



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



BEATRIZ DOS SANTOS SERAFIM

**O SISTEMA DE LORENZ E A ORIGEM DO CAOS EM SISTEMAS
DETERMINÍSTICOS**

SÃO CARLOS - SP
2025

BEATRIZ DOS SANTOS SERAFIM

**O SISTEMA DE LORENZ E A ORIGEM DO CAOS EM SISTEMAS
DETERMINÍSTICOS**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador(a): Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri

SÃO CARLOS - SP

2025



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA (CCM)
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 3/2026/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação

FOLHA DE APROVAÇÃO

BEATRIZ DOS SANTOS SERAFIM

O SISTEMA DE LORENZ E A ORIGEM DO CAOS EM SISTEMAS DETERMINÍSTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 11 de dezembro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Alessandra Aparecida Verri
Membro da Banca 1	Liane Bordignon
Membro da Banca 2	Alex Carlucci Rezende



Documento assinado eletronicamente por **Alessandra Aparecida Verri, Professor(a) do Ensino Superior**, em 02/04/2026, às 11:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alex Carlucci Rezende, Professor(a) do Ensino Superior**, em 03/04/2026, às 07:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Liane Bordignon, Professor(a) do Ensino Superior**, em 04/04/2026, às 18:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador 2147081 e o código CRC EE91DFF2.

*Ao meu pai, Rogério Alexandre Tateama Serafim (in memoriam), meu herói da vida toda.
Que, apesar de nos deixar tão cedo, se faz vivo em nossas memórias tão felizes.*

Agradecimentos

A conclusão desta jornada acadêmica, materializada na presente monografia, não seria possível sem o apoio inestimável e as oportunidades concedidas por aqueles que caminharam ao meu lado. É com profunda gratidão que dedico este espaço para expressar meu sincero reconhecimento.

Em primeiro e mais especial lugar, o meu agradecimento mais profundo e eterno aos meus avós. Se hoje sou capaz de trilhar o caminho do conhecimento, é por causa das sementes de oportunidade que plantaram em minha vida desde muito cedo. O incentivo incansável, o apoio incondicional e os sacrifícios dedicados à minha educação e bem-estar me proporcionaram o alicerce fundamental para alcançar este marco. Eles representam a base sólida sobre a qual construí meu futuro.

À minha amada mãe, dedico uma gratidão que transcende as palavras. Nos momentos de maior incerteza, de pressão acadêmica e de esgotamento emocional, seu apoio constante, sua força e sua presença foram meu porto seguro. As palavras de conforto e o incentivo que nunca falharam foram o motor que me impulsionou a seguir em frente e a não desistir, transformando os desafios da graduação em vitórias.

Expresso também meu reconhecimento à minha orientadora, a Professora Doutora Alessandra Verri, pela valiosa orientação científica, pela paciência e pela disponibilidade incondicional. Sua expertise e suas perspicazes contribuições foram cruciais para a evolução e a qualidade final deste trabalho.

Finalmente, sou imensamente grata às amigas que floresceram ao longo da graduação. Compartilhar a rotina, as dificuldades e as alegrias da vida universitária transformou esta experiência. Vocês foram a rede de apoio, o alívio cômico e a motivação silenciosa que tornou a jornada mais leve e significativa. As memórias e os laços criados são tesouros que levarei para além dos muros da Universidade.

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para o meu crescimento e para a realização deste sonho, o meu mais sincero muito obrigada.

“ O para sempre é composto de agoras.”
(Emily Dickinson)

Resumo

Esta monografia apresenta um estudo aprofundado sobre o Sistema de Lorenz, integrando fundamentos teóricos, análise qualitativa, análise de estabilidade e investigação numérica do comportamento caótico. Inicialmente, retomam-se os conceitos essenciais de sistemas dinâmicos — pontos de equilíbrio, linearização, bifurcações e o Segundo Método de Lyapunov — que servem de base para compreender sistemas não lineares de maior dimensão. Em seguida, desenvolve-se uma análise detalhada do Sistema de Lorenz, incluindo suas propriedades físicas relacionadas à convecção térmica, os parâmetros de Rayleigh e Prandtl, as simetrias do sistema e a contração de volume. A estabilidade dos pontos de equilíbrio é examinada, destacando-se a bifurcação de Hopf que antecede o regime caótico. Por meio de simulações numéricas com o método de Runge–Kutta de alta ordem, visualiza-se o atrator estranho, evidenciando a sensibilidade às condições iniciais e a estrutura fractal das trajetórias. O trabalho consolida, assim, a compreensão da transição do comportamento regular ao caos determinístico, caracterizando o Sistema de Lorenz como um marco na teoria moderna dos sistemas dinâmicos.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos; estabilidade; bifurcações; método de Lyapunov; Sistema de Lorenz; caos determinístico.

Abstract

This monograph presents an in-depth study of the Lorenz System, integrating theoretical foundations, qualitative analysis, stability investigation, and numerical exploration of chaotic behavior. Initially, the essential concepts of dynamical systems—equilibrium points, linearization, bifurcations, and the Second Lyapunov Method—are revisited as the theoretical basis for understanding higher-dimensional nonlinear systems. A detailed analysis of the Lorenz System is then developed, including its physical background in thermal convection, the Rayleigh and Prandtl parameters, the system's symmetries, and its volume-contracting nature. The stability of the equilibrium points is examined, with emphasis on the Hopf bifurcation that precedes chaotic behavior. Using numerical simulations with a high-order Runge–Kutta method, the strange attractor is visualized, revealing sensitivity to initial conditions and the fractal structure of the trajectories. This work therefore consolidates the understanding of the transition from regular dynamics to deterministic chaos, highlighting the Lorenz System as a landmark in the modern theory of dynamical systems.

Keywords: dynamical systems; stability; bifurcations; Lyapunov method; Lorenz System; deterministic chaos.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico do Exemplo 2.1.	16
Figura 2 – Gráfico do Exemplo 2.2.	17
Figura 3 – Potencial $V(x)$	18
Figura 4 – Gráfico Exemplo 2.3.	19
Figura 5 – Bifurcações Sela-nó.	21
Figura 6 – Gráfico Exemplo 3.1.	22
Figura 7 – Bifurcação Transcrítica.	22
Figura 8 – Bifurcação Forquilha Supercrítica.	25
Figura 9 – Bifurcação Forquilha Subcrítica.	25
Figura 10 – Gráfico Exemplo 3.3.	26
Figura 11 – Bifurcação Sela-nó em sistemas bidimensionais.	28
Figura 12 – Gráfico do Exemplo 3.4.	29
Figura 13 – Gráfico do Exemplo 3.5.	32
Figura 14 – Plano $Re(\lambda)$ para Bifurcação de Hopf.	33
Figura 15 – Bifurcação de Hopf Supercrítica.	34
Figura 16 – Bifurcação de Hopf Subcrítica.	35
Figura 17 – Trajetórias para o caso de autovalores reais e distintos de mesmo sinal.	38
Figura 18 – Trajetórias para o caso de autovalores reais com sinais oposto.	40
Figura 19 – Trajetórias para o caso de autovalores iguais e dois autovetores independentes.	41
Figura 20 – Trajetórias para o caso de autovalores iguais e um autovetor independente.	43
Figura 21 – Trajetórias para o caso de autovalores complexos com parte real não-nula.	45
Figura 22 – Trajetórias para o caso de autovalores imaginários puros.	47
Figura 23 – Trajetória do sistema (5.4).	50
Figura 24 – Ponto crítico estável.	51
Figura 25 – Ponto crítico assintoticamente estável.	51
Figura 26 – Trajetória do sistema (5.10).	53
Figura 27 – Trajetória do sistema (5.11).	54
Figura 28 – Curvas $V(x, y) = c_1$ e $V(x, y) = c_2$	57
Figura 29 – Curva no tempo t_1	58
Figura 30 – Superfície $S(t)$ de volume $V(t)$	65
Figura 31 – Área dA varrida pelo volume $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})dA$	65
Figura 32 – Elipsoides concêntricas em torno da origem.	69
Figura 33 – Retrato de fase próximo a P_2 quando $r < r_H$	70
Figura 34 – Diagrama de bifurcação parcial para $r > r_H$	71
Figura 35 – Padrão de Borboleta plotado em $x(t)$ contra $z(t)$	72

Figura 36 – Atrator Estranho com uma trajetória.	73
Figura 37 – Atrator Estranho com duas trajetórias.	73

Lista de tabelas

Tabela 1 – Autovalores reais e distintos de mesmo sinal.	39
Tabela 2 – Autovalores Reais com Sinais Opostos.	40
Tabela 3 – Autovalores iguais e dois autovetores independentes.	41
Tabela 4 – Autovalores iguais e dois autovetores independentes.	43
Tabela 5 – Autovalores complexos.	46
Tabela 6 – Autovalores imaginários puros.	47
Tabela 7 – Análise da função energia V	56

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	15
2.1	PONTOS FIXOS	15
2.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR	16
2.3	POTENCIAIS	17
3	BIFURCAÇÕES	20
3.1	BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS UNIDIMENSIONAIS	20
3.1.1	Bifurcação Sela-Nó	20
3.1.2	Bifurcação Transcrítica	22
3.1.3	Bifurcação Forquilha	24
3.2	BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS BIDIMENSIONAIS	27
3.2.1	Bifurcação Sela-Nó	27
3.2.2	Bifurcação Transcrítica e Forquilha	31
3.2.3	Bifurcação de Hopf	32
4	PLANO DE FASES EM SISTEMAS LINEARES	37
4.1	COMPORTAMENTO DAS TRAJETÓRIAS	37
4.1.1	Autovalores Reais e Distintos de Mesmo Sinal	38
4.1.2	Autovalores Reais com Sinais Opostos	39
4.1.3	Autovalores Iguais	40
4.1.4	Autovalores Complexos com Parte Real Não-Nula	43
4.1.5	Autovalores Imaginários Puros	46
5	SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE	48
5.1	SISTEMAS AUTÔNOMOS	48
5.2	ESTABILIDADE	50
5.3	DETERMINAÇÃO DE TRAJETÓRIAS	51
6	SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV	55
7	SISTEMA DE LORENZ	61
7.1	PROPRIEDADES	62
7.1.1	Número de Rayleigh	62
7.1.2	Número de Prandtl	63
7.1.3	Simetria	63

7.1.4	Fluxo	63
7.1.5	Sistemas Hidrodinâmicos e Periodicidade	64
7.2	CONTRAÇÃO DE VOLUME	64
7.3	PONTOS FIXOS	66
7.4	ESTABILIDADE LINEAR NA ORIGEM	68
7.5	ESTABILIDADE EM PONTOS NÃO-TRIVIAIS	70
7.6	CAOS EM UM ATRATOR DE LORENZ	71
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
	REFERÊNCIAS	77
	ANEXO A – TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE	78
	ANEXO B – SIMULADOR DO ATRATOR DE LORENZ: UMA TRAJETÓRIA	79
	ANEXO C – SIMULADOR DO ATRATOR DE LORENZ: DUAS TRAJETÓRIAS	80

1 INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos constituem um dos pilares da modelagem matemática, permitindo descrever a evolução temporal de fenômenos físicos, biológicos e sociais, como a oscilação de um pêndulo, a propagação de doenças ou a variação de preços em mercados financeiros. Quando formulados por meio de equações diferenciais ordinárias, tais sistemas revelam comportamentos que variam desde regimes estáveis e previsíveis até dinâmicas altamente complexas, sensíveis às condições iniciais — marca registrada dos sistemas caóticos.

A tarefa central na modelagem matemática é compreender essa evolução temporal. Entre os aspectos mais relevantes no estudo de sistemas dinâmicos está a análise de estabilidade das soluções. Busca-se entender se pequenas perturbações no estado inicial do sistema conduzem a trajetórias semelhantes ou se resultam em comportamentos significativamente distintos. Essa análise é essencial para prever o comportamento de longo prazo do sistema e garantir a confiabilidade e a robustez de um modelo.

Embora muitas vezes não seja possível obter soluções analíticas para as equações diferenciais que regem o sistema, é viável realizar uma análise qualitativa das trajetórias no espaço de fases. Essa abordagem permite identificar padrões de comportamento, como equilíbrios estáveis e instáveis, ciclos limites ou mesmo regimes caóticos. Ferramentas como a análise de autovalores de uma matriz linear, o uso de coordenadas polares e o Método de Lyapunov tornam-se fundamentais para investigar a estabilidade e a estrutura do sistema.

A compreensão das propriedades qualitativas dessas equações, mesmo na ausência de soluções explícitas, é essencial para identificar transições entre diferentes regimes dinâmicos. O estudo do caos determinístico ganhou notoriedade a partir do trabalho seminal de Lorenz (1963). Ao investigar um modelo simplificado de convecção térmica atmosférica, Lorenz identificou um comportamento irregular e aperiódico que não resultava de aleatoriedade, mas de uma estrutura determinística sensível às condições iniciais — o famoso Efeito Borboleta.

O Sistema de Lorenz, composto por três equações diferenciais não lineares acopladas, tornou-se o principal paradigma para a compreensão do caos. Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo abrangente desse sistema, articulando a teoria, a análise qualitativa e a exploração numérica. Para isso, inicia-se retomando e estendendo os conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos: pontos fixos, análise de estabilidade linear, potenciais, bifurcações e a representação no plano de fase. Tais ferramentas constituem a base necessária para examinar sistemas tridimensionais, cuja complexidade excede as possibilidades de representação geométrica bidimensional.

As principais referências utilizadas ao longo do trabalho são os livros “Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno”, de Boyce e Diprima (2012) e “Equações Diferenciais Ordinárias”, de Doering e Lopes (2016). A fundamentação da teoria de sistemas dinâmicos não lineares segue a abordagem de Strogatz (2015), complementada por textos clássicos de EDOs, como o de Boldrini *et al.* (1980). Além destes livros, também foram utilizados artigos como “*Deterministic nonperiodic flow*”, de Lorenz (1963) e “*Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*”, de Saltzman (1962).

Ressalta-se que todas as figuras e diagramas de fase contidos nesta monografia foram criados pela autora utilizando a ferramenta online Mathcha (MATHCHA, 2025).

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo estabelece os fundamentos conceituais e matemáticos essenciais para a análise do Sistema de Lorenz e a compreensão da emergência do caos. Definiremos pontos fixos, o método da linearização e pontenciais. O domínio destas ferramentas preliminares é crucial, pois elas servirão como base metodológica para a investigação qualitativa do sistema tridimensional de Lorenz, permitindo a identificação e a classificação dos estados de equilíbrio e as subseqüentes bifurcações que levam o sistema do regime de estabilidade ao comportamento caótico.

2.1 PONTOS FIXOS

Considere o sistema $\dot{x} = f(x)$, em \mathbb{R} . Dizemos que pontos onde $\dot{x} = 0$ não tem fluxo e são chamados *pontos fixos*. Além disso, o fluido ao longo da reta real com velocidade $f(x)$ é chamado de fluido de fase e a reta real de espaço de fase. Se $f(x) > 0$, então o fluxo vai para a direita, e se $f(x) < 0$ o fluxo vai para a esquerda.

Para encontrar a solução de $\dot{x} = f(x)$ com condição inicial x_0 , colocamos uma partícula imaginária (ponto de fase) em x_0 e observamos como ela é transportada e movimentada pelo fluxo. O ponto de fase se move ao longo do eixo x de acordo com $x(t)$, nomeada *trajetória* e é a solução da equação diferencial a partir da condição inicial. O *retrato de fase* mostra qualitativamente todas as diferentes trajetórias do sistema. Ainda, o retrato de fase é controlado pelo pontos fixos x^* , ou seja, $f(x^*) = 0$, e eles correspondem aos pontos de estagnação do fluxo.

Enfim, os pontos fixos representam soluções de equilíbrio. Um equilíbrio é definido como *estável* se todas as perturbações suficientemente pequenas em relação a ele desaparecem com o tempo. Por outro lado, equilíbrios *instáveis*, nos quais as perturbações crescem com o tempo, são representados por pontos fixos instáveis.

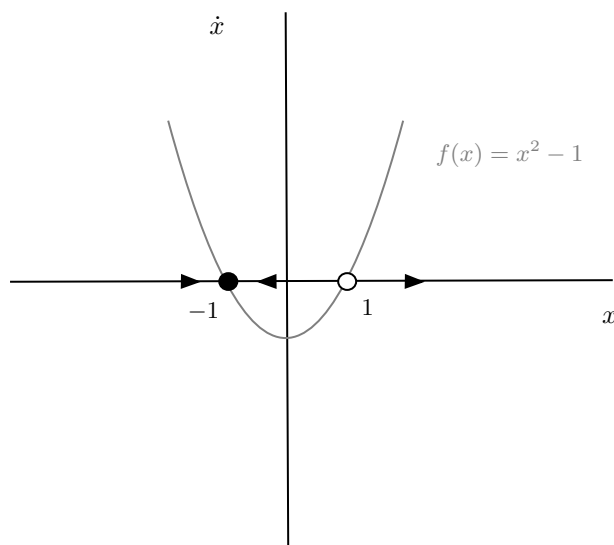
Exemplo 2.1 *Encontre todos os pontos fixos de $\dot{x} = x^2 - 1$ e classifique sua estabilidade.*

Veja que $\dot{x} = f(x) = x^2 - 1$. Para encontrar os pontos fixos, analisamos a equação $f(x) = 0$ e resolvemos para x^* :

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^* = \pm 1.$$

Para determinar a estabilidade, traçamos o gráfico de $x^2 - 1$ e, em seguida, esboçamos o campo vetorial, como apresenta a Figura 1.

Figura 1 – Gráfico do Exemplo 2.1.



O fluxo é para a direita onde $x^2 - 1 > 0$ e para a esquerda onde $x^2 - 1 < 0$. Logo, $x^* = -1$ é estável e $x^* = 1$ é instável.

2.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR

Para ter um parâmetro quantitativo da estabilidade, podemos encontrar essa informação por meio da linearização em torno de um ponto fixo. Sejam x^* um ponto fixo de $\dot{x} = f(x)$ e $\eta(t) = x(t) - x^*$ uma pequena perturbação longe de x^* . Para ver se a perturbação cresce ou decresce, derivamos uma equação diferencial para η :

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x},$$

contanto que x^* seja constante. Assim, $\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta)$. Daí, usando a expansão de Taylor obtemos:

$$\begin{aligned} f(x^* + \eta) &= f(x^*) + f'(x^*)\eta + \frac{1}{2}f''(x^*)\eta^2 + \frac{1}{3!}f'''(x^*)\eta^3 + \dots \\ &= f(x^*) + \eta f'(x^*) + O(\eta^2), \end{aligned}$$

onde $O(\eta^2)$ denota termos de ordem maior ou igual a η^2 . Note que $f(x^*) = 0$ pois x^* é um ponto fixo. Por isso,

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + O(\eta^2). \quad (2.1)$$

Agora, se $f'(x^*) \neq 0$, os termos de $O(\eta^2)$ são desprezíveis e podemos escrever a aproximação:

$$\dot{\eta} \approx \eta f'(x^*).$$

Esta é uma equação linear em η e é chamada linearização sobre x^* . Isso mostra que a perturbação $\eta(t)$ cresce exponencialmente se $f'(x^*) > 0$ e decresce se $f'(x^*) < 0$. Se

$f'(x^*) = 0$, os termos de $O(\eta^2)$ não são desprezíveis, o que requer uma análise não-linear para determinar estabilidade.

Exemplo 2.2: *Determine a estabilidade dos pontos fixos para $\dot{x} = \text{sen } x$, usando análise de estabilidade linear.*

Um ponto fixo satisfaz $f(x^*) = \text{sen } x^* = 0$. Dessa forma, as soluções são

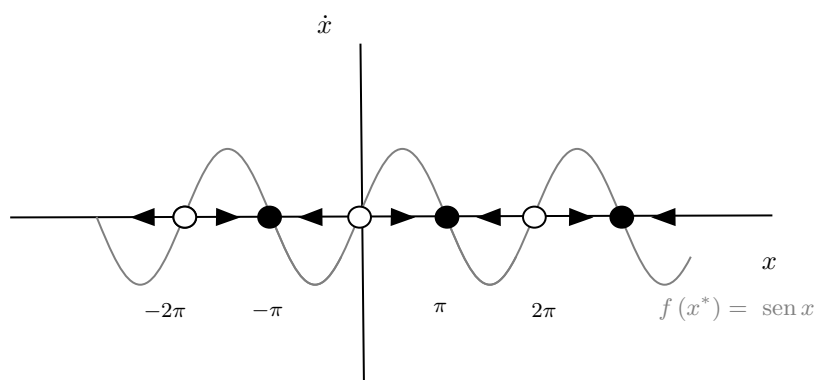
$$x^* = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, os equilíbrios são múltiplos de π . Note que $f'(x^*) = \cos(k\pi)$. Assim,

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ par,} \\ -1, & \text{se } k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Logo, para x^* tal que $f'(x^*) = 1 > 0$, o ponto fixo é instável, e para x^* tal que $f'(x^*) = -1 < 0$, o ponto fixo é estável. Veja a Figura 2.

