}, x_5^{(\overline{0})}, x_6^{(\overline{0})}).$$

Sejam $r_1 \in UJ_3$ homogênea de grau $\overline{1}$ e $r_4, r_5, r_6 \in UJ_3$ homogêneas de grau $\overline{0}$. Como a graduação é elementar, cada um desses elementos pode ser escrito como combinação linear de matrizes canônicas homogêneas do mesmo grau. Assim, a avaliação $f_\mu(r_1, r_4, r_5, r_6)$ se escreve como combinação linear das avaliações do tipo

$$f_\mu(E_{i,j}, E_{p,q}, E_{t,s}, E_{u,v})$$

onde todas as matrizes envolvidas são canônicas, homogêneas e possuem graus compatíveis com a sequência μ. Como $E_{i,j}$ e $(E_{p,q}, E_{t,s}, E_{u,v})$ são matrizes canônicas estritamente triangulares superiores com graus $\overline{1}$ e $\overline{0}$, respectivamente, e μ é η-ruim Jordan, segue-se que

$$f_\mu(E_{i,j}, E_{p,q}, E_{t,s}, E_{u,v}) = 0.$$

Ou seja,

$$f_\mu(r_1, r_4, r_5, r_6) = 0.$$

Portanto, f_μ é uma identidade graduada para (UJ_3,η).

Os Exemplos 2.1.14 e 2.1.15 ilustram a correspondência entre a natureza de uma sequência e a condição se o polinômio f_μ pode se anular ou não, antecipando o resultado formal que expressa essa equivalência. Então, motivados por tais exemplos, apresentamos a seguir um resultado que formaliza essa correspondência. Trata-se de um critério que permite determinar quando f_μ é uma identidade G-graduada para a álgebra (UJ_n, η).

Lema 2.1.16. *Seja $\eta \in G^{n-1}$ e consideremos (UJ_n, η) a G-graduação elementar sobre UJ_n. Então, uma sequência μ é η-ruim Jordan se, e somente se, f_μ é uma identidade G-graduada para (UJ_n, η).*

Demonstração. Suponhamos que $\mu = (a_1, \ldots, a_m)$ seja uma sequência η-ruim Jordan. Por definição,

$$f_\mu = f_1^{(a_1)} \circ f_2^{(a_2)} \circ \cdots \circ f_m^{(a_m)}$$

onde

$$f_i^{(a_i)} = \begin{cases} (x_{3i-2}^{(a_i)}, x_{3i-1}^{(a_i)}, x_{3i}^{(a_i)}), & \text{se } a_i = 1 \\ \\ x_i^{(a_i)}, & \text{se } a_i \neq 1 \end{cases}.$$

Substituamos as variáveis de f_μ por matrizes r_i de modo que haja uma compatibilidade (igualdade) entre o grau da variável e correspondente grau da matriz que ocupa a sua posição. Notemos que:

- se $f_i^{(a_i)}(x_i^{(a_i)}) = x_i^{(a_i)}$, então $f_i^{(a_i)}(r_i) = r_i$ é uma matriz estritamente triangular superior com grau a_i, pois toda matriz diagonal tem grau 1 e $a_i \neq 1$;
- se $f_i^{(a_i)}(x_{3i-2}^{(a_i)}, x_{3i-1}^{(a_i)}, x_{3i}^{(a_i)}) = (x_{3i-2}^{(a_i)}, x_{3i-1}^{(a_i)}, x_{3i}^{(a_i)})$, então $f_i^{(a_i)}(r_{3i-2}, r_{3i-1}, r_{3i}) = (r_{3i-2}, r_{3i-1}, r_{3i})$ é uma matriz estritamente triangular superior com grau a_i.

Assim, substituindo as variáveis de f_μ pelas já citadas matrizes r_i, obtemos uma combinação linear de produtos

$$F_1 \circ F_2 \circ \cdots \circ F_m,$$

onde cada F_i é uma matriz canônica estritamente triangular superior com $\deg(F_i) = a_i$. Como μ é η-ruim, segue-se que

$$F_1 \circ F_2 \circ \cdots \circ F_m = 0$$

e, consequentemente, f_μ é uma identidade graduada para (UJ_n, η).

Reciprocamente, suponhamos que f_μ seja uma identidade G-graduada para (UJ_n, η). Suponhamos, por absurdo, que $\mu = (a_1, \ldots, a_m)$ seja uma sequência η-boa Jordan. Então, por definição, existem matrizes canônicas estritamente triangulares superiores

$$F_1, \ldots, F_m \in UJ_n$$

tais que

$$\deg(F_i) = a_i \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad F_1 \circ \cdots \circ F_m \neq 0.$$

Definamos matrizes r_i da seguinte forma:

- se $a_i \neq 1$, então $r_i = F_i$;
- se $a_i = 1$ e $F_i = E_{t,j}$, então $r_{3i-2} = E_{t,j}$, $r_{3i-1} = E_{j,j}$ e $r_{3i} = E_{t,t}$.

Notemos que $(r_{3i-2}, r_{3i-1}, r_{3i}) = \frac{1}{4}F_i$. Logo, substituindo as variáveis de f_μ pelas matrizes r_i, levando-se em consideração os graus, obteremos

$$\alpha F_1 \circ \cdots \circ F_m \neq 0,$$

onde $\alpha = \left(\dfrac{1}{2}\right)^l$ para algum l. Absurdo, pois f_μ é identidade graduada para (UJ_n, η). $\square$

Podemos perceber que o lema acima estabelece o elo central entre as sequências η-ruins e as identidades graduadas, e tal correspondência obtida é de grande utilidade, pois ela traduz o problema algébrico de determinar identidades graduadas em um problema combinatório simples sobre sequências de graus, e vice-versa.

Agora, seja U um conjunto qualquer e consideremos $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in U^m$ uma sequência de símbolos. Para $\sigma \in S_m$, definimos a aplicação

$$\sigma u = (u_{\sigma^{-1}(1)}, u_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, u_{\sigma^{-1}(m)}).$$

Notemos que essa aplicação é uma ação à esquerda de S_m em U^m, pois:

(i) para todo $u \in U^m$, temos

$$\text{id } u = (u_{\text{id}^{-1}(1)}, \ldots, u_{\text{id}^{-1}(m)}) = (u_1, \ldots, u_m) = u.$$

(ii) para quaisquer $\sigma, \gamma \in S_m$ e $u \in U^m$, temos

$$(\gamma\sigma)u = \left(u_{(\gamma\sigma)^{-1}(1)}, \ldots, u_{(\gamma\sigma)^{-1}(m)}\right) = \left(u_{\sigma^{-1}(\gamma^{-1}(1))}, \ldots, u_{\sigma^{-1}(\gamma^{-1}(m))}\right).$$

Por outro lado, se denotarmos $\sigma u = (u_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, u_{\sigma^{-1}(m)}) = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m)$, então

$$\gamma(\sigma u) = (\tilde{u}_{\gamma^{-1}(1)}, \ldots, \tilde{u}_{\gamma^{-1}(m)}) = (u_{\sigma^{-1}(\gamma^{-1}(1))}, \ldots, u_{\sigma^{-1}(\gamma^{-1}(m))}).$$

Logo, $(\gamma\sigma)u = \gamma(\sigma u)$ e portanto, define uma ação à esquerda de S_m em U^m.

Ademais, sabemos que o único produto associativo não nulo de $n-1$ matrizes estritamente triangulares superiores de UT_n é $E_{1,2}E_{2,3}\cdots E_{n-1,n}$. Então, o próximo resultado decorre do Lema 2.1.6 e serve para identificar precisamente quais sequências são η-boas Jordan, com respeito às permutações do conjunto $\mathcal{T}_{n-1}$.

Lema 2.1.17. *Uma sequência $\mu \in G^{n-1}$ é η-boa Jordan para (UJ_n, η) se, e somente se, $\mu = \sigma\eta$ para algum $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$.*

Demonstração. Consideremos $r_i = E_{i,i+1}$ as matrizes canônicas estritamente triangulares superiores. Pela definição da graduação elementar, temos $\deg(r_i) = g_i$, onde $\eta = (g_1, \ldots, g_{n-1})$.

Suponhamos que $\mu = \sigma\eta$, com $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$. Definimos então, para cada i, a matriz $s_i = r_{\sigma^{-1}(i)}$. Assim, temos:

$$\deg(s_i) = \deg(r_{\sigma^{-1}(i)}) = g_{\sigma^{-1}(i)} = \mu_i$$

para todo i. Como $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$, pelo Lema 2.1.6 segue-se que:

$$s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_{n-1} = r_{\sigma^{-1}(1)} \circ \cdots \circ r_{\sigma^{-1}(n-1)} \neq 0.$$

Logo, existe uma sequência de matrizes canônicas estritamente triangulares superiores com graus dados por μ cujo produto de Jordan é não nulo. Portanto, μ é uma sequência η-boa Jordan.

Por outro lado, vamos supor que $\mu = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in G^{n-1}$ é uma sequência η-boa Jordan. Então, por definição, existem $s_1, \ldots, s_{n-1} \in UJ_n$ matrizes canônicas estritamente triangulares superiores tais que:

$$s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_{n-1} \neq 0 \quad \text{e} \quad \deg(s_i) = a_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n-1.$$

Como $s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_{n-1} \neq 0$, segue-se que o produto associativo correspondente também é não nulo para alguma ordem, ou seja, $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ coincide (a menos de ordem) com $\{E_{1,2}, E_{2,3} \ldots, E_{n-1,n}\}$. Assim, existe $\sigma \in S_{n-1}$ tal que

$$s_i = E_{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i)+1} = r_{\sigma^{-1}(i)}.$$

Pelo Lema 2.1.6, segue-se que $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$ e então,

$$\mu = (a_1, \ldots, a_{n-1}) = (\deg(s_1), \ldots, \deg(s_{n-1})) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(n-1)}) = \sigma\eta,$$

isto é, $\mu = \sigma\eta$ com $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$. □

Até o momento, podemos perceber que a estrutura combinatória de $\mathcal{T}_m$ reflete de forma explícita nas possibilidades de produtos não nulos de UJ_n, reforçando o papel das permutações na classificação que apresentaremos posteriormente.

Então, antes de prosseguirmos, é interessante compreender o comportamento das sequências sobre a ação de permutações em $\mathcal{T}_m$. A partir disso, estabelecemos uma condição que relaciona diretamente uma sequência com sua reversa, explorando quando duas sequências devem ser consideradas equivalentes nesse contexto. Assim, o lema a seguir prepara o terreno para distinguir quando duas graduações são não isomorfas.

Lema 2.1.18. *Consideremos U um conjunto não vazio. Sejam $u, \tilde{u} \in U^m$ sequências quaisquer. Se $u = \tilde{u}$ ou $u = \mathrm{rev}(\tilde{u})$, então $\mathcal{T}_m u = \mathcal{T}_m \tilde{u}$.*

Demonstração. Sejam $u, \tilde{u} \in U^m$ sequências quaisquer, onde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ e $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_m)$. Suponhamos que $u = \tilde{u}$ ou $u = \mathrm{rev}(\tilde{u})$. Ou seja, temos dois casos:

1. Se $u = \tilde{u}$, então $\mathcal{T}_m u = \mathcal{T}_m \tilde{u}$.

2. Suponhamos que $u = \operatorname{rev}(\tilde{u})$. Seja $\rho \in \mathcal{T}_m$ a permutação reversa definida por $\rho(i) = m - i + 1$, ou seja,
$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ m & m-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, obtemos:
$$u = \rho\tilde{u} = (\tilde{u}_{\rho^{-1}(1)}, \tilde{u}_{\rho^{-1}(2)}, \dots, \tilde{u}_{\rho^{-1}(m)}).$$
Agora, seja $\sigma \in \mathcal{T}_m$ arbitrário. Então,
$$\sigma u = \sigma(\rho\tilde{u}) = (\sigma\rho)\tilde{u}.$$

Como $\mathcal{T}_m$ é fechado para permutações reversas, temos $\sigma\rho \in \mathcal{T}_m$ e portanto, $\mathcal{T}_m u \subseteq \mathcal{T}_m \tilde{u}$. Como $\tilde{u} = \operatorname{rev}(u)$, de forma análoga obtemos $\mathcal{T}_m \tilde{u} \subseteq \mathcal{T}_m u$. $\square$

A recíproca deste lema anterior é válida por [23, Teorema 1]. Com isso, obtemos o seguinte resultado que caracteriza as sequências com suas reversas:

Lema 2.1.19. *Consideremos U um conjunto não vazio. Dadas $u, \tilde{u} \in U^m$ sequências quaisquer, então $u = \tilde{u}$ ou $u = \operatorname{rev}(\tilde{u})$ se, e somente se, $\mathcal{T}_m u = \mathcal{T}_m \tilde{u}$.*

Com isso, o próximo resultado insere o lema anterior no contexto das graduações elementares, estabelecendo um critério prático de quando duas graduações (UJ_n, η) e $(UJ_n, \tilde{\eta})$ não são isomorfas. Ou seja, ele constitui um passo decisivo para classificação dessa graduação de UJ_n garantindo que, se duas sequências η e $\tilde{\eta}$ não forem iguais nem reversas uma da outra, então as graduações correspondentes não são as mesmas.

Corolário 2.1.20. *Sejam $\eta, \tilde{\eta} \in G^{n-1}$ com $\eta \neq \tilde{\eta}$ e $\eta \neq \operatorname{rev}(\tilde{\eta})$. Então, $(UJ_n, \eta) \ncong (UJ_n, \tilde{\eta})$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $(UJ_n, \eta) \cong (UJ_n, \tilde{\eta})$. Neste caso, ambas satisfazem exatamente as mesmas identidades G-graduadas. Por hipótese, $\eta \neq \tilde{\eta}$ e $\eta \neq \operatorname{rev}(\tilde{\eta})$. Logo, pelo Lema 2.1.19, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{T}_{n-1}\eta \not\subset \mathcal{T}_{n-1}\tilde{\eta}$. Assim, existe $\sigma \in \mathcal{T}_{n-1}$ de modo que $\sigma\eta \neq \tilde{\sigma}\tilde{\eta}$ para todo $\tilde{\sigma} \in \mathcal{T}_{n-1}$.

Pelo Lema 2.1.17, segue-se que $\mu = \sigma\eta$ é uma sequência η-boa Jordan e $\tilde{\eta}$-ruim Jordan. Desta maneira, pelo Lema 2.1.16, o polinômio f_μ não é uma identidade G-graduada para (UJ_n, η), porém f_μ é uma identidade G-graduada para $(UJ_n, \tilde{\eta})$, o que contradiz a hipótese que (UJ_n, η) e $(UJ_n, \tilde{\eta})$ satisfazem exatamente as mesmas identidades G-graduadas. Logo, obtemos $(UJ_n, \eta) \ncong (UJ_n, \tilde{\eta})$. $\square$

O resultado a seguir organiza as sequências de graus em classes naturalmente associadas às graduações elementares. Tal condição permitirá identificar quando duas sequências produzem graduações indistinguíveis, a menos de isomorfismo graduado.

Proposição 2.1.21. *Definamos a relação $\sim$ em G^{n-1} da seguinte maneira: para $\mu, \tilde{\mu} \in G^{n-1}$, temos $\mu \sim \tilde{\mu}$ se, e somente se, $\mu = \tilde{\mu}$ ou $\mu = \text{rev}(\tilde{\mu})$. Então, $\sim$ é uma relação de equivalência em G^{n-1}.*

Demonstração. Mostraremos que $\sim$ é uma relação de equivalência em G^{n-1}. Temos:

(i) Reflexiva: Para todo $\mu \in G^{n-1}$, temos $\mu = \mu$. Logo, $\mu \sim \mu$.

(ii) Simétrica: Se $\mu \sim \tilde{\mu}$, então $\mu = \tilde{\mu}$ ou $\mu = \text{rev}(\tilde{\mu})$. No primeiro caso, temos $\tilde{\mu} \sim \mu$. No segundo caso, $\tilde{\mu} = \text{rev}(\mu)$ e assim, $\tilde{\mu} \sim \mu$.

(iii) Transitiva: Suponhamos $\mu \sim \tilde{\mu}$ e $\tilde{\mu} \sim \nu$. Temos quatro possíveis casos:

(a) Se $\mu = \tilde{\mu}$ e $\tilde{\mu} = \nu$, então $\mu = \nu$ e deste modo, $\mu \sim \nu$.

(b) Se $\mu = \tilde{\mu}$ e $\tilde{\mu} = \text{rev}(\nu)$, então $\mu = \text{rev}(\nu)$ e assim, $\mu \sim \nu$.

