



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS



LUCIANA DOS SANTOS SIMÕES

**RADIOATIVIDADE E DATAÇÃO POR  
CARBONO-14: UMA PROPOSTA  
DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO  
EXPONENCIAL**

SOROCABA

FEVEREIRO DE 2025



Luciana dos Santos Simões

**Radioatividade e datação por carbono-14: Uma  
proposta didática para o ensino da função  
exponencial**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação da Professora Doutora Ana Cristina de Oliveira Mereu.

Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientadora: Ana Cristina de Oliveira Mereu

Sorocaba  
Fevereiro de 2025

Luciana dos Santos Simões

Radioatividade e datação por carbono-14: Uma proposta didática para o ensino da função exponencial/ Luciana dos Santos Simões. – Sorocaba, Fevereiro de 2025-103p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientadora: Ana Cristina de Oliveira Mereu

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas , Fevereiro de 2025.

1. Equações diferenciais ordinárias 2. Modelos atômicos 3. Datação por carbono-14 I. Ana Cristina de Oliveira Mereu II. Universidade Federal de São Carlos



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

---

## Folha de Aprovação

---

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Luciana dos Santos Simões, realizada em 20/02/2025.

### Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu (UFSCar)

Prof. Dr. Iris de Oliveira Zeli (ITA)

Profa. Dra. Adriana de Oliveira Delgado Silva (UFSCar)



Dedico este trabalho para minha família que me apoia e me compreende nas minhas decisões, para todos aqueles que acreditaram e me incentivaram em mais esta conquista, ao meu filho Augusto dos Santos Simões, à quem faço de tudo para ser um bom exemplo.



# Agradecimentos

Em todas as circunstâncias, dai graças, porque esta é a vosso respeito a vontade de Deus em Jesus Cristo. (1 Tessalonicenses 5:18).

Acima de tudo agradeço à Deus que me sustenta e me fortalece a cada dia.

Agradeço à querida e amável professora Ana Cristina de Oliveira Mereu, que desde a graduação sempre foi dedicada aos seus alunos e nesta fase, como minha orientadora, não foi diferente.

À todos os professores do PPGECE, Antonio Luís Venezuela, Graciele Paraguaia Silveira, Magda da Silva Peixoto, Paulo Cesar Oliveira, Sadao Massago, Sílvia Maria Carvalho Simões, Rogério Fernando Pires e mais uma vez Ana Cristina de Oliveira Mereu, que se empenharam em aprender novas maneiras de transmitir o conhecimento naquele terrível momento de incertezas e medo, que foi da pandemia COVID-19. E graças à Deus pela conservação da vida de cada um.

Aos colegas de curso, que colaboraram com meus estudos e sempre transmitindo mensagens de ânimo e motivação.

Ao diretor Alan Aparecido Gomes, da Escola Estadual Professor Pedro Augusto Rangel Filho, que me apoiou e colaborou para que me mantivesse trabalhando e estudando.

À minha família, que reza e confia em mim e sempre me dá o suporte necessário para continuar a caminhada.

Em especial, agradeço ao meu marido e meu Anjo Cláudio, que cuida de mim e pacientemente espera pelo momento em que posso lhe dar atenção.



*“Felizes aqueles cuja vida é pura, e segue a Lei do Senhor. Felizes os que guardam com esmero seus preceitos e o procuram de todo o coração; e os que não praticam o mal, mas andam em seus caminhos”*  
*(Salmo 118/119)*



# Resumo

As aplicações das equações diferenciais estão em diversos campos de pesquisa, como física, química, biologia e tantos outros que estejam interessados em modelar e resolver problemas que demandam condições que variam com o tempo. A par disto, o objetivo desta dissertação foi estudar a solução da equação diferencial ordinária (EDO) de 1ª ordem que envolve uma função exponencial e relacionar o ensino desta função às aulas do Ensino Médio. Para isso, o estudo se baseou no método de datação por decaimento radioativo do átomo de carbono-14, em que a solução da EDO é empregada. Com esse direcionamento, as pesquisas se voltaram para a história e definição do átomo; dos modelos atômicos; da radioatividade em suas aplicações e consequências, chegando no caso de datação de um fóssil humano encontrado há mais de 30 anos e conhecido por “Ötzi, o homem do gelo”. Deste, partiu-se para uma proposta de ensino em que se aplicasse a função exponencial desejada. Tendo o assunto datação por carbono-14 envolvido várias áreas do conhecimento, buscou-se elaborar um projeto interdisciplinar com ponto de partida no caso de “Ötzi”. Cada disciplina envolvida no projeto, explorará uma linha de interesse. Para a matemática, foi sugerido uma atividade de experimentação que explica a condição probabilística da desintegração dos átomos e a construção de um gráfico da função exponencial à que se refere, e uma atividade de resolução de problemas para a determinação da idade do fóssil e a quantidade de carbono-14 existente no momento da sua datação, através da resolução por função exponencial. O produto educacional, estruturado como um modelo de ensino, foi apresentado como experimento sem a participação de alunos, mas com potencial para ser implementado em práticas pedagógicas.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais ordinárias, modelos atômicos, radioatividade, decaimento radioativo, datação por carbono-14, função exponencial, interdisciplinar.



# Abstract

The applications of differential equations span various fields of research, including physics, chemistry, biology, and many others that involve modeling and solving problems with conditions that vary over time. In this context, the aim of this dissertation is to study the solution of first-order ordinary differential equations (ODEs) involving exponential functions and to relate the teaching of this concept to high school students. To achieve this, the study is based on the dating method using the radioactive decay of carbon-14, where the solution of the ODE plays a key role. Thus, the research explores the history and definition of the atom, atomic models, and the applications and consequences of radioactivity, culminating in the dating of a human fossil discovered over 30 years ago, known as “Ötzi, the Iceman.” From this foundation, a teaching proposal is developed, applying the exponential function to an interdisciplinary project inspired by the case of “Ötzi”. Each discipline involved in the project will explore a line of interest. In mathematics, an experimental activity is proposed to illustrate the probabilistic nature of atomic decay, along with the construction of a graph of the related exponential function. Additionally, a problem-solving activity is included to determine the age of the fossil and the amount of carbon-14 present at the time of its dating using an exponential function. The educational product, structured as a teaching model, was presented as an experiment without student participation but has the potential to be implemented in classroom teaching practices.

**Keywords:** Ordinary differential equations, atomic models, radioactivity, radioactive decay, carbon-14 dating, exponential function, interdisciplinary.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>	<b>21</b>
2.1	Definição e Classificação das Equações Diferenciais	21
2.2	Soluções	24
2.3	Equações Diferenciais de Primeira Ordem	25
2.3.1	Equações separáveis	26
2.3.2	Equações lineares: Método dos Fatores Integrantes	28
2.4	Existência e Unicidade de Soluções	30
<b>3</b>	<b>ESTUDOS DO ÁTOMO E DA RADIOATIVIDADE</b>	<b>35</b>
3.1	Evolução do Modelo Atômico	35
3.2	Descoberta e propriedades da radioatividade	47
3.2.1	Definições	47
3.2.2	A descoberta da radioatividade	50
3.2.3	Malefícios e benefícios do uso da radioatividade	53
3.3	Datação por Carbono-14	56
3.3.1	O que é o carbono-14 e como ele é utilizado para a datação de artefatos arqueológicos, fósseis e pinturas?	57
3.3.2	Tempo de meia-vida	58
3.3.3	Métodos de datação por carbono-14	59
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO DA EDO A UM CASO REAL: “ÖTZI, O HOMEM DO GELO”</b>	<b>61</b>
4.1	A história e a idade de “Ötzi, o homem do gelo”	61
4.1.1	Descobrimo há quanto tempo Ötzi viveu - Datação por carbono-14	67
<b>5</b>	<b>PRODUTO EDUCACIONAL: APLICAÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL PARA A DATAÇÃO POR CARBONO-14 POR MEIO DE PROJETO INTERDISCIPLINAR</b>	<b>69</b>

<b>5.1</b>	<b>Projeto Interdisciplinar</b> . . . . .	<b>71</b>
5.1.1	Plano de aula individual do Projeto Interdisciplinar - Matemática . .	78
5.1.1.1	Parte I - Experimento com moedas: representação do decaimento radioativo	78
5.1.1.2	Parte II - Aplicação dos problema: "Ötzi, o Homem do Gelo. Quão antigo ele é?" . . . . .	80
5.1.2	Tabelas e gráficos do experimento decaimento radioativo com as moedas . . . . .	81
5.1.3	Resolução dos problemas: "Ötzi, o Homem do Gelo. Quão antigo ele é?" . . . . .	82
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>91</b>
	<b>APÊNDICE A – FIGURAS</b> . . . . .	<b>95</b>
	<b>APÊNDICE B – INFORMAÇÕES QUÍMICAS DOS ÁTOMOS</b> . .	<b>101</b>

# 1 Introdução

A matemática fornece ferramentas para o homem desvendar, conhecer, compreender e explorar o universo e tudo que nele se encontra. Dentre tantas, as equações diferenciais se destacam ao tratar de problemas reais que envolvem condições que variam com o tempo, tais como, condução do calor, propagação de onda, etc (BOYCE W. E.; DIPRIMA, 2020). Em especial, a equação diferencial ordinária (EDO) de 1ª ordem modela e permite resolver um problema de grande interesse arqueológico e por vezes financeiro, como o caso de datar fósseis ou descobrir a legitimidade de obras primas. Contudo, muitos se espantam ao ouvirem dizer que determinado objeto tem milhares de anos, ou ainda, tal fóssil viveu há outros tantos milhares de anos. Mas, como é possível inferir tais datas se ninguém estava lá para comprovar? Como garantir que isso é verdade?

Quando pensamos em estudar equações diferenciais ordinárias, já tínhamos em mente que iríamos relacionar soluções de uma EDO com o ensino da função exponencial no Ensino Médio, no entanto, como isso ocorreria ainda não fazíamos ideia. No decorrer dos estudos surgiu o assunto da datação de organismos por decaimento radioativo do carbono-14.

Considerando que a EDO modela o problema de decaimento radioativo e sua solução recai em uma função exponencial, o interesse pelo assunto foi imediato, devido inclusive, às indagações já citadas de como poderíamos saber há quanto tempo algum organismo tinha morrido, ou como poderia verificar a legitimidade de uma obra de arte.

Com o avanço dos estudos, conseguimos vislumbrar a relação do conteúdo com as várias disciplinas do Ensino Médio, ainda mais quando nos deparamos com um dos mais famosos achados arqueológicos da história, “Ötzi, o homem do gelo”, um fóssil encontrado em uma geleira da Áustria no ano de 1991. Consequentemente, pensamos em uma proposta de um projeto interdisciplinar. Deste modo, conseguimos associar o estudo da EDO e sua solução com o ensino da função exponencial no Ensino Médio e elaborar um produto educacional relevante,

que vai ao encontro das diretrizes dos documentos orientadores da educação estadual e nacional, que era o nosso objetivo. Além disso, essa proposta, trouxe um tema de grande importância para a sociedade, visto que os estudos acerca desse fóssil revelaram muitas características de povos antigos e suas vivências.

Assim, para a elaboração deste trabalho, começamos estudando uma introdução sobre equações diferenciais, sua classificação em equação diferencial ordinária (EDO) e parcial (EDP), classificação quanto sua linearidade, bem como métodos de resolução e condição de Existência e Unicidade de Soluções, que se encontram no Capítulo 2.

No Capítulo 3, discorremos a respeito dos átomos sob uma perspectiva histórica e de conhecimento químico e físico, visto que, a datação por carbono-14 acontece a partir da desintegração desse átomo devido a sua radioatividade e mencionamos alguns malefícios e benefícios decorrentes do seu uso. Apresentamos a definição e a história da radioatividade, a partir de cientistas que se envolveram em pesquisas e grandes descobertas fundamentais para o conhecimento científico. Alguns pormenores sobre a datação por carbono-14, tais como, apresentação dos isótopos de carbono, como se dá sua utilização para a datação de artefatos arqueológicos, seu de tempo de meia-vida e métodos de datação por carbono-14, também se encontram nesse capítulo.

Após os estudos acima citados, chegou o momento de relacionar as equações diferenciais ordinárias (EDOs) e a função exponencial para se alcançar o objetivo inicial, e isso ocorre no Capítulo 4, ao apresentar a história de Ötzi.

No Capítulo 5, trazemos um produto educacional que é um projeto interdisciplinar baseado em Ötzi, visando atender as sugestões e anseios propostos nos documentos norteadores da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEESP) e do Ministério da Educação e Cultura (MEC).

A implementação desse projeto educacional enriqueceria muito mais nosso trabalho, todavia, ficou como proposta para futuros estudos e/ou sugestão de aplicação à quem possa interessar, inclusive à nós mesmas.

As considerações finais do trabalho se encontram no Capítulo 6. No decorrer da dissertação, algumas explicações com mais detalhes e figuras foram inseridas

em *hyperlinks* e se situam no Apêndice A.

Para finalizar, temos a seção das referências e o Apêndice B que aborda algumas informações químicas importantes dos átomos.



## 2 Equações Diferenciais

Equações Diferenciais (ED) surgem a partir da modelagem de algum problema real, seja de um fenômeno físico, social ou natural. São equações que envolvem uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas, visto que esses tipos de modelos descrevem valores que variam com o tempo.

Assim, neste capítulo estudamos a definição de equações diferenciais e alguns de seus principais conceitos, à saber, classificação por tipo, ordem e quanto a linearidade, bem como, equação diferencial ordinária de 1ª ordem, métodos de resolução e o teorema da existência e unicidade de soluções. Para estes estudos nos baseamos nas referências (BOYCE W. E.; DIPRIMA, 2020), (STEWART, 2013).

### 2.1 Definição e Classificação das Equações Diferenciais

**Definição 2.1.** Uma equação que contém as derivadas de uma variável dependente em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de Equação Diferencial.

#### **Classificação por tipo**

Uma equação diferencial pode ser classificada como Equação Diferencial Ordinária - EDO ou Equação Diferencial Parcial - EDP.

**Equação Diferencial Ordinária - EDO** é uma equação diferencial em que a função desconhecida depende apenas de uma variável independente, assim, as derivadas envolvidas são simples, ou seja, são derivadas em relação a esta única variável.

**Equação Diferencial Parcial - EDP** é uma equação diferencial em que a função desconhecida depende de duas ou mais variáveis independentes, logo, as derivadas serão parciais, em relação a cada variável.

**Exemplo 2.2.** Exemplos de classificação por tipo

- i)* A equação diferencial  $y - y' = 0$  é ordinária, a função desconhecida é  $y$  e a equação envolve apenas a função  $y$  e sua 1ª derivada (ou derivada de 1ª ordem).
- ii)* A equação  $x^2y'' - (\ln x)y = x^3$  é uma EDO, a função desconhecida é  $y$  que depende apenas da variável independente  $x$ . A equação envolve a função  $y$  e sua 2ª derivada.
- iii)* A equação  $(1 + y^2)y'' + ty' + 2y = e^t$  é uma EDO, a função desconhecida é  $y$ , que depende apenas da variável independente  $t$ , e envolve suas 1ª e 2ª derivadas (ou derivadas de 1ª e 2ª ordens).
- iv)* A equação diferencial  $\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450$ , em outra notação, é uma EDO, a função desconhecida é  $p$  e depende apenas da variável independente  $t$ . A equação envolve a função  $p$  e sua 1ª derivada (ou derivada de 1ª ordem).
- v)* A equação diferencial  $\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{d^7y}{dx^7} = -5$  é uma EDO, a função desconhecida é  $y$ , que depende apenas da variável independente  $x$  e a equação envolve a 5ª e a 7ª derivadas (ou derivadas de 5ª e 7ª ordens) da função.
- vi)* A equação do calor que descreve a condução do calor em um corpo sólido,  $\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ , é um exemplo de uma equação diferencial parcial (EDP), onde  $\alpha$  é uma constante física.
- vii)* A equação que descreve o movimento ondulatório em sólidos ou fluidos  $a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ , é um exemplo de uma equação diferencial parcial (EDP), onde  $a$  é uma constante física.

### Classificação por ordem

A **ordem** da equação diferencial ordinária é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação. Geralmente, uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  pode ser escrita como

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.1)$$

**Exemplo 2.3.** Exemplos de classificação por ordem

- i) A EDO  $y - y' = 0$ , é de 1ª ordem pois a derivada de maior ordem é a de 1ª ordem.
- ii) A EDO  $x^2 y'' - (\ln x)y = x^3$  é de 2ª ordem.
- iii) A EDO  $\frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{d^7 y}{dx^7} = -5$  é de 7ª ordem.
- iv) A EDO  $x^3 + (y^{(4)})^2$  é de 4ª ordem.

### Classificação quanto a linearidade

A equação diferencial ordinária (2.1), é chamada linear se  $F$  é uma função linear das variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . Assim, uma equação diferencial linear de ordem  $n$  pode ser escrita da forma:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t),$$

$a_i, i = 0, \dots, n$  e  $g$  são funções reais da variável  $t$ .

**Exemplo 2.4.** Exemplos EDOs lineares:

- i)  $y - y' = 0$ .
- ii)  $x^2 y'' - (\ln x)y = x^3$ .
- iii)  $\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450$ .
- iv)  $\frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{d^7 y}{dx^7} = -5$ .

**Exemplo 2.5.** Exemplos EDOs não lineares:

- i)  $(1 + y^2)y'' + ty' + 2y = e^t$ , não-linear, pois a variável dependente (função)  $y$  está elevada à 2 e multiplicando a 2ª derivada da própria função.

- ii)  $y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x$ , não-linear, pois, a função  $y$  (variável dependente) está multiplicando a derivada de 2ª ordem da própria função e a derivada de 1ª ordem  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$  está elevada à 2.