Figura 2 – Gráfico do Exemplo 2.2.

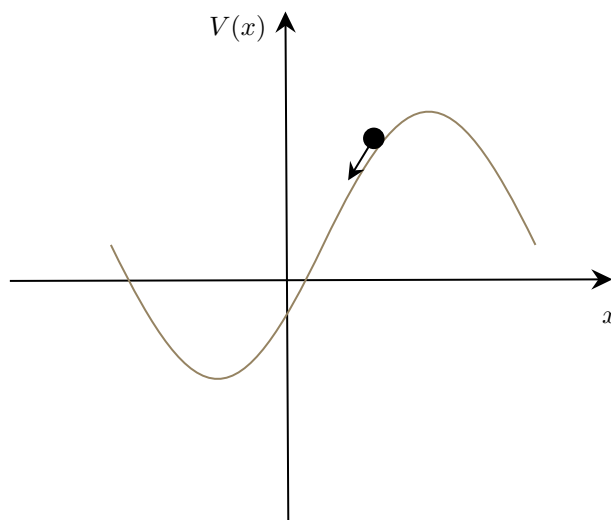


Pontos fixos dominam a dinâmica de sistemas de primeira ordem. Em ambos os exemplos, todas as trajetórias ou se aproximam de um ponto fixo, ou divergem para $\pm\infty$. De fato, essas são as únicas situações que podem acontecer em um campo vetorial na reta real. Em termos geométricos, trajetórias não podem se cruzar. Assim, se um ponto fixo for considerado uma solução de equilíbrio, a aproximação do equilíbrio é sempre monotônica.

2.3 POTENCIAIS

Existe uma maneira de visualizar a dinâmica do sistema de primeira ordem $\dot{x} = f(x)$, baseado na ideia de energia potencial. Imagine uma partícula “escorregando” as paredes de um poço, ou uma bolinha caindo em uma tijela de cerâmica, como na Figura 3, onde o potencial $V(x)$ é definido por

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}. \tag{2.2}$$

Figura 3 – Potencial $V(x)$.

O sinal negativo em (2.2) segue o padrão de convenção na física – isso sugere que a partícula sempre move-se para baixo conforme a movimentação procede. Para visualizar isso, pense em x como a função de t e depois calcule a derivada do tempo em $V(x(t))$. Pela Regra da Cadeia, temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Agora, para um sistema de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx},$$

já que $\dot{x} = f(x) = -dV/dx$, pela definição de potencial. Ainda,

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0.$$

Com isso, $V(t)$ decresce ao longo da trajetória, ou seja, a energia potencial nunca aumenta e, assim, a partícula sempre move-se para o potencial mais baixo. Claramente, se a partícula estiver no ponto de equilíbrio onde $dV/dx = 0$, então V permanecerá constante. Isso é esperado já que $dV/dx = 0$ implica $\dot{x} = 0$. Note que os locais de mínimo de $V(x)$ correspondem a pontos fixos estáveis e locais de máximos correspondem a pontos fixos instáveis.

Exemplo 2.3: *Mostre o gráfico de potencial do sistema $\dot{x} = x - x^3$ e identifique os pontos de equilíbrio.*

Resolvendo $-dV/dx = x - x^3$, obtemos

$$\begin{aligned} \int -\frac{dV}{dx} dx &= \int (-x + x^3) dx \\ \Rightarrow V(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C. \end{aligned}$$

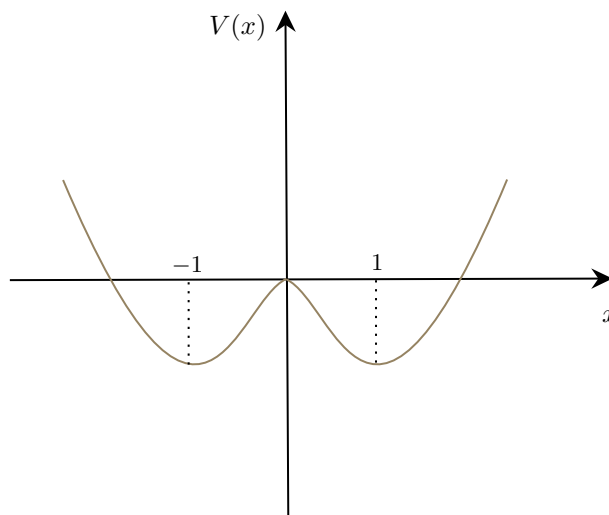
Aqui vamos considerar $C = 0$. Portanto, $V' = -x + x^3$ e $V'' = -1 + 3x^2$. Para encontrar os valores de máximos e mínimos, devemos igualar $V' = x - x^3$ a zero, logo

$$V' = 0 \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0.$$

Assim, teremos $x = 0$ ou $x = \pm 1$. E para identificar se o ponto é de máximo ou mínimo, basta substituir o valor de x na segunda derivada da função:

- i. Se $x = -1$, então $V''(-1) = -1 + 3(-1)^2 = 2 > 0$. Logo, é ponto de mínimo.
- ii. Se $x = 0$, então $V''(0) = -1 + 3(0)^2 = -1 < 0$. Logo, é ponto de máximo.
- iii. Se $x = 1$, então $V''(1) = -1 + 3(1)^2 = 2 > 0$. Logo, é ponto de mínimo.

Figura 4 – Gráfico Exemplo 2.3.



Como os pontos de equilíbrio são instáveis quando são máximos, então $x = 0$ é instável. Analogamente, $x = \pm 1$ são estáveis. Enfim, o sistema possui dois equilíbrios estáveis, como mostra a Figura 4.

3 BIFURCAÇÕES

Este capítulo aprofunda a análise dos sistemas dinâmicos autônomos por meio do estudo das bifurcações, que representam as mudanças qualitativas na estrutura do espaço de fase de um sistema à medida que um de seus parâmetros é variado, e os valores dos parâmetros nos quais elas ocorrem são chamados *pontos de bifurcação*. Partindo dos conceitos de estabilidade local e pontos fixos estabelecidos no Capítulo 2, investigaremos como as soluções de equilíbrio e as órbitas periódicas podem nascer, desaparecer ou alterar sua estabilidade. Tais eventos críticos são o cerne da transição de um comportamento simples e previsível para um regime dinâmico complexo. O foco metodológico será o estudo das principais classes de bifurcações, incluindo a Bifurcação de Forquilha e a Bifurcação de Hopf, que são os mecanismos matemáticos responsáveis por dar origem a novos estados de equilíbrio ou a ciclos limites, respectivamente. A compreensão detalhada desses fenômenos é indispensável, pois a dinâmica do Sistema de Lorenz é regida por uma sequência dessas bifurcações à medida que o Número de Rayleigh (r) é incrementado, pavimentando o caminho para o surgimento do caos determinístico.

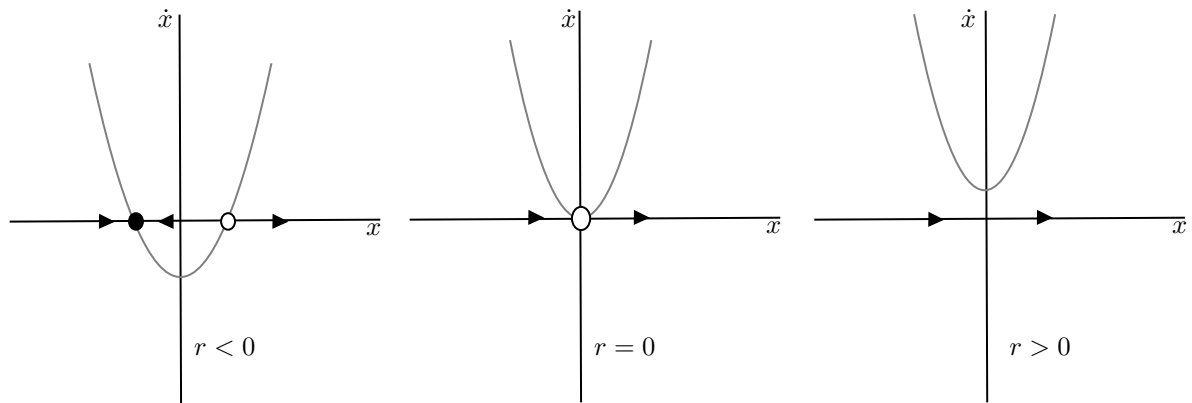
3.1 BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS UNIDIMENSIONAIS

No caso de sistemas unidimensionais, como $\dot{x} = f(x, r)$ em que r é um número real, uma bifurcação ocorre quando pequenas mudanças no parâmetro r provoca mudanças qualitativas no número ou na estabilidade dos pontos de equilíbrio. Nesta seção, iremos explorar alguns tipos de bifurcações.

3.1.1 Bifurcação Sela-Nó

A sela-nó é o mecanismo básico no qual os pontos fixos são criados e destruídos. Conforme os parâmetros variam, dois pontos fixos movem-se em direção um ao outro, colidem e mutuamente se “aniquilam”. Tome o sistema de primeira ordem $\dot{x} = r + x^2$ e observe pela Figura 5 a reação do sistema conforme r varia.

Figura 5 – Bifurcações Sela-nó.



À medida que r se aproxima de 0 pela esquerda, a parábola se move para cima e dois pontos de equilíbrio se aproximam um do outro. Quando $r = 0$, os pontos de equilíbrio se fundem em um ponto de equilíbrio semi-estável em $x^* = 0$, ou seja, estável em uma direção e instável na outra. Esse tipo de ponto de equilíbrio é extremamente delicado, ele desaparece assim que $r < 0$, e agora não há mais pontos de equilíbrio. Nesse caso, dizemos que ocorreu uma bifurcação em $r = 0$, já que os campos vetoriais para $r < 0$ e $r > 0$ são qualitativamente diferentes.

Exemplo 3.1: Apresente a análise linear de estabilidade dos pontos fixos de $\dot{x} = r - x^2$.

Primeiramente, devemos encontrar os pontos fixos de $\dot{x} = f(x)$:

$$r - (x^*)^2 = 0 \Rightarrow (x^*)^2 = r \Rightarrow x^* = \pm\sqrt{r}.$$

- i. Se $r > 0$, então existem dois pontos fixos $x^* = \sqrt{r}$ e $x^* = -\sqrt{r}$;
- ii. Se $r = 0$, então existe um ponto fixo $x^* = 0$;
- iii. Se $r < 0$, então não há pontos fixos reais.

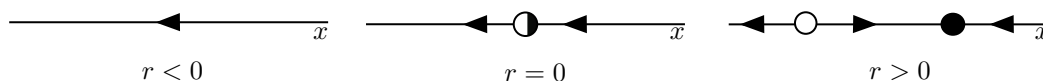
O ponto de bifurcação ocorre em $r = 0$, onde os dois pontos fixos, do caso $r > 0$, se “aniquilam”. Usamos o critério de estabilidade linear, que é dado pelo sinal da derivada da função $f(x) = r - x^2$ avaliada no ponto fixo. A saber,

$$f'(x) = -2x.$$

Lembrando que para $f'(x)$ negativo o ponto é estável e quando positivo ele é instável.

1. Estabilidade de $x^* = \sqrt{r}$, para $r > 0$: Temos $f'(\sqrt{r}) = -2\sqrt{r}$, e como $r > 0$, obtemos $-2\sqrt{r} < 0$, logo $x^* = \sqrt{r}$ é instável.
2. Estabilidade de $x^* = -\sqrt{r}$, para $r > 0$: Temos $f'(-\sqrt{r}) = 2\sqrt{r}$, e como $r > 0$, obtemos $2\sqrt{r} > 0$, logo $x^* = -\sqrt{r}$ é estável.

Figura 6 – Gráfico Exemplo 3.1.



Portanto, $\dot{x} = r - x^2$ sofre uma bifurcação sela-nó em $r = 0$. Para $r < 0$ não há equilíbrios. Por fim, quando r cruza 0, surge um par de pontos fixos (um estável e um instável), como apresentado na Figura 6 acima.

3.1.2 Bifurcação Transcrítica

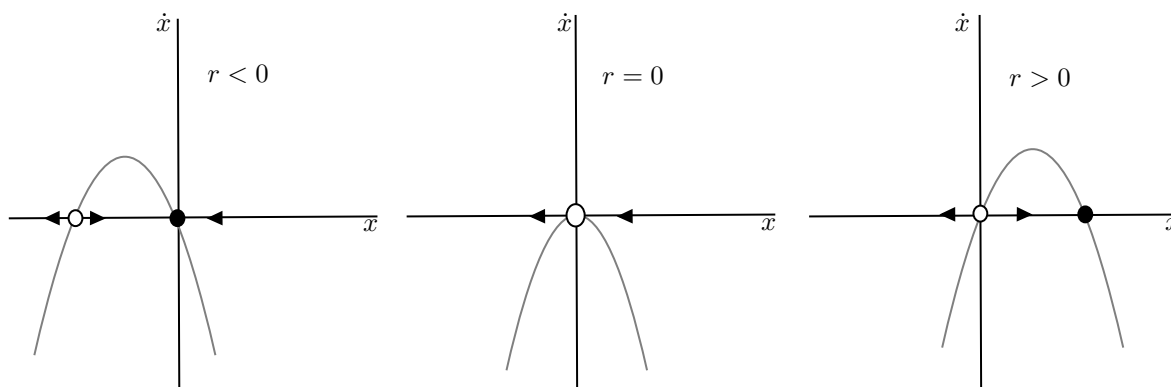
Existem certas situações científicas em que um ponto fixo deve existir para todos os valores de um parâmetro e nunca pode ser destruído. No entanto, esse ponto fixo pode mudar sua estabilidade à medida que o parâmetro varia. A bifurcação transcritical é o mecanismo padrão para tais mudanças de estabilidade. A forma normal de uma bifurcação transcritical é dada por

$$\dot{x} = rx - x^2. \tag{3.1}$$

Note que há um ponto fixo em $x^* = 0$ (veja Figura 7) para todos os valores de r . Com isso:

- i. Para $r < 0$, existe um ponto fixo instável em $x^* = r$ e um estável em $x^* = 0$;
- ii. Para $r = 0$, o ponto fixo instável se aproxima da origem e se funde com ela;
- iii. Para $r > 0$, a origem se torna instável e $x^* = r$ passa a ser estável.

Figura 7 – Bifurcação Transcrítica.



Exemplo 3.2: Mostre que o sistema de primeira ordem $\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$ passa por uma bifurcação transcritical em $x = 0$ quando os parâmetros a, b satisfazem uma equação a ser determinada, chamada curva de bifurcação.

Note que $x = 0$ é um ponto fixo para todo (a, b) :

$$\dot{x}|_{x=0} = 0(1 - 0^2) - a(1 - e^{-b0}) = 0.$$

Como $x = 0$ é um ponto fixo para todos os parâmetros, ele pode ser o local de uma bifurcação transcítica, onde sua estabilidade é trocada com outro ponto que choca com ele. Para analisar a estabilidade e a bifurcação, precisamos da expansão de Taylor para \dot{x} perto de $x = 0$. O termo complicado é $1 - e^{-bx}$:

$$\begin{aligned} e^{-bx} &= 1 + (-bx) + \frac{1}{2!}(-bx)^2 + \frac{1}{3!}(-bx)^3 + O(x^4) \\ &= 1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 - \frac{1}{6}b^3x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

Então, para $1 - e^{-bx}$:

$$1 - e^{-bx} = bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3).$$

Substituindo em \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x^2) - a \left(bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3) \right) \\ &= (x - x^3) - a \left(bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3) \right) \\ &\approx (1 - ab)x + \frac{1}{2}ab^2x^2 - x^3. \end{aligned}$$

Para bifurcações, focamos nos termos de ordem mais baixa (os termos de x^3 são de ordem superior e não dominam perto de $x = 0$ para a bifurcação transcítica):

$$\dot{x} \approx (1 - ab)x + \left(\frac{1}{2}ab^2 \right) x^2.$$

Uma bifurcação transcítica ocorre quando o coeficiente do termo linear x se anula, e neste caso é $1 - ab$. Então, a curva de bifurcação é

$$1 - ab = 0 \Rightarrow ab = 1. \tag{3.2}$$

Nessa curva, a equação \dot{x} para x pequeno se torna

$$\dot{x} \approx \left(\frac{1}{2}ab^2 \right) x^2.$$

Os pontos fixos satisfazem

$$0 = x \left(\frac{1}{2}ab^2x - x^2 \right) \Rightarrow x^2 = \left(\frac{1}{2}ab^2x \right),$$

cujas soluções são $x^* = 0$ e $x^* = \frac{1}{2}ab^2$. Para encontrar o ponto fixo não nulo próximo da curva de bifurcação, igualamos $x^* = 0$:

$$0 = (1 - ab)x^* + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)(x^*)^2 - (x^*)^3.$$

Como estamos interessados no ponto não-nulo, dividimos por x^* :

$$0 = (1 - ab) + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x^* - (x^*)^2,$$

e já que x^* é pequeno perto da bifurcação, podemos desprezar o termo $(x^*)^2$ (aproximação quadrática), obtendo:

$$0 \approx (1 - ab) + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x^*.$$

Agora, isolando x^* , segue que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x^* &\approx -(1 - ab) \\ \Rightarrow x^* &\approx \frac{ab - 1}{\frac{1}{2}ab^2} \\ \Rightarrow x^* &\approx \frac{2(ab - 1)}{ab^2}. \end{aligned}$$

Esta é a fórmula aproximada para o ponto fixo que bifurca em $x = 0$. Quando $ab = 1$, o numerador se anula, e $x^* = 0$, conforme esperado. Para $ab \neq 1$ (mas próximo de 1), x^* se afasta de zero. Ainda, em relação a estabilidade dos pontos fixos, temos

- Para $r < 0$: O ponto $x^* = 0$ é o atrator estável, e $x^* = r$ é o repulsor instável;
- Para $r = 0$: Os dois se encontram, fundem-se e se tornam semi-estáveis;
- Para $r > 0$: O ponto $x^* = r$ se torna o atrator estável, e $x^* = 0$ se torna o repulsor instável.

3.1.3 Bifurcação Forquilha

É um dos tipos fundamentais de bifurcação que ocorrem em sistemas dinâmicos unidimensionais com simetria. A bifurcação é caracterizada pelo surgimento ou desaparecimento de dois novos pontos fixos simetricamente posicionados à medida que um único ponto fixo original (geralmente $x = 0$) muda de estabilidade.

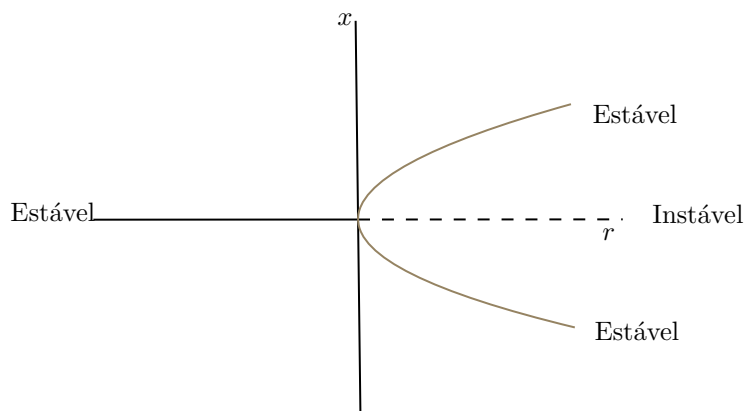
O modelo canônico para esse tipo de bifurcação é dado pela equação

$$\dot{x} = rx \pm x^3, \tag{3.3}$$

onde r é o parâmetro de bifurcação. Os pontos fixos são sempre dados por $x(r \pm x^2) = 0$.

