UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MARIA EDUARDA DE SOUSA COUTINHO

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APROXIMAÇÕES DIOFANTINAS

SÃO CARLOS - SP
2025

MARIA EDUARDA DE SOUSA COUTINHO

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APROXIMAÇÕES DIOFANTINAS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Carvalho dos Santos

SÃO CARLOS - SP
2025

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 6/2025/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

MARIA EDUARDA DE SOUSA COUTINHO

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APROXIMAÇÕES DIOFANTINAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 19 de fevereiro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Luís Antonio Carvalho dos Santos
Membro da Banca 1	Fábio Gomes Figueira
Membro da Banca 2	Natália Andrea Viana Bedoya

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.007511/2025-57

SEI nº 1782098

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Resumo

As frações contínuas são um método que, com base no princípio da recorrência, gera uma sequência de números racionais que aproximam progressivamente um número real. Essa sequência é conhecida como sequência dos convergentes. O presente trabalho tem como objetivo analisar e apresentar teorias relacionadas a esse método, como o Teorema de Dirichlet, que estabelece um limite superior para o erro de aproximação, e o Teorema de Hurwitz-Markov, que, juntamente com a constante $\sqrt{5}$, otimiza esse erro, entre outros. Por fim, busca-se compreender a caracterização das frações contínuas periódicas e sua relação com as equações quadráticas com coeficientes inteiros, com ênfase na equação de Pell e sua resolução por meio desse método.

Palavras-chave: Frações Contínuas. Boas Aproximações. Equações Diofantinas.

Abstract

The continuous fractions are a method that, based on the principle of recurrence, generates a sequence of rational numbers that progressively approximate a real number. This sequence is known as the convergent sequence. The present work aims to analyze and present theories related to this method, such as the Dirichlet's Theorem, which establishes an upper limit for the approximation error, and the Hurwitz-Markov Theorem, which, together with the constant $\sqrt{5}$, optimizes this error, among others. Finally, we try to understand the characterization of periodic continuous fractions and their relation with quadratic equations with integer coefficients, with emphasis on the Pell equation and its resolution by this method.

Keywords: Continuous Fractions. Good Approximations. Diophantine Equations.

Agradecimentos

Aprender é um ato de coragem, e este trabalho é a prova de que o conhecimento é uma jornada coletiva. Aos Professores que iluminaram meu caminho, à minha família que além de me sustentar nos dias difíceis, fingiram entender o que eu estava estudando e aos amigos que me lembraram de rir entre os livros e a subir no tatame: minha eterna gratidão. Este trabalho é nosso!

Sumário

Lista de Tabelas

Introdução

Uma questão importante na Teoria dos Números é a de determinar quão bem um número real pode ser aproximado por uma sequência de números racionais. Este processo é conhecido como aproximação diofantina, em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria. É fato que, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x - k < 1$. Deste modo, podemos obter a representação decimal

$$\begin{aligned} x - k &= 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \quad a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\ &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots \end{aligned}$$

o que significa que, se

$$r_n = a_n + 10a_{n-1} + 100a_{n-2} + \cdots + 10^{n-1}a_1$$

então

$$\frac{r_n}{10^n} \leq x - k < \frac{r_n + 1}{10^n} \tag{0.1}$$

e, portanto, $k + \frac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação racional de x no sentido de que o erro

$$\left| x - \left(k + \frac{r_n}{10^n} \right) \right| < \frac{1}{10^n}. \tag{0.2}$$

é um número bem pequeno se n for muito grande. Deste modo, a representação decimal de um número real fornece uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10. Entretanto, tal método de aproximação por racionais pode ser otimizado conforme veremos neste estudo proposto das frações contínuas.

O método de aproximação por frações contínuas permite expressar um número real por meio de uma sequência de números racionais, fornecendo uma sequência de números racionais que podem ser classificadas como "boas aproximações"do número real dado.

Importantes propriedades algébricas de um número real podem ser extraídas a partir das propriedades da sua expansão em frações contínuas. Por exemplo, se um número real pode ser representado por uma fração contínua finita, então ele é necessariamente um número racional. Por outro lado, um número é irracional se, e somente se, sua fração contínua é infinita.

Dado um número real $x \in \mathbb{R}$ consideremos a sequência de números naturais (a_n) definida recursivamente através da seguinte relação $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ sendo $\alpha_0 = x$ e se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$ então $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se, para algum $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = a_n$ temos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \doteq [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n].$$

Caso contrário

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \doteq [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

Assim, dado um número real x e considerando sua expansão em frações contínuas $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...]$, tal que o n-ésimo termo $\frac{p_n}{q_n}$ é obtido de forma recursiva, temos que cada termo dessa sequência fornece uma aproximação racional melhor do que a anterior. Segue do Teorema de Dirichlet, que para todo $n \in \mathbb{N}$, o problema

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

possui infinitas soluções por racionais, uma vez que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}. \tag{0.3}$$

Além disso, veremos que $\sqrt{5}$ é a maior constante para o qual o problema

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}.$$

possui infinitas soluções racionais. Este é o celebrado Teorema de Hurwitz Markov que nos garante que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2}. \tag{0.4}$$

Na sequência estudaremos o conceito de "Boa Aproximação"de um número real $x \in \mathbb{R}$ mostrando que todo convergente é uma boa aproximação e reciprocamente, se um número racional é uma boa aproximação então está obrigado a ser um convergente da expansão em frações contínuas de x.

Por fim, caracterizamos as frações contínuas periódicas e sua relação com as equações polinomiais quadráticas com coeficientes inteiros, com ênfase na equação de Pell, um exemplo de equação diofantina, apresentando um método de resolução usando frações contínuas.

Capítulo 1

Resultados Básicos da Teoria dos Números

1.1 A sequência dos números naturais

Todas as afirmações verdadeiras sobre o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, são consequências lógicas resultantes das quatro propriedades fundamentais deste conjunto, conhecidas atualmente como **Axiomas de Peano**. Com o objetivo de proporcionar um ambiente de maior compreensão e construção de conhecimento, iniciaremos este trabalho recordando alguns conceitos sobre a ordenação dos números naturais, tendo em vista que a adição de números naturais nos permite introduzir uma relação de ordem neste conjunto.

Assim, sejam a e b números naturais, podemos compará-los em relação as suas quantidades de unidades. Logo se a tem a mesma quantidade de unidades que b, escrevemos $a = b$, e dizemos, a igual a b. Se b tem menos unidades que a, ou seja, b é menor que a, escrevemos $b < a$, que implica na existência de $k \in \mathbb{N}$, tal que $a = b + k$ e neste caso, temos que a é maior que b, e escrevemos $a > b$, quando a tem mais unidades que b.

Além disso, são muito uteis as seguintes notações:

(i) $a \leq b$ quando $a = b$ ou $a < b$.

(ii) $a \geq b$ quando $a = b$ ou $a > b$.

Axiomas de Peano

Axioma 1. Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injetiva, que associa a cada $a \in \mathbb{N}$ um elemento $s(a) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de a. Ou seja, todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.

Nos garantindo que números naturais diferentes possuem sucessores diferentes e números que têm o mesmo sucessor são iguais.

Axioma 2. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro, o número 1, logo $1 < a, \forall\, a \in \mathbb{N}$.

Axioma 3. Se um subconjunto $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{A}$ e $\forall a \in \mathbb{A} \Rightarrow s(a) \in \mathbb{A}$, então $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.

Nos garantindo que, se um subconjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto é o próprio conjunto dos números naturais.

Observação 1.1.1. A notação $s(a)$ é provisória. Adotaremos daqui para frente a notação $a+1$, para nos referirmos ao sucessor de a, $\forall\, a \in \mathbb{N}$.

1.2 Ordenação dos Números Naturais

Nesta seção iremos enunciar e provar os teoremas básicos da relação de ordem dos números naturais. Esses teoremas também são validos para os Conjuntos dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$), dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$) e do Números Reais ($\mathbb{R}$), exceto o Teorema 1.2.4 que vale somente para o Conjunto dos Números Inteiros.

Teorema 1.2.1. *(Transitividade) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.*

Demonstração. Se $a < b$, então $b = a + k$, com $k \in \mathbb{N}$, analogamente, se $b < c$, então $c = b + r$, com $r \in \mathbb{N}$. Assim podemos reescrever c da seguinte forma:

$$c = (a + k) + r = a + (k + r),$$

portanto, $a < c$. □

Teorema 1.2.2. *(Comparabilidade) Todo número natural a é comparável com qualquer número natural b.*

Demonstração. (Por Indução). Tomemos o número 1, temos que ele é comparável com qualquer outro número natural, pois $\forall\, a \in \mathbb{N}$, $1 < a$, pelo Axioma (2), dos Axiomas de Peano.

Suponhamos, por hipótese, que o número a seja comparável com todos os números naturais, provemos então que $a + 1$ também contem essa propriedade.

Tomemos, aleatoriamente, o numero natural b, sabemos que:

1. $b < a$;

2. $b = a$;

3. $b > a$.

Analisemos cada item:

1. Se $b < a$, por transitividade, dado que $a < a + 1$, temos que $b < a + 1$

2. Como $a < a + 1$, se $b = a$, então $b < a + 1$.

3. Se $b > a$, então $b = a + k$, com $k \in \mathbb{N}$. O que nos dá dois casos:

   3.1: Se $k = 1$, então $b = a + 1$.

   3.2: Se $k > 1$, temos que $k = 1 + r$, com $r \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} b &= a + k \\ b &= a + (1 + r) \\ b &= (a + 1) + r \Rightarrow b > a + 1. \end{aligned}$$

Em qualquer uma das possibilidades temos que $a + 1$ é comparável com qualquer número natural b. Assim fica provado, por indução, a comparabilidade de quaisquer números naturais a e b. □

Teorema 1.2.3. *(Tricotomia) Dados $a, b \in \mathbb{N}$, é verdade uma, e somente uma das seguintes afirmações:*

i. $a < b$;

ii. $a = b$;

iii. $b < a$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que dada as três afirmações duas delas são verdadeiras simultaneamente.
Se valem $a < b$ e $a = b$. Temos de $a < b$ que $b = a + k$, com $k \in \mathbb{N}$, mas, por hipótese, $a = b$ logo

$$a = a + k$$

Sem perda de generalidade, podemos somar 1 em ambos os lados da equação.

$$a + 1 = a + k + 1$$

E subtraindo a, de ambos os lados, concluiríamos que,

$$1 = k + 1$$

Absurdo, pois 1 não é sucessor de nenhum $k \in \mathbb{N}$, como nos garante o Axioma (2), dos Axiomas de Peano. Portanto $a < b$ (e analogamente, $b < a$) é incompatível com $a = b$. Da mesma maneira, se, simultaneamente, valem $a < b$ e $b < a$, temos:

i) Se $a < b$, então $b = a + k$, $k \in \mathbb{N}$.

ii) Se $b < a$, então $a = b + r$, $r \in \mathbb{N}$.

E assim teríamos,

$$b = a + k$$
$$b = (b + r) + k$$

Sem perda de generalidade, podemos somar 1 em ambos os lados da equação.

$$b + 1 = b + r + k + 1$$

E subtraindo b, de ambos os lados, concluiríamos que,

$$1 = r + k + 1,$$

o que nos leva novamente a um absurdo. Portanto concluímos que, para dois números naturais, sendo uma das afirmações verdadeira, exclui-se as outras duas. □

Teorema 1.2.4. *Não existem números naturais entre* a *e* $a + 1$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que exista um número natural m tal que fosse possível ter $a < m < a+1$. Como $a < m$, temos $m = a+k$, com $k \in \mathbb{N}$ e como $m < a+1$, temos $a + 1 = m + r$, com $r \in \mathbb{N}$.
E assim teríamos,

$$a + 1 = a + k + r$$

Subtraindo a de ambos os lados, concluiríamos que,

$$1 = k + r$$

Por definição temos que se $1 = k+r$, então $k < 1$, o que é um absurdo, como nos garante o Axioma (2) dos Axiomas de Peano. Logo não existem números naturais entre um número e seu sucessor. □

Teorema 1.2.5. *(Monotonicidade) Se* $a < b$*, então* $a + r < b + r$ *e* $ar < br$.

Demonstração. Se $a < b$, então $b = a + k$, com $k \in \mathbb{N}$, logo

$$b + r = (a + k) + r = (a + r) + k \Rightarrow a + r < b + r.$$

Analogamente,

$$br = (a + k)r = ar + kr \Rightarrow ar < br.$$

□

1.3 Boa Ordenação

Sendo um princípio fundamental na teoria dos conjuntos e na matemática em geral, a boa ordenação é um instrumento que nos permite provar a existência de certos elementos dentro de um conjunto ordenado. Para ilustrar esse conceito, destacaremos e provaremos a seguinte afirmação: "Se $\mathbb{A}$ é um subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, ou seja, $\mathbb{A} \neq \varnothing$ e $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$, então $\mathbb{A}$ possui um elemento mínimo. Isso implica que existe um elemento $a \in \mathbb{A}$, tal que a é menor que qualquer outro elemento de $\mathbb{A}$."

Com base nessa afirmação, demonstraremos que em qualquer subconjunto não vazio dos números naturais, sempre podemos identificar um elemento mínimo. Por exemplo, no conjunto dos números naturais esse menor elemento é o número 1.

Observação 1.3.1. Escreveremos I_n, com $n \in \mathbb{N}$, para indicar o conjunto dos números naturais r tais que $1 \leq r \leq n$.