É importante que se classifique as EDs, principalmente para identificar se são lineares ou não, pois, os métodos de resolução de equações lineares são mais desenvolvidos e precisos do que das não-lineares. Há casos em que a partir de algum método de resolução, é possível encontrar suas soluções, em outros, apenas aproximá-las numericamente, e existem situações em que se pode fazer a linearização de equações não-lineares para se chegar a um resultado plausível, mas, este assunto não será tratado aqui.

## 2.2 Soluções

**Definição 2.6.** Uma solução da equação diferencial (2.1) no intervalo  $\alpha < t < \beta$  é uma função  $\varphi$  tal que  $\varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}$  existem e satisfazem

$$F(t, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) = 0,$$

para todo  $t$  em  $\alpha < t < \beta$ .

**Exemplo 2.7.** A função  $y(t) = te^t$  é uma solução para a EDO  $y'' - 2y' + y = 0$  em  $\mathbb{R}$ . De fato, calculemos  $y'$  e  $y''$ ,

$$y'(t) = e^t + te^t,$$

$$y'' = e^t + e^t + te^t = 2e^t + te^t.$$

Logo

$$y'' - 2y' + y = 2e^t + te^t - 2(e^t + te^t) + te^t = 0,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Na próxima seção veremos alguns métodos para encontrar soluções de EDOs de primeira ordem.

## 2.3 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser escrita na forma geral

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (2.2)$$

**Definição 2.8.** Uma *solução geral* de uma equação diferencial de primeira ordem é uma família a um parâmetro de soluções.

**Exemplo 2.9.** A equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{(t^2 + 9)^{1/2}} \quad (2.3)$$

pode ser resolvida por integração direta obtendo a solução geral

$$y(t) = \int \frac{t}{(t^2 + 9)^{1/2}} dt = (t^2 + 9)^{1/2} + c. \quad (2.4)$$

**Definição 2.10.** Um *problema de valor inicial* (PVI) consiste de uma equação diferencial junto com uma condição inicial.

Resolver um problema de valor inicial que envolve uma equação diferencial de primeira ordem (2.2) e uma condição inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.5)$$

é encontrar uma função diferenciável  $y = y(t)$  que satisfaça ambas as condições de (2.5), encontrando assim uma *solução particular* de (2.2).

**Exemplo 2.11.** A equação diferencial (2.3) junto a condição inicial  $y(4) = 2$  forma o PVI

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{(t^2 + 9)^{1/2}} \quad y(4) = 2. \quad (2.6)$$

A substituição  $t = 4$  e  $y = 2$  em (2.4) nos fornece  $2 = 5 + c$ , logo  $c = -3$ . Assim a solução particular do PVI (2.6) é

$$y(t) = (t^2 + 9)^{1/2} - 3.$$

Nesta seção, estudaremos dois métodos de resolução de EDOs de 1ª ordem. O primeiro é aplicável às equações separáveis e o segundo às equações lineares.

### 2.3.1 Equações separáveis

O método de resolução para equações separáveis é utilizado quando a EDO puder ser escrita da seguinte forma:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0, \quad (2.7)$$

onde  $M$  e  $N$  são funções que dependem apenas de  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A equação (2.7) é chamada separável pois quando escrita na forma diferencial

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (2.8)$$

as parcelas envolvendo cada variável podem ser separadas pelo sinal de igualdade. Assim, estando, ou organizando a equação para o formato da (2.8), com as variáveis separadas, ela pode ser resolvida integrando as funções  $M$  e  $N$ , em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente.

**Exemplo 2.12.** A EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \quad (2.9)$$

pode ser reescrita na forma

$$y^2 dy = x^2 dx, \quad (2.10)$$

isto é, a equação (2.9) pode ser escrita na forma (2.8) e é portanto separável.

Integrando ambos os lados em (2.10)

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx,$$

obtemos

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + c,$$

onde  $c$  é uma constante real arbitrária. Assim, podemos expressar a solução da EDO (2.9) por

$$y = \sqrt[3]{x^3 + k},$$

onde  $k = 3c$ .

**Exemplo 2.13.** A EDO

$$y' = x^2 y \tag{2.11}$$

é separável pois, supondo  $y \neq 0$ , pode ser reescrita por

$$\frac{dy}{y} = x^2 dx.$$

Integrando ambos os lados,

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

obtemos

$$\ln |y| = \frac{1}{3} x^3 + c \tag{2.12}$$

que é uma solução implícita de  $y$  em função de  $x$ . Aplicando a função exponencial em ambos os lados da equação (2.12) obtemos

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{x^3}{3} + c}.$$

Assim, usando uma das propriedades da potência,  $e^{\frac{x^3}{3} + c} = e^{\frac{x^3}{3}} e^c$ , temos

$$y = \pm e^{\frac{x^3}{3}} e^c.$$

Fazendo  $\pm e^c = k$  obtemos a solução geral da EDO (2.11)

$$y = k e^{\frac{x^3}{3}}.$$

### 2.3.2 Equações lineares: Método dos Fatores Integrantes

Uma equação diferencial linear de primeira ordem pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (2.13)$$

onde  $p$  e  $g$  são funções dadas.

Podemos utilizar o método dos fatores integrantes que consiste em multiplicar a equação (2.13) por uma função  $\mu(t)$ , escolhida de forma que a equação resultante seja facilmente integrável para encontrar a solução da EDO (2.13). A função  $\mu(t)$  é chamada *fator integrante*.

Para determinar um fator integrante apropriado, multiplicamos a equação (2.13) por uma função  $\mu(t)$ , obtendo

$$\mu(t)y' + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t). \quad (2.14)$$

A expressão  $\mu(t)y' + p(t)\mu(t)y$  é a derivada do produto  $\mu(t)y$ , desde que

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t).$$

Supondo que  $\mu(t)$  seja positiva, temos

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t).$$

Integrando os dois lados obtemos

$$\ln\mu(t) = \int p(t)dt + k.$$

Escolhendo  $k = 0$ , obtemos a função mais simples possível para  $\mu$ ,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}. \quad (2.15)$$

Voltando à equação (2.14), temos

$$\frac{d}{d(t)} [\mu(t)y(t)] = \mu(t)g(t).$$

Portanto,

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)g(t)dt + c,$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária. Assim a solução geral da equação (2.13) é

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left( \int \mu(t)g(t)dt + c \right).$$

**Exemplo 2.14.** Encontrar a solução geral da equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{3}}. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é uma EDO linear de primeira ordem que não conseguimos separar as variáveis. Assim vamos usar o método dos fatores integrantes para encontrar a solução geral. Temos que  $p(t) = \frac{1}{2}$  e portanto um fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{2}dt} = e^{\frac{t}{2}+c} = e^{\frac{t}{2}}e^c.$$

Escolhendo  $c = 0$  temos que um fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\frac{t}{2}}. \quad (2.17)$$

Agora, multiplicamos a (2.16) pelo fator integrante (2.17) obtendo

$$e^{\frac{t}{2}} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}y = \frac{1}{2}e^{\frac{5t}{6}}. \quad (2.18)$$

A expressão à esquerda da equação (2.18) é a derivada de  $e^{\frac{t}{2}}y$  (pela regra do produto).

Integrando  $\int (e^{\frac{t}{2}}y)' dt = \int \frac{1}{2}e^{\frac{5t}{6}} dt$ , obtemos

$$e^{\frac{t}{2}}y = \frac{3}{5}e^{\frac{5t}{6}} + c,$$

isto é,

$$y = \frac{\frac{3}{5}e^{\frac{5t}{6}} + c}{e^{\frac{t}{2}}}.$$

Portanto,

$$y = \frac{3}{5}e^{\frac{t}{3}} + ce^{-\frac{t}{2}}$$

é a solução geral da EDO (2.16).

## 2.4 Existência e Unicidade de Soluções

Na seção anterior vimos dois métodos para encontrar a solução geral de EDOs de primeira ordem, sendo o método da Separação de Variáveis e o do Fator Integrante.

Mas, como podemos saber se a equação tem solução, e se tiver, se ela é única? É importante que tenhamos condições de verificar a Existência e Unicidade de solução, para evitar desperdício de tempo em procurá-la. Portanto, nesta seção trataremos do Teorema da Existência e Unicidade de Solução para EDOs Lineares, porém, não vamos nos ater na sua demonstração. Para detalhes da demonstração veja (BOYCE W. E.; DIPRIMA, 2020) e (EDWARDS JR C. H.; PENNY, 1995).

**Teorema 2.15.** (EDWARDS JR C. H.; PENNY, 1995). *Suponha que a função  $f(t, y)$  a valores reais seja contínua em algum retângulo no plano contendo o ponto  $(t_0, y_0)$  em seu interior. Então o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

*tem pelo menos uma solução em algum intervalo aberto  $J$  contendo o ponto  $t = t_0$ . Se, além disso, a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é contínua neste retângulo, então a solução é única em algum intervalo  $J_0$  que contém o ponto  $t = t_0$ .*

**Exemplo 2.16.** O PVI

$$y' = \frac{1}{t}, \quad y(0) = 0,$$

não admite solução. De fato, a solução da EDO é

$$y(t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c,$$

$c$  constante real, que não está definida em  $t = 0$ . Portanto, ela não pode satisfazer a condição inicial  $y(0) = 0$ . Observe que a função  $f(t, y) = \frac{1}{t}$  não é contínua em

$t = 0$  (não está definida em  $t = 0$ ) portanto não contradiz o teorema da Existência e Unicidade.

**Exemplo 2.17.** O PVI

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

admite duas soluções diferentes definidas em  $\mathbb{R}$ . A função  $f(t, y) = 2\sqrt{y}$  é contínua sempre que  $y > 0$  mas a derivada  $\partial f/\partial y = 1/\sqrt{y}$  é descontínua em  $y = 0$ . Por isso é possível que existam duas soluções diferentes  $y_1(t) = t^2$  e  $y_2(t) = 0$  satisfazendo a condição inicial  $y(0) = 0$ . A primeira solução,  $y_1(t) = t^2$  é obtida pelo método de separação de variáveis

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2dt \Rightarrow 2\sqrt{y} = 2t + c \Rightarrow \sqrt{y} = t + \frac{c}{2}.$$

Como  $y(0) = 0$  temos que  $c = 0$  e  $\sqrt{y} = t$ , isto é,  $y(t) = t^2$ .

**Exemplo 2.18.** Considere a equação diferencial  $y' = -y$ . A função  $f(t, y) = -y$  e a derivada  $\partial f/\partial y = -1$  são contínuas em  $\mathbb{R}$ . Logo o Teorema 2.15 garante a Existência e Unicidade de solução para qualquer condição inicial  $(t_0, y_0)$ . Separando as variáveis e integrando, resolvemos essa equação diferencial obtendo a solução geral  $y(t) = ce^{-t}$ . Embora o Teorema 2.15 garanta a existência da solução em um intervalo aberto em torno de  $t = t_0$

Podemos escrever o Teorema de Existência e Unicidade 2.15 para o caso particular de PVI envolvendo equações diferenciais lineares de primeira ordem, que é o caso estudado neste trabalho.

**Teorema 2.19.** *Se as funções  $p$  e  $q$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ :  $\alpha < t < \beta$  contendo o ponto  $t = t_0$ , então existe uma única função  $\phi(t)$  que satisfaz a equação diferencial*

$$y' + p(t)y = g(t) \tag{2.19}$$

para cada  $t$  em  $I$  e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0 \tag{2.20}$$

em que  $y_0$  é um valor inicial arbitrário dado.

O Teorema nos garante que, se as funções  $p$  e  $q$  forem contínuas no intervalo  $I$  que contém o ponto  $t_0$  dado, então, existe e é única a função  $\phi$  que é solução do problema.

**Exemplo 2.20.** No PVI

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2, \quad (2.21)$$

temos

$$p(t) = \frac{2}{t} \quad \text{e} \quad q(t) = 4t.$$

Assim  $p$  é contínua para  $t > 0$  ou  $t < 0$ , enquanto  $q$  é contínua para todo  $t$  real. Porém, o intervalo que contém o ponto inicial  $t_0 = 1$ , é  $t > 0$ , logo, o intervalo em que ambas as funções são contínuas e que contém o ponto inicial é o  $t > 0$ . Portanto, pelo Teorema (2.19), o PVI (2.21) tem solução única no intervalo  $0 < t < \infty$ .

Caso o mesmo PVI, tenha a condição inicial alterada para  $y(-1) = 2$ , ou seja  $t_0 = -1$ , então, a solução estará no intervalo em  $t < 0$ , e pelo Teorema (2.19), a solução existe e é única no intervalo  $-\infty < t < 0$ .

**Exemplo 2.21.** No PVI

$$(t - 3)y' + (\ln t)y = 2t, \quad y(1) = 2, \quad (2.22)$$

temos

$$p(t) = \frac{\ln t}{t - 3} \quad \text{e} \quad q(t) = \frac{2t}{t - 3}.$$

A função  $p(t) = \frac{\ln t}{t - 3}$  é contínua em  $\{t \in \mathbb{R}; t > 0 \text{ e } t \neq 3\}$  pois a função  $\ln t$  é contínua em  $t > 0$  e como  $t - 3$  é o denominador de  $p(t)$  devemos ter  $t \neq 3$ .

A função  $q(t) = \frac{2t}{t - 3}$  é contínua em  $\{t \in \mathbb{R}; t \neq 3\}$ .

---

Assim o intervalo em que ambas as funções  $p(t)$  e  $q(t)$  são contínuas e que contém o ponto inicial é o intervalo  $0 < t < 3$ , portanto, pelo Teorema (2.19), o PVI tem solução única nesse intervalo.



## 3 Estudos do átomo e da radioatividade

Neste capítulo será apresentado o contexto histórico do átomo, sua descoberta e a evolução de seus modelos desde os primórdios até o momento presente, a definição de radioatividade, seu contexto histórico, descoberta, aplicações e efeitos. Os livros de referência para o estudo foram (VIDAL, 1986), (OKUNO; YOSHIMURA, 2016), (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012).

### 3.1 Evolução do Modelo Atômico

Até se chegar na descoberta do átomo como o concebemos nos dias de hoje, centenas de anos se passaram, e a evolução do pensamento sobre o assunto ocorreu de acordo com o desenvolvimento científico de cada época.

Historicamente, a constituição da matéria foi pensada originalmente pelos filósofos, como uma combinação dos quatro elementos: água, ar, fogo e terra.

No séc. VII a.C., o filósofo grego Tales de Mileto desvinculou as forças da natureza do divino e pensou o universo de forma racional. Sugerindo assim, que a água era o princípio do mundo, pois, como o líquido não tem forma, poderia se tornar todas as coisas da natureza.

Enquanto Anaximenes (por volta de 540 a.C.), adotou o ar como elemento de base.

Para Heráclito de Efésio (por volta de 540 a.C.) o fogo, era o elemento primordial, pela sua mobilidade e movimento ininterrupto, imaginou que tal elemento também poderia tomar a forma de todas as coisas.

O filósofo e matemático grego Pitágoras (metade do séc VI ao início do séc. V a.C.), considerava que as leis numéricas regiam todo o universo, inclusive constituía tudo o que nele existia.

O também filósofo e pensador <sup>1</sup> Empédocles (cerca de 485-425 a.C.) grego,

---

<sup>1</sup> Filósofo: ama a sabedoria, busca o conhecimento da realidade e do mundo que o cerca, apenas

reconheceu a pluralidade no princípio do Ser e associou os elementos fogo, ar, água e terra em proporções variáveis para dar origem à tudo que existe. Duas forças influenciariam na atração e na separação dos elementos: o amor e o ódio, respectivamente. Empédocles afirmava que eram divinos os quatro elementos, os quais chamou de raízes e as forças, de atração e separação.

Com a ideia de que se dividisse sucessivamente qualquer coisa em pedaços cada vez menores, se chegaria em um pedacinho tão pequenino que não seria mais possível fazer a divisão, os filósofos gregos Leucipo e Demócrito (cerca de 450-500 a.C.), chamaram de átomo essa menor parte indivisível constituinte da matéria, (á = não, tomo = divisível).

A partir do Renascimento na Europa, os átomos deixaram de ser apenas assunto dos filósofos e tomaram a atenção dos cientistas, passando a ser investigados de forma experimental.

De tal modo, o físico Roger Boscovich (1711-1787), tentou descrever o comportamento da matéria com base na existência dos átomos e através da elasticidade e flexibilidade.

Em 1808, o químico, meteorologista e físico John Dalton (1766-1844) (Figura 1) publicou seu modelo atômico, que ficou conhecido por “Modelo da Bola de Bilhar” (Figura 2). Segundo seus estudos, o átomo era uma esfera rígida, maciça, indestrutível, indivisível e homogênea. Ele diferenciava e identificava cada átomo pela sua massa específica, e defendia que os átomos não podiam ser criados ou destruídos, mas que se combinavam e se rearranjam em proporções fixas e simples para formar compostos. Porém, este modelo desconhecia a carga elétrica do átomo (ATKINS PETER; JONES, 2012).

Em 1897, o físico britânico Joseph John Thomson (1856-1940) (Figura 3) ao estudar os raios catódicos que eram produzidos no Tubo de Crookes, observou a existência de partículas de carga negativa - os elétrons - no átomo de gás. Assim, J.J. Thomson, elaborou o seu modelo atômico, que ficou conhecido por “Modelo Pudim de Passas”, que mantinha o átomo esférico e maciço de Dalton, mas agora

---

dentro de si mesmo. Pensador: busca o conhecimento a partir da sabedoria divina e é orientado pela fé.