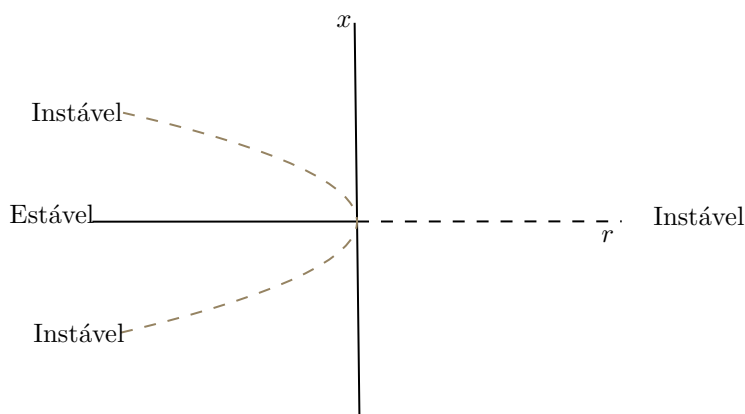
- *Forquilha Supercrítica:* Dada pela forma normal $\dot{x} = rx - x^3$. Se $r < 0$, o ponto fixo é $x^* = 0$ e é estável. Se $r = 0$, o ponto fixo é $x^* = 0$ e é o ponto de bifurcação. Por fim, se $r > 0$, então os pontos fixos são $x^* = 0$ e $x^* = \pm\sqrt{r}$, e $x^* = 0$ é instável (ver Figura 8).

Figura 8 – Bifurcação Forquilha Supercrítica.



- *Forquilha Subcrítica:* Dada pela forma normal $\dot{x} = rx + x^3$, considerado o tipo mais complexo e está associado a fenômenos de histerese (memória do sistema) ou “colapso” repentino de estabilidade. Se $r < 0$, os pontos fixos são $x^* = 0$ e $x^* = \pm\sqrt{-r}$ e $x^* = 0$ é estável. Se $r = 0$, o ponto fixo é $x^* = 0$ e é o ponto de bifurcação. Por fim, se $r > 0$, então o ponto fixo é $x^* = 0$ e é instável, e o sistema não tem equilíbrios estáveis perto da origem (ver Figura 9).

Figura 9 – Bifurcação Forquilha Subcrítica.



A bifurcação forquilha ocorre somente em sistemas que possuem a simetria de reflexão $x \rightarrow -x$. Se a equação for da forma $\dot{x} = f(x, r)$ e esta for uma função ímpar de x , quando novos pontos fixos nascem, eles devem aparecer aos pares e em posições simétricas ($\pm x^*$) para manter a simetria do sistema. Se um sistema não tiver essa simetria, a bifurcação que ocorre no ponto fixo trivial $x = 0$ será uma bifurcação transcritical.

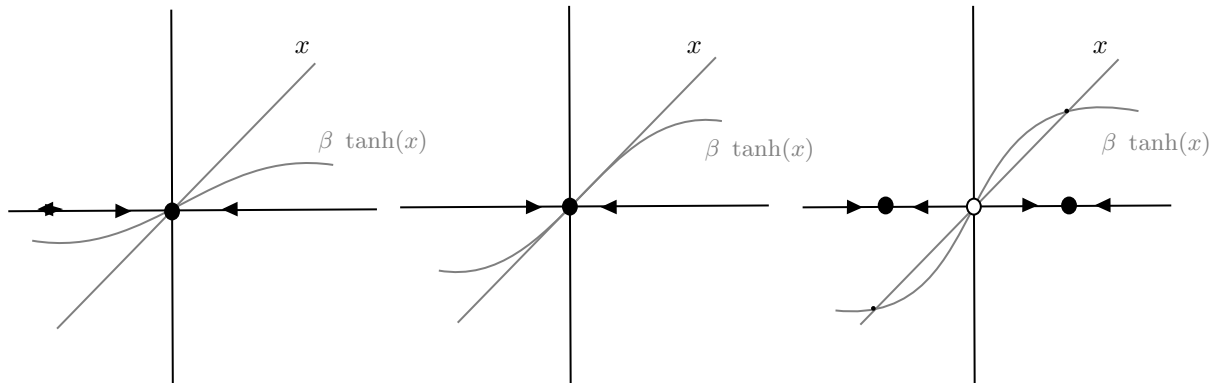
Exemplo 3.3: Equações similares a $\dot{x} = -x + \beta \tanh x$ surgem em modelos mecânicos estatísticos de ímãs e redes neurais. Mostre que essa equação passa por uma bifurcação forquilha supercrítica enquanto β varia. Depois forneça um gráfico.

A estratégia é encontrar os gráficos de $y = x$ e $y = \beta \tanh x$ para encontrar os pontos fixos. De fato,

$$-x^* + \beta \tanh x^* = 0 \Rightarrow \tanh x^* = \frac{x^*}{\beta} \Rightarrow x^* = \beta \tanh x^*.$$

Note que $x^* = 0$ é sempre solução, pois $\tanh(0) = 0$ e $0/\beta = 0$. Os pontos fixos não-triviais ($x^* \neq 0$) são as outras interseções das funções $y = x$ e $y = \beta \tanh x$. O comportamento do sistema é determinado pelo parâmetro β , que atua como um fator de escala (inclinação) para a função não linear. Veja a Figura 10.

Figura 10 – Gráfico Exemplo 3.3.



A bifurcação ocorre quando as duas curvas têm a mesma inclinação na origem. Para a inclinação $y_1 = x$, temos:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1.$$

Para a inclinação $y_2 = \beta \tanh x$, temos:

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}(\beta \tanh x) = \beta \operatorname{sech}^2 x,$$

e, em $x = 0$, obtemos

$$\left. \frac{dy_2}{dx} \right|_{x=0} = \beta \operatorname{sech}^2(0) = \beta.$$

A bifurcação ocorre quando as inclinações são iguais, ou seja, $1 = \beta$. Assim, temos

- i. Se $\beta < 1$, a inclinação da curva não linear é $\beta < 1$ na origem. A reta $y_1(x) = x$ é mais íngreme que $y_2(x)$ na origem. Há apenas uma interseção e é $x^* = 0$. A análise da estabilidade linear mostra que $f'(0) = \beta - 1 < 0$. Portanto $x^* = 0$ é estável;
- ii. Se $\beta = 1$, as curvas têm a mesma inclinação na origem e a bifurcação ocorre aqui;

- iii. Se $\beta > 1$, a linha reta é menos íngreme que $\tanh(x)$, criando três intersecções, nos pontos $x^* = 0$ e $x^* = \pm x$. A análise da estabilidade linear mostra que $f'(0) = \beta - 1 > 0$. Portanto, $x^* = 0$ é instável.

Por fim, para os pontos fixos não-triviais, os pontos $\pm x^*$ aparecem. Pela simetria do problema, ambos devem ter a mesma estabilidade. Avaliamos a derivada em $\pm x^*$:

$$f'(\pm x) = -1 + \beta \operatorname{sech}^2 x$$

. No ponto fixo, sabemos que $\tanh x^* = x^*/\beta$. Podemos usar a identidade trigonométrica hiperbólica $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$:

$$f'(\pm x) = -1 + \beta(1 - \tanh^2 x).$$

Substituindo $\tanh x^* = x^*/\beta$:

$$\begin{aligned} f'(\pm x^*) &= -1 + \beta \left(1 - \left(\frac{x^*}{\beta} \right)^2 \right) \\ &= -1 + \beta - \frac{(x^*)^2}{\beta}. \end{aligned}$$

Para $x^* \neq 0$, como $\beta > 1$, o termo $\beta - 1$ é positivo. No entanto, o termo negativo $-(x^*)^2/\beta$ é subtraído. Pela análise gráfica (ou pelo fato de que esta é uma bifurcação forquilha supercrítica), sabemos que a estabilidade deve ser trocada. Portanto, para $\beta > 1$, temos $f'(\pm x^*) < 0$. Os pontos fixos $\pm x^*$ são estáveis.

3.2 BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

A discussão sobre bifurcações nesta seção é uma extensão natural da análise unidimensional, aplicada agora ao plano de fase. Em sistemas bidimensionais, toda a dinâmica essencial da bifurcação é concentrada em um caminho ou eixo de dimensão um no plano. É ao longo desta linha que a transformação qualitativa do ponto de equilíbrio ocorre, enquanto nas outras dimensões do espaço, o fluxo das trajetórias é simplesmente de atração ou repulsão em relação a esse caminho central.

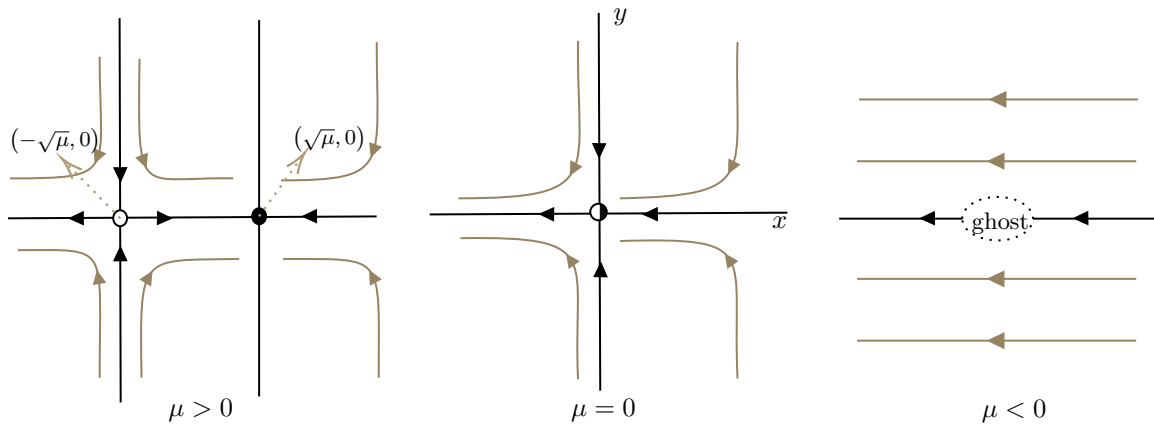
3.2.1 Bifurcação Sela-Nó

É o mecanismo básico para a criação e destruição de pontos fixos. Um protótipo exemplo para esse tipo de bifurcação é dado pelo sistema abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Na direção de x , vemos o comportamento discutido na seção anterior, enquanto na direção de y o movimento é exponencial amortecido. Para $\mu > 0$, existem dois pontos fixos: um estável em $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$ e uma sela em $(-\sqrt{\mu}, 0)$. As trajetórias são atraídas na direção de y e o fluxo em x depende da região. Para $\mu = 0$, os dois pontos fixos colidem e se fundem na origem $(0, 0)$, não tendo estabilidade definida (ponto de bifurcação). O retrato de fase mostra que o fluxo desacelera (região de “gargalo”). Por fim, para $\mu < 0$, não há pontos reais. O campo vetorial mostra que todas as trajetórias seguem o fluxo, sem regiões de equilíbrio. Mesmo assim, ainda existe o chamado “fantasma” (ou *ghost*, como mostra a Figura 11) do ponto fixo: uma região próxima da origem, onde o movimento é temporariamente lento, como se ainda houvesse um ponto de equilíbrio.

Figura 11 – Bifurcação Sela-nó em sistemas bidimensionais.



Exemplo 3.4: *Mostre que o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y, \\ \dot{y} = \frac{x^2}{1+x^2} - by, \end{cases}$$

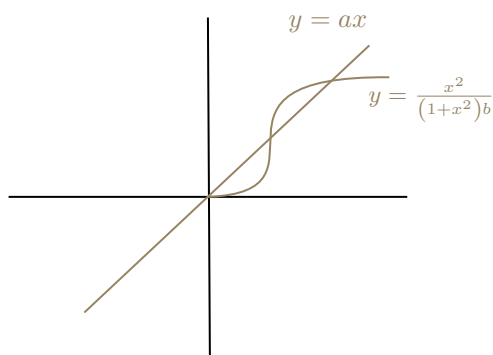
onde x e y são concentrações e $a, b > 0$ são parâmetros de decaimento, tem 3 pontos fixos quando $a < a_c$ (a definir). Mostre que dois deles colidem em uma bifurcação sela-nó quando $a = a_c$ e esboce o retrato de fase.

Os pontos fixos são encontrados igualando $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Rightarrow -ax + y = 0 \Rightarrow y = ax; \\ \dot{y} = 0 &\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} - by = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{(1+x^2)b}. \end{aligned}$$

Os pontos fixos (x^*, y^*) ocorrem onde essas curvas se interceptam, como mostra a Figura 12 abaixo. Então:

$$ax^* = \frac{(x^*)^2}{(1+(x^*)^2)b}. \tag{3.4}$$

Figura 12 – Gráfico do Exemplo 3.4.

Uma solução imediata é $x^* = 0$. Se $x^* = 0$, então $y^* = 0$, logo um ponto fixo é $(0, 0)$.

Para $x^* \neq 0$, dividimos a equação por x^* :

$$a = \frac{x^*}{(1 + (x^*)^2)b} \Rightarrow x^* = ab(1 + (x^*)^2) \Rightarrow ab(x^*)^2 - x^* + ab = 0.$$

Como esta equação é uma equação quadrática, as soluções são dadas pela fórmula de Bhaskara:

$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2b^2}}{2ab}.$$

Para que existam soluções reais para $x^* \neq 0$, o discriminante deve ser não-negativo. Portanto,

$$\begin{aligned} 1 - 4a^2b^2 &\geq 0 \\ 4a^2b^2 &\leq 1 \\ 2ab &\leq 1 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A bifurcação sela-nó ocorre quando as duas soluções não-triviais se encontram e se aniquilam, quando o discriminante é igual a zero:

$$1 - 4a^2b^2 = 0 \Rightarrow 2ab = 1 \Rightarrow a = a_c = \frac{1}{2b}.$$

No ponto de bifurcação a_c , a única solução, quando $ab = 1/2$, é

$$x^* = 1.$$

O ponto fixo de coalescência¹ é $(1, a_c)$, onde $y^* = ax^* = a_c$. Usamos a matriz jacobiana para analisar a estabilidade de cada ponto fixo. Considere as funções contínuas $f(x, y)$ e $g(x, y)$ dadas abaixo:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -ax + y; \\ g(x, y) &= \frac{x^2}{1 + x^2} - by. \end{aligned}$$

¹ Ponto onde dois ou mais pontos fixos se encontram e se fundem antes de, tipicamente, trocarem estabilidade ou desaparecerem.

Então, a matriz jacobiana J é:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}.$$

O critério de estabilidade é baseado no traço τ e no determinante Δ da matriz J :

$$\begin{aligned} \tau &= -(a + b), \\ \Delta &= ab - \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Como $a > 0$ e $b > 0$, então o traço τ é sempre negativo, isso significa que todos os pontos fixos são estáveis (nós ou focos) ou selas.

- Estabilidade na origem ($x^* = 0$):

$$\begin{aligned} J(0, 0) &= \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \\ \Delta &= ab - \frac{2(0)}{(1+0^2)^2} = ab. \end{aligned}$$

Como $a, b > 0$, então $\Delta > 0$ e $J_{(0,0)} < 0$, isso significa que a origem $(0, 0)$ é um nó estável, ou um foco estável. Como

$$\tau^2 - 4\Delta = (-a - b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0,$$

então, a origem é um ponto de nó estável.

- Estabilidade para $0 < x^* < 1$ e $x^* > 1$:

$$\Delta = ab \left[1 - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \right].$$

Como x^* é ponto fixo e $ab = \frac{x^*}{(1+(x^*)^2)^2}$, então:

$$\Delta = ab \left[1 - \frac{2(x^*)^2}{(1+(x^*)^2)^2} \right] = ab \left[\frac{(1+(x^*)^2)^2 - 2(x^*)^2}{(1+(x^*)^2)^2} \right] = \frac{ab}{(1+(x^*)^2)^2} [1 + (x^*)^4].$$

Para x^* com sinal negativo: este ponto satisfaz $0 < x^* < 1$, no termo $(x^*)^4 - 1$ como $x^* < 1$, então $(x^* - 1) < 0$. Portanto, $\Delta < 0$, isso significa que este ponto fixo é um ponto de sela. Para x^* com sinal positivo temos $x^* - 1 > 0$. Portanto, $\Delta > 0$ e $\tau < 0$, isto significa que o ponto fixo é um nó estável ou foco estável.

3.2.2 Bifurcação Transcrítica e Forquilha

Usando a mesma ideia da seção anterior, podemos construir exemplos prototípicos de bifurcações transcrítica e forquilha em um ponto fixo estável. Na direção de x , a dinâmica é dada pelas formas normais discutidas anteriormente. E na direção y , o movimento é exponencialmente amortecido.

- Transcrítica:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2, \\ \dot{y} = -y; \end{cases}$$

- Forquilha supercrítica:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3, \\ \dot{y} = -y; \end{cases}$$

- Forquilha subcrítica:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Exemplo 3.5: *Plote o retrato de fase para o sistema de forquilha supercrítica:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

para $\mu < 0$, $\mu = 0$ e $\mu > 0$.

Primeiro encontramos os pontos fixos:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \mu x - x^3 &\Rightarrow x(\mu - x^2) = 0; \\ \dot{y} = -y &\Rightarrow y^* = 0. \end{aligned}$$

Os pontos são $(0, 0)$ e, se $\mu > 0$, $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$. A matriz jacobiana é

$$J = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como J é uma matriz diagonal, os autovalores são os elementos da diagonal:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu - 3x^2, \\ \lambda_2 &= -1, \end{aligned}$$

sendo $\lambda_2 < 0$ para todos os pontos fixos, a estabilidade é determinada unicamente pelo sinal de λ_1 .

Caso $\mu < 0$, em $x^* = 0$, temos

$$J(0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \mu - 3(0)^2 = \mu,$$

e como μ é negativo, temos $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = -1 < 0$, ou seja, ambos os autovalores são negativos. O ponto fixo $(0, 0)$ é um nó estável.

Caso $\mu = 0$, em $x^* = 0$, temos

$$J(0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = -1 < 0,$$

o autovalor $\lambda_1 = 0$ indica que a linearização falha. O sistema sofre retardamento crítico na direção x . A dinâmica real é governada pelo termo $-x^3$, que ainda leva a um decaimento para a origem. É um ponto fixo marginalmente estável.

Caso $\mu > 0$, em $x^* = 0$, então

$$J(0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \mu - 3(0)^2 = \mu,$$

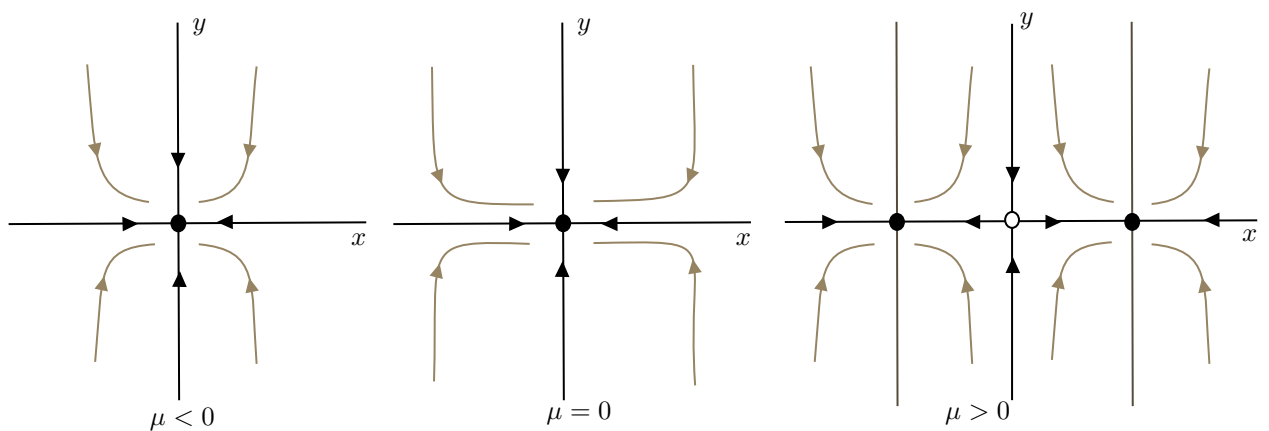
e como μ é positivo, temos $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = -1 < 0$, ou seja, os autovalores têm sinais opostos. O ponto fixo $(0, 0)$ é um ponto de sela. A trajetória se afasta na direção x e se aproxima na direção y .

