

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Propriedades físicas do modelo de Ising bidimensional

Aluno: Henrique Borges de Abreu

Orientador: Giuliano Augustus Pavan Ribeiro

São Carlos, 24 de novembro de 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Propriedades físicas do modelo de Ising bidimensional

Monografia apresentada à banca examinadora da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2 como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Física pela Universidade Federal de São Carlos.

Aluno: Henrique Borges de Abreu

Orientador: Giuliano Augustus Pavan Ribeiro

São Carlos, 24 de novembro de 2025

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Resumo</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelo de Ising</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Ferramentas matemáticas</b>	<b>3</b>
3.1	Propriedades matriciais . . . . .	4
3.2	Representação spinorial . . . . .	5
<b>4</b>	<b>A solução de Onsager</b>	<b>10</b>
4.1	A função de partição . . . . .	10
4.2	Função de partição via processo de diagonalização . . . . .	14
4.3	Limite termodinâmico . . . . .	21
4.4	Funções termodinâmicas . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Magnetização</b>	<b>27</b>
5.1	Magnetização via autovalores . . . . .	34
5.2	Limite termodinâmico . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>44</b>

# 1 Resumo

Neste trabalho, são apresentados os estudos das propriedades termodinâmicas do modelo de Ising bidimensional, obtidas por Lars Onsager e C. N Yang. Este modelo propõe descrever o ferromagnetismo a partir da interação de dipolos magnéticos em um cristal. Assim, calcula-se, inicialmente a energia livre de Helmholtz, energia interna e calor específico para campos magnéticos nulos, via teoria de representação, verificando a existência de uma transição de fase. Em um segundo momento, calcula-se a magnetização espontânea, exibindo a fase ferromagnética do modelo.

## 2 Modelo de Ising

O século XIX caracteriza-se como um período em que diversos desenvolvimentos na teoria do eletromagnetismo clássico são realizados, em especial, são apresentadas todas as leis fundamentais de eletromagnetismo. Por outro lado, no final deste mesmo século, estudos relacionados a magnetização da matéria, realizados por Pierre Curie, permitiram a obtenção de uma equação empírica para a magnetização  $M$  de um paramagneto em baixos campos magnéticos aplicados, sendo esta a lei de Curie:

$$M(T, H) = \frac{CH}{T} \quad , \quad (1)$$

onde,  $C$  é uma constante,  $H$  o campo magnético e  $T$  a temperatura.

No início do século seguinte, Wilhelm Lenz propôs uma interpretação microscópica para o comportamento paramagnético da matéria. Neste modelo, os constituintes do paramagneto se comportam como momentos de dipolo magnético  $\mu$  não interagentes, isto é, ocorre apenas a interação destes dipolos com um campo magnético externo. Assim sendo, a magnetização média  $m$  do modelo é dada notando que as possíveis configurações de um dado dipolo magnético possuem as energias  $-\mu H$  e  $+\mu H$ . Logo,

$$m(T, H) = \frac{\mu e^{\beta\mu H} - \mu e^{-\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}} = \mu \tanh(\beta\mu H) \quad , \quad (2)$$

onde  $\beta = 1/k_B T$ , sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann.

Assim sendo, verifica-se que a lei de Curie para campos baixos é recuperada a partir de uma expansão em série em primeira ordem da expressão obtida por Lenz. No entanto, observa-se que a equação (2) não descreve o ferromagnetismo, uma vez que neste tipo de comportamento magnético existe uma magnetização remanente, isto é, na ausência de campo aplicado um ferromagneto ainda apresenta uma magnetização, em oposição a um paramagneto onde  $m(T, 0) = 0$ .

Neste contexto, outra hipótese é introduzida por Lenz, para a descrição do ferromagnetismo. Esta proposta, por sua vez, também trata os constituintes do ferromagneto como momentos de dipolo magnético, porém interagentes com os primeiros vizinhos. Assim sendo, a interação de um dipolo com o campo magnético gerado por um vizinho, resultará em um ordenamento destes dipolos, análogo à aplicação de um campo externo, porém independente deste campo externo [1]. Dessa forma, o estudo deste modelo foi sugerido por Lenz para seu aluno de doutorado, Ernst Ising, na década de 1920.

Dessa maneira, para descrever a energia do modelo, considera-se a contribuição das interações dipolares e da interação com o campo externo. Para as interações, um dado dipolo e um primeiro vizinho interagem de forma que a energia associada a estas configurações são  $\pm J$ , dependendo da orientação dos vetores, isto é,  $+J$  para vetores antiparalelos e  $-J$  para vetores paralelos. Por outro lado, para a interação com o campo, as possíveis energias são  $\pm H$  (dado um sistema de unidades apropriado), dependendo da orientação do dipolo com relação ao campo aplicado. Assim sendo, Ising introduz uma variável  $s = \pm 1$  que identifica a orientação de um dado dipolo, isto é, o Hamiltoniano ( $\mathcal{H}$ ) que descreve o sistema, no caso isotrópico e com condições periódicas de contorno, é dado por:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} s_{\vec{r}} s_{\vec{r}'} - H \sum_{\vec{r}} s_{\vec{r}} \quad , \quad (3)$$

onde,  $\vec{r}$  identifica uma posição em uma rede.

A partir do Hamiltoniano, pode-se construir a função partição do sistema, dada por:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{s_{\vec{r}}\}} \exp \left[ \beta J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} s_{\vec{r}} s_{\vec{r}'} + \beta H \sum_{\vec{r}} s_{\vec{r}} \right] \\ &= \sum_{\{s_{\vec{r}}\}} \exp \left[ \phi \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} s_{\vec{r}} s_{\vec{r}'} + \phi' \sum_{\vec{r}} s_{\vec{r}} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

sendo o somatório de exponenciais feito sobre todas as configurações de  $s_{\vec{r}}$  e posições, onde  $\phi = \beta J$  e  $\phi' = \beta H$ .