Figura 1 – John Dalton



Fonte: Manual da Química. s.d. Disponível em <https://static.manualdaquimica.com/conteudo/images/gravura-1823-mostra-john-dalton-seu-equipamento-laboratorio-os-simbolos-quimicos-dalton-nos-papeis-sua-frente-542b1aac1d7c.jpg> Acesso em 13/11/2024

Figura 2 – Modelo atômico Bola de Bilhar

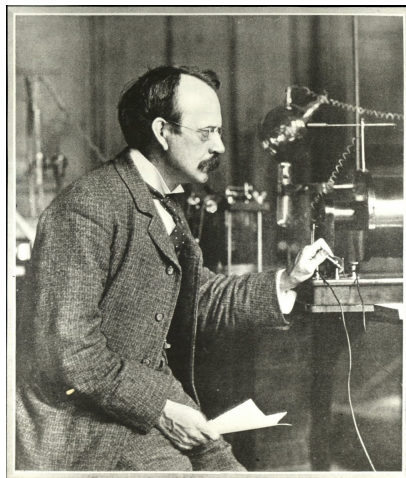


Fonte: Edisciplinas USP. s.d. Adaptado. Disponível em [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/8078006/mod\\_page/content/2/sdasaddsadsasdadadsdas%20%281%29.png](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/8078006/mod_page/content/2/sdasaddsadsasdadadsdas%20%281%29.png) Acesso em 13/11/2024

composto por massa de carga positiva encrustada por partículas de carga negativa, que preservava a neutralidade do átomo. Com esses estudos, Thomson recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1906, por investigar teórica e experimentalmente a passagem da eletricidade através de gases (ATKINS PETER; JONES, 2012), (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012), (TIPLER PAUL; MOSCA, 2014), (PROENÇA ROSA, 2012).

E apesar das tantas pesquisas e descobertas acerca do átomo, sua existência ainda não era comprovada e por muitos da comunidade científica, rejeitada.

Figura 3 – Joseph John Thomson



Fonte: Arts & Culture. s.d. Disponível em <https://artsandculture.google.com/entity/m0j68z?hl=pt>  
Acesso em 13/11/2024

Figura 4 – Modelo atômico Pudim de Passas



Fonte: Brasil Escola. s.d. Disponível em <https://s1.static.brasilecola.uol.com.br/be/2022/10/1-modelo-atomico-thomson.jpg>  
Acesso em 13/11/2024

Inclusive, lá em 1827, o botânico escocês Robert Brown (1773-1858) (Figura 5), ao observar em microscópio (Figura 6) grãos de pólen sobre a água, notou que eles se movimentavam de um lado para outro aleatoriamente. Inicialmente pensou que no pólen poderia haver algum organismo vivo, mas, fazendo o experimento com minúsculos grãos de poeira e cinza, percebeu que com esses, ocorria a mesma reação. Daí, sugeriu que existia alguma partícula ainda menor que fazia com que esses grãos se movimentassem, a qual intuitivamente seria o átomo. Contudo, não teve condições de comprovar tal ideia. Mesmo assim, publicou suas observações em um artigo intitulado “Uma breve descrição de observações microscópicas efetuadas nos meses de Junho, Julho e Agosto de 1827 sobre partículas contidas no pólen

de plantas”. O movimento observado por Robert Brown ficou conhecido como “Movimento Browniano” (BROWN, 1828).

Figura 5 – Robert Brown



Fonte: Study.com s.d. Disponível em [https://study.com/cimages/multimages/16/robert\\_brown\\_botanist6082462406949294485.jpg](https://study.com/cimages/multimages/16/robert_brown_botanist6082462406949294485.jpg) Acesso em 01/02/2025

Figura 6 – Microscópio usado por Robert Brown



Fonte: Study.com s.d. Disponível em [https://study.com/cimages/multimages/16/robert\\_brown\\_botanist6082462406949294485.jpg](https://study.com/cimages/multimages/16/robert_brown_botanist6082462406949294485.jpg) Acesso em 01/02/2025

Então, em 1905, o jovem físico alemão - posteriormente naturalizado norte-americano - Albert Einstein (1879-1955) (Figura 7) publicou um artigo referente ao “Movimento Browniano” que versava sobre o mundo microscópico em movimento e o universo macroscópico. Com o uso de ultramicroscópios, Einstein conjecturou que os movimentos do grão de pólen na água aconteciam devido ao bombardeamento

constante das partículas da água no grão, que o impeliam para toda e qualquer direção. A partir desses estudos e de experimentos de outros cientistas a concepção da existência de átomos começou a ser aceita entre os demais (SALINAS, 2005).

Figura 7 – Albert Einstein

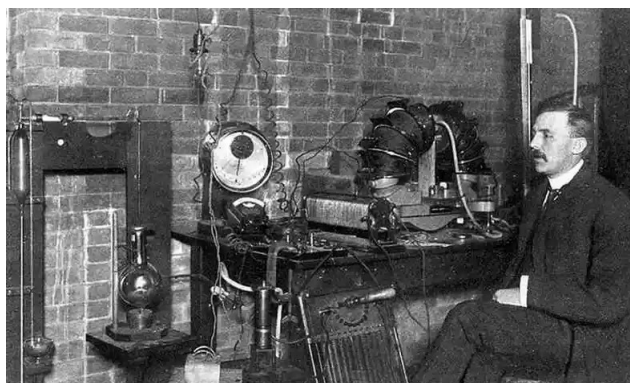


Fonte: Reddit.com s.d. Disponível em [https://www.reddit.com/r/OldSchoolCool/comments/15cy5uc/albert\\_einstein\\_age\\_26\\_1905/?tl=pt-br#lightbox](https://www.reddit.com/r/OldSchoolCool/comments/15cy5uc/albert_einstein_age_26_1905/?tl=pt-br#lightbox) Acesso em 01/02/2025

E por volta de 1896, a radioatividade estava sendo estudada por vários cientistas, um deles era Ernest Rutherford (1871-1937) (Figura 8), físico e químico neozelandês, naturalizado britânico e aluno de J.J. Thomson. Seu interesse era investigar os desvios que ocorriam com as partículas  $\alpha$  que eram emitidas de uma amostra de polônio (Po) quando elas se chocavam com uma fina lâmina de ouro. Em 1908, no experimento com a lâmina de ouro, Rutherford e seus colaboradores estavam observando os desvios de até 2 graus, pois, o esperado, era que as partículas atravessassem a lâmina de ouro em linha reta, já que, segundo o modelo atômico de J.J. Thomson, o átomo era uma massa de carga positiva, com elétrons em sua superfície, de tal forma, que ele não ofereceria grande resistência na passagem das partículas. Mas, Johannes Wilhelm Geiger (1842-1945), um de seus colaboradores, sugeriu que observassem os ângulos de desvios maiores, então, verificaram que enquanto a maioria das partículas sofriam leves desvios, outras

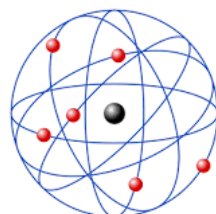
tinham grandes desvios, algumas chegando a ser totalmente rebatidas de volta a sua origem. Assim, Rutherford, supôs que o átomo tinha um núcleo muito pequeno, o qual comportava toda sua massa positiva, chamada de prótons, e que os elétrons giravam em trajetórias circulares em torno do núcleo, e entre o núcleo e os elétrons, havia um grande espaço vazio, e que o movimento dos elétrons formava uma esfera, e esse movimento chamou de eletrosfera. Quando uma partícula  $\alpha$  passava próximo dos elétrons, ela era desviada, e quando se chocava com o núcleo, era refletida. Com isso, Rutherford elaborou um novo modelo atômico, conhecido por “Modelo do Sistema Solar” ou “Modelo do Sistema Planetário” (Figura 9). (ATKINS PETER; JONES, 2012), (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012), (TIPLER PAUL; MOSCA, 2014), (VIDAL, 1986), (PROENÇA ROSA, 2012).

Figura 8 – Ernest Rutherford



Fonte: i.em.com.br. 2015 Disponível em [http://i.em.com.br/N70xsrSGcebYWEVsonKbnqbX7dQ=/675x0/smart/imgsapp.em.com.br/app/noticia\\_127983242361/2015/09/25/691867/20150925091545811316i.jpg](http://i.em.com.br/N70xsrSGcebYWEVsonKbnqbX7dQ=/675x0/smart/imgsapp.em.com.br/app/noticia_127983242361/2015/09/25/691867/20150925091545811316i.jpg) Acesso em 13/11/2024

Figura 9 – Modelo Planetário



Fonte: Toda Matéria. s.d. Disponível em <https://static.todamateria.com.br/upload/mo/de/modeloatomico-cke.jpg> Acesso em 13/11/2024

Mas, de acordo com a Física Clássica <sup>2</sup>, partículas de cargas opostas se atraem, de modo que, sendo o núcleo do átomo de carga positiva, orbitado pela eletrosfera de carga negativa, por conseguinte, os elétrons seriam atraídos pelo núcleo, o que causaria o colapso do átomo. E como isso não ocorre, o modelo atômico de Rutherford ficou por muito tempo com essa falha em aberto (ATKINS PETER; JONES, 2012), (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012), (TIPLER PAUL; MOSCA, 2014), (VIDAL, 1986).

Em 1913, o físico e filósofo Niels Henrik David Bohr (1885-1962) (Figura 10), propôs a partir da Física Quântica <sup>3</sup>que os elétrons giravam em movimentos circulares na eletrosfera, e que cada elétron permanecia em uma determinada “órbita” ou “camada energética”, da qual só poderia ser retirado se fosse empregado uma energia quantizada sobre ele, ou seja, o elétron permanece em seu estado fundamental até que receba uma quantidade específica de energia, que é exatamente a diferença de energia entre os níveis, o elétron fica no estado excitado, e quando isso ocorre, ele muda para uma camada mais externa em relação ao núcleo, e essa mudança foi chamada de “salto quântico”. Da mesma maneira, um elétron ao se encontrar em um estado de mais alta energia, retorna ao seu estado de menor energia, emitindo radiação, e enquanto ele está no estado fundamental, não emite radiação. Essa radiação corresponde a liberação da energia excedente na forma de luz, que pode ser visível ou não. Além disso, a cor da luz emitida depende do salto entre os níveis de energia realizado pelo elétron. Os átomos podem ter no máximo 7 camadas, que foram nomeadas de K à Q, sendo a camada K a mais próxima do núcleo e a Q a mais distante e quanto mais longe do núcleo, maior é o nível de energia do elétron. Este modelo foi chamado de “Rutherford-Bohr” (Figura 11).

Contudo, o modelo de Bhor ainda não explicava o por quê dos elétrons no estado fundamental não emitirem radiação e como ocorria o salto quântico (VIDAL, 1986).

---

<sup>2</sup> Física Clássica estuda fenômenos naturais em escala macroscópica e suas leis determinísticas, se baseiam em observações e experimentos e se divide em mecânica, termodinâmica, eletromagnetismo, óptica e acústica (TIPLER PAUL; MOSCA, 2013).

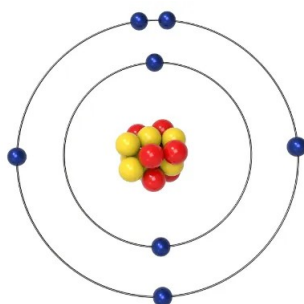
<sup>3</sup> Física Quântica estuda o mundo microscópico, como os átomos, os prótons e elétrons, ou seja, é o estudo em escalas atômicas e subatômicas, não há determinismo nos movimentos e a probabilidade permite fazer predições das medidas. (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012)

Figura 10 – Niels Henrik David Bohr



Fonte: Manual da Química. s.d. Disponível em <https://static.manualdaquimica.com/conteudo/images/niels-henrik-david-bohr-1885-1962-5454ca207e4e5.jpg> Acesso em 13/11/2024

Figura 11 – Modelo Atômico Rutherford-Bohr



Fonte: Brasil escola. 2021. Disponível em <https://s4.static.brasilecola.uol.com.br/be/2021/12/modelo-atomico-de-bohr.jpg> Acesso em 13/11/2024

Assim, com o avanço nos estudos da física quântica, Erwin Schrödinger (1887-1961) (Figura 12) físico austríaco, elaborou uma equação matemática que leva seu nome, com a intenção de conhecer o potencial do átomo, e em 1927, como resultado da solução da equação, obteve um modelo atômico totalmente quântico, o qual foi chamado de “Nuvem Eletrônica” (Figura 13). O modelo

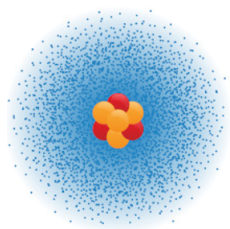
se baseia na dualidade onda-partícula do comportamento do elétron, isto é, o elétron se comporta ora como onda, ora como partícula. Este comportamento ondulatório implica no “princípio da incerteza”, que elimina a característica do elétron girar como uma partícula ao redor do núcleo e o explica como uma nuvem de possibilidades de ser encontrado em algum ponto nos orbitais do núcleo, que continua massivo constituído por prótons de carga positiva e nêutrons sem carga. Essas nuvens de possibilidades, ditas também nuvens de probabilidades, formam padrões que representam o modo de os elétrons se espalharem ao redor do átomo, cada qual em sua órbita, que depende da sua energia, inclinação e rotação particulares. Quando um elétron muda de órbita, emitindo ou absorvendo energia no processo, a nuvem muda de um padrão para outro. Com a equação de Schrödinger foi possível calcular qual a probabilidade de se encontrar um elétron em algum dos orbitais do núcleo e, Schrödinger fechou a questão do modelo de Bhor, explicando que os elétrons no estado fundamental não emitem radiação porque nessas órbitas, sua velocidade média é zero (ATKINS PETER; JONES, 2012).

Figura 12 – Erwin Schrödinger



Fonte: Media.gettyimages. s.d. Disponível em <https://media.gettyimages.com/id/515582950/pt/foto/the-1933-nobel-prize-in-physics-has-been-awarded-jointly-to-professor-p-h-m-dirac-of-cambridge.jpg?s=612x612&w=0&k=20&c=VxtlzIDyf9MJPkYO3hoKr1E2Got2qz6fRyeuwxLKYOY=> Acesso em 13/11/2024

Figura 13 – Modelo Atômico Nuvem Eletrônica

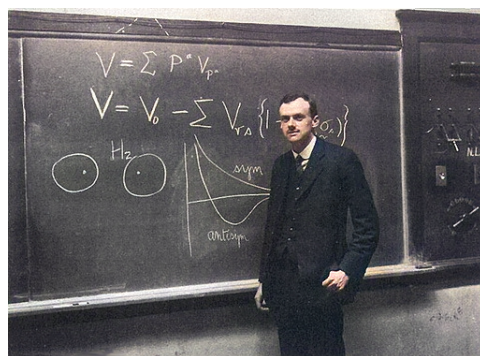


Fonte: Edisciplinas usp. s.d. Adaptado. Disponível em [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/8078006/mod\\_page/content/2/sdasaddsadsadsasadadsdas%20%281%29.png](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/8078006/mod_page/content/2/sdasaddsadsadsasadadsdas%20%281%29.png) Acesso em 13/11/2024

Alguns anos mais tarde, com a descoberta da propriedade do spin dos elétrons, fez-se necessário o uso da relatividade <sup>4</sup> para descrever os átomos, coisa que a equação de Schrödinger não considerava.

E então, em 1928, o físico teórico britânico Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) (Figura 14) reformulou a equação de Schrödinger, considerando a relatividade, sem alterar o modelo atômico (Figura 13) (ATKINS PETER; JONES, 2012), (BOYCE W. E.; DIPRIMA, 2020).

Figura 14 – Paul Adrien Maurice Dirac

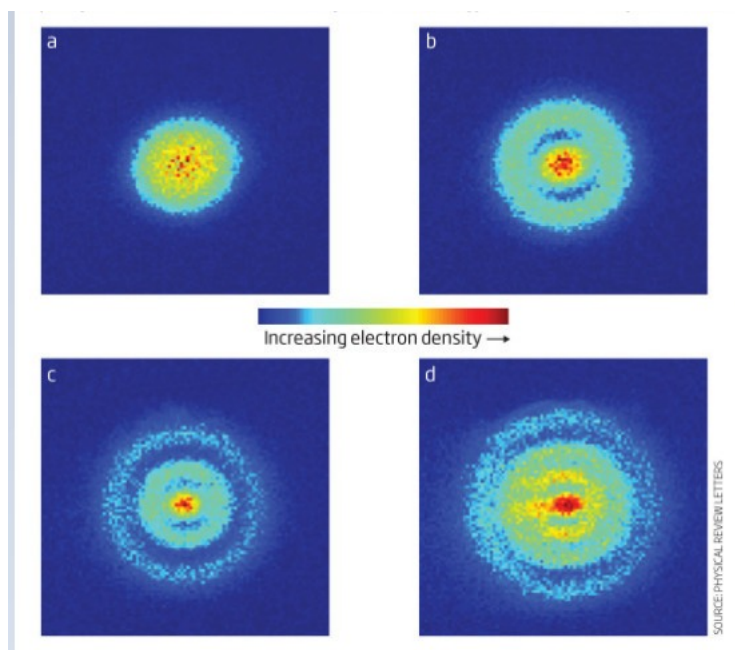


Fonte: Unicentro. 2015. Disponível em <https://www3.unicentro.br/petfisica/wp-content/uploads/sites/54/2015/12/Paul-Adrien-Maurice-Dirac-e1677347340712.jpg> Acesso em 13/11/2024

<sup>4</sup> Teoria da Relatividade foi desenvolvida por vários estudiosos, mas atribuída à Albet Einsten, dividida em Teoria da relatividade restrita e Teoria da relatividade geral. É utilizada para resolver problemas relacionados à corpos que se movimentam em velocidades próximas à da luz (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012).

