UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CARLOS EDUARDO PASSARIN SEGANTIN

VISITANDO ALGUMAS FERRAMENTAS DA ANÁLISE MODERNA PARA SOLUÇÃO DE EDP'S

SÃO CARLOS
2024

CARLOS EDUARDO PASSARIN SEGANTIN

VISITANDO ALGUMAS FERRAMENTAS DA ANÁLISE MODERNA PARA SOLUÇÃO DE EDP'S

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto

SÃO CARLOS
2024

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 16/2024/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

CARLOS EDUARDO PASSARIN SEGANTIN

VISITANDO ALGUMAS FERRAMENTAS DA ANÁLISE MODERNA PARA SOLUÇÃO DE EDP'S

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 09 de fevereiro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Adilson Eduardo Presoto
Membro da Banca 1	Cláudia Buttarello Gentile Moussa
Membro da Banca 2	Rafael Augusto dos Santos Kapp

Documento assinado eletronicamente por **Adilson Eduardo Presoto**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 17/03/2024, às 11:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Claudia Buttarello Gentile Moussa**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 03/07/2024, às 15:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rafael Augusto dos Santos Kapp**, **Professor(a) Adjunto(a)**, em 04/07/2024, às 08:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.004411/2024-98

SEI nº 1367093

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

AGRADECIMENTOS

Neste momento de conquista e conclusão, é com alegria e gratidão que expresso meus sinceros agradecimentos àqueles que desempenharam um papel fundamental na realização deste trabalho de conclusão de curso. Gostaria de começar agradecendo ao meu orientador, Adilson Presoto, cuja orientação valiosa, paciência incansável e apoio constante foram essenciais ao longo de todo o processo. Suas sugestões perspicazes moldaram este trabalho e enriqueceram minha compreensão do tema significativamente.

Quero expressar minha profunda gratidão aos meus pais, Daniele e Geovani, e ao meu irmão, José Luis, pelo apoio constante e pelos valiosos ensinamentos que têm acompanhado minha jornada. À minha adorável cachorra, Amora, também deixo meus sinceros agradecimentos pelos momentos em que me distraiu das preocupações acadêmicas. Sua presença afetuosa trouxe alegria aos meus dias e me lembrou da importância de pausas relaxantes durante momentos intensos de estudo.

Também, agradeço imensamente minha ilustríssima namorada, Kimberly, por sua presença constante, apoio incansável e por estar ao meu lado durante toda essa jornada, ouvindo minhas preocupações, reclamações, desabafos e compartilhando vários momentos especiais. Também quero expressar minha gratidão à minha amiga Emilly, que tem sido parte integrante dessa jornada desde o início da minha graduação. Por último, mas não menos importante, quero estender meu agradecimento a todos que, de diferentes maneiras, cruzaram meu caminho e contribuíram para o meu percurso acadêmico. Cada interação deixou uma marca positiva, enriquecendo minha jornada de maneiras inimagináveis.

Muito obrigado!

A história está nos números.

Clare Vanderpool *(VANDERPOOL, 2016, Pág. 72).*

RESUMO

Em 1856, Riemann introduziu o Princípio de Dirichlet como uma abordagem inovadora para o Problema de Dirichlet, propondo um tratamento baseado em um problema variacional. Essencialmente, esse princípio buscava minimizar um funcional de energia em uma classe de funções admissíveis. Apesar de suas imprecisões, o Princípio de Dirichlet foi adotado por renomados matemáticos, incluindo o próprio Riemann, como evidenciado em sua aplicação na demonstração do Teorema da Aplicação Conforme.

Contudo, por volta de 1870, a comunidade matemática passou por revisões que questionaram conceitos previamente considerados evidentes. Nesse contexto, surgiram exemplos que contradiziam o Princípio de Dirichlet, levando à necessidade de uma correção. A solução veio com a teoria dos espaços de Sobolev, desenvolvida por Sergei Sobolev. Esses espaços oferecem uma estrutura matemática elegante, estendendo o conceito de derivadas para além das funções suaves, permitindo a análise de funções com derivadas fracas ou mesmo distribucionais.

Os espaços de Sobolev, por sua vez, desempenham um papel fundamental na análise matemática, encontrando aplicação em diversas áreas, desde a teoria de equações diferenciais parciais até a otimização e a geometria diferencial. Este trabalho visa fazer uma exploração profunda dessa teoria, utilizando referências como (PONCE, 2009), (EVANS, 2010), (FOLLAND, 1999), (BARTLE, 1995), (BREZIS, 2010), (WILLEM, 2013), e (STRUWE, 2008).

Esse trabalho teve como enfoque principal a resolução de Equações Diferenciais Parciais, destacando o Teorema de Lax-Milgram, Alternativa de Fredholm e a aplicação dos espaços de Sobolev na análise de um problema específico. O objetivo final é adquirir uma compreensão sólida e abrangente, permitindo a obtenção de resultados analíticos robustos para enfrentar desafios na resolução prática de problemas envolvendo equações diferenciais parciais.

Palavras-chave: Cálculo Variacional. Equações Diferenciais Parciais. EDPs Lineares. Laplaciano. Teoria do Potencial.

ABSTRACT

In 1856, Riemann introduced the Dirichlet Principle as an innovative approach to the Dirichlet Problem, proposing a treatment based on a variational problem. Essentially, this principle aimed to minimize an energy functional within a class of admissible functions. Despite its inaccuracies, the Dirichlet Principle was embraced by renowned mathematicians, including Riemann himself, as evidenced in its application in proving the Conformal Mapping Theorem.

However, around 1870, the mathematical community underwent revisions that questioned previously considered evident concepts. In this context, examples arose that contradicted the Dirichlet Principle, leading to the need for correction. The solution came with the theory of Sobolev spaces, developed by Sergei Sobolev. These spaces provide an elegant mathematical structure, extending the concept of derivatives beyond smooth functions, allowing for the analysis of functions with weak or even distributional derivatives.

Sobolev spaces, in turn, play a fundamental role in mathematical analysis, finding applications in various areas, from the theory of partial differential equations to optimization and differential geometry. This work aims to delve deeply into this theory, using references such as (PONCE, 2009), (EVANS, 2010), (FOLLAND, 1999), (BARTLE, 1995), (BREZIS, 2010), (WILLEM, 2013), and (STRUWE, 2008).

The main focus of this work was the resolution of partial differential equations, highlighting the Lax-Milgram Theorem, Fredholm's Alternative, and the application of Sobolev spaces in the analysis of a specific problem. The ultimate goal is to acquire a solid and comprehensive understanding, enabling the attainment of robust analytical results to address challenges in the practical resolution of problems involving partial differential equations.

Keywords: Variational Calculus. Partial Differential Equations. Linear PDEs. Laplacian. Potential Theory.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 NOÇÕES PRELIMINARES

Antes de dar início ao estudo das ferramentas da análise moderna que estamos interessados, definiremos algumas notações específicas e conceitos preliminares, que auxiliam na compreensão do tema.

Ao longo deste trabalho, as seguintes notações serão utilizadas:

Multi-índices

a) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é o multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

b) $\alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i, \forall 0 \leq i \leq n$.

c) $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$.

d) $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\ldots\binom{\alpha_n}{\beta_n} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

e) $D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n} f$.

Análise Funcional

a) Seja X um espaço vetorial. Uma função $\|\cdot\|_X : X \to [0,\infty)$ é dita uma norma em X se satisfaz

   (i) $\|\lambda u\|_X = |\lambda|\,\|u\|_X$ para todos $u \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;

   (ii) $\|u\|_X = 0$ se, e somente se, $u = 0$;

   (iii) $\|u+v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X$ para todos $u, v \in X$.

   O par $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado espaço normado.

b) Denotaremos por $\text{dist}(x_0, Y) = \inf\{\|y - x_0\|_X \mid y \in Y\}$ a distância entre $x_0 \in X$ e o subconjunto $Y \subset X$.

c) Dizemos que uma sequência $(u_n)_{n\geq 1} \subset X$ converge para $u \in X$ se

$$\lim_{k\to\infty} \|u_n - u\|_X = 0.$$

   Neste caso, denotamos por $u_n \to u$ e, quando necessário, será destacado em qual espaço essa convergência ocorre, isto é, escreveremos $u_n \to u$ em X.

d) Uma sequência $(u_n)_{n\geq 1} \subset X$ é chamada sequência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_X < \varepsilon \text{ para todos } m, n \geq N.$$

e) Um espaço normado X é dito completo se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X. Isto é, se $(u_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em X, então existe $u \in X$ tal que $u_n \to u$.

f) Dizemos que X é um espaço de Banach se for um espaço normado completo.

g) Dado X um espaço de Banach, denotaremos por X' o espaço dual de X, isto é, o espaço de todos os funcionais lineares definidos em X cuja norma é dada por

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|, \quad f \in X'.$$

h) O espaço bidual de X, denotado por X'', é o espaço dual de X', cuja norma é dada por

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{\substack{f\in X' \\ \|f\|\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle|, \quad \xi \in X''.$$

i) Existe uma injeção canônica $J : X \to X''$ dada por

$$\langle Jx, f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X',X}, \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X'.$$

j) Dizemos que um espaço de Banach X é reflexivo quando a injeção canônica em seu bidual é sobrejetiva.

k) Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em X. Dizemos que (x_n) converge fracamente para x em X, e denotamos por $x_n \rightharpoonup x$, se para todo funcional linear $f \in X'$ tem-se que $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

l) Sejam X um espaço de Banach e $M \subset X$. Dizemos que M é fracamente fechado em X se toda sequência fracamente convergente em X, converge para um elemento de M.

m) Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i\in I} \subset H$ é uma base de Hilbert para H se

  (i) $\mathcal{B}$ é ortonormal, ou seja, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\|e_i\| = 1$ para todo $i \in I$;

  (ii) $\overline{\text{Ger}(\mathcal{B})} = H$, onde $\text{Ger}(\mathcal{B})$ denota o subespaço gerado por $\mathcal{B}$.

n) Sejam X, Y espaços vetoriais. Uma aplicação $T : X \to Y$ é uma transformação linear se

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v),$$

para todos $u, v \in X$ e $\lambda, \mu \in R$.

o) Uma transformação linear $T : X \to Y$ é limitada, ou contínua, se

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|Tu\|_Y < \infty.$$

p) Quando $X = Y$, dizemos que uma transformação linear $T : X \to Y$ é um operador linear.

Conjuntos

a) $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ é o semi-espaço aberto superior.

b) Quando conveniente, denotaremos o ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x', x_n)$, onde $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

c) A fronteira de Ω em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $\partial\Omega$, formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que toda bola aberta de centro x contém pelo menos um ponto de Ω e um ponto do complementar $\mathbb{R}^n - \Omega$.

d) $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ é o fecho de Ω.

e) Dizemos que V está *compactamente contido* em Ω, o que denotaremos por $V \subset\subset \Omega$, se $V \subset \overline{V} \subset \Omega$ e $\overline{V}$ é compacto.

f) $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ é a bola aberta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$.

g) $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| \leq r\}$ é a bola fechada de centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$.

h) $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid u$ é k vezes continuamente diferenciável$\}$.

i) $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid u$ é Lebesgue mensurável, $|u|_p < +\infty\}$ onde

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

e

$$|u|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R} \mid \mu(\{|u(x)| > C\}) = 0\},$$

sendo μ a medida definida em Ω.

j) $L^p_{loc}(\Omega)$ denota o espaço das funções que são $L^p(\Omega)$ integráveis localmente, isto é, $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para todo $V \subset \Omega$ com V compacto, temos que $u \in L^p(V)$.

Cálculo

a) O suporte de uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ será denotado por

$$\text{supt}(u) = \overline{\Omega \setminus \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}}.$$

b) $C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid u \text{ tem suporte compacto}\}$.

c) Dizemos que duas funções são iguais qtp, quando são iguais a menos de um conjunto de medida nula.

d) Sejam f e g funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. Definimos sua convolução a função $f * g$ dada por

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

para todo x tal que a integral acima existe.

e) Denotaremos por $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ou u_{x_i} a derivada parcial de u com respeito a variável x_i.

f) ∇u é o gradiente de u, dado por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}).$$

g) Δu é o Laplaciano de u, dado por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}.$$

h) Denotaremos a média da função f por

$$⨍_E f\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,\mathrm{d}\mu,$$

onde $\mu(E)$ é a medida do conjunto E.

i) (Propriedade da Média) Se $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica, então

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u\,\mathrm{d}S = ⨍_{B(x,r)} u\,\mathrm{d}y,$$

para cada bola $B(x,r) \subset \Omega$.

2 INTRODUÇÃO

Por volta de 1856, surgia uma nova abordagem do Problema de Dirichlet, a qual foi denominada por Riemann de Princípio de Dirichlet, para homenagear seu antigo mestre. A ideia do princípio consistia em transformar o problema original em um problema variacional de determinar uma função que fosse minimizante do funcional de energia

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \,\mathrm{dx},$$

sobre $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e com a restrição $u = f$ sobre a fronteira de Ω. Na contemporaneidade matemática, surgem invariavelmente indagações quando se trata de minimizar algo: existe de fato um mínimo? Se sim, ele é alcançado? É finito? E o que exatamente está sendo minimizado? O espaço considerado permite tal abordagem?

Entretanto, àquela época, essas inquietações não afloraram, levando diversos matemáticos renomados, inclusive Riemann, a empregarem essa ideia mesmo com suas imprecisões. Por exemplo, Riemann utilizou o princípio na demonstração do Teorema da Aplicação Conforme.

Somente por volta de 1870 é que a matemática adentrou um período de revisões instigado por Weierstrass, no qual várias noções tidas como evidentes foram submetidas a questionamentos. Nesse contexto, emergiram problemas graves que a intuição não podia simplesmente resolver. Foi nesse cenário que exemplos contrários ao Princípio de Dirichlet foram apresentados, os quais analisaremos com maior rigor no terceiro capítulo.

Mas, como foi possível corrigir essas lacunas no Princípio de Dirichlet? Nesse contexto emergiu a teoria dos espaços de Sobolev, uma classe de espaços funcionais que desempenham um papel de extrema importância na análise matemática, especialmente na teoria de equações diferenciais parciais e na análise de funções com distintos níveis de regularidade. Foram concebidos pelo matemático russo Sergei Sobolev (1908 – 1989), representando uma abordagem elegante para expandir o conceito de derivadas além das funções clássicas suaves.

Em muitos cenários matemáticos e físicos, as funções que emergem como soluções de equações diferenciais ou que modelam fenômenos naturais não apresentam diferenciabilidade de maneira tradicional. Os espaços de Sobolev surgiram para abordar essa realidade, permitindo a análise de funções que exibem derivadas fracas ou até mesmo distribucionais.

Essa abordagem encontra ampla aplicação em variadas esferas da matemática e física, abrangendo análise funcional, teoria de equações diferenciais parciais, otimização, geometria diferencial, mecânica dos fluidos, entre outras. Consequentemente, os espaços de Sobolev se configuram como ferramentas inestimáveis para a compreensão e resolução de problemas em diversos campos, onde a regularidade das funções se coloca como um ponto central.

Dada a indiscutível importância desses conceitos, nos empenharemos no restante deste trabalho para uma exploração profunda dessa teoria. Nosso objetivo é adquirir uma compreensão abrangente e sólida, permitindo-nos obter resultados de grande poder analítico para a resolução de Equações Diferenciais Parciais.

Em suma, é importante enfatizar as referências que nortearam o desenvolvimento desta monografia. No primeiro capítulo, destacamos algumas notações e definições relevantes, após isso, nos baseamos em (PONCE, 2009) para a exploração do Princípio de Dirichlet e dos exemplos de sua invalidez, que corresponde ao capítulo 3. Posteriormente, no capítulo 4, passamos para o estudo dos Espaços de Sobolev utilizando (EVANS, 2010), e fazendo complementações com (FOLLAND, 1999) e (BARTLE, 1995) para revisitar resultados de Análise e Teoria da Medida.

Após todo o embasamento teórico sobre os Espaços de Sobolev, nos voltaremos para teorias poderosas da Análise no estudo de EDP's. No capítulo 5, revisitaremos o Problema de Dirichlet, exibindo o tratamento dado por Hilbert para obter soluções, tendo por base (PONCE, 2009, Cap. 5). Em seguida, estabeleceremos o Teorema de Lax-Milgram, fazendo um breve estudo dos autovalores do operador laplaciano, Teorema de Minimização de Funcionais e a Alternativa de Fredholm, os quais serão aplicados, no capítulo seguinte, ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para a abordagem desses resultados, foram utilizados (BREZIS, 2010, Cap. 5), (WILLEM, 2013, Cap. 8, Sec. 2), (STRUWE, 2008, Cap. 1) e (BREZIS, 2010, Cap. 6), respectivamente.

3 PRINCÍPIO DE DIRICHLET: OS PRIMÓRDIOS

Contamos com a referência (PONCE, 2009) como base para estudar o renomado Princípio de Dirichlet. Esse princípio se resumia, essencialmente, como um método para abordar a resolução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= f \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

A ideia era transformar a EDP acima no problema variacional de obter uma função que minimiza o funcional

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{dx},$$

sobre $C^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, com a restrição $u = f$ sobre $\partial\Omega$.

Por meio de uma integração por partes, é possível verificar que as duas abordagens são correspondentes. Dessa forma, teríamos uma maneira bem elegante de obter solução para o problema, desde que as seguintes condições fossem verdadeiras

a) O ínfimo de $\mathcal{I}$ é finito;

b) Existe uma função $u_0 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ com $u_0 = f$ sobre $\partial\Omega$ de forma que $\mathcal{I}(u_0)$ seja mínima;

c) A função que minimiza a integral $\mathcal{I}$ é de classe $C^2(\Omega)$.

No entanto, essas três condições passaram despercebidas aos olhos de diversos matemáticos da época. Foi quando Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), por volta de 1870, liderou um movimento na Matemática onde vários problemas como esse seriam apontados e contestados.

Nesse contexto, foram apresentados alguns exemplos que explicitam a invalidez do Princípio de Dirichlet. Começaremos com um breve passeio por tais exemplos, temos então

Exemplo 3.1 (Weierstrass)**.** Dada $u \in C^1([-1,1])$, seja

$$\mathcal{I}(u) = \int_{-1}^{1} \left[x \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}(x) \right]^2 \mathrm{dx}\,.$$

Então,

$$\inf \left\{ \mathcal{I}(u) : u \in C^1([-1,1]), u(-1) = a \text{ e } u(1) = b \right\} = 0,$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Em particular, o ínfimo é atingido se, e somente se, $a = b$.

Demonstração. Defina a função

$$u_\varepsilon(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Então, temos que $u_\varepsilon \in C^1([-1,1])$, ou seja, é uma função admissível já que

$$\frac{du_\varepsilon}{dx} = \frac{b-a}{2\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\left(\arctan'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \frac{b-a}{2\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2} \in C([-1,1]).$$

Assim,

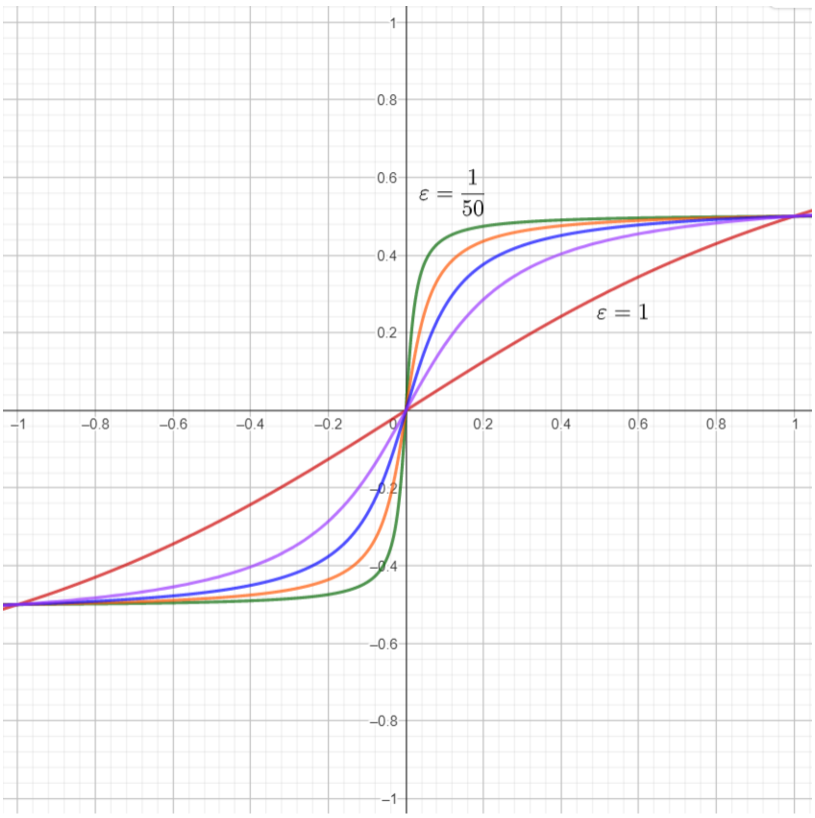
$$\begin{aligned}\mathcal{I}(u_\varepsilon) &= \int_{-1}^{1} x^2\left[\frac{du_\varepsilon}{dx}(x)\right]^2 dx \leq \int_{-1}^{1}(x^2+\varepsilon^2)\left[\frac{b-a}{2\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}\right]^2 dx\\ &= \frac{\varepsilon(b-a)^2}{4\arctan^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}dx = \frac{\varepsilon(b-a)}{2\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.\end{aligned}$$

Além disso, notemos que

$$\mathcal{I}(u) = 0 \iff \frac{du}{dx}(x) = 0, \forall x \in [-1,1] \iff u(x) = c,$$

com c uma constante. Logo, $\mathcal{I}(u) = 0$ se, e somente se, $u(1) = b = c = a = u(-1)$, ou ainda $a = b$. Isso conclui a demonstração. □

Figura 3.1 – Alguns elementos da família u_ε com $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $\varepsilon = 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{50}$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na figura 3.1 podemos visualizar alguns elementos da família de funções u_ε. Embora o exemplo apresentado por Weierstrass tenha sido suficiente para invalidar o Princípio de Dirichlet, ainda poderia haver mais inconsistências. Outra destas, fora explicitada pelo exemplo do matemático Friedrich Emil Prym (1841 – 1915) por volta de 1871, o qual encontrou uma função que satisfazia $\mathcal{I}(u) = \infty$. De maneira mais precisa,

Exemplo 3.2 (Prym)**.** Seja $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ o disco unitário. Existe uma função harmônica u_0 em $C^\infty(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ tal que

$$\mathcal{I}(u_0) = \int_{B_1} |\nabla u_0|^2 \, dx = \infty.$$

Demonstração. Dado $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, consideremos $\ln z = \ln(\rho) + i\varphi$ com $-\pi < \varphi < \pi$. Isto é, estamos fixando um ramo da função $\ln(z)$ da qual excluímos os números reais não positivos. Definindo a função $u + iv = i\sqrt{-\ln(R + x + iy)}$ com $R > 0$ uma constante a ser escolhida, mostraremos que sua parte harmônica satisfaz o enunciado. Temos que $u + iv$ é analítica, poia é uma composição de funções analíticas, e está bem definida para todo número complexo, exceto quando $z = x \in \mathbb{R}$ e $x \leq -R$, já que

– Se $y \neq 0$, então $\operatorname{Im}(R + x + iy) = y \neq 0$ e logo $R + x + iy \in \operatorname{Dom}(\ln)$;

– Se $y = 0$, então $R + x + iy \in \operatorname{Dom}(\ln)$ se, e somente se, $x > -R$.