Agora, para os pontos não triviais $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$:

$$J(\pm\sqrt{\mu}, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \mu - 3(\pm\sqrt{\mu})^2 = \mu - 3\mu = -2\mu,$$

e como μ é positivo, temos $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = -1 < 0$, ambos autovalores são negativos. Os pontos fixos $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ são nós estáveis. Com isso, o retrato de fase é dado na Figura 13.

Figura 13 – Gráfico do Exemplo 3.5.

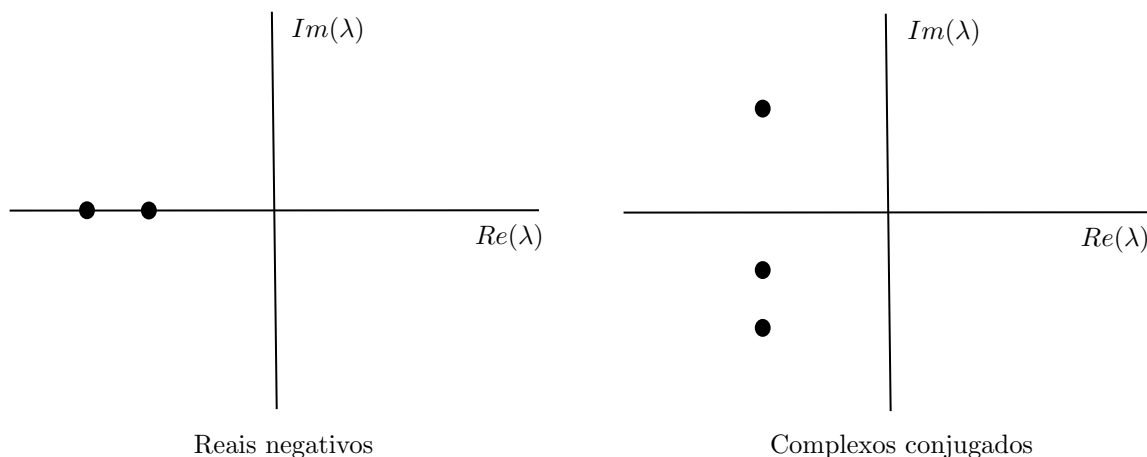


3.2.3 Bifurcação de Hopf

Neste caso, os autovalores da Jacobiana são a chave para o entendimento. Se o ponto fixo for estável, os autovalores λ_1, λ_2 devem estar no semiplano esquerdo, $Re(\lambda) < 0$, como

apresenta a Figura 14. Uma vez que os autovalores satisfazem uma equação quadrática com coeficientes reais, existem dois cenários possíveis: ambos negativos e positivos, ou são complexos conjugados. Para desestabilizar o ponto fixo, precisamos que um ou ambos os autovalores “cruzem” para o semiplano direito à medida que μ varia.

Figura 14 – Plano $Re(\lambda)$ para Bifurcação de Hopf.



Consideramos um caso mais amplo, em que dois autovalores complexos conjugados cruzam simultaneamente o eixo imaginário para o semiplano direito.

- *Bifurcação de Hopf supercrítica:* Ocorre quando uma espiral estável se transforma em uma espiral instável cercada por um pequeno ciclo limite quase elíptico.

Seja μ um parâmetro de controle e μ_c um valor crítico. Se o decaimento se torna mais lento e finalmente muda para o crescimento em um valor crítico μ_c , o equilíbrio perderá estabilidade.

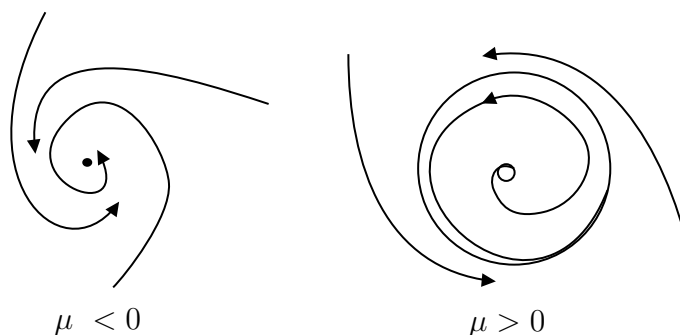
Um exemplo simples de uma bifurcação de Hopf supercrítica é dado pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3, \\ \dot{\theta} = \omega + br^2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Note que as equações estão em coordenadas polares (r, θ) , onde μ controla a estabilidade do ponto fixo na origem, ω fornece a frequência das oscilações e b determina a dependência da frequência na amplitude para oscilações de maior amplitude.

Quando $\mu < 0$, a origem $r = 0$ é uma espiral estável, cujo sentido de rotação depende do sinal de ω . Para $\mu = 0$, a origem ainda é uma espiral estável, embora muito fraca. Finalmente, para $\mu > 0$, existe uma espiral instável na origem e um ciclo limite circular estável em $r = \sqrt{\mu}$. Veja esse comportamento na Figura 15.

Figura 15 – Bifurcação de Hopf Supercrítica.



Para ver como os autovalores se comportam durante a bifurcação, reescrevemos em coordenadas cartesianas, que torna mais fácil encontrar a matriz Jacobiana. Seja

$$x = r \cos \theta; \tag{3.6}$$

$$y = r \sin \theta, \tag{3.7}$$

então

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ &= (\mu r - r^3) \cos \theta - r(\omega + br^2) \sin \theta \\ &= (\mu - r^2)(R \cos \theta) - (\omega + br^2)(R \sin \theta) \\ &= \mu x - \omega y + \text{termos cúbicos,} \end{aligned}$$

e similarmente $\dot{y} = \omega x + \mu y + \text{termos cúbicos}$. Portanto, a Jacobiana na origem é

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda = \mu \pm i\omega$. Como esperado, os autovalores cruzam o eixo imaginário da esquerda para a direita à medida que μ aumenta de valores negativos para positivos.

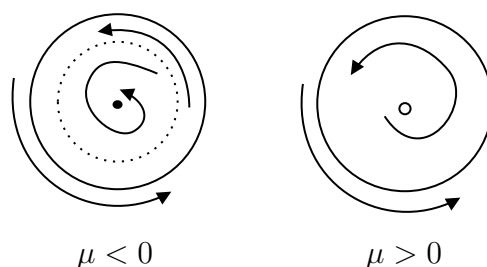
- *Bifurcação de Hopf subcrítica:* Após a bifurcação, as trajetórias podem saltar para um atrator distante, que pode ser um ponto fixo, outro ciclo limite, o infinito, ou — em 3 ou mais dimensões — um atrator caótico, como é o caso do Sistema de Lorenz. Mas, por enquanto, consideremos o exemplo bidimensional.

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5, \\ \dot{\theta} = \omega + br^2. \end{cases} \tag{3.8}$$

A diferença importante em relação ao exemplo supercrítico é que o termo cúbico r^3 agora desestabiliza; ele ajuda a levar as trajetórias para longe da origem.

Para $\mu < 0$, existem dois atratores, um ciclo limite estável e um ponto fixo estável na origem. Entre eles está um ciclo instável, mostrado como uma linha tracejada, na Figura 16, ele é o que se destaca neste caso. À medida que μ aumenta, uma bifurcação de Hopf subcrítica ocorre em $\mu = 0$, onde o ciclo instável encolhe para a amplitude zero, tornando a origem instável. Para $\mu > 0$, o ciclo limite de grande amplitude e subitamente o único atrator (veja Figura 16). Soluções que antes permaneciam perto da origem agora são forçadas a crescer em oscilações de grande amplitude.

Figura 16 – Bifurcação de Hopf Subcrítica.



O sistema exibe *histerese*: uma vez que as oscilações de grande amplitude começam, elas não podem ser interrompidas simplesmente trazendo μ de volta a zero. Essa destruição do ciclo limite de grande amplitude ocorre através de outro tipo de bifurcação.

Exemplo 3.3: *Mostre que ocorre uma bifurcação de Hopf em $\mu = 0$ e classifique essa bifurcação.*

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + xy^2, \\ \dot{y} = x + \mu y + y^3. \end{cases}$$

A bifurcação de Hopf ocorre quando o ponto fixo é marginalmente estável, ou seja, quando a parte real dos autovalores da matriz Jacobiana J é zero.

O ponto fixo é a origem $(0, 0)$. A matriz J é

$$J = \begin{pmatrix} \mu + y^2 & -1 + 2xy \\ 1 & \mu + 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Calculamos o traço τ e o determinante Δ de J :

$$\begin{aligned} \tau &= 2\mu, \\ \Delta &= \mu^2 + 1. \end{aligned}$$

A equação característica é dada por $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$, então

$$\lambda^2 - 2\mu\lambda + (\mu^2 + 1) = 0,$$

e usando a fórmula quadrática

$$\lambda = \frac{2\mu \pm \sqrt{(2\mu)^2 - 4(\mu^2 + 1)}}{2} = \mu \pm i.$$

Analisamos o sinal da parte real $Re(\lambda) = \mu$:

- Se $\mu < 0$, então $Re(\lambda) < 0$. O ponto fixo é uma espiral estável;
- Se $\mu = 0$, então $Re(\lambda) = 0$. O par de autovalores $\lambda = \pm i$ cruza o eixo imaginário. A bifurcação de Hopf ocorre neste ponto;
- Se $\mu > 0$, então $Re(\lambda) > 0$. O ponto fixo é uma espiral instável.

A estabilidade final é determinada pelos termos não-lineares. Então convertamos a equação diferencial ordinária em coordenadas polares. Para $r^2 = x^2 + y^2$, temos $\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$. Substituindo \dot{x} e \dot{y} :

$$\begin{aligned} x\dot{x} &= \mu x^2 - xy + x^2 y^2; \\ y\dot{y} &= xy + \mu y^2 + y^4. \end{aligned}$$

Ainda

$$x\dot{x} + y\dot{y} \approx \mu(x^2 + y^2) + x^2 y^2 + y^4 + O(r^5).$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$, temos

$$x\dot{x} + y\dot{y} = \mu r^2 + y^2 + r^2.$$

Então,

$$\dot{r} = \mu r + y^2 r.$$

Substituindo $y = r \sin \theta$:

$$\dot{r} = \mu r + (r \sin \theta)^2 r = \mu r + r^3 \sin^2 \theta.$$

O termo não-linear é $r^3 \sin^2 \theta$, que é positivo, e isso desestabiliza o sistema, empurrando as soluções para fora da origem, demonstrando a instabilidade. Assim, como $\dot{r} > 0$, a espiral instável na origem não pode estar limitada por um ciclo limite pequeno e estável. Portanto, a bifurcação é subcrítica.

4 PLANO DE FASES EM SISTEMAS LINEARES

Existem diversas equações diferenciais, especialmente as não lineares, que não podem ser resolvidas de forma analítica e de maneira prática. Para lidar com essas equações, utilizam-se métodos numéricos, por exemplo. Aqui faremos o uso de uma análise geométrica das equações, baseando-se em uma compreensão qualitativa à respeito de seus comportamentos, em vez de uma informação quantitativa detalhada. No entanto, nossa discussão se inicia com um estudo para sistemas lineares bidimensionais. Estes estudos servem como base para explorarmos sistemas mais gerais, em que o comportamento pode ser mais rico e complexo.

Considera-se um sistema bidimensional de equações lineares homogêneas de primeira ordem da forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

onde A é uma matriz 2×2 , e x é um vetor 2×1 . Ou seja,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$.

Como a equação (4.1) é um função vetorial do tipo $\mathbf{x} = \phi(t)$, então tal função pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano x_1x_2 . Assim, podemos olhar essa curva como uma trajetória percorrida por uma partícula, um ponto em movimento cuja velocidade dx/dt é especificada pela equação diferencial. O plano x_1x_2 é chamado de *plano de fase*. Também podemos dizer que o plano de fase funciona como um mapa de destino das soluções: nele, cada trajetória revela o futuro do sistema a partir de diferentes condições iniciais.

4.1 COMPORTAMENTO DAS TRAJETÓRIAS

Considere a equação diferencial ordinária (EDO) linear mais simples em uma dimensão: $\dot{x} = ax$, onde a é uma matriz 1×1 . A solução desta equação é bem conhecida e envolve crescimento ou decaimento exponencial: $x(t) = Ce^{at}$, onde C é uma constante. Para encontrar a solução, estendemos a forma exponencial e^{at} para a forma vetorial: $\mathbf{x}(t) = \xi e^{rt}$. Aqui, r é uma constante (o autovalor) e ξ é um vetor constante (o autovetor), que define a direção.

Dessa forma, a estratégia é buscar soluções da forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Assim, substituindo em (4.1), temos:

$$(A - rI)\xi = 0. \tag{4.2}$$

Os autovalores são as raízes da equação polinomial

$$\det(A - rI) = 0, \tag{4.3}$$

e os autovetores são determinados pela equação (4.2).

As trajetórias $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ esboçadas no plano de fase podem variar de acordo com os autovalores analisados. Para isso, é preciso fazer a análise de 5 casos possíveis. Para isso, sejam r_1 e r_2 autovalores de A .

4.1.1 Autovalores Reais e Distintos de Mesmo Sinal

Considere $r_1 < r_2 < 0$ e os autovetores $\vec{\xi}^1$ e $\vec{\xi}^2$ correspondentes, respectivamente. A solução geral do sistema (4.1) é:

$$x(t) = c_1 \vec{\xi}^1 e^{r_1 t} + c_2 \vec{\xi}^2 e^{r_2 t}, \tag{4.4}$$

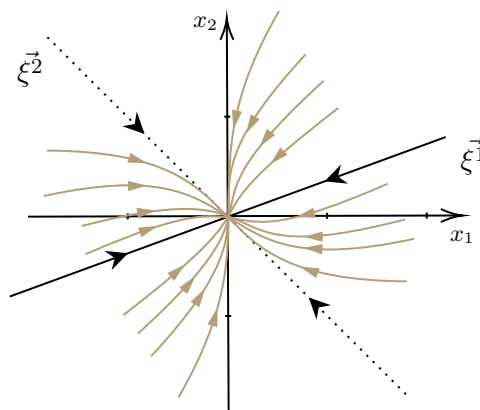
onde c_1 e c_2 são constantes que dependem de condições iniciais. A equação (4.4) pode ser reescrita como

$$x(t) = e^{r_2 t} (c_1 \vec{\xi}^1 e^{(r_1 - r_2)t} + c_2 \vec{\xi}^2), \tag{4.5}$$

pois, dessa forma, é possível entender melhor o que acontece quando $t \rightarrow \pm\infty$.

As soluções $x(t)$ tendem à origem quando $t \rightarrow \infty$. De fato, como $r_1 < r_2 < 0$, então $e^{r_1 t} \rightarrow 0$ e $e^{r_2 t} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Mesmo que $c_1, c_2 \neq 0$, a exponencial com expoente negativo faz com que a solução $x(t)$ decresça, assim, tendendo a zero. Se $c_2 = 0$, então $x(t) = c_1 \vec{\xi}^1 e^{r_1 t}$, ou seja, a solução fica ao longo da direção de $\vec{\xi}^1$ e tende para a origem. Agora, note também que se $c_2 \neq 0$, então $c_1 \vec{\xi}^1 e^{(r_1 - r_2)t}$ torna-se desprezível comparado com $c_2 \vec{\xi}^2$ para valores suficientemente grandes de t , e $e^{r_2 t}$ é o termo dominante. Logo, a trajetória é mais próxima da direção do autovetor $\vec{\xi}^2$, para $t \rightarrow \infty$. Para melhor visualização dessas trajetórias nessas condições, observe o gráfico da Figura 17.

Figura 17 – Trajetórias para o caso de autovalores reais e distintos de mesmo sinal.



Considere os autovalores $r_1, r_2 > 0$. Então, de maneira análoga, pode-se observar que as soluções se afastam da origem quando $t \rightarrow \infty$. Dessa forma, o sistema mostra-se **instável**. Agora, quando $t \rightarrow -\infty$, se $c_1 \neq 0$, então o termo dominante é $e^{r_1 t}$. Assim, para valores negativos de t grandes, em módulo, as trajetórias têm inclinações muito próximas do autovetor $\vec{\xi}^1$.

Enfim, na Tabela 1 abaixo apresenta um resumo geral do comportamento das soluções $x(t)$ quando a matriz A tem autovalores reais e distintos de mesmo sinal.

Tabela 1 – Autovalores reais e distintos de mesmo sinal.

Sinal dos autovalores	Solução quando $t \rightarrow \infty$	Nome
$r_1, r_2 < 0$	$x(t) \rightarrow 0$	nó atrator (estável)
$r_1, r_2 > 0$	$x(t) \rightarrow \infty$	nó fonte (instável)

Fonte: Elaborado pela autora.

Em suma, pode-se concluir também que as soluções tendem a se alinhar com o autovetor correspondente ao autovalor mais fraco. Ou seja, suponha $r_1 = -3$ e $r_2 = -1$, então o movimento da trajetória, dado por

$$x(t) = c_1 \vec{\xi}^1 e^{-3t} + c_2 \vec{\xi}^2 e^{-t}, \quad (4.6)$$

tende a se alinhar com $\vec{\xi}^2$, pois e^{-t} “morre” mais devagar que e^{-3t} .

4.1.2 Autovalores Reais com Sinais Opostos

Suponha a solução geral do sistema (4.1)

$$x(t) = c_1 \xi^1 e^{r_1 t} + c_2 \xi^2 e^{r_2 t}, \quad (4.7)$$

onde $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$. Observe que o termo $e^{r_1 t}$ cresce exponencialmente e o termo $e^{r_2 t}$ decresce exponencialmente, devido ao seu sinal negativo. Dessa forma, existem duas forças competindo: uma tendendo ao infinito quando $t \rightarrow \infty$ e a outra tendendo à origem quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, algumas trajetórias movem-se para a origem ao longo de $\vec{\xi}^2$, e outras trajetórias fogem da origem, ao longo de $\vec{\xi}^1$. Esse comportamento relacionando aos autovalores r_1 e r_2 apresenta um gráfico como na Figura 18 abaixo.

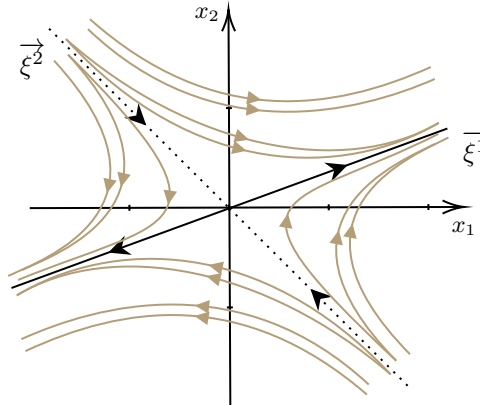
Se a solução começar em um ponto inicial que estiver exatamente sobre a reta do autovetor $\vec{\xi}^1$, então $c_2 = 0$, ou seja,

$$x(t) = c_1 \xi^1 e^{r_1 t}. \quad (4.8)$$

E assim, a solução permanecerá nessa reta para todo t , e como $r_1 > 0$, então $\|x\| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. De maneira, análoga, se a condição inicial começar exatamente em $\vec{\xi}^2$,

então $c_1 = 0$, restando apenas o termo $c_2 \vec{\xi}^2 e^{r_2 t}$. E, como $r_2 < 0$, então a exponencial faz com que a solução decresça.

Figura 18 – Trajetórias para o caso de autovalores reais com sinais oposto.



Agora, para soluções do sistema que comecem em outros pontos iniciais, a exponencial positiva é o termo dominante para valores grandes de t , e, portanto, todas as soluções tenderão ao infinito assintoticamente à reta de $\vec{\xi}^1$. Similarmente, para valores grandes negativos de t , em módulo, a exponencial negativa torna-se o termo dominante de (4.7), de maneira que as soluções típicas devem ser assintóticas à reta determinada pelo autovetor $\vec{\xi}^2$ quando $t \rightarrow -\infty$. Dessa forma, em ambos os casos, a retrato de fase será dado por um ponto de sela.

Na Tabela 2 vê-se, então, um resumo da análise feita nesta subseção, relacionando o comportamento dos autovalores e da solução.

Tabela 2 – Autovalores Reais com Sinais Opostos.