Consequentemente, a solução do modelo envolve a obtenção da função partição no limite termodinâmico, isto é, para um número grande de partículas ( $n \rightarrow \infty$ ), uma vez que, diversas propriedades termodinâmicas podem ser derivadas dessa função partição, como a energia livre de Helmholtz, energia interna, calor específico e magnetização.

Inicialmente, a primeira solução do modelo é obtida por Ising em 1925, para o caso unidimensional, onde é verificado que esta solução não prevê uma magnetização espontânea, ou equivalentemente, uma transição de fase ferromagnética. Entretanto, a solução para duas dimensões (em uma rede quadrada) foi obtida por Lars Onsager apenas em 1944 [2, 3], a qual será discutida neste trabalho. Neste sentido, para duas dimensões, a função partição pode ser descrita por:

$$Z = \sum_{\{s_{j,k}\}} \exp \left[ \phi \sum_{j,k}^n s_{j,k} s_{j+1,k} + \phi \sum_{j,k}^n s_{j,k} s_{j,k+1} + \phi' \sum_{k,j}^n s_{j,k} \right], \quad (5)$$

onde o somatório respectivo aos termos de interação são divididos em interação entre linhas e colunas.

### 3 Ferramentas matemáticas

Na seção anterior, apresentou-se a origem do modelo de Ising e a principal grandeza envolvida na solução deste modelo. Porém, anteriormente ao desenvolvimento realizado por Onsager para a solução do modelo de Ising bidimensional, torna-se necessário apresentar certas ferramentas matemáticas as quais serão utilizadas ao longo deste trabalho.

### 3.1 Propriedades matriciais

Em um primeiro momento, destaca-se algumas propriedades de matrizes de Pauli,

$$\begin{cases} (\sigma^\alpha)^2 = \mathbf{I}, \\ \sigma^\alpha \sigma^\beta = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} i \sigma^\gamma, \\ \{\sigma^\alpha, \sigma^\beta\} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

para  $\alpha = x, y, z$  e  $\mathbf{I}$  a matriz de identidade, as quais são das por:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Sendo estas propriedades verificadas diretamente ao realizar os produtos de matriz.

Ainda, para um espaço dado pelo produto tensorial entre  $n$  distintos espaços:  $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ , pode-se definir um operador  $A$  atuando em um destes espaços por um índice  $i$ :

$$A_i \equiv \underbrace{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \dots \otimes \mathbf{I}}_{i-1 \text{ termos}} \otimes A \otimes \underbrace{\mathbf{I} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}}_{n-i \text{ termos}}, \quad (8)$$

Por outro lado, uma importante propriedade envolvendo a operação de produto tensorial é dada por:

$$(A \otimes B \otimes C \otimes \dots)(D \otimes E \otimes F \otimes \dots) = (AD) \otimes (BE) \otimes (CF) \otimes \dots, \quad (9)$$

a qual pode ser provada escrevendo os elementos de matriz:

$$\begin{aligned} \langle i \ i' \ i'' \ \dots | (A \otimes B \otimes C \otimes \dots)(D \otimes E \otimes F \otimes \dots) | j \ j' \ j'' \ \dots \rangle, &= \\ &= \sum_{k, k', k'', \dots} \langle i \ i' \ i'' \ \dots | (A \otimes B \otimes C \otimes \dots) | k \ k' \ k'' \ \dots \rangle \times \\ &\times \langle k \ k' \ k'' \ \dots | (D \otimes E \otimes F \otimes \dots) | j \ j' \ j'' \ \dots \rangle, \\ &= \left( \sum_k \langle i | A | k \rangle \langle k | D | j \rangle \right) \left( \sum_{k'} \langle i' | B | k' \rangle \langle k' | E | j' \rangle \right) \dots, \\ &= \langle i | AD | j \rangle \langle i' | BE | j' \rangle \langle i'' | CE | j'' \rangle \dots, \\ &= \langle i \ i' \ i'' \ \dots | (AD) \otimes (BE) \otimes (CF) \otimes \dots | j \ j' \ j'' \ \dots \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Assim, o comutador das matrizes de Pauli que ocupam espaços distintos é dado por:

$$[\sigma_i^\alpha, \sigma_j^\beta] = 0, \text{ para } i \neq j, \quad (11)$$

visto que,

$$\begin{aligned} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta &= (\mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I} \otimes \sigma_i^\alpha \otimes \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I} \otimes \sigma_j^\beta \otimes \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}), \\ &= (\mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I} \otimes (\sigma_i^\alpha \mathbf{I}) \otimes \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} \sigma_j^\beta) \otimes \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}), \\ &= (\mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} \sigma_i^\alpha) \otimes \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I} \otimes (\sigma_j^\beta \mathbf{I}) \otimes \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}), \\ &= \sigma_j^\beta \sigma_i^\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Ainda, para exponenciação de qualquer operador A que satisfaça  $A^2 = \mathbf{I}$ , encontra-se:

$$e^{\theta A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta A)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cosh \theta + A \sinh \theta, \quad (13)$$

onde  $\theta$  configura um parâmetro, como um ângulo de rotação.

## 3.2 Representação spinorial

Nesta seção serão apresentadas propriedades envolvendo representações spinoriais de rotações, as quais são fundamentais para a solução apresentada por Onsager [2, 3, 4]. Inicialmente, define-se um conjunto de  $2n$  elementos  $\Gamma_\alpha$  que satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad (14)$$

de forma que esses elementos satisfaçam as propriedades:

- $\Gamma_\alpha$  deve possuir dimensão menor que  $2^n \times 2^n$ ;
- Existe uma matriz S que relaciona dois conjuntos  $\{\Gamma_\alpha\}$  e  $\{\Gamma'_\alpha\}$  por:

$$\Gamma'_\alpha = S \Gamma_\alpha S^{-1}; \quad (15)$$

- A combinação linear da matriz identidade, de  $\Gamma_\alpha$ 's e produtos de  $\Gamma_\alpha$ 's permite obter qualquer matriz de dimensão  $2^n \times 2^n$ .