Assim, vamos supor que $R < \frac{1}{2}$ e considerar Ω o semicírculo fechado de centro $-R$ e raio $2R$, que pode ser parametrizado por

$$\begin{cases} x + R &= \rho\cos\varphi, \quad 0 \leq \rho \leq 2R \\ y &= \rho\sin\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Neste caso,

$$-\ln(R + x + iy) = -\ln\rho - i\varphi,$$

que escrevemos na forma exponencial como

$$-\sqrt{\ln^2\rho + \varphi^2}\, e^{i\arctan\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right)},$$

já que $|-\ln\rho - i\varphi| = \sqrt{\ln^2\rho + \varphi^2}$ e seu argumento é $\arctan\left(\dfrac{\varphi}{\ln\rho}\right)$, como podemos visualizar no triângulo da Figura 3.2. Obtemos então as seguintes expressões para u e v

$$u(\rho,\varphi) = \left(\ln^2\rho + \varphi^2\right)^{\frac{1}{4}} \sin\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right]$$
$$v(\rho,\varphi) = -\left(\ln^2\rho + \varphi^2\right)^{\frac{1}{4}} \cos\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right].$$

Estudaremos agora o que ocorre com a função u em $\partial\Omega$, verificando que $h(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi)$ é a função desejada. Defina as funções

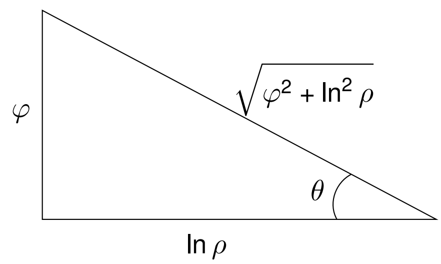
$$\tilde{\xi}(\rho,\varphi) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{u}(\xi,\varphi) = \left(\frac{\varphi^2}{\sin^2 2\xi}\right)^{\frac{1}{4}} \sin\xi.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{u}\left(\tilde{\xi}(\rho,\varphi),\varphi\right) &= \left(\frac{\varphi^2}{\sin^2\left(\arctan\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{4}} \sin\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right]\\ &= \left(\ln^2\rho + \varphi^2\right)^{\frac{1}{4}} \sin\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right],\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos trigonometria no triângulo da figura 3.2

Figura 3.2 – Triângulo Retângulo de apoio.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Agora note que

- $\lim\limits_{\rho\to 0} \tilde{\xi}(\rho,\varphi) = \lim\limits_{\rho\to 0} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right) = 0,$
- $\lim\limits_{\xi\to 0} \tilde{u}(\xi,\varphi) = \lim\limits_{\xi\to 0} \left(\frac{\varphi^2}{\sin^2 2\xi}\right)^{\frac{1}{4}} \sin\xi = \lim\limits_{\xi\to 0} \left(\frac{\varphi^2}{4\cos^2\xi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\sin\xi}{\sqrt{|\sin\xi|}} = 0,$

para todo $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Então,

$$\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to\varphi_0}} u(\rho,\varphi) = 0, \forall\varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

portanto, u é harmônica, dado que é parte real de uma função holomorfa, e pode ser estendida continuamente até a fronteira $\partial\Omega$ do semicírculo.

Por outro lado, calculando as derivadas parciais u, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{2}\left(\ln^2\rho + \varphi^2\right)^{-\frac{3}{4}} \left\{ \dfrac{\ln\rho}{\rho} \sin\left[\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right] - \dfrac{\varphi}{\rho}\cos\left[\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right]\right\}; \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{2}\left(\ln^2\rho + \varphi^2\right)^{-\frac{3}{4}} \left\{ \varphi \sin\left[\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right] + \ln\rho\cos\left[\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{\varphi}{\ln\rho}\right)\right]\right\}. \end{cases}$$

Fixando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, calculamos a integral de Dirichlet no domínio $\Omega^\varepsilon = \Omega - B(-R, \varepsilon)$ para obter

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon(u) &= \int_\varepsilon^{2R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_\varepsilon^{2R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\rho}\left(\ln^2\rho + \varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^{2R}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\ln^2\rho + \varphi^2}}. \end{aligned}$$

Como $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, temos que $|\varphi| \leq 2$, e assim

$$\mathcal{I}_\varepsilon(u) \geq \frac{1}{2}\int_\varepsilon^{2R}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\ln^2\rho + 4}} = \frac{\pi}{4}\int_\varepsilon^{2R}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\sqrt{\ln^2\rho + 4}}.$$

Fazendo a mudança de variável $v = \ln\rho$, temos

$$\mathcal{I}_\varepsilon(u) \geq \frac{\pi}{4}\int_{\ln\varepsilon}^{\ln 2R}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+4}},$$

e nesta última integral, fazendo $x = \dfrac{1}{2}v$, obtemos

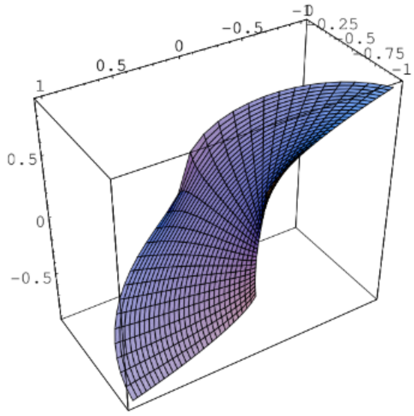
$$\mathcal{I}_\varepsilon(u) \geq \frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{2}\ln\varepsilon}^{\frac{1}{2}\ln 2R}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Resolvendo, segue que

$$\mathcal{I}_\varepsilon(u) \geq \frac{\pi}{4}\left\{\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{2}\ln 2R\right) - \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{2}\ln\varepsilon\right)\right\} \overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \infty,$$

pois $\dfrac{1}{2}\ln\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ implica que $\operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{1}{2}\ln\varepsilon\right) \overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$. Isso conclui a demonstração. $\square$

Figura 3.3 – Exemplo de Prym.



Fonte: (PONCE, 2009, Pág. 72)

Embora esses dois exemplos já haviam deixado claro que o Princípio era inválido, Jacques Salomon Hadamard (1865 – 1963) apresentou uma construção por meio de séries de Fourier (HADAMARD, 1906) que também exibia um erro na ideia, temos

Exemplo 3.3 (Hadamard)**.** Seja $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ a bola unitária. Então, existe uma função harmônica

$$u : B(0,1) \to \mathbb{R}^2$$

tal que

$$\mathcal{I}(u) = \int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 \,\mathrm{dx} = \infty.$$

Demonstração. Considerando a expressão do laplaciano em coordenadas polares,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta},$$

podemos aplicar o método de separação de variáveis. Com isso, obtemos o seguinte candidato à solução clássica para o Problema de Dirichlet com condição de contorno $f(\theta)$,

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

sendo a_k e b_k os coeficientes de Fourier dados por

$$\begin{cases} a_k &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta \, \mathrm{d}\theta, \\[2ex] b_k &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta \, \mathrm{d}\theta \, . \end{cases}$$

Derivando termo a termo, obtemos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k}(-a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta). \end{cases}$$

Logo, substituindo na expressão da integral de Dirichlet em $B(0,\rho)$ com $\rho < 1$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\rho)} |\nabla u|^2 \, \mathrm{dx} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 \right\} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{2k-1}(a_k^2 + b_k^2) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{2k}(a_k^2 + b_k^2) \, \mathrm{d}\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{2k}(a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Assim, fazendo $\rho \to 1$, temos

$$\mathcal{I}(u) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2).$$

Escolhemos a_k e b_k para que

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

seja absolutamente convergente. Para isso, basta tomar $a_k = 0$ e

$$b_k = \begin{cases} 0, & se \quad k \neq 2^{2n}, \\ \dfrac{1}{2^n}, & se \quad k = 2^{2n} \end{cases}$$

Com isso, teremos que

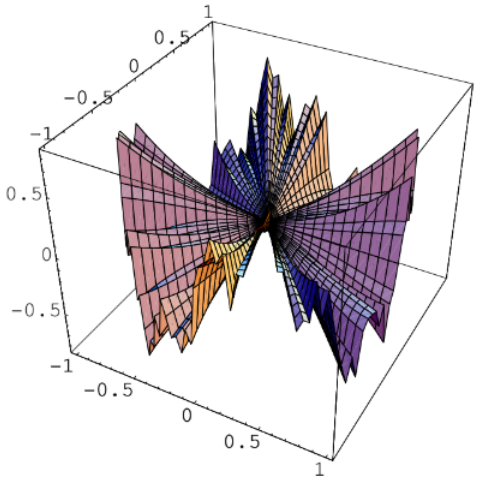
$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 2^{2n}\theta,$$

é contínua, mas

$$\mathcal{I}(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

$\square$

Figura 3.4 – Exemplo de Hadamard.



Fonte: (PONCE, 2009, Pág. 75)

Através desses exemplos e visando contornar essas inconsistências no princípio de Dirichlet, estamos motivados para estudar os espaços de Sobolev, que serão peças fundamentais para chegar a um método que resolva o problema de Dirichlet da maneira precisa.

4 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Antes de dar início ao estudo dos espaços de Sobolev, apresentaremos a definição dos Espaços de Hölder.

4.1 ESPAÇOS DE HÖLDER

A motivação para isso é a classe das funções Lipschitz contínuas. Assumimos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $0 < \gamma \leq 1$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Então, dizemos que u é Lipschitz contínua se satisfaz

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega$$

para alguma constante $C > 0$. Agora, se u satisfaz a seguinte variação da desigualdade anterior

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\gamma}, \quad \forall x, y \in \Omega,$$

para algum $0 < \gamma \leq 1$ e $C > 0$, dizemos que u é *Hölder contínua com expoente* γ. Em linhas gerais, estamos construindo um espaço de funções entre $C^0(\Omega)$ e $C^1(\Omega)$. Temos então a

Definição 4.1. (i) Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Definimos

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

(ii) A γ-ésima semi-norma de Hölder de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é definida por

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \right\}$$

e a γ-ésima norma de Hölder é

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Assim, temos a seguinte definição

Definição 4.2. O Espaço de Hölder

$$C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$$

consiste de todas as funções $u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ para as quais

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^{\alpha}u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty. \tag{4.1}$$

Podemos descrever o espaço de Hölder como o conjunto das funções u que são k vezes continuamente diferenciáveis e cujas derivadas são limitadas e Hölder contínuas com expoente γ. O próximo teorema nos mostra que tais espaços são bem comportados, possuindo uma boa estrutura matemática.

Teorema 4.1. *O espaço de funções $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Como $\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$, sendo $\|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})}$ uma norma e $[\cdot]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$ semi-norma, sabemos que $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$ possui imediatamente três dentre as quatro propriedades da definição de norma, bastando apenas verificar que $\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Mas isso segue diretamente da definição da norma em $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, já que

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = 0 \iff \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = 0 \iff \begin{cases} \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} = 0, \\ \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = 0. \end{cases}$$

E isso ocorre se, e somente se, $u \equiv 0$. Portanto, $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})}$ é uma norma. Resta provar que $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ converge para algum elemento nesse espaço. De fato, seja $(u_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de Cauchy em $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$. Como a norma é dada pela soma da norma em $C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)$ com a semi-norma de Hölder, sabemos que existe $u \in C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } C^{k}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Queremos provar que $u_n \to u$ em $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ e, para isto, vamos analisar a parte da semi-norma. Fixe um multi-índice α com $|\alpha| = k$ e defina

$$v = D^\alpha u \quad \text{e} \quad v_n = D^\alpha u_n.$$

Então, para $x \neq y$ fixado, temos

$$\begin{aligned} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} &= \frac{|v(x) - v_m(x) + v_m(x) - v_m(y) + v_m(y) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq \frac{|v(x) - v_m(x)|}{|x-y|^\gamma} + \frac{|v_m(x) - v_m(y)|}{|x-y|^\gamma} + \frac{|v_m(y) - v(y)|}{|x-y|^\gamma}, \; m \geq 1. \end{aligned}$$

Agora observe que na expressão obtida, o primeiro e terceiro termos convergem a 0 quando $m \to \infty$, já que $v_m \to v$ uniformemente. Além disso, o segundo termo é limitado, pois (u_n) é uma sequência de Cauchy. Logo, existe uma constante $M_\alpha > 0$ dependendo somente de α tal que

$$\frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \leq M_\alpha \Rightarrow [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \leq M_\alpha < \infty \Rightarrow u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Resta provar que $u_n \to u$ em $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Pela construção de u, sabemos que $u_n \to u$ em $C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)$, então basta verificar a convergência na semi-norma de Hölder. Como (u_n) é de Cauchy na norma de Hölder, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, \ell \geq N$, temos

$$|v_m - v_\ell|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{|(v - v_m)(x) - (v - v_m)(y)|}{|x-y|^\gamma} &= \frac{|v(x) - v_m(x) - v(y) + v_m(y)|}{|x-y|^\gamma} = \frac{|(\lim_{k\to\infty} v_k(x)) - v_m(x) - (\lim_{k\to\infty} v_k(y)) + v_m(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{|v_k(x) - v_m(x) - v_k(y) + v_m(y)|}{|x-y|^\gamma} = \lim_{k\to\infty} \frac{|(v_k - v_m)(x) - (v_k - v_m)(y)|}{|x-y|^\gamma} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto, $v_n \to v$ na semi-norma de Hölder. Como isso vale para todo multi-índice α com $|\alpha| = k$ e existe uma quantidade finita desses multi-índices, concluímos que

$$u_n \to u \text{ em } C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Logo, $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ é completo e, portanto, um espaço de Banach. □

Uma pergunta que pode surgir é: que tipo de funções estão nesses espaços de Hölder? O próximo exemplo apresenta uma ideia disso.

Exemplo 4.1. Existe γ de modo que a função $u(x) = |x|^\alpha$, onde $\Omega = (-1, 1)$, esteja no espaço $C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração. Para isto, devemos estudar quando a seminorma de Hölder de u é finita. Temos os seguintes casos a considerar:

– Caso 1: se $x \neq 0$ e $y = 0$, então

$$\frac{||x|^\alpha - |0|^\alpha|}{|x-0|^\gamma} = \frac{|x|^\alpha}{|x|^\gamma} = |x|^{\alpha-\gamma} \leq 1,$$

se $\alpha - \gamma \geq 0$, ou seja, $\alpha \geq \gamma$.

– Caso 2: se $x = 0$ e $y \neq 0$, procedemos como no caso anterior, obtendo novamente que $\alpha \geq \gamma$.

– Caso 3: se $x, y \neq 0$ com $x < 0 < y$, então

$$\begin{aligned}\frac{||x|^\alpha - |y|^\alpha|}{|x-y|^\gamma} &= \frac{\left|\left(|x|^\alpha - |0|^\alpha\right) + \left(|0|^\alpha - |y|^\alpha\right)\right|}{|x-y|^\gamma} \leq \frac{||x|^\alpha - |0|^\alpha|}{|x-y|^\gamma} + \frac{||y|^\alpha - |0|^\alpha|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq \frac{||x|^\alpha - |0|^\alpha|}{|x-0|^\gamma} + \frac{||y|^\alpha - |0|^\alpha|}{|y-0|^\gamma} \leq 2,\end{aligned}$$

se $\alpha - \gamma \geq 0$, ou seja, $\alpha \geq \gamma$.

– Caso 4: se $x, y \neq 0$ com $y < 0 < x$, procedemos como no caso anterior, obtendo novamente que $\alpha \geq \gamma$.

– Caso 5: se $x, y > 0$ ou $x, y < 0$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe ξ entre x e y tal que

$$\frac{||x|^\alpha - |y|^\alpha|}{|x-y|^\gamma} \leq \frac{|\alpha\xi|\xi|^{\alpha-2}| \cdot |x-y|}{|x-y|^\gamma} = \alpha|\xi|^{\alpha-1}|x-y|^{1-\gamma} \leq \alpha|x-y|^{1-\gamma} \leq \alpha,$$

se $1-\gamma \geq 0$, ou seja, $\gamma \leq 1$.

Portanto, pela análise acima, concluímos que $|x|^\alpha \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ para todo $\gamma \leq \min\{1, \alpha\}$. Em geral, $|x|^\alpha \in C^{\lfloor\alpha\rfloor, \alpha - \lfloor\alpha\rfloor}\left(\overline{\Omega}\right)$. □

Entraremos agora na análise dos espaços de Sobolev. Para tal, iniciaremos nossa investigação sobre o conceito de Derivada Fraca, o qual terá um papel de destaque daqui para frente.

4.2 DERIVADA FRACAS

Denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente continuamente diferenciáveis $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em Ω (também chamadas de funções teste), onde o suporte de ϕ é o conjunto

$$\text{supt}(\phi) = \overline{\Omega \setminus \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}}.$$

Vejamos um exemplo de função teste não nula,

Exemplo 4.2. Defina $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Verificaremos que ϕ é uma função teste. De fato, note que $\text{supt}(\phi) \subset \overline{B}(0,1)$, logo é limitado e, por definição, $\text{supt}(\phi)$ é fechado. Portanto, temos que $\text{supt}(\phi)$ é compacto. Além disso, temos que $\phi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$, vide (HORMANDER, 1983, Lema 1.2.3, Pág. 14) para mais detalhes. Concluímos assim que $\phi \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$

Nosso objetivo agora é definir a derivada fraca de uma função, mas antes observemos a motivação para isso.

Assuma que é dada uma função $u \in C^1(\Omega)$. Então, tomando uma função teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, para todo $i \geq 1$, segue da fórmula de integração por partes (também conhecida como Segunda Identidade de Green ou Segunda Fórmula de Green) que

$$\int_\Omega u\phi_{x_i}\, \text{dx} = -\int_\Omega u_{x_i}\phi\, \text{dx}\,.$$

Observe que o termo da fronteira não aparece na expressão acima, pois ϕ é nula em $\partial\Omega$. Generalizando um pouco, consideremos para $k > 0$, uma função $u \in C^k(\Omega)$ e um multi-índice

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi \, dx, \tag{4.2}$$

sendo

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi.$$

Analisando a expressão (4.2), vemos que isso é válido para $u \in C^k(\Omega)$, mas será que para alguma variação isso pode continuar sendo válido? Que condições devemos pedir a respeito de u para que (4.2) faça sentido? Isso é o que diz a

Definição 4.3 (Derivada Fraca)**.** Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α-ésima derivada fraca de u (ou α-ésima derivada de u no sentido fraco) se

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx, \tag{4.3}$$

para toda função teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Neste caso, denotamos $v = D^\alpha u$.

Se não existe uma função v que satisfaz (4.3), então dizemos que u não possui derivada α-ésima no sentido fraco. Como é de costume na matemática, devemos verificar se esta é uma boa definição que, nesse caso, corresponde a garantir a unicidade de $D^\alpha u$. Temos então

Lema 4.1 (Unicidade da Derivada Fraca)**.** *Uma derivada fraca de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, caso exista, é única a menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Suponha que $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ sejam derivadas fracas de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v} \phi \, dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então,

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v} \phi \, dx \iff \int_\Omega v \phi \, dx - \int_\Omega \tilde{v} \phi \, dx = 0 \iff \int_\Omega (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e, portanto, $v - \tilde{v} = 0$ qtp, segundo (BRÉZIS, 1983, Lema IV.2, Pág.61-61). $\square$

No próximo exemplo, apresentamos uma função que não é derivável no sentido clássico, mas possui derivada no sentido fraco.

Exemplo 4.3. Sejam $n = 1$, $\Omega = (0, 2)$ e

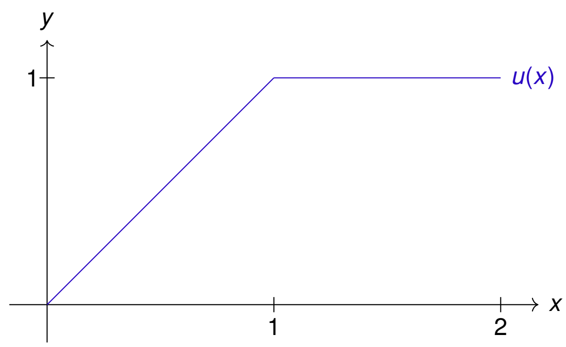
$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{se} \quad 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Defina

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

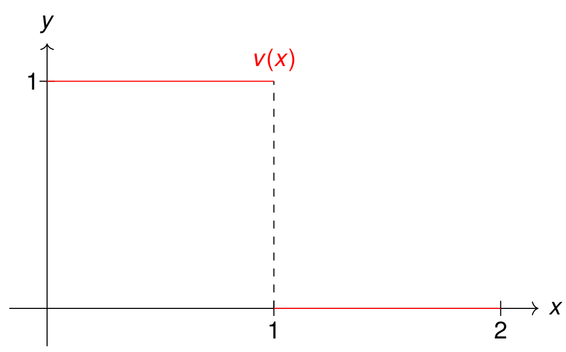
Então, $u' = v$ no sentido fraco.

Figura 4.1 – Gráfico da função $u(x)$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 4.2 – Gráfico da função $v(x)$



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Demonstração. Escolha $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então, temos que

$$\int_0^2 u\phi'\,\mathrm{dx} = \int_0^1 x\phi'\,\mathrm{dx} + \int_1^2 \phi'\,\mathrm{dx} = \phi(1) - \underbrace{\phi(0)}_{=0} - \int_0^1 \phi\,\mathrm{dx} + \underbrace{\phi(2)}_{=0} - \phi(1) = -\int_0^1 \phi\,\mathrm{dx} = -\int_0^2 v\phi\,\mathrm{dx}\,.$$

Como $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ foi escolhida arbitrariamente, $u' = v$ no sentido fraco. $\square$

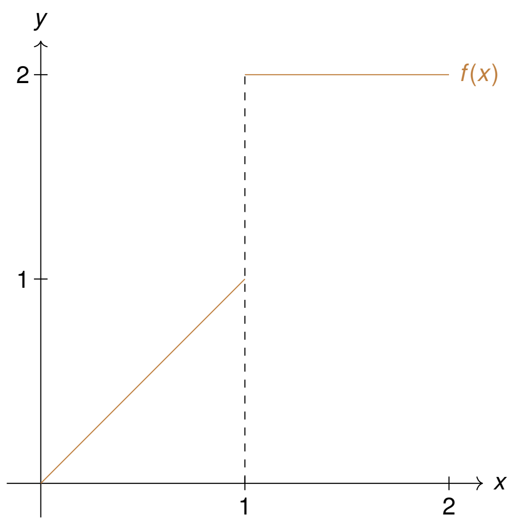
Olhando para a expressão de u do exemplo acima, podemos pensar erroneamente que essa noção de derivada fraca permite "atribuir" uma derivada (no sentido fraco) a qualquer função que se queira. Os próximos dois exemplos deixam claro que isso não é verdade.

Exemplo 4.4. Sejam $n = 1$, $\Omega = (0, 2)$ e

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad 0 < x \leq 1, \\ 2, & \text{se} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Então, f não tem derivada no sentido fraco.

Figura 4.3 – Gráfico da função $f(x)$



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Demonstração. Suponha que existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f' = v$ no sentido fraco. Consideremos uma sequência de funções suaves $(\phi_m)_{m \geq 1}$, que pode ser construída por meio da medida de Dirac concentrada em 1 e de uma convolução, satisfazendo as seguintes propriedades

(i) $0 \leq \phi_m \leq 1$;

(ii) $\phi_m(1) = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$;

(iii) $\phi_m(x) \longrightarrow 0$ quando $m \to \infty$ para todo $x \neq 1$;

(iv) $\text{supt}(\phi_m) \subset \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Assim, utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$1 = \lim_{m\to\infty} \phi_m(1) = \lim_{m\to\infty} \left[\int_0^2 v\phi_m \, dx - \int_0^1 \phi_m \, dx \right] = \int_0^2 \lim_{m\to\infty} v\phi_m \, dx - \int_0^1 \lim_{m\to\infty} \phi_m \, dx = 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, não existe v que seja derivada fraca de f. □

O resultado que utilizamos para obter uma das igualdades na demonstração do exemplo acima, é um importante teorema de Teoria da Medida e Integração, conhecido como Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o qual apenas enunciamos abaixo.

Teorema 4.2 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções integráveis que convergem qtp para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \, .$$

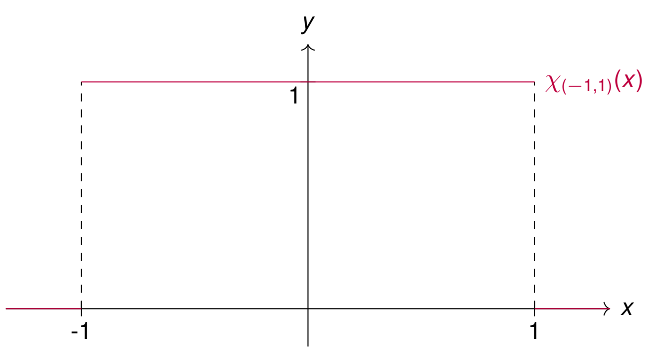
Demonstração. Para uma demonstração detalhada, consultar (BARTLE, 1995, Teo. 5.6, Pág.44-45). □

Agora, temos o segundo exemplo que apresenta uma função bastante conhecida cuja derivada no sentido fraco não existe.