Sinal dos autovalores	Quando $t \rightarrow \infty$	Estabilidade
$r_1 > 0, r_2 < 0$	$e^{r_1 t} \rightarrow \infty, e^{r_2 t} \rightarrow 0$	$\vec{\xi}^1$ instável e $\vec{\xi}^2$ estável
$r_1 < 0, r_2 > 0$	$e^{r_1 t} \rightarrow 0, e^{r_2 t} \rightarrow \infty$	$\vec{\xi}^1$ estável e $\vec{\xi}^2$ instável

Fonte: Elaborado pela autora.

4.1.3 Autovalores Iguais

Considere $r_1 = r_2 = r$:

$$x(t) = c_1 \vec{\xi}^1 e^{rt} + c_2 \vec{\xi}^2 e^{rt}. \tag{4.9}$$

Neste caso, existem dois subcasos que dizem respeito aos autovetores do sistema abaixo.

a) ξ_1 e ξ_2 independentes:

Suponha que os autovetores $\vec{\xi}^1$ e $\vec{\xi}^2$ são independentes. Assim, o sistema tem duas direções próprias no plano de fase, mesmo que $r_1 = r_2$. A solução geral é dada pela

equação (4.9), porém podendo aparecer também como

$$x(t) = e^{rt}(c_1\vec{\xi}^1 + c_2\vec{\xi}^2). \quad (4.10)$$

A razão x_1/x_2 é independente do tempo t , mas depende das coordenadas dos autovetores $\vec{\xi}^1$ e $\vec{\xi}^2$ e das constantes arbitrárias c_1 e c_2 . Veja:

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{e^{rt}(c_1\vec{\xi}_1^1 + c_2\vec{\xi}_1^2)}{e^{rt}(c_1\vec{\xi}_2^1 + c_2\vec{\xi}_2^2)} = \frac{c_1\vec{\xi}_1^1 + c_2\vec{\xi}_1^2}{c_1\vec{\xi}_2^1 + c_2\vec{\xi}_2^2}. \quad (4.11)$$

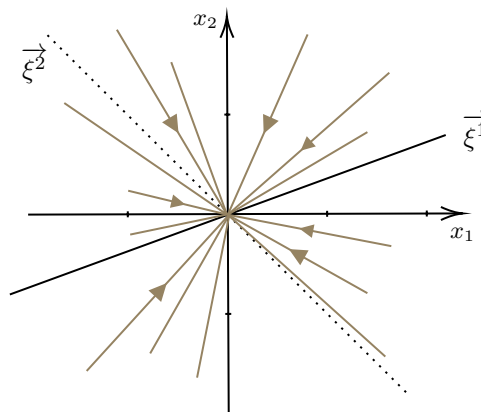
Logo, todas as soluções estão contidas sobre retas que passam pela origem, como mostra a Figura 19. A respeito do termo e^{rt} , se $r < 0$, então todas as soluções decrescem para a origem, e se $r > 0$, então as soluções tendem ao infinito, como mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Autovalores iguais e dois autovetores independentes.

Sinal dos autovalores	Solução quando $t \rightarrow \infty$	Nome
$r > 0$	$x(t) \rightarrow \infty$	nó próprio (instável)
$r < 0$	$x(t) \rightarrow 0$	nó estrela (estável)

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 19 – Trajetórias para o caso de autovalores iguais e dois autovetores independentes.



Portanto quando $r_1 = r_2 = r$, com dois autovetores independentes, a solução do sistema será definida a partir do sinal de r , sendo o raio desse sistema independente do tempo t .

b) ξ_1 e ξ_2 linearmente dependentes:

Vamos mostrar que, neste caso, a solução geral pode ser dada por:

$$x(t) = c_1\xi e^{rt} + c_2(\xi t e^{rt} + \eta e^{rt}), \quad (4.12)$$

em que $\xi = \xi_1$ (por exemplo) e η é um autovetor generalizado. Tome w tal que ξ e w sejam linearmente independentes. Da equação (4.2), temos que $A\xi = r\xi$ pode ser

escrito como uma combinação linear entre ξ e w :

$$Aw = a\xi + bw = a\xi + rw,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$.

Considerando $v_1 = a\xi$ e $v_2 = w$, v_1 e v_2 são linearmente independentes e

$$Av_1 = rv_1, \quad Av_2 = v_1 + bv_2.$$

Agora, escreva a solução $x(t)$ da forma

$$x(t) = \alpha(t)v_1 + \beta(t)v_2.$$

Devemos encontrar $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ para que $x(t)$ seja de fato solução do sistema (4.1).

Para isso, considere

$$\alpha'(t)v_1 + \beta'(t)v_2 = A(\alpha(t)v_1 + \beta(t)v_2) = \alpha(t)Av_1 + \beta(t)Av_2.$$

Assim,

$$\alpha'(t)v_1 + \beta'(t)v_2 = \alpha(t)rv_1 + \beta(t)(v_1 + bv_2) = (\alpha(t)r + \beta(t))v_1 + \beta(t)bv_2.$$

Como v_1 e v_2 formam uma base de \mathbb{R}^2 , temos

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \alpha(t)r + \beta(t), \\ \beta'(t) = \beta(t)b. \end{cases} \quad (4.13)$$

Para encontrar a solução deste sistema de equações diferenciais ordinárias, começamos com a segunda equação e aplicamos o método do fator integrante. Assim, obtemos

$$\beta(t) = \beta_0 e^{bt},$$

em que β_0 é uma constante arbitrária. Por substituição, obtemos agora

$$\alpha'(t) = \alpha(t)r + \beta_0 e^{rt}.$$

Novamente, pelo método do fator integrante, obtemos

$$\alpha(t) = (\alpha_0 + \beta_0 t)e^{bt},$$

em que α_0 é uma constante arbitrária. Concluimos que $b = r$ e que a solução $x(t)$ é

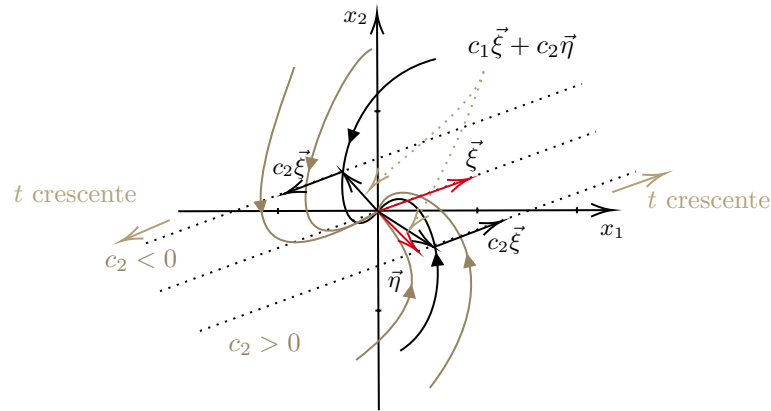
$$x(t) = (\alpha_0 + \beta_0 t)e^{rt}v_1 + \beta_0 e^{rt}v_2.$$

Portanto, é dessa maneira que encontramos um autovetor generalizado $\vec{\eta}$ para que (4.12) seja solução do sistema $Ax = x'$. Ainda podemos reorganizar a equação como

$$x(t) = ((c_1 + c_2 t)\vec{\xi} + c_2 \vec{\eta})e^{rt}. \quad (4.14)$$

O seu retrato de fase é apresentado na Figura 20 abaixo.

Figura 20 – Trajetórias para o caso de autovalores iguais e um autovetor independente.



O termo $(c_1 + c_2 t)\vec{\xi} + c_2 \vec{\eta} = y$ determina a direção do vetor $x = (x_1, x_2)$ no plano de fase. O termo e^{rt} apenas altera o tamanho (módulo) do vetor x . Assim, o movimento do plano de fase depende da combinação linear de $\vec{\xi}$ e $\vec{\eta}$, e do tempo t . Quando $t = 0$, tem-se $c_1 \vec{\xi} + c_2 \vec{\eta}$, ou seja, a trajetória começa em uma reta específica determinada pelos coeficientes c_1 e c_2 . Quando $t \rightarrow \infty$, o termo t domina $c_2 t \vec{\xi}$, o vetor x se alinha com o autovetor $\vec{\xi}$ e a trajetória se aproxima de uma reta paralela a $\vec{\xi}$. Enfim, quando $t \rightarrow -\infty$ o termo exponencial e^{rt} decai para zero e a direção, novamente, tende a se alinhar com $\vec{\xi}$, porém dependendo do sinal do coeficiente c_2 , a orientação pode ser invertida. A Tabela 4.1 resume o comportamento deste caso.

Tabela 4 – Autovalores iguais e dois autovetores independentes.

Sinal dos autovalores	Estabilidade	Nome
$r > 0$	instável	nó impróprio
$r < 0$	assintoticamente estável	nó impróprio

Fonte: Elaborado pela autora.

4.1.4 Autovalores Complexos com Parte Real Não-Nula

Seguindo adiante com a análise dos comportamentos dos autovalores que podem ser adotados no sistema (4.2), nesta subseção encontra-se o caso em que os autovalores são complexos, com a parte real não-nula.

Pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan 2×2 (DOERING; LOPES, 2016), se os autovalores são complexos, da forma $\alpha + i\mu$ e $\alpha - i\mu$, com $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$ e $\mu \neq 0$, então

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ -\mu & \alpha \end{bmatrix},$$

ou seja, nosso sistema se torna

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ -\mu & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

A matriz acima é não-simétrica, entretanto tem uma estrutura que os termos da diagonal secundária são anti-simétricos, ou seja, com sinais opostos, e os termos da diagonal principal são iguais. Esse tipo de matriz tem, de fato, autovalores complexos conjugados. Veja bem,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \mu \\ -\mu & \alpha - \lambda \end{bmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \pm i\mu.$$

Logo $\lambda = \alpha \pm i\mu$ são os autovalores complexos conjugados do sistema, cuja forma escalar é

$$x_1' = \alpha x_1 + \mu x_2, \quad (4.15)$$

$$x_2' = -\mu x_1 + \alpha x_2. \quad (4.16)$$

Como os autovalores são complexos, e dados em coordenadas cartesianas isto, torna as equações mais difíceis de visualizar, então transformamo-nas em coordenadas polares, onde elas se separam em: uma coordenada para o raio $r(t)$ e uma coordenada para o ângulo $\theta(t)$, tais que, respectivamente, representam se o sistema cresce ou não e a rotação da trajetória. Portanto, a ideia é reescrever $(x_1(t), x_2(t))$ usando $r(t)$ e $\theta(t)$ que descrevem a posição do ponto no plano de fase como

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta. \quad (4.17)$$

Para encontrar a coordenada relacionada ao raio, temos

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (4.18)$$

Para encontrar o ângulo, usamos a tangente:

$$\tan \theta = \frac{x_2}{x_1}. \quad (4.19)$$

Ao diferenciar as equações (4.18) e (4.19), obtemos o seguinte resultado:

$$rr' = x_1 x_1' + x_2 x_2', \quad (4.20)$$

$$(\sec^2 \theta) \theta' = \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{x_1^2}. \quad (4.21)$$

Agora, substituindo as equações (4.15) e (4.16) na equação (4.20), temos

$$\begin{aligned} rr' &= x_1(\alpha x_1 + \mu x_2) + x_2(-\mu x_1 + \alpha x_2) \\ &= \alpha x_1^2 + \mu x_1 x_2 - \mu x_1 x_2 + \alpha x_2^2 \\ &= \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 \\ &= \alpha(x_1^2 + x_2^2) \\ &= \alpha r^2 \Rightarrow r' = \alpha r. \end{aligned}$$

Portanto, $r = ce^{\alpha t}$, em que c é uma constante. E, ainda, substituindo as equações (4.15) e (4.16) na equação (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} (\sec^2 \theta)\theta' &= \frac{x_1(-\mu x_1 + \alpha x_2) - x_2(\alpha x_1 + \mu x_2)}{x_1^2} \\ &= \frac{-\mu x_1^2 + \alpha x_1 x_2 - \alpha x_1 x_2 - \mu x_2^2}{x_1^2} \\ &= \frac{-\mu(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2} \\ &= \frac{-\mu r^2}{x_1^2}. \end{aligned}$$

Note que $\sec^2 \theta = \frac{r^2}{x_1^2}$, então

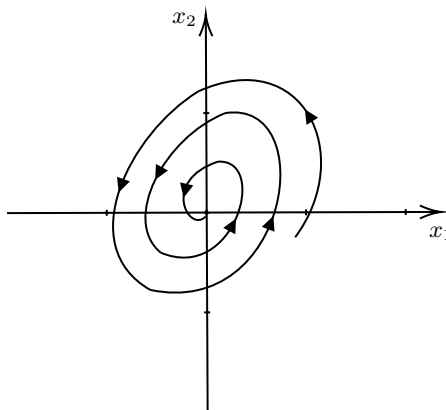
$$\theta' = \frac{-\mu r^2}{x_1^2} \frac{x_1^2}{r^2} \Rightarrow \theta' = -\mu. \quad (4.22)$$

Resultando em $\theta(t) = -\mu t + \theta_0$, em que θ_0 é uma constante arbitrária. Portanto, a solução fica

$$r(t) = ce^{\alpha t}, \quad \theta(t) = -\mu t + \theta_0.$$

Essas equações são, enfim, paramétricas em coordenadas polares das trajetórias do sistema citado no início desta subseção. Quando uma matriz tem autovalores complexos, o sistema associado tem soluções que oscilam, por causa de μ e crescem ou decrescem exponencialmente devido a α . Isso gera o padrão espiral no plano de fase, como mostra a Figura 21.

Figura 21 – Trajetórias para o caso de autovalores complexos com parte real não-nula.



Assim, a Tabela 5 resume o comportamento das trajetórias quando o sistema tem autovalores complexos, com parte real não-nula. Como $\mu > 0$, de (4.22), θ diminui quando t aumenta, de modo que o movimento de uma trajetória é no sentido horário. Ademais, μ determina a velocidade da rotação, no sentido horário, devido ao sinal negativo de $\theta = -\mu$.

Tabela 5 – Autovalores complexos.

Sinal dos autovalores	Raio quando $t \rightarrow \infty$	Nome	Comportamento
$\alpha \pm i\mu$ com $\alpha < 0$	$r \rightarrow 0$	foco estável (poço)	amplitude decrescente
$\alpha \pm i\mu$ com $\alpha > 0$	$r \rightarrow \infty$	foco instável (fonte)	amplitude crescente

Fonte: Elaborado pela autora.

Considere a equação 4.1 na forma matricial. É possível obter uma ideia geral da orientação das trajetórias verificando os sinais de b e d . Suponha que

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tem autovalores complexos $\alpha \pm i\mu$ e considere o ponto $(x_1, x_2) = (0, 1)$. Nesse ponto, $dx_1/dt = b$ e $dx_2/dt = d$

4.1.5 Autovalores Imaginários Puros

Similarmente ao caso anterior, tomamos os autovalores complexos $\alpha \pm i\mu$, porém neste caso $\alpha = 0$, ou seja, os autovalores são imaginários puros $\pm i\mu$, sendo assim o sistema resume-se a

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

cuja forma cartesiana é

$$x_1' = \mu x_2, \quad (4.23)$$

$$x_2' = -\mu x_1. \quad (4.24)$$

Tome as equações (4.20) e (4.21) para transformar as coordenadas em coordenadas polares. Substituindo as equações (4.23) e (4.24) em (4.20), obtemos:

$$\begin{aligned} rr' &= x_1(\mu x_2) + x_2(-\mu x_1) \\ &= \mu x_1 x_2 - \mu x_1 x_2 \\ &= 0 \Rightarrow r' = 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, substituindo as equações (4.23) e (4.24) em (4.21), obtemos:

$$\begin{aligned} (\sec^2 \theta)\theta' &= \frac{x_1(-\mu x_1) - x_2(\mu x_2)}{x_1^2} \\ &= \frac{-\mu x_1^2 - \mu x_2^2}{x_1^2} \\ &= \frac{-\mu(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2} \\ &= \frac{-\mu r^2}{x_1^2}. \end{aligned}$$

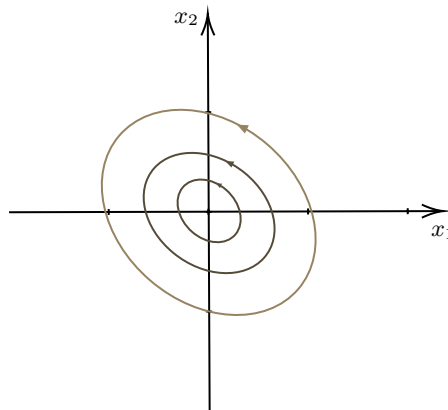
Como $\sec^2 \theta = \frac{r^2}{x_1^2}$, então

$$\theta' = \frac{-\mu r^2}{x_1^2} \frac{x_1^2}{r^2} \Rightarrow \theta' = -\mu. \quad (4.25)$$

Portanto temos $r' = 0$ e $\theta' = -\mu$ tais que $r(t) = c$, que mostra que o raio permanece constante e $\theta(t) = -\mu t + \theta_0$, onde θ_0 também é constante.

Como r é constante e θ varia linearmente com o tempo, então as soluções descrevem circunferências (ou elipses) em torno da origem, como mostra a Figura 22. O sentido de rotação depende exclusivamente do sinal de μ : se $\mu > 0$, as trajetórias são percorridas no sentido horário, e no sentido anti-horário se $\mu < 0$.

Figura 22 – Trajetórias para o caso de autovalores imaginários puros.



Enfim, a Tabela 6 apresenta o resumo para este último caso.

Tabela 6 – Autovalores imaginários puros.

Sinal dos autovalores	Sentido de rotação	Nome
$\pm i\mu$ com $\mu > 0$	horário	centro
$\pm i\mu$ com $\mu < 0$	anti-horário	centro

Fonte: Elaborado pela autora.

5 SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE

O objetivo deste capítulo é expandir as ideias geométricas discutidas anteriormente para sistemas autônomos que não necessariamente são lineares, introduzindo conceitos fundamentais de estabilidade.

5.1 SISTEMAS AUTÔNOMOS

Sistemas autônomos são sistemas de equações diferenciais independentes da variável tempo. Ou seja, suas equações não envolvem, explicitamente, o tempo t .

Considere o sistema de duas equações diferenciais da forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y). \quad (5.1)$$

Assim, esse sistema tem duas equações diferenciais acopladas, com variáveis dependentes $x(t)$, $y(t)$. Note que a derivada de cada uma depende somente de x e y , não dependendo de t .

Sejam F e G funções contínuas com derivadas parciais contínuas em algum domínio D no plano xy . Neste caso, D é aberto e conexo. Dado um ponto $(x_0, y_0) \in D$, então, pelo Teorema de Existência e Unicidade (veja Anexo A), existe uma única solução $x = x(t)$ e $y = y(t)$ de (5.1), definida em um intervalo de tempo I contendo t_0 , satisfazendo

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (5.2)$$

Em outras palavras, esse teorema garante que, sob certas condições iniciais, existe uma única curva solução que passa por um ponto dado no plano de fase.

Além disso, podemos escrever o sistema autônomo na forma vetorial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad x(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (5.3)$$

onde $\mathbf{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $f(\mathbf{x}) = F(x, y)\vec{i} + G(x, y)\vec{j}$, $\mathbf{x}^0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, em que \vec{i}, \vec{j} denota a base canônica de \mathbb{R}^2 . Para chegar nessa forma, considere o sistema (5.1) e defina um vetor de variáveis dependentes

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Agora, defina uma função vetorial que representa o lado direito do sistema (5.1) da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Optamos por usar a forma vetorial, pois dela podemos extrair algumas vantagens, como: em vez de duas, ou mais, equações separadas, temos uma única equação vetorial. Além disso, a equação $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ define um campo vetorial, isso leva à ideia de plano de fase, de tal forma que uma solução $\mathbf{x}(t)$ pode ser representada por uma curva parametrizada cuja direção em cada ponto é determinada pela equação $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Enfim, as funções F e G não dependem da variável independente t , mas sim de x e y . Isso, portanto, define um sistema autônomo.

Exemplo 3.1: O sistema (4.1), onde A é uma matriz constante 2×2 é um exemplo simples de sistema autônomo bidimensional, pois o sistema não depende de t .