Assim sendo, para  $n = 1$  verifica-se que o conjunto deve possuir dois elementos ( $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ) que satisfaçam a equação (14). Por outro lado, pela segunda relação das equações (6), verifica-se que as matrizes de Pauli satisfazem essa condição e podem ser utilizadas para representar  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , como por exemplo  $\Gamma_1 = \sigma^z$  e  $\Gamma_2 = \sigma^y$ .

Neste sentido, para  $n$  qualquer, pode-se utilizar as matrizes de Pauli para representar o conjunto  $\{\Gamma'_\alpha\}$ , escolhendo as representações:

$$\begin{aligned}\Gamma_{2\alpha-1} &= \sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x \sigma_\alpha^z, \\ \Gamma_{2\alpha} &= \sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x \sigma_\alpha^y,\end{aligned}\tag{16}$$

uma vez que, utilizando a anticomutação das matrizes de Pauli,

$$\begin{aligned}\Gamma_{2\alpha-1}\Gamma_{2\alpha} &= (\sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x \sigma_\alpha^z)(\sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x \sigma_\alpha^y), \\ &= \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \cdots \mathbf{I}_{\alpha-1} (\sigma_\alpha^z \sigma_\alpha^y), \\ &= -\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \cdots \mathbf{I}_{\alpha-1} (\sigma_\alpha^y \sigma_\alpha^z), \\ &= -\Gamma_{2\alpha} \Gamma_{2\alpha-1}, \\ &= -i\sigma_\alpha^x,\end{aligned}\tag{17}$$

e

$$\Gamma_{2\alpha-1}\Gamma_{2\alpha-1} = (\sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x \sigma_\alpha^z)(\sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x \sigma_\alpha^z) = \mathbf{I},\tag{18}$$

$$\Gamma_{2\alpha}\Gamma_{2\alpha} = (\sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x \sigma_\alpha^y)(\sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x \sigma_\alpha^y) = \mathbf{I},\tag{19}$$

isto é, a equação (14) é satisfeita com as escolhas de representação como nas equações (16). Contudo, essa representação não é única, de forma que outra representação pode ser obtida por uma transformação aplicada nos  $\Gamma_\alpha$ 's. Em especial, outra representação útil é dada pela transformação  $\sigma_\alpha^x \rightarrow \sigma_\alpha^z$  e  $\sigma_\alpha^z \rightarrow \sigma_\alpha^x$ , a qual é gerada através do operador:

$$\mathbf{g} = 2^{-n/2} \underbrace{(\sigma^x + \sigma^z) \otimes (\sigma^x + \sigma^z) \otimes \cdots \otimes (\sigma^x + \sigma^z)}_{n \text{ termos}} = \mathbf{g}^{-1},\tag{20}$$

uma vez que,  $\frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z)^2 = \mathbf{I}$ ,  $\frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z)\sigma^x(\sigma^x + \sigma^z) = \sigma^z$  e  $\frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z)\sigma^z(\sigma^x + \sigma^z) = \sigma^x$ . Portanto,

$$\mathbf{g}\Gamma_{2\alpha-1}\mathbf{g} = \sigma_1^z \sigma_2^z \cdots \sigma_{\alpha-1}^z \sigma_\alpha^x = \Gamma_{2\alpha-1}^*, \quad \mathbf{g}\Gamma_{2\alpha}\mathbf{g} = \sigma_1^z \sigma_2^z \cdots \sigma_{\alpha-1}^z \sigma_\alpha^y = \Gamma_{2\alpha}^*.\tag{21}$$

Por outro lado, o conjunto  $\{\Gamma_\alpha\}$  gera vetores em um espaço de dimensão  $2n$ , os quais, quando sob uma dada rotação, implicam na transformação dos elementos destes de acordo com coeficientes  $\omega_{\alpha\beta}$ :

$$\Gamma'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2n} \omega_{\alpha\beta} \Gamma_\beta, \quad (22)$$

onde, de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \Gamma'_1 \\ \Gamma'_2 \\ \vdots \\ \Gamma'_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{12n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{22n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \omega_{2n1} & \cdots & & \omega_{2n2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{2n} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

Contudo, através da segunda propriedade satisfeita pelos elementos da álgebra de Clifford, nota-se que,

$$S\Gamma_\alpha S^{-1} = \sum_{\beta=1}^{2n} \omega_{\alpha\beta} \Gamma_\beta, \quad (24)$$

isto é, existe uma equivalência entre a transformação realizada pela matriz  $S$  e pela matriz  $\omega$ . Dessa forma,  $S$  é denominada de representação spinorial da rotação  $\omega$  e é denotada por  $S(\omega)$ . Ainda, uma propriedade fundamental das representações spinoriais envolve a realização de duas rotações sobre um mesmo vetor,  $\omega = \omega_1\omega_2$ . Neste caso,

$$S(\omega)\Gamma_\alpha S(\omega)^{-1} = \sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta} \Gamma_\beta = \sum_{\beta} \sum_{\gamma} (\omega_1)_{\alpha\gamma} (\omega_2)_{\gamma\beta} \Gamma_\beta = S(\omega_1)S(\omega_2)\Gamma_\alpha S(\omega_2)^{-1}S(\omega_1)^{-1}, \quad (25)$$

Portanto, para uma rotação obtida através de duas rotações  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , tem-se:

$$S(\omega_1\omega_2) = S(\omega_1)S(\omega_2), \quad (26)$$

Em especial, para uma rotação  $\omega(\alpha, \beta|\theta)$  sobre os eixos respectivos aos índices  $\alpha$  e  $\beta$  no espaço  $2n$  dimensional, através de um ângulo  $\theta$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta|\theta) : \Gamma'_\alpha &= \Gamma_\alpha \cos \theta - \Gamma_\beta \sin \theta, \\ \Gamma'_\beta &= \Gamma_\alpha \sin \theta + \Gamma_\beta \cos \theta, \end{aligned} \quad (27)$$

onde, de forma matricial,

$$\omega(\alpha, \beta|\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & & 0 \\ & \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ & \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & \underbrace{\cdots}_{\alpha\text{-ésima coluna}} & \underbrace{\cdots}_{\beta\text{-ésima coluna}} & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \alpha\text{-ésima linha} \\ \\ \\ \} \beta\text{-ésima linha} \end{array} \quad (28)$$