Exemplo 4.5 (Função Característica)**.** Sejam $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ e

$$\chi_{(-1,1)} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \notin (-1,1), \\ 1, & \text{se} \quad x \in (-1,1) \end{cases}$$

Figura 4.4 – Gráfico da função característica $\chi_{(-1,1)}$



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Demonstração. Como essa função é descontínua em -1 e 1, não possui derivada (clássica). No entanto, caso existisse uma derivada no sentido fraco, a candidata seria a função nula. De fato, suponha $x \in (-1, 1)$ e considere uma função teste $\phi \in C_c^\infty([-1, 1])$, então

$$\int_{-1}^{1} \chi_{(-1,1)}\phi' \, dx = \int_{-1}^{1} \phi' \, dx = \phi(1) - \phi(-1) = 0 = \int_{-1}^{1} 0 \cdot \phi \, dx .$$

Logo, $(\chi_{(-1,1)})' = 0$ qtp é a candidata a derivada fraca da característica. Provemos que isso não ocorre.

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma função teste, então temos

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}\phi' \, dx = \int_{-1}^{1} \phi' \, dx = \phi(1) - \phi(-1).$$

Por outro lado, queremos que a definição de derivada fraca seja satisfeita por $v(x) = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}\phi' \, dx = -\int_{\mathbb{R}} 0\phi \, dx = 0.$$

Usando as duas igualdades acima, obtemos que

$$\phi(1) - \phi(-1) = 0, \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) ,$$

o que é um absurdo. Logo, $\chi_{(-1,1)}$ não possui derivada no sentido fraco. □

4.3 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Após todos esses preparativos, podemos finalmente definir o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$,

Definição 4.4. O espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

é definido como o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$, com $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que para cada α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$.

Observação. No caso em que $p = 2$, usualmente denotamos

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

O motivo do uso da letra H é devido ao fato que para $p = 2$, o espaço de Sobolev passa a ser um espaço de Hilbert, isto é, um espaço vetorial com produto interno, o qual é um espaço de Banach referente à norma induzida pelo produto interno. No caso de $H^k(\Omega)$, o produto interno é dado por

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} fg + D^\alpha f \cdot D^\alpha g \, dx .$$

Note que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Além disso, dizemos que duas funções em $W^{k,p}(\Omega)$ são iguais, quando coincidem a menos de um conjunto de medida nula, ou seja, qtp.

Podemos tornar o espaço de Sobolev um espaço vetorial normado, definindo sua norma como abaixo.

Definição 4.5. Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Definimos sua norma por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u|, & \text{se} \quad p = \infty. \end{cases} \tag{4.4}$$

Definição 4.6. Denotamos por

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Apesar de já estar chamando a função acima de norma, não sabemos a princípio que essa expressão define uma norma no espaço de Sobolev. No entanto, faremos a demonstração disso mais a frente e exibiremos um resultado ainda mais forte, que o espaço de Sobolev com a norma dada pela definição anterior é um espaço de Banach.

Vejamos agora um exemplo de função que está em um espaço de Sobolev.

Exemplo 4.6. Sejam $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta unitária, e

$$u(x) = |x|^{-\alpha}, \quad x \neq 0.$$

Para quais valores de $\alpha > 0$, n e p a função u pertence a $W^{1,p}(\Omega)$?

Demonstração. Primeiramente, note que u é suave fora da origem, já que

$$u_{x_i}(x) = -\frac{\alpha}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \cdot 2x_i = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}}, \quad x \neq 0.$$

Logo,

$$|Du(x)| = \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha^2 x_i^2}{|x|^{2\alpha+4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\alpha^2 |x|^2}{|x|^{2\alpha+4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \quad x \neq 0.$$

Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e fixe $\varepsilon > 0$. Então,

$$\int_{\Omega - B(0,\varepsilon)} u\phi_{x_i} \, dx = -\int_{\Omega - B(0,\varepsilon)} u_{x_i}\phi \, dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\phi\nu^i \, dS,$$

onde $\nu = (\nu^1, \ldots, \nu^n)$ denota a normal interior em $\partial B(0,\varepsilon)$. Agora, se $\alpha + 1 < n$, temos que

$|Du(x)| \in L^1(\Omega)$ pois

$$\int_\Omega |u_{x_i}|\,dx \leq |\alpha| \int_\Omega \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\,dx = |\alpha| \int_0^1 \int_{\partial B(0,\rho)} \frac{1}{|\rho\omega|^{\alpha+1}}\,dS\,d\rho = |\alpha| \int_0^1 \int_{\partial B(0,\rho)} \frac{1}{\rho^{\alpha+1}}\,dS\,d\rho\,.$$

Resolvendo a última integral acima, obtemos

$$\int_\Omega |u_{x_i}|\,dx \leq |\alpha|\omega_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha-1}\,d\rho = |\alpha|\omega_n \frac{\rho^{n-1-\alpha}}{n-1-\alpha}\bigg|_0^1 = \frac{|\alpha|\omega_n}{n-1-\alpha} < \infty.$$

Agora, note que

$$\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\phi\nu^i\,dS\right| \leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varepsilon^{-\alpha}\,dS \leq C\varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0.$$

Portanto,

$$\int_\Omega u\phi_{x_i}\,dx = -\int_\Omega u_{x_i}\phi\,dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, desde que $0 \leq \alpha < n-1$. Além disso, $|Du(x)| = \dfrac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(\Omega)$ se, e somente se, $(\alpha+1)p < n$. Consequentemente, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $\alpha < \dfrac{n-p}{p}$. Em particular, $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \geq n$. □

Embora uma função u que pertence a um espaço de Sobolev possua determinadas propriedades de suavidade, ela ainda pode ser mal comportada em outros sentidos.

Nosso intuito agora é verificar propriedades que as derivadas fracas possuem, sendo algumas verdadeiras também para funções suaves, com a noção de derivada clássica.

Teorema 4.3 (Propriedades das Derivadas Fracas)**.** *Sejam $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $|\alpha| \leq k$. Então*

(i) $D^\alpha \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ para todos os multi-índices α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.

(iii) Se V é um subconjunto aberto de Ω, então $u \in W^{k,p}(V)$.

(iv) Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ e vale

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u, \tag{4.5}$$

onde $\dbinom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Observação. A fórmula (4.5) é chamada fórmula de Leibniz.

Demonstração. (*i*) Fixe $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então, $D^\beta\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e

$$\int_\Omega (D^\alpha u)(D^\beta\phi)\,\mathrm{dx} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha(D^\beta\phi)\,\mathrm{dx} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(D^{\alpha+\beta}\phi)\,\mathrm{dx}$$
$$= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_\Omega (D^{\alpha+\beta}u)\phi\,\mathrm{dx} = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega (D^{\alpha+\beta}u)\phi\,\mathrm{dx}\,.$$

Por outro lado, como $D^\alpha u \in W^{j,p}(\Omega)$ para $j \leq k - |\alpha|$, temos

$$\int_\Omega (D^\alpha u)(D^\beta\phi)\,\mathrm{dx} = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\phi\,\mathrm{dx}\,.$$

Assim, segue do Lema de Unicidade que $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ qtp. De maneira análoga, obtemos a outra igualdade.

(*ii*) Novamente, fixemos $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\int_\Omega (\lambda u + \mu v)D^\alpha\phi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega \lambda uD^\alpha\phi + \mu vD^\alpha\phi\,\mathrm{dx} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v)\phi\,\mathrm{dx}\,.$$

Como isso vale para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

(*iii*) Note que $D^\alpha u\big|_V = D^\alpha(u\big|_V)$, pois fixando $\phi \in C_c^\infty(V)$, vale

$$\int_V uD^\alpha\phi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega uD^\alpha\phi\,\mathrm{dx} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (D^\alpha u)\phi\,\mathrm{dx} = (-1)^{|\alpha|}\int_V (D^\alpha u)\phi\,\mathrm{dx}\,.$$

Portanto, $u \in W^{k,p}(V)$.

(*iv*) Faremos a demonstração por indução em α. Note que para $|\alpha| = 1$, temos a regra do produto para funções $L^p(\Omega)$. Suponha então que $\ell < k$, assuma que (4.5) é válida para todo $|\alpha| \leq \ell$ e todas as funções φ. Escolha α tal que $|\alpha| = \ell + 1$. Podemos escrever $\alpha = \beta + \gamma$ para algum $|\beta| = \ell$ e $|\gamma| = 1$. Tomando $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega (\varphi u)D^\alpha\phi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega (\varphi u)D^\beta(D^\gamma\phi)\,\mathrm{dx} \overset{H.I.}{=} (-1)^{|\beta|}\int_\Omega \sum_{\sigma\leq\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^\sigma\varphi D^{\beta-\sigma}uD^\gamma\phi\,\mathrm{dx}$$
$$= (-1)^{|\beta|+|\gamma|}\int_\Omega \sum_{\sigma\leq\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^\gamma\left(D^\sigma\varphi D^{\beta-\sigma}u\right)\phi\,\mathrm{dx}$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \sum_{\sigma\leq\beta}\binom{\beta}{\sigma}\left[D^\rho\varphi D^{\alpha-\rho}u + D^\sigma\varphi D^{\alpha-\sigma}u\right]\phi\,\mathrm{dx}\,.$$

Desenvolvendo a última expressão acima, obtemos

$$\int_\Omega (\varphi u)D^\alpha\phi\,\mathrm{dx} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \left[\sum_{\gamma\leq\sigma\leq\beta}\binom{\alpha}{\sigma}D^\sigma\varphi(D^{\alpha-\sigma}u)\phi + \sum_{\gamma\not\leq\sigma\leq\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^\sigma\varphi(D^{\alpha-\sigma}u)\phi + \binom{\beta}{\beta}D^\alpha\varphi(D^0u)\phi\right]\mathrm{dx},$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega} (\varphi u) D^{\alpha}\phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^{\sigma}\varphi D^{\alpha-\sigma} u \right] \phi \, dx \, .$$

Isso conclui a demonstração do teorema. □

Utilizando essas propriedades, podemos demonstrar que os espaços de Sobolev possuem uma boa estrutura matemática, isto é, ser um espaço de Banach. Para isto, precisamos da desigualdade de Minkowski, enunciada abaixo.

Teorema 4.4 (Minkowski)**.** *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $u, v \in L^p(\Omega)$*. Então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega))} + \|v\|_{L^p(\Omega))} \, .$$

Demonstração. Para uma demonstração detalhada, consultar (EVANS, 2010, B.2.f, Pág. 623) □

Podemos também enunciar a desigualdade de Hölder, que será de grande utilidade mais à frente.

Teorema 4.5 (Hölder)**.** *Sejam* $p \geq 1$ *e* $q \leq \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então, se* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$*, temos que*

$$\int_{\Omega} |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \, .$$

Demonstração. Para uma demonstração detalhada, consultar (EVANS, 2010, P. 706-707). □

Podemos agora enunciar e demonstrar o

Teorema 4.6. *O espaço* $W^{k,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach, cuja norma é dada pela expressão (4.4).*

Demonstração. Consideremos $1 \leq p < \infty$. Primeiramente, mostremos que $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ define uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$. Temos

(i) Para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, vale

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}(\lambda u)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\lambda|^p |D^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \, .$$

(ii) Se $u = 0$, então segue diretamente que $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$. Suponha que $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$. Então,

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff |D^{\alpha} u|^p = 0, \text{ qtp} \iff D^{\alpha} u = 0, \text{ qtp}$$

para todo $|\alpha| \leq k$. Em particular, para $|\alpha| = 0$ temos $u = D^0 u = 0$ qtp, como desejado.

(iii) Dadas $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, temos pela desigualdade de Minkowski, que

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha}(u+v)\|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha}u + D^{\alpha}v\|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha}u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha}v\|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto, $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ é um espaço normado. Resta provar a completude do espaço de Sobolev.

Seja $(u_m)_{m\geq 1} \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então, para cada $|\alpha| \leq k$, temos que $(D^{\alpha}u_m)_{m\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é completo, existe $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$D^{\alpha}u_m \to u_\alpha \text{ em } L^p(\Omega).$$

Em particular, para $\alpha = (0, \dots, 0)$, temos

$$u_m = D^{(0,\dots,0)}u_m \to u_{(0,\dots,0)} = u \text{ em } L^p(\Omega),$$

ou seja, $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Assim, fixada $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega uD^{\alpha}\phi \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^{\alpha}\phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \lim_{m\to\infty} \int_\Omega D^{\alpha}u_m \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, dx.$$

Logo, $D^{\alpha}u = u_\alpha$ no sentido fraco. Agora, como $D^{\alpha}u_m \to D^{\alpha}u$ em $L^p(\Omega)$, temos

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha}u_m - D^{\alpha}u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{quando } m \to \infty.$$

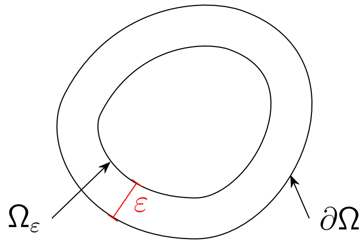
Portanto, $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, provando que $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ é um espaço de Banach. □

O resultado que acabamos de provar fornece um ferramental poderoso da análise funcional: os resultados para espaços de Banach.

4.4 APROXIMAÇÃO

Como se pode perceber, é um pouco atípico retornar sempre para a definição de derivada fraca quando estamos tratando de algo. Intencionados a facilitar o trabalho, estudaremos propriedades profundas dos espaços de Sobolev e obteremos métodos de aproximação via funções suaves. Para os resultados a seguir, fixaremos $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ e consideremos $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Figura 4.5 – Representação do conjunto Ω_ε.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Podemos definir os chamados “mollifiers”, que são regularizadores da função.

Definição 4.7 (Regularizador)**.** Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definimos seu regularizador por

$$f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \quad \text{em } \Omega_\varepsilon.$$

Isto é,

$$f^\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

onde

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

e $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

com $C > 0$ constante escolhida para que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta\,\mathrm{d}x = 1$.

Observação. Chamamos η de regularizador padrão. Devido à maneira que definimos a função η_ε, temos as seguintes propriedades satisfeitas

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{supt}(\eta_\varepsilon) \subset \overline{B}(0,\varepsilon).$$

Verifiquemos a primeira propriedade. Temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,\rho)} \eta\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\rho = \int_0^\infty \eta\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\omega_n\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^\infty \eta(r)\varepsilon^{-n}\omega_n r^{n-1}\varepsilon^{n-1}\varepsilon\,\mathrm{d}r = \omega_n\int_0^\infty \eta(r)r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(|x|)\,\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

Como é de se esperar, os regularizadores possuem boas propriedades de regularidade, que utilizaremos para obter um certo controle da integrabilidade das funções de Sobolev ao longo das demonstrações. O próximo teorema exibe tais propriedades.

Teorema 4.7 (Propriedades dos regularizadores)**.** *Consideremos o regularizador η_ε definido anteriormente. Então,*

(i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ *para cada* $\varepsilon > 0$*;*

(ii) Se $f \in C^\infty(\Omega)$*, então* $f^\varepsilon \to f$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω*;*

(iii) Se $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ *para algum* $1 \leq p < \infty$*, então* $f^\varepsilon \to f$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$*;*

(iv) Se $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *para algum* $1 \leq p \leq \infty$*, então*

$$f^\varepsilon_{x_i} = \eta_\varepsilon * f_{x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad em \quad \Omega_\varepsilon;$$

(v) Em particular, se $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *para algum* $1 \leq p < \infty$*, então* $f^\varepsilon \to f$ *em* $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$*.*

Demonstração. Efetuaremos apenas a demonstração do item (i), e ao final, indicaremos uma referência para a demonstração dos demais itens. Fixe $x \in \Omega_\varepsilon$. Considere $i = 1, \dots, n$ e $|h| < \varepsilon$ de modo que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$, sendo e_i um vetor unitário na direção x_i. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{u^\varepsilon(x + he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_V \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] u(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

onde $V = \Omega_\delta \subset\subset \Omega$ e $\delta = \dfrac{\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)}{2}$. Como

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \to \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right),$$

uniformemente em V, segue que

$$D_{x_i}u^\varepsilon(x) = \int_\Omega \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} * u, \tag{4.6}$$

o que prova (i). A demonstração dos demais itens pode ser encontrada em (EVANS; GARIEPY, 2015, Teo. 4.1, P. 146-148). □

Observação. observacaoerve que utilizando indução e a igualdade (4.6), conseguimos obter que $Du^\varepsilon(x) = (D\eta_\varepsilon) * u$. Agora, note que

$$Du^\varepsilon(x) = D_x\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)u(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)(D_x u(x-y))\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-z)(D_z u(z))\,\mathrm{d}z = Du * \eta_\varepsilon.$$

Sabendo dessas propriedades, podemos partir para os resultados de aproximação. Começamos com uma aproximação local.

Teorema 4.8 (Aproximação local). *Suponha que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, e defina*

$$u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * u \text{ em } \Omega_{\varepsilon}.$$

Então,

a) $u^{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$ *para cada* $\varepsilon > 0$,

b) $u^{\varepsilon} \to u$ *em* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *quando* $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. O item *a*) é exatamente a propriedade (*i*) dos regularizadores, a qual indicamos uma referência para a demonstração. Resta provar o item *b*).

Primeiramente, vamos mostrar que para todo $|\alpha| \leq k$, vale

$$D^{\alpha}u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * D^{\alpha}u \quad \text{em } \Omega_{\varepsilon}. \tag{4.7}$$

De fato, para $x \in \Omega_{\varepsilon}$, temos que

$$D^{\alpha}u^{\varepsilon}(x) = D^{\alpha}\left[\int_{\Omega}\eta_{\varepsilon}(x-y)u(y)\,dy\right] \overset{4.2}{=} \int_{\Omega}\left(D^{\alpha}_{x}\eta_{\varepsilon}(x-y)\right)u(y)\,dy = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\left(D^{\alpha}_{y}\eta_{\varepsilon}(x-y)\right)u(y)\,dy\,.$$

Como $\eta_{\varepsilon}(x-y) \in C^{\infty}_{c}(\infty)$, podemos aplicar a definição de derivada fraca, obtendo

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\left(D^{\alpha}_{y}\eta_{\varepsilon}(x-y)\right)u(y)\,dy = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|}\int_{\Omega}\eta_{\varepsilon}(x-y)D^{\alpha}_{y}u(y)\,dy = \int_{\Omega}\eta_{\varepsilon}(x-y)D^{\alpha}_{y}u(y)\,dy = \eta_{\varepsilon}*D^{\alpha}u.$$

Portanto, $D^{\alpha}u^{\varepsilon}(x) = \eta_{\varepsilon} * D^{\alpha}u$. Agora, tome $V \subset\subset \Omega$ e observe que por (4.7) e pelo item (*iii*) do teorema anterior, sabemos que $D^{\alpha}u^{\varepsilon} \to D^{\alpha}u$ quando $\varepsilon \to 0$ em $L^{p}(V)$ para cada $|\alpha| \leq k$. Logo,

$$\|u^{\varepsilon} - u\|^{p}_{W^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\leq k}\|D^{\alpha}u^{\varepsilon} - D^{\alpha}u\|^{p}_{L^{p}(V)} \to 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Portanto, $u^{\varepsilon} \to u$ em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0$. □

Apesar deste teorema trazer uma boa forma de trabalhar com funções em espaços de Sobolev, ficamos um pouco restritos, por ser um resultado local. Queremos então obter funções suaves que fazem essa aproximação em $W^{k,p}(\Omega)$, e não apenas em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$. Antes, é preciso definir o suporte de uma função de Sobolev e, em seguida, demonstrar o seguinte resultado,

Definição 4.8. Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Definimos o suporte de u por

$$\text{supt}(u) = \overline{\Omega \setminus \{x \in \Omega \mid f(x) = 0 \text{ } qtp\}}.$$

Lema 4.2. *Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções. Então* $\text{supt}(f * g) \subset \overline{(\text{supt}(f) + \text{supt}(g))}$.

Demonstração. De fato, suponha que $x \notin \overline{(\mathrm{supt}(f) + \mathrm{supt}(g))}$. Então, para todo $y \in \mathrm{supt}(g)$, temos que $x - y \notin \mathrm{supt}(f)$. Portanto, $f(x-y)g(y) = 0$ para todo y, e então $(f * g)(x) = 0$. Mas isso significa que $x \notin \mathrm{supt}(f * g)$, provando o resultado. □

Teorema 4.9 (Aproximação Global)**.** *Sejam Ω limitado e $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então, existem funções $u_m \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tais que*

$$u_m \to u \quad \textit{em } W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, onde

$$\Omega_i = \left\{ x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i} \right\} \cap B(0, i).$$

Defina $V_i = \Omega_{i+1} - \overline{\Omega}_{i-1}$ e $\Omega_0 = \varnothing$ de modo que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

Agora, seja $(\varphi_i)_{i \geq 0}$ uma partição suave da unidade subordinada aos abertos $(V_i)_{i \geq 0}$, isto é, suponha

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_i \leq 1, \ \varphi_i \in C_c^{\infty}(V_i), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i = 1 \text{ em } \Omega, \\ \mathrm{supt}(\varphi_i) \subset V_i. \end{cases}$$

Escolha $u \in W^{k,p}(\Omega)$ arbitrariamente. Pelo Teorema 4.3, temos que $\varphi_i u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\mathrm{supt}(\varphi_i u) \subset V_i$.

Fixe $\delta > 0$ e escolha $0 \leq \varepsilon_i < \mathrm{dist}(\mathrm{supt}(\varphi_i u), \partial V_i)$ tal que $u^i = \eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_i u)$ satisfaz

$$\begin{cases} \left\| u^i - \varphi_i u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \dfrac{\delta}{2^{i+1}}, \ i = 1, 2, \ldots, \\ \mathrm{supt}(u^i) \subset V_i. \end{cases}$$

Escreva $v = \sum_{i=0}^{\infty} u^i$ e note que $v \in C^{\infty}(\Omega)$ para cada $V \subset\subset \Omega$, pois há uma quantidade finita de termos não nulos na soma. Como $u = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i u$, temos para cada $V \subset\subset \Omega$,

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left\| u^i - \varphi_i u \right\|_{W^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left\| u^i - \varphi_i u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \delta.$$

Portanto, pelo Teorema 4.2, temos que $v - u \in W^{k,p}(\Omega)$ e então $v \in W^{k,p}(\Omega)$, pois $v = (v - u) + u$.

Assim, $u^m = \sum_{i=0}^{\infty} u^i_{\frac{1}{m}} \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. $\square$

Podemos nos questionar se é possível fazer essa aproximação por funções contínuas até a fronteira de Ω. O próximo teorema garante que isso é possível, mas necessita de uma condição de suavidade de $\partial\Omega$ que é definida como abaixo.

Definição 4.9. Dizemos que a fronteira $\partial\Omega$ é C^k se para cada ponto $x^0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Observação. Note que a definição anterior é feita localmente, isto é, para cada x^0 conseguimos obter uma função γ associada de classe C^k que aproxima a fronteira. Isso também pode ser feito de maneira global, como pode ser visto em (HORMANDER, 1983, Def. 3.1.8, Pág. 59).

Com isso, temos

Teorema 4.10 (Aproximação Global até a fronteira)**.** *Sejam Ω limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 e $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Então, existem funções $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que*

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Fixe $x^0 \in \partial\Omega$ e seja $V = \Omega \cap B\left(x^0, \frac{r}{2}\right)$. Defina $x^\varepsilon = x + \lambda\varepsilon e_n$, onde $x \in V$, $\varepsilon > 0$ e e_n é um vetor unitário na direção x_n. Observe que para $\lambda > 0$ suficientemente grande fixado, a bola $B(x^\varepsilon, \varepsilon) \subset \Omega \cap B(x^0, r)$ para todo $x \in V$ e $\varepsilon < \dfrac{r}{2(1+\lambda)}$. De fato, dado $y \in B(x^\varepsilon, \varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| y - x^0 \right\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| (y - x^\varepsilon) + (x^\varepsilon - x^0) \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|y - x^\varepsilon\| + \left\| x^\varepsilon - x^0 \right\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \varepsilon + \left\| x - x^0 \right\|_{\mathbb{R}^n} + \|\lambda\varepsilon e_n\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon + \frac{r}{2} + \lambda\varepsilon = \varepsilon(1+\lambda) + \frac{r}{2} < r,
\end{aligned}$$

se $\varepsilon < \dfrac{r}{2(1+\lambda)}$. Logo, $y \in B(x^0, r)$. Além disso, sendo $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ e $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$, temos que

$$|\gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})| \leq \left(\overbrace{\sup_{B(x^o, r)} |D\gamma|}^{C} \right) \|\bar{y} - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^{n-1}},$$

implica em

$$\begin{aligned}
\gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) &\leq \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) + C\|\bar{y} - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^{n-1}} \leq x_n^\varepsilon - \lambda\varepsilon + C\|\bar{y} - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^{n-1}} \\
&< y_n + (1-\lambda)\varepsilon + C\varepsilon = y_n + (1 - \lambda + C)\varepsilon < y_n,
\end{aligned}$$

se $\lambda > 1 + C$. Basta tomar $\lambda = 2 + \sup_{B(x^o, r)} |D\gamma|$.