(c) Se $\mu = \text{rev}(\tilde{\mu})$ e $\tilde{\mu} = \nu$, então $\mu = \text{rev}(\nu)$ e desta maneira, $\mu \sim \nu$.

(d) Se $\mu = \text{rev}(\tilde{\mu})$ e $\tilde{\mu} = \text{rev}(\nu)$, então $\mu = \text{rev}(\text{rev}(\nu)) = \nu$ e portanto, $\mu \sim \nu$.

Logo, segue-se que $\sim$ é uma relação de equivalência. □

Com todas as ferramentas desenvolvidas até aqui, estamos agora aptos a apresentar o resultado principal desta seção: a classificação das graduações elementares de UJ_n, a menos de isomorfismo graduados.

Teorema 2.1.22. *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto ${G^{n-1}}/{\sim}$ e as classes de G-graduações elementares não isomorfas de UJ_n. Além disso, o suporte de toda G-graduação elementar de UJ_n é um conjunto comutativo do grupo G.*

Demonstração. Seja *Grad* o conjunto $\{(UJ_n, \eta) : \eta \in G^{n-1}\}$. Definamos a relação de equivalência $\approx$ em *Grad* da seguinte maneira: para $(UJ_n, \eta), (UJ_n, \tilde{\eta}) \in Grad$, tem-se $(UJ_n, \eta) \approx (UJ_n, \tilde{\eta})$ se, e somente se, $(UJ_n, \eta) \cong (UJ_n, \tilde{\eta})$. Agora, defina a aplicação

$$\Phi : {G^{n-1}}/{\sim} \longrightarrow {Grad}/{\approx}$$

por $\Phi([\eta]) = [(UJ_n, \eta)]$, onde $[\eta]$ e $[(UJ_n, \eta)]$ denotam as classes de equivalência de η e da correspondente G-graduação elementar de UJ_n, respectivamente. Pelo Lema 2.1.5, segue-se que Φ está bem definida. Já pelo Corolário 2.1.20, a Φ é injetiva. Pela própria definição da Φ, ocorre que ela é sobrejetiva e portanto, Φ é bijetiva. Ademais, pelo Lema 2.1.2, segue-se que o suporte da G-graduação elementar é comutativo. □

O teorema acima sintetiza os resultados anteriores ao mostrar que toda graduação elementar é determinada por uma única sequência de graus, a menos de reversão. Com isso, obtém-se uma classificação desse tipo de graduação, consolidando toda a discussão desenvolvida nesta seção.

A seguir, na próxima seção, estudaremos uma nova classe de graduações de UJ_n que apresenta sutilezas e um comportamento mais elaborado em comparação com as elementares vistas nesta seção.

2.2 Graduação MT

Na Seção 1.2, apresentamos o conceito de involuções e exibimos as involuções da álgebra UT_n através de alguns exemplos e, além disso, enunciamos a classificação das involuções do primeiro tipo obtida por Di Vincenzo, Koshlukov e La Scala em [5]. Ademais, na Seção 1.5, vimos também o conceito de involução graduada.

Posto isto, seja A uma álgebra associativa com involução $*$. A decomposição

$$A = A^{(+)} \oplus A^{(-)}$$

induz uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural na álgebra de Jordan A com produto

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Suponhamos ainda que a álgebra associativa A seja dotada de uma H-graduação e que a involução $*$ seja graduada. Nesse caso, a decomposição acima é compatível com a graduação por H, induzindo uma $H \times \mathbb{Z}_2$-graduação na álgebra de Jordan A. Assim, a presença de uma involução graduada em uma álgebra associativa graduada permite construir, de maneira natural, uma estrutura de álgebra de Jordan graduada.

Pelo Exemplo 1.2.7, a álgebra UT_n possui uma involução natural dada por

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & UT_n & \longrightarrow & UT_n \\ & E_{i:m} & \longmapsto & E_{-i:m} \end{array}$$

e para η ser uma graduação elementar em UT_n, devemos ter: ψ é uma involução graduada se, e somente se, $\eta = \operatorname{rev}(\eta)$. A partir dessa involução, podemos obter uma certa nova graduação. Para tanto, definamos primeiramente os elementos simétricos e antissimétricos, que servirão como pilares para essa nova graduação.

Definição 2.2.1. Sejam $i, m \in \mathbb{N}$. Denotemos as seguintes matrizes:

$$Y_{i:m}^{(+)} = E_{i:m} + E_{-i:m} \quad \text{e} \quad Y_{i:m}^{(-)} = E_{i:m} - E_{-i:m}.$$

Tais matrizes são chamadas elementos simétricos e antissimétricos, respectivamente.

Em outras palavras, estamos dizendo que essas matrizes $Y_{i:m}^{(\pm)}$ possuem as entradas posicionadas simetricamente (antissimetricamente) em torno da diagonal secundária. A seguir, apresentamos um exemplo ilustrativo para facilitar a compreensão:

Exemplo 2.2.2. Consideremos a álgebra UJ_6 e tomemos $E_{1:4}$ e $E_{-1:4}$. Tais elementos são, respectivamente, dados por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consequentemente, as matrizes $Y_{1:4}^{(+)}$ e $Y_{1:4}^{(-)}$ são

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

O exemplo acima evidencia como os elementos simétricos e antissimétricos se aparentam e comportam, antecipando os padrões estruturais que surgirão na definição formal dessa nova graduação.

Agora, com relação a esses elementos, observemos um detalhe: se $n-m$ é ímpar e $i = \frac{n-m+1}{2}$, então

$$Y_{i:m}^{(+)} = 2E_{i:m} = 2E_{-i:m} \quad \text{e} \quad Y_{i:m}^{(-)} = 0.$$

De fato, sejam $n, m \in \mathbb{N}$ com $m \leqslant n$, e suponhamos que $n-m$ é ímpar. Definamos

$$i := \frac{n-m+1}{2}.$$

Como $n-m$ é ímpar, temos $n-m+1$ é par de modo que $i \in \mathbb{N}$. Consideremos os elementos $E_{i:m}$ e $E_{-i:m}$. Por definição, temos:

$$E_{i:m} = E_{i,i+m} \quad \text{e} \quad E_{-i:m} = E_{n-i-m+1,n-i+1}.$$

Calculando explicitamente os índices de $E_{-i:m}$, obtemos:

$$n-i-m+1 = n - \left(\frac{n-m+1}{2}\right) - m + 1 = \frac{2n-(n-m+1)-2m+2}{2} = \frac{n-m+1}{2} = i,$$

e

$$n-i+1 = n - \left(\frac{n-m+1}{2}\right) + 1 = \frac{2n-(n-m+1)+2}{2} = \frac{n+m+1}{2} = i+m.$$

Assim, temos $E_{-i:m} = E_{i,i+m} = E_{i:m}$ e portanto, obtemos:

$$Y_{i:m}^{(+)} = E_{i:m} + E_{-i:m} = 2E_{i:m}, \quad \text{e} \quad Y_{i:m}^{(-)} = E_{i:m} - E_{-i:m} = 0.$$

Tal observação será útil na classificação das graduações que veremos nesta seção, pois reduz o número de elementos a serem considerados, especialmente quando $n-m$ é ímpar. Essas novas classes de graduações consideram, além das matrizes canônicas, combinações simétricas e antissimétricas que refletem a simetria dos elementos em relação à diagonal secundária. A seguir, definimos formalmente esse novo tipo de graduação.

Definição 2.2.3. Dizemos que uma G-graduação sobre UJ_n é *Mirror Pattern Type* (MPT), ou simplesmente *Mirror Type* (MT), se todos os elementos simétricos $Y_{i:m}^{(+)}$ e antissimétricos $Y_{i:m}^{(-)}$ são homogêneos e $\deg\left(Y_{i:m}^{(+)}\right) \neq \deg\left(Y_{i:m}^{(-)}\right)$.

Uma propriedade interessante das graduações *mirror type* é a maneira como produtos de elementos simétricos se comportam com o produto de Jordan, ou seja, o próximo lema mostra que tais produtos geram, novamente, elementos simétricos. Além disso, veremos que o produto de Jordan de um elemento simétrico $Y_{i:m}^{(+)}$ com um antissimétrico em específico resulta no antissimétrico $Y_{i:m}^{(-)}$.

Lema 2.2.4. *Tem-se*

$$Y_{i:1}^{(+)} \circ Y_{i+1:1}^{(+)} \circ \cdots \circ Y_{i+m-1:1}^{(+)} = \lambda Y_{i:m}^{(+)}$$

onde $\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$. *Além disso,*

$$Y_{i:m}^{(+)} \circ Y_{i:0}^{(-)} = \left(\frac{1}{2}\right) Y_{i:m}^{(-)}.$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre m. Não é difícil ver o caso $m = 1$. Então, assuma a hipótese de indução que:

$$Y_{i:1}^{(+)} \circ Y_{i+1:1}^{(+)} \circ \cdots \circ Y_{i+m-1:1}^{(+)} = \lambda Y_{i:m}^{(+)} = \lambda(E_{i,i+m} + E_{n-i-m+1,n-i+1})$$

onde $\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$. Multiplicando pelo termo seguinte $Y_{i+m:1}^{(+)} = E_{i+m,i+m+1} + E_{n-i-m,n-i-m+1}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lambda Y_{i:m}^{(+)} \circ Y_{i+m:1}^{(+)} &= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (E_{i,i+m}E_{i+m,i+m+1} + E_{n-i-m,n-i-m+1}E_{n-i-m+1,n-i+1}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (E_{i,i+m+1} + E_{n-i-m,n-i+1}) \\
&= \tilde{\lambda} Y_{i:m+1}^{(+)},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\lambda} = \frac{1}{2}\lambda$.

Ademais, dado $Y_{i:0}^{(-)} = E_{ii} - E_{n-i+1,n-i+1}$ temos

$$\begin{aligned} Y_{i:m}^{(+)} \circ Y_{i:0}^{(-)} &= \frac{1}{2} \cdot (-E_{n-i-m+1,n-i+1} E_{n-i+1,n-i+1} + E_{ii} E_{i,i+m}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (E_{i,i+m} - E_{n-i-m+1,n-i+1}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) Y_{i:m}^{(-)}, \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. □

O lema acima descreve o comportamento dos produtos de elementos simétricos e antissimétricos sob o produto de Jordan, revelando padrões estruturais que justificam a denominação da graduação por *mirror type*, ou seja, essa propriedade obtida assegura que os produtos preservam a simetria.

O próximo resultado nos fornece uma caracterização das graduações MT, impondo restrições sobre os graus dos elementos simétricos e antissimétricos, determinando a graduação como um todo.

Lema 2.2.5. *Seja UJ_n equipada com uma G-graduação.*

(a) Se a G-graduação é MT, temos:

(i) $\deg(Y_{i:0}^{(+)}) = 1$ para todo i, e $\deg(Y_{1:0}^{(-)}) = \deg(Y_{2:0}^{(-)}) = \cdots = \deg(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor:0}^{(-)}) = t$ é um elemento de ordem 2;

(ii) se $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, então a sequência

$$\eta = \left(\deg(Y_{1:1}^{(+)}), \deg(Y_{2:1}^{(+)}), \ldots, \deg(Y_{q:1}^{(+)})\right)$$

e o elemento

$$t = \deg(Y_{1:0}^{(-)})$$

definem completamente a graduação;

(iii) o suporte da graduação é comutativo.

(b) Reciprocamente, se $Y_{i:m}^{(+)}$ e $Y_{i:m}^{(-)}$ são homogêneos com graus distintos para todo i e todo $m = 0, 1$, então a G-graduação é necessariamente MT.

Demonstração. Mostraremos o item (*i*). Por definição, temos $Y_{i:0}^{(+)} = E_{i,i} + E_{n-i+1,n-i+1}$. Como $Y_{i:0}^{(+)} \circ Y_{i:0}^{(+)} = Y_{i:0}^{(+)}$, aplicando a graduação obtemos:

$$\deg\left(Y_{i:0}^{(+)} \circ Y_{i:0}^{(+)}\right) = \deg\left(Y_{i:0}^{(+)}\right) \deg\left(Y_{i:0}^{(+)}\right) = \left(\deg\left(Y_{i:0}^{(+)}\right)\right)^2.$$

Por outro lado, devemos ter:

$$\deg\left(Y_{i:0}^{(+)} \circ Y_{i:0}^{(+)}\right) = \deg\left(Y_{i:0}^{(+)}\right).$$

Assim,

$$\left(\deg\left(Y_{i:0}^{(+)}\right)\right)^2 = \deg\left(Y_{i:0}^{(+)}\right)$$

e, consequentemente,

$$\deg\left(Y_{i:0}^{(+)}\right) = 1.$$

Para $Y_{i:0}^{(-)} = E_{i,i} - E_{n-i+1,n-i+1}$, temos:

$$Y_{i:0}^{(-)} \circ Y_{i:0}^{(-)} = E_{i,i} + E_{n-i+1,n-i+1} = Y_{i:0}^{(+)}.$$

Aplicando a graduação,

$$\deg\left(Y_{i:0}^{(-)} \circ Y_{i:0}^{(-)}\right) = \deg\left(Y_{i:0}^{(-)}\right)\deg\left(Y_{i:0}^{(-)}\right) = \left(\deg\left(Y_{i:0}^{(-)}\right)\right)^2.$$

Mas, segue-se que:

$$\deg\left(Y_{i:0}^{(-)} \circ Y_{i:0}^{(-)}\right) = \deg\left(Y_{i:0}^{(+)}\right) = 1.$$

Então,

$$\left(\deg\left(Y_{i:0}^{(-)}\right)\right)^2 = 1$$

e assim, $\deg\left(Y_{i:0}^{(-)}\right)$ tem ordem 2.

Provaremos (ii). Segue-se diretamente do Lema 2.2.4 que a sequência

$$\eta = \left(\deg(Y_{1:1}^{(+)}), \deg(Y_{2:1}^{(+)}), \ldots, \deg(Y_{q:1}^{(+)})\right)$$

e o elemento $t = \deg(Y_{1:0}^{(-)})$ definem completamente a graduação pois, como

$$Y_{i:1}^{(+)} \circ Y_{i+1:1}^{(+)} \circ \cdots \circ Y_{i+m-1:1}^{(+)} = \lambda Y_{i:m}^{(+)} \quad \text{e} \quad Y_{i:m}^{(+)} \circ Y_{i:0}^{(-)} = \left(\frac{1}{2}\right) Y_{i:m}^{(-)},$$

temos

$$\deg(Y_{i:m}^{(+)}) = \deg(Y_{i:1}^{(+)})\deg(Y_{i+1:1}^{(+)})\cdots\deg(Y_{i+m-1:1}^{(+)}) \quad \text{e} \quad \deg(Y_{i:m}^{(-)}) = \deg(Y_{i:m}^{(+)})\deg(Y_{i:0}^{(-)}).$$

Por fim, mostraremos (iii). Definamos $g_i = \deg\left(Y_{i:1}^{(+)}\right)$. Pelo item (ii), basta mostrarmos que

$$g_i g_j = g_j g_i, \text{ com } i < j, \quad \text{e} \quad g_j t = t g_j, \text{ onde } t = \deg\left(Y_{j:0}^{(-)}\right).$$

Então, devemos ter:

$$\begin{aligned} Y_{j:1}^{(+)} \circ \left(Y_{i:1}^{(+)} \circ Y_{i+1:1}^{(+)} \circ \cdots \circ Y_{j-1:1}^{(+)}\right) &= Y_{j:1}^{(+)} \circ \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i-1} Y_{i:j-i}^{(+)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i-1} \left(Y_{j:1}^{(+)} \circ Y_{i:j-i}^{(+)}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} \cdot (E_{i,j+1} + E_{n-j,n-i+1}). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
Y_{i:1}^{(+)} \circ \left(Y_{j:1}^{(+)} \circ \left(Y_{i+1:1}^{(+)} \circ Y_{i+2:1}^{(+)} \circ \cdots \circ Y_{j-2:1}^{(+)} \circ Y_{j-1:1}^{(+)}\right)\right) &= Y_{i:1}^{(+)} \circ \left(Y_{j:1}^{(+)} \circ \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i-2} Y_{i+1:j-i-1}^{(+)}\right) \\
&= Y_{i:1}^{(+)} \circ \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i-1} \left(Y_{j:1}^{(+)} \circ Y_{i+1:j-i-1}^{(+)}\right) \\
&= Y_{i:1}^{(+)} \circ \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i-1} Y_{i+1:j-i}^{(+)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} (E_{i,j+1} + E_{n-j,n-i+1}).
\end{aligned}$$

Desta maneira, obtemos:

$$Y_{i:1}^{(+)} \circ \left(Y_{j:1}^{(+)} \circ \left(Y_{i+1:1}^{(+)} \circ Y_{i+2:1}^{(+)} \circ \cdots \circ Y_{j-2:1}^{(+)} \circ Y_{j-1:1}^{(+)}\right)\right) = Y_{j:1}^{(+)} \circ \left(Y_{i:1}^{(+)} \circ Y_{i+1:1}^{(+)} \circ \cdots \circ Y_{j-1:1}^{(+)}\right).$$

Sabemos que $E_{i,j+1} + E_{n-j,n-i+1} \neq 0$. Assim,

$$g_i g_j g_{i+1} \cdots g_{j-1} = g_j g_i g_{i+1} \cdots g_{j-1}$$

e, consequentemente, $g_i g_j = g_j g_i$, com $i < j$, para todos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Agora, como $Y_{j:0}^{(-)} \circ Y_{j:1}^{(+)} = \left(\frac{1}{2}\right) Y_{j:1}^{(-)} = Y_{j:1}^{(+)} \circ Y_{j:0}^{(-)}$, devemos ter

$$\begin{aligned}
t g_j &= \deg\left(Y_{j:0}^{(-)}\right) \deg\left(Y_{j:1}^{(+)}\right) \\
&= \deg\left(Y_{j:0}^{(-)} \circ Y_{j:1}^{(+)}\right) \\
&= \deg\left(Y_{j:1}^{(-)}\right) \\
&= \deg\left(Y_{j:1}^{(+)} \circ Y_{j:0}^{(-)}\right) \\
&= \deg\left(Y_{j:1}^{(+)}\right) \deg\left(Y_{j:0}^{(-)}\right) \\
&= g_j t
\end{aligned}$$

Logo, o suporte da graduação é comutativo.