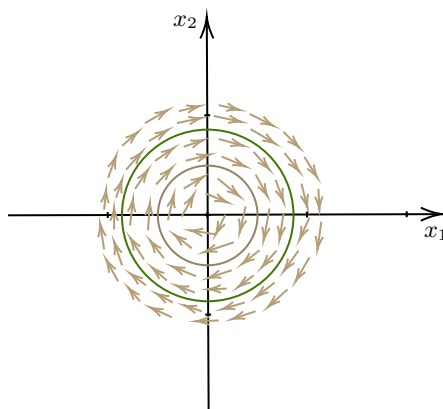
A análise qualitativa geométrica desenvolvida no capítulo anterior pode ser estendida para sistemas autônomos gerais.

Para cada ponto $\mathbf{x} = (x, y)$ no plano de fase, a função $\mathbf{f}(x, y)$ fornece um vetor, e este vetor aponta na direção em que a solução se move no tempo. Porém, como o sistema não depende do tempo t , então o campo vetorial é *estático*, ou seja, as trajetórias não se cruzam e as soluções preenchem o plano de maneira organizada. Todas as trajetórias podem ser visualizadas no plano xy . Assim, o tempo é apenas como um parâmetro de movimento ao longo das curvas. Existe apenas uma trajetória passando pelo ponto (x_0, y_0) no plano de fase, devido ao Teorema de Existência e Unicidade. A curva traçada por $\mathbf{x}(t)$ a partir de um ponto inicial representa a solução inteira.

Exemplo 3.2: Considere o sistema autônomo a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (5.4)$$

Esboçando o gráfico desse sistema no *software* “Mathcha”, obtemos o seguinte plano de fase, apresentado na Figura 23.

Figura 23 – Trajetória do sistema (5.4).

5.2 ESTABILIDADE

Considere o sistema autônomo

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}). \quad (5.5)$$

Esse sistema pode ter pontos de equilíbrio, ou seja, pontos onde

$$f(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.6)$$

Esses pontos também são chamados *pontos críticos*. Além disso, um ponto crítico é dito isolado quando existe uma vizinhança em torno dele, tal que ele é o único ponto crítico do sistema naquela vizinhança. Observe que esses pontos correspondem às soluções constantes do sistema de equações diferenciais; justificando a nomenclatura pontos de equilíbrio. Sendo assim, a estabilidade descreve como as soluções do sistema se comportam quando iniciadas próximas desses pontos críticos. Para isso, é preciso classificar determinadas situações que esses pontos podem assumir.

Definição 5.1. (Ponto Crítico Estável): Um ponto crítico é dito estável se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que toda solução $\mathbf{x} = (t)$ do sistema (5.1) que satisfaz, em $t = 0$,

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta,$$

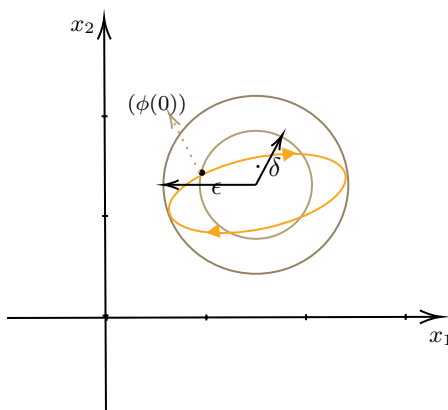
existe para todo $t > 0$ e satisfaz

$$\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon,$$

onde ϵ é o tamanho da região ao redor da solução x^0 e δ é raio de uma região ainda menor.

Ou seja, se a solução começar dentro do círculo de raio δ , ela nunca sai do círculo de raio ϵ em nenhum tempo t . Em outras palavras, todas as soluções que começam suficientemente próximas de x^0 , permanecem próximas de x^0 . Em geral, a solução não se afasta muito de x^0 , como mostra a Figura 24.

Figura 24 – Ponto crítico estável.



Definição 5.2. (Ponto Crítico Instável): Se não for possível garantir que a solução permaneça próxima de \mathbf{x}^0 (no sentido da definição anterior), dizemos que o ponto crítico é instável.

Definição 5.3. (Ponto Crítico Assintoticamente Estável): Um ponto crítico é dito assintoticamente estável se é estável e se existe δ_0 , com $0 < \delta_0 < \delta$, tal que se uma solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ satisfaz

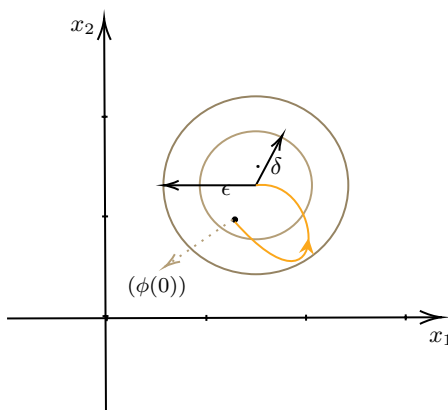
$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0,$$

então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0.$$

Ou seja, a solução tende ao ponto crítico conforme $t \rightarrow \infty$. A solução não só permanece próxima, mas converge exatamente para o ponto de equilíbrio, como mostra a Figura 25:

Figura 25 – Ponto crítico assintoticamente estável.



5.3 DETERMINAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

Existe uma maneira de determinar trajetórias de sistema autônomos bidimensionais do tipo

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y), \quad (5.7)$$

resolvendo-se uma equação diferencial de primeira ordem relacionada. Aplicando-se a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}, \quad (5.8)$$

e isso nos dá uma equação diferencial de primeira ordem relacionando x e y , sem envolver o tempo t . Observe que se F e G também dependem de t , não é possível fazer essa redução.

Em algumas situações, podemos escrever a solução implicitamente como

$$H(x, y) = c. \quad (5.9)$$

Essas curvas $H(x, y) = c$ são chamadas curvas de níveis e representam as trajetórias do sistema (5.1). É preciso atentar-se a este método, pois nem sempre dá certo, o sistema deve ser autônomo e depende do tipo de função. Portanto vale apenas em casos especiais. Para melhor compreensão deste método, veja os exemplos abaixo.

Exemplo 3.3 *Encontre as trajetórias do sistema autônomo*

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \quad (5.10)$$

Aplicando a equação (5.7) no sistema acima, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x}{y}.$$

Essa equação é separável, pois pode ser escrita na forma:

$$y \, dy = x \, dx.$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int y \, dy = \int x \, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Reescrevemos a equação das trajetórias como:

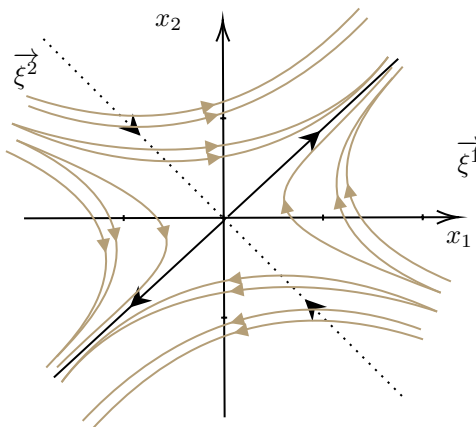
$$y^2 - x^2 = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Portanto, as trajetórias desse sistema são hipérbolas no plano xy .

O sentido do movimento ao longo dessas trajetórias pode ser determinado observando os sinais das derivadas. Como $dx/dt = y$ e $dy/dt = x$, no primeiro quadrante ambos são positivos, indicando que o movimento ocorre no sentido de crescimento simultâneo de x e y .

O ponto de sela está localizado na origem $(0, 0)$, que é o único ponto crítico do sistema (ver Figura 26).

Figura 26 – Trajetória do sistema (5.10).



Exemplo 3.4 Encontre as trajetórias do sistema

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 12 - 3x^2. \quad (5.11)$$

Começamos determinando os pontos críticos do sistema,

$$4 - 2y = 0 \implies y = 2;$$

$$12 - 3x^2 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2.$$

Portanto, os pontos críticos são $(2, 2)$ e $(-2, 2)$.

Agora, aplicamos o método de determinação de trajetórias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12 - 3x^2}{4 - 2y}$$

$$\implies (4 - 2y) dy = (12 - 3x^2) dx.$$

“Integrando” ambos os lados:

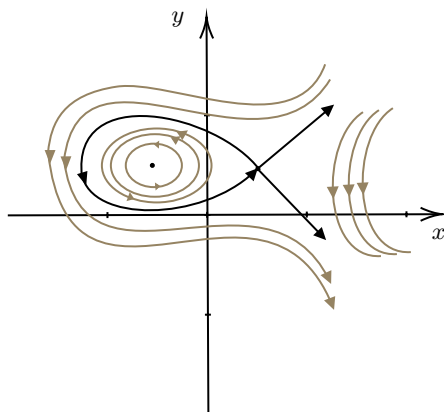
$$\begin{aligned} \int (4 - 2y) dy &= \int (12 - 3x^2) dx \\ \implies 4y - y^2 &= 12x - x^3 + C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária. Portanto, a equação das trajetórias do sistema é

$$4y - y^2 - 12x + x^3 = C.$$

As trajetórias são as curvas de nível da função $H(x, y) = 4y - y^2 - 12x + x^3$. Observe, na Figura 27, que o ponto $(2, 2)$ é um ponto de sela e o ponto $(-2, 2)$ é um centro (movimento em torno dele é fechado). O sentido do movimento ao longo das trajetórias pode ser determinado observando-se os sinais das derivadas dx/dt e dy/dt .

Figura 27 – Trajetória do sistema (5.11).



6 SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV

O segundo método de Lyapunov ¹, ou método direto, determina se um ponto de equilíbrio de um sistema é estável, assintoticamente estável ou instável sem resolver o sistema.

O método consiste na construção de uma função escalar chamada de *função de Lyapunov*, denominada V , que se comporta como a energia do sistema. Em física, muitos sistemas naturais são descritos com base em conservação ou dissipação de energia. Por exemplo, um pêndulo sem atrito que oscila para sempre, tem energia total constante. A ideia central do método de Lyapunov é construir uma função V que imite o comportamento da energia total de um sistema. Com isso, se V representa o nível de energia no estado x , então \dot{V} representa a variação dessa energia com o tempo ganhando ou perdendo energia.

Considere o sistema autônomo

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y). \quad (6.1)$$

Suponha que $(x, y) = (0, 0)$ é um ponto crítico assintoticamente estável. Então, existe algum domínio D contendo $(0, 0)$ tal que toda trajetória que começa em D tende à origem quando $t \rightarrow \infty$.

Suponha, também, que existe uma função de Lyapunov V tal que $V \geq 0$ para $(x, y) \in D$, com $V = 0$ apenas na origem. Como cada trajetória em D tende à origem quando $t \rightarrow \infty$, logo, seguindo qualquer trajetória particular, $V \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Nosso objetivo nos próximos parágrafos será provar uma recíproca desta propriedade.

Para compreender como o método de Lyapunov funciona, considere uma função $V(x, y)$ definida em um domínio D contendo a origem $(0, 0)$. Se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ em todos os outros pontos de D , então a função V é dita positiva definida. De maneira semelhante, se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) < 0$, para todos os outros valores, então V é negativa definida. Agora se as desigualdades forem \geq e \leq , então V será positiva semidefinida e negativa semidefinida, respectivamente. A Tabela 7 sintetiza o comportamento da função energia V .

¹ Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918) foi um matemático e físico russo, amplamente reconhecido por suas contribuições fundamentais à teoria da estabilidade em sistemas dinâmicos.

Tabela 7 – Análise da função energia V .

Comportamento da função V	Energia
$V(0,0) = 0, V(x,y) > 0$	Positiva definida
$V(0,0) = 0, V(x,y) < 0$	Negativa definida
$V(0,0) = 0, V(x,y) \geq 0$	Positiva semidefinida
$V(0,0) = 0, V(x,y) \leq 0$	Negativa semidefinida

Fonte: Elaborado pela autora.

Isso significa que o valor da função V mede o quão distante o estado está do ponto de equilíbrio.

Vejamos um exemplo para ilustrar esse procedimento.

Exemplo 4.1 *Verifique que*

$$V(x, y) = \text{sen}(x^2 + y^2)$$

é positiva definida em $x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}$.

Devemos mostrar que $V(0,0) = 0$ e $V(x,y) > 0$. Uma verificação direta mostra que $V(0,0) = 0$. Agora, considerando o ciclo trigonométrico, a função $\sin \theta$ é positiva apenas no intervalo $0 < \theta < \pi$. Para $0 < x^2 + y^2 < \pi/2$, segue que

$$V(x, y) = \sin(x^2 + y^2) > 0 \Rightarrow V(x, y) > 0.$$

Logo, V é positiva definida.

Ainda, para desenvolver o método, é preciso calcular $\dot{V}(x, y)$. Basta derivar V em relação ao tempo usando as equações do sistema (6.1):

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y). \quad (6.2)$$

Essa expressão representa como a energia V muda ao longo das trajetórias do sistema. Em outras palavras, se $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução do sistema, então

$$\begin{aligned} \frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y) \\ &= \dot{V}(x, y). \end{aligned}$$

Ainda é possível fazer uma análise do sinal de $\dot{V}(x, y)$:

- $\dot{V}(x, y) \leq 0$ significa que a energia não aumenta, logo, a origem é estável;
- $\dot{V}(x, y) < 0$ significa que a energia diminui e, assim, a origem é assintoticamente estável;
- $\dot{V}(x, y) > 0$ significa que a origem pode ser instável.

Teorema 6.1. (Teorema de Estabilidade de Lyapunov). *Suponha que o sistema autônomo (6.1) tenha um ponto crítico isolado na origem. Se existir uma função V , contínua e com derivadas parciais contínuas, que seja positiva definida e para a qual a função $\dot{V}(x, y)$, dada por (6.2), seja negativa definida em algum domínio D no plano xy contendo $(0, 0)$, então a origem é um ponto crítico assintoticamente estável. Se V for negativa semidefinida, então a origem é um ponto crítico estável.*

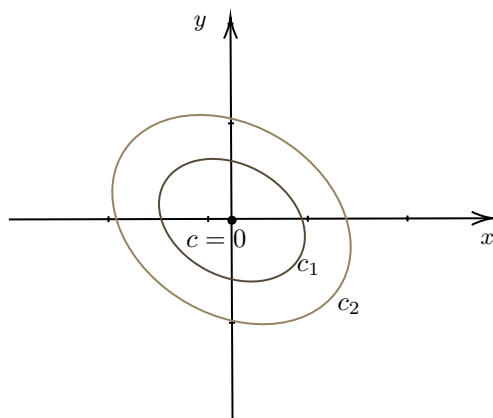
Demonstração: Considere o sistema de equações

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y),$$

e suponha que este possua a origem como um ponto crítico isolado. Se existe uma função $V(x, y)$ contínua e com derivadas parciais contínuas tal que $V(0, 0) = 0$, $V(x, y) > 0$ e $\dot{V}(x, y) \leq 0$ em um domínio contendo a origem, devemos mostrar que de fato a origem é um ponto crítico assintoticamente instável.

Considere a curva $V(x, y) = c$ em \mathbb{R}^2 , para algum $c > 0$ suficientemente pequeno. Essa curva é fechada e contém a origem no seu interior. Em particular, a curva $V(x, y) = 0$ é uma curva que é um único ponto, ou seja, $(x, y) = (0, 0)$. Ainda mais, para curvas $V(x, y) = c_1$ e $V(x, y) = c_2$, tais que $0 < c_1 < c_2$, tem-se o comportamento como mostra a Figura 28.

Figura 28 – Curvas $V(x, y) = c_1$ e $V(x, y) = c_2$.



Voltemos para a curva $V(x, y) = c$. O vetor gradiente

$$\nabla V(x, y) = V_x(x, y)\vec{i} + V_y(x, y)\vec{j}$$

é ortogonal à curva de nível $V(x, y) = c$ e aponta na direção de crescimento de V , ou seja, cresce para longe da origem.

Considere uma trajetória do sistema, denotada por

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t),$$

e suponha que em um instante t_1 essa trajetória passe por um ponto da curva de nível $V(x, y) = c$, escreva

$$(\phi(t_1), \psi(t_1)) = (x_1, y_1).$$

O vetor tangente à trajetória no ponto t_1 é

$$T(t_1) = \phi'(t_1)\vec{i} + \psi'(t_1)\vec{j} = F(x_1, y_1)\vec{i} + G(x_1, y_1)\vec{j}.$$

Por outro lado, a derivada de V ao longo da trajetória é dada por

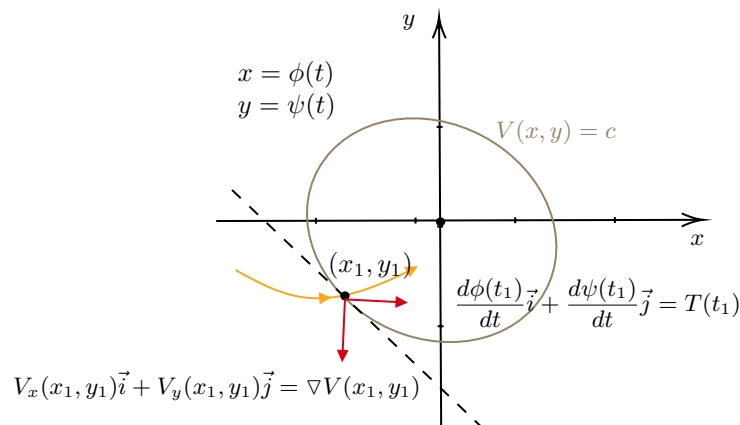
$$\dot{V}(\phi(t), \psi(t)) = V_x(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + V_y(\phi(t), \psi(t))\psi'(t),$$

ou, de forma vetorial, em t_1 ,

$$\dot{V}(x_1, y_1) = \nabla V(\phi(t_1), \psi(t_1)) \cdot T(t_1),$$

como apresenta a Figura 29.

Figura 29 – Curva no tempo t_1 .



Se $\dot{V}(x_1, y_1) \leq 0$, então o ângulo entre $\nabla V(x_1, y_1)$ e o vetor tangente $T(t_1)$ é maior ou igual a $\pi/2$, ou seja, está no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Isto significa que o vetor tangente não possui componente que aponte para fora da curva de nível $V(x, y) = c$; ele aponta para dentro ou é tangente à curva. Portanto, a trajetória não pode cruzar a curva para fora. Assim, qualquer trajetória que comece dentro da curva $V(x, y) = c$ permanece dentro dela para todo $t \geq 0$. Isso implica que a origem é estável. Se, além disso, $\dot{V}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, então as trajetórias são forçadas a se aproximarem cada vez mais da origem, tornando-a assintoticamente estável. \square

Teorema 6.2. (Teorema de Instabilidade de Lyapunov). *Suponha que a origem é um ponto crítico isolado do sistema autônomo (6.1). Seja V uma função contínua e com derivadas parciais contínuas. Suponha que $V(0, 0) = 0$ e que, em toda vizinhança da origem, existe pelo menos um ponto onde V é positiva (negativa). Se existir um domínio D contendo a origem tal que a função \dot{V} dada pela equação (6.2), seja positiva definida (negativa definida) em D , então a origem é um ponto crítico instável.*

Demonstração: Seja $V(x, y)$ uma função contínua e com derivadas parciais contínuas em um conjunto D . Suponha $V(0, 0) = 0$ e que em toda vizinhança da origem existe um ponto tal que V é positiva. Vamos supor também que $\dot{V}(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \in D$.

Considere uma curva arbitrária, suficientemente pequena, centrada na origem, de raio $\varepsilon > 0$. Por hipótese, existe um ponto (x_1, y_1) interior ao círculo, tal que $V(x_1, y_1) > 0$. Considere a trajetória iniciada nesse ponto, dada por

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \text{ com } (\phi(0), \psi(0)) = (x_1, y_1).$$

A derivada de V ao longo desta trajetória é, pela equação (6.2),

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y).$$

Como $\dot{V}(x, y) > 0$, sempre que $(x, y) \neq (0, 0)$, a função V cresce ao longo da trajetória. Portanto, qualquer trajetória que comece no interior do círculo de raio ε terá V aumentando com o tempo. Se V cresce ao longo da trajetória, ela não pode se aproximar da origem, pois na origem $V(0, 0) = 0$ e qualquer valor ao longo da trajetória é maior, isto é,

$$V(\varphi(t), \psi(t)) > V(x_1, y_1) > 0 \text{ para todo } t > 0.$$

Portanto, a trajetória nunca pode alcançar a origem nem se aproximar dela. Isso prova que a origem não é assintoticamente estável. Na verdade, explorando mais profundamente o fato de que $\dot{V}(x, y) > 0$, é possível demonstrar que a origem é um ponto instável, pois qualquer perturbação inicial, por menor que seja, leva a trajetória a se afastar continuamente da origem. \square

O próximo teorema pode ser uma ferramenta muito útil para fornecer um resultado algébrico elementar utilizado muitas vezes na construção de funções positivas definidas ou negativas definidas.