Com toda a evolução dos modelos atômicos e o avanço da tecnologia, em 2013, físicos observaram a função de onda de um átomo de hidrogênio através de um microscópio atômico e construíram a imagem da (Figura 15)(STODOLNA et al., 2013).

Figura 15 – Foto do Átomo de hidrogênio de 2013



Fonte: Quantumphysicslady. 2020. Disponível em <https://quantumphysicslady.org/wp-content/uploads/2020/11/Orbitals-electrons-at-different-energy-levels-New-Scientist-article.jpg> Acesso em 13/11/2024

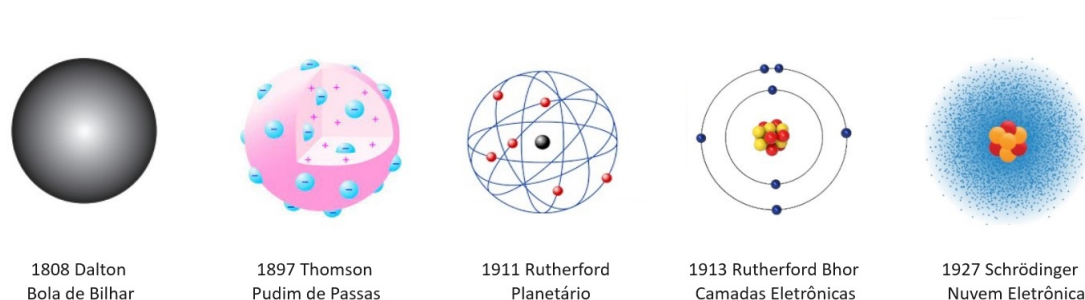
Por ora, esta definição do modelo quântico do átomo, em que os elétrons formam uma nuvem de possibilidades de ser encontrado em algum ponto nos orbitais do núcleo, é a mais atual, tomando como exemplo o átomo de hidrogênio.

Muitos estudos foram feitos por outros pesquisadores, até concomitantemente com os citados aqui e foram tão importantes quanto estes, mas, os apresentados foram os de maior interesse para o trabalho.

A palavra “átomo” se manteve, mas seu significado já não condiz com a realidade do que ela representa, pois, o átomo é formado por partículas subatômicas e as três mais importantes são elétron, próton e nêutron, ou seja, ele é divisível.

E quanto aos diferentes modelos atômicos, todos tiveram sua relevância para o conhecimento, além disso, ainda são muito utilizados, seja para facilitar no ensino ou para representar alguma área de conhecimento.

Figura 16 – Evolução dos Modelos Atômicos



Fonte: Adaptado pela autora. 2024

## 3.2 Descoberta e propriedades da radioatividade

Nesta seção abordamos a definição de radioatividade, seu contexto histórico, descoberta, aplicações e efeitos.

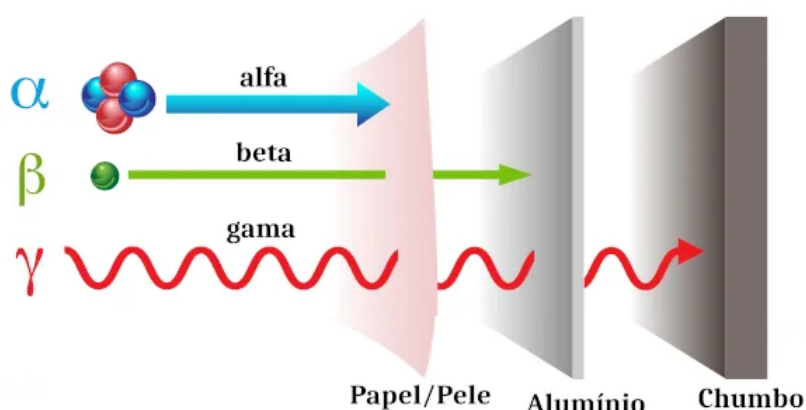
### 3.2.1 Definições

- i. **Radioatividade:** Do latim *radius* e *atividade*, radioatividade significa desintegração espontânea do núcleo atômico de alguns elementos químicos que resulta na emissão de radiação eletromagnética ou de partículas, radiação  $\gamma$  (gama) ou partículas  $\alpha$  (alfa) e  $\beta$  (beta).

A radioatividade, é o processo que ocorre dentro do núcleo do átomo causado pela sua instabilidade, ocasionando sua desintegração e liberando radiação. Ou seja, núcleos instáveis, para se tornarem estáveis emitem partículas,  $\alpha$  ou

$\beta$ , e a radiação eletromagnética (ondas)  $\gamma$ . As partículas  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser barradas por uma folha de papel e um pedaço de madeira, respectivamente. A radiação  $\gamma$  é a mais penetrante, sendo necessária uma barreira mais densa, como uma parede de concreto ou chumbo para bloqueá-la (Figura 17). Existem elementos naturalmente radioativos e outros artificiais, que foram produzidos pelo homem. Um elemento é dito radioativo quando ele emite radiação.

Figura 17 – Poder da radiação ionizante



Fonte: Mundo Educação. 2023. Adaptado. Disponível em <https://static.mundoeducacao.uol.com.br/mundoeducacao/2023/02/poder-penetracao-radiacao-ionizante.jpg> Acesso 15/11/2024

- ii. **Radiação:** Radiação é energia em trânsito, emitida por uma fonte e transmitida no vácuo, pelo ar ou por meios materiais, que ocorre em forma de partículas (prótons, nêutrons e elétrons) ou de ondas (ultravioleta UV, microondas, ondas de rádio, luz visível, raios-X e raios  $\gamma$ ).
- iii. **Radiação ionizante:** A radiação que oferece risco para a saúde é a radiação ionizante, que consegue retirar elétrons dos átomos atingidos, isso ocorre de acordo com a energia com que o elétron está ligado ao núcleo do átomo. O problema de se retirar elétrons dos átomos, é que ocasiona quebra das ligações químicas das moléculas, e os fragmentos podem se ligar a outras moléculas, causando a mutação dos átomos. A radiação pode afetar o DNA, gerando danos irreversíveis, a curto ou longo prazo, que conseqüentemente

geram problemas de saúde, inclusive câncer (ATKINS PETER; JONES, 2012), (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

- iv. **Elemento químico:** é o conjunto de átomos com o mesmo número atômico (prótons) no núcleo.

#### Notação de elemento químico



**A: Número de massa** - é a soma do número de prótons (carga +) e de nêutrons (não possui carga) no núcleo do átomo.

**Z: Número atômico** - é o número de prótons no núcleo, é a identidade do átomo.

**X: Elemento químico** - é o símbolo do elemento químico.

- v. **Isótopo:** Isótopos são átomos de um mesmo elemento químico, que tem o mesmo número de prótons, porém, números diferentes de nêutrons, resultando assim, em números diferentes de massa.

- vi. **Meia-vida:** O tempo necessário para que a radioatividade de um elemento seja reduzida pela metade é chamado de meia-vida e denotado por  $t_{\frac{1}{2}}$ . Esse tempo depende do elemento químico e do isótopo em questão, sendo que cada um tem sua meia-vida característica. O decaimento radioativo não depende de fatores externos como temperatura, pressão ou qualquer outra coisa, depende apenas da instabilidade do núcleo. Todos os elementos que possuem número atômico, que é a quantidade de prótons no núcleo, igual ou maior do que 84 são radioativos, podendo, eventualmente algum isótopo de menor número atômico ser também radioativo, como é o caso do carbono-14, que possui apenas 6 prótons, mas como tem 8 nêutrons, ele fica desequilibrado, conseqüentemente, radioativo (ATKINS PETER; JONES, 2012), (TIPLER PAUL; MOSCA, 2014), (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

### 3.2.2 A descoberta da radioatividade

Os estudos da radioatividade sucederam a descoberta dos raios X, que em 1895 foi descoberto por Wilhelm Conrad Röntgen, físico e engenheiro alemão (Figura 18). Röntgen, analisando a luminescência causada pelos raios catódicos de tungstênio do Tubo de Crookes, observou que alguns raios emitidos do tubo iluminavam telas fluorescentes que estavam no laboratório. Mesmo posicionando um livro em frente dos raios, eles não eram impedidos de passar e como era algo desconhecido, ele os chamou de raios X. Para testá-los, ele usou a mão de sua esposa, Anna Bertha Ludwig (1839–1919), que a colocou entre o tubo de Crookes e um filme fotográfico e assim, obtiveram a primeira radiografia da história (Figura 19).

Figura 18 – Wilhelm Conrad Röntgen



Fonte: Med imagem Guarapari. s.d. Disponível em <https://medimagemguarapari.com.br/wp-content/uploads/2018/10/45467.jpg> Acesso em 15/11/2024

Vários outros pesquisadores já haviam observado esses raios, porém, alguns não deram a devida atenção para o ocorrido e outros não conseguiram explicar a sua origem, assim a descoberta foi oficialmente realizada por Röntgen (GAROZZO, 1975), (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

Figura 19 – Radiografia da mão de Anna Bertha Ludwig - imagem melhorada da original



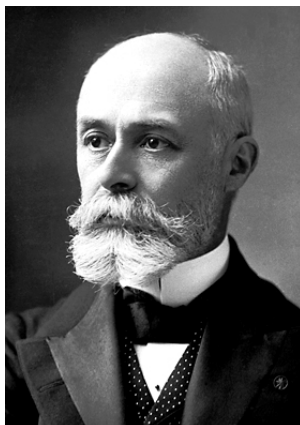
Fonte: Med imagem Guarapari. s.d. <https://medimagemguarapari.com.br/wp-content/uploads/2018/10/45467.jpg> Acesso em 15/11/2024

Com a descoberta dos raios X, muitos pesquisadores se interessaram pelo fenômeno, inclusive Antoine Henri Becquerel (1852-1908) físico francês (Figura 20), que estava empenhado em verificar se materiais fluorescentes <sup>5</sup> poderiam emitir tais raios. Becquerel colocou sais de urânio (sulfato duplo de urânio e potássio) - os quais tinham sua luminescência ativada pela radiação solar - sobre um envelope escuro que dentro continha uma chapa fotográfica, com o intuito de verificar se ao ativar a luminescência do material, ele emitiria radiação e marcaria a chapa. Sua suspeita foi confirmada (Figura 21), contudo, verificou a partir de testes com sais de urânio não luminescentes, que eles também emitiam radiação e sais de zinco que eram luminescentes, não foram capazes de emití-la. Então, Becquerel concluiu que os raios emitidos pelos cristais de urânio não eram provocados por força externa, diferentemente dos raios X, ou seja, a emissão era espontânea para esse material. Esses raios foram chamados inicialmente de raios *B*, em homenagem à ele, mais tarde, por raios  $\gamma$ . Ademais, ele conferiu que a quantidade de radiação

<sup>5</sup> Material fluorescente é aquele que absorve energia de alguma fonte luminosa, e com isso emite radiação de menor energia (radiação visível), ao cessar a fonte luminosa, o material também deixa de emitir radiação. Ex. lâmpadas fluorescentes que em seu interior contém fósforo.

era proporcional a quantidade de urânio na amostra, exceto para a pechblenda (uraninita), fenômeno que não conseguiu explicar (ATKINS PETER; JONES, 2012), (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

Figura 20 – Antoine Henri Becquerel



Fonte: Museum Nuclear. 2017. Disponível em [https://ahf.nuclearmuseum.org/wp-content/uploads/2017/02/Henri\\_Becquerel\\_1903\\_Wikimedia.jpg](https://ahf.nuclearmuseum.org/wp-content/uploads/2017/02/Henri_Becquerel_1903_Wikimedia.jpg)

Figura 21 – Marca de sais de urânio na chapa fotográfica

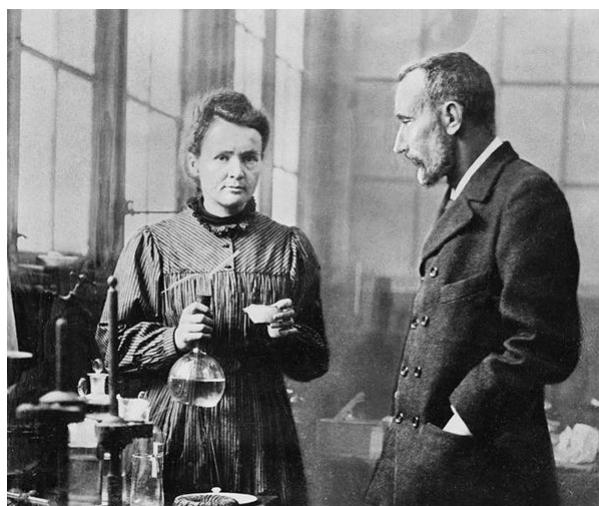


Fonte: Wikimedia. s.d. Disponível em [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1e/Becquerel\\_plate.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1e/Becquerel_plate.jpg) Acesso em 15/11/2024

Por conseguinte, Marie Skłodowska Curie (1867-1934), física e matemática polonesa, naturalizada francesa (Figura 22), em sua tese de doutorado, continuou os estudos de Becquerel com a intenção de descobrir por que a pechblenda emitia

quantidades diferentes de radiação em relação ao urânio. Ao estudar uma amostra desse material, junto com seu marido Pierre Curie (1859-1906) físico francês (Figura 22), descobriram dois novos elementos, que chamaram de polônio (Po) e rádio (Ra). O polônio revelou-se centenas de vezes mais capaz de emitir radiação do que o urânio, enquanto o rádio, mostrou-se duas milhões de vezes mais potente, e essa capacidade de emitir radiação, chamaram de radioatividade, que é produzida pelo decaimento nuclear (ATKINS PETER; JONES, 2012), (OKUNO; YOSHIMURA, 2016). Marie Curie foi laureada com dois Prêmios Nobel, sendo o de Física em 1903, por suas pesquisas sobre radiação, e o de Química em 1911, pelo descobrimento dos elementos rádio e polônio.

Figura 22 – Marie Curie e Pierre Curie



Fonte: Meteoritos 2021. Disponível em <https://www.meteoritos.com.br/wp-content/uploads/2021/02/Marie-e-Pierre.jpg> Acesso em 15/11/2024

A partir desses estudos, novas pesquisas e descobertas foram identificadas. No entanto, os resultados descritos aqui são suficientes para os objetivos propostos neste trabalho.

### 3.2.3 Malefícios e benefícios do uso da radioatividade

Muitos cientistas que estudaram os elementos radioativos, adoeceram devido à exposição às radiações, e alguns faleceram em decorrência das doenças causadas.

Com o passar do tempo e o avanço dos estudos, as consequências da radiação foram sendo reveladas, mas até que isso ocorresse, o uso desenfreado e sem embasamento científico de tais elementos, causou muitos danos e mortes à população.

Após a descoberta do rádio, por exemplo, vários produtos foram fabricados com esse elemento, como tintas, produtos de beleza e até água acrescida de rádio, com a promessa de benefícios à saúde (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

Anos depois, já com a consciência das propriedades da radiação e com a corrida armamentista durante a 2<sup>a</sup> Guerra Mundial em 1939, os Estados Unidos da América financiou o Projeto Manhattan, que através do físico teórico americano Julius Robert Oppenheimer (1904-1967) (BRASIL, B. news, 2019), construiu a primeira bomba nuclear. A bomba foi testada no estado do Novo México - EUA em 16 de julho de 1942. Com o “sucesso” da explosão, duas foram lançadas no Japão, uma sobre Hiroshima em 06 de agosto de 1945 e outra sobre Nagasaki, após três dias, matando centenas de milhares de pessoas com a explosão e mais outras milhares com os efeitos da radiação.

A construção de usinas termonucleares (BRASIL, I. -. I. N. do, 2014) são exemplos de uso em benefício populacional. Elas funcionam basicamente como uma usina térmica convencional, o que difere ambas é o combustível que faz com que haja o aquecimento da água, que se transformará em vapor, que fará girar uma turbina e gerará a energia. Na usina térmica convencional o combustível é derivado de petróleo, enquanto na termonuclear é o urânio enriquecido <sup>6</sup>. Ao passar pelo processo de enriquecimento, o urânio fica mais concentrado e potente, então é moldado em pequenos cilindros, chamados de pastilhas. Cada pastilha de urânio equivale a 20 caminhões de combustível óleo diesel. Além disso, o urânio é um elemento abundante no planeta, diferentemente do petróleo. Assim, nesse quesito, a sua utilização se torna muito viável, ainda que se tenha alto custo para implementar uma usina nuclear, posteriormente, a pouca manutenção compensa. Contudo, apesar de sua energia ser limpa, se comparando com a queima de petróleo, conforme acontece a fissão nuclear <sup>7</sup> ele se transforma em

---

<sup>6</sup> Enriquecimento de urânio é o processo de separação de misturas físicas dos isótopos do urânio que não são radioativos, para aumentar a concentração daquele que é radioativo.

<sup>7</sup> Fissão nuclear é o processo de “quebra” do núcleo do átomo ao ser bombardeado por um

outros elementos, também muito radioativos, porém sem as mesmas condições de gerar energia. Esses elementos se tornam “lixos/rejeitos” radioativos, que devem ser armazenados em locais apropriados por centenas/milhares de anos, até que se tornem elementos totalmente estáveis e sem perigo de oferecer risco de contaminação.

Além disso, quando ocorre algum acidente com esse tipo de material, as consequências são catastróficas. Como foi o caso do acidente da usina de Chernobyl - Ucrânia em 1986 (OKUNO; YOSHIMURA, 2016), do acidente com o Césio 137 em Goiânia - Brasil em 1987 (OKUNO; YOSHIMURA, 2016) e (LEGISLATIVA, 2017) e ainda, da usina de Fukushima - Japão em 2011 (BRASIL, 2021).