Exemplo 1.3.2. Seja $n = 7$, temos o conjunto $I_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Teorema 1.3.3. *(Princípio da Boa Ordenação) Todo subconjunto $\mathbb{A}$ não vazio do conjunto dos naturais possui um menor elemento.*

Demonstração. Se $1 \in \mathbb{A}$, então $\mathbb{A}$ possui um menor elemento, dado que o número 1 é o menor elemento do conjunto dos naturais. Caso contrário, se $1 \notin \mathbb{A}$, iremos supor que $\mathbb{A}$ possui um menor elemento da forma $(n + 1)$, onde $n \notin \mathbb{A}$. Assim, sejam os conjuntos $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ e $\mathbb{X} = \{n \in \mathbb{N} \mid I_n \subset \mathbb{N} - \mathbb{A}\}$, onde todos os elementos de $\mathbb{A}$ são maiores que n. Logo, nestas condições temos $n \in \mathbb{X}$ tal que $n + 1 \notin \mathbb{X}$. Suponhamos $p \in \mathbb{A}$ tal que $p \leq n + 1$ entretanto, se $p \in \mathbb{A}$ então $p > n$, assim

$$n < p < n + 1$$

o que é um absurdo, pelo Teorema 1.2.4, logo $p = n + 1$. Tomemos agora um certo $q \in \mathbb{A} \mid q < p$, então

$$n < q < p = n + 1$$

o que é um absurdo, novamente, pelo Teorema 1.2.4. Portanto $p < q$, para todo $q \in \mathbb{A}$. Portanto todo subconjunto $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. $\square$

1.4 Conceito de Divisão

De acordo com [3], a divisão amplia o potencial da operação de subtração e basicamente atende a dois conceitos: repartir e comparar. A divisão ocorre quando dado dois números naturais, a e b, a é divido em q grupos de b elementos cada um, e restam r elementos. Podemos expressá-la pela equação fundamental da divisão:

$$a = qb + r \tag{1.1}$$

Quando a divisão não deixa resto, dizemos que ela é uma divisão exata, e a equação fundamental fica:

$$a = qb \tag{1.2}$$

Em (1.1) e (1.2) temos denominados q como quociente e r como resto da divisão de a por b. E quando dividimos um número natural a por um número natural $b > 0$, com $b \leq a$, estamos buscando encontrar um quociente q tal que $a = qb$ ou o maior quociente q que nos proporcione o menor resto r, com $r < b$, satisfazendo $a = qb + r$. Tal busca pode ocorrer por subtrações sucessivas ou através de multiplicações sucessivas de modo que se $a = qb + r$ com $r < b$, então q é a quantidade de múltiplos de b no conjunto $I_a = \{1, 2, ..., a\}$

1.5 Algoritmo da Divisão

Tomando dois números naturais, a e b, se $b \leq a$, temos conhecimento que podemos distribuir as unidades de a em grupos de b unidades, sendo a quantidade q de grupos a maior possível, de modo que restará $r = a - qb < b$ unidades. Mas se em alguma situação $a < b$, então não conseguiremos distribuir as unidades de a em nenhum grupo de b unidades, ou seja, $q = 0$ e $r = a$, e assim também teremos $a = qb + r$, com $r < b$.

Com a ideia de que procuramos o maior valor de q de modo a realizar uma divisão exata ou uma divisão que nos forneça um resto r, com $r < b$, admitimos de forma intuitiva que o quociente e o resto são únicos. O teorema a seguir nos valida essa propriedade intuitiva.

Teorema 1.5.1. *Dados números naturais a e $b > 0$, existe e é único o par de números naturais q e r tal que*

$$a = qb + r, \text{ com } r < b.$$

Demonstração. Demonstraremos que o par (q, r) existe e é único.

<u>Existência:</u> Se $a < b$ tomamos $q = 0$ e $r = a \Rightarrow a = qb + r$, com $r < b$. Do contrário, se $a > b$ realizando subtrações sucessivas de a por b, e teremos

$$a - b,\ a - 2b,\ a - 3b,\ ...,$$

enquanto essa diferença for maior que zero. Ao chegarmos a primeira diferença menor que b e maior que 0, não será mais possível subtrair b de a e assim encontraremos q, tal que $a - qb \geq 0$ e $a < (q + 1)b$

Se $a - qb \geq 0 \Rightarrow r = a - qb$, portanto concluímos que r é um número natural. E como $a < (q+1)b \Rightarrow a < qb + b \Rightarrow a - qb < b \Rightarrow r < b$. Com isso estabelecemos a existência de q e r.

Unicidade: Sabemos que existem q e r, números naturais, tais que

$$a = qb + r, \text{ com } r < b. \tag{1.3}$$

Suponhamos então p e s, números naturais, tais que

$$a = pb + s, \text{ com } s < b. \tag{1.4}$$

Estabeleceremos, sem perda de generalidade, que $q \geq p$. Subtraindo a igualdade (1.4) da igualdade (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (qb + r) - (pb + s) \\ &= qb - pb + r - s \\ &= b(q - p) + r - s \iff b(q - p) = r - s \end{aligned}$$

Se $q > p$, então $q - p \geq 1$, logo $b \leq b(q - p) = r - s$, sendo $r - s$ um número natural, então $r \geq s$, então $r - s \leq r < b$, o que é uma contradição, logo q não é um natural maior que p. Segue então que $q = p$ e $r - s = 0 \Rightarrow r = s$.

Demonstrando então que q e r existem e são únicos. □

1.6 Expansão Decimal de um número $\mathbb{Q}$

Nesta seção recordaremos a expansão decimal, que é uma forma, dentre outras de realizar a representação dos números racionais, [4] nos diz que "o surgimento de tal representação contribuiu, para o estreitamento da cooperação entre a Matemática e outras ciências, como a Astronomia".

Note que, a partir da fração $\frac{a}{b}$, a e b, números inteiros e $b > 0$, podemos, pelo Teorema 1.5.1, escrever $a = qb + r$, sendo q e r números inteiros e $0 \leq r < b$. Consequentemente

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

e assim, toda fração ordinária pode ser expressa pela soma de um inteiro e de uma fração ordinária pertencente ao intervalo $[0, 1[$.

Tendo em vista essa ideia torna-se mais fácil localizar o número $\frac{a}{b}$ em um eixo numérico, pois poderemos dividir o intervalo $[q, q + 1]$ em b partes iguais e tomaremos a quantidade de r partes a partir de q, da esquerda para a direita. Com isso a extremidade de maior valor dessa ultima parte corresponderá ao número $\frac{a}{b}$ neste eixo. E assim damos por aceito que todo número racional corresponde a um ponto de um eixo numérico.

No entanto, essa maneira de identificação não é prática, já que cada número racional possui um denominador, e não é viável subdividir os intervalos unitários da reta em uma quantidade diferente de partes a cada vez. Para padronizar, optamos por fazer subdivisões em 10 partes, o que permite uma sincronia com a representação decimal utilizada para os números inteiros e contribui com os seguintes resultados dentro da Teoria dos Números.

Teorema 1.6.1. *Todo número racional* $r \in [0,1)$ *se escreve na forma*

$$r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{10^i} \tag{1.5}$$

tal que $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$*, para cada* $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Começaremos demonstrando a existência da representação (1.5). Para aplicações futuras assumiremos que $r \in [0,1)$ é um número real arbitrário. Dividindo o intervalo $[0,1)$ em 10 subintervalos de comprimento $\frac{1}{10}$ podemos tomar $b_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ tal que

$$\frac{b_1}{10} \leq r < \frac{b_1 + 1}{10}.$$

Se $r = \frac{b_1}{10}$ então terminamos.

Caso contrário, supondo que $\frac{b_1}{10} < r$. Neste caso, repetindo o argumento anterior podemos encontrar $b_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ tal que

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} \leq r < \frac{b_1}{10} + \frac{b_2 + 1}{10^2}$$

Novamente se $r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2}$ terminamos. Caso contrário, supondo que $\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} < r$, repetimos o processo de divisão dos intervalos por 10 subintervalos, definindo $b_1, b_2, b_3, ...$ algarismos decimais, de modo que para todo $n \geq 1$, temos

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + ... + \frac{b_n}{10^n} \leq r < \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + ... + \frac{b_n + 1}{10^n}$$

se $r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + ... + \frac{b_n}{10^n}$, para algum n, terminamos. Caso contrário, obtemos infinitos $b_i's$. Assim a sequência

$$S_n = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + ... + \frac{b_n}{10^n}$$

satisfaz a seguinte desigualdade,

$$S_n \leq r < S_n + \frac{1}{10^n}. \tag{1.6}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que S_n é a sequência das somas parciais da série $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{b_i}{10^i}$. Como a sequência S_n é estritamente crescente e limitada superiormente por r temos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{b_i}{10^i}$. Graças à (1.6) temos que $0 \leq r - S_n < \frac{1}{10^n}$. Assim, fazendo $n \to \infty$ concluímos que $r = s$.

Para a prova da unicidade da representação suponha que $r = 0, b_1 b_2 b_3 ...$ e $t = 0, c_1 c_2 c_3 ...$ expansões decimais tais que existem infinitos $i's$, de modo que $b_i's \neq 9$ e $c_i's \neq 9$. Suponha que exista algum índice i para o qual $b_i \neq c_i$, e seja n o menor para o qual isso ocorre, isto é, temos $b_i = c_i$ para todo $1 \leq i < n$ e $b_n \neq c_n$.Podemos supor, sem perda de generalidade, que $b_n < c_n$. Como r tem infinitos *i's* para os quais $b_i \neq 9$, existe $k > n$, tal que $b_k < 9$. Então

$$\begin{aligned} r &= 0, b_1 b_2 ... b_{n-1} b_n ... b_k ... \\ &\leq 0, b_1 b_2 ... b_{n-1} b_n ... b_k (9)(9) ... \\ &= 0, b_1 b_2 ... b_{n-1} b_n ... (b_k + 1) \\ &< 0, b_1 b_2 ... b_{n-1} (b_n + 1) \\ &\leq 0, c_1 c_2 ... c_{n-1} c_n \\ &\leq 0, c_1 c_2 ... c_{n-1} c_n c_{n+1} ... = t \end{aligned}$$

Portanto $r < t$. Isto implica que se $r = t$ então $b_n = c_n$ para todo $n \geq 1$. Finalmente, para terminar a demonstração, observe que

$$r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ ... \ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{10^i}$$

converge, obtendo tal resultado através do Teste da Comparação, com o uso da série geométrica $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{9}{10^i} = 1$, pois $r = \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{b_j}{10^j} < \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{9}{10^j} = 1$, demonstrado com mais detalhes no Apêndice (.1). Para complementar a demonstração anterior observe que a expansão decimal dada pelo Teorema 1.6.1 pode não ser única. Por exemplo, o número racional 1 tem duas representações, 1 e $0,99999\ldots$ De fato,

$$0,99999 \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Logo, como vimos anteriormente na demonstração, para valer a unicidade na expansão decimal é necessário impor sobre $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ a condição de existir infinitos dígitos $\neq 9$. $\square$

Segue exemplos da expansão decimal de um número racional.

Exemplo 1.6.2. Encontre a expansão de $r = \dfrac{5}{8}$ na base decimal.

De modo geral,

$$r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \frac{b_4}{10^4} + \ldots \tag{1.7}$$

sendo b_i um dos algarismos $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ para todo i. Multiplicando (1.7) por 10, obtemos

$$10r = b_1 + \frac{b_2}{10} + \frac{b_3}{10^2} + \frac{b_4}{10^3} \ldots \tag{1.8}$$

Assim b_1 é a parte inteira de $10r$, logo

$$b_1 = \lfloor 10r \rfloor = \left\lfloor 10 \cdot \frac{5}{8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{50}{8} \right\rfloor = 6 \tag{1.9}$$

Seja $r_1 = 10r - b_1$, temos $r_1 = 10r - 6 \Rightarrow r_1 = \dfrac{b_2}{10} + \dfrac{b_3}{10^2} + \dfrac{b_4}{10^3} \ldots$ Aplicando, recursivamente, os passos (1.8) e (1.9) para encontrar os $b_{i's}$ subsequentes, obtendo:

$$b_2 = \lfloor 10r_1 \rfloor = \lfloor 10(10r - b_1) \rfloor = \left\lfloor 10^2 \left(r - \frac{b_1}{10} \right) \right\rfloor = \left\lfloor 100 \left(\frac{5}{8} - \frac{6}{10} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = 2$$

Seja $r_2 = 10r_1 - b_2$, temos $r_2 = 10r_1 - 2 \Rightarrow r_2 = \dfrac{b_3}{10} + \dfrac{b_4}{10^2} + \ldots$

$$b_3 = \lfloor 10r_2 \rfloor = \lfloor 10(10r_1 - b_2) \rfloor = \left\lfloor 10^3 \left[\left(r - \frac{b_1}{10} \right) - \frac{b_2}{10^2} \right] \right\rfloor = \left\lfloor 10^3 \left(\frac{5}{8} - \frac{6}{10} - \frac{2}{100} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor = 5$$

Seja $r_3 = 10r_2 - b_3 = 0$ encontramos todos os $b_i's$ para representar $\dfrac{5}{8}$ na expansão decimal, obtendo a seguinte representação:

$$\frac{5}{8} = \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

sendo uma representação decimal finita.

Exemplo 1.6.3. Encontre a representação decimal de $t = \dfrac{2}{27}$.

Temos, por (1.6.1)

$$t = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \frac{b_4}{10^4} + \ldots \tag{1.10}$$

sendo b_i um dos algarismos $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ para todo i. Multiplicando (1.10) por 10, obtemos

$$10t = b_1 + \frac{b_2}{10} + \frac{b_3}{10^2} + \frac{b_4}{10^3} \ldots \tag{1.11}$$

Assim b_1 é a parte inteira de $10t$, portanto

$$b_1 = \lfloor 10t \rfloor = \left\lfloor 10 \cdot \frac{2}{27} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{27} \right\rfloor = 0 \tag{1.12}$$

Seja $t_1 = 10t - b_1$. Temos $t_1 = 10t - 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{b_2}{10} + \dfrac{b_3}{10^2} + \dfrac{b_4}{10^3} \ldots$ Aplicamos, recursivamente, os passos (1.11) e (1.12) para encontrar os $b_i's$ subsequentes. Deste modo

$$b_2 = \lfloor 10t_1 \rfloor = \lfloor 10(10t - b_1) \rfloor = \left\lfloor 10^2 \left(t - \frac{b_1}{10} \right) \right\rfloor = \left\lfloor 10^2 \left(\frac{2}{27} - \frac{0}{10} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{200}{27} \right\rfloor = 7$$

Seja $t_2 = 10t_1 - b_2$. Temos $t_2 = 10t_1 - 7 \Rightarrow r_2 = \dfrac{b_3}{10} + \dfrac{b_4}{10^2} + \ldots$

$$b_3 = \lfloor 10t_2 \rfloor = \lfloor 10(10t_1 - b_2) \rfloor = \left\lfloor 10^3 \left[\left(t - \frac{b_1}{10} \right) - \frac{b_2}{10^2} \right] \right\rfloor = \left\lfloor 10^3 \left(\frac{2}{27} - \frac{7}{100} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{110}{27} \right\rfloor = 4$$

Seja $t_3 = 10t_2 - b_3$. Temos $t_3 = 10t_2 - 4 \Rightarrow t_3 = \dfrac{b_4}{10} + \dfrac{b_5}{10^2} + \ldots$

$$\begin{aligned} b_4 &= \lfloor 10t_3 \rfloor = \lfloor 10(10t_2 - b_3) \rfloor = \\ &= \left\lfloor 10^4 \left\{ \left[\left(t - \frac{b_1}{10} \right) - \frac{b_2}{10^2} \right] - \frac{b_3}{10^3} \right\} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor 10^4 \left(\frac{2}{27} - \frac{7}{100} - \frac{4}{1000} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{27} \right\rfloor = 0 \end{aligned}$$

Seja $t_4 = 10t_3 - b_4$ teremos $b_5 = 7$ e $b_6 = 4$, ou seja, nossos $b_{i's}$ serão da forma

- $b_{3k-2} = 0$
- $b_{3k-1} = 7$
- $b_{3k} = 4$

para todo $k \geq 1$. Desse modo, encontramos todos os $b_i's$ para representar $\dfrac{2}{27}$ na expansão decimal, portanto

$$\frac{2}{27} = \frac{0}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \frac{4}{10^6} + \ldots$$

sendo uma representação infinita e periódica.