Assim, a partir dessa rotação, define-se o seguinte lema:

**Lema 1.** Caso exista uma equivalência entre uma rotação  $\omega(\alpha, \beta|\theta)$  e uma representação spinorial  $S_{\alpha\beta}(\theta)$ , então essa representação deve ser dada por:

$$S_{\alpha\beta}(\theta) = e^{\frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}. \quad (29)$$

*Demonstração.* Como a aplicação da representação spinorial em um elemento do vetor transformado deve produzir a mesma rotação que  $\omega(\alpha, \beta|\theta)$ , então,

$$\begin{aligned} e^{\frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta \right)^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta/2)^{2n}}{(2n)!} (\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} (\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^{2n+1}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta/2)^{2n}}{(2n)!} + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ &= \cos \frac{\theta}{2} + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (30)$$

uma vez que, com o auxílio da equação (14),  $(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^2 = \Gamma_\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\alpha\Gamma_\beta = -\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\beta\Gamma_\alpha = -1$ . Logo, pela definição de  $S_{\alpha\beta}(\theta)$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma'_\alpha &= S_{\alpha\beta}(\theta)\Gamma_\alpha S_{\alpha\beta}(\theta)^{-1}, \\ &= e^{\frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}\Gamma_\alpha e^{-\frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}, \\ &= \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta \sin \frac{\theta}{2} \right] \Gamma_\alpha \left[ \cos \frac{\theta}{2} - \Gamma_\alpha\Gamma_\beta \sin \frac{\theta}{2} \right], \\ &= \Gamma_\alpha \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - \Gamma_\beta \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ &= \Gamma_\alpha \cos \theta - \Gamma_\beta \sin \theta, \end{aligned} \quad (31)$$

e analogamente,

$$\Gamma'_\alpha = S_{\alpha\beta}(\theta)\Gamma_\alpha S_{\alpha\beta}(\theta)^{-1} = \Gamma_\alpha \sin \theta + \Gamma_\beta \cos \theta. \quad (32)$$

Portanto, a expressão  $S_{\alpha\beta}(\theta) = e^{-\frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}$  recupera a rotação realizada por  $\omega(\alpha, \beta|\theta)$ .

Destaca-se, ainda, duas consequência do Lema 1 e da equação (14) que correspondem as relações:

$$e^{-\frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}\Gamma_\alpha = \left[ \cos \frac{\theta}{2} - \Gamma_\alpha\Gamma_\beta \sin \frac{\theta}{2} \right] \Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta \sin \frac{\theta}{2} \right] = \Gamma_\alpha e^{\frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}, \quad (33)$$

$$\omega(\alpha, \beta|\theta) \leftrightarrow S_{\alpha\beta}(\theta) = e^{\frac{\theta}{2}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta} = e^{-\frac{\theta}{2}\Gamma_\beta\Gamma_\alpha} = S_{\beta\alpha}(-\theta) \leftrightarrow \omega(\beta, \alpha|-\theta). \quad (34)$$

Por outro lado, uma vez conhecida a forma de uma rotação e sua representação spinorial, pode-se determinar os autovalores destas, resultando em um segundo e terceiro lema:

**Lema 2.** Dada uma rotação  $\omega(\alpha, \beta|\theta)$ , esta possui autovalores 1 e  $e^{\pm i\theta}$ , onde o primeiro possui uma degenerescência de ordem  $2n - 2$  e o restante é não degenerado. No entanto, os autovalores da representação spinorial são  $e^{\pm i\theta/2}$ , com degenerescência de ordem  $2n - 1$  para ambos.

*Demonstração.* Inicialmente, os autovalores de uma matriz de rotação devem ser os mesmos independente do eixo pelo qual a rotação é realizada (assumindo o mesmo ângulo). Neste sentido, para a matriz de rotação mais simples ( $2 \times 2$ ), os autovalores  $\lambda$  devem satisfazer a equação característica:

$$\begin{aligned} 0 &= (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2 + \sin^2 \theta, \\ &= \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1, \end{aligned} \quad (35)$$

Assim, esta equação de 2º grau fornece:

$$\lambda_\pm = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}. \quad (36)$$

No entanto, todos os outros  $2n - 2$  eixos são inalterados, resultando em  $2n - 2$  autovalores 1. Por outro lado, assim como no caso da rotação, a escolha de  $\Gamma$ 's para a representação

de uma rotação é arbitrária para os autovalores. Logo, como  $\Gamma_{2\alpha-1}^* \Gamma_{2\alpha}^* = i\sigma_\alpha^z$ , tem-se para o caso mais simples:

$$\begin{aligned}
S_{2\alpha-1 \ 2\alpha}(\theta) &= e^{\frac{\theta}{2}\Gamma_{2\alpha-1}^*\Gamma_{2\alpha}^*} = \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_\alpha^z \sin \frac{\theta}{2}, \\
&= \mathbf{I} \otimes \dots \otimes \mathbf{I} \otimes \begin{pmatrix} \cos \theta/2 + i \sin \theta/2 & 0 \\ 0 & \cos \theta/2 - i \sin \theta/2 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}, \\
&= \mathbf{I} \otimes \dots \otimes \mathbf{I} \otimes \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}. \tag{37}
\end{aligned}$$

Dessa forma, devido às matrizes identidade, os autovalores são  $e^{\pm i\theta/2}$ , com degenerescência da ordem de  $2n - 1$  para cada autovalor.