O acidente da usina de Chernobyl, ocorreu em 26 de abril de 1986, por várias falhas humanas em um programado teste de segurança, culminando na explosão de um dos quatro reatores nucleares, que se manteve pegando fogo por vários dias. Esse acidente fez milhares de vítimas de forma direta e indireta, apesar de oficialmente ter apenas a contagem 31 mortes entre trabalhadores e bombeiros (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

O acidente de Goiânia, foi o mais grave fora de uma usina nuclear, ocorreu por volta de 10 de setembro de 1987, quando dois catadores de lixo encontraram uma máquina de raios-X abandonada em uma clínica desativada. Abriram o equipamento e retiraram uma cápsula que continha 19 gramas de um pó brilhante e desconhecido, o Césio-137 e o venderam no ferro-velho. A beleza do material chamou a atenção do dono do ferro-velho, que o mostrou e compartilhou com amigos e familiares, imaginando que fosse algo precioso. Há registros de apenas 4 mortes motivadas pela radiação. No entanto, a contaminação atingiu objetos, solo, animais e centenas de pessoas, que ainda necessitam de acompanhamento e tratamento (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

O acidente de Fukushima, ocorreu em 11 de março de 2011, ocasionado por gigantesco tsunami com ondas de aproximadamente 16 metros de altura, causado

---

nêutron. Essa quebra gera dois outros elementos de menor massa e também radioativo, que por sua vez, libera outros dois nêutrons que vão colidir com outros átomos, gerando uma reação em cadeia. A diferença de massa entre os elementos iniciais e os produtos da fissão ocorre devido à liberação de energia durante o processo.

por um grande terremoto. A explosão aconteceu em um dos prédios da usina, o que permitiu que gases voláteis escapassem para a atmosfera. O desastre maior, se deu na contaminação do solo e do meio ambiente. Não há registros de contaminação ou morte por causa da radiação, embora haja uma estimativa de aproximadamente 2200 mortes causadas por estresse e traumas em pessoas que foram removidas da região.

No corpo humano, os principais átomos existentes são hidrogênio (H), carbono (C), nitrogênio (N) e oxigênio (O). Os raios-X e  $\gamma$ , são as radiações mais perigosas, pois são capazes de alterar a estrutura desses átomos.

Todavia, a radioatividade pode gerar benefícios caso usada com cuidado e responsabilidade. Com a evolução da tecnologia e dos conhecimentos sobre a radioatividade e a maneira de controlá-la, seu uso tem se tornado frequente em vários campos.

A radiação  $\gamma$ , por exemplo, além de ser usada em usinas nucleares, como visto acima, para gerar energia elétrica, é utilizada em tratamento de radioterapia, que quando direcionada e concentrada destrói células cancerígenas. E os raios-X, desde sua descoberta são amplamente utilizados na medicina para detecção de fraturas e infecções de ossos e dentes, tumores, massas anormais, entre outros. A radiação é também usada para fins de segurança, como em aeroportos para verificar bagagens (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

Portanto, é preciso fazer uso consciente dos elementos radioativos, pois, da mesma forma que eles podem colaborar para que a população tenha uma vida mais saudável, também podem gerar muitos traumas e mortes, se usados para o mal ou sem controle.

### 3.3 Datação por Carbono-14

Após a introdução ao estudo dos átomos; à evolução dos modelos atômicos; à radioatividade, seu uso e efeitos, esta seção abordará a aplicação do decaimento radioativo na determinação da idade de artefatos arqueológicos, fósseis e pinturas.

### 3.3.1 O que é o carbono-14 e como ele é utilizado para a datação de artefatos arqueológicos, fósseis e pinturas?

O carbono-14 ( $^{14}_6C$ ) é um elemento radioativo (ou radioisótopo) que se forma quando partículas de nêutrons provenientes dos raios cósmicos e solares atingem o nitrogênio da atmosfera, formando o dióxido de carbono (ou gás carbônico  $^{14}CO_2$ ). Esse carbono, juntamente com os isótopos<sup>8</sup> estáveis, carbono-12 ( $^{12}_6C$ ) e carbono-13 ( $^{13}_6C$ ) é introduzido nos oceanos e nas plantas através da fotossíntese. Os animais herbívoros incorporam o carbono ao ingerirem as plantas, e os seres humanos ao consumirem tanto plantas como animais, também incorporam o carbono-14. O carbono-12 é o isótopo mais abundante no planeta, com cerca de 98,89%; o carbono-13 com 1,1% e o carbono-14 existe em uma quantidade ínfima. A proporção entre os isótopos de carbono no organismo vivo tende a permanecer a mesma com o passar do tempo; a razão entre o carbono-14 e o carbono-12, é de aproximadamente 1 para  $10^{12}$ , respectivamente. Em 1,0 g de carbono natural, cerca de 15 átomos se desintegram por minuto.

A concentração de carbono-14 no planeta e nos organismos vivos é praticamente constante, pois sua produção, eliminação (por respiração e excreção) e decaimento acontecem quase que à mesma taxa. E quando os seres vivos morrem, deixam de incorporar e eliminar carbono. Porém, o carbono-14 se desintegra continuamente, enquanto o carbono-12 e 13 não se alteram.

A técnica de datação por carbono-14 foi desenvolvida pelo químico norte-americano Willard Frank Libby (1908-1980), por volta de 1947. Ele utilizou um contador Geiger-Müller para medir a emissão de radiação em pedaços de madeira de tumbas egípcias, com datas previamente conhecidas, confirmando a eficácia do método.

A datação por carbono-14 baseia-se em sua meia-vida, que é de 5730 anos, já considerando os eventos das explosões das bombas atômicas, que afetaram a concentração do carbono-14 na natureza. Portanto, essa técnica permite estimar, com confiança, a idade de fósseis entre 100 e 60.000 anos, com uma margem de erro

---

<sup>8</sup> Isótopos são átomos de um mesmo elemento químico, que tem o mesmo número de prótons, porém, números diferentes de nêutrons, resultando assim, em números diferentes de massa.

de aproximadamente 100 anos. Passado o tempo de 60.000 anos, a concentração de carbono-14 é quase nula, dificultando sua constatação e se o fóssil tiver até 100 anos, a concentração do carbono-14 ainda é muito grande, não permitindo a observação do decaimento. Para fósseis muito antigos, é necessário o uso de outro material, como por exemplo o urânio-238, que tem meia-vida de 4,5 bilhões de anos. Neste caso, a datação não é feita diretamente no fóssil, e sim pelo estudo das rochas sedimentares <sup>9</sup> que o envolvem.

O decaimento radioativo transforma um elemento em outro, dependendo do tipo de emissão que ocorre, sendo as principais por emissão de partículas  $\alpha$ ,  $\beta$  ou radiação  $\gamma$ . Nesse processo, o elemento pode se transformar em outro também radioativo ou não, caso seja radioativo, ele continuará decaindo até que se torne um elemento estável. No caso do carbono-14, ele decai por emissão de uma partícula  $\beta$ , se transformando em nitrogênio-14, que é um elemento estável (BOWMAN, 1990), (ATKINS PETER; JONES, 2012), (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

### 3.3.2 Tempo de meia-vida

Tempo de meia-vida é o tempo necessário para que seja reduzida pela metade a atividade (liberação de radiação) de um elemento radioativo.

Por exemplo, após um tempo de 5730 anos, i.e., uma meia-vida, uma amostra de 5 g de carbono-14, terá decaído para 2,5 g de carbono-14 e a outra metade terá se tornado nitrogênio-14. Assim a massa total da amostra continuará com 5 g, mas, metade dela será de carbono-14 e metade de nitrogênio-14. A cada período de meia-vida, a quantidade de carbono-14 se desintegra pela metade novamente, diminuindo a quantidade de carbono-14 e aumentando a de nitrogênio-14 e assim, sucessivamente.

As emissões de partículas  $\beta$  são detectadas através de métodos específicos, que informam a quantidade de partículas emitidas na amostra e se compara com a quantidade que um ser vivo emite. Após os eventos das bombas atômicas, a

---

<sup>9</sup> Rochas Sedimentares são formadas pelo acúmulo de sedimentos - materiais sólidos e semi-fluídos - de rochas preexistentes, que foram se desgastando pela ação do tempo, como chuva e vento ou por processos químicos e biológicos.

emissão é de 15 partículas  $\beta$  por minuto por grama (ATKINS PETER; JONES, 2012), (OKUNO; YOSHIMURA, 2016).

### 3.3.3 Métodos de datação por carbono-14

De forma básica e superficial, os métodos de datação são descritos a seguir.

**Contagem proporcional de gás:** a amostra é transformada em gás dióxido de carbono e a datação radiométrica é feita pela contagem de emissões de partícula  $\beta$  em contadores proporcionais de gás (instrumentos parecidos com o contador Geiger-Müller em se tratando do funcionamento).

**Contagem por cintilação líquida:** é adicionado um cintilador na amostra que está em forma líquida, que emitirá um flash de luz ao interagir com uma partícula  $\beta$ . Entre dois fotomultiplicadores será passado um recipiente com a amostra preparada, quando ambos detectarem ao mesmo tempo o flash de luz, ele será contabilizado. Este método foi muito utilizado na década de 60 e o primeiro contador de cintilação foi o Tubo de Crookes, e os outros posteriores tem o mesmo princípio de funcionamento.

**Espectrometria de massas com aceleradores (EMA ou AMS):** neste método é comparado a proporção de carbono-14 ainda presente na amostra em relação aos carbonos-12 e 13, através da contagem dos átomos de cada isótopo. Este é um método moderno e considerado mais eficiente que os demais, utiliza uma quantidade muito pequena de amostra do fóssil ou artefato a ser datado e o resultado é obtido em poucos dias.

Independente de qual método for utilizado para a datação, é feito um preparo especial no objeto a ser datado para retirar impurezas que possam prejudicar o estudo. Todos os métodos destroem a amostra, por isso, quando o fóssil ou artefato é muito pequeno ou na hipótese de se querer preservar a sua integridade, pode não ser viável fazer a datação (BOWMAN, 1990), (ROMING; LINDBLOM, 2016).



## 4 Aplicação da EDO a um caso real: “Ötzi, o homem do gelo”

Considerando que as equações diferenciais servem para modelar problemas reais, veremos uma aplicação de EDO na datação de uma das múmias mais famosas e a mais estudada em todo o mundo, “Ötzi, o homem do gelo”, porém, não ilustrada nos livros didáticos, seja na graduação ou no Ensino Médio. E a partir desta aplicação observaremos a relação da resolução de uma EDO com a função exponencial.

### 4.1 A história e a idade de “Ötzi, o homem do gelo”

Ötzi foi o nome dado à uma múmia úmida encontrada nas geleiras no vale de Ötztal, na fronteira entre Áustria e Itália. Em 19 de setembro de 1991, dois alpinistas Erika e Helmut Simon avistaram um corpo de bruços no gelo em derretimento. Inicialmente pensaram se tratar de algum alpinista, chamaram ajuda, e quatro dias depois conseguiram retirar o corpo do gelo. O estado de conservação do corpo era tão grande, que desde então, pesquisadores do mundo todo procuram por uma oportunidade de estudá-lo. Após acordo entre os países para saber ao qual pertenceria a múmia, ficou decidido que a Itália seria seu lugar, pois, ela foi descoberta mais ao lado italiano. Atualmente a múmia se encontra no museu Arqueológico de Bolzano, onde recebe inúmeras visitas e pesquisadores. Foram encontrados também alguns pertences de vestuários e armas, como machado, faca, arco e flecha, próximo ao corpo. De acordo com os materiais que foram produzidos esses pertences, os pesquisadores deduziram que Ötzi viveu na Idade do Cobre. Estudos feitos no corpo revelaram que Ötzi provavelmente sofria de várias doenças. No entanto, sua morte pode ter sido causada por uma flechada, detectada por raio-X em 2001 na região do ombro, que teria acertado uma veia artéria e o feito sangrar até a morte, ou por uma forte pancada na cabeça. Entre essas hipóteses, a primeira é considerada a mais provável. Depois de anos de estudos, os

pesquisadores encontraram o estômago de Ötzi, que tinha se alojado abaixo das costelas. Dele retiraram restos de alimentos não totalmente digeridos, o que permitiu o conhecimento de sua alimentação recente. Ao estudar o intestino, descobriram a possível localidade de onde viveu, e até mesmo o tempo aproximado da última refeição, que teria sido umas 2 horas antes de morrer. Através do método de datação por carbono-14, os pesquisadores estimaram que Ötzi viveu há aproximadamente 5300 anos. Além disso, com o mapeamento do seu DNA, presume-se que Ötzi tenha origem na Sardenha, Itália. (CLARK, 2022), (KUTSCHERA, 1994; MULLER et al., 2003), (KELLER et al., 2012; FORNASIER, s.d.).

A seguir, algumas imagens de Ötzi e seus pertences: Figuras (23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30)

Figura 23 – Múmia sob o gelo, com dois observadores - Vale de Ötztal, Áustria



Fonte: Olhar Tube. 2023. Disponível em [https://ssl.megalink.xyz/?utm\\_medium=722444df07c838773f65439977ae691cd1fbb187&utm\\_campaign=push\\_subs\\_20\\_07\\_2023\\_666](https://ssl.megalink.xyz/?utm_medium=722444df07c838773f65439977ae691cd1fbb187&utm_campaign=push_subs_20_07_2023_666) Acesso em 28/01/2025

Figura 24 – Múmia no degelo, com dois observadores - Vale de Ötztal, Áustria



Fonte: Veja Abril. 2023. Disponível em <https://veja.abril.com.br/wp-content/uploads/2023/08/ritrovamento.jpg?quality=70&strip=info&w=1024&crop=1> Acesso em 28/01/2025

Figura 25 – Múmia no degelo - Vale de Ötztal, Áustria



Fonte: Veja Abril. 2023. Disponível em <https://veja.abril.com.br/wp-content/uploads/2023/08/ritrovamento2.jpg?quality=70&strip=info&w=1280&h=720&crop=1> Acesso em 28/01/2025

Figura 26 – Múmia na maca - Museu Arqueológico Bolzano, Itália



Fonte: Veja Abril. 2023. Disponível em <https://veja.abril.com.br/wp-content/uploads/2023/08/The-Tyrolean-Iceman-is-known-as-one-of-the-oldest-human-glacier-mummies-CREDIT-Sudtiroler-Archaeologiemuseum-EURAC-Marco-Samadelli-Gregor-Staschitz-1.jpg?quality=70&strip=info&w=1024&crop=1> Acesso em 28/01/2025

Figura 27 – Vestígios de vestimentas, calçado e chapéu - Museu Arqueológico Bolzano, Itália



Fonte: BBC International. s.d. Disponível em [https://ichef.bbci.co.uk/ace/ws/800/cpsprodpb/16853/production/\\_90834229\\_clothes.png.webp](https://ichef.bbci.co.uk/ace/ws/800/cpsprodpb/16853/production/_90834229_clothes.png.webp) Acesso em 28/01/2025

Figura 28 – Adaga com ponta de sílex e bainha



Fonte: Meisterdrucke. s.d. Disponível em <https://www.meisterdrucke.pt/impressoes-artisticas-sofisticadas/Copper-Age/254554/Adaga-e-bainha-encontradas-com-o-Oetzi-Iceman-%28bast,-couro,-freixo-e-s%C3%ADlex%29.html> Acesso em 28/01/2025

Figura 29 – Machado com lâmina de cobre



Fonte: Researchgate. s.d. Disponível em <https://www.researchgate.net/profile/Klaus-Oegg/publication/235920579/figure/fig2/AS:667591790034949@1536177694365/O-tzi-0-s-weapons-a-quiver-with-two-arrows-b-the-14-arrows-c-the-copper-axe-O-South.png> Acesso em 28/01/2025

Figura 30 – Aljava e flechas



Fonte: Researchgate. s.d. Disponível em <https://www.researchgate.net/profile/Klaus-Oegg/publication/235920579/figure/fig2/AS:667591790034949@1536177694365/O-tzi-0-s-weapons-a-quiver-with-two-arrows-b-the-14-arrows-c-the-copper-axe-O-South.png> Acesso em 28/01/2025

### 4.1.1 Descobrimo há quanto tempo Ötzi viveu - Datação por carbono-14

Através de pesquisas realizadas no corpo da múmia Ötzi, verificou-se que a proporção de carbono-14 para carbono-12 ainda existente em uma amostra era de 52,5 %. Se  $y(t)$  for a quantidade remanescente de uma quantidade inicial  $y_0$  de carbono-14 após um tempo  $t$ , então, a taxa de decaimento

$$\frac{dy}{dt}$$

foi analisada experimentalmente como proporcional à quantidade restante  $y(t)$ . Assim

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

onde  $k$  é uma constante negativa.

Pelo método de separação de variáveis, temos:

$$\frac{dy}{y} = kdt.$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow \ln |y| = kt + c$$

Aplicando  $e$  e resolvendo:

$$y = \pm e^{kt+c} = \pm e^{kt} e^c = ce^{kt}.$$

Como  $y(0) = y_0$  temos,

$$y(0) = ce^0 = c = y_0.$$

Assim a quantidade  $y(t)$  decai exponencialmente:

$$y = y_0 e^{kt}. \quad (4.1)$$

Utilizando  $t = 5730$  como tempo de meia-vida do carbono-14, isto é, quando  $t$  é 5730, a quantidade  $y(5730) = 0,5y_0$  o que nos dá

$$0,5y_0 = y_0 e^{5730k}.$$

Assim, podemos encontrar o valor de  $k$ :

$$\ln 0,5 = 5730k \Rightarrow k = \frac{\ln 0,5}{5730} \Rightarrow k = -0,00012096.$$

Na equação (4.1), com o valor de  $k$ , utilizaremos  $y = 0,525 y_0$  que é a quantidade de  $^{14}\text{C}$  da amostra, para determinar  $t$ , idade do fóssil. Ou seja,

$$0,525y_0 = y_0 e^{-0,00012096t}.$$

Assim,

$$\ln 0,525 = -0,00012096 t \Rightarrow t = -\frac{\ln 0,525}{0,00012096} \Rightarrow t = 5327.$$

Portanto, a idade aproximada de Ötzi é de 5327 anos.