Teorema 1.6.4. *Todo número racional r se escreve na forma*

$$r = \pm a_m ... a_1 a_0, b_1 b_2 ... = \pm \left(a_m 10^m + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0 + \frac{b_1}{10^1} + \frac{b_2}{10^2} + ... \right) \tag{1.13}$$

com cada a_i e cada b_i um algarismo decimal, para todo $i \in \mathbb{N}$. Sendo $a_i's$ dígitos da parte inteira e $b_i's$ dígitos da parte não inteira de r.

Observação 1.6.5. Temos como notação compacta $r = \pm a_m ... a_1 a_0, b_1 b_2 ...$ onde utilizamos uma vírgula para separar os dígitos da parte inteira dos dígitos da parte não inteira.

Dos exemplos anteriores, (1.6.2) e (1.6.3), temos juntamente com o Teorema 1.6.4, que

$$\frac{5}{8} = 0,625 = 0 \cdot 10^0 + \frac{6}{10^1} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

$$\frac{2}{27} = 0,07407407 \cdots = 0 \cdot 10^0 + \frac{0}{10^1} + \frac{7}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \ldots$$

Tendo em vista que ao efetuar uma divisão por subtrações sucessivas podemos nos deparar com subtrações que não terminam, construímos a ideia de que ao dividir um número inteiro por outro, este último maior que zero, dois casos podem ocorrer:

i. Ou a divisão termina, e assim temos uma divisão exata que nos proporciona uma representação decimal finita, como no exemplo (1.6.2),

ii. Ou a divisão continua infinitamente, e nesse caso a representação decimal é periódica, como no exemplo (1.6.3).

Uma maneira de resumir a representação de uma expansão decimal periódica é colocar uma linha sobre o agrupamento do período, indicando que esse período será repetido continuamente. Assim temos para o exemplo (1.6.3), que $\frac{2}{27} \cong 0,\overline{074}$

Teorema 1.6.6. *A expansão decimal de qualquer número racional é finita ou periódica. Reciprocamente, toda expansão decimal finita ou periódica representa um número racional.*

Capítulo 2

Introdução à Teoria das Frações Contínuas

A teoria das frações contínuas é um ramo da matemática elementar que estuda e explora representações de números reais por meio de sequências finitas ou infinitas de frações. Ao contrário das representações decimais, onde a expansão pode ser periódica ou finita, as frações contínuas permitem expressar números reais como uma sequência de racionais, convergentes das frações contínuas, que não dependem de escolhas artificiais de base. Neste campo de estudo, os números irracionais são explorados na busca de boas aproximações por frações parciais, destacando a convergência e divergência das sequências fracionárias. A teoria das frações contínuas também encontra aplicações em diversas áreas, incluindo a solução de equações diofantinas, teoria dos números transcendentais e até mesmo em aplicações práticas como algoritmos de compressão de dados.

2.1 Expansão de um Número Real por Frações Contínuas

Uma propriedade essencial dos números reais é que todo número $x \in \mathbb{R}$ pode ser bem aproximado por números racionais [2]. E todo número real sempre está entre dois números inteiros consecutivos. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $k \doteq \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x - k < 1$, sendo $x - k \doteq \{x\}$.

Observação 2.1.1. Notação: Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos a parte inteira de x como o único inteiro $\lfloor x \rfloor$ tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, a parte fracionária de x como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$.

Sendo $x - k \in [0, 1)$, um número real, podemos, pelo Teorema 1.6.4, realizar sua expansão decimal da seguinte forma

$$x - k = 0, b_1 b_2 ... b_n ..., \text{ tal que } b_i \in [0, 9]$$

o que significa que, se

$$r_n = b_n + 10b_{n-1} + 10^2 b_{n-2} + ... + 10^{n-1} b_1$$

então,

$$\frac{r_n}{10^n} \leq x - k < \frac{r_n + 1}{10^n}$$

e por tanto $k + \dfrac{r_n}{10^n}$ é uma aproximação racional de x, no sentido de que o erro

$$\left| x - \left(k + \frac{r_n}{10^n} \right) \right|$$

é menor que $\dfrac{1}{10^n}$, que para um n bem grande, é um número bem pequeno para estimar o erro. A representação decimal de um número real fornece uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10. Mas sabemos que a representação decimal não é a única forma de representar um número real, sendo assim, dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q um número natural não nulo, existe um p, inteiro, de modo que

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

de tal forma que $p = \lfloor xq \rfloor$, e portanto

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \left| x - \frac{p+1}{q} \right| < \frac{1}{q} \tag{2.1}$$

Observação 2.1.2. As desigualdades (2.1) serão melhor abordadas e detalhadas no Capítulo 4, pelo Lema 4.1.3.

Em especial, existem aproximações de x por números racionais com denominador q, apresentando um erro inferior a $\dfrac{1}{q}$. Observe que, ao expressar um número em uma representação decimal, estamos, na prática, atribuindo a essas aproximações valores de q que são potências de 10. Embora essa representação tenha suas vantagens, é importante notar que ela implica em uma escolha arbitrária da base 10, que muitas vezes acaba ocultando outras aproximações racionais de x que podem ser mais eficientes.

Sendo uma outra maneira de representar e aproximar números reais, vamos então, neste presente trabalho estudar e explorar as frações contínuas, usando a seguinte relação recursiva apresentada por [2], que restringe todos os numeradores das fações a serem iguais a 1.

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $a_n's$ os coeficientes da sua expansão por frações contínuas, definimos recursivamente para $x = \alpha_0$ e $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$, a seguinte relação:

$$\text{Se } \alpha_n \notin \mathbb{Z}, \text{ então } \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \text{ com } \alpha_n - a_n = \{\alpha_n\}\,, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Se, para algum n, obtemos $\alpha_n = a_n$, então

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] \overset{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{a_n}}} \tag{2.3}$$

uma fração contínua finita simples. Caso contrário,

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...] \overset{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \tag{2.4}$$

uma fração contínua infinita simples.

Exemplo 2.1.3. Tome os valores dos exemplos (1.6.2) e (1.6.3) e aplique de maneira recursiva a relação (2.2) para obter os coeficientes $a_i's$ da expansão por fracões contínuas.

i) $x = \dfrac{5}{8} = \alpha_0$. Neste caso temos $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 0$ e $\alpha_0 \notin \mathbb{Z}$, então

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{5}{8} - 0} = \frac{8}{5}, \text{ obtendo } a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1 \text{ e como } \alpha_1 \notin \mathbb{Z}, \text{ então}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{8}{5} - 1} = \frac{5}{3}, \text{ obtendo } a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 1 \text{ e como } \alpha_2 \notin \mathbb{Z}, \text{ então}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{5}{3} - 1} = \frac{3}{2}, \text{ obtendo } a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = 1 \text{ e como } \alpha_3 \notin \mathbb{Z}, \text{ então}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = 2, \text{ obtendo para } n = 4, a_4 = \alpha_4 = 2 \in \mathbb{Z}, \text{ então}$$

$$x = \frac{5}{8} = [0; 1, 1, 1, 2] \overset{def}{=} 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} \tag{2.5}$$

ii. $x = \dfrac{2}{27} = \alpha_0$. Neste caso temos $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 0$ e $\alpha_0 \notin \mathbb{Z}$, então

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{2}{27} - 0} = \frac{27}{2}, \text{ obtendo } a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 13 \text{ e como } \alpha_1 \notin \mathbb{Z}, \text{ então}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{27}{2} - 13} = 2, \text{ obtendo para } n = 2, a_2 = \alpha_2 = 2 \in \mathbb{Z}, \text{ então}$$

$$x = \frac{2}{27} = [0; 13, 2] \overset{def}{=} 0 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{2}} \tag{2.6}$$

Observação 2.1.4. Pelo exemplo (2.1.3), que um número racional representado pela expansão decimal, seja ela finita ou infinita, quando representado por uma expansão em frações contínuas terá uma representação finita simples.

Exemplificando mais um resultado, envolvendo as representações de números reais, apresentado por [4].

Teorema 2.1.5. *Todo número racional se exprime na forma de uma fração contínua finita simples. Reciprocamente, toda fração contínua finita simples é um número racional.*

Temos pelo Teorema 2.1.5 que, se a representação de x por frações contínuas for finita simples, então é evidente que x é um número racional. Note que se $x \in \mathbb{Q}$, podemos obter seus coeficientes a_n aplicando o algoritmo da divisão de Euclides. Vejamos, seja x um racional da forma $\frac{p}{q}$, com $q > 0$, aplicando o Teorema 1.5.1, temos:

$$\begin{aligned}
&p = a_0 q + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < q,\\
&q = a_1 r_1 + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1,\\
&r_1 = a_2 r_2 + r_3 \text{ com } 0 \leq r_3 < r_2\\
&\vdots\\
&r_{n-1} = a_n r_n + r_{n+1} \text{ com } r_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

assim,

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = \ldots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

uma representa por fração contínua finita simples.

Observação 2.1.6. Até aqui, notasse uma das vantagens da representação por frações contínuas, que além de evitar escolhas artificiais de base, torna o reconhecimento de números racionais mais simples comparado à representação decimal.

2.1.1 Propriedades Iniciais

Supondo um número real $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$, sejam $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, onde $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$, para todo $n \geq 0$, onde essa fração é chamada de *n-ésima reduzida* ou *convergente* da fração contínua por definição.

Definição 2.1.1. Considere $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$. Sejam $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, com $q_n \neq 0$, primos entre si tais que

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n], \text{ com } n \geq 0.$$

Tal fração $\frac{p_n}{q_n}$, com $n \geq 0$, é chamada de ***n-ésima reduzida*** ou ***convergente*** da fração contínua de x.

No que segue, tomamos por base [2]

Proposição 2.1.7. *Dada uma sequência (finita ou infinita) $t_0, t_1, t_2, ... \in \mathbb{R}$ tal que $t_k > 0$, para todo $k \geq 1$, definimos sequências (X_m) e (Y_m) pelas relações de recorrência*

$$\begin{aligned} x_{m+2} &= t_{m+2}x_{m+1} + x_m \text{ e} \\ y_{m+2} &= t_{m+2}y_{m+1} + y_m \text{ para todo } m \geq 0. \end{aligned}$$

com $x_0 = t_0$, $y_0 = 1$, $x_1 = t_0t_1 + 1$, $y_1 = t_1$. Além disso,

$$x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1} = (-1)^n, \ \forall\, n \geq 0$$

Demonstração. (Por Indução). Tomemos $n = 0$, temos

$$[t_0] = t_0 = \frac{t_0}{1} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Para $n = 1$, temos

$$[t_0; t_1] = t_0 + \frac{1}{t_1} = \frac{t_0t_1 + 1}{t_1} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} [t_o; t_1, t_2] &= t_0 + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{t_2}} = t_0 + \frac{t_2}{t_1t_2 + 1} = \frac{t_0t_1t_2 + t_0 + t_2}{t_1t_2 + 1} = \\ &= \frac{t_2(t_0t_1 + 1) + t_0}{t_2t_1 + 1} = \frac{t_2x_1 + x_0}{t_2y_1 + y_0} = \frac{x_2}{y_2}. \end{aligned}$$

Observe que $[t_0; t_1, t_2] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2}} = \left[t_0; t_1 + \frac{1}{t_2}\right]$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para n. Vejamos, então, tal afirmação para $(n + 1)$,

$$[t_0; t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}] = \left[t_0; t_1, t_2, ..., t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right] = \frac{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right) x_{n-1} + x_{n-2}}{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right) y_{n-1} + y_{n-2}} = \tag{2.7}$$

$$= \frac{t_{n+1}\left(t_nx_{n-1} + x_{n-2}\right) x_{n-1}}{t_{n+1}\left(t_ny_{n-1} + y_{n-2}\right) y_{n-1}} = \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}. \tag{2.8}$$

Além disso, por indução, temos para $n = 0$,

$$x_1 y_0 - x_0 y_1 = (t_0 t_1 + 1) - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0.$$

Por hipótese de indução temos, $x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$, como uma afirmação verdadeira, verificaremos então, para $(n+1)$

$$\begin{aligned} x_{(n+1)+1}y_{(n+1)} - x_{(n+1)}y_{(n+1)+1} &= x_{n+2}y_{n+1} - x_{n+1}y_{n+2} = \\ &= (t_{n+2}x_{n+1} + x_n)y_{n+1} - (t_{n+2}y_{n+1} + y_n)x_{n+1} = \\ &= (t_{n+2}x_{n+1})y_{n+1} + x_n y_{n+1} - (t_{n+2}y_{n+1})x_{n+1} - y_n x_{n+1} = \\ &= x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1} = \\ &= -(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Observação 2.1.8. Para os próximos resultado adotaremos

i. $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ ...]$ será um número real;

ii. a_0 é a parte inteira x, ou seja $a_0 = \lfloor x \rfloor$;

iii. $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$, com p_n e $q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é a sequência de convergentes da representação de fração contínua de x e

iv. $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ é a n-ésima convergente de x.

Corolário 2.1.9. *Dados $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ ...]$ e $\dfrac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente da sequência das reduzidas temos as seguintes relações de recorrência*

$$\begin{cases} p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n, \ \forall\, n \geq 0, \\ p_0 = a_0, \ p_1 = a_0 a_1 + 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n, \ \forall\, n \geq 0 \\ q_0 = 1, \ q_1 = a_1, \end{cases}$$

respectivamente. Além disso,

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \ \forall\, n \geq 0.$$

Demonstração. Sejam as sequências (p_n) e (q_n) definidas pelas recorrências acima. Aplicando a Proposição 2.1.7, com $(t_n) = (a_n)$, temos que

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] \, . \, \forall \, n \geq 0 \text{ e } p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \; \forall \, n \geq 0.$$

□

Observação 2.1.10. Afirmo que p_n e q_n são primos entre si. De fato! Seja d um divisor comum de p_n e q_n. Então d também dividirá qualquer combinação linear de p_n e q_n, então d divide $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}$ que equivale à $(-1)^n$, assim d divide $(-1)^n$, resultando em $d = 1$.