**Lema 3.** Seja uma rotação  $\omega$  obtida pela composição de diversas rotações:

$$\omega = \omega(\alpha, \beta|\theta_1)\omega(\gamma, \delta|\theta_2) \dots \omega(\mu, \nu|\theta_n), \tag{38}$$

então como consequência dos Lemas 1 e 2, tem-se as propriedades:

- A representação spinorial dessa rotação é:

$$S(\omega) = e^{\theta_1/2\Gamma_\alpha\Gamma_\beta} e^{\theta_2/2\Gamma_\gamma\Gamma_\delta} \dots e^{\theta_n/2\Gamma_\mu\Gamma_\nu}, \tag{39}$$

- Os autovalores da rotação são:  $e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \dots, e^{\pm i\theta_n}$ ;
- Os autovalores da representação spinorial da rotação são:  $e^{i/2(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \dots \pm \theta_n)}$ .

## 4 A solução de Onsager

### 4.1 A função de partição

Uma vez discutidas as propriedades matemáticas necessárias, nesta seção apresenta-se a solução de Onsager para o modelo de Ising bidimensional. Inicialmente, a solução baseia-se no fato de que a função partição dada pela equação (5) pode ser reescrita em

termos de um problema de autovalor. Definindo uma configuração de uma linha por:  $|\mu_\alpha\rangle = |s_{\alpha 1} s_{\alpha 2} \cdots s_{\alpha n}\rangle$  e uma matriz com elementos dados por:

$$\langle \mu_j | P | \mu_{j'} \rangle = \exp \left[ \phi \sum_k^n s_{j,k} s_{j',k} + \phi \sum_k^n s_{j,k} s_{j,k+1} + \phi' \sum_k^n s_{j,k} \right], \quad (40)$$

então, a função partição pode ser escrita de uma forma equivalente somando sobre todas as configurações de linha,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{s_{j,k}\}} \exp \left[ \phi \sum_{j,k}^n s_{j,k} s_{j+1,k} + \phi \sum_{j,k}^n s_{j,k} s_{j,k+1} + \phi' \sum_{k,j}^n s_{j,k} \right], \\ &= \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \cdots \sum_{\mu_n} \langle \mu_1 | P | \mu_2 \rangle \langle \mu_2 | P | \mu_3 \rangle \cdots \langle \mu_n | P | \mu_1 \rangle, \\ &= \sum_{\mu_1} \langle \mu_1 | P^n | \mu_1 \rangle, \\ &= \text{Tr } P^n. \end{aligned} \quad (41)$$

Sendo  $\Lambda_\alpha$ ,  $D_P$  e  $U_P$  os autovalores, a matriz de autovalores e a matriz de autovetores de  $P$ , respectivamente,

$$Z = \text{Tr } P^n = \text{Tr } (U_P^\dagger D_P U_P)^n = \text{Tr } U_P^\dagger D_P^n U_P = \text{Tr } U_P U_P^\dagger D_P^n = \text{Tr } D_P^n = \sum_{\alpha=1}^{2^n} (\Lambda_\alpha)^n. \quad (42)$$

Consequentemente, a função de partição é obtida a partir da diagonalização de  $P$ . No entanto, sendo  $\Lambda_{\max}$  o maior autovalor de  $P$ , verifica-se que:

$$(\Lambda_{\max})^n \leq Z \leq 2^n (\Lambda_{\max})^n, \quad (43)$$

de forma que tomando o logaritmo natural e dividindo por  $n^2$ , no limite termodinâmico, encontra-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Lambda_{\max} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln Z \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Lambda_{\max}, \quad (44)$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Lambda_{\max}. \quad (45)$$

Assim sendo, o problema de obter a função partição reduz-se à calcular o maior autovalor de  $P$ . Por outro lado, esta matriz pode ser reescrita de forma mais conveniente,

notando que:

$$\begin{aligned}\langle \mu_j | P | \mu_{j'} \rangle &= \exp \left[ \phi \sum_k^n s_{j,k} s_{j',k} + \phi \sum_k^n s_{j,k} s_{j,k+1} + \phi' \sum_k^n s_{j,k} \right], \\ &= \prod_{k=1}^n \exp [\phi s_{j,k} s_{j',k}] \exp [\phi s_{j,k} s_{j,k+1}] \exp [\phi' s_{j,k}],\end{aligned}\quad (46)$$

isto é, identificando cada exponencial como o elemento de uma matriz,

$$\langle \mu_j | V_1' | \mu_{j'} \rangle = \prod_{k=1}^n \exp [\phi s_{j,k} s_{j',k}], \quad (47)$$

$$\langle \mu_j | V_2 | \mu_{j'} \rangle = \prod_{k=1}^n \delta_j^{j'} \exp [\phi s_{j,k} s_{j',k+1}], \quad (48)$$

$$\langle \mu_j | V_3 | \mu_{j'} \rangle = \prod_{k=1}^n \delta_j^{j'} \exp [\phi' s_{j,k}], \quad (49)$$

tem-se que,

$$\langle \mu_j | P | \mu_{j'} \rangle = \sum_{\mu_{j''}} \sum_{\mu_{j'''}} \langle \mu_j | V_3 | \mu_{j''} \rangle \langle \mu_{j''} | V_2 | \mu_{j'''} \rangle \langle \mu_{j'''} | V_1' | \mu_{j'} \rangle = \langle \mu_j | V_3 V_2 V_1' | \mu_{j'} \rangle. \quad (50)$$

Assim, a matriz  $P$  é dada em termos da matrizes  $V_1'$ ,  $V_2$  e  $V_3$  através da expressão:

$$P = V_3 V_2 V_1', \quad (51)$$

a qual pode ser simplificada, uma vez que por definição  $s_{j,k} = \pm 1$ , ou seja, definindo uma matriz  $A$  que descreve todas as probabilidades de configuração entre dois primeiros vizinhos,

$$A = \begin{pmatrix} e^\phi & e^{-\phi} \\ e^{-\phi} & e^\phi \end{pmatrix} = \mathbf{I} e^\phi + \sigma^x e^{-\phi}, \quad (52)$$

observa-se que a matriz  $V_1'$  é obtida de  $A$  por:

$$\begin{aligned}\langle \mu_j | V_1' | \mu_{j'} \rangle &= \langle s_{j1} s_{j2} \cdots s_{jn} | V_1' | s_{j'1} s_{j'2} \cdots s_{j'n} \rangle, \\ &= \langle s_{j1} | A | s_{j'1} \rangle \langle s_{j2} | A | s_{j'2} \rangle \cdots \langle s_{jn} | A | s_{j'n} \rangle, \\ &= \langle s_{j1} s_{j2} \cdots s_{jn} | A \otimes A \otimes \cdots \otimes A | s_{j'1} s_{j'2} \cdots s_{j'n} \rangle.\end{aligned}\quad (53)$$