Agora, defina $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$, para todo $x \in V$. Escreva $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u^\varepsilon$, e então $v^\varepsilon \in C^\infty\left(\overline{V}\right)$ pelo item (i) do Teorema 4.7. Assim, temos que $v^\varepsilon \to u$ em $W^{k,p}(V)$. De fato, para todo $|\alpha| \leq k$,

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} < \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'.$$

Tome $\delta > 0$. Como $\partial\Omega$ é compacto, existem $x_i^0 \in \partial\Omega$, raios $r_i > 0$, correspondentes conjuntos $V_i = \Omega \cap B\left(x_i^0, \frac{r_i}{2}\right)$ e funções $v_i \in C^\infty\left(\overline{V_i}\right)$ com $i = 1, \dots, N$ tais que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} B\left(x_i^0, \frac{r_i}{2}\right) \text{ e } \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \delta.$$

Tome $V_0 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{N} V_i$ e escolha $v_0 \in C^\infty\left(\overline{V_0}\right)$ satisfazendo

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \delta.$$

Seja $(\varphi_i)_{i=0}^N$ uma partição da unidade em $\overline{\Omega}$ subordinada aos abertos

$$\left\{V_0, B\left(x_1^0, \frac{r_1}{2}\right), \dots, B\left(x_N^0, \frac{r_N}{2}\right)\right\}.$$

Defina $v = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i v_i$. Então, $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Como $u = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i u$ em Ω, segue do Teorema 4.3 que para cada $|\alpha| \leq k$,

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\varphi_i v_i) - D^\alpha(\varphi_i u)\|_{L^p(V_i)} \leq C \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq C(N+1)\delta.$$

onde $C = \sup_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi_i\|_{C^\infty(\Omega)}$. Isso conclui a demonstração. □

4.5 EXTENSÕES

Podemos observar que até o momento, tratamos apenas dos espaços de Sobolev onde as funções estavam definidas em algum aberto Ω. Nossa meta agora será estender funções em $W^{1,p}(\Omega)$ para funções em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Note que não é suficiente estender u para valer 0 em $\mathbb{R}^n - \Omega$, já que isso pode gerar descontinuidades ruins ao longo de $\partial\Omega$, podendo até obter casos em que a extensão não possua derivadas fracas na fronteira. Um exemplo para isso é a função característica $\chi_{(0,1)}$, a qual possui derivada fraca em $[0, 1]$ mas, quando estendida como zero fora desse intervalo, perde a derivada fraca devido ao salto em 0 e 1.

O próximo teorema nos mostra como isso deve ser feito para não ocorrerem esses problemas, onde assumimos $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 4.11 (Extensão)**.** *Sejam Ω limitado e $\partial\Omega \in C^1$. Escolha um conjunto aberto e limitado V tal que $\Omega \subset\subset V$. Então, existe um operador linear limitado*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{4.8}$$

tal que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(i) $Eu = u$ qtp em Ω,

(ii) Eu tem suporte dentro de V,

(iii)

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde a constante C depende somente de p, Ω e V.

Demonstração. Fixemos $x^0 \in \partial\Omega$ e suponhamos inicialmente que $\partial\Omega$ é planificável próximo de x^0, pertencendo ao plano $x_n = 0$. Isto é feita pela função

$$\Phi(x) = \begin{cases} x_i & , \text{ se } \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) & , \text{ se } \quad i = n. \end{cases}$$

onde γ é a função dada pela Definição 4.9. Então, podemos assumir que existe uma bola aberta $B(x^0, r)$, com centro x^0 e raio $r > 0$, tal que

$$\begin{cases} B^+ = B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{\Omega}, \\ B^- = B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - \Omega. \end{cases}$$

Também, suponha que $u \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ e defina

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & , \text{ se } \quad x \in B^+ \\ -3u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n\right) + 4u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\dfrac{x_n}{2}\right) & , \text{ se } \quad x \in B^- \end{cases} \tag{4.9}$$

a qual é chamada *reflexão de maior ordem de u de B^+ para B^-*. Então, temos que $\bar{u} \in C^1\left(B_r(x^0)\right)$. Para verificar isto, escrevemos $u^- = \bar{u}|_{B^-}$ e $u^+ = \bar{u}|_{B^+}$. Assim, queremos provar que

$$u^+_{x_n} = u^-_{x_n} \text{ em } \{x_n = 0\},$$

já que $u^+_{x_i} = u^-_{x_i}$ em $\{x_n = 0\}$, para todo $i = 1, \dots, n-1$, por definição. De acordo com (4.9)

$$\begin{aligned} u^-_{x_n}(x) &= -3\frac{\partial}{\partial x_n} u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4\frac{\partial}{\partial x_n} u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right) \\ &= 3u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2u_{x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right). \end{aligned}$$

Calculando em $x_n = 0$, obtemos

$$u^-_{x_n}\Big|_{x_n=0} = 3u_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - 2u_{x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, 0\right) = u_{x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, 0\right) = u^+_{x_n}\Big|_{x_n=0}.$$

Logo, $D^\alpha u^-|_{x_n=0} = D^\alpha u^+|_{x_n=0}$ para cada $|\alpha| \leq 1$. Portanto, $\bar{u} \in C^B(1)$. Usando os cálculos anteriores, verificamos que

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$

para alguma constante C que independe de u. Para isto, temos

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}\|^p_{W^{1,p}(B)} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_B |D^\alpha \bar{u}|^p \,\mathrm{dx} &= \sum_{|\alpha|\leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha \bar{u}|^p \,\mathrm{dx} + \int_{B^-} |D^\alpha \bar{u}|^p \,\mathrm{dx}\right] \\
&= \sum_{|\alpha|\leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p \,\mathrm{dx} + \int_{B^-} |D^\alpha \bar{u}|^p \,\mathrm{dx}\right] \\
&= \sum_{|\alpha|\leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p \,\mathrm{dx} + \int_{B^-} \left|D^\alpha \left(-3u(\bar{x}, -x_n) + 4u\left(\bar{x}, -\frac{x_n}{2}\right)\right)\right|^p \mathrm{dx}\right].
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $G(\bar{x}, x_n) = (\bar{x}, -x_n)$ temos que $|\det JG(\bar{x}, x_n)| = 1$. Assim, a expressão anterior fica

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p \,\mathrm{dx} + \int B^+ \left|D^\alpha \left(-3u(\bar{x}, x_n) + 4u\left(\bar{x}, \frac{x_n}{2}\right)\right)\right|^p \mathrm{dx}\right] \\
&\qquad \leq \sum_{|\alpha|\leq 1} \left[\int_{B^+} |D^\alpha u|^p + 2^p \left(3^p |D^\alpha u|^p + 4^p \left|D^\alpha u\left(\bar{x}, \frac{x_n}{2}\right)\right|^p\right) \mathrm{dx}\right],
\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade $|x + y|^p \leq 2^p(|x|^p + |y|^p)$. Separando as integrais e fazendo a mudança $H(\bar{x}, x_n) = (\bar{x}, 2x_n)$ na segunda, temos que $|\det JH(\bar{x}, x_n)| = 2$, e logo,

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\leq 1} \left(\int_{B^+} |D^\alpha u|^p + 6^p |D^\alpha u|^p \,\mathrm{dx} + 4^p \cdot 2^{p+1} \int_E |D^\alpha u|^p \,\mathrm{dx}\right) \\
&\qquad \leq \sum_{|\alpha|\leq 1} \left(\int_{B^+} |D^\alpha u|^p + 6^p |D^\alpha u|^p \,\mathrm{dx} + 2^{3p+1} \int_{B^+} |D^\alpha u|^p \,\mathrm{dx}\right) = C^p \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{B^+} |D^\alpha u|^p \,\mathrm{dx},
\end{aligned}$$

onde $C = (1 + 6^p + 2^{3p+1})^{\frac{1}{p}}$ e E é um elipsoide n-dimensional contido em B^+. Logo, $\|D^\alpha \bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\,\|D^\alpha u\|_{W^{1,p}(B^+)}$.

Agora, considere o caso em que $\partial\Omega$ não é, necessariamente, planificável próximo de x^0. Nesse caso, podemos encontrar uma função C^1 denotada por Φ, com inversa Ψ, que planifica $\partial\Omega$ próximo de x^0. Note que

$$\Phi(x) = \begin{cases} x_i, & \text{se} \quad i = 1, \dots n-1, \\ x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}), & \text{se} \quad i = n. \end{cases}$$

Consideremos $y = \Phi(x)$, $x = \Psi(y)$ e defina $v(y) = u(\Psi(y))$. Usando o que fizemos anteriormente, estendemos v de B^+ para uma função $\bar{v}$ definida em B, tal que $\bar{v} \in C^1(B)$ e, pela estimativa anterior, temos

$$\|\bar{v}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|v\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Agora, seja $W = \Psi(B)$. Voltando para a variável x, obtemos uma extensão $\bar{u}$ de u para W, com

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

De fato,

$$\|\bar{u}\|^p_{W^{1,p}(W)} = \sum_{|\alpha|\leq 1}\int_W |D^\alpha \bar{u}(x)|^p\,\mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\int_W \left|\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n}\right|^p \mathrm{dx}\right] + \int_W \left|\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n}\right|^p \mathrm{dx} + \int_W |\bar{v}(\Phi(x))|^p\,\mathrm{dx}.$$

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|^p_{W^{1,p}(W)} &\leq C\left[\int_B |\bar{v}(y)|^p\,\mathrm{dy} + \int_B \left|\frac{\partial \bar{v}(y)}{\partial x_n}\right|^p \mathrm{dy} + \sum_{k=1}^{n-1}\int_B \left|\frac{\partial \bar{v}(y)}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{v}(y)}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial \gamma(y)}{\partial x_k}\right|^p \mathrm{dy}\right]\\ &= C\|\bar{v}\|^p_{W^{1,p}(B)} \leq C\|v\|^p_{W^{1,p}(B^+)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Como $\partial\Omega$ é compacto, existem $x_i^0 \in \partial\Omega$, abertos W_i e extensões $\overline{u_i}$ de u para W_i com $i = 1, \ldots, N$ de modo que $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N W_i$. Tome $W_0 \subset\subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N W_i$$

e seja $(\varphi_i)_{i=0}^N$ a partição da unidade associada. Escreva $\bar{u} = \sum_{i=0}^N \varphi_i \overline{u_i}$ onde $\overline{u_0} = u$, e então, pela estimativa que obtivemos anteriormente, segue que

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\sum_{i=0}^N \varphi_i \overline{u_i}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{i=0}^N \|\varphi_i \overline{u_i}\|_{W^{1,p}(W_i)}\\ &\leq C\sum_{i=0}^N \|\overline{u_i}\|_{W^{1,p}(W_i)} \leq C\sum_{i=0}^N \|u_i\|_{W^{1,p}(\Omega\cap W_i)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Observação. Podemos fazer ajustes de modo que supt$(u)\varphi_i \subset\subset V$ e supt$(\bar{u}) \subset\subset V$ onde V é tal que $\Omega \subset\subset V$.

Então, definimos $Eu = \bar{u}$. Por construção, E é linear e resta verificar o caso em que u não é C^∞. Suponha que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$, e escolha $(u_m)_{m\geq 1} \subset C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ convergindo para u em $W^{1,p}(\Omega)$. Segue da desigualdade acima e da linearidade de E que

$$\|Eu_m - Eu_\ell\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|E(u_m - u_\ell)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u_m - u_\ell\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Assim, $(Eu_m)_{m\geq 1}$ é de Cauchy em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ que é espaço de Banach. Logo, $Eu_m \to \bar{u} = Eu$ que satisfaz as conclusões do teorema. □

4.6 TRAÇOS

Como mencionado anteriormente, nem sempre as funções de Sobolev estão definidas na fronteira. Como $\partial\Omega$ tem medida n-dimensional de Lebesgue nula, não há um significado direto que possamos dar para a expressão "u restrita a $\partial\Omega$. O operador traço resolve esse problema.

Antes de demonstrar esse resultado, precisamos exibir dois resultados que serão utilizados: o Teorema da Divergência e a desigualdade de Young.

Teorema 4.12 (Teorema da Divergência)**.** *Seja $F \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$. Então,*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F\nu \, dS\,.$$

Demonstração. Para uma demonstração detalhada, consultar (LIMA, 2014, P. 492-494) □

Teorema 4.13 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $p > 1$ e $q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

para todos $a, b > 0$.

Demonstração. Para uma demonstração detalhada, consultar (EVANS, 2010, P. 706). □

Agora, podemos prosseguir para a demonstração do teorema do Traço.

Teorema 4.14 (Traço)**.** *Seja Ω limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1. Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

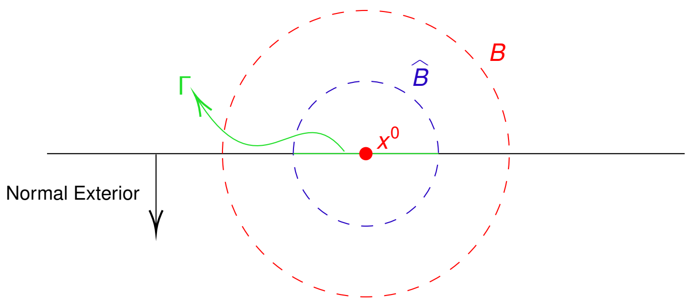
(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$,

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha inicialmente que $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Também, podemos supor $x^0 \in \partial\Omega$ e $\partial\Omega$ planificável próximo de x^0, pertencendo ao plano $\{x_n = 0\}$. Escolha uma bola aberta B, conforme fizemos no teorema anterior, e seja $\widehat{B}$ a bola concêntrica de raio $\frac{r}{2}$. Tome $\varphi \in C_c^B(\infty)$, com $\varphi \geq 0$ em B e $\varphi \equiv 1$ em $\widehat{B}$. Denote por $\Gamma = \partial\Omega \cap \widehat{B}$. Isso que fizemos até agora está representado na figura abaixo.

Figura 4.6 – Representação do conjunto Γ.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Seja $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Então, usando o Teorema 4.12, segue que

$$\int_\Gamma |u|^p \, dx' \leq \int_{\{x_n=0\}} \varphi |u|^p \, dx' = -\int_{B^+} (\varphi |u|^p)_{x_n} \, dx = -\int_{B^+} |u|^p \varphi_{x_n} + p|u|^{p-1}(\mathrm{sgn}(u)) u_{x_n} \varphi \, dx\,.$$

Usando a desigualdade de Young 4.13, obtemos

$$\int_\Gamma |u|^p \, dx' \leq C \int_{B^+} |u|^p \varphi_{x_n} + \left(\frac{p}{q}|u|^p + |u_{x_n}|^p\right) \varphi \, dx \leq C \int_{B^+} |u|^p + |u_{x_n}|^p \, dx \leq C \int_{B^+} |u|^p + |Du|^p \, dx\,.$$

Agora, se $x^0 \in \partial\Omega$ e $\partial\Omega$ não é planificável próximo de x^0, fazemos $y = \Phi(x)$, $x = \Psi(y)$ e então temos

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |u(x)|^p \, dS &= \int_{\Phi(\Gamma)} |u(\Phi(x))|^p| \det J\Phi(x)| \, dS' \leq C \int_{\Phi(\Gamma)} |u(\Phi(x))|^p \, dS' \\ &\leq C \int_{B^+} |u(y)|^p + |Du(y)|^p \, dy = C \int_\Omega |u(x)|^p + |Du(x)|^p \, dx, \end{aligned}$$

onde Γ é algum aberto de $\partial\Omega$ contendo x^0.

Como $\partial\Omega$ é compacto, existem $x_i^0 \in \partial\Omega$ e subconjuntos abertos $\Gamma_i \subset \partial\Omega$ com $i = 1, \ldots, N$ tais que

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,,$$

para todo $i = 1, \dots, N$. Consequentemente, se escrevemos $Tu = u|_{\partial\Omega}$, então

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{N} \|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para alguma constante C apropriada. Agora, suponha $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, existe $(u_m)_{m\geq 1} \subset C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ convergindo para u em $W^{1,p}(\Omega)$. Daí,

$$\|Tu_m - Tu_\ell\|_{L^p(\partial\Omega)} = \|T(u_m - u_\ell)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\,\|u_m - u_\ell\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

e então $(Tu_m)_{m\geq 1}$ é de Cauchy em $L^p(\partial\Omega)$. Logo, existe $Tu \in L^p(\partial\Omega)$ tal que $Tu_m \to Tu$. Definimos

$$Tu = \lim_{m\to\infty} Tu_m \quad \text{em } L^p(\partial\Omega).$$

Finalmente, se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, então $(u_m)_{m\geq 1} \subset C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ converge uniformemente para u em $\overline{\Omega}$. Portanto, $Tu = u|_{\partial\Omega}$. □

Observação. É importante destacar que esse operador, em geral, não é sobrejetor, o que pode ser visto em (PONCE, 2009, Teo. 5.8, Pág. 128-129).

Como o traço de uma função é um operador linear, sabemos que ele possui um núcleo. O próximo resultado nos diz que esse núcleo é o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para provar isto, utilizaremos a desigualdade de Jensen, enunciada abaixo.

Teorema 4.15 (Jensen)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ convexa e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e limitado. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ integrável, então*

$$f\left(\fint_\Omega u\,\mathrm{dx}\right) \leq \fint_\Omega f(u)\,\mathrm{dy}.$$

Demonstração. Para uma demonstração detalhada, consultar (EVANS, 2010, P. 705). □

Teorema 4.16 (Traço nulo)**.** *Seja Ω limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 e suponha que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Demonstração. Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, por definição, existem funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tais que

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{1,p}(\Omega).$$

Como $Tu_m = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $m \geq 1$ e $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ é um operador linear limitado, segue que $Tu = \lim_{m\to\infty} Tu_m = 0$ em $\partial\Omega$.

Agora, suponhamos que $Tu = 0$ em $\partial\Omega$, e queremos mostrar que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando o

Teorema de Extensão 4.11, podemos supor que

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), \\ u \text{ tem suporte compacto em } \overline{\mathbb{R}}^n_+, \\ Tu = 0 \text{ em } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Então, como $Tu = 0$ em $\mathbb{R}^{n-1}$, existem funções $u_m \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ tais que

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \tag{4.10}$$

e

$$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0 \quad \text{em } L^p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right). \tag{4.11}$$

Sejam $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \geq 0$. Então, temos

$$|u_m(x', x_n)| \leq \left|u_m(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} u_m(x', t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} \left|\frac{\partial}{\partial x_n} u_m(x', t)\right| \mathrm{d}t\,.$$

Portanto, elevando a p ambos os lados da desigualdade acima, integrando e utilizando a desigualdade 4.15, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p\,\mathrm{d}x' &\leq C\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p\,\mathrm{d}x' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x_n} \left|\frac{\partial}{\partial x_n} u_m(x', t)\right| \mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x'\right] \\ &\leq C\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p\,\mathrm{d}x' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} x_n^p \int_0^{x_n} \left|\frac{\partial}{\partial x_n} u_m(x', t)\right|^p \frac{\mathrm{d}t}{x_n}\,\mathrm{d}x'\right]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão acima,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p\,\mathrm{d}x' \leq C\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p\,\mathrm{d}x' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)|^p\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t\right].$$

Fazendo $m \to \infty$, usando (4.10) e (4.11), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p\,\mathrm{d}x' &\leq C\left[\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p\,\mathrm{d}x' + x_n^{p-1} \lim_{m\to\infty} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)|^p\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t\right] \\ &= Cx_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x', t)|^p\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

qtp $x_n > 0$. Agora, seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \varphi \equiv 1 \text{ em } [0, 1], \\ \varphi \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ - [0, 2], \\ 0 \leq \varphi \leq 1. \end{cases}$$

e escreva,

$$\begin{cases} \varphi_m(x) = \varphi(mx_n), x \in \mathbb{R}^n_+ \\ \omega_m(x) = u(x)(1 - \varphi_m(x)). \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_m}{\partial x_n}(x) = u_{x_n}(x)(1 - \varphi_m(x)) - mu\varphi'(mx_n), \\ D_{x'}\omega_m(x) = D_{x'}u(x)(1 - \varphi_m(x)). \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D\omega_m - Du|^p \,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n_+} \left| \left(D_{x'}\omega_m, \frac{\partial \omega_m}{\partial x_n} \right) - Du \right|^p \mathrm{dx} \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} |D_{x'}u|^p |\varphi_m|^p + |u_{x_n}\varphi_m - mu\varphi'(mx_n)|^p \,\mathrm{dx} \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} |Du|^p |\varphi_m|^p \,\mathrm{dx} + Cm^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \,\mathrm{dx'}\,\mathrm{dt}\,. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$A_m = C \int_{\mathbb{R}^n_+} |Du|^p |\varphi_m|^p \,\mathrm{dx} \quad \text{e} \quad B_m = Cm^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \,\mathrm{dx'}\,\mathrm{dt}\,.$$

Fazendo $m \to \infty$, temos que $A_m \to 0$ pelo Teorema 4.2. Resta estimar B_m, o que é feito pela relação obtida anteriormente. Temos

$$\begin{aligned} B_m \leq Cm^p \int_0^{\frac{2}{m}} \left(t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \,\mathrm{dx'}\,\mathrm{dx_i}\ n \right) \mathrm{dt} \leq Cm^p \int_0^{\frac{2}{m}} \left(t^{p-1} \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \,\mathrm{dx'}\,\mathrm{dx_i}\ n \right) \mathrm{dt} \\ = Cm^p \left(\int_0^{\frac{2}{m}} t^{p-1} \,\mathrm{dt} \right) \left(\int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \,\mathrm{dx'}\,\mathrm{dx_i}\ n \right) = C \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p \,\mathrm{dx'}\,\mathrm{dx_i}\ n \to 0, \end{aligned}$$

pelo Teorema 4.2 também.

Assim, $D\omega_m \to Du$ em $L^p\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ e, além disso, como $\omega_m \to u$ em $L^p\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, segue que

$$\omega_m \to u \quad \text{em } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Mas $\omega_m = 0$ se $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{m}$. Então, podemos regularizar ω_m fazendo $u_m = \omega_m * \eta_{k_m}$ de modo que $k_m \leq \dfrac{1}{m}$, e assim, obtemos funções $u_m \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ tais que

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Portanto, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Observação. Por meio desse teorema, é possível perceber que nem sempre ocorre a igualdade $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$, já que nem toda função de Sobolev tem traço nulo.

4.7 DESIGUALDADES DE SOBOLEV

O objetivo agora é estabelecer imersões de espaços de Sobolev em outros, as quais são ferramentas interessantes para alguns problemas. Para isto, recorreremos às chamadas Desigualdades de Sobolev, os quais são ferramentas analíticas cruciais.

Faremos as devidas demonstrações, primeiramente para funções suaves e, utilizando a densidade já vista anteriormente, as estabeleceremos também para funções em vários espaços de Sobolev relevantes.

Considerando o espaço $W^{1,p}(\Omega)$, podemos nos fazer o seguinte questionamento: Uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pertence automaticamente a outros espaços específicos? A resposta para essa pergunta depende de qual caso estamos analisando, isto é,

a) $1 \leq p < n$;

b) $p = n$;

c) $n < p \leq \infty$.

Inicialmente, estudaremos os casos *a*) e *c*) e, posteriormente, completaremos com a abordagem do caso restante.