De tal modo, no problema de encontrar a idade de Otzi, verificou-se a utilização da função exponencial  $e^{kt}$  na resolução da EDO.

## 5 Produto Educacional: Aplicação de função exponencial para a datação por carbono-14 por meio de Projeto Interdisciplinar

O trabalho com interdisciplinaridade busca a conexão entre diversas disciplinas para minimizar a fragmentação do conhecimento que, com o tempo, foi se instaurando nas escolas. Diferentemente do que ocorria na Idade Média, quando o ensino era estruturado em três disciplinas (três vias), conhecidas como *Trivium*: gramática, lógica e retórica, que constituía a base fundamental para a formação. E para aprofundamento, seguia ao *Quadrivium*: aritmética, música, geometria e astronomia. Não obstante, da metade do século XIX, com o surgimento da ciência moderna, aumentaram consideravelmente a quantidade de disciplinas, perdendo a essência de serem vias e meios para a formação básica fundamental.

Contudo, os documentos orientadores nacionais e estaduais sugerem e anseiam pela implementação do trabalho interdisciplinar.

Em vista disso, propomos um projeto interdisciplinar com um assunto relevante e de grande alcance, que aborda temas que envolvem profundamente os componentes curriculares Biologia, Física, Matemática e Química, além de Artes, História, Língua Portuguesa e Geografia.

Ademais, recomenda-se que as competências socioemocionais sejam trabalhadas de forma intencional no desenvolvimento das aulas, assim como os temas contemporâneos transversais.

As competências socioemocionais dizem respeito às

capacidades individuais que se manifestam nos modos de pensar, sentir e nos comportamentos ou atitudes para se relacionar consigo mesmo e com os outros, estabelecer objetivos, tomar

decisões e enfrentar situações adversas ou novas (SENNÁ, 2020).

Enquanto que os temas contemporâneos transversais são temas abordados nas disciplinas/áreas do conhecimento relevantes para o cotidiano do aluno, de maneira à formá-lo e instruí-lo .

Por conseguinte, escolhemos para nosso projeto a competência socioemocional **curiosidade para aprender** (É a paixão pela aprendizagem e exploração intelectual, relacionada também à investigação, à pesquisa, ao pensamento crítico e à resolução de problemas) e os temas contemporâneos transversais **meio ambiente e saúde**.

O projeto interdisciplinar foi pensado de forma geral, porém, cada disciplina terá de elaborar seu próprio plano de aula que contemple o projeto (MACHADO; D'AMBROSIO, 2014), (EDUCAÇÃO, 2018), (EDUCAÇÃO, 2019), (EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2020), (SENNÁ, 2020), (ESTADO DE SÃO PAULO, 2024).

## 5.1 Projeto Interdisciplinar

**Nome do Projeto:** “Ötzi, o Homem do Gelo”. Quão antigo ele é?

**Professores:**

**Componentes Curriculares:** Artes, Biologia, Física, História, Língua Portuguesa, Matemática, Geografia, Química.

**Público Alvo:** 1<sup>a</sup> série Ensino Médio

**Justificativa:** A interdisciplinaridade promove o enriquecimento do conhecimento do aluno, evidenciando sua capacidade de desenvolver projetos e relacioná-los à vida cotidiana e ao futuro através da integração das diversas disciplinas envolvidas, possibilitando o autoconhecimento, bem como o trabalho em grupo em que todos se envolvem para um objetivo final único. Além disso, permite o envolvimento saudável entre os professores com o intuito de facilitar e reconstruir a união entre as disciplinas, que por vezes, não se dialogam entre si, apesar, da conexão existente entre elas.

**Objetivos gerais:** Estudar o fenômeno físico decaimento radioativo para aplicação na datação de artefatos/objetos/organismos fósseis, através da história de “Ötzi, o Homem do Gelo”.

**Objetivos específicos por disciplina:**

**Artes:** Elaborar material para exposição referente aos conteúdos encontrados sobre costumes e culturas, estilo de vida, alimentação da população da época de Ötzi.

**Biologia:** Pesquisar sobre fotossíntese, ciclo do carbono, o processo de absorção dos isótopos de carbono, efeito estufa, aquecimento global relacionando com a descoberta de Ötzi.

**Física:** Pesquisar sobre os impactos da radioatividade para humanidade.

**Geografia:** Estudar e elaborar um mapa da região de onde (possivelmente) era e de onde foi encontrado Ötzi.

**História:** Pesquisar em vídeos e textos sobre “Ötzi, o Homem do Gelo”, buscando dados da época em que viveu, quais seriam os possíveis costumes e as culturas, estilo de vida, alimentação.

**Língua Portuguesa:** Elaborar textos informativos e/ou relatório sobre os estudos realizados nas demais disciplinas, bem como, apresentá-los de forma escrita e/ou por mídias digitais.

**Matemática:** Realizar experimento probabilístico com moedas e elaborar gráficos, para simular o decaimento radioativo de átomos. Realizar cálculos para encontrar a quantidade de carbono-14 existente no fóssil Ötzi, para a idade estimada divulgada e/ ou realizar cálculos para determinar a idade do fóssil.

**Química:** Estudar os átomos em sua estrutura e decaimento para compreender como funciona a datação de fósseis por carbono-14. Pesquisar sobre os estudos realizados no DNA de Ötzi para a busca de descendentes atuais.

### **Habilidades por disciplina:**

#### **Artes:**

1EM 3Bim (EM13LGG701) - Explorar tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC), compreendendo seus princípios e funcionalidades, e utilizá-las de modo ético, criativo.

1EM 4Bim (EM13LGG703) Utilizar diferentes linguagens, mídias e ferramentas digitais em processos de produção coletiva, colaborativa e projetos autorais em ambientes digitais.

#### **Biologia:**

1EM 2Bim (EM13CNT102) Realizar previsões, avaliar intervenções e/ou construir protótipos de sistemas térmicos que visem à sustentabilidades, considerando sua composição e os efeitos das variáveis termodinâmicas sobre seu

funcionamento, considerando também o uso de tecnologias digitais que auxiliem no cálculo de estimativas e no apoio à construção dos protótipos.

1EM 3Bim (EM13CNT105) Analisar os ciclos biogeoquímicos e interpretar os efeitos de fenômenos naturais e da interferência humana sobre esses ciclos, para promover ações individuais e/ou coletivas que minimizem consequências nocivas à vida.

#### **Física:**

1EM 3Bim (EM13CNT303) Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações.

#### **Geografia:**

1EM 1Bim (EM13CHS106) Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

1EM 2Bim (EM13CHS104) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

#### **História:**

1EM 2Bim, (EM13CHS103) Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).

1EM 2Bim (EM13CHS104) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

### **Língua Portuguesa:**

1EM 1Bim (EM13LP45) Analisar, discutir, produzir e socializar, tendo em vista temas e acontecimentos de interesse local ou global, notícias, fotodenúncias, fotorreportagens, reportagens multimidiáticas, documentários, infográficos, podcasts noticiosos, artigos de opinião, críticas da mídia, vlogs de opinião, textos de apresentação e apreciação de produções culturais (resenhas, ensaios etc.) e outros gêneros próprios das formas de expressão das culturas juvenis (vlogs e podcasts culturais, gameplay etc.), em várias mídias, vivenciando de forma significativa o papel de repórter, analista, crítico, editorialista ou articulista, leitor, vlogueiro e booktuber, entre outros.

1EM 2Bim (EM13LP16) Produzir e analisar textos orais, considerando sua adequação aos contextos de produção, à forma composicional e ao estilo do gênero em questão, à clareza, à progressão temática e à variedade linguística empregada, como também aos elementos relacionados à fala (modulação de voz, entonação, ritmo, altura e intensidade, respiração etc.) e à cinestesia (postura corporal, movimentos e gestualidade significativa, expressão facial, contato de olho com plateia etc.).

1EM 4Bim (EM13LP18) - Utilizar softwares de edição de textos, fotos, vídeos e áudio, além de ferramentas e ambientes colaborativos para criar textos e produções multissemióticas com finalidades diversas, explorando os recursos e efeitos disponíveis e apropriando-se de práticas colaborativas de escrita, de construção coletiva do conhecimento e de desenvolvimento de projetos.

### **Matemática:**

1EM 1Bim (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

1 EM 3 Bim (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

#### **Química:**

1EM 3Bim (EM13CNT201) Analisar e discutir modelos, teorias e leis propostos em diferentes épocas e culturas para comparar distintas explicações sobre o surgimento e a evolução da Vida, da Terra e do Universo com as teorias científicas aceitas atualmente.

1EM 4Bim (EM13CNT208) Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana.

#### **Competência Socio-emocional:**

**Curiosidade para aprender:** É a paixão pela aprendizagem e exploração intelectual, relacionada também à investigação, à pesquisa, ao pensamento crítico e à resolução de problemas

#### **Temas Contemporâneos Transversais:**

- Meio ambiente – Educação Ambiental
- Saúde – Saúde

#### **Objetos do Conhecimento por disciplina:**

**Artes:** Material para exposição referente aos conteúdos encontrados sobre cultura e costumes da população da época de Ötzi.

**Biologia:** Efeito estufa: consequências da intensificação, ciclo do carbono.

**Física:** Impactos da radioatividade para humanidade.

**Geografia:** Mapa, localização.

**História:** População, cultura, estilo de vida, alimentação.

**Língua Portuguesa:** Produção de textos, relatórios, mídias digitais.

**Matemática:** Tabelas, gráficos, funções exponenciais.

**Química:** Modelos atômicos, átomos instáveis, número atômico  $Z$ , número de massa  $A$ , prótons, nêutrons, elétrons, decaimentos por emissão de partículas  $\alpha$ ,  $\beta$ , radiação  $\gamma$ , meia-vida, transformação em outros elementos, DNA.

**Procedimentos metodológicos:** Apresentação do projeto aos alunos pelos professores envolvidos, indicando cada passo a ser tomado, com organização e datas intermediárias de entrega de cada etapa, dando abertura ao alunos para que opinem sobre as ideias e os prazos para a realização dos trabalhos. Os estudos serão apresentados através de textos/relatórios impressos e/ou em alguma mídia digital, bem como em seminários e por fim, serão orientados a elaborar uma aula com rotação por estações <sup>1</sup> para os demais alunos da escola. Os alunos serão divididos em pequenos grupos, de maneira que todos possam desenvolver as atividades e participar ativamente do projeto.

**Recursos didáticos e Materiais:** Notebook, internet, quadro branco, pincel para quadro branco, cartolina, folha sulfite, papel milimetrado, lápis, borracha, lápis de cor e canetinhas coloridas.

**Duração:** 1 semana

**Duração em horas/aulas por disciplina:**

Artes, Biologia, Física, Geografia, História e Química: 2 h/a

Língua Portuguesa: 4 h/a

Matemática: 5 h/a

---

<sup>1</sup> É uma metodologia ativa em que são propostas atividades independentes e diferenciadas sobre o mesmo assunto, dispostas em “estações”.

**Avaliação:** Ocorrerá durante o processo, observando o engajamento e a realização das atividades e na apresentação final, autoavaliação e avaliação individual.

**Referências:**

EDUCAÇÃO BRASIL, Ministério da. **Base Nacional Comum Curricular Ensino Médio:** Educação é a Base. Brasília: [s.n.], 2018.

EDUCAÇÃO BRASIL, Ministério da. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC:** Propostas de Práticas de Implementação. [S.l.: s.n.], 2019.

EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, Secretaria da. **Currículo Paulista Ensino Médio.** São Paulo [s.n.], 2020.

EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, Secretaria da. **Escopo Sequência 2024 Habilidades.**[S.l.: s.n.], 2024.

MACHADO, Nilson José; D'AMBROSIO, Ubiratan. **Ensino de Matemática: pontos e contrapontos.** São Paulo: Summus Editorial, 2014.

## 5.1.1 Plano de aula individual do Projeto Interdisciplinar - Matemática

### 5.1.1.1 Parte I - Experimento com moedas: representação do decaimento radioativo

**Introdução:** Para representar que o decaimento radioativo ocorre de forma probabilística, ou seja, não necessariamente após um período de meia-vida terá decaído a metade dos átomos, será realizado um experimento utilizando moedas organizadas com a mesma face para cima representando os átomos radioativos, que estarão dentro de uma caixa. A caixa será sacudida para que todas as moedas possam ser viradas e reviradas, depois serão retiradas as moedas que mudaram de face, e estas, representarão os átomos desintegrados.

**Objetivo Geral:** Direcionar/estimular o aluno a reconhecer que o desintegração/decaimento radioativo se dá de forma probabilística, tal como aparecer cara ou coroa em determinados lançamentos de uma moeda.

#### **Objetivos Específicos:**

- Compreender que o decaimento radioativo acontece de forma probabilística.
- Compreender o processo de meia-vida no decaimento radioativo.
- Elaborar tabelas e gráficos indicativos de decaimento radioativo.

**Tempo estimado:** 02 horas/aula

#### **Recursos Didáticos:**

- Moedas (no mínimo 64 unidades).
- Balança digital.
- Folha quadriculada ou notebook.
- Lápis, borracha e régua.

**Metodologia:** Experimentação

**Desenvolvimento:**

**1ª Etapa:**

**Passo 1:** As moedas serão pesadas e organizadas dentro de uma caixa, todas com a mesma face virada para cima, suponhamos que seja a face cara.

**Passo 2:** As informações (peso antes do 1º lançamento e peso depois de cada lançamento, número de lançamentos e número de moedas viradas da face inicial) deverão ser organizadas em tabelas, para posterior elaboração de gráficos.

**Passo 3:** Na sequência, a caixa será sacudida para que as moedas possam virar e mudar de face.

**Passo 4:** Em seguida, a caixa será aberta e dela retiradas, contadas e anotadas todas as moedas que mudaram de face.

**Passo 5:** Pesar as moedas retiradas e anotar, essas representarão os átomos que se desintegraram.

**Passo 6:** Organizar as moedas retiradas, empilhando-as uma em cima da outra, sobre uma mesa, anotar a rodada e a quantidade de moedas que mudaram de face.

Repetir os lançamentos até que as moedas se acabem ou no máximo por 10 lançamentos, o que ocorrer primeiro. A quantidade de 10 lançamentos é para representar a quantidade máxima de meias-vidas em que a datação por carbono-14 é confiável, ou seja, 10 meias-vidas.

Fotografar as colunas formadas pelas moedas, que servirá apenas para observação.

**2ª Etapa:** Com os dados coletados, (número de rodadas, quantidade de moedas retiradas na rodada e pesos), elaborar um gráfico, anotando no eixo das abscissas os números das rodadas e no eixo das ordenadas a quantidade de moedas retiradas em cada rodada.

O ato de pesar as moedas, tem o intuito de observação, pois, na definição

de datação por carbono-14, fala-se da quantidade de massa que se mantém em cada tempo de meia-vida passada.

Realizar as etapas 1 e 2, pelo menos seis vezes para se obter gráficos para comparações.

**Avaliação:** Será avaliado o desenvolvimento das atividades, conforme o engajamento do aluno e a elaboração dos gráficos, em relação à organização, identificação da tabela e dos gráficos.

5.1.1.2 Parte II - Aplicação dos problema: “Ötzi, o Homem do Gelo. Quão antigo ele é?”

**Objetivo Geral:** Estudar funções exponencias através de descobertas científicas.

**Objetivos Específicos:**

- Estudar funções exponenciais.
- Utilizar funções exponenciais para determinar por decaimento radioativo a idade da múmia Ötzi, descoberta em Ötztal, Itália.
- Analisar os dados obtidos nas atividades das Partes I e II.
- Elaborar relatório sobre os estudos e resultados obtidos nas atividades das Partes I e II.

**Tempo estimado:** 3 horas/aula

**Recursos Didáticos:**

- Atividade impressa.
- Caneta, lápis, borracha.
- Notebook

**Metodologia:** Resolução de problemas.

**Desenvolvimento:** Será entregue aos grupos uma folha com os problemas sobre a datação da múmia Ötzi - enunciados a seguir - para que todos os integrantes dos grupos possam resolver juntos, porém, cada aluno precisa ter a resolução no seu caderno. Cada grupo entregará um trabalho final no qual devem ser registrados as duas partes que envolvem o Projeto interdisciplinar “Ötzi, o Homem do Gelo. Quão antigo ele é?”

**Avaliação:** Será avaliado o desenvolvimento das atividades, conforme o engajamento do aluno e a resolução do problema sobre a datação por carbono-14.

**Problema 1:** Após pesquisas realizadas sobre “Ötzi, o Homem do Gelo”, vimos que essa múmia apresentava a proporção de carbono  $^{14}C$  para carbono  $^{12}C$  de 52,5%, sabendo que a meia-vida do  $^{14}C$ , é de 5730 anos, realize os cálculos para determinar a idade aproximada do fóssil.

**Problema 2:** Após pesquisas realizadas sobre “Ötzi, o Homem do Gelo”, vimos que essa múmia viveu há aproximadamente 5300 anos. Sabendo que a meia-vida do  $^{14}C$ , é de 5730 anos, determine qual era a proporção de carbono  $^{14}C$  para carbono  $^{12}C$  no momento em que foi feita a datação do fóssil.

### 5.1.2 Tabelas e gráficos do experimento decaimento radioativo com as moedas

Nesta seção, apresentaremos o experimento realizado em casa, como teste.