Por outro lado, a matriz  $A$  pode ser reescrita na forma:

$$A = \mathbf{I} e^\phi + \sigma^x e^{-\phi} = e^\phi (\mathbf{I} + \sigma^x e^{-2\phi}), \quad (54)$$

a qual assemelha-se à equação (13), assim definindo um ângulo  $\theta$  tal que:  $\tanh \theta = e^{-2\phi}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\tanh^{-1} \theta} (\mathbf{I} + \sigma^x \tanh \theta), \\
&= \sqrt{\frac{\cosh \theta}{\sinh \theta}} \cosh \theta (\cosh \theta + \sigma^x \sinh \theta), \\
&= \sqrt{\frac{2}{\sinh 2\theta}} e^{\theta \sigma^x}, \\
&= \sqrt{2 \sinh 2\phi} e^{\theta \sigma^x},
\end{aligned} \tag{55}$$

uma vez que,

$$\sinh 2\phi = \frac{1}{2} [\tanh^{-1} \theta - \tanh \theta] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta} - \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \right] = \frac{1}{\sinh 2\theta}. \tag{56}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
V_1' &= A \otimes A \otimes \cdots \otimes A = [2 \sinh 2\phi]^{n/2} (e^{\theta \sigma^x} \otimes e^{\theta \sigma^x} \otimes \cdots \otimes e^{\theta \sigma^x}), \\
&= [2 \sinh 2\phi]^{n/2} \exp \left[ \theta \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha}^x \right], \\
&= [2 \sinh 2\phi]^{n/2} \prod_{\alpha=1}^n e^{\theta \sigma_{\alpha}^x}, \\
&= [2 \sinh 2\phi]^{n/2} V_1,
\end{aligned} \tag{57}$$

onde  $\prod_{\alpha=1}^n e^{\theta \sigma_{\alpha}^x} = V_1$ . Ainda, para a matriz  $V_2$ , os elementos são dispostos sobre a diagonal de uma matriz,  $A'$ , dada por:

$$A' = \begin{pmatrix} e^{\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\phi} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

a qual pode ser expressa na forma:

$$\begin{aligned}
A' &= \begin{pmatrix} \cosh \phi + \sinh \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi - \sinh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \phi - \sinh \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh \phi + \sinh \phi \end{pmatrix}, \\
&= \cosh \phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sinh \phi, \\
&= \cosh \phi + (\sigma^z \otimes \sigma^z) \sinh \phi, \\
&= e^{\phi(\sigma^z \otimes \sigma^z)}. \tag{59}
\end{aligned}$$

Assim, analogamente a matriz  $V_1'$ , obtém-se:

$$V_2 = \prod_{\alpha=1}^n e^{\phi \sigma_{\alpha}^z \sigma_{\alpha+1}^z}, \tag{60}$$

Em um último momento, a matriz  $V_3$ , assim como a matriz  $V_2$ , é descrita por uma matriz diagonal. No entanto, essa matriz possui apenas dois elementos, e portanto, basta trocar o termo  $(\sigma^z \otimes \sigma^z)$  na dedução anterior por apenas  $\sigma^z$  e  $\phi$  por  $\phi'$ . Dessa forma, a matriz  $V_3$  é dada por:

$$V_3 = \prod_{\alpha=1}^n e^{\phi' \sigma_{\alpha}^z}. \tag{61}$$

Assim sendo, a matriz  $P$  é dada pelo produto:

$$P = [2 \sinh 2\phi]^{n/2} V_3 V_2 V_1, \tag{62}$$

onde  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  são dadas pelas equações (57), (60) e (61), respectivamente.

## 4.2 Função de partição via processo de diagonalização

A partir dos resultados da seção anterior, sabe-se que a função partição é calculada exatamente através dos autovalores da matriz  $P$ , a qual é dada pelo produto das matrizes  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ . Neste sentido, a solução do modelo é obtida diagonalizando a matriz  $V_3 V_2 V_1$ .

Em especial, na ausência de campo magnético, isto é,  $\phi' = 0$ , o problema reduz-se a calcular os autovalores de  $V_2V_1$ . Contudo, ainda que a eliminação de campo externo não permita o cálculo da magnetização, diversas propriedades termodinâmicas podem ser obtidas.

Assim sendo, a primeira etapa para a diagonalização do produto  $V_2V_1$  envolve reescrever essas matrizes em termos dos elementos  $\Gamma_\alpha$ . Para isto, utiliza-se que as propriedades:

$$\Gamma_{2\alpha-1}\Gamma_{2\alpha} = -i\sigma_\alpha^x = -\Gamma_{2\alpha}\Gamma_{2\alpha-1}, \quad (63)$$

$$\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha} = (\sigma_1^x\sigma_2^x \cdots \sigma_\alpha^x\sigma_{\alpha+1}^z)(\sigma_1^x\sigma_2^x \cdots \sigma_{\alpha-1}^x\sigma_\alpha^y) = \sigma_\alpha^x\sigma_\alpha^y\sigma_{\alpha+1}^z = i\sigma_\alpha^z\sigma_{\alpha+1}^z, \quad (64)$$

de forma que,

$$V_1 = \prod_{\alpha=1}^n e^{\theta\sigma_\alpha^x} = \prod_{\alpha=1}^n e^{-i\theta\Gamma_{2\alpha}\Gamma_{2\alpha-1}}, \quad (65)$$

$$V_2 = \prod_{\alpha=1}^n e^{\phi\sigma_\alpha^z\sigma_{\alpha+1}^z} = \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\phi\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}} \right] e^{\phi\sigma_1^z\sigma_n^z}. \quad (66)$$