A demonstração do item (b) segue as mesmas ideias do item (a) utilizando o Lema 2.2.4. □

Esse lema estabelece as propriedades essenciais da graduação MT, em particular a comutatividade do suporte e a dependência da sequência η e do elemento t de ordem 2, que codificam toda informação necessária da graduação.

Para um melhor entendimento de tais resultados, vejamos o seguinte exemplo de G-graduação MT em UJ_n:

Exemplo 2.2.6. Tomemos $n = 5$. Consideremos o grupo aditivo $G = \mathbb{Z}_4$ e escolhamos $\eta = (\overline{1}, \overline{3})$ e $t = \overline{2}$.

(a) Pelo Lema 2.2.5, (ii), a matriz

$$Y_{1:0}^{(-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

possui grau $\overline{2}$ e as matrizes

$$Y_{1:1}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y_{2:1}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possuem graus $\overline{1}$ e $\overline{3}$, respectivamente. Conforme o lema mencionado, os graus de tais matrizes determinam a $\mathbb{Z}_4$-graduação MT de UJ_5.

(b) Pelo Lema 2.2.5, (i), as matrizes

$$Y_{1:0}^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_{2:0}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad Y_{3:0}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

têm grau $\overline{0}$ e a matriz

$$Y_{2:0}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possui grau $\overline{2}$.

(c) Além disso, temos as seguintes matrizes:

$$Y_{1:2}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{1:3}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{1:4}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_{2:2}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{1:1}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{1:2}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_{1:3}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y_{2:1}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue-se dos Lemas 2.2.4 e 2.2.5 que

$$\deg(Y_{1:2}^{(+)}) = \overline{0}, \quad \deg(Y_{1:3}^{(+)}) = \overline{3}, \quad \deg(Y_{1:4}^{(+)}) = \overline{0}, \quad \deg(Y_{2:2}^{(+)}) = \overline{2},$$

$$\deg(Y_{1:1}^{(-)}) = \overline{3}, \quad \deg(Y_{1:2}^{(-)}) = \overline{2}, \quad \deg(Y_{1:3}^{(-)}) = \overline{1} \quad \text{e} \quad \deg(Y_{2:1}^{(-)}) = \overline{1},$$

pois

$$Y_{1:2}^{(+)} = 2 \cdot (Y_{1:1}^{(+)} \circ Y_{2:1}^{(+)}), \qquad Y_{1:3}^{(+)} = 4 \cdot (Y_{1:1}^{(+)} \circ Y_{2:1}^{(+)} \circ Y_{3:1}^{(+)}) = 4 \cdot (Y_{1:1}^{(+)} \circ Y_{2:1}^{(+)} \circ Y_{2:1}^{(+)}),$$

$$Y_{1:4}^{(+)} = 8 \cdot (Y_{1:1}^{(+)} \circ Y_{2:1}^{(+)} \circ Y_{3:1}^{(+)} \circ Y_{4:1}^{(+)}) = 8 \cdot (Y_{1:1}^{(+)} \circ Y_{2:1}^{(+)} \circ Y_{2:1}^{(+)} \circ Y_{1:1}^{(+)}), \qquad Y_{2:2}^{(+)} = 2 \cdot (Y_{2:1}^{(+)} \circ Y_{2:1}^{(+)}),$$

$$Y_{1:1}^{(-)} = 2 \cdot (Y_{1:0}^{(-)} \circ Y_{1:1}^{(+)}), \quad Y_{1:2}^{(-)} = 2 \cdot (Y_{1:0}^{(-)} \circ Y_{1:2}^{(+)}), \quad Y_{1:3}^{(-)} = 2 \cdot (Y_{1:0}^{(-)} \circ Y_{1:3}^{(+)}) \quad \text{e} \quad Y_{2:1}^{(-)} = 2 \cdot (Y_{2:0}^{(-)} \circ Y_{2:1}^{(+)}),$$

respectivamente. Assim, a decomposição de $UJ_5 = \bigoplus_{g \in \mathbb{Z}_4} (UJ_5)_g$ é dada por:

$$\Big[UJ_5\Big]_{\overline{0}} = \operatorname{span}\left\{Y_{1:0}^{(+)}, Y_{2:0}^{(+)}, Y_{3:0}^{(+)}, Y_{1:2}^{(+)}, Y_{1:4}^{(+)}\right\},$$

$$\Big[UJ_5\Big]_{\overline{1}} = \operatorname{span}\left\{Y_{1:1}^{(+)}, Y_{1:3}^{(-)}, Y_{2:1}^{(-)}\right\},$$

$$\Big[UJ_5\Big]_{\overline{2}} = \operatorname{span}\left\{Y_{1:0}^{(-)}, Y_{2:0}^{(-)}, Y_{2:2}^{(+)}, Y_{1:2}^{(-)}\right\},$$

$$\Big[UJ_5\Big]_{\overline{3}} = \operatorname{span}\left\{Y_{1:1}^{(-)}, Y_{1:3}^{(+)}, Y_{2:1}^{(+)}\right\}.$$

Portanto, pela Definição 2.2.3 e pelo Lema 2.2.5, obtemos a graduação MT para UJ_5.

Assim como no caso das graduações elementares, onde a sequência η fornece uma forma compacta de codificar os graus atribuídos às matrizes canônicas $E_{i,i+1}$, no estudo das graduações MT também precisamos de uma notação que organize os dados fundamentais e defina essa graduação.

A estrutura dessas graduações, porém, não é determinada pelos graus das matrizes $E_{i,i+1}$ mas sim pelos graus dos elementos simétricos e antissimétricos $Y_{i:m}^{(\pm)}$, que refletem uma simetria em torno da diagonal secundária. Para tornar essa dependência explícita como vimos no Lema 2.2.5 e permitir a reconstrução sistemática dos graus de todos os demais elementos, introduzimos na definição a seguir uma notação que registra precisamente os graus necessários para definir e descrever qualquer graduação MT.

Essa codificação será crucial para caracterizar, comparar e posteriormente classificar as graduações deste tipo. Daqui em diante, vamos assumir que G é abeliano.

Definição 2.2.7. Denotemos por (UJ_n, t, η) a graduação MT determinada por $t \in G$ e pela sequência $\eta \in G^q$ do Lema 2.2.5.

Vimos, no início da seção, que podemos obter uma graduação MT de UJ_n através da involução natural de $UT_n(\mathbb{K})$, $E_{i:m} \mapsto E_{-i:m}$. No entanto, nem toda graduação *mirror type* é obtida por uma involução e veremos isso no exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.8. Seja $G = \mathbb{Z}_4$ e consideremos a graduação MT de UJ_4 determinada por

$$\deg\left(Y_{i:1}^{(+)}\right) = \overline{1} \quad \text{e} \quad \deg\left(Y_{i:0}^{(-)}\right) = \overline{2}$$

para todo i. Suponhamos, por absurdo, que G seja decomponível, isto é, que exista um grupo H tal que

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times H.$$

Como $|G| = 4$, segue-se que necessariamente $|H| = 2$, e portanto $H \cong \mathbb{Z}_2$. Assim,

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

o que é uma contradição, pois $\mathbb{Z}_4$ não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Logo, G é indecomponível e não pode ser escrito como produto direto da forma $\mathbb{Z}_2 \times H$. Consequentemente, a graduação MT definida por $\mathbb{Z}_4$ não pode ser obtida a partir de uma involução, conforme descrito anteriormente.

Pelo resultado provado em [1], a seguinte proposição nos fornece uma maneira de obter automorfismos de UJ_n para o contexto em que estamos trabalhando.

Proposição 2.2.9. *Todo automorfismo de UJ_n é um automorfismo de UT_n ou a composição de um automorfismo de UT_n com a involução $\iota\colon UT_n \to UT_n$, $E_{i:m} \mapsto E_{-i:m}$.*

A partir de agora, vamos obter critérios práticos e precisos para identificar quando duas graduações MT de UJ_n não podem ser isomorfas, que nos auxiliarão a classificar essas graduações no teorema principal desta seção.

Lema 2.2.10. *Sejam $\eta, \tilde{\eta} \in G^q$, onde $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, e $t_1, t_2 \in G$ elementos de ordem 2. Se $t_1 \neq t_2$, então*

$$(UJ_n, t_1, \eta) \ncong (UJ_n, t_2, \tilde{\eta}).$$

Demonstração. Consideremos o ideal

$$J = \operatorname{span}\{E_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}$$

de UJ_n, isto é, o ideal das matrizes estritamente triangulares superiores. Notemos que J é um ideal graduado de UJ_n pois, pode ser escrito como

$$J = \operatorname{span}\{Y_{i:m}^{(\pm)} : i \neq 0\}.$$

Consequentemente, o quociente ${}^{UJ_n}\!/_{J}$ herda uma G-graduação induzida e é gerado pelas classes das matrizes diagonais.

Suponhamos, por absurdo, que exista um isomorfismo graduado $\varphi\colon (UJ_n, t_1, \eta) \to (UJ_n, t_2, \tilde{\eta})$.

Afirmação 2.2.11. *J é nilpotente.*

Observemos que, para as matrizes canônicas estritamente superiores $E_{i,j}$ e $E_{k,l}$, tem-se

$$E_{i,j} \circ E_{k,l} = \frac{1}{2} \cdot (E_{i,j}E_{k,l} + E_{k,l}E_{i,j}) = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{jk}E_{i,l} + \delta_{li}E_{k,j}) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \text{ e } l \neq i \\ \\ \frac{1}{2}E_{i,l}, & \text{se } i < j = k < l \\ \\ \frac{1}{2}E_{k,j}, & \text{se } k < l = i < j \end{cases}$$

Desta maneira, o menor inteiro m tal que $J^m = 0$ é quando $m = n$.

Afirmação 2.2.12. *J é o maior ideal nilpotente de UJ_n.*

Seja I um ideal nilpotente de UJ_n tal que $I \supsetneq J$. Então, existe uma matriz $A \in I$, com $A = (a_{ij})$ tal que $a_{kk} \neq 0$ para algum k. Como a (k,k)-entrada de A^m é $a_{kk}^m \neq 0$ para todo m, obtemos $A^m \neq 0$, o que é um absurdo pois, se I é nilpotente, então $I^m = 0$ para algum m. Logo, $I \subseteq J$. Desta maneira, J contém todo ideal nilpotente e então, J é o maior ideal nilpotente de UJ_n.

Afirmação 2.2.13. *$\varphi(J) = J$*

Como φ é isomorfismo e J é um ideal nilpotente de UJ_n, temos $\varphi(J)$ é um ideal nilpotente de UJ_n. Pela maximalidade de J, temos $\varphi(J) \subseteq J$. No entanto, como φ^{-1} é um isomorfismo, obtemos $\varphi^{-1}(J) \subseteq J$, isto é, $J \subseteq \varphi(J)$. Logo, $\varphi(J) = J$.

Como φ é um isomorfismo graduado, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & UJ_n & \longrightarrow & {}^{UJ_n}\!/_{J} \\ & u & \longmapsto & \varphi(u) + J \end{array}$$

é um homomorfismo graduado. Além disso, $\ker(\pi) = J$ e então, pelo Teorema do Isomorfismo, obtemos o seguinte isomorfismo graduado induzido

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & {}^{UJ_n}\!/_{J} & \longrightarrow & {}^{UJ_n}\!/_{J} \\ & u + J & \longmapsto & \pi(u) \end{array}$$

Afirmação 2.2.14. ${}^{UJ_n}\!/_{J} = \left[{}^{UJ_n}\!/_{J}\right]_1 \oplus \left[{}^{UJ_n}\!/_{J}\right]_t$

Pela Proposição 1.5.7, devemos ter

$$ {}^{UJ_n}\!/_{J} = \bigoplus_{g \in G} \left[{}^{UJ_n}\!/_{J}\right]_g $$

onde $\left[{}^{UJ_n}\!/_{J}\right]_g = {}^{[(UJ_n)_g + J]}\!/_{J}$. Se $g \notin \{1, t\}$, então

$$\left[{}^{UJ_n}\!/_{J}\right]_g = \{0\}$$

pois $(UJ_n)_g \subseteq J$ e isto decorre do Lema 2.2.5. Como $Y^{(+)}_{1:0} + J \in \left[{}^{UJ_n}\!/\!_J\right]_1$ e este elemento é não nulo, temos

$$\left[{}^{UJ_n}\!/\!_J\right]_1 \neq \{0\}.$$

De maneira análoga, obtemos

$$\left[{}^{UJ_n}\!/\!_J\right]_t \neq \{0\}.$$

Logo, ${}^{UJ_n}\!/\!_J$ é gerado como espaço vetorial por elementos de grau 1 e de grau t, obtendo-se a decomposição

$${}^{UJ_n}\!/\!_J = \left[{}^{UJ_n}\!/\!_J\right]_1 \oplus \left[{}^{UJ_n}\!/\!_J\right]_t.$$

Agora, para uma melhor compreensão, denotemos por $\widetilde{UJ_n}$ a álgebra G-graduada $(UJ_n, t_2, \tilde{\eta})$. Se $t_1 \neq t_2$, então

$$\psi\left(\left[{}^{UJ_n}\!/\!_J\right]_{t_1}\right) = \left[{}^{\widetilde{UJ_n}}\!/\!_J\right]_{t_1} = \{0\}.$$

Como ψ é injetiva e $\left[{}^{UJ_n}\!/\!_J\right]_{t_1} \neq \{0\}$, obtemos um absurdo. Desta maneira, devemos ter

$$(UJ_n, t_1, \eta) \ncong (UJ_n, t_2, \tilde{\eta}),$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

Lema 2.2.15. *Seja $t \in G$ um elemento de ordem 2. Consideremos*

$$\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_q), \tilde{\eta} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_q) \in G^q$$

onde $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Se uma das seguintes condições são satisfeitas:

(a) existe um i, $1 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, tal que $g_i \not\equiv \tilde{g}_i \pmod{\langle t \rangle}$, ou

(b) n é par e $g_q \neq \tilde{g}_q$,

então

$$(UJ_n, t, \eta) \ncong (UJ_n, t, \tilde{\eta}).$$

Demonstração. Suponhamos que a condição (a) é satisfeita. Denotemos por G_0 o grupo quociente ${}^{G}\!/\!_{\langle t \rangle}$ e $\overline{g} = g\langle t \rangle$ como sendo a classe lateral de $g \in G$. Consideremos a projeção canônica $\varphi\colon G \to G_0$. Para qualquer G-graduação

$$UJ_n = \bigoplus_{g \in G} (UJ_n)_g,$$

definimos a G_0-graduação induzida por

$$(UJ_n)_{\overline{g}} = \bigoplus_{\substack{h \in G \\ \overline{g} = \overline{h}}} (UJ_n)_h, \quad \forall \overline{g} \in G_0.$$