4.7.1 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Assumindo que $1 \leq p < n$, podemos nos perguntar se é possível obter uma estimativa da forma

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.12}$$

para determinadas constantes $C > 0$, $1 \leq q < \infty$ e todas as funções $u \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Provaremos que a estimativa (4.12) é válida apenas quando q possui uma forma específica. Considere $u \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ com $u \not\equiv 0$, e defina a função $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Então, aplicamos (4.12),

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo, temos

$$\|u_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dy,$$

e no lado direito,

$$C^p \|Du_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C^p \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p \, dx = C^p \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p \, dx = \frac{C^p \lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p \, dy.$$

Assim, obtemos

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}}\left\|u\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}}\left\|Du\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \iff \left\|u\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\left\|Du\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Analisando a expressão acima, notamos que se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$, podemos fazer $\lambda \to 0$ ou $\lambda \to +\infty$, obtendo uma contradição. Assim, deve ocorrer $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$, o que nos dá $q = \frac{np}{n-p}$. Com base no desenvolvimento acima, podemos realizar a seguinte

Definição 4.10. Se $1 \leq p < n$, o conjugado de Sobolev de p é $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Dessa maneira, a desigualdade (4.12) só vale para $q = p^*$, e para demonstrar isso, utilizaremos a seguinte desigualdade.

Lema 4.3 (Desigualdade Geral de Hölder)**.** *Sejam* $1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$*, com* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$ *e* $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ *para* $k = 1, \ldots, m$*. Então*

$$\int_\Omega |u_1 \ldots u_m|\, dx \leq \prod_{k=1}^{m} \left\|u_k\right\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Teorema 4.17 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Seja* $1 \leq p < n$*. Então existe uma constante C, dependendo somente de p e n, tal que*

$$\left\|u\right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\|Du\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$*.*

Demonstração. Efetuaremos a demonstração dividida em dois casos: $p = 1$ e $1 < p < n$. Comecemos por $p = 1$. Como $u \in C_c^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, temos válido para todo $i = 1, \ldots, n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, \mathrm{dy_i}\, i,$$

logo,

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, \mathrm{dy_i}\, i\right| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |u_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)|\, \mathrm{dy_i}\, i \\ &\leq \int_{-\infty}^{x_i} |Du(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)|\, \mathrm{dy_i}\, i \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)|\, \mathrm{dy_i}\, i. \end{aligned}$$

Assim,

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)|\, \mathrm{dy_i}\, i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrando ambos os lados em x_1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{dx_i}\, 1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dy_i}\, i \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{dx_i}\, 1$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dy_i}\, 1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dy_i}\, i \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{dx_i}\, 1 \right].$$

Usando a desigualdade geral de Hölder, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{dx_i}\, 1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dy_i}\, 1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1\, \mathrm{dy_i}\, 1 \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora, integrando a desigualdade acima com respeito à x_2,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{dx_i}\, 1\, \mathrm{dx_i}\, 2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1\, \mathrm{dy_i}\, 2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} \mathrm{J}_i^{\frac{1}{n-1}}\, \mathrm{dx_i}\, 2,$$

onde $\mathrm{J}_i = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1\, \mathrm{dy_i}\, i,\ i \geq 3$. Aplicando 4.3 novamente, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{dx_i}\, 1\, \mathrm{dx_i}\, 2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1\, \mathrm{dy_i}\, 2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} \left\| \mathrm{J}_i^{\frac{1}{n-1}} \right\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^n)} \right]$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1\, \mathrm{dy_i}\, 2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1\, \mathrm{dx_i}\, 2\, \mathrm{dy_i}\, i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right].$$

Continuando esse processo para as demais variáveis até x_{n-1}, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{dx_i}\, 1 \ldots \mathrm{dx_i}\, n-1 \leq \left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1 \ldots \mathrm{dy_i}\, i \ldots \mathrm{dx_i}\, n-1 \right) \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1 \ldots \mathrm{dx_i}\, n-1\, \mathrm{dy_i}\, n \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Aplicando Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{dx} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, \mathrm{dx_i}\, 1 \ldots \mathrm{dy_i}\, i \ldots \mathrm{dx_i}\, n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\, \mathrm{dx} \right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Logo,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{dx} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |Du|\, \mathrm{dx} = \|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \qquad \square$$

Com base3 6nesse resultado, podemos estabelecer estimativas semelhantes para o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, o que é visto no

Teorema 4.18. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e suponha $\partial\Omega$ é C^1. Assuma $1 \leq p < n$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in L^{p^*}(\Omega)$, com estimativa*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Demonstração. Como $\partial\Omega$ é C^1, existe uma extensão $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} \bar{u} = \mathbb{R} \text{ em } \Omega, \\ \bar{u} \text{ tem suporte compacto}, \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} . \end{cases} \tag{4.13}$$

Como $\bar{u}$ tem suporte compacto, segue do Teorema 4.8 que existem $u_m \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ tais que

$$u_m \to \bar{u} \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{4.14}$$

Agora, pelo Teorema 4.17, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} , \forall m, l \geq 1.$$

Portanto,

$$u_m \to \bar{u} \text{ em } L^{p^*}\left(\mathbb{R}^n\right). \tag{4.15}$$

Novamente, pelo Teorema 4.17, temos

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Logo, (4.14) e (4.15) implicam que

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Usando (4.13), segue que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$ □

Além disso, podemos ainda obter uma estimativa ainda melhor em $W_0^{1,p}(\Omega)$, apresentada no

Teorema 4.19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Suponha $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < n$. Então, temos a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)} ,$$

para todo $q \in [1, p^*]$.

Demonstração. Como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, existem funções $u_m \in C_c^\infty(\infty)$ com $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Estendendo cada u_m para

$$\bar{u}_m(x) = \begin{cases} u_m, & \text{se } x \in \bar{\Omega}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - \bar{\Omega}. \end{cases}$$

e aplicando 4.17, obtemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)} . \tag{4.16}$$

Como $|\Omega| < \infty$, então se $p_1 = \dfrac{p^*}{q}$ e $q_1 = \dfrac{p^*}{p^* - q}$, temos

$$\|u\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega |u|^q \, dx \overset{4.5}{\leq} \left(\int_\Omega ||u|^q|^{p_1} \, dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_\Omega |1|^{q_1} \, dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \|u\|^q_{L^{p^*}(\Omega)} \cdot m(\Omega)^{\frac{p^*-q}{p^*}}.$$

Logo, $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ e, por (4.16), $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$ para todo $q \in [1, p^*]$. $\square$

Antes de introduzirmos as estimativas no caso $n < p < \infty$, vejamos brevemente o que ocorre se $p = n$, chamado de caso "*borderline*". Por conta do Teorema 4.18 e do fato que $p^* = \dfrac{np}{n-p} \to +\infty$ quando $p \to n$, é comum esperar que $u \in L^\infty(\Omega)$ dado que $u \in W^{1,n}(\Omega)$. Mas isso é falso quando $n > 1$.

Vamos considerar agora o caso $n < p < \infty$ e, nesse caso, verificaremos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é Hölder contínua com um determinado cuidado que será detalhado. O próximo resultado é nomeado como Desigualdade de Morrey. Para demonstrá-lo necessitamos da desigualdade de Jensen 4.15 e de Hölder, enunciada abaixo.

Teorema 4.20 (Desigualdade de Morrey)**.** *Seja $n < p \leq \infty$. Então existe uma constante C tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $u \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, onde $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$.

Demonstração. Primeiramente, verificaremos que existe uma constante C, tal que

$$⨍_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, dy \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}} \, dy, \tag{4.17}$$

para cada bola $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$. Para provar isso, fixe um ponto $\omega \in \partial B(0, 1)$. Então, se $0 < s < r$, temos

$$|u(x + s\omega) - u(x)| = \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x + t\omega) \, dt \right| = \left| \int_0^s Du(x + t\omega) \cdot \omega \, dt \right| \leq \int_0^s |Du(x + t\omega)| \, dt \, .$$

Consequentemente,

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x + s\omega) - u(x)| \, dS(\omega) \leq \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x + t\omega)| \, dS(\omega) \, dt \, . \tag{4.18}$$

Agora,

$$\int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+t\omega)|\, dS(\omega)\, dt = \int_0^s \int_{\partial B(x,t)} \frac{|Du(y)|}{t^{n-1}}\, dS(y)\, dt = \int_{B(x,s)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy \le \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy,$$

onde tomamos $y = x + t\omega$ e $t = |x-y|$. Além disso,

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+s\omega) - u(x)|\, dS(\omega) = \frac{1}{s^{n-1}} \int_{\partial B(x,s)} |u(z) - u(x)|\, dS(z).$$

Usando os cálculos anteriores e 4.7.1 em (4.18), obtemos

$$\int_{\partial B(x,s)} |u(z) - u(x)|\, dS(z) \le s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy,$$

que, quando integramos com respeito a s de 0 a r, nos fornece

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \le \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy\,.$$

Logo, (4.17) é válida. Agora, fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Aplicando a desigualdade (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \fint_{B(x,1)} |u(x) - u(y)|\, dy + \fint_{B(x,1)} |u(y)|\, dy \le C \int_{B(x,1)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy + C\, \|u\|_{L^p(B(x,1))} \\ &\overset{4.5}{\le} C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\, dy \right)^{\frac{p-1}{p}} + C\, \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é válida, pois sendo $p > n$, sabemos que $(n-1)\dfrac{p}{p-1} < n$. Logo,

$$\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\, dy < \infty.$$

Como $x \in \mathbb{R}^n$ foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u| \le C\, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{4.19}$$

Agora, escolha dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e escreva $r = |x-y|$. Definindo $W = B(x,r) \cap B(y,r)$, obtemos

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |u(x) - u(y)| \fint_W dz = \fint_W |u(x) - u(y)|\, dz \\ &= \fint_W |u(x) - u(z) + u(z) - u(y)|\, dz \le \fint_W |u(x) - u(z)|\, dz + \fint_W |u(y) - u(z)|\, dz, \end{aligned}$$

e pela estimativa (4.17),

$$\fint_W |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z \leq C \fint_{B(x,r)} |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z \leq C\left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} \frac{\mathrm{d}z}{|x-z|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\leq C\left(r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Analogamente,

$$\fint_W |u(y)-u(z)|\,\mathrm{d}z \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Substituindo as estimativas acima em (4.18), obtemos

$$|u(x)-u(y)| \leq 2Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Portanto,

$$[u]_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\neq y}\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}}\right\} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,,$$

e o resultado está provado. □

Observação. Observe que usando coordenadas polares, conseguimos mostrar que

$$\int_{B(x,s)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y = \int_{B(0,1)} \frac{|Du(x+sz)|}{|sz|^{n-1}} s^n\,\mathrm{d}z = \int_{B(0,1)} \frac{|Du(x+sz)|}{|z|^{n-1}} s\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+s\rho\omega)| s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\rho = \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+t\omega)|\,\mathrm{d}S(\omega)\,\mathrm{d}t\,.$$

Podemos notar que no resultado anterior, a estimativa encontrada foi para u definida em todo $\mathbb{R}^n$. Podemos então fazer a seguinte pergunta: será que um resultado parecido é válido no caso em que u é definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado?

Isso será respondido no próximo teorema, mas antes, é necessário fazer a seguinte

Definição 4.11. Dizemos que u^* é uma versão de uma dada função u se $u = u^*$ *qtp*.

Com esse conceito estabelecido, podemos enunciar e demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 4.21. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1. Suponha que $n < p \leq \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, u tem uma versão $u^* \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, para $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$, com estimativa*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas do caso $n < p < \infty$. Como $\partial\Omega$ é de classe

C^1, pelo Teorema 4.11 existe uma extensão $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} \bar{u} = u \text{ em } \Omega, \\ \bar{u} \text{ tem suporte compacto,} \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{cases}$$

Suponha que $n < p < \infty$. Como $\bar{u}$ tem suporte compacto, sabemos pelo Teorema 4.8 que existem funções $u_m \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ tais que

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{em } W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{4.20}$$

Agora, pelo Teorema 4.20, temos que $\|u_m - u_\ell\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_\ell\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ para todos $\ell, m \geq 1$, ou seja, $(u_m)_{m\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $C^{0,1-\frac{n}{p}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ que é espaço de Banach. Então, existe $u^* \in C^{0,1-\frac{n}{p}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ tal que

$$u_m \to u^* \quad \text{em } C^{0,1-\frac{n}{p}}\left(\mathbb{R}^n\right). \tag{4.21}$$

Portanto, por (4.20) e (4.21) temos $u^* = u$ qtp em Ω é uma versão de u. Além disso, a estimativa da desigualdade de Morrey implica em

$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \lim_{m\to\infty}\|u_m\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\lim_{m\to\infty}\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto, o caso em que $n < p < \infty$ está provado. □

Nosso intuito agora é reunir as estimativas anteriores para obter desigualdades para derivadas de ordem superior. Temos o seguinte resultado

Teorema 4.22 (Desigualdade Geral de Sobolev). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Assuma que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então,*

a) Se $k < \dfrac{n}{p}$, então $u \in L^q(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{n}$. Além disso, vale a estimativa

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

b) Se $k > \dfrac{n}{p}$, então $u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}\left(\bar{\Omega}\right)$, onde

$$\gamma = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1 - \dfrac{n}{p}, & se \quad \dfrac{n}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ 0 < c < 1, & se \quad \dfrac{n}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Demonstração. Começaremos provando o item a). Para isto, suponha que $k < \dfrac{n}{p}$. Como

$D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k$, a desigualdade 4.17 implica

$$\left\| D^{\beta}u \right\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \left\| D(D^{\beta}u) \right\|_{L^{p}(\Omega)} = C \left\| D^{\alpha}u \right\|_{L^{p}(\Omega)} \leq C \left\| u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad \text{se } |\beta| \leq k-1.$$

Então, $u \in W^{k-1,p^*}(\Omega)$. De modo semelhante, obtemos que $u \in W^{k-2,p^{**}}(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p^{**}} = \dfrac{1}{p^*} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{n}$. Repetindo esse processo k vezes, temos que $u \in W^{0,q}(\Omega) = L^{q}(\Omega)$, para $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{n}$. Além disso, como em cada etapa obtivemos estimativas da forma

$$\left\| D^{\beta_i}u \right\|_{L^{q_i}(\Omega)} \leq C_i \left\| u \right\|_{W^{k+1-i,r_i}(\Omega)},$$

onde $\dfrac{1}{q_i} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{i}{n}$ e $\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{i-1}{n}$. Isso nos dá que

$$\left\| u \right\|_{L^{q}(\Omega)} \leq C_k C_{k-1} \dots C_1 \left\| u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} = C \left\| u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Agora, suponha que $k > \dfrac{n}{p}$ e $\dfrac{n}{p} \notin \mathbb{Z}$. Fazendo o mesmo processo do caso anterior, obtemos

$$u \in W^{k-\ell,r}(\Omega) \quad \text{com } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\ell}{n}$$

desde que $\ell p < n$. Escolhamos $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que

$$l < \frac{n}{p} < l+1,$$

isto é, $\ell = \left[\dfrac{n}{p}\right]$ (a parte inteira). Assim,

$$\frac{1}{r} = \frac{n-\ell p}{np} \Rightarrow r = \frac{np}{n-\ell p},$$

e como $\dfrac{1}{n-\ell p} > \dfrac{1}{p}$, temos que $r > n$. Podemos então aplicar a desigualdade de Morrey para obter

$$\left\| D^{\alpha}u \right\|_{C^{0,1-\frac{n}{r}}(\bar{\Omega})} \leq C \left\| D^{\alpha}u \right\|_{W^{1,r}(\Omega)}, \quad |\alpha| \leq k-\ell-1,$$

ou seja, $D^{\alpha}u \in C^{0,1-\frac{n}{r}}\left(\overline{\Omega}\right)$ para todo $|\alpha| \leq k-\ell-1$. Observe que

$$1 - \frac{n}{r} = 1 - \frac{\frac{n}{np}}{n-\ell p} = 1 - \frac{n-\ell p}{p} = \ell + 1 - \frac{n}{p} = \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}.$$

Assim,

$$u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\left[\frac{n}{p}\right]+1-\frac{n}{p}}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Também, obtemos

$$\|D^\alpha u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})} \leq C\,\|u\|_{W^{k-\ell,r}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\,.$$

Por fim, suponhamos que $k > \dfrac{n}{p}$ e $\dfrac{n}{p} \in \mathbb{Z}$. Seja $\ell = \left[\dfrac{n}{p}\right] - 1 = \dfrac{n}{p} - 1$. Repetindo o argumento feito para o primeiro caso, obtemos

$$u \in W^{k-\ell,r}(\Omega), \quad r = \frac{pn}{n-p\ell} = n.$$

Aplicando o Teorema 4.18, temos

$$\|D^\alpha u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\,\|D^\alpha u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \forall p < n.$$

Como $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n} > 0$, então $p^* > p = n$, e segue que

$$D^\alpha u \in L^q(\Omega)\,, \quad \text{para todo } q \geq n \text{ e } |\alpha| \leq k - \ell - 1 = k - \left[\frac{n}{p}\right] = k - \frac{n}{p}.$$

Aplicando a Desigualdade de Morrey 4.20, obtemos que $D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{q}}\left(\overline{\Omega}\right)$ para todo $q > n$ e $|\alpha| \leq k - \left[\dfrac{n}{p}\right] - 1$. Logo, $u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, com $0 < \gamma < 1$. □

4.8 COMPACIDADE

Uma consequência da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev é que $W^{1,p}(\Omega)$ está imerso em $L^{p^*}(\Omega)$ para $1 \leq p < n$, com $p^* = \dfrac{pn}{n-p}$. O objetivo agora será demonstrar que tal imersão é compacta em $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$, já que isso é fundamental para o estudo de EDP's. Comecemos com a definição de imersão compacta.

Definição 4.12. Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Dizemos que X está compactamente imerso em Y se

(i) $\|u\|_Y \leq C\,\|u\|_X$ para alguma constante C, onde $u \in X$;

(ii) Cada sequência limitada em X é pré-compacta em Y, isto é, se $(u_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência em X com $\sup\limits_{k\geq 1} \|u_k\|_X < \infty$, então existem uma subsequência $(u_{k_j})_{j\geq 1} \subset (u_k)_{k\geq 1}$ e $u \in Y$ tais que

$$\lim_{j\to\infty} \left\| u_{k_j} - u \right\|_Y = 0.$$

Lema 4.4 (Interpolação)**.** *Sejam* $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ *e*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}.$$

Suponha também que $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$. *Então,* $u \in L^r(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^s(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{L^t(\Omega)}^{1-\theta}.$$

Demonstração. Para uma demonstração detalhada, consultar (EVANS, 2010, B.2.h, P. 707-708). □

Podemos agora enunciar e demonstrar o

Teorema 4.23 (Rellich-Kondrachov)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado, com* $\partial\Omega$ *de classe* C^1. *Suponha que* $1 \leq p < n$*, então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q < p^*$.

Demonstração. Fixe $1 \leq q < p^*$ e note que sendo Ω limitado, o Teorema 4.18 implica que

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Resta verificar a propriedade (ii) da definição anterior, isto é, se $(u_m)_{m\geq 1}$ é uma sequência limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, então existe (u_{m_k}) que converge em $L^q(\Omega)$.

Devido ao Teorema 4.11, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e que as funções $(u_m)_{m\geq 1}$ têm suporte compacto em algum aberto limitado $V \subset \mathbb{R}^n$. Podemos também assumir que

$$\sup_{m\geq 1} \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty. \tag{4.22}$$

Primeiramente, estudaremos as funções suaves

$$u_m^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * u_m,$$

sendo η_ε o regularizador. Suponhamos que $(u_m^{\varepsilon})_{m\geq 1}$ tem suporte em V. Temos inicialmente que

$$u_m^{\varepsilon} \to u_m \text{ em } L^q(V) \text{ quando } \varepsilon \to 0, \tag{4.23}$$

uniformemente em m. Para verificar (4.23), note que se u_m é suave, então

$$\begin{aligned} u_m^{\varepsilon}(x) - u_m(x) &= \int_{B(0,1)} \eta(y)(u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x))\,\mathrm{d}y = \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_m(x-\varepsilon ty))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_m(x-\varepsilon ty) y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Portanto, podemos tomar $\tilde{V} \subset\subset V$ com $\varepsilon < \operatorname{dist}(\tilde{V}, \partial V)$, de modo que

$$\int_{\tilde{V}} |u_m^{\varepsilon}(x) - u_m(x)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_{\tilde{V}} |Du_m(x-\varepsilon ty)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon \int_V |Du_m(z)|\,\mathrm{d}z.$$

Por aproximação, essa estimativa vale se $u_m \in W^{1,p}(V)$. Consequentemente,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \|Du_m\|_{L^1(V)} \leq C\varepsilon \|Du_m\|_{L^p(V)},$$

e isso vale, pois V é limitado. Devido a (4.22), temos

$$u_m^\varepsilon \to u_m \text{ em } L^1(V), \text{ uniformemente em } m.$$

Como $1 \leq q < p^*$, podemos aplicar a desigualdade de Interpolação para as normas L^p, obtendo

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta},$$

onde $\dfrac{1}{q} = \theta + \dfrac{1-\theta}{p^*}$, $0 < \theta < 1$. Por (4.22) e a desigualdade 4.17, segue

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|^\theta.$$

Agora, temos que para cada $\varepsilon > 0$ fixado, a sequência $(u_m^\varepsilon)_{m\geq 1}$ é limitada e equicontínua. De fato, se $x \in \mathbb{R}^n$ então

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\,dy \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |u_m(y)|\,dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty.$$

para todo $m \geq 1$ e, de modo análogo,

$$|Du_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |D\eta_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|\,dy \leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty,$$

para todo $m \geq 1$. Logo, u_m e Du_m são uniformemente limitadas. Agora, fixe $\delta > 0$. Queremos mostrar que existe uma subsequência tal que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta. \tag{4.24}$$

Para isto, aplicamos (4.23) para escolher $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \frac{\delta}{2}, \tag{4.25}$$

para todo $m \geq 1$. Agora, aplicamos o teorema de Arzelà-Ascoli, e obtemos $(u_{m_j}^\varepsilon)_{j\geq 1} \subset (u_m^\varepsilon)_{m\geq 1}$ tal que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \left\| u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon \right\|_{L^q(V)} = 0. \tag{4.26}$$

Então, por (4.25) e (4.26), segue que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta.$$

Fazendo $\delta = 1, \frac{1}{2}, ...$, e usando (4.24), temos que existem

$$
\begin{aligned}
(u_j^{(1)})_{j\geq 1} \subset (u_m)_{m\geq 1} \text{ tal que } \limsup_{j,k\to\infty} \left\| u_{m_j}^{(1)} - u_{m_k}^{(1)} \right\|_{L^q(V)} &\leq 1;\\
(u_j^{(2)})_{j\geq 1} \subset (u_j^{(1)})_{j\geq 1} \text{ tal que } \limsup_{j,k\to\infty} \left\| u_{m_j}^{(2)} - u_{m_k}^{(2)} \right\|_{L^q(V)} &\leq \frac{1}{2};\\
&\vdots\\
(u_j^{(\ell)})_{j\geq 1} \subset (u_j^{(\ell-1)})_{j\geq 1} \text{ tal que } \limsup_{j,k\to\infty} \left\| u_{m_j}^{(\ell)} - u_{m_k}^{(\ell)} \right\|_{L^q(V)} &\leq \frac{1}{\ell}.
\end{aligned}
$$

Escolhemos

$$
\begin{aligned}
u_{m_1} &= u_{j_1}^{(1)} \text{ tal que } \left\| u_j^{(1)} - u_k^{(1)} \right\|_{L^q(V)} \leq 1 + \frac{1}{2}, \forall j,k \geq j_1;\\
u_{m_2} &= u_{j_2}^{(2)} \text{ tal que } \left\| u_j^{(2)} - u_k^{(2)} \right\|_{L^q(V)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \forall j,k \geq j_2 \geq j_1;\\
&\vdots\\
u_{m_\ell} &= u_{j_\ell}^{(\ell)} \text{ tal que } \left\| u_j^{(\ell)} - u_k^{(\ell)} \right\|_{L^q(V)} \leq \frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell+1}, \forall j,k \geq j_\ell \geq \cdots \geq j_1.
\end{aligned}
$$

Com isso, extraímos $(u_{m_\ell})_{\ell\geq 1} \subset (u_m)_{m\geq 1}$ tal que

$$
\limsup_{i\geq k\geq 1} \|u_{m_i} - u_{m_k}\| = \limsup_{i\geq k\geq 1} \left\| u_{j_i}^{(k)} - u_{j_k}^{(k)} \right\| \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} = 0.
$$

Logo, $(u_{m_\ell})_{\ell\geq 1}$ é de Cauchy em $L^q(V)$ e, portanto, converge para alguma $u \in L^q(V)$. Portanto, como $\Omega \subset V$, vale

$$
W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),
$$

para todo $1 \leq q < p^*$. □

Observação. Note que quando $p \to n$, temos que $p^* \to \infty$. Assim, como $p^* > p$, o caso em que $p = n$, bastando aplicar a Desigualdade de Morrey. Assim, o Teorema anterior continua válido no caso $p = n$, isto é, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ se não assumirmos $\partial\Omega$ é de classe C^1.