Verifica-se, assim, que a matriz  $V_1$  reescrita em termos dos  $\Gamma_\alpha$ 's é uma representação spinorial de uma rotação. No entanto, a matriz  $V_2$  não é uma representação spinorial, devido ao termo correspondente a condição periódica de contorno. Calcula-se, portanto,

$$\Gamma_1\Gamma_{2n} = \sigma_1^z(\sigma_1^x\sigma_2^x \cdots \sigma_{n-1}^x\sigma_n^y) = \sigma_1^z\sigma_1^x\sigma_2^x \cdots \sigma_{n-1}^x(-i\sigma_n^z\sigma_n^x) = -i\sigma_1^z\sigma_n^z(\sigma_1^x\sigma_2^x \cdots \sigma_{n-1}^x\sigma_n^x), \quad (67)$$

resultando em:

$$V_2 = e^{i\phi U\Gamma_1\Gamma_{2n}} \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\phi\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}} \right], \quad (68)$$

onde  $U = \sigma_1^x\sigma_2^x \cdots \sigma_{n-1}^x\sigma_n^x$ .

No entanto, ainda que a matriz  $V_2$  ainda não configure uma representação spinorial, esta introduz a matriz  $U$  que possui as propriedades:

$$\begin{cases} U^2 = (\sigma_1^x)^2(\sigma_2^x)^2 \cdots (\sigma_{n-1}^x)^2(\sigma_n^x)^2 = \mathbf{I}, \\ U(1+U) = 1+U, \\ U(1-U) = -(1-U), \\ U = \sigma_1^x\sigma_2^x \cdots \sigma_{n-1}^x\sigma_n^x = (-i\Gamma_2\Gamma_1) \cdots (-i\Gamma_{2n}\Gamma_{2n-1}) = i^n\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \cdots \Gamma_{2n}. \end{cases} \quad (69)$$

Consequentemente, o termo associado a condição de contorno na matriz  $V_2$  torna-se:

$$\begin{aligned}
e^{i\phi U \Gamma_1 \Gamma_{2n}} &= \cosh \phi + i \Gamma_1 \Gamma_{2n} U \sinh \phi \\
&= \left[ \frac{1}{2}(1+U) + \frac{1}{2}(1-U) \right] \cosh \phi + i \Gamma_1 \Gamma_{2n} U \sinh \phi \\
&= \frac{1}{2}(1+U) [\cosh \phi + i \Gamma_1 \Gamma_{2n} \sinh \phi] + \frac{1}{2}(1-U) [\cosh \phi - i \Gamma_1 \Gamma_{2n} \sinh \phi] \\
&= \frac{1}{2}(1+U) e^{i\phi \Gamma_1 \Gamma_{2n}} + \frac{1}{2}(1-U) e^{-i\phi \Gamma_1 \Gamma_{2n}}, \tag{70}
\end{aligned}$$

de forma que ao substituir na expressão (68) e combinando com a equação (65), encontra-se,

$$V_2 V_1 = \frac{1}{2}(1+U)V^+ + \frac{1}{2}(1-U)V^-, \tag{71}$$

onde,

$$V^\pm = e^{\pm i\phi \Gamma_1 \Gamma_{2n}} \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\phi \Gamma_{2\alpha+1} \Gamma_{2\alpha}} \right] \left[ \prod_{\beta=1}^n e^{-i\theta \Gamma_{2\beta} \Gamma_{2\beta-1}} \right]. \tag{72}$$

Dessa maneira, comparando com o Lema 1, a expressão (72) de fato configura uma representação spinorial. Assim, os autovalores de  $V_2 V_1$  serão aqueles obtidos ao diagonalizar  $\frac{1}{2}(1 \pm U)V^\pm$ . Contudo, pela definição de  $U$ , tem-se que:  $U = \sigma^x \otimes \sigma^x \otimes \dots \otimes \sigma^x$ , isto é, esta é uma matriz com elementos  $\pm 1$ . Ainda, pode-se escolher uma matriz  $R$  que organiza os elementos de  $U$  e  $V^\pm$  na forma:

$$RUR^{-1} = \tilde{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{73}$$

$$RV^\pm R^{-1} = \tilde{V}^\pm = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^\pm & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^\pm \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Dessa forma, o termo  $(1 \pm U)$  apenas seleciona metade dos autovalores de cada matriz  $\tilde{V}^\pm$ . No entanto, o conjunto de autovalores de  $\tilde{V}^\pm$  e  $V^\pm$  são os mesmos, apenas arranjados de forma distinta na diagonal. Isto, por sua vez, implica que o problema de autovalor reduz-se a calcular os autovalores de  $V^\pm$  e selecionar, entre todo o conjunto, metade dos autovalores de cada matriz.

Assim sendo, utilizando o fato de que estas são representações spinoriais de rotações

( $V^\pm = S(\omega^\pm)$ ), tem-se através da equação (26) e do Lema 3:

$$\omega^\pm = \omega(1, 2n | \pm i\phi) \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(2\alpha + 1, 2\alpha | - 2i\phi) \right] \left[ \prod_{\beta=1}^n \omega(2\beta, 2\beta - 1 | - 2i\theta) \right], \quad (75)$$