Além disso, vamos denotar por $\deg_G\left(Y_{i:m}^{(\pm)}\right)$ o grau de $Y_{i:m}^{(\pm)}$ com respeito a G-graduação de UJ_n e por $\deg_{G_0}\left(Y_{i:m}^{(\pm)}\right)$ o grau de $Y_{i:m}^{(\pm)}$ com relação a nova graduação de UJ_n, pelo grupo G_0. Por definição da graduação MT em (UJ_n,t,η), cada elemento $Y_{i:m}^{(\pm)}$ é homogêneo com

$$\deg_G\left(Y_{i:m}^{(+)}\right) = g \quad \text{e} \quad \deg_G\left(Y_{i:m}^{(-)}\right) = gt,$$

para algum $g \in G$, e isto decorre mais precisamente do Lema 2.2.4. Aplicando φ, obtemos

$$\deg_{G_0}\left(Y_{i:m}^{(+)}\right) = \overline{g} \quad \text{e} \quad \deg_{G_0}\left(Y_{i:m}^{(-)}\right) = \overline{g}$$

pois $\varphi(t) = \overline{1}$. Logo, temos

$$\deg_{G_0}\left(Y_{i:m}^{(+)}\right) = \deg_{G_0}\left(Y_{i:m}^{(-)}\right).$$

Como $E_{i:m}$ é combinação linear de $Y_{i:m}^{(+)}$ e $Y_{i:m}^{(-)}$ e, visto acima, essas duas componentes homogêneas têm um mesmo grau em G_0, obtemos que $E_{i:m}$ é homogêneo na G_0-graduação de UJ_n. Este fato vale para todo i e m, e desta maneira, todas as matrizes canônicas $E_{i,j}$ são homogêneas nesta graduação induzida, o que implica numa graduação elementar determinada por uma sequência palindrômica η_0 obtida através de η. Ou seja,

$$\eta_0 = \begin{cases} \left(\overline{g_1},\overline{g_2},\ldots,\overline{g_{q-1}},\overline{g_q},\overline{g_q},\overline{g_{q-1}},\ldots,\overline{g_2},\overline{g_1}\right), & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \left(\overline{g_1},\overline{g_2},\ldots,\overline{g_{q-1}},\overline{g_q},\overline{g_{q-1}},\ldots,\overline{g_2},\overline{g_1}\right), & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Fazemos também o mesmo para $\tilde{\eta}$ e $\tilde{\eta}_0$. Agora, suponhamos que existe $\psi\colon (UJ_n,t,\eta) \to (UJ_n,t,\tilde{\eta})$ um isomorfismo G-graduado. Então, para todo $x \in UJ_n$, onde $x = \tilde{x} + \tilde{\tilde{x}}$ com $\tilde{x} \in (UJ_n)_g$ e $\tilde{\tilde{x}} \in (UJ_n)_{gt}$, tem-se $\deg_G(\psi(\tilde{x})) = g$ e $\deg_G(\psi(\tilde{\tilde{x}})) = gt$. Aplicando φ, obtemos

$$\deg_{G_0}(\psi(x)) = \overline{\deg_G(x)},$$

o que implica que ψ também é um isomorfismo G_0-graduado. Portanto, (UJ_n,η_0) e $(UJ_n,\tilde{\eta}_0)$ são álgebras G_0-graduadas isomorfas, onde as graduações envolvidas são elementares.

Como η_0 e $\tilde{\eta}_0$ são palindrômicas, ou seja,

$$\tilde{\eta}_0 = \operatorname{rev}(\tilde{\eta}_0) \quad \text{e} \quad \eta_0 = \operatorname{rev}(\eta_0),$$

pelo Corolário 2.1.20, teríamos necessariamente que $\eta_0 = \tilde{\eta}_0$. Contudo, por hipótese, existe i tal que

$$g_i \not\equiv \tilde{g}_i \pmod{\langle t\rangle},$$

o que implica

$$\eta_0 \neq \tilde{\eta}_0.$$

Logo, obtemos uma contradição, e portanto

$$(UJ_n,t,\eta) \not\cong (UJ_n,t,\tilde{\eta}).$$

Agora, suponhamos que n é par e $g_q \neq \tilde{g}_q$. Consideremos o seguinte conjunto de UJ_n:

$$T = \operatorname{span}\left\{ Y_{i:m}^{(\pm)} \mid (i,m) \notin \{(q,0),(q,1)\} \right\}.$$

Suponhamos que exista um isomorfismo $\psi\colon (UJ_n, t, \eta) \to (UJ_n, t, \tilde{\eta})$. Observemos que cada $Y_{i:m}^{(\pm)}$ é homogêneo e então, T é um subespaço graduado de UJ_n. Na verdade, pode ser mostrado por meio de cálculos simples que T é um ideal graduado de UJ_n. Pela Proposição 2.2.9, T é invariante por todos automorfismos de UJ_n e, portanto, $\psi(T) = T$. Desta maneira, ψ induz um isomorfismo graduado

$$\overline{\psi}\colon {}^{UJ_n}\!/_{T} \to {}^{UJ_n}\!/_{T}.$$

Definamos agora a aplicação linear

$$\Gamma\colon UJ_n \longrightarrow UJ_2$$

da seguinte forma: para $x \in UJ_n$ onde

$$x = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{q,q} & a_{q,q+1} & * & \cdots & * \\ & & & a_{q+1,q+1} & * & \cdots & * \\ & & & & * & \cdots & * \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & * \end{pmatrix},$$

em que os símbolos $*$ representam entradas que não serão relevantes, tem-se

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} a_{q,q} & a_{q,q+1} \\ & a_{q+1,q+1} \end{pmatrix}.$$

Não é tão difícil ver que Γ satisfaz

$$\Gamma(x \circ y) = \Gamma(x) \circ \Gamma(y)$$

para todos $x, y \in UJ_n$. Logo, Γ é um homomorfismo de álgebras de Jordan. Por construção, obtemos que Γ é um homomorfismo graduado e $\ker(\Gamma) = T$. Assim, pelo Teorema do Isomorfismo, a aplicação Γ induz um isomorfismo de álgebras graduadas

$$\tilde{\Gamma}\colon {}^{UJ_n}\!/_{T} \to UJ_2.$$

Assim, segue-se que $(UJ_2, t, g_q) \cong (UJ_2, t, \tilde{g}_q)$ como álgebras G-graduadas. Entretanto, tal isomorfismo ocorre se, e somente se, $g_q = \tilde{g}_q$. Como por hipótese $g_q \neq \tilde{g}_q$, obtemos uma contradição. Portanto, temos $(UJ_n, t, \eta) \ncong (UJ_n, t, \tilde{\eta})$. $\square$

Lema 2.2.16. *Seja $t \in G$ um elemento de ordem 2 e consideremos*

$$\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_q), \tilde{\eta} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_q) \in G^q$$

onde $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Suponhamos que:

(i) $g_i \equiv \tilde{g}_i \pmod{\langle t \rangle}$, *para* $i = 1, 2, \ldots, p$ *onde* $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$,

(ii) se n é par, então $g_q = \tilde{g}_q$.

Então

$$(UJ_n, t, \eta) \cong (UJ_n, t, \tilde{\eta}).$$

Demonstração. Definamos

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{se } g_i = \tilde{g}_i, \\ -1, & \text{se } g_i = t\tilde{g}_i, \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \ldots, p$. Consideremos a matriz diagonal

$$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, \varepsilon_{p-1}\varepsilon_{p-2}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1, \varepsilon_{p-2}\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_2\varepsilon_1, \varepsilon_1, 1),$$

onde $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$.

Definamos ainda a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & UJ_n & \longrightarrow & UJ_n \\ & C & \longmapsto & DCD^{-1}. \end{array}$$

Não é difícil ver que φ é um isomorfismo de álgebras de Jordan. Como D é diagonal, para qualquer $C \in UJ_n$ onde $C = (c_{ij})$ vale

$$\varphi(C) = \left(\frac{d_i}{d_j}c_{ij}\right) = DCD^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi\big(Y_{i:1}^{(\pm)}\big) &= \varphi\big(E_{i,i+1} \pm E_{n-i,n-i+1}\big) \\ &= \varphi\big(E_{i,i+1}\big) \pm \varphi\big(E_{n-i,n-i+1}\big) \\ &= \frac{d_i}{d_{i+1}}E_{i,i+1} \pm \frac{d_{n-i}}{d_{n-i+1}}E_{n-i,n-i+1}. \end{aligned}$$

Pela definição de D, temos

$$\frac{d_i}{d_{i+1}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{d_{n-i}}{d_{n-i+1}} = \varepsilon_i.$$

Logo,

$$\varphi\big(Y_{i:1}^{(\pm)}\big) = E_{i,i+1} \pm \varepsilon_i E_{n-i,n-i+1}.$$

Se $\varepsilon_i = 1$, então

$$\deg\left(\varphi\left(Y_{i:1}^{(\pm)}\right)\right) = \deg\left(Y_{i:1}^{(\pm)}\right).$$

Mas, sendo $\varepsilon_i = -1$ temos
$$\deg\left(\varphi\left(Y_{i:1}^{(\pm)}\right)\right) = \deg\left(Y_{i:1}^{(\mp)}\right).$$

No caso central,
$$Y_{1:0}^{(-)} = E_{1,1} - E_{n,n},$$
temos
$$\varphi\left(Y_{1:0}^{(-)}\right) = E_{1,1} - E_{n,n}.$$
Logo,
$$\deg\left(\varphi\left(Y_{1:0}^{(-)}\right)\right) = \deg\left(Y_{1:0}^{(-)}\right).$$

Consequentemente, φ é um isomorfismo graduado e $(UJ_n,t,\eta) \cong (UJ_n,t,\tilde{\eta})$. □

Todos os critérios e resultados obtidos até aqui culminam o teorema a seguir, sendo o resultado central desta seção, que fornece a classificação das graduações MT de UJ_n e estabelece exatamente como os padrões de simetria determinam essas graduações, a menos de isomorfismo graduado.

Teorema 2.2.17. *Dado um grupo G, existe uma correspondência biunívoca entre as G-graduações MT não isomorfas de UJ_n e o conjunto M, onde*

(1) se n é ímpar, então $M = \left\{(t,\eta) \mid t \in G, o(t) = 2, \eta \in \left(G/_{\langle t\rangle}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}.$

(2) se n é par, então $M = \left\{(t,\eta) \mid t \in G, o(t) = 2, \eta \in \left(G/_{\langle t\rangle}\right)^{\frac{n-2}{2}} \times G\right\}.$

Ademais, toda graduação MT possui o suporte comutativo.

Demonstração. Seja Mir o conjunto $\{(UJ_n,t,\eta) : t \in G, o(t) = 2, \eta \in G^q\}$, onde $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Definamos a relação de equivalência $\sim$ em Mir da seguinte maneira: para $(UJ_n,t,\eta),(UJ_n,\tilde{t},\tilde{\eta}) \in Mir$, segue-se que $(UJ_n,t,\eta) \sim (UJ_n,\tilde{t},\tilde{\eta})$ se, e somente se, $(UJ_n,t,\eta) \cong (UJ_n,\tilde{t},\tilde{\eta})$.

Consideremos a seguinte aplicação
$$\Psi\colon {Mir}/_{\sim} \to M$$
dada por:

(1) se n é ímpar, então $\Psi([(UJ_n,t,(g_1,\ldots,g_q))]) = (t,(\overline{g_1},\ldots,\overline{g_q}))$;

(2) se n é par, então $\Psi([(UJ_n,t,(g_1,\ldots,g_{q-1},g_q))]) = (t,(\overline{g_1},\ldots,\overline{g_{q-1}}),g_q)$;

onde $[(UJ_n,t,\eta)]$ é a classe de equivalência de (UJ_n,t,η), $\eta = (g_1,\ldots,g_q)$ e $\overline{g_i} = g_i\langle t\rangle$.

Pelos Lemas 2.2.10 e 2.2.15, segue-se que Ψ está bem definida. Pelo Lema 2.2.16 a função Ψ é injetiva, e por definição é sobrejetiva. Logo, Ψ é bijetiva.

Por fim, pelo Lema 2.2.5, (*iii*), o suporte de qualquer graduação MT é comutativo. □

O teorema acima sintetiza o comportamento singular das graduações MT ao evidenciar como a simetria em torno da diagonal secundária influencia a estrutura graduada. Diferentemente das graduações elementares, determinadas por uma única sequência linear de graus, as graduações MT incorporam padrões espelhados e tornam a classificação mais sutil.

Posto isto, encerramos a compreensão das duas classes importantes de graduações de UJ_n tratadas neste capítulo, preparando para investigarmos, no capítulo seguinte, que, a menos de isomorfismo graduado, toda graduação de UJ_n é elementar ou MT e, além disso, como essas estruturas interagem com as identidades graduadas de UJ_n.

CAPÍTULO 3

Graduações de UJ_n e identidades graduadas

Este capítulo tem como objetivo principal classificar todas as graduações da álgebra de Jordan UJ_n e, a partir dessa classificação, apresentar a relação das suas identidades graduadas. Começamos revisitando o caso particular $n = 2$ da classificação das graduações, nas quais já aparecem os dois tipos fundamentais de graduações (elementares e MT), que servirão como ideia intuitiva para a generalização. Em seguida, desenvolvemos as ferramentas necessárias para tratar o caso geral, estabelecendo uma decomposição estrutural de UJ_n que permite reduzir o estudo do problema a blocos menores e estruturalmente simples. A partir dessa abordagem, caracterizamos as graduações elementares e MT, culminando na classificação geral de todas G-graduações de UJ_n. Encerramos o capítulo examinando como essas duas classes de graduações de UJ_n se diferenciam no contexto de identidades graduadas.

3.1 Graduação de UJ_2

Embora a referência [15] sirva como base para esta dissertação, o caso $n = 2$ requer algumas sutilezas e ajustes, pois esse caso não é desenvolvido plenamente na referência. Assim, utilizamos também ideias de [11] para complementar a classificação das graduações de UJ_n. Desta maneira, nesta seção, apresentamos a classificação de todas as graduações de UJ_2, a menos de isomorfismo graduado.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo com $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Relembremos alguns fatos a seguir. Consideremos a álgebra $UT_2 = UT_2(\mathbb{K})$ associativa das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre $\mathbb{K}$, com o produto usual de matrizes. Denotemos por $UJ_2 = UJ_2(\mathbb{K})$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial UT_2 com o produto de Jordan $\circ$ dado por

$$u \circ v = \frac{1}{2} \cdot (uv + vu)$$

onde $u, v \in UJ_2$. Segue-se do Lema 1.1.18 que UJ_2 tem estrutura de álgebra de Jordan.

Além disso, consideremos as matrizes canônicas

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em UJ_2. Denotemos

$$1 = E_{1,1} + E_{2,2}, \quad a = E_{1,1} - E_{2,2} \quad \text{e} \quad b = E_{1,2},$$

ou seja,

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A seguir, introduzimos um resultado técnico que simplificará significativamente as análises dos casos futuros. Essa ferramenta será essencial na classificação das graduações de UJ_2.

Proposição 3.1.1. *Valem as seguintes propriedades:*

(i) $a \circ a = 1$*;*

(ii) $a \circ b = b \circ a = 0$*;*

(iii) $b \circ b = 0$*;*

(iv) $1 \circ u = u$ *para qualquer* $u \in UJ_2$*.*

Demonstração. Provemos (i). Temos

$$\begin{aligned} a \circ a &= \frac{1}{2} \cdot \left(E_{1,1}^2 - E_{1,1}E_{2,2} - E_{2,2}E_{1,1} + E_{2,2}^2 + E_{1,1}^2 - E_{1,1}E_{2,2} - E_{2,2}E_{1,1} + E_{2,2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2E_{1,1}^2 + 2E_{2,2}^2 \right) \\ &= E_{1,1}^2 + E_{2,2}^2 \\ &= E_{1,1} + E_{2,2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

como queríamos provar.

Agora, mostremos (ii). Temos

$$\begin{aligned} a \circ b &= \frac{1}{2} \cdot \Big((E_{1,1} - E_{2,2})E_{1,2} + E_{1,2}(E_{1,1} - E_{2,2}) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(E_{1,1}E_{1,2} - E_{2,2}E_{1,2} + E_{1,2}E_{1,1} - E_{1,2}E_{2,2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(E_{1,2} - E_{1,2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como UJ_2 é comutativa, obtemos $a \circ b = b \circ a = 0$.