Observação 2.1.11. Note que o coeficientes $t_n's \in \mathbb{R}$, $\forall \, n \in \mathbb{N}$, já os coeficientes $a_n's \in \mathbb{Z}$, $\forall \, n \in \mathbb{N}$, fazendo assim com que o Corolário 2.1.9 restrinja suas sequencias dentro do Conjunto dos Inteiro $(\mathbb{Z})$.

Lema 2.1.12. *Para n um natural arbitrário, sendo $n \geq 2$, temos*

$$q_n \geq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Demonstração. Para $n \geq 2$, aplicado a relação de recorrência do Corolário 2.1.9, temos

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2q_{n-2}. \tag{2.9}$$

A aplicação sucessiva da desigualdade (2.9), produz:

Para $n = 2k$:

$$q_{2k} \geq 2^k q_0 = 2^k, \text{ com } q_0 = 1,$$

como $n = 2k \Rightarrow k = n/2$, portanto, para n par:

$$q_n = 2^{\frac{n}{2}}. \tag{2.10}$$

Para $n = 2k + 1$:

$$q_{2k+1} \geq 2^k q_1 \geq 2^k$$

como $n = 2k + 1 \Rightarrow k = (n - 1)/2$, portanto, para n ímpar:

$$q_n \geq 2^{\frac{n-1}{2}}. \tag{2.11}$$

Logo, dos resultados (2.10) e (2.11) provamos o lema. □

Lema 2.1.13. *Seja $\{q_n\}$ a sequência dos denominadores das frações convergentes de uma* *fração contínua, definida pela recorrência:*

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad \textit{para } n \geq 2,$$

onde a_n são os coeficientes inteiros da fração contínua, $q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$. Então, para todo $n \geq 1$, vale que:

$$mdc(q_n, q_{n-1}) = 1.$$

Demonstração. (Por Indução). Para $n = 1$, temos $q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$, então:

$$mdc(q_1, q_0) = mdc(a_1, 1) = 1.$$

Com o resultado valido para $n = 1$, suponha que para alguma $n \geq 1$, temos: $mdc(q_{n-1}, q_{n-2}) = 1$. Queremos provar que:

$$mdc(q_n, q_{n-1}) = 1.$$

Pelo Corolário 2.1.9, temos a relação de recorrência:

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \tag{2.12}$$

Seja d um divisor comum de q_n e q_{n-1}. De (2.12), temos:

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \Rightarrow q_{n-2} = q_n - a_n q_{n-1}.$$

Logo d também divide q_{n-2}. Mas por hipótese, sabemos que $mdc(q_{n-1}, q_{n-2}) = 1$. Portanto, a única possibilidade é $d = 1$, ou seja,

$$mdc(q_n, q_{n-1}) = 1.$$

□

Observação 2.1.14. Pelo Lema 2.1.12 e Observação 2.1.13, temos que os denominadores dos convergentes aumentam pelo menos tão rapidamente quanto os termos de uma progressão geométrica, de forma estritamente crescente.

O corolário a seguir, determina uma expressão para x, conhecendo α_n e utilizando as sequências (p_n) e (q_n). Recorde que dado um $x \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha_0 = x$, $a_n = \lfloor \alpha \rfloor$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e, se $\alpha_{n-1} \notin \mathbb{Z}$, então $\alpha_n = \dfrac{1}{\alpha_{n-1} - a_{n-1}} \in \mathbb{R}$.

Corolário 2.1.15. *Dado $x = [a_o; a_1, a_2, \ldots]$ um número real, temos para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad e \quad \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever $x = [a_o; a_1, a_2, ...a_{n-1}, \alpha_n]$, como $a'_n s$ e $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Logo, do Teorema 2.1.7, temos:

$$x = \frac{X_n}{Y_n} = \frac{\alpha_n x_{n-1} + x_{n-2}}{\alpha_n y_{n-1} + y_{n-2}}.$$

Mas, para $k = 1, \ldots (n-1)$ temos do Corolário 2.1.9 que, $x_k = p_k$ e $y_k = q_k$. Assim

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}. \tag{2.13}$$

Assim, da igualdade (2.13) segue

$$\begin{aligned} x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} &\Rightarrow x(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}) = \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ &\Rightarrow \alpha_n q_{n-1} x + q_{n-2} x = \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ &\Rightarrow \alpha_n q_{n-1} x - \alpha_n p_{n-1} = p_{n-2} - q_{n-2} x \\ &\Rightarrow \alpha_n (q_{n-1} x - p_{n-1}) = p_{n-2} - q_{n-2} x. \end{aligned}$$

Portanto

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2} x}{q_{n-1} x - p_{n-1}}$$

□

Proposição 2.1.16. *Dado $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, temos*

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2}, \ \forall\, n \geq 1,$$

onde

$$\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n}, \ \forall\, n \geq 1; = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$$

Além disso $\beta_{n+1} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]$ e, em particular

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2} < \frac{1}{q_n^2}$$

Demonstração. Pelo Corolário 2.1.14 obtêm-se

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n}$$

Note que $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)$, e do Corolário 2.1.9 obtêm-se

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n (\alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}) q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2}.$$

Em particular temos

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$$

onde $a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor$ e $0 < \beta_{n+1} < 1$, implicando que $a_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2$, assim

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

Observe que sendo $[0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1]$ a representação em fração contínua de β_{n+1}, obtêm-se para todo $n \geq 1$

$$\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{1}{a_n + \cfrac{q_{n-2}}{q_{n-1}}} = \frac{1}{a_n + \beta_n} \tag{2.14}$$

□

Observação 2.1.17. A Proposição 2.1.16 implica que, dado um $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a desigualdade,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

tem infinitas soluções racionais p_n/q_n. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Dirichlet* , que será abordado no Capitulo 3. Caso contrário, se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = a/b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Tomando $a/b \neq p_n/q_n$, temos

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \Rightarrow |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_n} \Rightarrow q_n < b,$$

tendo assim uma quantidade finita de soluções.

Lema 2.1.18. *Sejam $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sua sequência de convergentes, então*

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}.$$

Demonstração. Como resultado da Observação 2.1.14, temos que (q_n) é estritamente crescente, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n^2} = 0.$$

A partir da desigualdade

$$0 \leq \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2},$$

demonstrada na Proposição 2.1.16, conclui-se do Teorema do Confronto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

□

Observação 2.1.19. O Lema 2.1.18 dá sentido para à igualdade $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ quando a fração contínua é infinita, ou seja, quando x é uma valor irracional.

A Proposição a seguir, estabelece a maneira com que as aproximações por convergentes convergem a um número real, demonstrando que os convergentes de índices pares formam uma sequência crescente. Isso significa que cada convergente par subsequente é maior ou igual ao anterior. Além disso, os convergentes de índices ímpares formam uma sequência decrescente, onde cada convergente ímpar subsequente é menor ou igual ao anterior. Por fim, a proposição afirma que todos os convergentes de índices ímpares são maiores do que todos os convergentes de índices pares.

Proposição 2.1.20. *Para todo $k \geq 0$, temos*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

Demonstração. Para todo $n \geq 0$, temos que

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})}{(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)q_n} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_{n+2}q_n}, \tag{2.15}$$

como $a_{n+2} \geq 0$ e $q_{n+2}q_n > 0$, denotaremos $\frac{a_{n+2}}{q_{n+2}q_n} = C_n$ onde

$$Cn \geq 0$$

para todo $n \geq 0$, assim (2.15) é positivo para n par e negativo para n ímpar. Tomemos então n da forma $2k$ e $2k+1$ para todo $k \geq 0$. Para $n = 2k$, temos

$$\frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = C_{2k}(-1)^{2k} = C_{2k}[(-1)^2]^k = C_{2k}(1)^k = C_{2k} \geq 0$$

logo

$$\frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \geq 0 \Rightarrow \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \geq \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \Rightarrow \frac{p_{2(k+1)}}{q_{2(k+1)}} \geq \frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \tag{2.16}$$

Para $n = 2k+1$

$$\frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} - \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = C_{2k+1}(-1)^{2k+1} = C_{2k+1}[(-1)^2]^k(-1) = -C_{2k+1}(1)^k = -C_{2k+1} \leq 0$$

logo

$$\frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} - \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \leq 0 \Rightarrow \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \Rightarrow \frac{p_{2(k+1)+1}}{q_{2(k+1)+1}} \geq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \tag{2.17}$$

Pelas desigualdades (2.16) e (2.17) podemos ver que a sequência $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ é crescente para n par e decrescente para n ímpar. Além disso para todo $n \geq 0$, temos da Proposição 2.1.16 que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $n \geq 0$

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}.$$

Assim para $n = 2k$,

$$x - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$$

e para $n = 2k+1$,

$$x - \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

Portanto $\forall\, k \geq 0$, temos

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq x \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

□

Proposição 2.1.21. *Sejam $a_0, a_1, ..., a_n$ inteiros com $a_k > 0$, $\forall k \geq 1$, e seja $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k>0}$ a sequência de reduzidas da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$. Então o conjunto dos números reais cuja representação por frações contínuas começa com $a_0, a_1, ..., a_n$ é o intervalo*

$$I(a_0, a_1, ..., a_n) = \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup \{[a_0, a_1, ..., a_n, \alpha], \alpha > 1\} = \begin{cases} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right), & \textit{se } n \textit{ é par,} \\ \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right], & \textit{se } n \textit{ é ímpar.} \end{cases}$$

Além disso a função $G : (0, +\infty) \to \mathrm{I}(a_0, a_1, ..., a_n)$ dada por $G(\alpha) = [a_0, a_1, ..., a_n, \alpha]$ é monótona, sendo crescente para n ímpar e decrescente para n par.

Demonstração. É inferido das demonstrações do Corolário 2.1.9 e da Proposição 2.1.16 que

$$G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, \alpha] = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{(\alpha q_n + q_{n-1})q_n}.$$

Tomemos $A_n(\alpha_i) := (\alpha q_n + q_{n-1})q_n$ para $i \in \mathbb{N}$. Seja $0 < \alpha_1 < \alpha_2$,

$$G(\alpha_2) - G(\alpha_1) = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{A_n(\alpha_2)} - \left[\frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{A_n(\alpha_1)}\right] = (-1)^n \left[\frac{A_n(\alpha_1) - A_n(\alpha_2)}{A_n(\alpha_1)A_n(\alpha_2)}\right]. \quad (2.18)$$

Como (q_n) é estritamente crescente, para o produto temos

$$A_n(\alpha_1)A_n(\alpha_2) > 0. \quad (2.19)$$

Já para a diferença, $A_n(\alpha_1) - A_n(\alpha_2)$ temos

$$A_n(\alpha_1) - A_n(\alpha_2) = (\alpha_1 q_n + q_{n-1})q_n - (\alpha_2 q_n + q_{n-1})q_n = (\alpha_1 - \alpha_2)q_n^2,$$

como $\alpha_1 < \alpha_2$, então

$$(\alpha_1 - \alpha_2)q_n^2 < 0 \quad (2.20)$$

Logo pela igualdade (2.18) e desigualdades (2.19) e (2.20),

$$G(\alpha_2) - G(\alpha_1) = \frac{(-1)^n}{A_n(\alpha_1)A_n(\alpha_2)}(\alpha_1 - \alpha_2)q_n^2 \Rightarrow \begin{cases} G(\alpha_2) - G(\alpha_1) > 0, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ G(\alpha_2) - G(\alpha_1) < 0, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Portanto G é uma função crescente para n ímpar e decrescente para n par.
Além disso,

$$G(1) = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \text{ e por L´Hôpital obtemos } \lim_{\alpha \to +\infty} G(\alpha) = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n},$$

e assim temos

$$G((1, +\infty)) = \begin{cases} \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right) & \textit{se } n \textit{ é par}, \\ \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right), & \textit{se } n \textit{ é ímpar}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I(a_0, a_1, ..., a_n) &= \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup \{[a_0, a_1, ..., a_n, \alpha], \alpha > 1\} \\ &= \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup G((1, +\infty)) = \begin{cases} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right), & \textit{se } n \textit{ é par}, \\ \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right], & \textit{se } n \textit{ é ímpar}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.22. *Dado uma sequência de números inteiros positivos $a_0, a_1, a_2, ...$ com $a_k > 0$, $\forall k \geq 1$, existe um único número real x (que é irracional) cuja representação por* *frações contínuas é* $[a_0, a_1, a_2, ...]$.

Demonstração. Considere as sequências (p_n) e (q_n) definidas pelas recorrências

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \; e \; q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$$

para todo $n \geq 0$, com $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$.
Temos, pela Proposição 2.1.20, que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \; \forall k \geq 0$$

Assim, considerando os intervalos fechados

$$I_k = \left[\frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right]$$

temos $I_{k+1} \subset I_k$, $\forall k \geq 0$. Afirmação 1: $|I_k| \to 0$ quando $k \to \infty$. De fato, pois

$$|I_k| = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{p_{2k+1}q_{2k} - p_{2k}q_{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k}} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k+1}q_{2k}} = \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}},$$

então

$$\lim_{k\to\infty} |I_k| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}} = 0.$$

Afirmação 2: $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \bigcap_{k\geq 0} I_k$. A veracidade dessa afirmação é resultante da Propriedade dos Intervalos Encaixantes, apresentada e demonstrada no Apêndice .2.

Das afirmações 1 e 2, temos que para todo $k \geq 0$,

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_{2k}] = \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq x \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{2k}, a_{2k+1}]$$

e, pela proposição anterior, obtêm-se que $[a_0; a_1, a_2, ..., a_{2k}]$ e $[a_0; a_1, a_2, ..., a_{2k}, a_{2k+1}]$ pertencem ao intervalo I$(a_0; a_1, a_2, ..., a_{2k})$. Logo $x \in I(a_0; a_1, a_2, ..., a_{2k})$, então a fração contínua de x inicia-se com $a_0; a_1, a_2, ..., a_{2k}, \forall k \geq 0$, e assim sua representação por frações contínuas é $[a_0; a_1, a_2, ...]$. Observe que, como a representação por frações contínuas de x é infinita, x é irracional. □

Exemplo 2.1.23. Vamos determinar a fração contínua do número irracional $\sqrt{3}$.