Foram realizados seis experimentos, utilizando 64 moedas, dispostas dentro de uma caixa de sapatos, com as faces cara para cima. Cada experimento, poderia durar no máximo 10 rodadas, indicando a quantidade confiável de meias-vidas. Mas, se chegou apenas até a 7<sup>a</sup> rodada, os outros na 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup>, sendo dois experimentos em cada uma dessas três situações. Indicando que, no máximo com sete meias-vidas, os átomos teriam decaído.

Na Figura 31 são apresentadas as fotos dos primeiros passos do experimento

“EXP I” e o empilhamento das moedas retiradas (átomos desintegrados) em cada rodada (tempo de meia-vida).

Na Figura 32, estão expostas as tabelas com os dados individuais em relação a cada conjunto de rodadas, ou seja, uma rodada equivale à um tempo de meia-vida, sendo a rodada 0, o início, em que a quantidade de “átomos” é o total, no caso 64. A cada rodada, foi anotada a quantidade de moedas que viraram com a face coroa para cima, retiradas da caixa e pesadas, estas representam os átomos desintegrados. As tabelas estão nomeadas por “Exp” de experimento, do I ao VI; a coluna “Metade” mostra exatamente a metade de cada valor, servindo de parâmetro para comparação e a coluna “Retiradas” são as moedas que mudaram de face e representam os átomos desintegrados, retirados da caixa. Para gerar os gráficos foram utilizados apenas os dados das colunas “Retiradas”.

Observa-se que as linhas dos gráficos se remontam em alguns pontos, principalmente com a linha do parâmetro “Metade”, indicando que os valores obtidos estão próximos do ideal.

A tabela da Figura 33 apresenta os dados de todas as rodadas - tempo de meia-vida - de forma mais simples e objetiva.

Os gráficos da Figura 34 representam o decaimento radioativo por tempo de meia-vida, cada linha é um conjunto de rodadas, que representa todo o período que os átomos levariam para se desintegrar totalmente. A linha “Metade” ficou suprimida sob as outras, o que indica que todos valores chegaram próximo do valor ideal.

Como as linhas dos gráficos ficaram sobrepostas, foi puxado *zoom* em uma parte do gráfico para tentarmos identificar cada uma delas e é apresentado na Figura 35.

### 5.1.3 Resolução dos problemas: “Ötzi, o Homem do Gelo. Quão antigo ele é?”

**Problema 1:** Após pesquisas realizadas sobre “Ötzi, o Homem do Gelo”, vimos que essa múmia apresentava a proporção de carbono  $^{14}C$  para carbono  $^{12}C$

de 52,5%, sabendo que a meia-vida do  $^{14}\text{C}$ , é de 5730 anos, realize os cálculos para determinar a idade aproximada do fóssil.

**Resolução:**

Função para datação por carbono-14

$$y = y_0 e^{kt} \quad (5.1)$$

A partir da função (5.1), vamos determinar

$k$ , a constante de decaimento radioativo, utilizando

$t = 5730$  como tempo de meia-vida do  $^{14}\text{C}$ , ou seja

$y = 0,5 y_0$ , quantidade de  $^{14}\text{C}$  na amostra, no tempo  $t = 5730$ .

Inicialmente, calculemos o valor de  $k$ , substituindo os dados em (5.1),

$$0,5y_0 = y_0 e^{5730k}$$

aplicando  $\ln$ , que é a inversa de  $e$ , em ambos os lados da igualdade,

$$\ln 0,5 = 5730k \Rightarrow k = \frac{\ln 0,5}{5730} \Rightarrow k = -0,00012096.$$

Agora, para determinar  $t$ , a idade do fóssil, vamos usar o valor de  $k$  na equação(5.1), e  $y = 0,525 y_0$ , que é a quantidade de  $^{14}\text{C}$  da amostra (52,5%).

$$0,525 y_0 = y_0 e^{-0,00012096t}.$$

Aplicando novamente  $\ln$ , em ambos os lados da igualdade,

$$\ln 0,525 = -0,00012096 t \Rightarrow t = -\frac{\ln 0,525}{0,00012096} \Rightarrow t = 5327.$$

Portanto, a idade aproximada de Ötzi é de 5300 anos.

**Problema 2:** Após pesquisas realizadas sobre “Ötzi, o Homem do Gelo”, vimos que essa múmia viveu há aproximadamente 5300 anos. Sabendo que a meia-vida do  $^{14}\text{C}$ , é de 5730 anos, determine qual era a proporção de carbono  $^{14}\text{C}$  para carbono  $^{12}\text{C}$  no momento em que foi feita a datação do fóssil.

**Resolução:**

Função para datação por carbono-14

$$y = y_0 e^{kt}. \quad (5.2)$$

A partir da função (5.2), vamos determinar

$k$ , a constante de decaimento radioativo, utilizando

$t = 5730$  como tempo de meia-vida do carbono-14, isto é,

$y = 0,5 y_0$ , quantidade de  $^{14}\text{C}$  na amostra, no tempo  $t$ .

Inicialmente, calculemos o valor de  $k$ , substituindo os dados em (5.2),

$$0,5 y_0 = y_0 e^{5730 k}.$$

Aplicando  $\ln$ , que é a inversa de  $e$ , em ambos os lados da igualdade,

$$\ln 0,5 = 5730 k \Rightarrow k = \frac{\ln 0,5}{5730} \Rightarrow k = -0,00012096.$$

Agora, para determinar  $x$ , que é a proporção de  $^{14}\text{C}$  no fóssil quando foi encontrado, vamos usar o valor de  $k$  na equação (5.2), e  $y = x y_0$ , que é a quantidade de  $^{14}\text{C}$  na amostra no tempo  $t = 5300$ , que é a idade divulgada do fóssil.

$$x y_0 = y_0 e^{-0,00012096 \cdot 5300}.$$

Resolvendo

$$x = e^{-0,00012096 \cdot 5300} \Rightarrow x = 0,5267 \Rightarrow x = 52,67\%.$$

Portanto, a quantidade de  $^{14}\text{C}$  na amostra em relação a  $^{12}\text{C}$  quando foi datada, era de aproximadamente 52,67%.

Figura 31 – Fotos da primeira rodada do experimento e empilhamento das moedas no final do “EXP I”



a) Massa inicial das 64 moedas: 463 g



b) Moedas prontas para o experimento



c) Moedas coroa para retirar



d) Moedas após a primeira retirada



e) Massa das moedas retiradas na Rodada I: 224 g



f) Moedas retiradas em cada rodada - desintegradas em 5 meias-vidas

Fonte: Elaborado pela autora 16/01/2025

(Retornar ao texto)

Figura 32 – Tabelas Experimento Decaimento Radioativo com moedas: retiradas e pesadas

Metade	EXP I	Cara Rodada	Coroa Retirada I	Ficaram	Peso retirado	Peso que ficou	EXP II	Cara Rodada	Coroa Retirada II	Ficaram	Peso retirado	Peso que ficou	EXP III	Cara Rodada	Coroa Retirada III	Ficaram	Peso retirado	Peso que ficou
64	Início	0	64	64	0	463	Início	0	64	64	0	463	Início	0	64	64	0	463
32		1	31	33	224	239		1	29	35	209	254		1	31	33	223	240
16		2	21	12	152	87		2	18	17	130	124		2	15	18	110	130
8		3	6	6	45	42		3	7	10	52	72		3	7	11	53	77
4		4	4	2	29	13		4	6	4	44	28		4	4	7	29	48
2		5	2	0	15	-2		5	3	1	21	7		5	5	2	37	11
1		6						6	1	0	8	-1		6	1	1	8	3
		7						7		0				7	1	0	7	-4
		8						8		0				8		0		
		9						9		0				9		0		
		10						10		0				10		0		

Metade	EXP IV	Cara Rodada	Coroa Retirada IV	Ficaram	Peso retirado	Peso que ficou	EXP V	Cara Rodada	Coroa Retirada V	Ficaram	Peso retirado	Peso que ficou	EXP VI	Cara Rodada	Coroa Retirada VI	Ficaram	Peso retirado	Peso que ficou
64	Início	0	64	64	0	463	Início	0	64	64	0	463	Início	0	64	64	0	463
32		1	27	37	198	265		1	24	40	174	289		1	33	31	241	222
16		2	14	23	101	164		2	25	15	161	108		2	16	15	117	105
8		3	7	16	51	113		3	9	6	65	43		3	7	8	51	54
4		4	7	9	51	62		4	4	2	31	12		4	5	3	37	17
2		5	5	4	37	25		5	2	0	16	-4		5	2	1	14	3
1		6	2	2	14	11		6		0				6	1	0	8	-5
		7	2	0	15	-4		7		0				7		0		
		8						8		0				8		0		
		9						9		0				9		0		
		10						10		0				10		0		

Fonte: Elaborado pela autora 16/01/2025

(Retornar ao texto)

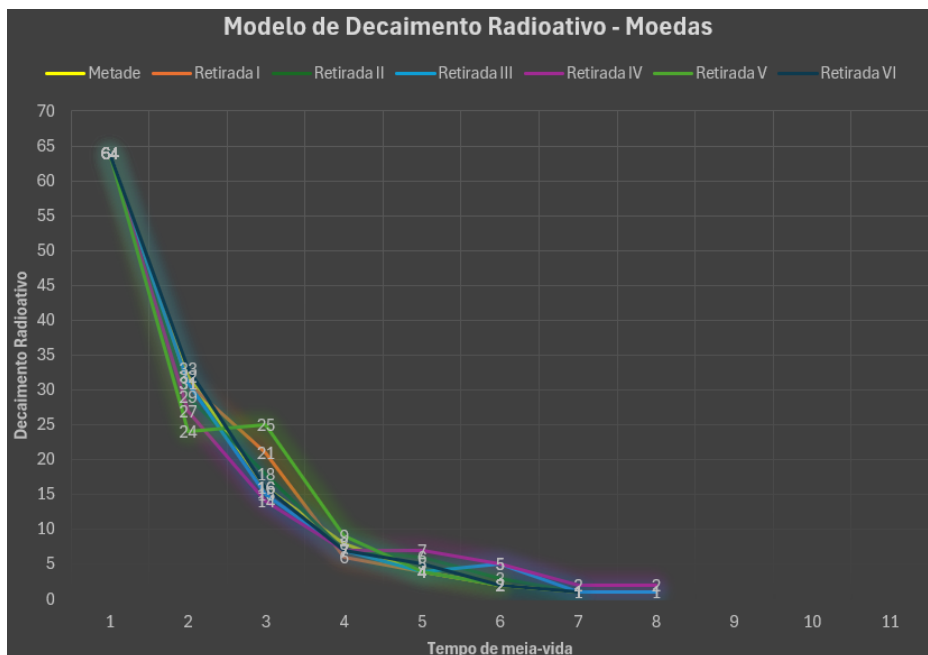
Figura 33 – Tabela unificada experimento decaimento radioativo com moedas

Tabela de Dados	Tempo de meia-vida										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Metade	64	32	16	8	4	2	1				
Retirada I	64	31	21	6	4	2					
Retirada II	64	29	18	7	6	3	1				
Retirada III	64	31	15	7	4	5	1	1			
Retirada IV	64	27	14	7	7	5	2	2			
Retirada V	64	24	25	9	4	2					
Retirada VI	64	33	16	7	5	2	1				
	Quantidade de "átomos" desintegrados										

Fonte: Elaborado pela autora 16/01/2025

(Retornar ao texto)

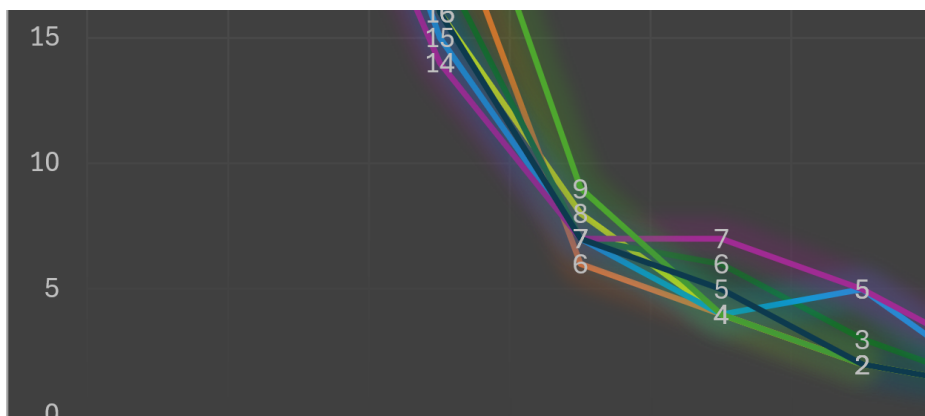
Figura 34 – Gráficos experimento decaimento radioativo com moedas



Fonte: Elaborado pela autora 16/01/2025

(Retornar ao texto)

Figura 35 – Gráficos experimento decaimento radioativo com moedas, com zoom para identificar as sete linhas



Fonte: Elaborado pela autora 16/01/2025

(Retornar ao texto)

## 6 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo estudar a solução da equação diferencial ordinária (EDO) de 1ª ordem que envolve uma função exponencial e relacionar o ensino desta função às aulas do Ensino Médio. Para isso foi promovido a integração entre conhecimentos matemáticos e conhecimentos das ciências naturais, com foco na aplicação das EDOs no contexto da datação por carbono-14. Para compreender como as ferramentas matemáticas auxiliam no entendimento de fenômenos naturais, como o decaimento radioativo, iniciamos os estudos sobre equações diferenciais, desde sua definição, classificação e métodos de resolução.

Para entender a datação por carbono-14 foi feita uma pesquisa histórica da radioatividade e da evolução dos modelos atômicos.

O estudo do caso “Ötzi, o Homem do Gelo” serviu de motivação para elaboração de um projeto interdisciplinar onde se explorou entre outros temas o ensino da função exponencial. Este projeto contribui para tornar o conteúdo mais acessível e atrativo aos estudantes da educação básica, conectando teoria e prática de maneira envolvente. A simulação probabilística do decaimento radioativo com moedas, aliada à análise dos dados obtidos, pode proporcionar aos alunos a oportunidade de vivenciar o processo científico de forma ativa e colaborativa.

Consideramos que o projeto interdisciplinar apresentado neste trabalho enriquece o processo de ensino-aprendizagem, bem como destaca a aplicabilidade dos conhecimentos escolares em problemas do mundo real. Podendo assim servir de estímulo à curiosidade e engajamento dos estudantes.

Esperamos que este trabalho possa ser implementado em práticas pedagógicas e sirva de inspiração para novas abordagens que promovam a construção do conhecimento de forma crítica, contextualizada e integrada.



## Referências

ATKINS PETER; JONES, Loretta. **Princípios de Química: questionando a vida moderna e o meio ambiente**. Porto Alegre: 5. ed., Bookman, 2012.

BOWMAN, Sheridan. **Radiocarbon dating**. [S.l.]: Univ of California Press, 1990. v. 1.

BOYCE W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: 11. ed., LTC, 2020.

BRASIL, BBC news. **Quem foi o verdadeiro Robert Oppenheimer, criador da bomba atômica**. [S.l.: s.n.], 2019. Acesso em 29/11/2023. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/articles/c51dxvv1jgzo>>.

BRASIL, BBC News. **10 anos de Fukushima: o dia em que o Japão foi atingido por terremoto, tsunami e acidente nuclear**. [S.l.: s.n.], 2021. Acesso em 25/11/2024. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/internacional-55943220>>.

BRASIL, INB - Indústrias Nucleares do. **Ligado na Energia: Ciclo do combustível nuclear**. [S.l.: s.n.], 2014. Acesso em 30/11/2023. Disponível em: <[https://youtu.be/eWV1JVrR\\_oU?si=KJD0zZi9jFSzAh93](https://youtu.be/eWV1JVrR_oU?si=KJD0zZi9jFSzAh93)>.

BROWN, Robert. XXVII. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. **The Philosophical Magazine**, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828. DOI: 10.1080/14786442808674769. eprint: <https://doi.org/10.1080/14786442808674769>. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786442808674769>>.

CLARK, Robert. **National Geographic Portugal: O mistério do famoso Homem do Gelo**. [S.l.: s.n.], 2022. Acesso em 30/01/2025. Disponível em: <[https://www.nationalgeographic.pt/historia/o-misterio-do-famoso-homem-do-gelo\\_2472](https://www.nationalgeographic.pt/historia/o-misterio-do-famoso-homem-do-gelo_2472)>.

EDUCAÇÃO, Ministério da. **Base Nacional Comum Curricular Ensino Médio**: Educação é a Base. Brasília: [s.n.], 2018.

\_\_\_\_\_. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: Proposta de Práticas de Implementação. [S.l.: s.n.], 2019. Acesso em 17/01/2025. Disponível em: <[https://www.gov.br/mec/pt-br/areas-de-atuacao/eb/guia\\_pratico\\_temas\\_contemporaneos.pdf](https://www.gov.br/mec/pt-br/areas-de-atuacao/eb/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf)>.

EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, Secretaria da. **Currículo Paulista Etapa Ensino Médio**. São Paulo: [s.n.], 2020.

EDWARDS JR C. H.; PENNY, D. E. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: 3. ed., Prentice Hall do Brasil, 1995.

ESTADO DE SÃO PAULO, Secretaria da educação do. **Escopo Sequência 2024 Habilidades**. [S.l.: s.n.], 2024. Acesso em 18/01/2025. Disponível em: <[https://docs.google.com/spreadsheets/d/1NF2mqLAKabsgxkI1BsK8tZrCZS\\_CfdBX/edit?gid=1153873713#gid=1153873713](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1NF2mqLAKabsgxkI1BsK8tZrCZS_CfdBX/edit?gid=1153873713#gid=1153873713)>.

FORNASIER, Massimo. Modeling and Simulation with ODE (MSE).