Verifiquemos agora (iii):

$$b \circ b = \frac{1}{2} \cdot \left(E_{1,2}E_{1,2} + E_{1,2}E_{1,2} \right) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Por fim, provemos (iv). Então, para qualquer $u \in UJ_2$, temos

$$1 \circ u = \frac{1}{2} \cdot (1u + u1) = \frac{1}{2} \cdot (u + u) = \frac{1}{2} 2u = u,$$

o que finaliza a demonstração. □

Pela proposição acima, torna-se mais prático verificar quando uma dada decomposição de UJ_2 em subespaços indexados por G, de fato, define uma graduação. Dados $\varepsilon, \rho \in G$ tal que $\varepsilon^2 = 1$, denotamos

$$\deg(1) = 1, \qquad \deg(a) = \varepsilon, \qquad \deg(b) = \rho.$$

Posto isto, definamos os subespaços indexados por elementos de G por

$$(UJ_2)_1 := \text{span}\{x \mid x \in \{1,a,b\} \text{ e } \deg(x) = 1\},$$

$$(UJ_2)_\varepsilon := \text{span}\{x \mid x \in \{1,a,b\} \text{ e } \deg(x) = \varepsilon\},$$

$$(UJ_2)_\rho := \text{span}\{x \mid x \in \{1,a,b\} \text{ e } \deg(x) = \rho\},$$

e $(UJ_2)_g := 0$ para todo $g \in G \setminus \{1, \varepsilon, \rho\}$. Como $\{1,a,b\}$ é base de UJ_2, segue-se que

$$UJ_2 = \bigoplus_{h \in G} (UJ_2)_h.$$

Para verificar que trata-se de uma G-graduação, resta-nos verificar que

$$(UJ_2)_{h_1} \circ (UJ_2)_{h_2} \subseteq (UJ_2)_{h_1 h_2}$$

para quaisquer $h_1, h_2 \in G$. Para tanto, basta verificarmos os produtos entre 1, a e b. Pela Proposição 3.1.1, segue-se que

(1) $1 \circ 1 \in (UJ_2)_1$;

(2) $1 \circ a \in (UJ_2)_\varepsilon$;

(3) $1 \circ b \in (UJ_2)_\rho$;

(4) $a \circ a \in (UJ_2)_{\varepsilon^2}$, pois $a \circ a = 1$ e $\varepsilon^2 = 1$;

(5) $a \circ b$, $b \circ b \in (UJ_2)_g$ para qualquer $g \in G$.

Logo, de fato, temos uma graduação e convém fazer a seguinte definição.

Definição 3.1.2. Sejam $\varepsilon, \rho \in G$ com $\varepsilon^2 = 1$. Denotamos por $UJ_2(\varepsilon, \rho)$ a álgebra UJ_2 munida da G-graduação determinada por

$$\deg(1) = 1, \qquad \deg(a) = \varepsilon, \qquad \deg(b) = \rho,$$

e por $(UJ_2)_g = 0$ para $g \in G \setminus \{1, \varepsilon, \rho\}$.

Com a propriedade do produto descrita e tendo estabelecido as escolhas dos graus para $1, a$ e b que conduzem a uma decomposição compatível, podemos agora enunciar o resultado principal deste caso particular, que classifica as graduações de UJ_2, a menos de isomorfismo graduado.

Teorema 3.1.3. *Seja G um grupo multiplicativo com unidade* 1*. Então, a menos de isomorfismo graduado, toda G-graduação de UJ_2 é $UJ_2(\varepsilon,\rho)$ para algum $\varepsilon,\rho\in G$ tal que $\varepsilon^2=1$.*

Demonstração. Consideremos uma G-graduação qualquer em

$$A := UJ_2 = \bigoplus_{h\in G} A_h.$$

Pela Proposição 1.5.5, a matriz identidade é homogênea com grau 1. Relembremos o associador $(u,v,w) := (u\circ v)\circ w - u\circ(v\circ w)$ para quaisquer $u,v,w\in A$. Pelos argumentos do Exemplo 1.4.2, todo associador é múltiplo escalar de b. Logo, temos

$$(A,A,A) = \operatorname{span}\{b\}.$$

Como (A,A,A) é um subespaço homogêneo de A, segue-se que b é elemento homogêneo, ou seja, existe $\rho\in G$ com $\deg(b)=\rho$. Tomemos $x\in A$ tal que $x=\alpha\cdot 1+\beta\cdot a+\gamma\cdot b$ onde $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{K}$. Notemos que $x\circ b=\alpha b$ pois,

$$x\circ b = \alpha(1\circ b)+\beta(a\circ b)+\gamma(b\circ b) = \alpha b+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 0 = \alpha b.$$

No entanto, podemos observar que $x\circ b=0$ se, e somente se, $\alpha=0$. Assim, temos

$$\operatorname{ann}_A(b) = \{x\in A : x\circ b=0\} = \operatorname{span}\{a,b\}.$$

Como b é um elemento homogêneo, segue-se que $\operatorname{ann}_A(b)$ é um subespaço graduado de A e, consequentemente, existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tal que

$$\tilde{a} := a+\lambda b$$

é homogêneo. Escrevendo $\tilde{a}$ explicitamente, temos

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos $U=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in A$ com $t=\frac{\lambda}{2}$. Tem-se

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Devemos ter

$$U\tilde{a} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda-t \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e então

$$U\tilde{a}U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda-t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t+(\lambda-t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda-2t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $t=\frac{\lambda}{2}$, segue-se que $\lambda-2t=0$ e, consequentemente, $U\tilde{a}U^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=a$.

Então, considerando o automorfismo (de álgebras de Jordan) $\psi\colon A \to A$ definido por

$$\psi(x) = UxU^{-1},$$

devemos ter que ψ induz uma nova graduação em A, definida por

$$A'_g := \psi(A_g),$$

para todo $g \in G$. Como ψ é um automorfismo, segue-se que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A'_g$$

é uma decomposição e que $\psi\colon A \to A$ é um isomorfismo graduado entre a graduação original (no domínio) e a graduação induzida (no contradomínio).

Além disso, pela construção acima, os elementos 1, a e b pertencem a componentes homogêneas da graduação induzida. Denotando

$$\deg(a) = \varepsilon \quad \text{e} \quad \deg(b) = \rho,$$

com $\varepsilon, \rho \in G$, segue-se que a graduação induzida coincide, por definição, com a graduação $UJ_2(\varepsilon, \rho)$. Por fim, denotamos $a \circ a$ por a^2. Pela Proposição 3.1.1, temos $a^2 = 1$ e assim, obtemos

$$1 = \deg(1) = \deg(a^2) = (\deg(a))^2,$$

o que finaliza a demonstração. □

Dada esta classificação das graduações de UJ_2, podemos organizar esta informação de maneira sistemática. Ou seja, a seguir definimos as graduações possíveis de UJ_2, agrupando-as em cinco tipos distintos, cada um determinado pelas relações entre os parâmetros ε e ρ.

Definição 3.1.4. Dizemos que $UJ_2(\varepsilon, \rho)$ é uma:

(1) graduação associativa se $\varepsilon \neq 1$ e $\rho = 1$;

(2) graduação escalar quando $\varepsilon \neq 1$ e $\varepsilon = \rho$;

(3) graduação clássica se $\varepsilon = 1$ e $\rho \neq 1$;

(4) graduação trivial quando $\varepsilon = \rho = 1$;

(5) graduação de Klein se $\varepsilon \neq 1$, $\rho \neq 1$ e $\varepsilon \neq \rho$.

Posto isto, o Teorema 3.1.3 classifica, de forma definitiva, todos os tipos possíveis de graduações de UJ_2. Notemos ainda que as graduações (1) a (4) da Definição 3.1.4 aparecem em [15], enquanto a graduação de Klein foi introduzida em [4]. Agora, em termos das duas classes de graduações de

UJ_n apresentadas no capítulo anterior, temos duas graduações elementares (a clássica e a trivial) e três graduações MT (associativa, escalar e de Klein).

Além disso, esse caso $n = 2$ será utilizado como ideia intuitiva para o caso geral de UJ_n abordado na próxima seção, o que permitirá classificar todas as graduações de UJ_n a menos de isomorfismo graduado.

3.2 Graduação Geral de UJ_n

Assumamos $n \geqslant 3$. Seja G um grupo qualquer e fixemos uma G-graduação de UJ_n. Denotemos por J o ideal de todas as matrizes estritamente triangulares superiores. Como $J = (UJ_n, UJ_n, UJ_n)$, segue-se que J é graduado. Além disso, segue-se da Proposição 1.5.9 que o subespaço $J^{n-1} = \operatorname{span}\{E_{1,n}\}$ é graduado.

Consideremos agora o anulador de $E_{1,n}$:

$$B = \operatorname{ann}_{UJ_n}\{E_{1,n}\} = \{x \in UJ_n \mid x \circ E_{1,n} = 0\}.$$

Temos a seguinte afirmação:

Afirmação 3.2.1. $B = \{x \in UJ_n \mid (x)_{(1,1)} + (x)_{(n,n)} = 0\}$.

De fato, dado $x \in B$, escrevendo $x = \sum\limits_{i \leqslant j} (x)_{(i,j)} E_{i,j}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= x \circ E_{1,n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i \leqslant j} (x)_{(i,j)} E_{i,j} E_{1,n} + \sum_{i \leqslant j} E_{1,n} (x)_{(i,j)} E_{i,j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left((x)_{(1,1)} E_{1,1} E_{1,n} + E_{1,n} (x)_{(n,n)} E_{n,n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left([(x)_{(1,1)} + (x)_{(n,n)}] E_{1,n} \right). \end{aligned}$$

Com isso, obtemos $(x)_{(1,1)} + (x)_{(n,n)} = 0$, o que finaliza a demonstração.

Notemos que B é graduado pois, dado $u \in B$, com $u = \sum\limits_{g \in G} u_g$, temos

$$0 = u \circ E_{1,n} = \sum_{g \in G} u_g \circ E_{1,n}.$$

Assim, segue-se que $u_g \circ E_{1,n} = 0$ para todo $g \in G$ e então, $u_g \in B$ para todo $g \in G$.

Denotemos agora

$$B^2 = B \circ B = \operatorname{span}\{b_1 \circ b_2 \mid b_1, b_2 \in B\}.$$

Temos a seguinte afirmação:

Afirmação 3.2.2. $B^2 = \{x \in UJ_n \mid (x)_{(1,1)} = (x)_{(n,n)}\}$.

Provaremos a afirmação. Se $u, v \in B$ então $(u)_{(1,1)} = -(u)_{(n,n)}$ e $(v)_{(1,1)} = -(v)_{(n,n)}$. Assim,

$$(u \circ v)_{(1,1)} = (u)_{(1,1)}(v)_{(1,1)}$$

e

$$(u \circ v)_{(n,n)} = (u)_{(n,n)}(v)_{(n,n)} = (-(u)_{(1,1)})(-(v)_{(1,1)}) = (u)_{(1,1)}(v)_{(1,1)},$$

isto é, $(u \circ v)_{(1,1)} = (u \circ v)_{(n,n)}$. Por outro lado, sendo $x \in UJ_n$ tal que $(x)_{(1,1)} = (x)_{(n,n)}$, podemos escrever

$$x = a_{11}(E_{1,1} + E_{n,n}) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ (i,j) \neq (1,1) \\ (i,j) \neq (n,n)}} a_{ij} E_{i,j}.$$

Como $E_{1,1} - E_{n,n} \in B$, temos

$$(E_{1,1} - E_{n,n}) \circ (E_{1,1} - E_{n,n}) = E_{1,1} + E_{n,n},$$

e assim, temos $E_{1,1} + E_{n,n} \in B^2$. Agora, temos os seguintes casos:

(i) $2 \leqslant i = j \leqslant n-1$:

As matrizes diagonais E_{ii} satisfazem $(E_{i,i})_{(1,1)} + (E_{i,i})_{(n,n)} = 0$, ou seja, $E_{i,i} \in B$, e podem ser obtidas como sendo

$$E_{i,i} \circ E_{i,i} = \frac{1}{2} \cdot (E_{i,i}E_{i,i} + E_{i,i}E_{i,i}) = \frac{1}{2} \cdot (2E_{i,i}^2) = E_{i,i}.$$

Logo, temos $E_{i,i} \in B^2$.

(ii) $1 \leq i < j \leqslant n-1$:

Pelo fato que $E_{i,j}$ satisfaz $(E_{i,j})_{(1,1)} + (E_{i,j})_{(n,n)} = 0$, ou seja, $E_{i,j} \in B$, e pelo item (i), devemos ter

$$2(E_{i,j} \circ E_{j,j}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (E_{i,j}E_{j,j} + E_{j,j}E_{i,j}) = E_{i,j}$$

e, consequentemente, $E_{i,j} \in B^2$.

(iii) $1 < i < j = n$:

De maneira análoga ao item (ii), temos

$$2(E_{i,i} \circ E_{i,n}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (E_{i,i}E_{i,n} + E_{i,n}E_{i,i}) = \frac{1}{2} \cdot (2E_{i,n}) = E_{i,n}$$

e então $E_{i,n} \in B^2$.

(iv) $i = 1$ e $j = n$:

Como $n \geq 3$, consideremos um número t tal que $1 < t < n$. Segue-se que

$$2 \cdot (E_{1,t} \circ E_{t,n}) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (E_{1,t}E_{t,n} + E_{t,n}E_{1,t})\right] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (E_{1,n} + 0) = E_{1,n}$$

e assim, obtemos $E_{1,n} \in B^2$.

Desta maneira, temos $x \in B^2$, o que finaliza a prova da afirmação.

Ademais, segue-se diretamente da Proposição 1.5.9 que B^2 é graduado.

Seja agora $C = B \cap B^2$. Então, devemos ter

$$C = \{x \in UJ_n \mid (x)_{(1,1)} = (x)_{(n,n)} = 0\}.$$

Segue-se diretamente da Proposição 1.5.8 que C é graduado. Assim, consideremos o quociente C/J. Podemos visualizar os elementos de C/J como sendo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & * & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & * & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} + J,$$

onde os $*$ denotam elementos do corpo, não necessariamente iguais. Devemos ter, pela Proposição 1.5.7, que C/J é graduado e, consequentemente,

$$U_1 = \mathrm{ann}_{UJ_n}\left(C/J\right) = \{x \in UJ_n \mid x \circ c + J = J \text{ para todo } c \in C\}$$

é graduado também. Uma visualização de tais matrizes em U_1 é dada por:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ & 0 & * & \cdots & * & * \\ & & 0 & \cdots & * & * \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

onde os $*$ denotam elementos do corpo, não necessariamente iguais.

Seja agora $T_1 = U_1^n = \underbrace{U_1 \circ \cdots \circ U_1}_{n-\text{vezes}}$. Pode-se verificar que

$$T_1 = \{x \in UJ_n \mid (x)_{(i,j)} = 0 \text{ sempre que } i \neq 1 \text{ e } j \neq n\}.$$

Uma visualização para as matrizes de T_1 é dada por:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ & & 0 & \cdots & 0 & * \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & * \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

onde $*$ denotam elementos do corpo, não necessariamente iguais. Pela Proposição 1.5.9, segue-se que T_1 é um ideal graduado de UJ_n.

No que segue, a partir desta descrição inicial de T_1 em UJ_n, torna-se necessário compreender como as componentes diagonais se comportam sobre o produto de Jordan e como elas se relacionam com as demais posições da matriz. Esse comportamento é decisivo porque as entradas diagonais interagem diretamente com os elementos das primeiras e últimas linhas e colunas.

Lema 3.2.3. *Existe um elemento $e_2 \in T_1$ homogêneo tal que*

$$(\deg e_2)^2 = 1 \quad e \quad e_2 \equiv E_{1,1} - E_{n,n} \pmod{T_1 \cap J}.$$

Demonstração. Consideremos o quociente

$$A := {}^{T_1}\!\big/_{(T_1 \cap J)}.$$

Pelas Proposições 1.5.7 e 1.5.8, segue-se que A é uma álgebra G-graduada gerada, como espaço vetorial, pelas classes

$$\overline{E_{1,1}} \quad \text{e} \quad \overline{E_{n,n}},$$

cuja unidade é

$$\overline{e_1} = \overline{E_{1,1}} + \overline{E_{n,n}}.$$

Então, devemos ter

$$A = \bigoplus_{g \in G} \left[{}^{T_1}\!\big/_{(T_1 \cap J)} \right]_g.$$

Em particular, segue-se, pela Proposição 1.5.5, que $\deg(\overline{e_1}) = 1$. Além disso, A é associativa pois

$$A \cong \mathbb{K} \times \mathbb{K}$$

por meio do isomorfismo $\overline{E_{1,1}} \mapsto (1,0)$ e $\overline{E_{n,n}} \mapsto (0,1)$.

Como $\dim(A) = 2$, existe um elemento homogêneo $x \in T_1$ tal que as classes $\overline{x}$ e $\overline{e_1}$ são linearmente independentes em A. Dada a base $\{\overline{E_{1,1}}, \overline{E_{n,n}}\}$, podemos escrever $\overline{x}$ da seguinte forma:

$$\overline{x} = a\overline{E_{1,1}} + b\overline{E_{n,n}},$$

onde $a, b \in \mathbb{K}$ com $a \neq b$ pois, se $a = b$ então $\overline{x}$ seria múltiplo escalar de $\overline{e_1}$, contradizendo a independência linear. Com isso, temos duas possibilidades:

(1) $\deg(\overline{x}) = 1$;

(2) $\deg(\overline{x}) \neq 1$.