Aplicando recursivamente, a partir de:

- $\alpha_0 = x = \sqrt{3}$
- $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 1, \;$ como $\alpha_0 \notin \mathbb{Z}$

Temos:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

onde, $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$, como $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$, então

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1,$$

onde, $a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 2$, como $\alpha_2 \notin \mathbb{Z}$, então

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

onde, $a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = 1$, como $\alpha_3 \notin \mathbb{Z}$, então

$$\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1,$$

onde, $a_4 = \lfloor \alpha_4 \rfloor = 2$, como $\alpha_4 \notin \mathbb{Z}$, então

$$\alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4 - a_4} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

onde, $a_5 = \lfloor \alpha_5 \rfloor = 1$. Note que para $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k+1} = 1$ e $a_{2k} = 2$ e assim obtemos a seguinte expansão por frações contínuas:

$$x = \sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \; ...\,] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{2.21}$$

Sejam $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ primos entre si, temos pela Definição 2.1.1, as seguintes frações convergentes da fração contínua de $\sqrt{3}$ mostradas na tabela a seguir.

Tabela 2.1: Aproximações de $\sqrt{3}$ por Frações Convergentes

Convergente	Expansão em Fração Contínua	Forma Racional	Valor Numérico
$\frac{p_0}{q_0} = [1]$	1	$\frac{1}{1}$	1
$\frac{p_1}{q_1} = [1;1]$	$1 + \frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	2
$\frac{p_2}{q_2} = [1;1,2]$	$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$	$\frac{5}{3}$	$1,66666\ldots$
$\frac{p_3}{q_3} = [1;1,2,1]$	$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}$	$\frac{7}{4}$	$1,75$
$\frac{p_4}{q_4} = [1;1,2,1,2]$	$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$	$\frac{19}{11}$	$1,727272\ldots$
$\frac{p_5}{q_5} = [1;1,2,1,2,1]$	$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}}$	$\frac{26}{15}$	$1,73333\ldots$

Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que temos $1 < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \ ... \ \leq \sqrt{3} \leq \ ... \ < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < 2$, como nos garante a Proposição 2.1.20.

Capítulo 3

Boas aproximações

3.1 Ordem de aproximação e o estudo do Teorema de Dirichlet.

Teorema 3.1.1 (Dirichlet)**.** *Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2} \tag{3.1}$$

Além disso,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2} \text{ ou } \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2} \tag{3.2}$$

Demonstração. O número $x \in \mathbb{R}$ sempre estará contido no intervalo, cujo seus extremos são, $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ de comprimento igual a

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \Rightarrow \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}, \text{ onde } q_n < q_{n+1}.$$

Além disso, se

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{e} \quad \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

Teríamos que

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} = \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2}{2q_n^2 q_{n+1}^2}$$

Então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2}{2q_n^2 q_{n+1}^2} \iff 0 \geq \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2}{2q_n^2 q_{n+1}^2} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} \iff 0 \geq (q_{n+1} - q_n)^2 \tag{3.3}$$

Como $(q_{n+1} - q_n)^2 > 0$, nos resta, de (3.3), o caso $(q_{n+1} - q_n)^2 = 0$, logo $q_{n+1} = q_n$ o que resulta em um absurdo, pois como sabemos $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente. $\square$

Observe, do exemplo (2.1.23), para $n = 3$, obtemos a fração convergente $\dfrac{p_3}{q_3} = \frac{7}{4}$. Aplicando o Teorema 3.1.1, pela desigualdade (3.1), temos

$$\left|\sqrt{3} - \frac{7}{4}\right| \leq \frac{1}{(4)(11)} < \frac{1}{16}.$$

De fato, pois

$$\left|\sqrt{3} - \frac{7}{4}\right| \approx 0,0179492\ldots \text{ e } \frac{1}{44} < \frac{1}{16} = 0,062.$$

Neste caso, $\sqrt{3}$ pertence ao segmento de extremos $\dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{7}{4}$ e $\dfrac{p_4}{q_4} = \dfrac{19}{11}$ e pela desigualdade (3.2) temos

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|x - \frac{p_3}{q_3}\right| = \left|\sqrt{3} - \frac{7}{4}\right| < \frac{1}{32} = \frac{1}{2q_n^2}$$

Para $n = 4$, temos a fração convergente $\dfrac{p_4}{q_4} = \dfrac{19}{11}$, assim:

$$0,00477808\cdots \approx \left|\sqrt{3} - \frac{19}{11}\right| \leq \frac{1}{165} < \frac{1}{121} \approx 0,00826446\ldots$$

com $\sqrt{3}$ pertencente ao segmento de extremos $\dfrac{p_4}{q_4} = \dfrac{19}{11}$ e $\dfrac{p_5}{q_5} = \dfrac{26}{15}$, obtendo pela desigualdade (3.2):

$$\left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|x - \frac{p_5}{q_5}\right| = \left|\sqrt{3} - \frac{26}{15}\right| < \frac{1}{245} = \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

Observação 3.1.2. De fato,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}. \tag{3.4}$$

Tal fato nos auxilia a realizar melhores aproximações ao abordamos um x irracional especifico, onde quanto maior for a_{n+1} melhor será a aproximação $\dfrac{p_n}{q_n}$ de x.

Vejamos um exemplo de aplicação da Observação 3.1.2 com o número π:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ...]$$

onde suas convergentes são:

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1}, \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{103993}{33102}, \ldots$$

Tome a convergente $\frac{p_3}{q_3}$ e aplique-a na desigualdade (3.4), assim obtemos:

$$\left|\pi - \frac{p_3}{q_3}\right| < \frac{1}{q_3 q_4} < \frac{1}{a_4 q_3^2} \Rightarrow \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{(113)(33102)} < \frac{1}{(292)(113)^2}.$$

Mas objetivando melhorar a aproximação do teorema anterior de modo a encontrar uma constante que melhore as aproximações $\dfrac{p_n}{q_n}$ para $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, chegaremos no número $\sqrt{5}$ sendo a maior constante que sempre satisfará a existência de infinitas aproximações como acima com o erro $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$, como nos garante o Teorema a seguir.

3.2 O Teorema de Hurwitz-Markov

O Teorema a seguir garante que, para todo número irracional x, ao menos uma das três aproximações consecutivas de x feitas por frações contínuas, terá o erro de aproximação menor que o inverso do produto de $\sqrt{5}$ pelo respectivo denominador da aproximação ao quadrado. E que por outro lado, existirá somente um número finito de aproximações racionais $\dfrac{p}{q}$ do número de ouro, com erros menores que o inverso do produto de c pelo quadrado do denominador dessas frações, quando c for maior do que $\sqrt{5}$.

Teorema 3.2.1 (Hurwitz-Markov)**.** *Para todo x irracional e todo inteiro $n \geq 1$, temos*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

para pelo menos um racional

$$\frac{p}{q} \in \left\{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right\}.$$

Em particular, a desigualdade acima tem infinitas soluções racionais $\dfrac{p}{q}$.

Demonstração. Tomemos como falso o teorema, então temos que para todo x irracional e todo inteiro $n \geq 1$,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}, \tag{3.5}$$

entretanto a Proposição 2.1.16 nos garante que:

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}. \tag{3.6}$$

Logo por (3.5) e (3.6) temos que:

$$\frac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} \iff \alpha_{n+1}+\beta_{n+1} \leq \sqrt{5}. \tag{3.7}$$

Assim podemos concluir que para cada caso, com $\frac{p}{q} \in \left\{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right\}$ ocorre:

(i) $(\alpha_n + \beta_n\ ) \leq \sqrt{5}$

(ii) $(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\ ) \leq \sqrt{5}$

(iii) $(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2}\ ) \leq \sqrt{5}$

Afirmação 1: $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$. De fato, pois $a_k \leq 2$, para $k \in \{n, n+1, n+2\}$. Sendo $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$, suponha

$$a_k > 2 \Rightarrow a_k \geq 3 \Rightarrow \alpha_k > \sqrt{5}$$

o que é um absurdo. Assim $a_k = 1$ ou $a_k = 2$, para $k \in \{n, n+1, n+2\}$. Se

$$a_{n+1} = 2 \Rightarrow \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \geq 2 + \beta_{n+1}$$

como $\beta_{n+1} = \dfrac{1}{a_n + \beta_n}$, pela Proposição 2.1.16, em especifico, pela igualdade (2.10).

Afirmação 2: $\beta_{n+1} \geq \dfrac{1}{3}$. De fato, pois $a_n + \beta_n \leq 2 + \beta_n$, onde $0 < \beta_n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $a_n + \beta_n \leq 2 + 1 = 3$.

Portanto $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \geq 2 + \dfrac{1}{3} > \sqrt{5}$, o que é um absurdo, assim $a_{n+1} = 1$. Analogamente, demonstra-se que $a_{n+2} = 1$ e obtêm-se a afirmação 1.

Note que da definição temos

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - a_{n+1}},$$

e pela afirmação 2 $a_{n+1} = 1$, resultando em

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1} \iff \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+2}} + 1.$$

Temos também, da Proposição 2.1.16

$$\beta_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}} = \frac{1}{1 + \beta_{n+1}}$$

Tomemos então $X = \dfrac{1}{\alpha_{n+2}}$ e $Y = \beta_{n+1}$ e das desigualdades anteriores obtemos:

(i) $(\alpha_n + \beta_n\ ) \leq \sqrt{5}$, com $\alpha_n = \dfrac{1}{1+X} + a_n$ e $\beta_n = \dfrac{1}{Y} - a_n$, então

$$\frac{1}{1+X} + \frac{1}{Y} \leq \sqrt{5} \tag{3.8}$$

(ii) $(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\ ) \leq \sqrt{5}$, com $\alpha_{n+1} = 1 + X$ e $\beta_{n+1} = Y$, então

$$1 + X + Y \leq \sqrt{5} \tag{3.9}$$

(iii) $(\alpha_{n+2} + \beta_{n+2}\ ) \leq \sqrt{5}$, com $\alpha_{n+2} = \dfrac{1}{X}$ e $\beta_{n+2} = \dfrac{1}{1+Y}$, então

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{1+Y} \leq \sqrt{5} \tag{3.10}$$

Partindo da desigualdade (3.9), obtemos

$$1 + X \leq \sqrt{5} - Y \iff \frac{1}{1+X} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - Y}.$$

Somando $\dfrac{1}{Y}$ em ambos os membros, tem-se

$$\frac{1}{1+X} + \frac{1}{Y} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - Y} + \frac{1}{Y} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5} - Y)Y}.$$

Logo, resulta da desigualdade (3.8) que

$$\sqrt{5} \geq \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5} - Y)Y} \Rightarrow (\sqrt{5} - Y)Y \geq 1 \Rightarrow -Y^2 + \sqrt{5}Y - 1 \geq 0.$$

Portanto,

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leq Y \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \tag{3.11}$$

Mas também da desigualdade (3.9) podemos obter

$$X \leq \sqrt{5} - Y - 1 \iff \frac{1}{X} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - Y - 1}$$

Somando $\dfrac{1}{1+Y}$ em ambos os membros, tem-se

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{1+Y} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - Y - 1} + \frac{1}{1+Y} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5} - Y - 1)(1+Y)}$$

Logo, resulta da desigualdade (3.10) que

$$\sqrt{5} \geq \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-Y-1)(1+Y)} \Rightarrow (\sqrt{5}-Y-1)(1+Y) \geq 1$$
$$\Rightarrow -Y^2 + (\sqrt{5}-2)Y + (\sqrt{5}-2) \geq 0$$

Portanto,

$$\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq Y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{3.12}$$

De (3.11) e (3.12) conclui-se $Y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, é um número irracional e assim chegando a um absurdo, pois

$$Y = \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$$

Portanto, nossa suposição inicial de que o teorema é falso não é verdadeira, logo o teorema está correto e demonstrado. □

Em particular provamos que a desigualdade

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

tem infinitas soluções racionais p/q, para todo x irracional, sendo $\sqrt{5}$ o maior número com essa propriedade.

Na presente fase do trabalho é importante destacar que, ao longo do mesmo, ao estudarmos e provarmos o Teorema de Dirichlet e o Teorema de Hurwitz-Markov, verifica-se a existência de infinitas soluções racionais p/q para a desigualdade

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}, \text{ para } c \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \frac{p}{q} \in \overline{\mathbb{Q}} = \left\{ \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}; \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \right\} \tag{3.13}$$

De Dirichlet, o Teorema 3.1.1, temos para $c = 1$, que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \Rightarrow \frac{p_n}{q_n} \in \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para $c = 2$, temos que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \text{ ou } \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2} \Rightarrow \frac{p_n}{q_n} \in \overline{\mathbb{Q}} \text{ ou } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \in \overline{\mathbb{Q}} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De Hurwitz-Markov, o Teorema 3.2.1, com $c = \sqrt{5}$, obtemos

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \text{ para } \frac{p}{q} \in \left\{ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right\},$$

então
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \in \overline{\mathbb{Q}} \text{ ou } \frac{p_n}{q_n} \in \overline{\mathbb{Q}} \text{ ou } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \in \overline{\mathbb{Q}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim temos que para $c \in \{1, 2, \sqrt{5}\}$ a desigualdade (3.13) é satisfeita pelos infinitos elemento de $\overline{\mathbb{Q}}$.

3.3 A Maior Constante

O Teorema 3.2.1 afirma que a constante $c = \sqrt{5}$ é a melhor possível para garantir que existam infinitas aproximações racionais com o erro menor que $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$. Verifiquemos então que $\sqrt{5}$ é a maior constante com essa propriedade.

Considerando, por exemplo:
$$\epsilon > 0, \ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
sendo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o número de ouro, é possível mostrar que a desigualdade
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)q^2},$$
não possui infinitas soluções racionais p/q.