GAROZZO, Fillipe. **Wilhelm Roentgen. Os homens que mudaram a humanidade, Volume 28**. São Paulo: Três, 1975.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física - Óptica e Física Moderna Volume 4**. Rio de Janeiro: 9. ed., LTC, 2012.

KELLER, Andreas et al. New insights into the Tyrolean Iceman's origin and phenotype as inferred by whole-genome sequencing. **Nature communications**, Nature Publishing Group UK London, v. 3, n. 1, p. 698, 2012.

KUTSCHERA, Walter. 4.4 Radiocarbon dating of the Iceman Ötzi with accelerator mass spectrometry. **Inst. Isot. Res. Nucl. Phys. Univ. Vienna**, p. 1–9, 1994.

LEGISLATIVA, Assembleia. **Documentário - Césio 137 (30 anos)**. [S.l.: s.n.], 2017. Acesso em 29/11/2024. Disponível em: <<https://youtu.be/hzCq30Uq4ts?si=FkFbvVEnCR752a>>.

- MACHADO, Nilson José; D'AMBROSIO, Ubiratan. **Ensino de Matemática: pontos e contrapontos**. São Paulo: Summus Editorial, 2014.
- MULLER, Wolfgang et al. Origin and migration of the Alpine Iceman. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 302, n. 5646, p. 862–866, 2003.
- OKUNO, Emico; YOSHIMURA, Elisabeth Mateus. **Física das Radiações**. São Paulo: Oficina de textos, 2016.
- PROENÇA ROSA, Carlos Augusto de. **História da Ciência**. Brasília: Volume 3, 2. ed.FUNAG, 2012.
- ROMING, Alison; LINDBLOM, Keith. **Discovery of Radiocarbon Dating**. [S.l.: s.n.], 2016. Acesso em 01/12/2024. Disponível em: <<https://www.acs.org/content/dam/acsorg/education/whatischemistry/landmarks/willard-libby-radiocarbon-dating.pdf>>.
- SALINAS, Silvio R.A. Einstein e a teoria do movimento browniano. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Sociedade Brasileira de Física, v. 27, n. 2, p. 263–269, abr. 2005. ISSN 1806-1117. DOI: 10.1590/S1806-11172005000200013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172005000200013>>.
- SENNA, Instituto Ayrton. **Competências Socioemocionais**. [S.l.: s.n.], 2020. Acesso em 17/01/2025. Disponível em: <<https://institutoayrtonenna.org.br/app/uploads/2022/10/instituto-ayrton-senna-macrocompetencia-abertura-ao-novo.pdf>>.
- STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Volume 2, 7. ed., Cengage Learning, 2013.
- STODOLNA, A. S. et al. Hydrogen Atoms under Magnification: Direct Observation of the Nodal Structure of Stark States. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 110, p. 213001, 21 mai. 2013. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.213001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.213001>>.
- TIPLER PAUL; MOSCA, Gene. **Física para Cientistas e Engenheiros Volume 1**. Rio de Janeiro: 6. ed., LTC, 2013.

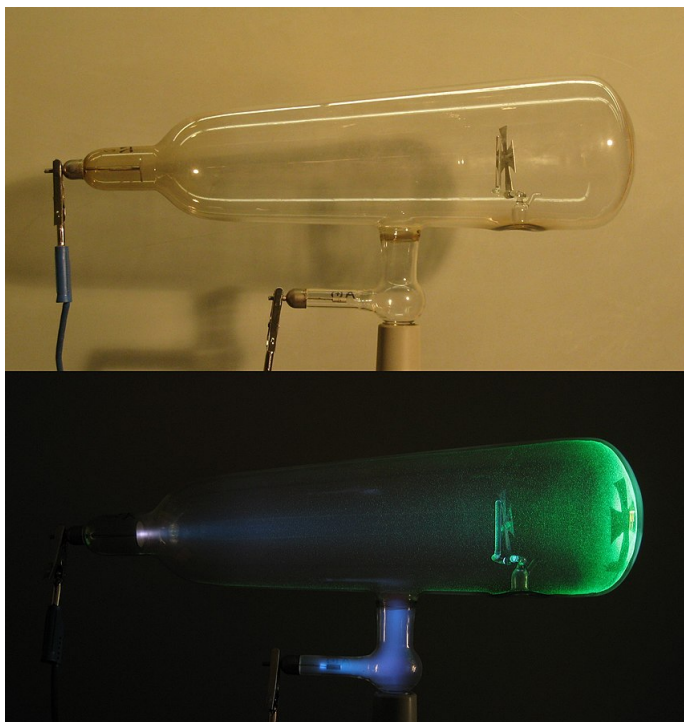
TIPLER PAUL; MOSCA, Gene. **Física para Cientistas e Engenheiros**  
**Volume 3**. Rio de Janeiro: 6. ed., LTC, 2014.

VIDAL, Bernard. **História da Química**. São Paulo: 1. ed., 70, 1986.

## APÊNDICE A – Figuras

### Tubo de Crookes

Figura 36 – Tubo de Crookes



Fonte: Wikimedia s.d. Disponível em [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/bf/Crookes\\_tube\\_two\\_views.jpg/859px-Crookes\\_tube\\_two\\_views.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/bf/Crookes_tube_two_views.jpg/859px-Crookes_tube_two_views.jpg) Acesso em 15/11/2024

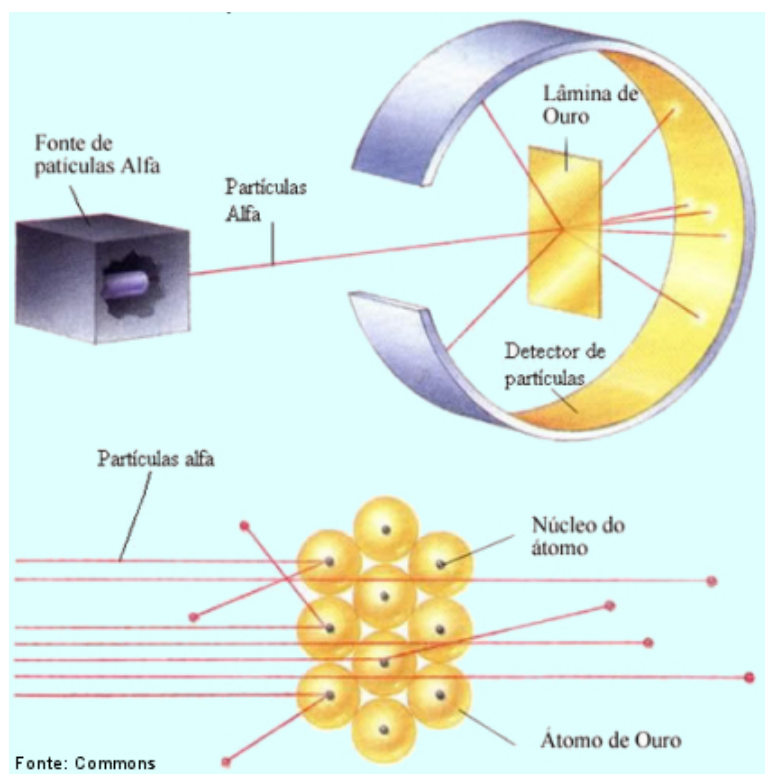
O tubo de Crookes (Figura 36) é uma ampola de vidro ou quartzo, fechada a vácuo, que em seu interior continha gás rarefeito e duas placas/filamentos de metal - polos - sendo uma positiva, chamada de “cátodo” e outra negativa, “ânodo”, em alguns experimentos esses filamentos eram de tungstênio. Neste experimento, feito por muitos cientistas, aplicava-se uma descarga elétrica de aproximadamente  $10^4$  volts na extremidade da ampola, e por causa do ar rarefeito, era produzido um feixe luminoso, denominado “raios catódicos”. Para estudar esses raios, Thomson

colocou um anteparo dentro do tubo para verificar a direção dessa luz, e observou a partir da sombra exibida pelo anteparo, que o feixe luminoso seguia em linha reta. Assim, percebeu que o feixe não era uma luz normal, pois, se fosse luz, iluminaria todo o ambiente que a continha, o que não ocorria. Então, Thomson colocou no lugar do anteparo, um pequeno catavento de mica - material muito leve - e ativou o feixe luminoso, que fez com que o catavento se movesse. Dessa forma, ele verificou que realmente o feixe não era luz, visto que luz não tem massa, portanto, Thomson confirmou que o ar rarefeito de dentro da ampola liberava pequenas partículas com massa. Feito isso, ele colocou próximo da ampola, em lados opostos, uma placa positiva e uma negativa, e o feixe que seguia uma direção reta, se curvou para o lado da placa positiva. Com isso, Thomson verificou que essas partículas eram carregadas negativamente, e foram identificadas como elétrons. Os raios catódicos também passaram a ser muito utilizados em televisores de tubo, para geração de imagens. A partir deste experimento, J.J. Thomson, elaborou o seu modelo atômico, conhecido por “Pudim de Passas”, que mantinha o átomo maciço como do modelo de Dalton, mas com massa de carga positiva e envolvida por partículas com carga negativa, que neutraliza a carga do átomo, e que deixou de ser indivisível, pois a descarga elétrica aplicada liberava os elétrons do átomo de gás. (Retornar ao texto)

Uma amostra de polônio (Po), era colocada em um recipiente de chumbo com um pequeno orifício, pelo qual eram emitidas radiações de partículas  $\alpha$ , que se chocavam com uma finíssima lâmina de ouro (Figura 37). Depois que as partículas passavam pela lâmina, elas eram limitadas por uma película de sulfeto de zinco, que formava uma barreira em volta da lâmina, as marcas deixadas pelas partículas na película, eram observadas através de microscópio. A maioria das partículas passavam pelos átomos de ouro com pouco, ou nenhum desvio, porém, algumas tinham grandes desvios e outras eram rebatidas à origem, o que levou os pesquisadores a imaginar que no átomo, existia uma porção diminuta de massa rígida e grande área vazia antes de se chegar nos elétrons. A menor porção, foi chamada de núcleo e toda a carga positiva se concentrava nele; os elétrons formavam a eletrosfera que girava em torno do núcleo em movimentos elípticos, por isso, o modelo atômico de Rutherford ficou conhecido como Sistema Solar ou Planetário.

## Experimento com Lâmina de Ouro (ATKINS PETER; JONES, 2012)

Figura 37 – Experimento: Bombardeamento de Partículas  $\alpha$  na Lâmina de Ouro



Fonte: Quimica.seed. s.d. Disponível em [http://www.quimica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/uploads/3/416expr\\_rutherford2.jpg](http://www.quimica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/uploads/3/416expr_rutherford2.jpg) Acesso em 15/11/2024

(Retornar ao texto) .

### Contadores de radiação

**Contador Geiger-Müller Pancake** (Figura 38) tem uma área de contato maior e mede contaminação, que é o caso em que o indivíduo ou o objeto teve contato direto com a fonte radioativa se tornando contaminado.

**Contador Geiger-Müller Cilíndrico** (Figura 39) mede exposição, que ocorre externamente, ou seja, quando um paciente é exposto ou irradiado em um tratamento de radioterapia, ou raios-X, por exemplo.

Figura 38 – Contador Geiger-Müller Pancake



Fonte: MRA. s.d. Disponível em <https://www.mra.com.br/medidor-de-radiacao-geiger-portatil-mra-gp500.html> Acesso em 15/11/2024

Figura 39 – Contador Geiger-Müller Cilíndrico



Fonte: Images.app. s.d. Disponível em <https://images.app.goo.gl/f9obRbo2xJxm4QsK9> Acesso em 15/11/2024

**Contador Geiger-Müller Digital** (Figura 40) é o mais moderno, mede contaminação e exposição.

Dos contadores de radiação, o medidor de cintilação 41 é o que consegue identificar qual o tipo de radiação é detectada, se  $\beta$ ,  $\gamma$  ou raios-X.

Porém, partícula  $\alpha$  não é detectada pois, ela é barrada pela janela de detecção dos aparelhos. (Retornar ao texto)

Figura 40 – Contador Geiger-Müller Digital



Fonte: Images.app. s.d. Disponível em <https://images.app.goo.gl/f9obRbo2xJxm4QsK9> Acesso em 15/11/2024

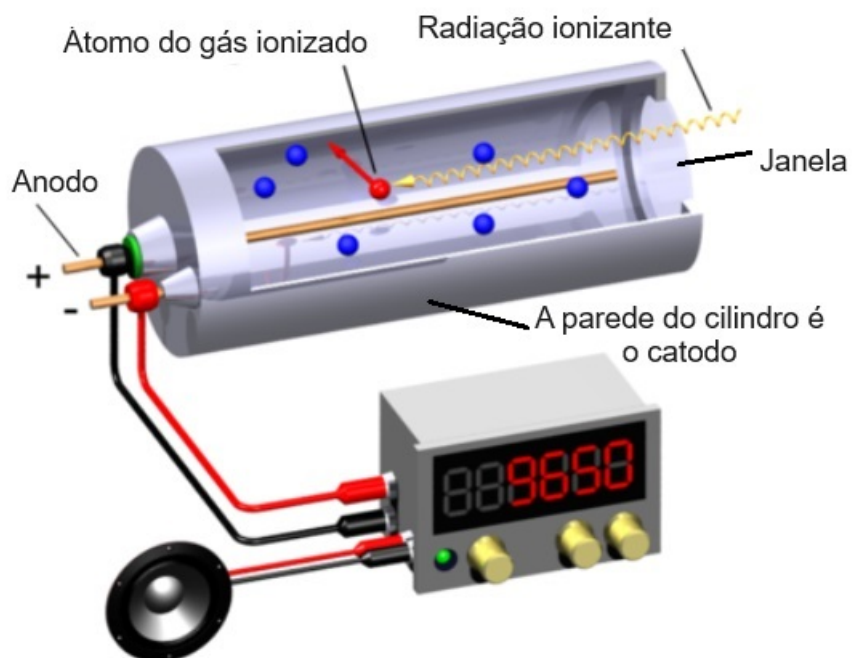
Figura 41 – Contador de Cintilação



Fonte: Raimeck. s.d. Disponível em <https://www.raimeck.com.br/assets/images/produtos/automess/produto-scintilator.jpg>

Os contadores Geiger-Müller 42 possuem um cilindro metálico preenchido de gás argônio - gás nobre, estável, abundante e pesado - sob pressão, que ao entrar em contato com alguma radiação ionizante, ele libera um elétron  $e^-$  que é atraído pelo anodo que é +, e esse movimento cria uma corrente elétrica e o sistema eletrônico do aparelho converte em som e sinais que são as medidas de radiação detectadas.

Figura 42 – Detalhes do contador Geiger-Müller



Fonte: Wp.com. s.d. Disponível em <https://i0.wp.com/cref.if.ufrgs.br/wp-content/uploads/2023/02/fig1-Geiger-Muller.png?w=545&ssl=1> Acesso em 15/11/2024

## APÊNDICE B – Informações Químicas dos Átomos

### Exemplos de isótopos de urânio:



Todos têm o mesmo número atômico 92, por isso são chamados isótopos, logo, são o mesmo elemento químico. Dos três isótopos de urânio, o mais abundante é o 238, porém, o que é físsil e tem capacidade energética é o 235, e sua incidência na natureza é muito baixa. Portanto, para ser utilizado em usinas nucleares, o urânio-235 precisa ser enriquecido, ou seja, é necessário aumentar a concentração desse isótopo. O processo consiste em separar misturas físicas e químicas do material.

### Íon, cátion e ânion

A quantidade de elétrons (carga -) na eletrosfera, é igual a de prótons em um átomo neutro.

Um átomo deixa de ser neutro quando libera ou recebe um elétron, ficando assim, **ionizado**.

Se ele **libera um elétron**, ficará com um próton a mais, se tornando um íon positivo e é denominado de **cátion**.

Se ele **recebe um elétron**, ficará com um elétron a mais, se tornando um íon negativo e é denominado de **ânion**.

### Decaimento radioativo por emissão de partículas $\alpha$ e $\beta$ e radiação

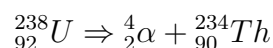
$\gamma$ .

Ao emitir partícula  $\alpha$ , o átomo tem o seu número atômico  $\mathbf{Z}$  reduzido em 2 unidades e seu número de massa  $\mathbf{A}$ , também reduzido em 2 unidades.

Ou seja,

$${}^4_2\alpha$$

Exemplo:

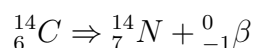


Urânio-238 decai para tório-234 por emissão de uma partícula  $\alpha$ .

A partícula  $\beta$  se comporta como um elétron, com massa desprezível e carga negativa, mas não é um elétron, pois ela sai do núcleo e não da eletrosfera. Essa partícula é derivada da reação que acontece quando um nêutron se transforma em um próton, daí, ocorre a emissão de uma partícula  $\beta$ .

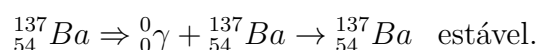
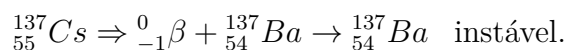
$${}^0_1n \Rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}\beta$$

Ao emitir partícula  $\beta$ , o número atômico  $\mathbf{Z}$  do átomo aumenta em 1 unidade e seu número de massa  $\mathbf{A}$  não se altera.



Carbono-14 decai para nitrogênio-14 por emissão de uma partícula  $\beta$ .

Como radiação  $\gamma$  é uma onda, ela não tem carga e nem massa, logo, não altera o número atômico  $\mathbf{Z}$  e nem o número de massa  $\mathbf{A}$  do átomo resultante e sua emissão se dá após emissão de partículas  $\alpha$  ou  $\beta$ .



Decaimento do césio-137 para bário-137 por emissão  $\beta$ , mas o bário continua instável, então, emite radiação  $\gamma$  em forma de energia para atingir a estabilidade. (Retornar ao texto).