Para o caso (1), obtemos $A = \left[{}^{T_1}\!\big/_{(T_1 \cap J)} \right]_1$. Assim,

$$\deg(\overline{E_{1,1} - E_{n,n}}) = 1$$

e, pela definição de graduação no quociente, existe $e_2 \in [T_1]_1$ homogêneo tal que

$$E_{1,1} - E_{n,n} \equiv e_2 \pmod{T_1 \cap J}.$$

Pela construção acima, notemos que

$$(\deg e_2)^2 = 1^2 = 1,$$

como desejado.

Agora, para o caso (2), suponhamos que $\deg(\overline{x}) = h$. Então, temos

$$A = \left[{}^{T_1}\!\diagup_{(T_1 \cap J)} \right]_1 \oplus \left[{}^{T_1}\!\diagup_{(T_1 \cap J)} \right]_h .$$

Denotamos $\overline{x}^2 = \overline{x} \circ \overline{x}$. Vejamos que

$$\overline{x}^2 = a^2 \overline{E_{1,1}} + b^2 \overline{E_{n,n}}$$

pois os termos mistos $\overline{E_{1,1}}\ \overline{E_{n,n}}$ e $\overline{E_{n,n}}\ \overline{E_{1,1}}$ são nulos.

Desta maneira, $\overline{x}^2 \in \left[{}^{T_1}\!\diagup_{(T_1 \cap J)} \right]_{h^2}$, ou seja, $\overline{x}^2$ tem grau h^2 em A, com $\overline{x}^2 \neq \overline{0}$. Assim, devemos ter

$$h^2 = 1 \quad \text{ou} \quad h^2 = h.$$

Como, por hipótese, $h \neq 1$, segue-se que $h^2 = 1$. Com isso, $\overline{x}^2 = \lambda \overline{e_1}$ para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo, $a^2 = \lambda = b^2$, isto é, $(a+b)(a-b) = 0$ e portanto,

$$a = b \quad \text{ou} \quad a = -b.$$

Como mencionado acima, devemos ter $a = -b$. Então,

$$\overline{x} = a(\overline{E_{1,1}} - \overline{E_{n,n}})$$

e, consequentemente, $\overline{E_{1,1} - E_{n,n}}$ é homogêneo de grau h. Pela definição de graduação no quociente, existe $e_2 \in [T_1]_h$ homogêneo tal que

$$E_{1,1} - E_{n,n} \equiv e_2 \pmod{T_1 \cap J}.$$

Além disso, temos

$$(\deg e_2)^2 = h^2 = 1,$$

como queríamos demonstrar. □

Para descrever a estrutura graduada de UJ_n, é fundamental agora identificarmos os elementos homogêneos que desempenham o papel essencial na graduação. O próximo resultado estabelece que, a menos de isomorfismo graduado, podemos identificar os elementos diagonais que permitem controlar o comportamento das posições extremas da matriz e esses elementos podem ser sempre escolhidos homogêneos.

Lema 3.2.4. *Dada uma G-graduação em UJ_n, a menos de um isomorfismo graduado, os elementos*

$$e_1 = E_{1,1} + E_{n,n} \quad e \quad e_2 = E_{1,1} - E_{n,n}$$

são homogêneos com

$$\deg(e_1) = (\deg(e_2))^2 = 1.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.2.3, existe um elemento $e_2 \in T_1$ homogêneo de modo que

$$(\deg e_2)^2 = 1 \quad \text{e} \quad e_2 \equiv E_{1,1} - E_{n,n} \pmod{T_1 \cap J}.$$

Definamos então $e_1 = e_2 \circ e_2$. Desta maneira, e_1 é homogêneo e obtemos

$$\deg(e_1) = \deg(e_2 \circ e_2) = (\deg(e_2))^2 = 1.$$

Como $e_2 \equiv E_{1,1} - E_{n,n} \pmod{T_1 \cap J}$, segue-se que:

(a) $e_1 \equiv E_{1,1} + E_{n,n} \pmod{T_1 \cap J}$.

Além disso, denotando

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3n} \\ & & & 0 & \dots & 0 & a_{4n} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

devemos ter

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,n-1} & a_{12}a_{2n} + \cdots + a_{1,n-1}a_{n-1,n} \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{2n} \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{3n} \\ & & & 0 & \dots & 0 & -a_{4n} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, pode-se ser mostrado, por cálculos simples, o próximo item.

(b) $e_1^2 = e_1$.

Agora, denotemos por $m_{e_1}(z)$ o polinômio minimal de e_1. Assim, $m_{e_1}(z)$ divide $z(z-1)$ e temos as seguintes possibilidades para $m_{e_1}(z)$:

$$z, \quad z-1 \quad \text{ou} \quad z(z-1).$$

Como e_1 não é a matriz nula nem a matriz identidade, o polinômio minimal de e_1 é o próprio

$$z(z-1).$$

Então, pelo Teorema 5.5.9 em [3], tem-se que e_1 é diagonalizável com autovalores 0 e 1. Como o polinômio característico de e_1 é

$$p_{e_1}(z) = (z-1)^2(z-0)^{n-2}$$

e, uma vez que as multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores coincidem, segue-se que e_1 admite dois autovetores associados ao autovalor 1, e $n-2$ autovetores associados ao autovalor 0. Logo, existe uma conjugação interna

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & UJ_n & \longrightarrow & UJ_n \\ & u & \longmapsto & PuP^{-1} \end{array}$$

tal que $\psi(e_1) = E_{1,1} + E_{n,n}$. Desta maneira, ψ induz uma nova graduação em UJ_n, isomorfa a graduação original, de modo que $\tilde{e}_1 = E_{1,1} + E_{n,n}$ é homogêneo de grau 1.

Com respeito a esta nova graduação, reiniciamos o processo. Ou seja, pelo Lema 3.2.3, existe um elemento $\tilde{e}_2 \in T_1$ homogêneo tal que

$$\tilde{e}_2 \equiv E_{1,1} - E_{n,n} \pmod{T_1 \cap J}.$$

Assim,

$$\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2n} \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{3n} \\ & & & 0 & \dots & 0 & b_{4n} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & b_{n-1,n} \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$2(\tilde{e}_2 \circ \tilde{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \dots & b_{1,n-1} & 2b_{1n} \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2n} \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{3n} \\ & & & 0 & \dots & 0 & b_{4n} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & b_{n-1,n} \\ & & & & & & -2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, definindo $r_2 := 2(\tilde{e}_2 \circ \tilde{e}_1) - \tilde{e}_2$, devemos obter

$$r_2 = 2(\tilde{e}_2 \circ \tilde{e}_1) - \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

com $\deg(r_2) = \deg(\tilde{e}_2)$. Provamos que

$$r_2 = E_{1,1} - E_{n,n} + \alpha E_{1,n}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{K}$. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\psi}: & UJ_n & \longrightarrow & UJ_n \\ & u & \longmapsto & WuW^{-1}, \end{array}$$

onde

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha}{2} \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha}{2} \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

é um automorfismo de modo que $\tilde{\psi}(\tilde{e}_1) = E_{1,1} + E_{n,n}$ e $\tilde{\psi}(r_2) = E_{1,1} - E_{n,n}$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Agora, consideremos uma álgebra de Jordan $(A, \circ)$, não necessariamente com unidade. A seguir, apresentamos a definição de um conjunto especial para prosseguirmos com a construção das ferramentas para o resultado principal desta seção.

Definição 3.2.5. Dado $x \in A$, definimos $(1-x) \circ A := \{y - x \circ y \mid y \in A\}$.

Suponhamos que o elemento $e_1 \in UJ_n$, onde $e_1 = E_{1,1} + E_{n,n}$, seja homogêneo de grau 1. Então, temos as seguintes afirmações:

Afirmação 3.2.6. O espaço vetorial $\Delta := (1 - 2e_1) \circ \Big(\Big(1 - e_1\Big) \circ UJ_n \Big)$ é isomorfo a UJ_{n-2}.

Faremos a demonstração da afirmação. Por definição, um elemento $w \in \Delta$ é expresso como sendo

$$y - e_1 \circ y - 2e_1 \circ (y - e_1 \circ y),$$

onde $y \in UJ_n$. Simplificando a aparência, temos

$$y - e_1 \circ y - 2e_1 \circ (y - e_1 \circ y) = y - e_1 \circ y - 2e_1 \circ y + 2e_1 \circ (e_1 \circ y) = y - 3e_1 \circ y + 2e_1 \circ (e_1 \circ y),$$

isto é,

$$w = y - 3e_1 \circ y + 2e_1 \circ (e_1 \circ y). \tag{3.2}$$

Lembrando que $e_1 = \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0, 1)$, segue-se que

$$(e_1 y)_{(i,j)} = 0 = (y e_1)_{(i,j)}$$

para $2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$. Então, temos

$$(e_1 \circ y)_{(i,j)} = 0 \quad \text{e} \quad (e_1 \circ (e_1 \circ y))_{(i,j)} = 0$$

para $2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$. Desta maneira, obtemos

$$(w)_{(i,j)} = (y)_{(i,j)}$$

para $2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$.

Agora, tomando $i = 1$ e sendo $2 \leqslant j \leqslant n-1$, temos

$$(e_1 y)_{(1,j)} = (y)_{(1,j)} \quad \text{e} \quad (ye_1)_{(1,j)} = 0.$$

Logo, obtemos $(e_1 \circ y)_{(i,j)} = \frac{1}{2} \cdot (y)_{(1,j)}$. Com isso, segue-se que

$$(e_1(e_1 \circ y))_{(1,j)} = \frac{1}{2} \cdot (y)_{(1,j)} \quad \text{e} \quad ((e_1 \circ y)e_1)_{(1,j)} = 0,$$

ou seja, temos $(e_1 \circ (e_1 \circ y))_{(1,j)} = \frac{1}{4} \cdot (y)_{(1,j)}$. Desta maneira, tem-se

$$(w)_{(1,j)} = (y)_{(1,j)} - \frac{3}{2} \cdot (y)_{(1,j)} + \frac{1}{2} \cdot (y)_{(1,j)} = 0$$

para $i = 1$ e $2 \leqslant j \leqslant n-1$

Sendo $2 \leqslant i \leqslant n-1$ e $j = n$, obtemos $(e_1 y)_{(i,n)} = 0$ e $(ye_1)_{(i,n)} = (y)_{(i,n)}$. Assim, temos

$$(e_1 \circ y)_{(n,j)} = \frac{1}{2} \cdot (y)_{(i,n)}, \quad (e_1 \circ (e_1 \circ y))_{(n,j)} = \frac{1}{4} \cdot (y)_{(i,n)} \quad \text{e} \quad (w)_{(i,n)} = 0.$$

Para $i = 1$ e $j = n$, devemos ter $(e_1 y)_{(1,n)} = (y)_{(1,n)}$ e $(ye_1)_{(1,n)} = (y)_{(1,n)}$. Então,

$$(e_1 \circ y)_{(1,n)} = (y)_{(1,n)} \quad \text{e} \quad (e_1 \circ (e_1 \circ y))_{(1,n)} = (y)_{(1,n)}.$$

Logo, temos

$$(w)_{(1,n)} = (y)_{(1,n)} - 3 \cdot (y)_{(1,n)} + 2 \cdot (y)_{(1,n)} = 0.$$

Os casos $(1,1)$ e (n,n) seguem de maneira análoga ao anterior e obtemos $(w)_{(1,1)} = 0 = (w)_{(n,n)}$. Deste modo,

$$(w)_{(i,j)} = \begin{cases} (y)_{(i,j)}, & 2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Acabamos de mostrar que todo elemento em Δ é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & * & * & \cdots & * & 0 \\ & & * & \cdots & * & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & * & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

O isomorfismo entre Δ e UJ_{n-2} é dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & * & * & \cdots & * & 0 \\ & & * & \cdots & * & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & * & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ & * & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & * \end{pmatrix},$$

como era o desejado.

Afirmação 3.2.7. Δ é graduado.

De fato, como e_1 é homogêneo de grau 1 e todo elemento em Δ é da forma (3.2), segue-se que Δ é graduado.

Posto isto, podemos escrever

$$UJ_n = T_1 \oplus \Delta,$$

onde T_1 é o ideal graduado definido em (3.1).

É pertinente a seguinte observação: se $n = 3$, então $\Delta = \operatorname{span}\{E_{2,2}\}$ e, portanto, $E_{2,2}$ é homogêneo.

Suponhamos $n \geqslant 4$ e seja agora $M \in UT_{n-2}$ uma matriz invertível. O correspondente automorfismo interno φ_M de Δ é dado por

$$\varphi_M(x) = MxM^{-1},$$

onde $x \in \Delta$. Consideremos a matriz $n \times n$ em bloco diagonal

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, a conjugação por $\tilde{M}$ define um automorfismo interno de UJ_n, dado por

$$\tilde{\varphi}(y) = \tilde{M}y\tilde{M}^{-1}$$

para qualquer $y \in UJ_n$. Assim, a restrição de $\tilde{\varphi}$ a Δ coincide com φ_M, isto é,

$$\tilde{\varphi}|_\Delta = \varphi_M$$

pois $\tilde{\varphi}(\Delta) = \Delta$. Provamos que todo automorfismo interno de Δ (conjugação por M) pode ser estendido a um automorfismo interno de UJ_n (conjugação por $\tilde{M}$). Além disso, notemos que

$$\tilde{\varphi}(e_1) = e_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}(e_2) = e_2. \tag{3.3}$$

Aplicando o Lema 3.2.4 em $\Delta \cong UJ_{n-2}$, existe um automorfismo graduado φ_M de Δ, e portanto um automorfismo graduado $\tilde{\varphi}$ de UJ_n, tal que

- no domínio de $\tilde{\varphi}$ está a graduação original;

- no contradomínio de $\tilde{\varphi}$ está a nova graduação com a propriedade que
$$u_1 = E_{2,2} + E_{n-1,n-1} \quad \text{e} \quad u_2 = E_{2,2} - E_{n-1,n-1}$$
são homogêneos e $\deg(u_1) = (\deg(u_2))^2 = 1$;

- no contradomínio de $\tilde{\varphi}$ os elementos
$$e_1 = E_{1,1} + E_{n,n} \quad \text{e} \quad e_2 = E_{1,1} - E_{n,n}$$
permanecem homogêneos com $\deg(e_1) = (\deg(e_2))^2 = 1$, veja (3.3).

Portanto, de agora em diante, estamos diante de uma graduação em UJ_n tal que e_1, e_2, u_1 e u_2 são homogêneos e têm as propriedades acima quando $n \geqslant 4$.

Consideremos agora $J^{n-2} = \operatorname{span}\{E_{1,n-1}, E_{2,n}, E_{1,n}\}$. Como J^{n-2} é graduado e $E_{1,n}$ é homogêneo, existe um elemento homogêneo $z \in J^{n-2}$ tal que $(z)_{(1,n-1)} \neq 0$. Se $(z)_{(1,n)} \neq 0$, então $z \circ u_1$ é um elemento homogêneo de J^{n-2} com $(z \circ u_1)_{(1,n-1)} \neq 0$ e $(z \circ u_1)_{(1,n)} = 0$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor $(z)_{(1,n)} = 0$.

Afirmação 3.2.8. $u_2 \circ z = -e_2 \circ z$.

De fato, consideremos
$$\begin{cases} e_2 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n) = \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0, -1) & \text{e} \\ u_2 = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-2}, d_{n-1}, d_n) = \operatorname{diag}(0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0). \end{cases}$$
Então, temos
$$\begin{cases} (e_2 \circ z)_{(1,n-1)} = \frac{1}{2} \cdot (b_1 (z)_{(1,n-1)} + (z)_{(1,n-1)} b_{n-1}) = \frac{1}{2} \cdot (z)_{(1,n-1)} & \text{e} \\ (u_2 \circ z)_{(1,n-1)} = \frac{1}{2} \cdot (d_1 (z)_{(1,n-1)} + (z)_{(1,n-1)} d_{n-1}) = -\frac{1}{2} \cdot (z)_{(1,n-1)}. \end{cases}$$
Logo, obtemos $(u_2 \circ z)_{(1,n-1)} = -(e_2 \circ z)_{(1,n-1)}$. Com cálculos simples nas demais entradas, obtemos
$$u_2 \circ z = -e_2 \circ z,$$
como era o desejado.

Desta maneira, vale o seguinte resultado:

Lema 3.2.9. $\deg(e_2) = \deg(u_2)$.