Demonstração. Temos, nestas condições
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right|$$
então
$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)q^2} \\
\Rightarrow &\left| q^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - pq \right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)} \\
\Rightarrow &\left| q^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - pq \right| \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right|}{(\sqrt{5}+\epsilon)} \\
\Rightarrow &\left| q^2 \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{p}{q} \right] \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right] \right| < \frac{\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right|}{(\sqrt{5}+\epsilon)}
\end{aligned}$$
Note que
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5}$$

ou seja,

$$\left|p^2 - pq - q^2\right| < \frac{\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5}\right|}{(\sqrt{5}+\epsilon)}. \tag{3.14}$$

Se tomarmos um q grande, teremos que $\dfrac{1}{q^2}$ será pequeno, assim $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p}{q}$ se aproximará muito de zero, pois temos de *Dirichlet*, o Teorema 3.1.1, que

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2},$$

logo o lado direito da desigualdade 3.14 será muito próxima de $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\epsilon} < 1$, resultando que

$$\left|p^2 - pq - q^2\right| < 1,$$

o que é um absurdo, pois se $p^2 - pq - q^2 = 0$ teríamos

$$\begin{aligned} p^2 - pq - q^2 = 0 \iff & \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} - \left(\frac{q}{q}\right)^2 = 0 \\ \iff & \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\} \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Concluindo assim que $\sqrt{5}$ é a maior constante que satisfaz, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a propriedade

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2} \text{ para } c \in \mathbb{R}$$

$\square$

Capítulo 4

Convergentes e Boas Aproximações

4.1 Conceitos Iniciais

Um resultado fundamental da teoria de frações contínuas é a construção da sequência de números racionais que se aproximam de um número real. Tal sequência é denominada sequência das reduzidas e seus elementos, convergentes.

Definição 4.1.1. Considere $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$. Sejam $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, primos entre si, com $q_n \neq 0$, tais que

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]\,, \text{ com } n \geq 0.$$

Tal fração $\frac{p_n}{q_n}$, com $n \geq 0$, é chamada de ***n-ésima reduzida*** ou ***convergente*** da expansão em fração contínua de x.

Além disso, a sequência dos convergentes são boas aproximações e de modo geral, elas podem serem classificadas em boa aproximação de primeiro e segundo tipo, definidas a seguir.

Definição 4.1.2. Dizemos que $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$, é uma boa aproximação de primeiro tipo de x se

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \left| x - \frac{p'}{q'} \right|$$

para cada $p'/q' \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q' \leq q$ e $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p'}{q'}$.

Definição 4.1.3. Dizemos que $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$, é uma boa aproximação de segundo tipo de x se

$$|qx - p| < |q'x - p'|$$

para cada $p'/q' \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q' \leq q$ e $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p'}{q'}$.

Proposição 4.1.1. *Toda boa aproximação de segundo tipo é uma boa aproximação de primeiro tipo.*

Demonstração. De fato, se p/q é uma boa aproximação de segundo tipo de x então $|qx - p| < |q'x - p'|$ se $0 < q' \leq q$ e $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p'}{q'}$. Equivalente à:

$$q\left|x - \frac{p}{q}\right| < q'\left|x - \frac{p'}{q'}\right| \iff \left|x - \frac{p}{q}\right| < \left(\frac{q'}{q}\right)\left|x - \frac{p'}{q'}\right| \leq \left|x - \frac{p'}{q'}\right|$$

□

Observação 4.1.2. A recíproca é falsa! De fato, para demonstrar, usaremos um contraexemplo. Veja que, $\dfrac{1}{3}$ é uma boa aproximação do primeiro tipo de $\dfrac{1}{5}$, pois seja $\dfrac{p'}{q'} \neq \dfrac{1}{3}$ tal que $0 < q' \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{q'}$, logo

$$\left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right| < \left|\frac{1}{5} - \frac{p'}{q'}\right|.$$

Por outro lado, a desigualdade

$$\left|3\frac{1}{5} - 1\right| \leq \left|1\frac{1}{5} - 0\right|$$

é falsa para $\dfrac{p'}{q'} = \dfrac{0}{1}$ com $q' = 1 \leq q = 3$.

Neste capítulo, mostraremos resultados que descrevem o comportamento da sequência das reduzidas e propriedades decorrentes da aproximação por convergentes. Como consequência do Teorema de Dirichlet mostramos que todo convergente representa uma boa aproximação de segundo tipo, Teorema 4.2.1.

Dado $x \in \mathbb{R}$ e $p/q \in \mathbb{Q}$ uma aproximação de x, vamos analisar a seguinte razão

$$|qx - p| = \frac{|x - p/q|}{1/q}. \tag{4.1}$$

Ao aproximar um número real x por uma fração racional p/q, o erro de aproximação é o valor absoluto da diferença entre x e a fração, esse erro pode ser considerado como a distância entre o número real e a sua aproximação racional, pois dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q um número natural não nulo, existe um p inteiro, que satisfaz $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$. De fato!

Lema 4.1.3. *Dados $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Z}$ então existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}.$$

Demonstração. Fixemos $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{N}^*$. Seja $p = \lfloor xq \rfloor$, então

$$p \leq xq < p + 1 \Rightarrow \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}.$$

□

Assim, do Lema 4.1.3 obtemos que dado $x \in \mathbb{R}$, existe $p/q \in \mathbb{Q}$, tal que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \left| x - \frac{p+1}{q} \right| < \frac{1}{q}.$$

Sendo este o **erro máximo** da aproximação de x por p/q, ou seja, $|x - p/q|$ nunca será maior que $1/q$.

Assim, a razão (4.1) nos dá um valor relativo para mensurar o quão boa é a aproximação p/q de x real, tendo como parâmetro o erro máximo esperado para frações com denominadores q. De fato, $x = \frac{p}{q} + x - \frac{p}{q}$ e $E = x - \frac{p}{q} \Rightarrow |E| < \frac{1}{q}$.

- Se $\dfrac{|x - p/q|}{1/q} << 1$ o erro de aproximação é muito pequeno em comparação com o erro máximo, logo a fração p/q é uma boa aproximação racional, pois ela está bem próxima de x;
- Se $\dfrac{|x - p/q|}{1/q} \approx 1$ o erro de aproximação é muito próximo ao erro máximo, nesse caso, a fração p/q, mesmo razoavelmente distante de x, é uma boa aproximação racional, pois ainda está dentro da precisão esperada;
- Se $\dfrac{|x - p/q|}{1/q} >> 1$ o erro de aproximação é muito maior que o erro máximo esperado, resultando que a fração p/q não é uma boa aproximação racional de x.

Tomemos um exemplo numérico para instigar e observar como a razão funciona. Suponha $x = \pi$, e queremos aproximar π pela fração $p/q = 22/7$, assim o erro de aproximação será:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \pi - \frac{22}{7} \right| \approx |3.14159265359 - 3.14285714286| \approx 0.00126448927$$

neste caso nosso $q = 7$, logo nosso erro máximo é dado por:

$$\text{erro máximo } = \frac{1}{q} = \frac{1}{7} \approx 0.14285714285$$

Logo, através do calculo da razão, obtemos

$$\frac{|x - p/q|}{1/q} = \frac{0.00126448927}{0.14285714285} \approx 0.00885142489$$

podendo concluir que $22/7$ é uma boa aproximação de π.

4.2 Propriedades das Aproximações por Convergentes

Os resultados a seguir caracterizam as convergentes em termos de definir o erro reduzido da aproximação de $x \in \mathbb{R}$ por um racional p/q, o qual é, por definição, $|qx - p|$.

Teorema 4.2.1. *Seja* $\dfrac{p_n}{q_n}$ *o n-ésimo convergente da expansão em frações contínuas de* $x \in \mathbb{R}$. *Então,*

(i) Se $0 < q < q_{n+1}$ *então* $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$.

(ii) Se $0 < q < q_n$ *então* $|q_n x - p_n| < |qx - p|$.

Demonstração. (a) Seja $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q < q_{n+1}$.

<u>Caso 1:</u> $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_n}{q_n}$. Como p_n/q_n é irredutível, isto é, $\mathrm{mdc}(p_n, q_n) = 1$ temos que existe $k \neq 0$ inteiro tal que

$$p = kp_n \text{ e } q = kq_n$$

Neste caso,

$$|qx - p| = |kq_n x - kp_n| = |k||q_n x - p_n| \geq 1|q_n x - p_n| = |q_n x - p_n|.$$

<u>Caso 2:</u> Suponha $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n}$, logo,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|pq_n - qp_n|}{qq_n} \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

mostrando que p/q não pertence ao intervalo de extremos $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Suponha que $\dfrac{p_n}{q_n} < \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, então

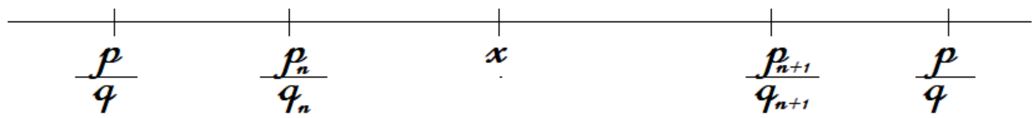

Figura 4.1: Representação de x e seus convergentes na Reta Real

se $\dfrac{p}{q} < \dfrac{p_n}{q_n}$ então

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\}$$

se $\dfrac{p}{q} > \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ então

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\}$$

resultando em

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \iff |q_n x - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}$$

logo,

$$|q_n x - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} \leq |qx - p|$$

como queríamos demonstrar.

(b) Suponha que $0 < q < q_n$. Então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| &\leq \left|x - \frac{p}{q}\right| + \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \\
&\leq \left|x - \frac{p}{q}\right| + \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \Rightarrow \\
\left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \\
\left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_nq_{n+1}} > \frac{q_{n+1} - q_n}{qq_nq_{n+1}}.
\end{aligned}$$

como $q_{n+1} - a + n + 1q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n$,

$$\begin{aligned}
\left|x - \frac{p}{q}\right| &> \frac{a_{n+1}q_n - q_{n-1}}{qq_nq_{n+1}} \iff \\
\left|x - \frac{p}{q}\right| &> \frac{a_{n+1} - 1}{qq_{n+1}} \iff \\
|qx - p| &> \frac{a_{n+1} - 1}{q_{n+1}}
\end{aligned}$$

Assuma que $a_{n+1} > 2$ então

$$|qx - p| > \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Portanto, como

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \iff |q_n x - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} |q_n x - p_n| &\leq \frac{1}{q_{n+1}} < |qx - p| \\ &\Rightarrow |q_n x - p_n| < |qx - p|. \end{aligned}$$

□

Como consequência do Teorema anterior, o corolário a seguir afirma que o n-ésimo convergente $\frac{p_n}{q_n}$ fornece a melhor aproximação racional de x entre todas as frações racionais $\frac{p}{q}$ com denominador $q < q_n$

Corolário 4.2.2. *Para todo $q < q_n$,*

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|.$$

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}$ seja $\frac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente da expansão em frações contínuas de x. Considere $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q < q_n$. Graças ao Teorema 4.2.1 temos a seguinte desigualdade estrita $|q_n x - p_n| < |qx - p|$, que equivale a desigualdade

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{q}{q_n}\left|x - \frac{p}{q}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 4.2.3. Note que pelo Corolário 4.2.2 como $0 < q_n < q_{n+1}$ então

$$\left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Usando o Corolário 4.2.2, temos que o próximo resultado estabelece uma condição para que um número racional p/q seja um convergente da expansão em frações contínuas de um número real x.

Corolário 4.2.4. *Se $|qx - p| < |q'x - p'|$, para todo p' e $q' \leq q$ tais que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, então p/q é um convergente da fração contínua de x.*

Demonstração. Seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ satisfazendo as hipóteses do enunciado. Dado $x \in \mathbb{R}$, considere a sequência dos convergentes $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ obtida a partir da sua expansão em frações contínuas. Como $q_n < q_{n+1}$ e $q_n \to \infty$, quando $n \to \infty$ tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Segue do Teorema 4.2.1 a seguinte desigualdade

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|. \tag{4.3}$$

Suponha por absurdo que $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n}$. Neste caso, segue por hipótese que

$$|qx - p| < |q_n x - p_n|. \tag{4.4}$$

Assim, graças às desigualdades (4.3) e (4.4) temos que $|q_n x - p_n| < |q_n x - p_n|$, o que é uma contradição. Logo, $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_n}{q_n}$. □

Apesar do Corolário 4.2.4 fornecer uma condição necessária para que um número racional seja um convergente e portanto uma boa aproximação, o Teorema a seguir nos garante que, uma condição intrínseca para que uma aproximação por racional p/q de x seja um convergente.

Teorema 4.2.5. *Se* $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q^2}$ *então* $\dfrac{p}{q}$ *é um convergente da expansão em fração contínua de* x*.*

Demonstração. Seja n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Assumimos então $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ou seja, estamos supondo que $\dfrac{p}{q}$ não é uma convergente. Da demonstração do Teorema 4.2.1, obtemos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \tag{4.5}$$

e assim $\dfrac{p}{q}$ não pertence ao intervalo de extremos $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Mostraremos por contradição através das duas possibilidades para q em relação a q_{n+1}, que se $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q^2}$ então $\dfrac{p}{q}$ é uma convergente da fração contínua de x.

Caso 1: $q \geq \dfrac{q_{n+1}}{2}$. Sabemos que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{1}{qq_{n+1}}$, além disso, $2q \geq q_{n+1} \iff q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$, logo

$$\frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}.$$

Portanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{2q^2}$$

que é uma contradição.

Caso 2: $q < \frac{q_{n+1}}{2}$. Neste caso, partindo do fato de que $\frac{p}{q}$ não pertence ao intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, temos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}}$$

como $q < \frac{q_{n+1}}{2} \iff 2q < q_{n+1}$, então

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{2q - q}{qq_n 2q} = \frac{1}{2qq_n} > \frac{1}{2q^2}, \text{ pois } q_n < q$$

chegando, novamente, em uma contradição.

Portanto qualquer fração $\frac{p}{q}$ que satisfaça $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ só pode ser uma convergente da fração contínua de x. □

Dado um número $x \in \mathbb{R}$, podemos definir a sua *ordem* como o maior $v > 0$ para o qual existe uma infinidade de frações $p/q \in \mathbb{Q}$ que satisfazem a seguinte desigualdade:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^v}.$$

Assim, denotamos:

$$\operatorname{ord} x \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ v > 0; \text{ tal que } \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^v} \text{ tem infinitas soluções } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \right\}$$

Observação 4.2.6. Para qualquer número irracional, sua ordem pode ser determinada a partir de sua representação em frações contínuas. Tal observação será apresentada no teorema a seguir.