Por fim, veremos como a imersão compacta pode ser utilizada para gerar novas desigualdades. Para os próximos dois resultados, utilizaremos as seguintes notações:

$$
(u)_\Omega = \fint_\Omega u\,dy \qquad \text{e} \qquad (u)_{x,r} = \fint_{B(x,r)} u\,dy.
$$

Teorema 4.24 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e conexo com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe uma constante C tal que*

$$
\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|Du\|_{L^p(\Omega)},
$$

para cada função $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Suponha que essa estimativa seja falsa, então deve existir para cada inteiro $k = 1, ...,$ uma função $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > k\,\|Du_k\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{4.27}$$

Defina a normalização

$$v_k = \frac{u_k - (u_k)_\Omega}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}, \quad k = 1, ...$$

Então, temos que

$$(v_k)_\Omega = 0, \quad \|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1, \tag{4.28}$$

e (4.27) implica

$$\|Dv_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k}. \tag{4.29}$$

Em particular, as funções $(v_k)_{k\geq 1}$ são limitadas em $W^{1,p}(\Omega)$. Pela observação 4.8, existem uma subsequência $(v_{k_j})_{j\geq 1} \subset (v_k)_{k\geq 1}$ e uma função $v \in L^p\,(\Omega)$ tais que

$$v_{k_j} \to v \quad \text{em } L^p\,(\Omega)\,.$$

Por (4.28) segue que

$$(v)_\Omega = 0, \quad \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

Por outro lado, (4.29) nos fornece que para cada $i = 1, \ldots, n$ e $\phi \in C_c^\infty\,(\Omega)$

$$\int_\Omega v\phi_{x_i}\,dx = \lim_{k_j\to\infty}\int_\Omega v_{k_j}\phi_{x_i}\,dx = -\lim_{k_j\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial v_{k_j}}{\partial x_i}\phi\,dx = 0 = -\int_\Omega 0\phi\,dx\,.$$

Consequentemente, $v \in W^{1,p}(\Omega)$ com $Dv = 0$ qtp. Como Ω é conexo, temos que v é constante qtp, o que é uma contradição pois, sendo v constante e $(v)_\Omega = 0$, deveríamos ter $v \equiv 0$ e, nesse caso, $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 0 \neq 1$. Portanto, o resultado está provado. □

Teorema 4.25 (Desigualdade de Poincaré para uma bola)**.** *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante C tal que*

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr\,\|Du\|_{L^p(B(x,r))}\,,$$

para cada bola $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ e cada função $u \in W^{1,p}(B(x,r))$.

Demonstração. O caso $\Omega = B(0,1)$ é uma aplicação direta do teorema anterior. Agora, se $u \in W^{1,p}(B(x,r))$ escrevemos

$$v(y) = u(x+ry), y \in B(0,1).$$

Então, $v \in W^{1,p}(B(0,1))$, e temos pelo teorema anterior que

$$\|v - (v)_{0,1}\|_{L^p(B(0,1))} \leq C \|Dv\|_{L^p(B(0,1))} .$$

ou, equivalentemente,

$$\|u(x + ry) - (u(x + ry))_{0,1}\|_{L^p(B(0,1))} \leq C \|Du(x + ry)\|_{L^p(B(0,1))} .$$

Desfazendo a mudança de variáveis, obtemos

$$\|u(z) - (u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr \|Du\|_{L^p(B(x,r))} .$$

$\square$

Observação. Sejam $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ e $B(x, r)$ uma bola qualquer. Então, pelo Teorema 4.25 com $p = 1$, temos

$$\fint_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}| \, \mathrm{d}y \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^n \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{n}} .$$

Portanto, $u \in BMO(\mathbb{R}^n)$, chamado de espaço das funções de variação média limitada em $\mathbb{R}^n$, onde sua seminorma é dada por

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B(x,r) \subset \mathbb{R}^n} \left\{ \fint_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}| \, \mathrm{d}y \right\} .$$

Esse é o caso extremo para o expoente p no Teorema de Rellich-Kondrachov.

5 MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET

Após a análise aprofundada desta teoria, voltaremos à questão inicial para aplicar tais conceitos na abordagem do Problema de Dirichlet por meio do método de minimização, vide (PONCE, 2009, Cap. 5). Antes disso, exploraremos um pouco do contexto da época.

Em uma conferência em Zurique (1897), David Hilbert (1862-1943) anunciou a revitalização do Princípio de Dirichlet. O método empregado por Hilbert, previamente sugerido por H. Weber, e de maneira menos explícita, por Cesare Arzelà (1847-1912), baseava-se na utilização de sequências minimizantes para obter uma solução do problema variacional. No entanto, a demonstração apresentada por Hilbert era bastante complexa, e surgiram várias tentativas de simplificá-la, sem muito sucesso.

Apresentaremos a seguir uma demonstração proposta por Richard Courant (1888-1972), a qual utilizará a teoria de espaços de Sobolev desenvolvida nos capítulos anteriores. Para isso, necessitamos de algumas definições e resultados.

Definição 5.1. Sejam X um espaço vetorial normado, $\mathcal{I} : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear e $(u_k)_{k\geq 1}$ uma sequência. Dizemos que $(u_k)_{k\geq 1}$ é uma *sequência minimizante* se $\mathcal{I}(u_k) \to \inf \mathcal{I}$.

Outro conceito importante é o de função harmônica,

Definição 5.2. Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dizemos que u é *harmônica* se $-\Delta u = 0$ em Ω.

Além disso, faremos uso da fórmula da média e das desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young.

Lema 5.1. *Seja u harmônica em Ω. Se $\rho \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ é uma função radial tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, \mathrm{dx} = 1$$

e $\operatorname{supt}(\rho) \subset B(0, \varepsilon)$*, então*

$$(\rho * u)(x) = u(x), \forall x \in \Omega \textit{ com } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon.$$

Demonstração. Por definição de convolução, temos que

$$(\rho * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)u(y)\, \mathrm{dy} = \int_{B(x,\varepsilon)} \rho(x-y)u(y)\, \mathrm{dy},$$

pois $\operatorname{supt}(\rho) \subset B(0, \varepsilon)$. Usando coordenadas polares e o fato de ρ ser uma função radial, obtemos

$$\int_{B(x,\varepsilon)} \rho(x-y)u(y)\, \mathrm{dy} = \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \rho(r)u(z)\, \mathrm{dS}_z\, \mathrm{dr} = \int_0^\varepsilon \rho(r) \int_{\partial B(x,r)} u(z)\, \mathrm{dS}_z\, \mathrm{dr},$$

onde $r > 0$ deve ser tomado de forma que $B(x, r) \subset \Omega$. Como u é harmônica, podemos usar a propriedade da média, onde ω_n denota a área da superfície da bola unitária n-dimensional, para concluir que

$$(\rho * u)(x) = \int_0^{\varepsilon} \rho(r) \int_{\partial B(x,r)} u(z)\, \mathrm{dS}_z\, \mathrm{dr} = \int_0^{\varepsilon} \rho(r)\omega_n r^{n-1} u(x)\, \mathrm{dr} = u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, \mathrm{dy} = u(x),$$

para todo $x \in \Omega$ com $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon$. □

Observação. Note que a condição $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon$ no resultado anterior, garante que é possível tomar $B(x, \varepsilon)$ inteiramente contida em Ω.

Lema 5.2 (Cauchy-Schwarz)**.** *Seja $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. Então, para todos $u, v \in X$ temos que*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_X \|v\|_X .$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\{u, v\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

Demonstração. Se $\langle u, v\rangle = 0$, o resultado segue imediatamente pela definição de norma. Suponha que $\langle u, v\rangle \neq 0$, em particular, $v \neq 0$ e para $t \in \mathbb{R}$ temos

$$0 \leq \|u - tv\|_X^2 = \langle u - tv, u - tv\rangle = \|u\|_X^2 - t\langle u, v\rangle - \bar{t}\langle v, u\rangle + |t|^2 \|v\|_X^2 .$$

Escolha $t = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\|v\|_X^2}$ de modo que a desigualdade anterior fica

$$0 \leq \|u\|_X^2 - 2\frac{\langle u, v\rangle\overline{\langle u, v\rangle}}{\|v\|_X^2} + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|_X^2} = \|u\|_X^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|_X^2}.$$

Portanto,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_X \|v\|_X , \quad \forall u, v \in X.$$

Além disso, note que a igualdade ocorre se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u - tv = 0$, isto é, $u = tv$. □

Observação. Ao longo desse e dos próximos capítulos, recorreremos à notação $|u|_p$ para a norma dos espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ por questões de simplicidade. Quando for necessário explicitar o espaço Ω considerado, continuaremos utilizando a notação $\|\cdot\|_{L^p(\cdot)}$.

Lema 5.3 (Poincaré)**.** *Dados $\bar{x} \in \partial\Omega$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e $\delta > 0$, seja $\Lambda(\bar{x}, \delta) = B(\bar{x}, \delta) \cap \Omega$. Logo, se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, então*

$$\|v\|_{L^2(\Lambda(\bar{x},\delta))} \leq C\delta \|\nabla v\|_{L^2(\Lambda(\bar{x},\delta))} , \quad \forall v \in C^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right).$$

Demonstração. Inicialmente, provemos esse resultado para um semi-disco

$$B^+ = \{(x, y) \in \Omega \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}.$$

Seja v uma função definida em B^+ e considere um quadrado $Q = [-L, L] \times [-L, L]$ contendo B^+. Estenda v e suas derivadas até Q como sendo zero em $Q \setminus B^+$.

Fixe $x \in B^+$ e considere o caminho paralelo ao eixo x_2 (percorrido na direção negativa) ligando o ponto x ao primeiro ponto no qual intercepta ∂B^+, que denotaremos por x_0. Tal caminho pode ser parametrizado por $\phi(t) = (1 - t)x_0 + tx$ com $t \in [0, 1]$. Então, temos

$$\int_\phi \frac{\partial v}{\partial x_2}\, d\sigma = \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x_2}(\phi(t))\phi'(t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x_0+\varepsilon}^{x} \frac{\partial v}{\partial x_2}\, dm = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x_0+\varepsilon}^{x} \frac{\partial v}{\partial x_2}(z)\, dz,$$

onde m denota a medida de Lebesgue. Assim, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_\phi \frac{\partial v}{\partial x_2}\, d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x_0+\varepsilon}^{x} \frac{\partial v}{\partial x_2}(z)\, dz = \lim_{\varepsilon\to 0} v(x) - v(x_0 + \varepsilon) = v(y).$$

Agora, notemos que

$$v^2(x)=\left(\int_\phi \frac{\partial v}{\partial x_2}\, d\sigma\right)^2 \leq 2\delta \int_\phi \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 d\sigma \leq 2\delta \int_0^{\sqrt{\delta^2-x_0^2}} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dz \leq 2\delta \int_0^{\sqrt{\delta^2-x_0^2}} |\nabla v|^2\, dx_2,$$

para todo $x \leq \sqrt{\delta^2 - x_0^2}$. Integrando a desigualdade acima com respeito a variável x_1,

$$\int_{-\delta}^{\delta} v^2\, dx_1 \leq 2\delta \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{\sqrt{\delta^2-x_0^2}} |\nabla v|^2\, dx_2\, dx_1 = 2\delta\, |\nabla v|_2^2 .$$

Integrando na variável x_2, concluímos que

$$|v|_2^2 = \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{\sqrt{\delta^2-x_0^2}} dx_2\, dx_1 \leq 2\delta \cdot 2\delta\, |\nabla v|_2^2 \Rightarrow |v|_2 \leq 2\delta\, |\nabla v|_2 ,$$

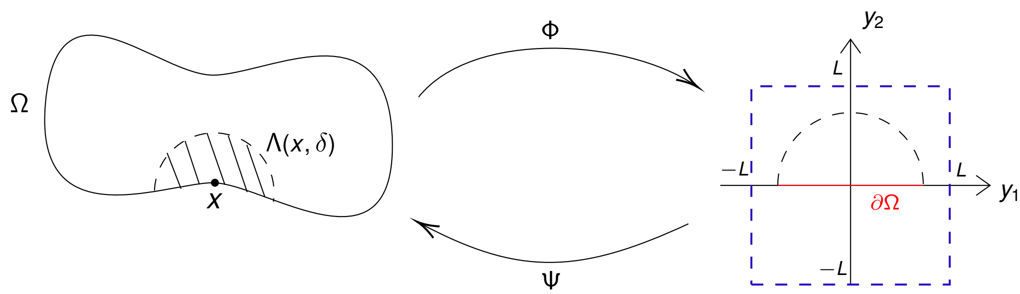
em B^+.

Agora, quando consideramos u definida em $\Lambda(\bar{x}, \delta)$, podemos aplicar a função Φ dada por

$$\Phi(x) = \begin{cases} x_i & , \text{ se } 1 \leq i \leq n-1 \\ x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) & , \text{ se } i = n. \end{cases}$$

onde γ é a função dada pela Definição 4.9. Com isso, o domínio passa a ser um disco semelhante ao que consideramos inicialmente, e a função v é $v(y) = (u \circ \Psi)(y)$ com Ψ sendo a inversa de Φ.

Figura 5.1 – Função Φ aplicada ao conjunto $\Lambda(x,\delta)$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Pela primeira parte da demonstração, já sabemos que vale a desigualdade abaixo no disco obtido após a transformação

$$\|v\| \leq C\delta \|\nabla v\| \iff \|u\circ\Psi\| \leq C\delta \|\nabla(u\circ\Psi)\|.$$

Agora, notando que $|\det D_x\Phi| = 1$, o determinante da jacobiana de Φ, o lado esquerdo da desigualdade fica

$$\|u\circ\Psi\|^2_{B^+} = \int_{B^+} |u\circ\Psi|^2\,\mathrm{dy} = \int_{\Lambda(\bar{x},\delta)} |u(x)|^2 \cdot |\det D_x\Phi|\,\mathrm{dx} = \int_{\Lambda(\bar{x},\delta)} |u(x)|^2\,\mathrm{dx} = \|u\|^2_{\Lambda(\bar{x},\delta)},$$

enquanto que ao lado direito, temos

$$\begin{aligned}\|\nabla(u\circ\Psi)\|^2_{B^+} &= \int_{B^+} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(u\circ\Psi)\right]^2 \mathrm{dy} \leq \int_{B^+} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\Psi(y)) \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i}(y)\right]^2 \mathrm{dy} \\ &\leq \int_{B^+} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\Psi(y)) \cdot C\right]^2 \mathrm{dy},\end{aligned}$$

onde $C = \sup \left|\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i}\right|_\infty$ e n é a dimensão de $\mathbb{R}^n$, que em nosso caso é $n = 2$. Assim, desenvolvendo a última expressão obtida acima,

$$\|\nabla(u\circ\Psi)\|^2_{B^+} \leq nC^2 \int_{\Lambda(\bar{x},\delta)} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)^2 |\det D_x\Phi|\,\mathrm{dx} \leq nC^2 \int_{\Lambda(\bar{x},\delta)} |\nabla u|^2\,\mathrm{dx}$$

Portanto, segue que

$$\|v\|_{L^2(\Lambda(\bar{x},\delta))} \leq C\delta \|\nabla v\|_{L^2(\Lambda(\bar{x},\delta))}, \quad \forall v \in C^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right). \qquad \square$$

Lema 5.4 (Young)**.** *Sejam* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *com*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Se $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, então* $f * g \in L^r(\Omega)$ *e*

$$|f * g|_r \leq |f|_p \, |g|_q \, .$$

Demonstração. Uma ideia da demonstração pode ser encontrada em (FOLLAND, 1999, Prop. 8.9, Pág. 241). □

Lema 5.5. *Seja* $(u_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência minimizante de (5.2). Então, para toda família de funções* $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ *em* $C^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ *tal que* $|\nabla \varphi_k|_2 \leq M$*, para todo* $k \geq 1$*, temos*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx = 0.$$

Demonstração. Dado $t \in \mathbb{R}$, temos que $u_k + t\varphi_k$ é uma função admissível, isto é, $u_k + t\varphi_k \in C^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ e $u_k + t\varphi_k = f$ sobre $\partial\Omega$, onde $(u_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência minimizante e $\|\nabla \varphi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq M$. Assim,

$$m_0 \leq \int_\Omega |\nabla u_k + t\nabla \varphi_k|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx + 2t \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx + t^2 \int_\Omega |\nabla \varphi_k|^2 \, dx, \forall k \geq 1.$$

Logo,

$$\left(\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx - m_0 \right) + 2t \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx + t^2 \int_\Omega |\nabla \varphi_k|^2 \, dx \geq 0.$$

Com isso, vemos que o determinante da equação do segundo grau em t, é menor ou igual que zero, isto é,

$$\Delta = 4 \left(\int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx \right)^2 - 4 \left(\int_\Omega |\nabla \varphi_k|^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx - m_0 \right) \leq 0.$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla \varphi_k \, dx \right)^2 &\leq \left(\int_\Omega |\nabla \varphi_k|^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx - m_0 \right) \\ &\leq M^2 \left(\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx - m_0 \right) \to 0, \text{ quando } k \to \infty. \end{aligned}$$

□

Lema 5.6. *Seja* $(u_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência minimizante. Então,*

$$\lim_{i,j\to\infty} |\nabla u_i - \nabla u_j|_2 = 0.$$

Demonstração. Observe que

$$\|\nabla(u_i - u_j)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \forall i, j \geq 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\nabla u_i - \nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u_i - \nabla u_j|^2 \, dx \\ &= \left(\int_\Omega \nabla u_i(\nabla u_i - \nabla u_j) \, dx - \int_\Omega \nabla u_j(\nabla u_i - \nabla u_j) \, dx \right) \to 0 \; (i, j \to \infty). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Portanto, $\lim_{i,j\to\infty} |\nabla u_i - \nabla u_j|_2 = 0.$ □

Outro resultado necessário para demonstrar o processo de minimização, é o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 4.2, enunciado no capítulo 4. Com isso, podemos apresentar a demonstração completa do método de minimização para solução do Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= f \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Consideremos o problema de minimização

$$m_0 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, \middle| \, u \in C^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ e } u = f \text{ sobre } \partial\Omega \right\} \tag{5.2}$$

onde $f \in C(\partial\Omega)$. Temos então

Lema 5.7. *Seja* $(u_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência minimizante de (5.2). Dado* $\eta > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$|A| < \delta \Rightarrow \int_A |\nabla u_k|^2 \, dx < \eta, \forall k \geq 1$$

e para todo conjunto boreliano $A \subset \Omega$*, isto é, todo conjunto* A *mensurável com relação à medida de Borel.*

Demonstração. Pelo Lema 5.6, podemos tomar $k_0 \geq 1$ tal que

$$\|\nabla u_i - \nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta^{\frac{1}{2}}, \quad \text{se } i, j \geq k_0.$$

Agora, tomemos $\delta > 0$ de modo que

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(A)} < \eta^{\frac{1}{2}}, \quad \text{se } k = 1, \ldots, k_0 \text{ e } |A| < \delta.$$

Logo, se $k > k_0$ e $|A| < \delta$, então

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(A)} \leq \|\nabla u_k - \nabla u_{k_0}\|_{L^2(A)} + \|\nabla u_{k_0}\|_{L^2(A)} \leq \|\nabla u_k - \nabla u_{k_0}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_{k_0}\|_{L^2(A)} < 2\eta^{\frac{1}{2}},$$

concluindo a demonstração. $\square$

Agora, temos todas as ferramentas necessárias para demonstrar o método de minimização. Temos

Teorema 5.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado suave e $f \in C(\partial\Omega)$. Se $m_0 < \infty$, então o problema de minimização (5.2) admite uma única solução.*

Demonstração. Sejam $(u_k)_{k\geq 1}$ uma sequência minimizante e $\varepsilon > 0$ dado. Provemos que existe $U_\varepsilon \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que

$$\rho_\varepsilon * u_k \to U_\varepsilon \quad \text{em } C^1\left(\overline{\Omega}\right) \text{ quando } k \to \infty.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
|(\rho_\varepsilon * u_i)(x) - (\rho_\varepsilon * u_j)(x)| &= \left|\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\left[u_i(y) - u_j(y)\right] \mathrm{d}y\right| \\
&\leq \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\,|u_i(y) - u_j(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_\varepsilon\,|u_i - u_j|_2\,.
\end{aligned}$$

Logo, segue da Desigualdade de Poincaré 4.24, que

$$|(\rho_\varepsilon * u_i)(x) - (\rho_\varepsilon * u_j)(x)| \leq C_\varepsilon\,\|\nabla u_i - \nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{5.3}$$

Por um argumento semelhante, obtemos

$$\begin{aligned}
|\nabla(\rho_\varepsilon * u_i)(x) - \nabla(\rho_\varepsilon * u_j)(x)| &\leq \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\left[\nabla u_i(y) - \nabla u_j(y)\right]^2 \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_\varepsilon\,\|\nabla u_i - \nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}\,. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Combinando (5.3) e (5.4), segue que $(\rho_\varepsilon * u_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, que é Banach. Logo, existe $U_\varepsilon \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que

$$\rho_\varepsilon * u_k \to U_\varepsilon \text{ em } C^1\left(\overline{\Omega}\right), \text{ quando } k \to \infty.$$

Seja $x_0 \in \Omega$ e mostremos que se $\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) > \varepsilon$, então $U_{\varepsilon_1}(x_0) = U_{\varepsilon_2}(x_0)$ para todos $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon$. Defina

$$v(x) = \left((\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) * \vartheta\right)(x_0 - x), \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

onde ϑ é a solução fundamental do Problema de Dirichlet, ou seja,

$$\vartheta(y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|y|}\right)$$

Então, $v \in C_c^\infty(\Omega)$. De fato, pelo item (i) do Teorema 4.7, já sabemos que $v \in C^\infty(\Omega)$, então qbasta mostrar que

$$v(x) = 0, \forall x \in \Omega \text{ tal que } |x - x_0| > \varepsilon.$$

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ com $|x - x_0| > \varepsilon$, a função $y \to \vartheta(x_0 - x - y)$ é harmônica sobre $B(0, \varepsilon)$, pois $|x_0 - x - y| \geq |x_0 - x| - |y| > \varepsilon - \varepsilon = 0$. Usando o Lema 5.1, obtemos

$$(\rho_{\varepsilon_i} * \vartheta)(x_0 - x) = \int_{B(0,\varepsilon_i)} \rho_{\varepsilon_i}(y)\vartheta(x_0 - x - y)\,\mathrm{dy} = \vartheta(x_0 - x),\ i = 1, 2.$$

Portanto, $v(x) = 0$ e tem suporte compacto em Ω. Por outro lado, segue do Lema 5.5 que

$$-\int_\Omega u_k \Delta v\,\mathrm{dx} = \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla v\,\mathrm{dx} \to 0,\ \text{quando } k \to \infty. \tag{5.5}$$

Como $-\Delta\vartheta = \delta_0$, sendo δ_0 a medida de Dirac concentrada na origem em $D'(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\begin{aligned}
-\Delta v(x) &= -(\Delta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) * \vartheta)(x_0 - x) = -\int_\Omega \Delta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})(x_0 - x - y)\vartheta(y)\,\mathrm{dy} \\
&= -\int_\Omega (\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2})(x_0 - x - y)\Delta\vartheta\,\mathrm{dy} = \rho_{\varepsilon_1}(x_0 - x) - \rho_{\varepsilon_2}(x_0 - x), \forall x \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$-\int_\Omega u_k \Delta\vartheta\,\mathrm{dx} = (\rho_{\varepsilon_1} * u_k)(x_0) - (\rho_{\varepsilon_2} * u_k)(x_0). \tag{5.6}$$

Logo, por (5.5) e (5.6), $U_{\varepsilon_1}(x_0) = U_{\varepsilon_2}(x_0)$. Com isso, vemos que a função

$$U_0(x) = U_\varepsilon(x),\ \text{onde } x \in \Omega \text{ é tal que} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon,$$

está bem definida e é de classe C^1.