Demonstração. Pela última afirmação, temos
$$\deg(u_2)\deg(z) = \deg(u_2 \circ z) = \deg(-e_2 \circ z) = \deg(-e_2)\deg(z) = \deg(e_2)\deg(z).$$
Como G é grupo, vale a lei do cancelamento e assim, obtemos
$$\deg(e_2) = \deg(u_2),$$
como desejado. □

Uma vez estabelecida a decomposição de UJ_n na Afirmação 3.2.7 e identificados os elementos e_1 e e_2 homogêneos, o passo seguinte consiste em analisar como o grau de e_2 influencia a forma da graduação de UJ_n.

O caso mais simples ocorre quando $\deg(e_2) = 1$, pois, nessa situação, o comportamento diagonal é particularmente rígido e força todas as matrizes canônicas $E_{i,j}$ a serem homogêneas. O lema a seguir formaliza essa ideia e nos diz que tipo de graduação resulta impondo essa condição.

Lema 3.2.10. *Se* $\deg(e_2) = 1$ *então, a menos de isomorfismo graduado, a graduação é a elementar.*

Demonstração. Como $\deg(e_1) = \deg(e_2) = 1$, segue-se que $E_{1,1}$ e $E_{n,n}$ são homogêneos com grau também 1.

A demonstração será por indução em $n \geqslant 3$.

Primeiro provaremos o lema para $n = 3$. Neste caso, temos

$$UJ_3 = T_1 \oplus \Delta,$$

onde $\Delta = \text{span}\{E_{2,2}\}$ e, em particular, $E_{2,2}$ é homogêneo. Então, consideremos J o ideal das matrizes estritamente triangulares superiores em UJ_3. Como $E_{1,2} \in J$ e J é graduado, escrevamos

$$E_{1,2} = \sum_{g \in G} (E_{1,2})_g,$$

onde $(E_{1,2})_g$ é um elemento de J homogêneo de grau g. Como $(E_{1,2})_{(1,2)} = 1$, existe $g_0 \in G$ tal que

$$v := (E_{1,2})_{g_0}$$

satisfaz $(v)_{(1,2)} \neq 0$. O elemento v é homogêneo e, sem perda de generalidade, suponhamos

$$(v)_{(1,2)} = 1.$$

Assim, temos

$$2v \circ E_{1,1} = vE_{1,1} + E_{1,1}v = 0 + E_{1,1}v = E_{1,2} + (v)_{(1,3)}E_{1,3}.$$

Multiplicando à direita por $2E_{2,2}$, temos

$$(2v \circ E_{1,1}) \circ 2E_{2,2} = E_{1,2}.$$

Consequentemente, $E_{1,2}$ é produto de elementos homogêneos e, assim, homogêneo. Procedendo-se de maneira análoga, obtemos $E_{2,3}$ homogêneo e, em seguida, $E_{1,3} = E_{1,2}E_{2,3}$ também homogêneo. Como todos os $E_{i,j}$ são homogêneos, segue-se que a graduação é elementar.

Agora, suponhamos $n \geqslant 4$. Escrevemos

$$UJ_n = T_1 \oplus \Delta.$$

Pelo Lema 3.2.9, temos $\deg u_2 = \deg e_2 = 1$ em Δ, com $u_2 = E_{2,2} - E_{n-1,n-1}$. Como a graduação restringe-se a Δ, por hipótese indutiva a graduação em Δ é elementar. Logo, toda matriz $E_{i,j}$ com $2 \leq i \leq j \leq n-1$ é homogênea.

Mostraremos que $E_{1,2}$ é homogêneo. Como $E_{1,2} \in J$, escrevamos

$$E_{1,2} = \sum_{g \in G} (E_{1,2})_g,$$

onde $(E_{1,2})_g$ é um elemento de J homogêneo de grau g. Como $(E_{1,2})_{(1,2)} = 1$, existe $g_0 \in G$ tal que

$$v := (E_{1,2})_{g_0}$$

satisfaz $(v)_{(1,2)} \neq 0$. O elemento v é homogêneo e, sem perda de generalidade, suponhamos

$$(v)_{(1,2)} = 1.$$

Assim, temos

$$2v \circ E_{1,1} = vE_{1,1} + E_{1,1}v = 0 + E_{1,1}v = E_{1,2} + (v)_{(1,3)}E_{1,3} + \cdots + (v)_{(1,n)}E_{1,n}.$$

Multiplicando à direita por $2E_{2,2}$, temos

$$(2v \circ E_{1,1}) \circ 2E_{2,2} = E_{1,2}.$$

Consequentemente, $E_{1,2}$ é produto de elementos homogêneos e, assim, homogêneo.

É análogo o procedimento para provar que $E_{n-1,n}$ é homogêneo. Primeiro consideramos um elemento homogêneo $\tilde{v}$ em J cuja entrada $(n-1,n)$ é igual a 1, e depois fazemos

$$(2\tilde{v} \circ E_{n,n}) \circ 2E_{n-1,n-1} = E_{n-1,n}.$$

Agora, como todos os $E_{i,i+1}$, com $i = 1, \ldots, n-1$, são homogêneos, quaisquer $E_{i,j}$, com $i < j$, são produtos matriciais sequenciais

$$E_{i,j} = (2)^{j-1-i} E_{i,i+1} \circ E_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ E_{j-1,j}$$

e então, também são homogêneos. Assim, todos os $E_{i,j}$ são homogêneos e obtemos a graduação elementar. □

O resultado acima mostra que, quando o elemento e_2 possui grau trivial, toda a estrutura graduada se comporta de maneira compatível com a graduação elementar induzida pelas entradas acima da diagonal.

Trataremos agora do caso complementar, no qual $\deg(e_2) \neq 1$. Ou seja, o elemento e_2, ao ter grau não trivial, passa a atuar como uma espécie de reflexão sobre as entradas das extremidades da matriz, dando origem a graduações com propriedade de espelhamento e simetria interna. Assim, próximo lema mostra que este comportamento conduz exatamente às graduações MT.

Lema 3.2.11. *Se* $\deg(e_2) \neq 1$ *então, a menos de isomorfismo graduado, a graduação é a MT.*

Demonstração. Embora esta seção seja dedicada ao caso $n \geqslant 3$, notemos que este lema é verdadeiro para o caso $n = 2$ pois isso é consequência direta do Teorema 3.1.3. Usaremos este fato como o primeiro passo da demonstração por indução do lema quando n é par. Seja, então, $n \geqslant 4$ um número par.

Pelo Lema 3.2.9, tem-se $\deg(u_2) = \deg(e_2)$. Além disso, já é bem conhecida a decomposição

$$UJ_n = T_1 \oplus \Delta$$

onde $\Delta \cong UJ_{n-2}$. Por hipótese de indução, a menos de um isomorfismo graduado, Δ está equipada com uma graduação MT, pois $\deg(u_2) = \deg(e_2) \neq 1$.

Como $T_1 \cap J$ é graduado, tomemos $\bar{z} \in T_1 \cap J$ homogêneo tal que $(\bar{z})_{(1,2)} = 1$. Notemos que as únicas possíveis entradas não nulas de $2\bar{z} \circ u_1$ estão nas posições $(1,2), (n-1,n), (1,n-1)$ e $(2,n)$, pois

$$2\bar{z} \circ u_1 = \bar{z}u_1 + u_1\bar{z} = E_{1,2} + (\bar{z})_{(1,n-1)}E_{1,n-1} + (\bar{z})_{(2,n)}E_{2,n} + (\bar{z})_{(n-1,n)}E_{n-1,n}.$$

Definamos então $\tilde{z} := 2\bar{z} \circ u_1$ e percebamos que $\tilde{z}$ é homogêneo com $(\tilde{z})_{(1,2)} = 1$. Temos

$$2\tilde{z} \circ e_2 = \tilde{z}e_2 + e_2\tilde{z} = E_{1,2} + (\tilde{z})_{(1,n-1)}E_{1,n-1} - (\tilde{z})_{(2,n)}E_{2,n} - (\tilde{z})_{(n-1,n)}E_{n-1,n}$$

e também

$$2\tilde{z} \circ u_2 = \tilde{z}u_2 + u_2\tilde{z} = E_{1,2} - (\tilde{z})_{(1,n-1)}E_{1,n-1} + (\tilde{z})_{(2,n)}E_{2,n} - (\tilde{z})_{(n-1,n)}E_{n-1,n}.$$

Então, definamos

$$\approx{z} := \tilde{z} \circ u_2 + \tilde{z} \circ e_2.$$

Como $\tilde{z}$, e_2 e u_2 são homogêneos, temos que $\tilde{z} \circ e_2$ e $\tilde{z} \circ u_2$ também são homogêneos com mesmo grau. Logo, $\overset{\approx}{z}$ é homogêneo dado por

$$\overset{\approx}{z} = E_{1,2} + \alpha E_{n-1,n}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{K}$. Percebamos que $2\overset{\approx}{z} \circ e_2 = E_{1,2} - \alpha E_{n-1,n}$ pois,

$$\begin{aligned} 2\overset{\approx}{z} \circ e_2 &= (E_{1,2} + \alpha E_{n-1,n})(E_{1,1} - E_{n,n}) + (E_{1,1} - E_{n,n})(E_{1,2} + \alpha E_{n-1,n}) \\ &= E_{1,2} - \alpha E_{n-1,n}. \end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, então

$$\overset{\approx}{z} = E_{1,2} \quad \text{e} \quad 2\overset{\approx}{z} \circ e_2 = E_{1,2}.$$

Assim, teríamos

$$\deg(\overset{\approx}{z})\deg(e_2) = \deg(2\overset{\approx}{z} \circ e_2) = \deg(\overset{\approx}{z}),$$

o que implicaria em $\deg(e_2) = 1$, contradizendo a hipótese que $\deg(e_2) \neq 1$. Logo, $\alpha \neq 0$.

Agora, como $\alpha \neq 0$, tomemos a matriz diagonal

$$A = \operatorname{diag}(1,1,1,\ldots,1,\alpha)$$

e o correspondente automorfismo $\psi\colon UJ_n \to UJ_n$ definido por $\psi(x) = AxA^{-1}$. Notemos que

$$\psi(\,\widetilde{\widetilde{z}}\,) = E_{1,2} + E_{n-1,n}, \quad \psi(2\widetilde{\widetilde{z}} \circ e_2\,) = E_{1,2} - E_{n-1,n} \;\text{ e }\; \psi\Big(Y_{i:1}^{(\pm)}\Big) = Y_{i:1}^{(\pm)},$$

para $i = 2,3,\ldots,\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Desta maneira, ψ induz uma graduação MT em UJ_n (contradomínio), como queríamos demonstrar.

Para o caso $n = 3$, consideremos $\overline{z} \in T_1 \cap J$ homogêneo tal que $(\overline{z})_{(1,2)} = 1$. Observemos que as únicas entradas não nulas de $\overline{z} \circ 2E_{2,2}$ são exatamente as posições $(1,2)$ e $(2,3)$ pois,

$$\overline{z} \circ 2E_{2,2} = \overline{z}E_{2,2} + E_{2,2}\overline{z} = E_{1,2} + (\overline{z})_{(2,3)}E_{2,3}.$$

Definamos então $\widetilde{\widetilde{z}} := \overline{z} \circ 2E_{2,2}$. Notemos que $\widetilde{\widetilde{z}}$ é um elemento homogêneo dado por $\widetilde{\widetilde{z}} = E_{1,2} + \alpha E_{2,3}$, onde $\alpha \in \mathbb{K}$ com $\alpha \neq 0$. Assim, procede-se de maneira análoga ao caso anterior, considerando a matriz diagonal $\hat{A} = \operatorname{diag}(1,1,\alpha)$ e obtendo uma graduação MT induzida. Este é o caso base da demonstração por indução do lema quando $n \geqslant 3$ é ímpar. A demonstração para o caso $n \geqslant 5$ ímpar segue os mesmos passos do caso $n \geqslant 4$ par. □

Este lema demonstra que a presença de um elemento diagonal homogêneo de grau não trivial impõe à álgebra UJ_n uma estrutura rigidamente compatível com a graduação MT. A técnica central consistiu em ajustar certos elementos de fronteira por meio de conjugação interna, até que os padrões matriciais característicos dessa graduação se tornem aparentes. Assim, o caso $\deg(e_2) \neq 1$ não apenas exclui a graduação elementar como determina, de forma natural, a estrutura de graduação MT.

Assim, com toda construção feita e reunindo os casos analisados nos Lemas 3.2.10 e 3.2.11, estamos agora em posição de apresentar o primeiro resultado principal deste trabalho, que é a classificação das graduações da álgebra de Jordan UJ_n das matrizes triangulares superiores de ordem n.

Teorema 3.2.12. *Toda G-graduação de UJ_n é, a menos de isomorfismo graduado, a graduação elementar ou a MT. Além disso, a graduação possui o suporte comutativo.*

Demonstração. Seja UJ_n equipado com uma G-graduação.

Se $n = 2$ então, pelo Teorema 3.1.3, a graduação em UJ_n é elementar ou MT, a menos de isomorfismo graduado. Já o caso $n \geqslant 3$ é consequência direta dos Lemas 3.2.4, 3.2.10 e 3.2.11. No que diz respeito ao suporte da graduação, segue-se dos Teoremas 2.1.22 e 2.2.17 que ele é comutativo. □

O teorema acima encerra a análise estrutural das graduações de UJ_n ao mostrar que nenhuma outra possibilidade surge além das graduações elementares e MT. A decomposição obtida ao longo da seção, juntamente com o comportamento do elemento diagonal e_2, revela que a presença ou ausência de um grau não trivial de ordem 2 é precisamente o mecanismo que determina qual dos dois tipos ocorre.

Assim, este resultado não apenas fornece uma classificação mas também estabelece um vínculo conceitual entre a estrutura interna de UJ_n e a dinâmica dos graus, ou seja, toda graduação é controlada pela diagonal e se propaga rigidamente pelas posições superiores da matriz. Essa descrição será fundamental para a etapa final deste trabalho, na qual analisaremos como tais estruturas se comportam com as identidades graduadas de UJ_n.

3.3 Identidades graduadas de UJ_n

Nesta seção investigamos o papel das identidades polinomiais graduadas na diferenciação entre as graduações possíveis da álgebra de Jordan UJ_n. Após estabelecer, nas seções anteriores, a classificação das graduações em termos das famílias elementares e MT, voltamos a atenção para a análise das identidades graduadas que cada uma delas satisfaz. Nosso objetivo aqui é compreender em que medida essas identidades refletem na estrutura graduada de UJ_n.

Mostraremos então que graduações não isomorfas dão origem a conjuntos distintos de identidades graduadas, de modo que tais identidades se revelam uma ferramenta eficaz para distinguir tais classes de álgebras. Em particular, veremos que certas identidades dependem dos parâmetros que definem a graduação, como a presença de um elemento homogêneo cujo grau é de ordem 2, no caso MT, ou a disposição da sequência associada às graduações elementares. Por fim, apresentaremos que, quando duas graduações são isomorfas, seus conjuntos de identidades graduadas necessariamente coincidem.

Assumamos que $A_1 = (UJ_n, t_1, \eta)$ é uma graduação MT. Além disso, assumamos ainda que $A_2 = (UJ_n, t_2, \tilde{\eta})$ é uma graduação MT com $t_1 \neq t_2$ ou $A_2 = (UJ_n, \tilde{\tilde{\eta}})$ é uma graduação elementar. Então, devemos ter:

Lema 3.3.1. $f = \left(x_1^{(t_1)}\right)^n = \underbrace{x_1^{(t_1)} \circ \cdots \circ x_1^{(t_1)}}_{n-\text{vezes}}$ *é uma identidade graduada para A_2, mas não é para A_1.*

Demonstração. Provemos que f não é identidade graduada para A_1. Pela Definição 2.2.7, temos

$$\deg(e_2) = \deg(E_{1,1} - E_{n,n}) = t_1.$$

Desta maneira, devemos ter que

$$f(e_2) = \underbrace{e_2 \circ e_2 \circ \cdots \circ e_2}_{n-\text{vezes}} = \underbrace{e_2 e_2 \cdots e_2}_{n-\text{vezes}} = E_{1,1} + (-1)^n E_{n,n} \neq 0,$$

isto é, f não é identidade graduada para A_1.