Teorema 4.2.7. *Seja x um número irracional, e sejam $[a_0; a_1, a_2, ...]$ sua fração contínua e $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ suas convergentes. Então*

$$\mathit{ord}\, x = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n}.$$

Demonstração. Até o momento já é de nosso conhecimento que as melhores aproximações racionais são obtidas por meio das convergentes de uma fração contínua. Assim, para determinar a ordem de um irracional, é suficiente calcular a ordem gerada pelas convergentes. Graças às desigualdades (3.1) e (4.2) temos que

$$\begin{aligned}
2\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \\
&\geq \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \\
&= \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_nq_{n+1}}
\end{aligned}$$

Então seja $s_n > 0$ um número real tal que $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^{s_n}}$, obtemos

$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^{s_n}} \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}} \iff 2q_nq_{n+1} \geq q_n^{s_n} \geq q_nq_{n+1}$$

Da desigualdade acima, tomaremos o logaritmo neperiano, dividiremos o resultado por $\ln q_n$ e ao novo resultado aplicaremos o limite superior e assim obteremos:

$$\ln 2 + \ln q_n + \ln q_{n+1} \geq s_n \ln q_n \geq \ln q_n + \ln q_{n+1},$$

$$\frac{\ln 2}{\ln q_n} + 1 + \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} \geq s_n \geq 1 + \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}$$

$$\limsup_{n\to\infty} 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{\ln q_n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} \geq \limsup_{n\to\infty} s_n \geq \limsup_{n\to\infty} 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}$$

$$1 + 0 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} \geq \limsup_{n\to\infty} s_n \geq 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}$$

Portanto,

$$\operatorname{ord} x = \limsup_{n\to\infty} = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n}.$$

Para a demonstração da segunda parte da igualdade, notemos que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, assim

$$a_{n+1}q_n < q_{n+1} < a_{n+1}q_n + q_n = (a_{n+1}+1)q_n$$

pois $q_n > q_{n-1}$, dado que a sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente. Daí, tomando o logaritmo neperiano, dividindo por $\ln q_n$ e aplicando o limite superior na desigualdade acima, resultando em:

$$\ln a_{n+1} + \ln q_n < \ln q_{n+1} < \ln(a_{n+1} + 1) + \ln q_n$$

$$\frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n} + 1 < \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} < \frac{\ln(a_{n+1} + 1)}{\ln q_n} + 1$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n} + \limsup_{n\to\infty} 1 < \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} < \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(a_{n+1} + 1)}{\ln q_n} + \limsup_{n\to\infty} 1$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n} + 1 < \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} < \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(a_{n+1} + 1)}{\ln q_n} + 1$$

Portanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n} + 1$$

Logo

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord} x = \limsup_{n\to\infty} &= 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} \\
&= 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n} + 1 \\
&= 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n}
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 5

Frações Contínuas Periódicas

Se um número real $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ possui fração contínua infinita, essa fração é periódica se existirem inteiros positivos n_0 e k tais que para qualquer

$$a_{n+k} = a_n, \forall\, n \geq n_0.$$

Neste capítulo, serão apresentadas as principais características das frações contínuas periódicas. Mostrando que elas aparecem frequentemente na solução de Equações Diofantinas, pois são raízes de equações do segundo grau com coeficientes inteiros.

Recordando, na representação de x por fração contínua, são definidos por recursão:

$$\alpha_0 = x; \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor; \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$$

e, do Corolário 2.1.15, temos

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Proposição 5.0.1. *Um número irracional x possui representação por fração contínua periódica se, e somente se, é um irracional quadrático.*

Demonstração. Se um irracional x possui representação periódica por frações contínuas, então $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, sendo $\alpha_0 = x = [a_0; a_1, a_2, \, ... \,]$. Segure de (5.1), que:

$$\begin{aligned}
\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} &= \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}} = \alpha_{n+k} \\
&\Rightarrow (p_{n-2} - q_{n-2}x)(q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}) = (q_{n-1}x - p_{n-1})(p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x) \\
&\Rightarrow (p_{n-2} - q_{n-2}x)(q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}) - (q_{n-1}x - p_{n-1})(p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x) = 0,
\end{aligned}$$

então multiplicando e agrupando as potências de x, obtêm-se que x satisfaz a seguinte equação:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A &= q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \\ B &= p_{n-2}q_{n+k-1} + p_{n+k-1}q_{n-2} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2} \\ C &= p_{n+k-2}p_{n-1} - p_{n-2}p_{n+k-1} \end{aligned}$$

Afirmação: $A \neq 0$. De fato, pois $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é uma fração irredutível, pois $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$. Analogamente $\dfrac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ é irredutível. Como $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, então

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}} \Rightarrow q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0.$$

Portanto, x é um irracional quadrático.

Suponha que x é um irracional quadrático, ou seja , x é a raiz de uma equação da forma $aX^2 + bX + c = 0$ com a, b, c inteiros, onde $a \neq 0$. E também $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ é irracional. Por outro lado, do Corolário 2.1.15, temos

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

assim obtemos:

$$\begin{aligned} & aX^2 + bX + c = 0 \\ \Rightarrow & a\left(\frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right) + c = 0 \\ \Rightarrow & A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2} \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Note $C_n = A_{n-1}$. Assim mostraremos que existe $M > 0$ tal que

$$0 < |A_n| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e, portanto
$$0 < |C_n| \leq M, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

A partir de A_n, temos

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ &= q_{n-1}^2\left(a\frac{p_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + c\right). \end{aligned}$$

Rescrevendo A_n na forma fatorado obtemos

$$A_n = aq_{n-1}^2\left(a\frac{p_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + c\right) = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

onde x e $\overline{x}$ são raízes irracionais de $aX^2 + bX + c$, sendo $X = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Então

$$A_n = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$$

com $\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \neq 0$ e $\left(\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \neq 0$, pois x e $\overline{x}$ são irracionais e com $aq_{n-1}^2 \neq 0$, segue que $A_n \neq 0, \forall\, n > 0$.

Mas, do Teorema 3.1.1,
$$\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1,$$

e para melhor compreender o resultado do valor absoluto de A_n, usaremos o lema abordado no Apêndice .3 em $\left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$, assim temos

$$\left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = |\overline{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

Portanto

$$\begin{aligned} |A_n| &= aq_{n-1}^2\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \\ &\leq aq_{n-1}^2\,\frac{1}{q_{n-1}^2}\left(|\overline{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \\ &\leq a(|\overline{x} - x| + 1) > 0 \\ |A_n| &\leq M \overset{def}{=} a(|\overline{x} - x| + 1) \end{aligned}$$

Observe agora que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a equação $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$ possui raízes reais, pois

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
B_n^2 &= 4A_nC_n + b^2 4ac 4M^2 + b^2 4ac \\
\Rightarrow & Bn\sqrt{4M^2 + b^2 4ac} \\
\Rightarrow & B_n \leq M' \stackrel{def}{=} \sqrt{4M^2 + b^2 4ac}.
\end{aligned}
$$

Concluindo que A_n, B_n e C_n são limitadas, donde há apenas um número finito de possíveis equações $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$, e portanto de possíveis valores de α_n. Assim, necessariamente $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ para alguma escolha de $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$. Assim, mostrando que x possui uma expansão em fração contínua periódica. $\square$

Exemplo 5.0.2. A equação $x^2 - x - 1 = 0$ tem $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ como uma de suas raízes. Portanto, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um irracional quadrático e possui representação por fração contínua periódica:

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 1 &= 0 \\
x^2 - x - 1 + 1 &= 0 + 1 \\
x^2 - x &= 1
\end{aligned}
$$

O lado esquerdo pode ser fatorado, assim

$$
\begin{aligned}
x^2 - x &= 1 \\
x(x-1) &= 1
\end{aligned}
$$

Isolando x obtemos:

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= \frac{1}{x} \\
x &= 1 + \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Agora, substituímos x recursivamente:

$$
x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, ...].
$$

Para alguns irracionais quadráticos específicos, é possível determinar o padrão e a periodicidade da fração contínua. Observemos as proposições a seguintes:

Proposição 5.0.3. *Todo número da forma $x = \sqrt{a^2 + 1}$, com $a \in \mathbb{N}$, tem fração continua*

$$
x = [a; \overline{2a}].
$$

Demonstração. Tome $x = \sqrt{a^2+1} \Rightarrow x^2 - a^2 = 1 \Rightarrow (x-a)(x+a) = 1 \Rightarrow x = a + \frac{1}{a+x}$

Substituindo o valor de x recursivamente, obtêm-se

$$x = a + \frac{1}{a+x} = a + \frac{1}{a+a+\frac{1}{a+x}} = a + \frac{1}{2a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+x}}} = a + \frac{1}{2a+\frac{1}{2a+\frac{1}{2a+\frac{1}{\ddots}}}} = [a; \overline{2a}].$$

□

Proposição 5.0.4. *Todo número da forma* $x = \sqrt{a^2-1}$, *com* $a > 1$, *tem fração contínua*

$$x = [a-1; \overline{1, 2(a-1)}].$$

Demonstração. Tome

$$x = \sqrt{a^2-1} \Rightarrow x^2 = a^2 - 1 = (a-1)^2 + 2(a-1) \Rightarrow x^2 = (a-1)^2 + 2(a-1) \Rightarrow$$

$$x^2 - (a-1)^2 = 2(a-1) \Rightarrow [x-(a-1)][x+(a-1)] = 2(a-1) \Rightarrow [x-(a-1)] = \frac{2(a-1)}{x+(a-1)}.$$

Então

$$x = (a-1) + \frac{2(a-1)}{x+(a-1)}$$

Substituindo o valor de x recursivamente, obtêm-se

$$x = (a-1) + \frac{2(a-1)}{(a-1)+\frac{2(a-1)}{x+(a-1)}+(a-1)} = (a-1) + \frac{1}{1+\frac{1}{x+(a-1)}}$$

$$= (a-1) + \frac{1}{1+\frac{1}{2(a-1)+\frac{2(a-1)}{2(a-1)+\frac{2(a-1)}{x+(a-1)}}}} = (a-1) + \frac{1}{1+\frac{1}{2(a-1)+\frac{2(a-1)}{x+(a-1)}}}.$$

Observe que nesse ponto, a expressão do último quociente da fração contínua de x retorna a expressão inicial, nos garantindo que ao repetir o processo recursivamente, obtemos

$$x = [a-1; \overline{1, 2(a-1)}].$$

□

5.1 Aplicações

5.1.1 Equações Diofantinas

Definição 5.1.1. Uma equação diofantina é uma equação do tipo

$$ax + by = c$$

onde a, b e $c \in \mathbb{Z}$, com a e b não nulos.

Tais equações recebem esse nome em homenagem a Diofanto de Alexandria [1].

A resolução de vários problemas de aritmética recai na resolução, em números naturais, de equações desse tipo [1]. Assim, em geral, buscamos as soluções inteiras de uma equação diofantina. Mas nem sempre estas equações possuem solução. Por exemplo, a equação:

$$4x + 6y = 3$$

não possuem nenhuma solução em números naturais x_o, y_o pois não satisfaz o critério fundamental para a existência de soluções inteiras em equações diofantinas lineares que enunciamos a seguir.

Proposição 5.1.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{Z}$. A equação $ax + by = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, $mdc(a, b)|c$.*

Demonstração. Se a equação admite solução inteira, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Como $mdc(a, b)|ax_0 + by_0$, então $mdc(a, b)|c$. Reciprocamente, se $mdc(a, b)|c$ então $c = mdc(a, b)k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, existem inteiros m e n tais que

$$mdc(a, b) = ma + nb$$

Daí,

$$c = mdc(a, b)k = a(mk) + b(nk).$$

Portanto, a equação $ax + by = c$ admite solução inteira. □

Proposição 5.1.2. *Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ uma solução particular da equação $ax + by = c$, em que $mdc(a, b) = 1$. Então, as soluções (x, y) em $\mathbb{Z}^2$ da equação são dadas por*

$$x = x_0 + bt, \ y = y_0 - at; \ \textit{com } t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Seja $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ uma solução qualquer da equação $ax + by = c$. Então,

$$ax_0 + by_0 = ax + by = c.$$

Reorganizando a expressão, obtemos

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y). \tag{5.2}$$

Como $mdc(a, b) = 1$, segue que $b|(x - x_0)$. Logo,

$$x - x_0 = bt, t \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo a expressão de $x - x_0$ na equação (5.2), obtêm-se

$$y - y_0 = at,$$

e, portanto, as soluções da equação são do tipo exibido no enunciado.

Por outro lado, as expressões x, y do enunciado sempre descrevem uma solução para equação diofantina, pois

$$ax + by = a(x_0 + tb) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 + abt - abt = c.$$

$\square$

Considere então uma equação diofantina $ax + by = c$, tal que a, b e $c \in \mathbb{Z}$, com a e b diferentes de zero e $mdc(a, b) = 1$. Sabemos então que $\frac{a}{b}$ é um número racional, portanto, pelo Teorema 2.1.5, $\exists\, n \geq 0$ inteiro, $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, ..., a_n > 0$ inteiros, tais que

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Note que p_n/q_n é irredutível, logo $mdc(p_n, q_n) = 1$, e portanto

$$p_n = a \text{ e } q_n = b$$

Entretanto, pelo Corolário 2.1.9, p_n e q_n, satisfazem à identidade:

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

Tome na igualdade acima, $n = (n - 1)$, assim podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$p_{(n-1)+1}q_{(n-1)} - p_{(n-1)}q_{(n-1)+1} = (-1)^{(n-1)} \iff p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n - = (-1)^{(n-1)}$$

Supondo n par, obtemos:

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = -1 \Rightarrow a(-q_{n-1}c) + b(p_{n-1}c) = c.$$

Logo

$$x = -q_{n-1}c \quad \text{e} \quad y = p_{n-1}c \tag{5.3}$$

é uma solução particular da equação diofantina $ax + by = c$. Quando n é ímpar, a solução particular da equação diofantina é dada por:

$$x = q_{n-1}c \quad \text{e} \quad y = -p_{n-1}c. \tag{5.4}$$

Exemplo 5.1.3. Determine a solução geral da equação diofantina $8x + 13y = 23$.

Sabemos que a equação em questão apresenta $mdc(a, b) = mdc(8, 13) = 1$ e que

$$\frac{8}{13} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}} = [0; 1, 1, 1, 1, 2]$$

Nesse caso temos $\frac{p_5}{q_5} = \frac{8}{13}$, para aplicarmos a solução particular (5.4), calculemos $\frac{p_4}{q_4}$:

$$\frac{p_4}{q_4} = [0, 1, 1, 1, 1] = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = \frac{3}{5}$$

Então

$$\begin{aligned} x &= q_{n-1}c \\ x &= (5)(23) \\ x &= 115. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y &= -p_{n-1}c \\ y &= -(3)(23) \\ y &= -69. \end{aligned}$$

Logo, a solução particular da equação diofantina $8x + 13y = 23$ é dada por $x = 115$ e $y = -69$. Portanto, a solução geral é dada a partir da Proposição 5.1.2, com $t \in \mathbb{Z}$. Então

$$\begin{aligned} x &= x_0 + bt \\ x &= 115 + 13t. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y &= y_0 - at \\ y &= -69 - 8t \end{aligned}$$

5.1.2 A Equação de Pell

Equação de Pell é qualquer equação da forma $x^2 - Ay^2 = 1$, com x e y inteiros, em que A é um inteiro positivo que não seja quadrado perfeito, pois nosso interesse principal é encontrar as soluções inteiras positivas dessa equação.