Agora, devemos verificar que U_0 satisfaz as condições de contorno do problema dado. Fixe $\bar{x} \in \partial\Omega$ e $\eta > 0$. Seja $\bar{f} \in C^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que

$$\bar{f} = f \text{ sobre } \partial\Omega \text{ e } \int_\Omega |\nabla \bar{f}|^2\,\mathrm{dx} < \infty.$$

Pelo Lema 5.7 e a desigualdade triangular, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\Lambda_\delta(\bar{x})} |\nabla(u_k - \bar{f})|^2 \, dx = \int_{\Lambda_\delta(\bar{x})} |\nabla u_k - \nabla\bar{f}|^2 \, dx \leq \int_{\Lambda_\delta(\bar{x})} \left(|\nabla u_k| + |\nabla\bar{f}|\right)^2 dx$$
$$= \int_{\Lambda_\delta(\bar{x})} \left(|\nabla u_k|^2 + 2|\nabla u_k||\nabla\bar{f}| + |\nabla\bar{f}|^2\right) dx < \eta, \forall k \geq 1. \tag{5.7}$$

Dado $x \in \Lambda_{\frac{\delta}{2}}(\bar{x})$, seja $\varepsilon = \dfrac{1}{3}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Em particular,

$$0 < 4\varepsilon < 6\varepsilon < \delta. \tag{5.8}$$

Verifiquemos agora que existe $U_0 \in C^1(\Omega)$ tal que

$$U_\varepsilon(x) = U_0(x), \quad \forall x \in \Omega \text{ com } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon.$$

Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $|x - x_0| = 3\varepsilon = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, em particular, temos que $B(x, \varepsilon) \subset \Lambda_{4\varepsilon}(x_0)$. Como $u_k - \bar{f} = 0$ sobre $\partial\Omega$, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré 5.3, juntamente com as expressões (5.8) e (5.7), teremos

$$|(\rho_\varepsilon * u_k)(x) - (\rho_\varepsilon * \bar{f})(x)|^2 = \left|\int_{B(x,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x-y)(u_k - \bar{f})(y)\, dy\right|^2 \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x-y)(u_k - \bar{f})^2(y)\, dy$$
$$\leq C\,\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Lambda_{4\varepsilon}(x_0)} |\nabla(u_k - \bar{f})|^2 \, dx \leq C \int_{\Lambda_\delta(\bar{x})} |\nabla(u_k - \bar{f})|^2 \, dx \leq C\eta.$$

Fazendo $k \to \infty$, segue que

$$|U_0(x) - (\rho_\varepsilon * \bar{f})(x)|^2 \leq C\eta, \forall x \in \Lambda_{\frac{\delta}{2}}(\bar{x}). \tag{5.9}$$

Logo, pela continuidade uniforme de $\bar{f}$ em $\bar{\Omega}$, temos

$$\limsup_{x \to \bar{x}} |U_0(x) - f(\bar{x})|^2 \leq C\eta. \tag{5.10}$$

De fato, pela definição de limite superior, dado $\varepsilon > 0$ deve existir $\delta > 0$ tal que

$$\left|\sup_{x \in V_\delta} |U_0(x) - f(\bar{x})|^2\right| < \varepsilon,$$

onde V_δ é uma δ-vizinhança de $\bar{x}$. Agora, note que

$$\left|\sup_{x \in V_\delta} |U_0(x) - (\rho_\varepsilon * \bar{f})(x) + (\rho_\varepsilon * \bar{f})(x) - \bar{f}(x) + \bar{f}(x) - f(\bar{x})|\right|$$
$$\leq \left|\sup_{x \in V_\delta} |U_0(x) - (\rho_\varepsilon * \bar{f})(x)| + \sup_{x \in V_\delta} |(\rho_\varepsilon * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)| + \sup_{x \in V_\delta} |\bar{f}(x) - f(\bar{x})|\right| < \varepsilon,$$

por conta de (5.9), da propriedade de convergência da regularizante e a continuidade uniforme de $\overline{f}$ em $\overline{\Omega}$, e isso mostra que a desigualdade (5.10) é verdadeira. Então, como $\eta > 0$ é qualquer, obtemos que $\lim_{x \to \bar{x}} U_0(x) = f(\bar{x})$, isto é, $U_0 \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ e $U_0 = f$ sobre $\partial\Omega$.

Devido ao que provamos anteriormente, temos que U_0 é uma função admissível. Vamos mostrar que

$$\int_\Omega |\nabla U_0|^2 \,\mathrm{dx} \leq m_0.$$

De fato, sejam $\omega \subset\subset \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \mathrm{dist}(\partial\Omega, \omega)$. Agora, pela desigualdade de Young 5.4 temos

$$\begin{aligned}\left(\int_\omega |\nabla(\rho_\varepsilon * u_k)|^2 \,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\omega |\rho_\varepsilon * \nabla u_k|^2 \,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{B(x,\varepsilon)} |\rho_\varepsilon(x)| \,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$\int_\omega |\nabla U_0|^2 \,\mathrm{dx} = \int_\omega |\nabla U_\varepsilon|^2 \,\mathrm{dx} \leq m_0.$$

Como $\omega \subset \Omega$ é arbitrário, podemos considerar $\omega_n = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\right\}$ e a sequência $f_n = \chi_{\omega_n}|\nabla U_0|^2$ de modo que $|f_n| \leq |\nabla U_0|^2$ e $f_n \to |\nabla U_0|^2$ em Ω. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_\Omega |\nabla U_0|^2 \,\mathrm{dx} \leq m_0. \qquad \square$$

Observação. Para verificar que $-\Delta\vartheta = \delta_0$, basta utilizar a identidade (2.18) de (GILBARG; TRUDINGER, 2001, Pág. 18) com u sendo uma função teste ϕ e Γ a solução fundamental ϑ.

6 UM POUCO SOBRE ANÁLISE FUNCIONAL

Neste capítulo veremos diversos resultados importantes para que os métodos a serem abordados possam ser aplicados. Além disso, algumas ferramentas da Análise Funcional serão consideradas.

6.1 MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO

No Capítulo anterior, vimos uma aplicação do método de minimização ao Problema de Dirichlet, porém não foram dados muitos detalhes de como essa ferramenta funciona e quais as condições para utilizá-la. Nosso intuito agora será explicitar tais informações a respeito do método para que posteriormente possamos ver sua aplicação ao problema coercivo. Como referência, foi utilizado o Capítulo 1 de (STRUWE, 2008).

Muitos problemas da análise podem ser reescritos em forma de equações funcionais $F(u) = 0$ (em geral, não lineares), cuja solução é procurada em uma classe de funções admissíveis pertencendo a algum espaço de Banach V.

Dentre essas equações, uma classe particular delas é a classe das equações de Euler-Lagrange, cujas soluções podem ser obtidas como pontos críticos de funcionais. Elas possuem a forma

$$DE(u) = 0,$$

onde E é um funcional definido em V, o qual possui diferencial de Frechét sendo DE. Dizemos que tais equações estão na *forma variacional*.

Para iniciar as discussões, precisamos fazer algumas definições.

Definição 6.1. Sejam V, W espaços de Banach e $f : U \subset V \to W$. Considere $x_0 \in U$ ponto interior. Dizemos que f é diferenciável (a Frechét) em x_0 sempre que existe uma transformação linear limitada $D_f : V \to W$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - D_f h\|_W}{\|h\|_V} = 0.$$

Definição 6.2. Seja V um espaço de Banach com espaço dual V' e dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V' \to \mathbb{R}$. Considere ainda um funcional $E : V \to \mathbb{R}$ diferenciável a Frechét e $DE : V \to V'$ sua derivada de Frechét. Dizemos que a derivada direcional de E em u na direção de v é

$$\frac{d}{dt}E(u + tv) = \lim_{t\to\infty} \frac{E(u + tv) - E(u)}{t}.$$

Observação. Com relação à diferencial de Frechét, é válido que

$$\frac{d}{dt}E(u + tv) = \langle DE(u), v\rangle = DE(u)v.$$

Considerando DE, temos algumas definições para pontos satisfazendo determinadas propriedades, como mostra a próxima definição.

Definição 6.3. Seja E um funcional diferenciável em V. Então,

a) Dizemos que $u \in V$ é um *ponto crítico* de E se $DE(u) = 0$. Caso contrário u é dito *ponto regular*;

b) Dizemos que $\beta \in \mathbb{R}$ é um *valor crítico* de E se existe um ponto crítico $u \in V$ de E tal que $E(u) = \beta$. Caso contrário, β é dito *valor regular*;

c) Dado $M \subset V$, dizemos que $u \in M$ é um *mínimo absoluto* de E em M se para todo $v \in M$ tem-se $E(v) \geq E(u)$. Além disso, dizemos que $u \in M$ é *mínimo relativo* de E em M se para alguma vizinhança U de u em V, u é ponto de mínimo absoluto de E em $M \cap U$;

d) Dizemos que $u \in V$ é *ponto de sela* para E se u é um ponto crítico de E tal que toda vizinhança U de u em V contém pontos v, w satisfazendo $E(v) < E(u) < E(w)$. Ou seja, os pontos de sela são constituídos pelos pontos críticos que não são mínimos nem máximos locais.

Nosso intuito, ao longo desta seção, consiste em estudar um método para provar a existência de mínimos relativos, conhecido como *método direto* do cálculo das variações. Para isso, são necessários algumas definições e resultados da topologia.

Definição 6.4. Sejam X um conjunto e $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que τ é uma *topologia* em X se satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\varnothing, X \in \tau$;

b) Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ com $A_\lambda \in \tau, \forall\lambda \in \Lambda$, tem-se $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$;

c) Dados $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, tem-se $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Definição 6.5. Dizemos que o par (X, τ), sendo τ topologia, é um espaço topológico.

Observação. Os elementos de τ são chamados *abertos da topologia* τ ou simplesmente, *abertos* de X. Por simplicidade, nos referiremos a (X, τ) apenas por *espaço topológico* X.

Existe um tipo de espaço topológico bastante interessante, os espaços de Hausdorff.

Definição 6.6. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $U \subset X$ é uma vizinhança de $x \in X$ se U é um aberto da topologia de X contendo x.

Definição 6.7. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um *espaço de Hausdorff* se para cada par de pontos distintos $x_1, x_2 \in X$, existem vizinhanças U_1 e U_2 de x_1 e x_2, respectivamente, tais que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Com isso, podemos estabelecer um resultado necessário para demonstrar o próximo teorema.

Lema 6.1 (Teorema de Interseção de Cantor)**.** *Seja X um espaço topológico. Se $(C_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência decrescente de compactos não vazios que são subconjuntos fechados de X, então*

$$\bigcap_{k\geq 1} C_k \neq \varnothing.$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que toda subcoleção finita desses conjuntos C_k possui interseção não vazia. Fixe um elemento C_1 em $\{C_k\}_{k\geq 1}$ e defina $G_k = X \setminus C_K$. Suponha que nenhum ponto de C_1 pertença a C_k, para todo $k \geq 1$. Então, $\{G_k\}_{k\geq 1}$ é uma cobertura por abertos de C_1 que é compacto, logo, existe uma subcobertura finita $\{C_{k_j}\}_{j=1}^{n}$ de C_1, isto é, $C_1 \subset G_{k_1} \cup \cdots \cup G_{k_n}$. Mas isso nos diz que

$$C_1 \cap C_{k_1} \cap \cdots \cap C_{k_n} = \varnothing,$$

uma contradição ao que observamos inicialmente. □

Temos então o seguinte,

Teorema 6.1. *Seja M um espaço topológico de Hausdorff e suponha que $E : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfaz a condição de compacidade limitada (propriedade de Heine-Borel), isto é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$K_\alpha = \{u \in M \mid E(u) \leq \alpha\}$$

é compacto. Então, E é uniformemente limitado inferiormente em M e atinge seu ínfimo.

Demonstração. Suponha que E satisfaz a propriedade de Heine-Borel e vamos assumir que $E \not\equiv +\infty$ (podemos fazer isso pois, quando $E \equiv +\infty$, temos $E(u) = +\infty = \inf_M E$). Sejam

$$\alpha_0 = \inf_M E \geq -\infty,$$

e $(\alpha_m)_{m\geq 1}$ uma sequência estritamente decrescente com $\alpha_m \to \alpha_0$ quando $m \to \infty$. Considere $K_m = K_{\alpha_m}$. Por hipótese, temos que cada K_m é compacto e não vazio, pois como α_0 é ínfimo, segue da própria definição de ínfimo a existência de $u \in M$ com $\alpha_0 \leq E(u) \leq \alpha_m$. Além disso, $K_m \supset K_{m+1}$ para todo $m \geq 1$. Como cada K_m é compacto e M é Hausdorff, sabemos que eles são fechados em M, então podemos aplicar o Lema 6.1 para obter que existe $u \in \bigcap_{m\geq 1} K_m$ satisfazendo

$$E(u) \leq \alpha_m, \quad \forall m \geq 1.$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos que

$$E(u) \leq \alpha_0 = \inf_M E. \qquad \square$$

Observação. O resultado acima continua válido caso a compacidade seja trocada por compacidade sequencial, isto é, se toda sequência $(u_m)_{m\geq 1}$ em K_m possui subsequência convergente, então E é limitado inferiormente e atinge seu ínfimo.

Podemos observar que se $E : M \to \mathbb{R}$ satisfaz a propriedade de Heine-Borel, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\{u \in M \mid E(u) > \alpha\} = M \setminus K_\alpha,$$

é aberto. Nesse caso, dizemos que E é *semi contínuo inferiormente* (ou *sequencialmente semi contínuo inferiormente*, no caso da compacidade sequencial).

Em geral, é frequentemente mais fácil verificar as condições de um caso especial do teorema anterior, que para ser demonstrado, necessitamos do Teorema de Eberlein-Šmulian, enunciado abaixo.

Teorema 6.2 (Eberlein-Šmulian)**.** *Seja M um subespaço de um espaço de Banach V. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) M é fracamente sequencialmente compacto, isto é, toda sequência em M possui uma subsequência a qual converge fracamente para um elemento de V;

b) Todo subconjunto enumerável de M possui um ponto de acumulação fraco em V, isto é, um ponto tal que toda vizinhança fraca contém um elemento do subconjunto infinito;

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (DUNFORD; SCHWARTZ, 1988, Teo. 1, Pág. 430). $\square$

Assim, temos

Teorema 6.3. *Sejam V um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$ e $M \subset V$ fracamente fechado. Suponha que $E : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é coercivo e fracamente sequencialmente semi contínuo inferiormente em M, isto é, E satisfaz as seguintes condições, respectivamente*

a) $E(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty, u \in M$;

b) Para todo $u \in M$ e toda sequência $(u_m)_{m\geq 1}$ em M tal que $u_m \rightharpoonup u$ em V, tem-se

$$E(u) \leq \liminf_{m\to\infty} E(u_m).$$

Então, E é limitado inferiormente em M e atinge seu ínfimo em M.

Demonstração. Sejam $\alpha_0 = \inf_M E$ e $(u_m)_{m\geq 1}$ uma sequência minimizante em M. Como

$$E(u_m) \to \alpha_0 < +\infty,$$

segue da coercividade de E que $\|u_m\| \not\to +\infty$, isto é, existe uma subsequência $(u_{m_k})_{k\geq 1}$ convergente em V. Sendo V reflexivo, sabemos que V é espaço de Banach e, portanto, pelo Teorema de Eberlein-Šmulian podemos assumir que $u_{m_k} \rightharpoonup u$ para algum $u \in V$.

Mas M é fracamente fechado, então $u \in M$ e segue da semi continuidade inferior fraca que

$$E(u) \leq \liminf_{m\to\infty} E(u_m) = \alpha_0. \qquad \square$$

6.2 AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES DO LAPLACIANO

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto suave e limitado com fronteira $\partial\Omega$. Uma autofunção associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, é uma solução não nula do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

Para os próximos resultados, utilizaremos a formulação fraca do problema (6.1), que consiste em encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, vale

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \,.$$

Antes de prosseguirmos, é necessário relembrar algumas definições necessárias para enunciar e demonstrar o Teorema de Lax-Milgram. Também, apresentaremos um teorema (BREZIS, 2010, Teo. 6.11, Pág. 167) que auxiliará na demonstração da existência de uma sequência não decrescente de autovalores para o Laplaciano.

Definição 6.8. Seja H um espaço vetorial normado. Dizemos que $b : H \times H \to \mathbb{R}$ é uma *forma bilinear* se satisfaz

a) $b(u + u', v) = b(u, v) + b(u', v)$,

b) $b(u, v + v') = b(u, v) + b(u, v')$,

c) $b(\lambda u, \mu v) = \lambda b(u, v) + \mu b(u, v)$,

para todos $u, v, u', v' \in H$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Além disso, dizemos que b é *contínua* (ou *limitada*) se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|b(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \,, \forall u, v \in H.$$

Com isso, podemos demonstrar o

Teorema 6.4 (Lax-Milgram)**.** *Se $b : H \times H \to \mathbb{R}$ for uma forma bilinear limitada e existe $C > 0$ de modo que $|b(u, u)| \geq C \|u\|^2$ para todo $u \in H$. Então para todo $f \in H'$, existe um único $v_f \in H$*

com

$$f(u) = b(v_f, u), \forall u \in H.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (BREZIS, 2010, Cor. 5.8, Pág. 140) $\square$

Para o próximo teorema, é necessário definir o conceito de operador compacto.

Definição 6.9. Um operador limitado $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito *compacto* se $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F, onde B_E denota um conjunto limitado em E. Denotamos por $\mathcal{K}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores compactos de E em F e, quando $E = F$, simplesmente escrevemos $\mathcal{K}(E)$.

Observação. Equivalentemente, T é compacto se para toda sequência $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ limitada, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $(Tx_{n_k})_{k\geq 1}$ é convergente em F.

Teorema 6.5. *Sejam H um espaço de Hilbert separável e T um operador compacto autoadjunto. Então, existe uma base de Hilbert composta de autovetores de T.*

Demonstração. A demonstração completa pode ser encontrada em (BREZIS, 2010, Teo. 6.11, Pág. 167). $\square$

Com esses dois resultados, obtemos o seguinte,

Teorema 6.6. *Existe uma sequência ilimitada de autovalores de (6.1) satisfazendo*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots,$$

e uma sequência de autofunções associadas que formam uma base de Hilbert para $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. No espaço $H_0^1(\Omega)$, defina o produto interno

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

e a correspondente norma $\|u\|_a = \sqrt{a(u, v)}$. Observe que

(i) $|a(u, v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla v| \, dx \leq |\nabla u|_2 \cdot |\nabla v|_2;$

(ii) $|a(u, v)| = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \Rightarrow |a(u, v)| \leq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)};$

para todos $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Fixando $u \in H_0^1(\Omega)$ e aplicando o Teorema 6.4 com

$$f(v) = \int_\Omega uv \, dx,$$

temos que existe um único $Au \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(Au, v) = f(v) = \int_\Omega uv\, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente, o problema (6.1) é equivalente a $\lambda^{-1}u = Au$, com $\lambda \neq 0$. Como $a(Au, u) = \int_\Omega u^2\, dx$, vemos que

$$\lambda_i^{-1} = a(Ae_i, e_i) = \int_\Omega e_i^2\, dx > 0, \forall i \geq 1,$$

onde cada e_i é uma autofunção do Laplaciano. Observemos que o operador A é simétrico pois

$$a(v, Au) = a(Au, v) = \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega vu\, dx = a(Av, u).$$

Além disso, segue das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré que

$$\|Au\|_a^2 = a(Au, Au) = \int_\Omega uAu\, dx \leq |u|_2\, |Au|_2 \leq C\, |u|_2\, \|Au\|_a$$

e, consequentemente, $\|Au\|_a \leq C\,|u|_2$. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, sabemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, logo o operador A é compacto.

De fato, seja $(u_m)_{m\geq1} \subset H_0^1(\Omega)$ limitada. Queremos mostrar que existe uma subsequência $(u_{m_k})_{k\geq1}$ tal que Au_{m_k} converge em $H_0^1(\Omega)$. Por Rellich-Kondrachov, temos a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, então existe $(u_{m_k})_{k\geq1}$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_{m_k} \to u \in L^2(\Omega)$.

Além disso, note que $Au_{m_k} \to v$ para algum $v \in H_0^1(\Omega)$, pois

$$\|A(u_{m_i} - u_{m_k})\|_a \leq C\,|u_{m_i} - u_{m_k}|_2\,.$$

Como (u_{m_k}) é de Cauchy, temos (Au_{m_k}) uma sequência de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$ e, portanto, $Au_{m_k} \to v \in H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, temos que $Au = v$. Portanto, A é compacto.

Logo, como $H_0^1(\Omega)$ é separável, pelo Teorema 6.6, e A é um operador compacto e simétrico, o resultado segue do Teorema 6.5. $\square$

Usando esse teorema, podemos apresentar uma caracterização para os autovalores do Laplaciano. Para isso, precisamos do seguinte teorema,

Teorema 6.7. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : H \to H$ um operador compacto simétrico com posto infinito. Considere dados os autovetores $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ e os correspondentes autovalores $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$. Então, existe um autovalor λ_n de A tal que*

$$|\lambda_n| = \max\left\{|\langle Au, u\rangle| : u \in H, \|u\| = 1, \langle u, e_1\rangle = \cdots = \langle u, e_{n-1}\rangle = 0\right\},$$

e $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. A demonstração completa pode ser encontrada em (WILLEM, 2013, Teo. 3.4.7, Pág. 68). □

Então, os autovalores do Laplaciano podem ser caracterizados como abaixo.

Proposição 6.1. *Para cada $n \geq 1$,*

$$\lambda_n = \min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega u^2\,dx = 1, \int_\Omega ue_1\,dx = \cdots = \int_\Omega ue_{n-1}\right\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 6.7,

$$|\lambda_n^{-1}| = \max\left\{|\langle Au, u\rangle| : u \in H_0^1(\Omega), \|u\| = 1, \langle u, e_k\rangle = 0, \forall 1 \leq k \leq n-1\right\}.$$

De fato, seja

$$X_n = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \langle u, e_1\rangle = \cdots = \langle u, e_{n-1}\rangle = 0\right\}.$$

Então, X_n é invariante por A pois

$$\langle Au, e_i\rangle = \langle \lambda^{-1}u, e_i\rangle = \lambda^{-1}\langle u, e_i\rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1.$$

Tome $A_n = A|_{X_n}$, então A_n é um operador não nulo, simétrico e compacto. Assim, pelo Teorema 3.4.6 de (WILLEM, 2013, Pág. 68), existe um autovalor λ_n de A_n tal que $|\lambda_n| = \|A_n\|$ e um autovetor $e_n \in X_n$ tal que $\|e_n\| = 1$. Por construção $\langle e_n, e_i\rangle = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Agora, note que

$$|\langle Ae_n, e_n\rangle| = |\langle \lambda_n e_n, e_n\rangle| = |\lambda_n||\langle e_n, e_n\rangle| = |\lambda_n|,$$

e também, para todo $u \in X_n$, temos

$$|\langle Au, u\rangle| = |\langle A_n u, u\rangle| \leq \sup_{\|u\|=1} |\langle A_n u, u\rangle| = \|A_n\| = |\lambda_n|.$$

Portanto,

$$|\lambda_n^{-1}| = \max\left\{|\langle Au, u\rangle| : u \in H_0^1(\Omega), \|u\| = 1, \langle u, e_i\rangle = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n-1\right\}.$$

Como os autovalores são positivos, segue que

$$\lambda_n = \min\left\{\frac{\langle u, u\rangle}{\langle Au, u\rangle} : u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0, \langle u, e_i\rangle = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n-1\right\}.$$

Em particular, considerando o produto interno $a(\cdot,\cdot)$ definido anteriormente, concluímos que

$$\lambda_n = \min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega u^2\,dx = 1, \langle u, e_i\rangle = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n-1\right\}.$$ □

Observação. A partir do resultado anterior, é possível obter a chamada *Desigualdade Variacional*, cuja demonstração segue diretamente da definição de mínimo. Para toda $u \in H_0^1(\Omega) \cap H_{n-1}$, temos que

$$\lambda_n \left|u\right|_2^2 \leq \left\|u\right\|^2, \tag{6.2}$$

onde $H_{n-1} = \left\{e_1, \ldots, e_{n-1}\right\}^{\perp}$.