Agora, vamos supor que $A_2 = (UJ_n, \tilde{\tilde{\eta}})$ e mostremos que f é um identidade graduada para A_2. Seja J o ideal das matrizes estritamente triangulares superiores de UJ_n. Pelo Lema 2.1.2, todas as matrizes diagonais $E_{i,i}$ são homogêneas de grau 1. Logo, se $a \in A_2$ é homogêneo de grau t_1 com

$t_1 \neq 1$, então a tem componente diagonal nula. Segue-se que $a \in J$. Como $J^n = 0$, todo produto de n elementos de J é nulo. Desta maneira,

$$f(a) = a^n = \underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n-\text{vezes}} = 0.$$

Assim, f é uma identidade graduada para A_2.

Por fim, suponhamos que $A_2 = (UJ_n, t_2, \tilde{\eta})$ é uma graduação MT com $t_1 \neq t_2$ e provemos que f é um identidade graduada para A_2. Pelo Lema 2.2.5, em uma graduação MT todas as componentes diagonais $Y_{i:0}^{(+)}$ possuem grau 1, e todas $Y_{i:0}^{(-)}$ possuem grau exatamente t_2. Assim, os únicos graus possíveis na parte diagonal são 1 e t_2. Seja agora $a \in A_2$ homogêneo tal que $\deg(a) = t_1$. Como $t_1 \notin \{1, t_2\}$, segue-se que a tem componente diagonal nula. Logo, $a \in J$, e de maneira análoga ao caso anterior, temos

$$f(a) = a^n = \underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n-\text{vezes}} = 0.$$

Desta maneira, f é identidade graduada para A_2 sempre que $t_1 \neq t_2$. □

Agora, vamos considerar $A_1 = (UJ_n, t, \eta)$ e $A_2 = (UJ_n, t, \tilde{\eta})$, e assumamos que $A_1 \ncong A_2$. Usemos também as notações da demonstração do Lema 2.2.15. Então, sendo $\varphi \colon G \to G_0$ a projeção canônica onde $G_0 = {}^{G}\!/\!_{\langle t \rangle}$, denotemos as graduações elementares induzidas de A_1 e A_2 com respeito a φ por $\overline{A}_1 = (UJ_n, \eta_0)$ e $\overline{A}_2 = (UJ_n, \tilde{\eta}_0)$, respectivamente. Desta maneira, obtemos o seguinte resultado:

Lema 3.3.2. *Sejam $A_1 = (UJ_n, t, \eta)$ e $A_2 = (UJ_n, t, \tilde{\eta})$ tais que $A_1 \ncong A_2$. Tem-se*

(a) Se $\eta_0 \neq \tilde{\eta}_0$, então existe um polinômio $f\left(x_1^{(\bar{h}_1)}, x_2^{(\bar{h}_2)}, \ldots, x_m^{(\bar{h}_m)}\right)$ que é identidade graduada para $\overline{A}_2$ mas não é para $\overline{A}_1$, ou contrário. Em particular,

$$g\left(x_1^{(h_1)}, x_1^{(h_1 t)}, \ldots, x_m^{(h_m)}, x_m^{(h_m t)}\right) = f\left(x_1^{(h_1)} + x_1^{(h_1 t)}, \ldots, x_m^{(h_m)} + x_m^{(h_m t)}\right)$$

é identidade graduada para A_2 mas não é para A_1.

(b) Se $\eta_0 = \tilde{\eta}_0$, então o polinômio

$$f = z_1^{(1)} \circ z_2^{(2)} \circ \cdots \circ z_q^{(q)} \circ z_{q-1}^{(q+1)} \circ \cdots \circ z_1^{(n-1)},$$

onde $z_i^{(j)} = (x_{3j-2}^{(1)}, x_{3j-1}^{(1)}, x_{3j}^{(g_i)})$, é uma identidade graduada para A_2 mas não é para A_1.

Demonstração. (*a*) Suponhamos $\eta_0 \neq \tilde{\eta}_0$. Pelo Lema 2.1.19, segue-se que $\mathfrak{T}_{n-1}\eta_0 \neq \mathfrak{T}_{n-1}\tilde{\eta}_0$. Sem perda de generalidade, existe $\sigma \in \mathfrak{T}_{n-1}$ tal que

$$\mu := \sigma\eta_0 \in \mathfrak{T}_{n-1}\eta_0 \ \text{ mas } \ \mu \notin \mathfrak{T}_{n-1}\tilde{\eta}_0.$$

Pelo Lema 2.1.17, segue-se que μ é η_0-boa Jordan e $\tilde{\eta}_0$-ruim Jordan. Portanto, pelo Lema 2.1.16, f_μ é identidade G_0-graduada para $\overline{A}_2$ mas não é para $\overline{A}_1$, onde f_μ é o polinômio graduado introduzido na Definição 2.1.13. Escrevamos

$$f_\mu = f_\mu\left(x_1^{(\bar{h}_1)}, x_2^{(\bar{h}_2)}, \ldots, x_m^{(\bar{h}_m)}\right),$$

onde $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_m \in G_0$. Notemos que apenas explicitamos as variáveis do polinômio.

Como $\overline{h_i} = \{h_i, th_i\}$, segue-se que

$$(\overline{A_1})_{\overline{h_i}} = (A_1)_{h_i} \oplus (A_1)_{th_i} \ \text{ e } \ (\overline{A_2})_{\overline{h_i}} = (A_2)_{h_i} \oplus (A_2)_{th_i}.$$

Logo,

$$g\left(x_1^{(h_1)}, x_1^{(h_1 t)}, \ldots, x_m^{(h_m)}, x_m^{(h_m t)}\right) = f_\mu\left(x_1^{(h_1)} + x_1^{(h_1 t)}, \ldots, x_m^{(h_m)} + x_m^{(h_m t)}\right)$$

é identidade G-graduada para A_2 mas não é para A_1.

(*b*) Suponhamos agora $\eta_0 = \tilde{\eta}_0$. Decorre do Lema 2.2.15 que n é par, digamos $n = 2q$, e que, a menos de isomorfismo graduado, as sequências associadas às graduações MT podem ser escritas como

$$\eta = (g_1, \ldots, g_{q-1}, g_q) \quad \text{e} \quad \tilde{\eta} = (g_1, \ldots, g_{q-1}, \tilde{g}_q)$$

com

$$g_q \neq \tilde{g}_q, \qquad \tilde{g}_q = g_q t.$$

Consideremos o polinômio

$$f = z_1^{(1)} \circ z_2^{(2)} \circ \cdots \circ z_q^{(q)} \circ z_{q-1}^{(q+1)} \circ \cdots \circ z_1^{(n-1)}$$

onde $z_i^{(j)} = (x_{3j-2}^{(1)}, x_{3j-1}^{(1)}, x_{3j}^{(g_i)})$. Com o raciocínio parecido ao Lema 2.1.16, temos

$$f \notin T_G(A_1) \quad \text{e} \quad f \in T_G(A_2),$$

como queríamos demonstrar. □

Com a classificação estrutural estabelecida no Teorema 3.2.12, podemos agora perguntar até que ponto duas graduações distintas de UJ_n podem compartilhar as mesmas identidades graduadas. Os Lemas 3.3.1 e 3.3.2 mostram explicitamente como construir polinômios que se anulam numa determinada graduação, mas em outra não, sempre que elas não forem isomorfas como álgebras graduadas.

O teorema a seguir é o segundo e último resultado principal deste trabalho e formaliza essa correspondência citada mostrando que o conjunto de identidades graduadas determina completamente a graduação de UJ_n.

Teorema 3.3.3. *Sejam A_1 e A_2 duas G-graduações de UJ_n. Então, $A_1 \cong A_2$ (como álgebras graduadas) se, e somente se, $T_G(A_1) = T_G(A_2)$.*

Demonstração. Assumamos que existe um isomorfismo graduado $\varphi\colon A_1 \to A_2$ e consideremos um polinômio graduado

$$f = f\left(x_{i_1}^{(g_1)}, x_{i_2}^{(g_2)}, \ldots, x_{i_m}^{(g_m)}\right).$$

Suponhamos que $f \in T_G(A_1)$. Então, devemos ter

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0$$

para quaisquer $a_j \in (A_1)_{(g_j)}$. Como φ é um isomorfismo graduado, temos

$$0 = \varphi(0) = \varphi\Big(f(a_1, a_2, \ldots, a_m)\Big) = f\Big(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_m)\Big).$$

Como cada $\varphi(a_j) \in (A_2)_{(g_j)}$, segue-se que f é identidade graduada para A_2, isto é, $f \in T_G(A_2)$. Aplicando o mesmo argumento para $\varphi^{-1}\colon A_2 \to A_1$ e $f \in T_G(A_2)$ obtemos $f \in T_G(A_1)$.

Logo, temos

$$T_G(A_1) \subseteq T_G(A_2) \quad \text{e} \quad T_G(A_2) \subseteq T_G(A_1)$$

e assim, obtemos

$$T_G(A_1) = T_G(A_2).$$

Por outro lado, suponhamos agora que $A_1 \ncong A_2$. Pelo Teorema 3.2.12, toda G-graduação de UJ_n é, a menos de isomorfismo graduado, a elementar ou a MT. Desta maneira, basta verificarmos os seguintes casos:

1. $A_1 = (UJ_n, t, \eta)$ é a MT e $A_2 = (UJ_n, \tilde{\eta})$ é a elementar;

2. $A_1 = (UJ_n, \eta)$ e $A_2 = (UJ_n, \tilde{\eta})$ são elementares;

3. $A_1 = (UJ_n, t_1, \eta)$ e $A_2 = (UJ_n, t_2, \tilde{\eta})$ são MT, com subcasos:

   (a) $t_1 \neq t_2$,

   (b) $t_1 = t_2 = t$.

No caso 1, segue-se do Lema 3.3.1 que $T_G(A_1) \neq T_G(A_2)$.

Já no caso 2, pelo Teorema 2.1.22, as graduações elementares são classificadas pelas sequências η e $\tilde{\eta}$. Se $A_1 \ncong A_2$ então $\eta \not\sim \tilde{\eta}$. Pelos Lemas 2.1.17 e 2.1.16, existe uma sequência μ tal que o polinômio graduado f_μ é identidade graduada para A_2 mas não é para A_1, ou o contrário. Isto é, obtemos $f_\mu \notin T_G(A_1)$ e $f_\mu \in T_G(A_2)$. Logo, temos novamente $T_G(A_1) \neq T_G(A_2)$.

Agora, para o caso 3 (a), segue-se do Lema 3.3.1 que $T_G(A_1) \neq T_G(A_2)$. No caso 3 (b), pelo Lema 3.3.2, obtemos $T_G(A_1) \neq T_G(A_2)$.

Portanto, se $T_G(A_1) = T_G(A_2)$ então $A_1 \cong A_2$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Posto isto, o resultado acima finaliza o estudo das relações de identidades graduadas de UJ_n, ao evidenciar que as graduações elementares e MT podem ser distinguidas por meio das identidades polinomiais que satisfazem. Em outras palavras, além de serem estruturalmente diferentes, como estabelecido no Teorema 3.2.12, também exibem comportamentos incompatíveis entre si, o que reforça a profundidade da distinção entre elas.

O Teorema 3.3.3, por sua vez, completa essa separação conceitual ao mostrar que o conjunto de identidades graduadas determina, de forma precisa, a classe de graduação correspondente. Isso fornece uma caracterização elegante e robusta da classificação das graduações de UJ_n: duas graduações são isomorfas se, e somente se, satisfazem exatamente as mesmas identidades graduadas. Assim, estabelece-se uma correspondência natural e completa entre a estrutura graduada e o comportamento da álgebra.

Apesar disso, o problema clássico de descrever explicitamente todas as identidades polinomiais de UJ_n, para $n \geqslant 3$, permanece aberto. Embora não apresentamos uma resposta positiva neste trabalho para esse problema, cuja complexidade é bem reconhecida na literatura, os resultados apresentados aqui sugerem que a abordagem via graduações pode oferecer pistas relevantes para a compreensão futura do conjunto gerador das identidades polinomiais de UJ_n e torna-se uma ferramenta útil para esclarecer esse cenário. Em particular, os polinômios graduados revelam padrões estruturais que podem se mostrar relevantes para compreender a formação desse conjunto gerador de identidades polinomiais para UJ_n, no caso geral.

Como ainda se conhece relativamente pouco sobre o comportamento das identidades polinomiais da álgebra UJ_n, para $n \geqslant 3$, o estudo realizado nesta dissertação buscou consolidar e sistematizar os resultados existentes, organizando-os de maneira unificada e destacando suas interações. Ao analisar em detalhes tanto a estrutura das graduações quanto seu impacto sobre o comportamento das identidades polinomiais, esta dissertação contribui para uma compreensão mais ampla de uma teoria recente e ainda em desenvolvimento.

Referências Bibliográficas

[1] BEIDAR, K.I.; BREŠAR, M; CHEBOTAR, M.A. Jordan isomorphisms of triangular matrix algebras over a connected commutative ring. **Linear Algebra and its Applications**, v.312, n.1, p.197–201, 2000.

[2] BRANDÃO JÚNIOR, A. P. **Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas**. 2006. 70 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2006.

[3] BUENO, H. P. **Álgebra Linear - um segundo curso**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. ISBN 9788585818319.

[4] CENTRONE, L.; MARTINO, F. A note on cocharacter sequence of Jordan upper triangular matrix algebra, **Communications in Algebra**, v. 45, n. 4, p. 1687-1695, 2017.

[5] DI VINCENZO, O. M.; KOSHLUKOV, P.; LA SCALA, R. Involutions for upper triangular matrix algebras. **Advances in Applied Mathematics**, v. 37, n. 4, p. 541–568, 2006.

[6] DI VINCENZO, O. M.; KOSHLUKOV, P; VALENTI, A. Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities. **Journal of Algebra**, v. 275, n. 2, p. 550-566, 2004.

[7] DRENSKY, V. **Free Algebras and PI-Algebras**. Graduate Course in Algebra, Singapore: Springer-Verlag, 2000. ISBN 981-4021-48-2.

[8] GARCIA, A. LEQUIAN, Y. **Elementos de Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2022. ISBN 978-65-89124-10-8

[9] GONÇALVES, D. J.; KOSHLUKOV, P.; SALOMÃO, M. E. Polynomial identities for the Jordan algebra of 2×2 upper triangular matrices. **Journal of Algebra**, v. 593, p. 477-506, 2022.

[10] GONÇALVES, D. J.; RIVA, E. Graded polynomial identities for the upper triangular matrix algebra over a finite field. **Journal of Algebra**, v. 559, p. 625-645, 2020.

[11] GONÇALVES, D. J.; SALOMÃO, M. E. Graded polynomial identities for the Jordan algebra of 2×2 upper triangular matrices. **Linear Algebra and its Applications**, v. 708, p. 61-92, 2025.

[12] KEMER A. R. Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras. **Mathematics of the USSR-Izvestiya**, v. 25, p. 359–374, 1985.

[13] KEMER A. R. Finite basis property of identities of associative algebras. **Algebra and Logic**, v. 26, p. 362–397, 1987.

[14] KOSHLUKOV, P.; MARTINO, F. Polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices of order 2. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 216, n. 11, p. 2524–2532, 2012.

[15] KOSHLUKOV, P.; YASUMURA, F. Y. Group gradings on the Jordan algebra of upper triangular matrices. **Linear Algebra and its Applications**, v. 534, p. 1–12, 2017.

[16] KUNZE, R.; HOFFMAN, K. **Linear Algebra**. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004. ISBN 978-0135367971

[17] MORAIS, P.; SALOMÃO, E. M.; SOUZA, M. S. A Lie algebra over a finite field of characteristic 2: Graded polynomial identities and Specht property. **Journal of Algebra**, v. 369, p. 228-248, 2024.

[18] MORAIS, P.; SOUZA, M. S. The algebra of 2×2 upper triangular matrices as a commutative algebra: Gradings, graded polynomial identities and Specht property. **Journal of Algebra**, v. 593, p. 217-234, 2022.

[19] SALOMÃO, M. E. **Identidades polinomiais para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores** 2×2. 2021. 99 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2021.

[20] SILVA, D. C. **Identidades e polinômios centrais com involução para a álgebra de Grassmann e álgebra das matrizes triangulares de ordem 3**. 2020. 93 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2020.

[21] VALENTI, A.; ZAICEV, M. V. Group gradings on upper triangular matrices. **Archiv der Mathematik**, v. 89, n. 1, p. 33–40, 2007.

[22] WALL, C.T.C. Graded Brauer groups. **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik**, v. 213, p. 187–199, 1964.

[23] YASUMURA, F. Y.; HITOMI, E. A. On the combinatorics of commutators of Lie algebras. **Journal of Algebra and Its Applications**, v. 19, n. 6, p. 1950025, 2020.

[24] ZHEVLAKOV, K. A; SLIN'KO A. M.; SHESTAKOV, I.P.; SHIRSHOV, A. I. **Rings that are nearly associative**. New York-London, Academic Press, 1982.