Teorema 6.3. (Teorema da Forma Quadrática).

A função

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{6.3}$$

é positiva definida se, e somente se,

$$a > 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0, \tag{6.4}$$

e é negativa definida se, e somente se,

$$a < 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0. \tag{6.5}$$

Demonstração: A princípio, observe que

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Pelas considerações da Seção 11.4 de Boldrini *et al.* (1980), tem-se:

- $a > 0$ e $\det A = ac - \frac{b^2}{4} > 0$ se, e somente se, $V(x, y)$ é positivo definido;
- $a < 0$ e $\det A = ac - \frac{b^2}{4} > 0$ se, e somente se, $V(x, y)$ é negativo definido.

□

Exemplo 4.2 Mostre que o ponto crítico $(x, y) = (0, 0)$ do sistema autônomo

$$\frac{dx}{dt} = -x - xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -y - x^2y$$

é assintoticamente estável.

A estratégia é construir uma função de Lyapunov V . Logo, considere

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y),$$

onde $F(x, y) = -x - xy^2$, $G(x, y) = -y - x^2y$, $V_x(x, y) = 2ax + by$ e $V_y(x, y) = 2cy + bx$, assumindo que $V(x, y)$ é como em (6.3).

Então,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= (2ax + by)(-x - xy^2) + (2cy + bx)(-y - x^2y) \\ &= (-2ax^2 - 2axy^2 - byx - bxy^3) + (2cy^2 - 2cx^2y^2 - bxy - bx^3y) \\ &= -(2a[x^2 + x^2y^2] + b[2xy + x^3y + xy^3] + 2c[y^2 + x^2y^2]). \end{aligned}$$

Note que, se escolhermos $b = 0$ e a e c como dois números positivos quaisquer, então \dot{V} é negativa definida e V é positiva definida pelo Teorema da Forma Quadrática. Logo, pelo Teorema de Estabilidade de Lyapunov, a origem é um ponto crítico assintoticamente estável.

7 SISTEMA DE LORENZ

Os métodos usados para sistemas autônomos, vistos no capítulo anterior, podem ser usados também para sistemas de ordem superiores (ou seja, mais variáveis e equações). Porém, para sistemas de ordem superior a dois, surgem diversas dificuldades, tais como o aumento expressivo da variedade de comportamentos dinâmicos, a complexidade crescente na representação gráfica precisa das trajetórias e a maior dificuldade na análise qualitativa e quantitativa do sistema.

Existem fenômenos que não ocorrem em sistemas bidimensionais, mas podem ser muito comuns em sistemas com três ou mais dimensões. Neste capítulo, então, faremos um estudo de um caso muito conhecido: Sistema de Lorenz ¹, que é um sistema autônomo particular de terceira ordem. O autor tem como objetivo determinar a viabilidade da previsão do tempo, como por exemplo prever tempestades de grande escala — ciclones e anticiclones — a longo prazo, por meio das soluções de equações diferenciais ordinárias não lineares determinísticas que representam fluxos hidrodinâmicos dissipativos forçados. Esse sistema tem sido estudado como modelo do comportamento caótico.

Para os sistemas com soluções limitadas, verifica-se que as soluções não periódicas são normalmente instáveis com relação a pequenas modificações, de modo que estados iniciais ligeiramente diferentes podem evoluir para estados consideravelmente diferentes. Demonstra-se que os sistemas com soluções limitadas possuem soluções numéricas limitadas. Esse estudo faz referência à Teoria do Caos, que de modo sucinto analisa sistemas dinâmicos que são sensíveis às condições iniciais, ou seja, por menor que seja a mudança nas condições iniciais tem como resultados diferenças significativas. Vale ressaltar que a Teoria do Caos não havia sido consolidada até então, e muitos consideram Lorenz como “pai” dessa teoria.

A camada de fluido, viscoso sob convecção térmica, da atmosfera é mais quente embaixo do que em cima, e isso gera convecção na superfície da Terra. Se a diferença de temperatura ΔT é pequena, então a temperatura varia linearmente com a altitude, entretanto não há movimento significativo da camada de fluidos. Agora, se ΔT for grande, então o ar quente sobe, deslocando ar frio resultando em um movimento regular que se propaga. Enfim, se ΔT for ainda maior, o fluxo se torna irregular, turbulento e mais complexo.

Assim, para modelar um problema deste tipo, Lorenz (1963) propôs o sistema não

¹ Edward N. Lorenz foi um meteorologista americano, formado pelo *Massachusetts Institute of Technology*. Publicou um artigo em 1963, intitulado “*Deterministic nonperiodic flow*” que trata da estabilidade de fluxos de fluidos na atmosfera.

linear de três equações, que descreve o comportamento de sistemas dinâmicos caóticos.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (7.1)$$

onde σ , r e b são parâmetros positivos determinados pelas propriedades físicas do fluido, x é a taxa de convecção, y é a diferença de temperatura entre correntes de ar e z é a variação vertical de temperatura. Em uma ampla gama de parâmetros, as soluções oscilam irregularmente, nunca se repetindo exatamente, mas sempre permanecendo em uma região limitada de espaço.

Note que o sistema contém termos não-lineares quadráticos xy e xz , o que sugere um potencial comportamento não previsível. Sistemas lineares homogêneos, como $\dot{x} = Ax$, só podem ter soluções que se estabilizam, em um ponto fixo ou que crescem/decrescem exponencialmente. A não-linearidade permite que as trajetórias se dobrem e se misturem no espaço de fase, criando um atrator e exibindo a sensibilidade às condições iniciais, que são as marcas do caos determinístico. Em geral, a não-linearidade é o componente matemático que possibilita a existência de atratores estranhos e dinâmica caótica.

7.1 PROPRIEDADES

Apesar de sua formulação relativamente simples, o sistema de equações de Lorenz manifesta uma dinâmica rica e complexa. Para compreender a origem do Atrator Estranho e do comportamento caótico, é essencial analisar algumas propriedades cruciais que governam seu estudo.

7.1.1 Número de Rayleigh

O Número de Rayleigh (r) é um parâmetro adimensional fundamental na mecânica dos fluidos e na termodinâmica, que governa a instabilidade e a transição de um regime de condução térmica pura para um regime de convecção. Ele quantifica a proporção entre as forças desestabilizadoras de empuxo e as forças estabilizadoras de viscosidade e difusão térmica dentro de um fluido. O número de Rayleigh é definido pela expressão:

$$r = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\kappa} > 1.$$

A análise da fórmula permite distinguir a natureza física de seus componentes. O numerador representa as forças de empuxo ou os fatores que promovem a instabilidade: g é a aceleração da gravidade, β é o coeficiente de expansão térmica do fluido, e ΔT é a diferença de temperatura entre as superfícies que gera a diferença de densidade necessária

para o empuxo, e o comprimento característico L aparece ao cubo, demonstrando a extrema sensibilidade da instabilidade à escala geométrica do sistema.

Por outro lado, o denominador, $\nu\kappa$, representa as forças dissipativas que promovem a estabilidade: ν é a viscosidade cinemática, que mede a resistência interna do fluido ao movimento e, portanto, tende a amortecer a convecção, e κ é a difusividade térmica, que mede a rapidez com que o calor se propaga por condução; uma condução térmica rápida inibe o estabelecimento das células de convecção, mantendo o sistema estável.

Dessa forma, o número de Rayleigh atua como o principal parâmetro de controle do sistema. Quando r é baixo, a dissipação domina e o fluido é estável. Quando r excede um valor crítico, o empuxo supera a dissipação, e a convecção se estabelece. No contexto do Sistema de Lorenz, o parâmetro r é a versão normalizada e a transição para o caos ocorre quando r ultrapassa o valor crítico da Bifurcação de Hopf, representando um regime de empuxo tão forte que a dinâmica da convecção se torna aperiódica e imprevisível.

7.1.2 Número de Prandtl

O número de Prandtl fornece uma medida da importância relativa do transporte de momento (viscosidade) em comparação com o transporte de calor (condução) em um fluido. No contexto do Sistema de Lorenz, σ é um dos três parâmetros e tipicamente é fixado em $\sigma = 10$, que é um valor representativo de fluidos como a água ou alguns gases com alta viscosidade, usado para simular o escoamento atmosférico simplificado:

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa},$$

que é definido como a razão entre a difusividade de momento (viscosidade) e a difusividade térmica.

7.1.3 Simetria

Existe uma simetria importante nas equações de Lorenz. Se substituirmos (x, y) por $(-x, -y)$ em (7.1), as equações continuam as mesmas. Dessa forma, se $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução, então $(-x(t), -y(t), z(t))$ também é.

7.1.4 Fluxo

Podemos definir fluxo como sendo uma família de soluções de um sistema de equações diferenciais que descreve como o estado de um sistema evolui ao longo do tempo a partir de diferentes condições iniciais.

Além disso, podemos compreender fluxo hidrodinâmico dissipativo forçado como sendo o conceito que descreve o movimento de fluidos em sistemas onde há perda de energia,

seja por motivos de dissipação viscosa (atrito) ou por dissipação térmica (transferência de calor). Para garantir que o estudo seja adequado as circunstâncias de interesse, isto é, as condições atmosféricas irregulares, incluem-se processos dissipativos, ou seja, tornam-se não conservativos, impedindo assim que o sistema atinja um estado de repouso. Essa inclusão externa é o que torna o fluxo forçado.

7.1.5 Sistemas Hidrodinâmicos e Periodicidade

Sistemas hidrodinâmicos apresentam variados padrões de fluxo, que podem ser classificados como regimes estáveis, oscilações periódicas regulares, ou fluxos irregulares e aparentemente aleatórios (caóticos). A evolução e a manifestação de cada um desses padrões são determinadas pelas condições iniciais do sistema.

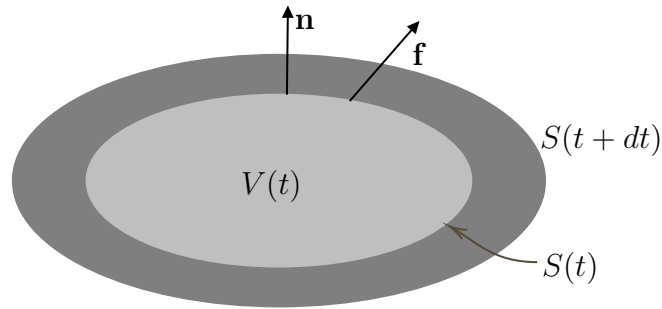
A periodicidade em um sistema refere-se à capacidade de uma trajetória retornar ao seu estado inicial (ou a um estado anterior) após um intervalo de tempo fixo. A ausência dessa propriedade é inerente ao estudo de muitos fenômenos na natureza, especialmente aqueles que se organizam constantemente em novos padrões, como é o caso dos grandes redemoinhos turbulentos. A não-periodicidade implica que o padrão de um instante não será, necessariamente, o mesmo em um instante futuro, o que constitui a principal dificuldade em prever com precisão acontecimentos a longo prazo.

Além disso, ao estudarmos equações determinísticas não periódicas, observa-se que, se o sistema contiver um fator que altere o fluido, mesmo a aplicação de uma força constante pode resultar em uma resposta dinâmica variável e aperiódica. De maneira análoga, fluxos não periódicos podem gerar forças que, dentro de um controle experimental, podem ser consideradas constantes para a simplificação da modelagem.

7.2 CONTRAÇÃO DE VOLUME

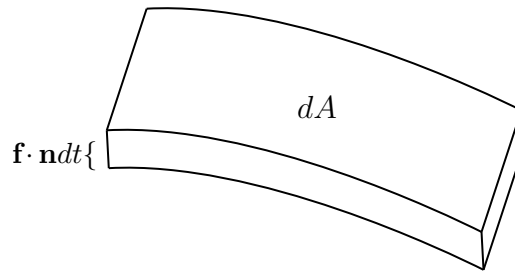
O sistema de Lorenz é dissipativo, ou seja, volumes no espaço de fase contraem no fluxo. Considere uma superfície arbitrária $S(t)$ de volume $V(t)$ no espaço de fase (Figura 30). Pense nos pontos de S como condições iniciais para trajetórias, e deixe que elas evoluam por um tempo infinitesimal dt . Então $S(t)$ evolui para uma nova superfície $S(t + dt)$, qual é o seu volume $V(t + dt)$?

Figura 30 – Superfície $S(t)$ de volume $V(t)$.



Seja \mathbf{n} a normal externa em $S(t)$. Como \mathbf{f} é a velocidade instantânea dos pontos, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ é a componente normal da velocidade. Portanto, no tempo dt , uma área dA “varrerá” um volume $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt)dA$, como na Figura 31.

Figura 31 – Área dA varrida pelo volume $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})dA$.



Sendo assim,

$$V(t + dt) = V(t) + V,$$

sendo V o volume varrido por pequenos pedaços da superfície integrado sobre todos os pedaços. Então, temos

$$V(t + dt) = V(t) + \int_{S(t)} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})dA.$$

Assim,

$$\dot{V} = \frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} = \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}dA.$$

Finalmente, reescrevemos a integral acima pelo Teorema da Divergência

$$\dot{V} = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{f}dV. \tag{7.2}$$

Para o sistema de Lorenz,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial x} [\sigma(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z} [xy + bz] \\ &= -\sigma - 1 - b < 0. \end{aligned}$$

Como a divergência é constante, (7.2) se reduz a

$$\dot{V} = (-\sigma + 1 - b)V$$

que tem solução $V(t) = V(0)e^{(-\sigma-1-b)t}$. Assim, os volumes no espaço de fase encolhem exponencialmente rápido.

Portanto, se começarmos com uma enorme massa sólida de condições iniciais, ela eventualmente encolherá para um conjunto limite de volume zero. Todas as trajetórias que começam na massa terminarão em algum lugar neste conjunto limite. A contração de volume impõe fortes restrições às possíveis soluções das equações de Lorenz.

7.3 PONTOS FIXOS

O objetivo aqui é investigar como a natureza desse sistema varia com r . A matriz jacobiana do sistema de Lorenz é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Como visto nos capítulos anteriores, para analisar o comportamento de um sistema dinâmico, é preciso localizar os seus pontos críticos. Nesse sentido precisamos resolver o sistema algébrico a seguir

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0, \\ rx - y - xz = 0, \\ xy - bz = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Da primeira equação de (7.3),

$$\sigma(-x + y) = 0 \Rightarrow (-x + y) = 0.$$

Portanto, $x = y$. Então, na segunda e terceira equações de (7.3) ficamos com

$$\begin{cases} x(r - 1 - z) = 0, \\ -bz + x^2 = 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

De $x(r - 1 - z) = 0$ podemos ter dois casos: no primeiro caso, onde $x = 0$, obtemos $-bz + 0^2 = 0$, ou seja $z = 0$. Portanto o ponto crítico é $P_1 = (0, 0, 0)$. No segundo, onde $r - 1 - z = 0$, tem-se $z = r - 1$. Então, substituindo na segunda equação do sistema (7.4), temos

$$-b(r - 1) + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = b(r - 1).$$

Nesse último caso, precisamos avaliar outras três situações possíveis:

i. $r = 1$:

$$x^2 = b(1 - 1) \Rightarrow x = 0.$$

Logo, um ponto crítico é, novamente, $P_1 = (0, 0, 0)$;

ii. $r > 1$: nesse caso temos $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$. Lembrando que $x = y$, logo, os pontos críticos são

$$P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad \text{e} \quad P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1);$$

iii. $0 < r < 1$: nesta situação o único ponto crítico é $(0, 0, 0)$.

Enfim, os pontos críticos são $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ e $P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Agora, devemos verificar o comportamento do sistema em uma vizinhança de cada ponto crítico.

Considere os valores de $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. Então por (4.1), usando o ponto P_1 , obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são determinados pela equação (4.4):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -10 - \lambda & 10 & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} - \lambda \end{vmatrix} &= (-10 - \lambda)(-1 - \lambda) \left(-\frac{8}{3} - \lambda\right) - \left(\left(-\frac{8}{3} - \lambda\right)(r)(10)\right) \\ &= (10 + 10\lambda + \lambda + \lambda^2) \left(-\frac{8}{3} - \lambda\right) + \left(\frac{8}{3} + \lambda\right) - 10r \\ &= (10 + 11\lambda + \lambda^2 - 10r) \left(-\frac{8}{3} - \lambda\right) \\ &= -\left(\frac{8}{3} + \lambda\right) [\lambda^2 + 11\lambda - 10(r-1)] = 0. \end{aligned}$$

Logo, os autovalores devem satisfazer as equações

$$-\left(\frac{8}{3} + \lambda\right) = 0$$

e

$$\lambda^2 + 11\lambda - 10(r-1) = 0.$$

A primeira implica que $\lambda_1 = -8/3$. A segunda, aplicando Bhaskara

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot (10(r-1))}}{2} \\ &= \frac{-11 \pm \sqrt{81 - 40r}}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, os autovalores são $\lambda_2 = \frac{-11 + \sqrt{81 - 40r}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{-11 - \sqrt{81 - 40r}}{2}$.

Agora, vamos analisar o que ocorre ao assumirmos diferentes possibilidades para r .

- Para $r < 1$, por exemplo, $r = \frac{1}{2}$, então os autovalores serão $\lambda_1 = -\frac{8}{3}$, $\lambda_2 \simeq -0,47506$ e $\lambda_3 \simeq -10,52494$. Note que todos os autovalores são negativos, então a origem é assintoticamente estável;
- Para $r = 1$, os autovalores são $\lambda_1 = -\frac{8}{3}$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -11$;
- Para $r > 1$, por exemplo $r = 2$, então os autovalores serão $\lambda_1 = -\frac{8}{3}$, $\lambda_2 \simeq 0,84428$ e $\lambda_3 \simeq -11,84428$.

Veja que nas duas últimas possibilidades, o sinal de λ_2 muda. O valor $r = 1$ corresponde ao início da propagação do fluxo no problema físico descrito anteriormente. Logo, a origem é instável para $r > 1$.

7.4 ESTABILIDADE LINEAR NA ORIGEM

O sistema (7.1) linearizado na origem, em torno de um ponto de equilíbrio trivial, fica

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y \\ \dot{z} = -bz. \end{cases}$$

A equação para z mostra que $z(t) \rightarrow 0$ cresce exponencialmente rápido. As outras duas direções são governadas pelo sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

com traço $\tau = -\sigma - 1 < 0$ e determinante $\Delta = \sigma(1 - r)$. Se $r > 1$, a origem é um ponto de sela, porque $\Delta < 0$. Incluindo a direção z decrescente, a sela tem uma direção de saída e duas de entrada. Se $r < 1$, todas as direções são de entrada e a origem é um sumidouro. Especificamente, como $\tau^2 - 4\Delta = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma r > 0$, a origem é um nó estável para $r < 1$.

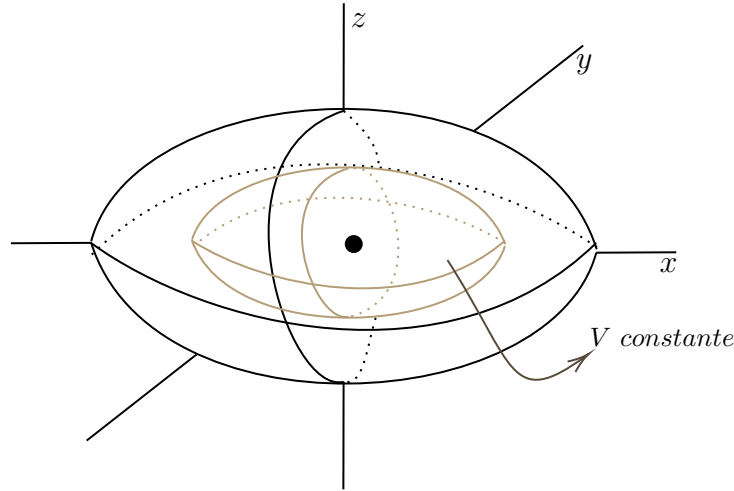
Na verdade, para $r < 1$, podemos mostrar que toda trajetória se aproxima da origem quando $t \rightarrow \infty$; a origem é globalmente estável. Portanto, não pode haver ciclos limites nem caos para $r < 1$.