Olhando apenas para o primeiro autovalor, isto é, λ_1, podemos obter importantes propriedades que ele possui. Uma delas é uma condição suficiente para que determinada função u seja uma autofunção correspondente a λ_1,

Teorema 6.8. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\left|u\right|_2 = 1$ e $\left|\nabla u\right|_2^2 = \lambda_1$. Então u é uma autofunção correspondente ao autovalor λ_1.*

Demonstração. Seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Note que a função

$$g(\varepsilon) = \left|\nabla(u + \varepsilon v)\right|_2^2 - \lambda_1 \left|u + \varepsilon v\right|_2^2 \geq 0,$$

e atinge seu mínimo em $\varepsilon = 0$, isto é, $g'(0) = 0$. Como

$$g'(\varepsilon) = 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle_2 + 2\varepsilon\langle \nabla v, \nabla v\rangle_2 - 2\lambda_1\langle u, v\rangle_2 - 2\lambda_1\varepsilon\langle v, v\rangle_2,$$

obtemos que

$$0 = g'(0) = 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle_2 - 2\lambda_1\langle u, v\rangle_2,$$

portanto

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \lambda_1 \int_\Omega uv \, dx = 0.$$

□

Além disso, podemos demonstrar que o primeiro autovalor do Laplaciano, isto é, λ_1, é simples e a autofunção associada e_1 tem sinal definido, isto é, positiva ou negativa. Para provar isso, utilizaremos o seguinte resultado.

Lema 6.2. *Seja $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. Então, $u^+, u^-, |u| \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, e valem*

$$\nabla u^+ = \chi_{\{u>0\}}\nabla u, \quad \nabla u^- = -\chi_{\{u<0\}}\nabla u, \quad \nabla|u| = \mathrm{sgn}(u)\nabla u.$$

Demonstração. A demonstração completa pode ser encontrada em (WILLEM, 2013, Cor. 6.1.14, Pág. 118). □

Temos então

Proposição 6.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto suave, conexo e limitado. Então, o autovalor λ_1 de (6.1) é simples, e a autofunção e_1 associada tem sinal definido qtp em Ω.*

Demonstração. Seja u uma autofunção associada a λ_1 tal que $|u|_2 = 1$. Pelo Lema anterior, temos que $v = |u| \in H_0^1(\Omega)$ e $|\nabla v|_2^2 = |\nabla u|_2^2 = \lambda_1$. Como $|v|_2 = |u|_2 = 1$, temos pelo teorema anterior que v é uma autofunção associada a λ_1.

Agora, suponha que $u^+ \not\equiv 0$. Então, pelo que provamos acima, e observando que

$$-\Delta u^+ = -\chi_{\{u>0\}}\Delta u = \lambda\chi_{\{u>0\}}u = \lambda u^+,$$

obtemos que u^+ é uma autofunção associada a λ_1. Além disso, temos que $-\Delta u^+ \geq 0$ e, pelo princípio do máximo (EVANS, 2010, Teo. 4, Pág. 27), segue que $u^+ > 0$ qtp em Ω. Assim, não pode existir $x \in \Omega$ tal que $u(x) = 0$, donde segue que $u = u^+$. Analogamente, se $u^- \not\equiv 0$, então $-u = u^- > 0$ qtp em Ω.

Resta mostrar que e_1 tem sinal definido. Pela parte anterior, podemos assumir que $e_1 > 0$ qtp em Ω. Com isso, se e_2 é outra autofunção associada a λ_1, então e_2 é positiva ou negativa qtp. Como é e_1 e e_2 são autofunções, deve valer

$$\langle e_1, e_2\rangle_2 = \int_\Omega e_1 e_2 \, dx = 0.$$

Daí, segue de (BRÉZIS, 1983, Lema IV.2, Pág.61-61) que $e_1 e_2 = e_1|e_2| \operatorname{sgn}(e_2) = 0$ qtp, o que é um absurdo, provando assim o resultado. $\square$

Para compreender melhor o que foi visto até agora, temos um exemplo prático em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.1. Seja $\Omega = (0, \pi)$. Então, o problema (6.1) se torna

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & \text{em } (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Usando a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e o Lema de Du Bois-Reymond, obtemos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Consequentemente, temos $\lambda_n = n^2$ e $e_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin nx}{n}$, basta resolver a EDP acima (que nada mais é do que uma EDO de segunda ordem) para obter essas expressões. Agora, pelos resultados já vistos, a sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Hilbert em $H_0^1(\Omega)$ com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_0^\pi u'v' \, dx,$$

e a sequência $(ne_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Hilbert de $L^2(\Omega)$ com produto interno

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^\pi uv \, dx\,.$$

6.3 OPERADORES COMPACTOS E ALTERNATIVA DE FREDHOLM

Outro método muito utilizado no estudo de EDP's é a Alternativa de Fredholm, aplicável para operadores compactos, a qual fornece condições para existência e unicidade de soluções.

Começaremos apresentando alguns resultados iniciais sobre operadores compactos.

Teorema 6.9. *O conjunto $\mathcal{K}(E, F)$ (dos operadores compactos de E em F) é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(E, F)$ (munido com a topologia associada a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$)*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (BREZIS, 2010, Teo. 6.1, Pág. 157) □

Para o próximo resultado, é preciso definir a ideia de operador de posto finito.

Definição 6.10. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é de *posto finito* se a imagem de T tem dimensão finita.

Note que todo operador de posto finito é um operador compacto. De fato, se T é de posto finito, então por definição $\dim(T(E)) < \infty$. Logo, toda sequência limitada em E, possui imagem limitada em $T(E)$e, portanto, admite subsequência convergente, mostrando que T é compacto.

Assim, temos o seguinte resultado,

Corolário 6.1. *Sejam (T_n) uma sequência de operadores de posto finito e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$. Então, $T \in \mathcal{K}(E, F)$.*

Antes de passar partir para a Alternativa de Fredholm, temos mais dois resultados.

Proposição 6.3. *Sejam E, F, G espaços de Banach. Considere $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{K}(F, G)$ (ou, $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$). Então, $S \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$.*

Demonstração. Seja $(u_m)_{m\geq1}$ uma sequência limitada em E. Como T é um operador limitado, sabemos que $(Tu_m)_{m\geq1}$ é uma sequência limitada em F. Assim, como S um operador compacto, temos que $((S \circ T)u_m)_{m\geq1}$ possui subsequência convergente em G. Portanto, $S \circ T$ é compacto. □

Teorema 6.10. *Se $T \in \mathcal{K}(E, F)$, então $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$, onde T^* denota o operador adjunto de T.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\overline{T^*(B_{F'})}$ é compacto em E', onde $B_{F'}$ é a bola unitária em F'.

Seja $(v_n)_{n\geq1}$ uma sequência em $B_{F'}$. Defina $K = \overline{T(B_E)} \subset F$ que é compacto. Considere o conjunto $\mathcal{H} \subset C(K)$ definido por

$$\mathcal{H} = \{\varphi_n \mid \varphi_n(x) = \langle v_n, x\rangle_{E',E}, n = 1, 2, ...\}.$$

Então, temos

(i) $\|\varphi_n\| = \sup_{x\in K} |\varphi_n(x)| = \sup_{x\in K} |\langle v_n, x\rangle_{E',E}| \leq \sup_{x\in K} \|v_n\| \, \|x\| \leq \sup_{x\in K} \|x\|, \forall n \geq 1;$

(ii) $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| = |\langle v_n, x-y\rangle_{E',E}| \leq \|v_n\| \, \|x-y\| \leq \|x-y\|, \forall n \geq 1.$

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência $(\varphi_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge uniformemente em K para algum $\varphi \in C(K)$. Em particular,

$$\sup_{u\in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu\rangle_{E',E} - \varphi(Tu)| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Portanto,

$$\sup_{u\in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu\rangle_{E',E} - \langle v_{n_\ell}, Tu\rangle_{E',E}| \to 0, \quad k, \ell \to \infty,$$

ou seja, $\left\| T^*_{n_k} - T^*_{n_\ell} \right\|_{E'} \to 0$ quando $k, \ell \to \infty$. Logo, $(T^*_{n_k})_{k\geq 1}$ converge em E'. □

Veremos agora alguns resultados preliminares para que possamos enunciar e demonstrar a Alternativa de Fredholm. Temos

Lema 6.3 (Lema de Riesz). *Sejam E um espaço vetorial normado e $M \subset E$ um subespaço fechado tal que $M \neq E$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $u \in E$ tal que*

$$\|u\| = 1 \quad e \quad \operatorname{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Demonstração. Seja $v \in E$ com $v \notin M$. Como M é fechado, então

$$d = \operatorname{dist}(v, M) > 0$$

Escolha $m_0 \in M$ tal que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Assim,

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|},$$

satisfaz as propriedades desejadas. De fato, $\|u\| = 1$ e, para cada $m \in M$, temos

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| = \frac{\|v - m_0 - m\,\|v - m_0\|\|}{\|v - m_0\|} \geq \frac{d}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \varepsilon,$$

pois $m_0 + m\,\|v - m_0\| \in M$. □

Teorema 6.11 (Teorema de Riesz). *Seja E um espaço vetorial normado com B_E compacta (a bola unitária em E). Então,* $\dim E < \infty$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\dim E = \infty$. Então, existe uma sequência $(E_n)_{n\geq 1} \subset E$ de subespaços de dimensão finita tais que $E_{n-1} \subset E_n$ e $E_{n-1} \neq E_n$. Pelo Lema anterior, existe uma sequência $(u_n)_{n\geq 1}$ com $u_n \in E_n$ tal que $\|u_n\| = 1$ e $\operatorname{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \dfrac{1}{2}$. Em particular,

$$\|u_m - u_n\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall m < n.$$

Portanto, (u_n) não tem subsequência convergente, contradizendo a hipótese de B_E ser compacta.

□

Por fim, apresentamos a Alternativa de Fredholm que será utilizada no próximo capítulo para caracterizar quando o problema de Dirichlet tem solução no caso ressonante.

Teorema 6.12 (Alternativa de Fredholm)**.** *Seja $T \in \mathcal{K}(E)$. Então,*

a) $\ker(I - T)$ *tem dimensão finita;*

b) $\operatorname{Im}(I - T)$ *é fechado e, mais precisamente,* $\operatorname{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^{\perp}$*;*

c) $\ker(I - T) = \{0\} \iff \operatorname{Im}(I - T) = E$*;*

d) $\dim(\ker(I - T)) = \dim(\ker(I - T^*))$*.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (BREZIS, 2010, Teo. 6.6, Pág. 160).

□

Observação. Por meio da Alternativa de Fredholm, é possível caracterizar a solubilidade da equação $u - Tu = f$. Nesse caso, uma das seguintes afirmações é válida

– Para cada $f \in E$, a equação $u - Tu = f$ tem uma única solução;

– A equação homogênea $u - Tu = 0$ admite n soluções linearmente independentes e, nesse caso, a equação $u - Tu = f$ é solúvel se, e somente se, f satisfaz as n condições de ortogonalidade, isto é,
$$f \in \ker(I - T^*)^{\perp}.$$

7 APLICAÇÃO AO PROBLEMA COERCIVO

Nosso intuito agora, é abordar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

com $\lambda \neq 0$ por meio de diferentes métodos, a fim de obter soluções para essa EDP.

Primeiramente, devemos obter um *funcional energia* associado ao problema dado. Multiplicando a primeira equação em (7.1) por uma função teste $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ e integrando, temos

$$\int_{\Omega} -\varphi \Delta u \, dx - \lambda \int_{\Omega} \varphi u \, dx - \int_{\Omega} \varphi f \, dx = 0.$$

Fazendo uma integração por partes na primeira integral e reagrupando os termos, segue que

$$\int_{\Omega} (\nabla\varphi \cdot \nabla u - \lambda\varphi u - \varphi f) \, dx = 0. \tag{7.2}$$

A expressão (7.2) é chamada *formulação fraca* do problema (7.1), a qual será utilizada para a aplicação de cada método.

7.1 MINIMIZAÇÃO

Com base na expressão (7.2), podemos definir um funcional energia associado o problema, o qual é dado por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega} u^2 \, dx - \int_{\Omega} fu \, dx .$$

Dessa forma,

$$\frac{d}{dt}E(u + t\varphi) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 - |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{\Omega}(u + t\varphi)^2 - u^2 \, dx - \lim_{t\to 0}\int_{\Omega} f(u + t\varphi - u) \, dx$$

Calculando cada um dos limites acima, obtemos

- $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 - |\nabla u|^2 \, dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{\Omega} 2t\nabla u \cdot \nabla\varphi + t^2|\nabla\varphi|^2 \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx;$
- $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{\Omega}(u + t\varphi)^2 - u^2 \, dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{\Omega} 2tu\varphi + t^2\varphi^2 \, dx = \lim_{t\to 0}\int_{\Omega} u\varphi + \frac{t}{2}\varphi^2 \, dx = \int_{\Omega} u\varphi \, dx;$
- $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\Omega} f(u + t\varphi - u) \, dx = \lim_{t\to 0}\int_{\Omega} tf\varphi \, dx = \int_{\Omega} f\varphi \, dx .$

Assim, segue que

$$\frac{d}{dt}E(u + t\varphi) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + \lambda u\varphi - f\varphi)\,\mathrm{dx} = E'(u)\varphi.$$

Por resultados anteriores, sabemos que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e, portanto, é reflexivo. Além disso, recorrendo às desigualdades de Young com ε e variacional, provamos que E é coercivo.

Proposição 7.1 (Desigualdade de Cauchy com ε)**.** *Para todos $a, b > 0$ e $\varepsilon > 0$, vale que*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Demonstração. Basta escrever

$$ab = \left(\sqrt{2\varepsilon}a\right)\left(\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)$$

e aplicar a desigualdade de Cauchy, isto é,

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \iff ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

□

Assim, podemos notar que

(i) Se $\lambda > 0$, então

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 - \int_\Omega fu\,\mathrm{dx} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 - |f|_2\,|u|_2$$
$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - |u|_2^2\left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon\right) - \frac{|f|_2^2}{4\varepsilon} \geq \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda + 2\varepsilon}{2\lambda_1}\right).$$

Logo, para E ser coercivo, devemos ter

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda + 2\varepsilon}{2\lambda_1} > 0 \iff \lambda_1 - 2\varepsilon > \lambda.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos considerá-lo bem pequeno, e assim verificamos que a coercividade ocorre quando $\lambda < \lambda_1$.

(ii) Se $\lambda < 0$, então

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - |f|_2\,|u|_2 \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{|f|_2}{4\varepsilon} - \varepsilon\,|u|_2 \geq \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right) - \frac{|f|_2}{4\varepsilon}.$$

Logo, para que E seja coercivo, deve valer

$$\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\lambda_1} > 0 \iff \varepsilon < \frac{\lambda_1}{2}.$$

Dentre as condições do Teorema de Minimização, resta apenas verificar que E é fracamente semi-contínuo inferiormente. Para os dois primeiros termos da expressão de E, podemos fazer uso do seguinte resultado da Análise Funcional,

Proposição 7.2. *Seja H um espaço de Hilbert. Se $u_m \rightharpoonup u \in H$, então $\liminf_{m\to\infty} \|u_m\| \geq \|u\|$.*

Demonstração. Suponha que $u_m \rightharpoonup u$. Existem dois casos a considerar:

(i) Se $u = 0$, então não há o que provar;

(ii) Se $u \neq 0$, segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\|u_m\| \, \|u\| \geq \langle u, u_m \rangle, \quad \forall m \geq 1.$$

Mas, pela hipótese, sabemos que $\langle u, u_m \rangle \to \langle u, u \rangle = \|u\|^2$. Portanto,

$$\liminf_{m\to\infty} \|u_m\| \, \|u\| \geq \liminf_{m\to\infty} \langle u, u_m \rangle = \|u\|^2 \Rightarrow \liminf_{m\to\infty} \|u_m\| \geq \|u\| \, .$$

□

Assim, notamos ser suficiente mostrar que

$$\int_\Omega f u_m \, dx \to \int_\Omega f u \, dx, \quad f \in L^2(\Omega) \, .$$

Isso segue diretamente da definição de convergência fraca, tendo em vista a seguinte caracterização do espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

Proposição 7.3. *Seja $F \in H_0^{-1}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)'$. Então, existem funções $f_0, f_1 \in L^2(\Omega)$ tais que*

$$\langle F, u \rangle = \int_\Omega f_0 u \, dx + \int_\Omega f_1 u' \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (BREZIS, 2010, Prop. 8.14, Pág. 219). □

Portanto, podemos aplicar o Teorema de Minimização para concluir que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ minimizante de E, o qual resolve o problema (7.2).

7.2 TEOREMA DE LAX-MILGRAM

Para podermos aplicar Lax-Milgram, é preciso definir os elementos que satisfaçam as propriedades pedidas pelo enunciado. Com base na forma variacional (7.2), defina o funcional $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e a forma $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

(i) $F(v) = \int_\Omega fv\,\mathrm{dx}$;

(ii) $B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{dx} - \lambda \int_\Omega uv\,\mathrm{dx}$.

Então, as seguintes propriedades são satisfeitas,

(i) B é bilinear;

(ii) $|B(u,v)| \le \alpha \|u\| \|v\|, \alpha > 0, \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$;

(iii) $\exists C > 0$ tal que $B(u,u) \ge C \|u\|^2$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$;

(iv) F é um funcional linear limitado.

De fato,

(i) Dados $\mu, \eta \in \mathbb{R}$, é válido que

$$\begin{aligned} B(\mu u, \eta v) &= \int_\Omega \nabla(\mu u) \cdot \nabla(\eta v)\,\mathrm{dx} - \lambda \int_\Omega (\mu u)(\eta v)\,\mathrm{dx} \\ &= (\mu\eta)\left[\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{dx} - \lambda \int_\Omega uv\,\mathrm{dx}\right] = (\mu\eta) B(u,v). \end{aligned}$$

(ii) Para todas $u, v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &\le \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{dx}\right| + |\lambda| \left|\int_\Omega uv\,\mathrm{dx}\right| \le |\nabla u|_2 |\nabla v|_2 + |\lambda| |u|_2 |v|_2 \\ &\le (C|\lambda| + 1) \|u\| \|v\| = \alpha \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

(iii) Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{dx} - \lambda \int_\Omega u^2\,\mathrm{dx} = |\nabla u|_2^2 - \lambda |u|_2^2 \\ &= \|u\|^2 - \lambda |u|_2^2 \ge \|u\|^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \|u\|^2 = \|u\|^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right). \end{aligned}$$

Assim, para que B satisfaça a condição de coercividade, devemos ter

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0 \iff \lambda < \lambda_1.$$

No caso em que $\lambda < 0$, basta notar que

$$B(u,u) = \|u\|^2 - \lambda |u|_2^2 \ge \|u\|^2.$$

(iv) Sabendo que $f \in L^2(\Omega)$ está fixada, temos

$$|F(v)| = \left| \int_\Omega fv \, \mathrm{dx} \right| \leq |f|_2 \, |v|_2 \leq C \, |f|_2 \, \|v\| \leq C \, \|v\| \, .$$

Logo, f é contínuo.

Aplicando o Teorema de Lax-Milgram, concluímos que existe um único $u^* \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u^*, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Isto é, o problema admite única solução para $\lambda < \lambda_1$.

7.3 ALTERNATIVA DE FREDHOLM

Considerando o problema (7.1), podemos aplicar o operador inverso do Laplaciano, isto é, $(-\Delta)^{-1}$, em ambos os lados da equação, obtendo

$$u = \lambda(-\Delta)^{-1}(u) + (-\Delta)^{-1}(f) \iff u - \lambda(-\Delta)^{-1}(u) = (-\Delta)^{-1}(f).$$

Assim, sendo $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por $T = \lambda(-\Delta)^{-1}$ e $g = (-\Delta)^{-1}(f)$, a equação acima passa a ser

$$u - Tu = g.$$

O próximo passo para que se possa aplicar a Alternativa de Fredholm, é provar que T é um operador compacto e obter seu adjunto T^*. Para a compacidade, basta notar que $T = i \circ \overline{T}$, onde i é a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e $\overline{T} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é definido por

$$\overline{T}f = u \iff \begin{cases} -\Delta u = \lambda f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\overline{T}$ é contínuo e a imersão i é compacta, segue da Proposição 6.3 que T é compacto. Aplicando a Alternativa de Fredholm, sabemos que ocorre somente um dos itens abaixo:

(i) Se $\lambda \notin \sigma(-\Delta)$ (o espectro do Laplaciano), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui apenas a solução nula, então o problema (7.1) admite única solução para toda $f \in L^2(\Omega)$.

(ii) Se $\lambda \in \sigma(-\Delta)$, então o problema homogêneo admite n soluções linearmente independentes. Assim, o problema (7.1) admite solução se, e somente se, $f \in \ker(I - T^*)^\perp$.

Calculando $T^* : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, temos

$$\langle T^* u, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \langle u, \lambda(-\Delta)^{-1}(v)\rangle = \lambda\langle u, (-\Delta)^{-1}(v)\rangle = \lambda\langle u, w\rangle = \lambda \int_\Omega uw\, \mathrm{dx},$$

onde w é solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = v, & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tomando $\varphi = (-\Delta)^{-1}(u)$, temos $u = -\Delta\varphi$, de modo que

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega uw\, \mathrm{dx} = -\lambda \int_\Omega w\Delta\varphi\, \mathrm{dx} = -\lambda \int_\Omega \Delta w\varphi\, \mathrm{dx} = \lambda \int_\Omega \varphi v\, \mathrm{dx} \\ = \lambda \int_\Omega (-\Delta)^{-1}(u)v\, \mathrm{dx} = \langle \lambda(-\Delta)^{-1}(u), v\rangle = \langle Tu, v\rangle, \end{aligned}$$

para toda $v \in L^2(\Omega)$. Logo, $T = T^*$, isto é, T é autoadjunto. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \ker(I - T^*)^\perp = \ker(I - T)^\perp = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid (I - T)(u) = 0\right\}^\perp \\ = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid -\Delta u = \lambda u\right\}^\perp = \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\}^\perp, \end{aligned}$$

sendo e_i autofunções associadas a λ. Portanto, (7.1) admite solução se, e somente se, $f \in \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\}^\perp$.

Observação. Note que o operador inverso do laplaciano, pode ser caracterizado como

$$(-\Delta)^{-1} = i \circ \overline{T},$$

onde i é a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e $\overline{T} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é definido por

$$\overline{T} f = u \iff \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f \in L^2(\Omega)$.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995. (Wiley Classics Library). Citado 4 vezes nas páginas 4, 5, 13 e 29.

BRÉZIS, H. **Analyse fonctionnelle: théorie et applications**. 3. ed. [S.l.]: Masson, 1983. (Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise). Citado 2 vezes nas páginas 26 e 84.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2010. (Universitext). Citado 8 vezes nas páginas 4, 5, 13, 79, 80, 85, 87 e 90.

DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T. **Linear Operators, Part 1: General Theory**. New York: Wiley, 1988. (Wiley Classics Library). Citado na página 78.

EVANS, L. C. **Partial differential equations.** 2. ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate Studies in Mathematics). Citado 8 vezes nas páginas 4, 5, 13, 34, 45, 47, 60 e 84.

EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. **Measure Theory and Fine Properties of Functions**. Boca Raton: CRC Press, 2015. (Textbooks in Mathematics). Citado na página 37.

FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and its applications.** 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999. (Pure and Applied Mathematics). Citado 4 vezes nas páginas 4, 5, 13 e 69.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2001. (Classics in Mathematics). Citado na página 74.

HADAMARD, J. **Sur le principe de Dirichlet**. França: Société Mathématique de France, 1906. v. 24. (Bulletin, v. 24). Citado na página 19.

HORMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators: Distribution theory and Fourier analysis**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1983. (A series of comprehensive studies in mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 25 e 40.

LIMA, E. L. **Curso de análise vol.2**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Projeto Euclides). Citado na página 45.

PONCE, A. C. **Métodos clássicos em Teoria do Potencial**. Rio do Janeiro: IMPA, 2009. (Publicações Matemáticas). Citado 8 vezes nas páginas 4, 5, 13, 14, 19, 21, 47 e 65.

STRUWE, M. **Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems**. 4. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008. (A series of modern surveys in mathematics). Citado 4 vezes nas páginas 4, 5, 13 e 75.

VANDERPOOL, C. **Em Algum Lugar nas Estrelas**. Rio de Janeiro: DarkSide Books, 2016. Citado na página 3.

WILLEM, M. **Functional Analysis: Fundamentals and Applications**. New York: Springer, 2013. (Cornerstones). Citado 5 vezes nas páginas 4, 5, 13, 82 e 83.