Se A é um quadrado perfeito, digamos $A = k^2$, temos

$$x^2 + Ay^2 = x^2 + k^2y^2 \Rightarrow (x - ky)^2(x + ky)^2 = 1$$

que admite apenas as soluções triviais $y = 0$ e $x = \pm 1$, pois teríamos $x - ky = x + ky = \pm 1$.

Se A não é uma quadrado perfeito, então $\sqrt{A}$ é um número irracional. De fato, se $\sqrt{A} = p/q$, onde p e q são inteiros, com $mdc(p, q) = 1$, temos

$$\sqrt{A} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt{A})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{p^2}{q^2},$$

como p e q são primos entre si, então seus quadrados também serão primos entre si, logo $mdc(p^2, q^2) = 1$ e $\dfrac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Portanto como A não é um quadrado perfeito, sua raiz quadrada será um irracional.

Neste caso, nosso principal resultado é o seguinte.

Teorema 5.1.4. *A equação $x^2 - Ay^2 = 1$ tem infinitas soluções inteiras (x, y). Além disso, as soluções com x e y inteiros positivos podem ser enumeradas por $(x_n, y_n), n \geq 0$ de modo que, para todo n, $x_n + y_n\sqrt{A} = (x_1 + y_1\sqrt{A})^n$, e portanto*

$$x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^n + (x_1 - y_1\sqrt{A})^n}{2} \quad e \ y_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^n + (x_1 - y_1\sqrt{A})^n}{2\sqrt{A}}$$

Demonstração. Seja $D = \{x + y\sqrt{A} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ então a função $N : D \to D$, onde $N(x + y\sqrt{A}) = x^2 - Ay^2$ é uma função multiplicativa, isto é,

$$N((x + y\sqrt{A})(u + v\sqrt{A})) = N(x + y\sqrt{A})N(u + v\sqrt{A}), \quad \forall\, x, y, u, v \in \mathbb{Z}.$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}
N((x + y\sqrt{A})(u + v\sqrt{A})) &= N((xu + Ayv) + (xv + yu)\sqrt{A}) \\
&= (xu + Ayv)^2 - A(xv + yu)^2 \\
&= x^2u^2 + A^2y^2v^2 - A(x^2v^2 + y^2u^2) \\
&= (x^2 - Ay^2)(u^2 - Av^2) \\
&= N(x + y\sqrt{A})N(u + v\sqrt{A}).
\end{aligned}$$

Como $\sqrt{A}$ é irracional, a desigualdade $|\sqrt{A} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ tem infinitas soluções racionais

p/q. Note que se $|\sqrt{A} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ então

$$\begin{aligned}
|p^2 - Aq^2| &= |p - q\sqrt{A}||p + q\sqrt{A}| \\
&= q|\sqrt{A} - \frac{p}{q}||p + q\sqrt{A}| \\
&< q \cdot \frac{1}{q^2} \cdot |p + q\sqrt{A}| \\
&= \frac{|p + q\sqrt{A}|}{q} \leq 2\sqrt{A} + \left|\sqrt{A} - \frac{p}{q}\right| < 2\sqrt{A} + 1.
\end{aligned}$$

Considerando infinitos pares de inteiros positivos (p_n, q_n) com $|\sqrt{A} - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$, teremos sempre $|p_n - Aq_n^2| < 2\sqrt{A} + 1$, e portanto temos um número finito de possibilidades para o valor (inteiro) de $p_n - Aq_n^2$. Consequentemente, existe um inteiro $k \neq 0$ tal que $p_n - Aq_n^2 = k$ para infinitos valores de n. Obtemos portanto uma sequência crescente de pares de inteiros positivos $(u_r), (v_r), r \in \mathbb{N}$ tais que $u_r^2 - Av_r^2 = k$ para todo r.

Como há apenas $|k|^2$ possibilidades para os pares $(u_r(\text{mod } |k|), v_r(\text{mod } |k|))$, existem inteiros a e b e infinitos valores de r tais que $u_r \equiv a(\text{mod } |k|)$ e $v_r \equiv b(\text{mod } |k|)$. Tomamos então $r < s$ com as propriedades acima. Seja

$$\begin{aligned}
x + y\sqrt{A} = \frac{u_s + v_s\sqrt{A}}{u_r + v_r\sqrt{A}} &= \frac{(u_s + v_s\sqrt{A})(u_r - v_r\sqrt{A})}{u_r^2 - Av_r^2} \\
&= \frac{u_s u_r - Av_s v_r}{k} + \left(\frac{u_r v_s - u_s v_r}{k}\right)\sqrt{A}.
\end{aligned}$$

Temos $u_s u_r - Av_s v_r \equiv u_r^2 - Av_r^2 = k \equiv 0(\text{mod } |k|)$ e$u_r v_s - u_s v_r \equiv ab - ab = 0(\text{mod } |k|)$, e portanto

$$x = \frac{u_s u_r - Av_s v_r}{k}$$

e

$$y = \frac{u_r v_s - u_s v_r}{k}$$

são inteiros. Por outro lado,

$$(x + y\sqrt{A})(u_r + v_r\sqrt{A}) = u_s + v_s\sqrt{A}$$

onde

$$N(x + y\sqrt{A})N(u_r + v_r\sqrt{A}) = N(u_s + v_s\sqrt{A})$$

Como

$$N(u_r + v_r\sqrt{A}) = N(u_s + v_s\sqrt{A}) = k,$$

segue que

$$N(x + y\sqrt{A}) = x^2 - Ay^2 = 1.$$

Além disso, como $s > r, u_s + v_s\sqrt{A}$, donde

$$x + y\sqrt{A} = \frac{u_s + v_s\sqrt{A}}{u_r + v_r\sqrt{A}} > 1.$$

Sejam agora $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $x_1 + y_1\sqrt{A} > 1$ e $x_1^2 - Ay_1^2 = 1$ com $x_1 + y_1\sqrt{A}$ mínimo. Temos então $(x_1 + y_1\sqrt{A})^{-1} = x_1 - y_1\sqrt{A}$.

Vamos mostrar que, se $\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{A} > 1$ e $\tilde{x^2} - A\tilde{y^2} = 1$, com $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ inteiros, então $\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{A} = (x_1 + y_1\sqrt{A})^n$ para algum inteiro positivo n. Para isso, tome $n \geq 1$ tal que $(x_1 + y_1\sqrt{A})^n \leq \tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{A} < (x_1 + y_1\sqrt{A})^{n+1}$. temos então $1 \leq (\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{A})(x_1 + y_1\sqrt{A})^n < x_1 + y_1\sqrt{A}$. Se$u + v\sqrt{A} = (\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{A})(x_1 + y_1\sqrt{A})^n$, com u e v inteiros, temos

$$u^2 - Av^2 = N(u + v\sqrt{A}) = N(\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{A})N(x_1 - y_1\sqrt{A})^n = 1,$$

donde $u + v\sqrt{A} = 1$, pela minimalidade de$x_1 + y_1\sqrt{A}$, pois

$$1 \leq u + v\sqrt{A} < x_1 + y_1\sqrt{A}.$$

Note finalmente que se x e y são inteiros e $x^2 - Ay^2 = 1$, então $x + y\sqrt{A} > 1$ equivale a termos x e y positivos, pois temos

$$0 < (x + y\sqrt{A})^{-1} = x - y\sqrt{A} < 1,$$

donde, são positivos

$$x = \frac{(x + y\sqrt{A}) + (x - y\sqrt{A})}{2}$$

e

$$y = \frac{(x + y\sqrt{A}) - (x - y\sqrt{A})}{2\sqrt{A}}.$$

□

Exemplo 5.1.5. A menor solução inteira positiva da equação $x^2 - 2y^2 = 1$ é,

$$(x_1, y_1) = (3, 2)$$

O Teorema anterior afirma que todas as soluções podem ser geradas a partir da relação

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^n.$$

Para $n = 2$, temos $(x_2 + y_2\sqrt{2}) = (3 + 2\sqrt{2})^2$, onde:

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2}.$$

Portanto, temos: $x_2 = 17, \quad y_2 = 12.$

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho foi apresentado as frações contínuas e suas propriedades, de modo a verificar que toda boa aproximação de um número real é de fato, sempre um convergente. Sendo assim foi feito o estudo de algumas propriedades aritméticas, como a ordenação, a divisibilidade, o algoritmo de Euclides, a expansão decimal, entre outros, observando suas aplicabilidades em cada conjunto numérico e como elas consolidam, na área da teoria dos números, o método de expansão em frações contínuas.

A partir daí, foram abordados o estudo da obtenção de convergentes, através das relações de recorrências, o comportamento e a convergência de uma sequência de convergentes e o erro de aproximação de um número real por seu convergente, podendo essa aproximação ser classificada como do primeiro ou do segundo tipo. Mostrando ainda que números que possuem expansão em frações contínuas periódicas possuem como característica principal serem exatamente as raízes de equações polinomiais do segundo grau com coeficientes inteiros. Verificando a aplicabilidade das frações contínuas em encontrar as infinitas soluções inteiras para equações diofantinas, em especial a equação de Pell.

De um modo geral, acredita-se que os objetivos do trabalho foram atingidos, ao utilizarmos da análise matemática como fundamento principal para a construção do estudo, explorando as frações contínuas a partir de conceitos matemáticos iniciais que sustentam a veracidade de suas proposições, aprofundamos o tema e investigando as frações contínuas periódicas e sua aplicabilidade nas equações diofantinas.

Capítulo 7

Apêndices

.1 Teste de Comparação

Proposição .1.1 (Teste de Comparação)**.** *Suponha que* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *sejam séries com termos positivos. Então,*

1. *Se* $\sum b_n$ *for convergente e* $a_n \leq b_n$ *para todo* n*, então* $\sum a_n$ *também será convergente.*
2. *Se* $\sum b_n$ *for divergente e* $a_n \geq b_n$ *para todo* n*, então* $\sum a_n$ *também será divergente.*

Ao usar o testes de comparação, a intenção é analisar uma série específica em comparação com outra série cuja convergência ou divergência já conhecemos. A série escolhida para auxiliar na demonstração do Teorema 1.6.1 e verificar se a sequência (1.5) converge é a seguinte série geométrica.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$$

De acordo com [5], seja R a razão de uma série geométrica, quando $|R| < 1$, a série geométrica é convergente, e sua soma é $\frac{a}{1-R}$, sendo a seu primeiro termo, como detalha a seguinte proposição.

Proposição .1.2. *A série geométrica*

$$\sum_{i=1}^{\infty} aR^{n-1} = a + aR + aR^2 + \ ...$$

é convergente se $|R| < 1$ *e sua soma é*

$$\sum_{i=1}^{\infty} aR^{n-1} = \frac{a}{1-R}$$

Se $|R| \geq 1$*, a série geométrica é divergente.*

Dados esses resultados, observe que

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{10^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$$

De fato, pois $b_i \in \{0, 1, 2, \ ... \ , 9\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{9}{10^i}$ é um série geométrica com razão $|R| < 1$, pois ao reescrevê-la obtemos,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i} \frac{10^{-1}}{10^{-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10} \frac{1}{10^{i-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{i-1}$$

sendo $R = 1/10 < 1$, logo nossa série geométrica converge. Portanto, aplicando a Proposição .1.1 temos que $r = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{b_i}{10^i}$ converge.

.2 Propriedade dos Intervalos Encaixantes

Entre as propriedades essenciais dos números reais, destaca-se a Propriedade dos Intervalos Encaixantes.

Propriedade dos Intervalos Encaixantes

Seja $[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$ uma sequência de intervalos satisfazendo as condições:

i $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$, ou seja, cada intervalo da sequência contém o seguinte;

ii para todo $r > 0$, existe um natural n tal que

$$b_n - a_n < r$$

ou seja, à medida que n cresce o comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ vai tendendo a zero. Nestas condições, existe um único rela x que pertence a todos os intervalos da sequência, isto é, existe um único real x tal que, para todo natural $n, a_n \leq x \leq b_n$.

Demonstração. $A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ é não vazio e limitado superiormente, pois todo b_n é cota superior de A. Assim, A admite supremo; seja x tal supremo. Como x é a menor cota superior de A, para todo natural n temos

$$a_n \leq x \leq b_n$$

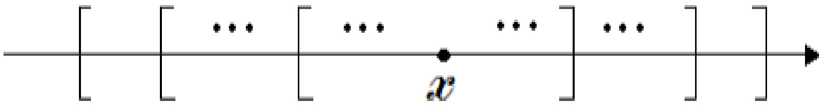

Figura 1: Representação dos Intervalos Encaixantes na Reta Real

Analogamente, $B = \{b_0.b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ é não vazio e limitado inferiormente, pois todo a_n é cota inferior de B, tomemos então y como ínfimo de B. Como y é a maior cota inferior de B, para todo natural n temos

$$a_n \leq y \leq b_n.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|x - y| \leq b_n - a_n$$

Pela propriedade (ii), temos $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, então

$$|x - y| < 0$$

Logo, $x = y$ □

.3 Desigualdade Triangular para Valores Absolutos

Proposição .3.1 (A Desigualdade Triangular.). *Se x e y forem quaisquer números reais, então*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Lema .3.2. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Então, a seguinte desigualdade é válida:*

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|.$$

Demonstração. Definimos $x = a - b$ e $y = b - c$, de modo que $a - c = x + y$. Pela propriedade do valor absoluto, temos a desigualdade fundamental:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Substituindo $x = a - b$ e $y = b - c$, obtemos:

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|.$$

O resultado segue diretamente da definição do valor absoluto e da interpretação da distância na reta real. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Abramo Hefez. Elementos de aritmética-coleçao textos universitários. *Editora da SBM, Rio de Janeiro-RJ.*

[2] Carlos Gustavo Moreira. Frações contínuas, representações de números e aproximações. *Eureka*, 3:44–55, 1998.

[3] Roberto Ribeiro Paterlini. Aritmética dos números inteiros. Disponível em: `https://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/`. Acesso em: 25/12/2023.

[4] Roberto Ribeiro Paterlini. Aritmética dos números reais. Disponível em: `https://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/`. Acesso em: 25/12/2023.

[5] James Stewart and Jorge Humberto Romo. *Cálculo*. Cengage Learning, 2017.