A demonstração envolve a construção de uma função de Lyapunov, definida positiva, que decresce ao longo das trajetórias. Aqui, considere

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 + z^2.$$

As superfícies de nível de V constante são elipsoides concêntricos em torno da origem.

Figura 32 – Elipsoides concêntricos em torno da origem.



A ideia é mostrar que, se $r < 1$ e $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, então $\dot{V} < 0$ ao longo das trajetórias. Isso implicaria que a trajetória continua se movendo para valores menores de V , e assim penetra elipsoides cada vez menores conforme $t \rightarrow \infty$. Mas V é limitado inferiormente por 0, logo $V(x(t)) \rightarrow 0$ e, portanto, $x(t) \rightarrow 0$, como desejado.

Agora, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{V} &= \frac{1}{\sigma}x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ &= (yx - x^2) + (ryx - y^2 - xyz) + (zxy - bz^2) \\ &= (r+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2. \end{aligned}$$

Completando os quadrados nos dois primeiros termos, obtemos:

$$\frac{1}{2}\dot{V} = -\left[x - \frac{r+1}{2}y\right]^2 - \left[1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right]y^2 - bz^2.$$

Afirmamos que o lado direito é estritamente negativo se $r < 1$ e $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

O termo \dot{V} poderia ser nulo? Isso exigiria que cada um dos termos do lado direito se anulasse separadamente. Assim, $y = 0$ e $z = 0$, pelos dois últimos termos do lado direito. (Devido à suposição $r < 1$, o coeficiente de y^2 não é zero.) Portanto, o primeiro termo se reduz a $-x^2$, que só se anula se $x = 0$.

O resultado disso é que $\dot{V} = 0$ implica $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Caso contrário, $\dot{V} < 0$. Assim, a afirmação está estabelecida, e portanto a origem é globalmente estável para $r < 1$.

□

7.5 ESTABILIDADE EM PONTOS NÃO-TRIVIAIS

Agora, suponha $r > 1$, de modo que $P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ e $P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ existam. Verifica-se que eles são linearmente estáveis para

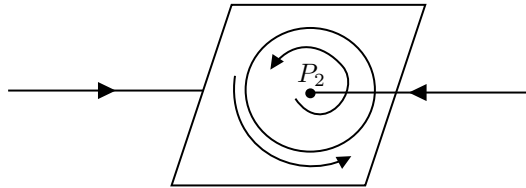
$$1 < r < r_H \quad \text{com} \quad r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Usamos o subscrito H porque P_2 e P_3 perdem estabilidade em uma bifurcação de Hopf em $r = r_H$.

O que acontece imediatamente após a bifurcação, para r ligeiramente maior que r_H ? Poderíamos supor que P_2 e P_3 fossem cada um cercado por um pequeno ciclo limite estável. Isso ocorreria se a bifurcação de Hopf fosse supercrítica. Mas, na verdade, ela é subcrítica — os ciclos limites são instáveis e existem apenas para $r < r_H$.

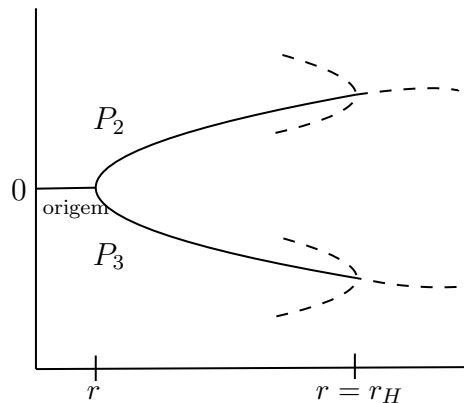
Para $r < r_H$, o retrato de fase próximo de P_2 é mostrado esquematicamente na Figura 33.

Figura 33 – Retrato de fase próximo a P_2 quando $r < r_H$.



O ponto de equilíbrio é estável. Ele é circundado por um *ciclo de sela*, um novo tipo de ciclo limite instável que só é possível em espaços de fase de três ou mais dimensões. À medida que $r \rightarrow r_H$ por valores menores, o ciclo encolhe ao redor do ponto de equilíbrio. Na bifurcação de Hopf, o ponto de equilíbrio absorve o ciclo de sela e se transforma em um ponto de sela.

Para $r > r_H$, não há atratores na vizinhança. Assim, as trajetórias devem ir para um atrator distante (ver Figura 34). Um diagrama de bifurcação parcial para o sistema, baseado nos resultados até agora não mostra nenhum indício de objetos estáveis para $r > r_H$.

Figura 34 – Diagrama de bifurcação parcial para $r > r_H$.

As trajetórias devem ter um tipo estranho de comportamento em longo prazo. Como bolas em uma máquina de *pinball*, elas são repelidas de um objeto instável após outro. Ao mesmo tempo, elas permanecem confinadas a um conjunto ligado de volume zero, mas conseguem se mover sobre esse conjunto para sempre sem se cruzar ou cruzar outras trajetórias.

7.6 CAOS EM UM ATRATOR DE LORENZ

Lorenz usou integração numérica para ver o que as trajetórias fariam no longo prazo. Usando do procedimento de integração numérica, uma vez que as soluções de funções não periódicas estatisticamente estacionárias do tempo não são facilmente encontradas analiticamente, o autor obteve um sistema de três equações diferenciais ordinárias (7.1), cujas soluções fornecem um exemplo mais simples de fluxo determinístico não periódico. Ele estudou o caso particular

$$\sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}, \quad r = 28,$$

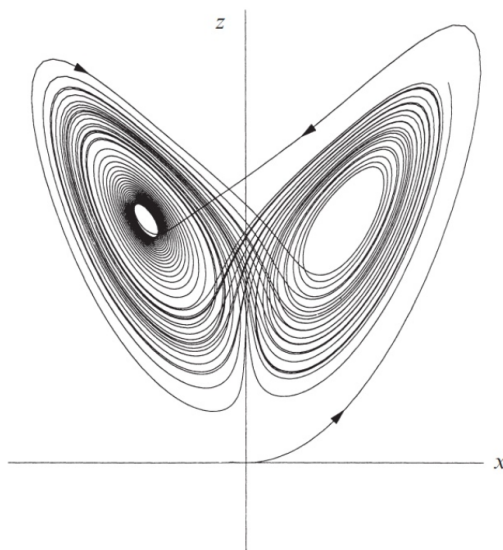
segundo Saltzman (1962). Esse valor de r está logo acima do valor da bifurcação de Hopf

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \approx 24,74,$$

então ele sabia que algo estranho tinha que acontecer.

Ele começou a integrar com a condição inicial $(0, 1, 0)$, próxima ao ponto de sela na origem. Após um transiente inicial, a solução se estabiliza em uma oscilação irregular que persiste quando $t \rightarrow \infty$, mas nunca se repete exatamente.

Lorenz descobriu que surge uma estrutura diferente quando a solução é visualizada como uma trajetória no espaço de fases. Por exemplo, quando $x(t)$ é plotado contra $z(t)$, aparece um padrão de borboleta, veja a Figura 35.

Figura 35 – Padrão de Borboleta plotado em $x(t)$ contra $z(t)$.

Fonte: Strogatz, S. H., 1962.

A trajetória parece cruzar a si mesma repetidamente, mas isso é apenas um artefato da projeção da trajetória tridimensional em um plano bidimensional. Em três dimensões, não ocorrem auto-interseções.

A trajetória começa perto da origem, depois balança para a direita e então mergulha no centro de uma espiral à esquerda. Depois de uma espiral muito lenta para fora, a trajetória dispara de volta para a direita, espirala algumas vezes, salta para a esquerda, espirala novamente, e assim por diante infinitamente.

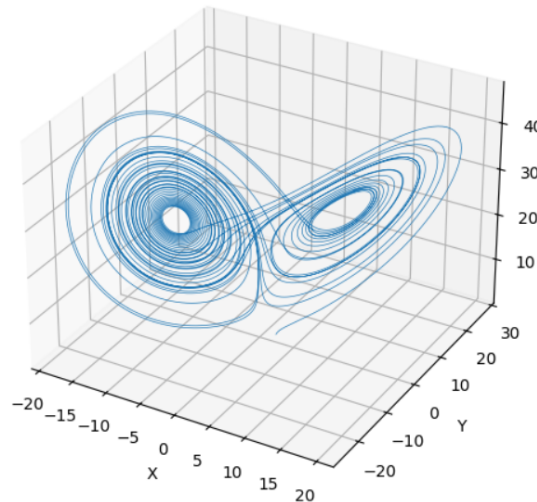
Quando a trajetória é vista em todas as três dimensões, em vez de apenas numa projeção bidimensional, ela parece se acomodar em um conjunto extremamente fino que se parece com um par de asas de borboleta. Esse conjunto limitante, nomeado Atrator Estranho (ou de Lorenz), é o conjunto atrator de volume zero cuja existência foi deduzida na seção anterior.

A visualização tridimensional do Atrator de Lorenz (Figura 36), que serve como prova gráfica do comportamento caótico, foi gerada por meio de um algoritmo de simulação numérica implementado em linguagem *Python*. Para garantir a precisão da trajetória, foi utilizada a função `solve_ivp` da biblioteca *SciPy*, que emprega o método de integração numérica de Runge-Kutta de alta ordem. Este método é essencial para lidar com a natureza exponencialmente instável das soluções de sistemas caóticos, garantindo uma aproximação fiel da trajetória no tempo.

O *script* utilizou os parâmetros críticos $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, simulando a evolução do sistema ao longo de um intervalo de tempo $t \in [0, 40]$. A biblioteca *Matplotlib* foi empregada para a plotagem dos resultados, revelando a estrutura fractal, não periódica

e confinada do Atrator Estranho (vide Anexo B), o que visualmente comprova o fenômeno da sensibilidade às condições iniciais e a presença de um fluxo determinístico irregular. A Figura 36 mostra o comportamento de uma única trajetória no sistema, com condição inicial $(2, 1, 1)$.

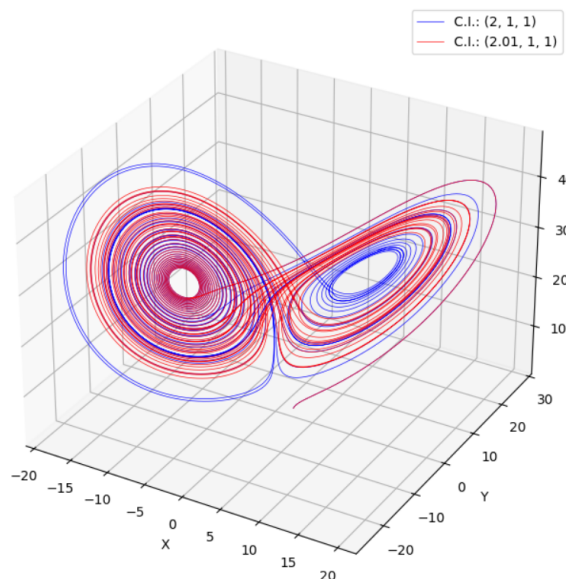
Figura 36 – Atrator Estranho com uma trajetória.



Fonte: Elaboração própria (2025), utilizando Google Colaboratory (2020).

Na Figura 37, ainda usando simulação numérica em linguagem *Python* (ver Anexo C), há uma comparação de duas trajetórias com condições iniciais $(2, 1, 1)$ e $(2.01, 1, 1)$.

Figura 37 – Atrator Estranho com duas trajetórias.



Fonte: Elaboração própria (2025), utilizando Google Colaboratory (2020).

As duas trajetórias, partindo de condições iniciais muito próximas, demonstram a

característica mais crucial do sistema de Lorenz: a sensibilidade extrema às condições iniciais. Inicialmente, as soluções acompanham-se de perto, mas, em pouco tempo, elas divergem rapidamente, tornando a predição do comportamento exato de qualquer trajetória individual impossível a longo prazo. No entanto, apesar dessa imprevisibilidade local, ambas as soluções permanecem confinadas no espaço de fase, orbitando a complexa estrutura que define o Atrator Estranho de Lorenz. Esse confinamento garante que, embora o comportamento detalhado seja caótico, o sistema nunca se afaste de uma região limitada e bem definida do espaço, ilustrando a dualidade entre a imprevisibilidade do caos e a ordem estrutural do atrator.

A trajetória de Lorenz demonstrou que a complexidade e a aparente aleatoriedade podem emergir de um sistema incrivelmente simples e determinístico. O conceito de Caos é, assim, estabelecido: a sensibilidade exponencial às condições iniciais é o mecanismo que transforma a precisão de um modelo matemático na imprevisibilidade dos resultados a longo prazo. Este princípio não se aplica apenas à convecção atmosférica, mas fundamenta o estudo de sistemas não lineares em toda a ciência, marcando o limite inerente à capacidade humana de prever o futuro em fenômenos regidos por essa dinâmica.

8 Considerações Finais

A presente monografia consolidou um estudo completo e coeso, que articula os fundamentos da análise qualitativa de estabilidade em sistemas dinâmicos com a exploração aprofundada do caos determinístico no Sistema de Lorenz.

O trabalho iniciou com a sólida construção teórica, integrando conceitos essenciais como estabilidade linear e a classificação geométrica dos pontos críticos em sistemas bidimensionais. Foi estabelecida a relevância de ferramentas como a linearização, a análise de bifurcações e, crucialmente, o Segundo Método de Lyapunov, que permite inferir sobre a estabilidade de soluções mesmo na ausência de formas analíticas explícitas. Partindo desses fundamentos, foi possível avançar para a análise de um sistema tridimensional cuja complexidade excede aquela observada em modelos bidimensionais: o Sistema de Lorenz.

O estudo das propriedades matemáticas do Sistema de Lorenz revelou a importância dos parâmetros físicos que o originam. O número de Rayleigh (r) foi identificado como a força motriz da instabilidade térmica, enquanto o número de Prandtl (σ) atuou como um elemento dissipativo. A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio delineou as transições de fase do sistema: a Bifurcação Transcrítica em $r = 1$ e, sobretudo, a Bifurcação de Hopf Subcrítica em $r \approx 24.74$. Esta bifurcação marca a perda de estabilidade dos pontos não triviais, impulsionando o sistema para o regime caótico. A demonstração da contração de volume (dissipação) garantiu que, apesar da instabilidade local, as trajetórias permanecem confinadas em uma região delimitada do espaço de fase, possibilitando a formação do Atrator Estranho.

A etapa final do trabalho, a investigação numérica, concretizou os resultados teóricos. Utilizando a integração pelo método de Runge–Kutta para o conjunto clássico de parâmetros ($\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$), foi possível reproduzir e visualizar as trajetórias que compõem o atrator. O comportamento exibido demonstrou a oscilação errática e aperiódica da trajetória entre as vizinhanças dos dois pontos de equilíbrio instáveis, nunca se repetindo, mas permanecendo confinada em uma estrutura geométrica de natureza fractal. Estas simulações reforçaram a extrema sensibilidade às condições iniciais e conectaram a formulação matemática ao fenômeno físico de convecção atmosférica que motivou o trabalho original de Lorenz. A clareza e precisão destas representações foram garantidas pela autoria de todas as figuras e diagramas pela autora, utilizando a ferramenta Mathcha.

Em conclusão, o Sistema de Lorenz constitui um exemplo paradigmático da transição do comportamento regular ao caos em sistemas determinísticos. O estudo desenvolvido nesta monografia não apenas aprofunda o entendimento do modelo, mas também evidencia a relevância indispensável da análise qualitativa, da teoria de estabilidade e das técnicas

numéricas na investigação de sistemas não lineares complexos. Os conhecimentos adquiridos aqui abrem caminho para estudos futuros sobre a natureza dos atratores estranhos e a modelagem de fenômenos físicos sensíveis às condições iniciais.

Referências

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980. Edição ampliada e revista. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 60.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. D. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. Citado na página 14.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 43.

GOOGLE. *Google Colaboratory*. 2020. Software. Versão 0.2.0; Acesso em: 1 de dezembro de 2025. Disponível em: <https://colab.research.google.com>. Citado na página 73.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Boston, 1963. V.20, n. 2, p. 130-141. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 61.

MATHCHA. *Mathcha: Online Equation Editor and Diagramming Tool*. 2025. Acesso em: 29 nov. 2025. Disponível em: <https://www.mathcha.io/editor>. Citado na página 14.

SALTZMAN, B. Finite amplitude free convection as an initial value problem-i. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Connecticut, 1962. V.19, p. 329-341. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 71.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 2. ed. Florida: CRC Press, 2015. Citado na página 14.

ANEXO A – Teorema de Existência e Unicidade

Aqui apresentamos o enunciado do Teorema de Existência e Unicidade, mas sua demonstração pode ser encontrada no livro “Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno”, de Ivo C. Doering e Artur O. Lopes.

Teorema de Existência e Unicidade: Suponha que cada uma das n funções F_1, \dots, F_n e dadas n^2 derivadas parciais $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ são contínuas em uma região R do espaço t, x_1, x_2, \dots, x_n definida por $a < t < \beta$, $a_1 < x_1 < \beta_1, \dots, a_n < x_n < \beta_n$, e seja $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ um ponto em R . Então, existe um intervalo $|t - t_0| < h$ no qual existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \dots, \phi_n = f_n(t)$ do sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

que também satisfaz as condições iniciais

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

ANEXO B – Simulador do Atrator de Lorenz: Uma Trajetria

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Defini o do sistema de Lorenz
6 def lorenz(t, state, sigma=10, rho=28, beta=8/3):
7     x, y, z = state
8     dxdt = sigma * (y - x)
9     dydt = x * (rho - z) - y
10    dzdt = x * y - beta * z
11    return [dxdt, dydt, dzdt]
12
13 # Condi es iniciais
14 state0 = [2, 1, 1]
15 t_span = (0, 40) # intervalo de tempo
16 t_eval = np.linspace(t_span[0], t_span[1], 10000) # pontos no
    tempo
17
18 # Resolver o sistema
19 sol = solve_ivp(lorenz, t_span, state0, t_eval=t_eval)
20
21 # Plotar o atrator em 3D
22 fig = plt.figure(figsize=(8,6))
23 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
24 ax.plot(sol.y[0], sol.y[1], sol.y[2], lw=0.5)
25
26 ax.set_title("Atrator de Lorenz")
27 ax.set_xlabel("X")
28 ax.set_ylabel("Y")
29 ax.set_zlabel("Z")
30 plt.show()

```

Listing B.1 – Cdigo Python para simulao do Atrator de Lorenz com uma trajetria.

ANEXO C – Simulador do Atrator de Lorenz: Duas Trajetrias

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Definição do sistema de Lorenz
6 def lorenz(t, state, sigma=10, rho=28, beta=8/3):
7     x, y, z = state
8     dxdt = sigma * (y - x)
9     dydt = x * (rho - z) - y
10    dzdt = x * y - beta * z
11    return [dxdt, dydt, dzdt]
12
13 # Parâmetros de Simulação
14 t_span = (0, 40)
15 t_eval = np.linspace(t_span[0], t_span[1], 10000)
16
17 # Primeira Condição Inicial (Trajetria de Referência)
18 state0_A = [2, 1, 1]
19 sol_A = solve_ivp(lorenz, t_span, state0_A, t_eval=t_eval)
20
21 # Segunda Condição Inicial (Levemente Perturbada)
22 state0_B = [2.01, 1, 1] # Pequena variação em X (0.01)
23 sol_B = solve_ivp(lorenz, t_span, state0_B, t_eval=t_eval)
24
25 # Plotagem do Atrator em 3D
26 fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
27 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
28
29 # Plotar a primeira trajetria (Azul)
30 ax.plot(sol_A.y[0], sol_A.y[1], sol_A.y[2], lw=0.5, color='blue',
31         label='C.I.: (2, 1, 1)')
32
33 # Plotar a segunda trajetria (Vermelha)
34 ax.plot(sol_B.y[0], sol_B.y[1], sol_B.y[2], lw=0.5, color='red',
35         label='C.I.: (2.01, 1, 1)')

```

```
35 # Adicionar legendas e t tulos
36 ax.set_title("Atrator de Lorenz: Demonstra o de Sensibilidade
    (Efeito Borboleta)")
37 ax.set_xlabel("X")
38 ax.set_ylabel("Y")
39 ax.set_zlabel("Z")
40 ax.legend()
41
42 plt.show()
```

Listing C.1 – Codigo Python para simulao do Atrator de Lorenz com duas trajetrias.