Essa rotação pode ainda ser simetrizada, mantendo os autovalores inalterados. Isto é, existe uma rotação simétrica dada por:  $\Omega^\pm = \Delta\omega^\pm\Delta^{-1}$ , onde,

$$\Delta = \sqrt{\prod_{\beta=1}^n \omega(2\beta, 2\beta - 1 | - 2i\theta)} \leftrightarrow \prod_{\beta=1}^n \sqrt{e^{-i\theta\Gamma_{2\beta}\Gamma_{2\beta-1}}} = \prod_{\beta=1}^n e^{-i\theta/2\Gamma_{2\beta}\Gamma_{2\beta-1}}. \quad (76)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left[ \prod_{\beta=1}^n \omega(2\beta, 2\beta - 1 | - 2i\theta) \right] \Delta^{-1} &\leftrightarrow \left[ \prod_{\beta=1}^n e^{-i\theta\Gamma_{2\beta}\Gamma_{2\beta-1}} \right] \prod_{\beta=1}^n e^{i\theta/2\Gamma_{2\beta}\Gamma_{2\beta-1}}, \\ &= \prod_{\beta=1}^n e^{-i\theta/2\Gamma_{2\beta}\Gamma_{2\beta-1}}, \\ &\leftrightarrow \Delta, \end{aligned} \quad (77)$$

que por sua vez implica em,

$$\begin{aligned} \Omega^\pm &= \Delta \left\{ \omega(1, 2n | \pm i\phi) \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(2\alpha + 1, 2\alpha | - 2i\phi) \right] \left[ \prod_{\beta=1}^n \omega(2\beta, 2\beta - 1 | - 2i\theta) \right] \right\} \Delta^{-1}, \\ &= \Delta \left\{ \omega(1, 2n | \pm i\phi) \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(2\alpha + 1, 2\alpha | - 2i\phi) \right] \right\} \Delta, \\ &= \Delta\chi^\pm\Delta. \end{aligned} \quad (78)$$

onde,

$$\chi^\pm = \omega(1, 2n | \pm i\phi) \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(2\alpha + 1, 2\alpha | - 2i\phi) \right] = \omega(1, 2n | \pm i\phi) \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(2\alpha, 2\alpha + 1 | 2i\phi) \right]. \quad (79)$$

Assim sendo, como os autovalores de  $S(\omega^\pm)$ , ou ainda de  $S(\Omega^\pm)$ , estão relacionados com os autovalores de  $\Omega^\pm$  pelo Lema 3, necessita-se apenas diagonalizar a matriz  $\Omega^\pm$ . Em

um primeiro momento, escreve-se explicitamente as matrizes:

$$\omega(2\beta, 2\beta - 1 | -i\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \cos i\theta & \sin i\theta & \\ & & -\sin i\theta & \cos i\theta & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \kappa & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (80)$$

$$\Delta = \prod_{\beta=1}^n \omega(2\beta, 2\beta - 1 | -i\theta) = \begin{pmatrix} \kappa & & & 0 \\ & \kappa & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \kappa \end{pmatrix}, \quad (81)$$

onde,  $\kappa = \begin{pmatrix} \cos i\theta & \sin i\theta \\ -\sin i\theta & \cos i\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & i \sinh \theta \\ -i \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$ . Assim como, pela equação (79),

$$\chi^{\pm} = \begin{pmatrix} \cosh 2\phi & & & \pm i \sinh 2\phi \\ & K & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & K \\ \mp i \sinh 2\phi & & & \cosh 2\phi \end{pmatrix}, \quad (82)$$

sendo,  $K = \begin{bmatrix} \cosh 2\phi & i \sinh 2\phi \\ -i \sinh 2\phi & \cosh 2\phi \end{bmatrix}$ .

Dessa forma, definindo as matrizes,

$$a = \begin{pmatrix} \cosh 2\phi \cosh 2\theta & -i \cosh 2\phi \sinh 2\theta \\ i \cosh 2\phi \sinh 2\theta & \cosh 2\phi \cosh 2\theta \end{pmatrix}, \quad (83)$$

$$b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sinh 2\phi \sinh 2\theta & i \sinh 2\phi \sinh^2 2\theta \\ -i \sinh 2\phi \cosh^2 2\theta & -\frac{1}{2} \sinh 2\phi \sinh 2\theta \end{pmatrix}, \quad (84)$$

obtém-se, ao efetuar o produto de matrizes definido para  $\Omega^{\pm}$ , a matriz tridiagonal com

condições periódicas de contorno:

$$\Omega^\pm = \Delta \chi^\pm \Delta = \begin{pmatrix} a & b & & \mp b^\dagger \\ b^\dagger & a & b & 0 \\ & b^\dagger & a & b \\ & 0 & & \ddots \\ \pm b & & & b^\dagger & a \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Uma vez calculada a matriz  $\Omega^\pm$ , a diagonalização desta pode ser realizada propondo um vetor na forma,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} zu \\ z^2u \\ \vdots \\ z^nu \end{pmatrix}, \quad (86)$$

onde  $z$  e  $u$  são um número e um vetor coluna com dois elementos. Assim, a equação de autovalor torna-se,

$$\Omega^\pm |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle, \quad (87)$$

a qual produz o seguinte sistema de equações,

$$\left\{ \begin{array}{l} (za + z^2b \mp z^n b^\dagger)u = z\lambda u, \\ (z^2a + z^3b + zb^\dagger)u = z^2\lambda u, \\ (z^3a + z^4b + z^2b^\dagger)u = z^3\lambda u, \\ \vdots \\ (z^{n-1}a + z^n b + z^{n-2}b^\dagger)u = z^{n-1}\lambda u, \\ (z^na \mp zb + z^{n-1}b^\dagger)u = z^n\lambda u, \end{array} \right. \quad (88)$$

onde a primeira e última equações configuram as condições de contorno. Assim, impondo  $z = z_k = \exp\left(\frac{i\pi k}{n}\right)$ , tem-se que todas as equações do sistema reduzem-se a uma única equação de autovalor:

$$(a + z_k b + z_k^{-1} b^\dagger)u = \lambda_k u, \quad (89)$$

caso escolhido,

$$\begin{cases} k = 1, 3, \dots, 2n - 1, & \text{para } \Omega^+, \\ k = 2, 4, \dots, 2n - 2, & \text{para } \Omega^-, \end{cases} \quad (90)$$

para que as condições de contorno sejam satisfeitas de tal forma que a equação (89) seja sempre válida.

Dessa forma, escrevendo explicitamente a equação (89) e calculando o determinante:

$$|a + z_k b + z_k^{-1} b^\dagger - \mathbf{I} \lambda_k| = 0, \quad (91)$$

encontra-se a equação característica,

$$\lambda_k^2 + 2\lambda \left[ \sinh 2\phi \cosh 2\theta - \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \sinh 2\phi \sinh 2\theta \right] + 1 = 0, \quad (92)$$

cuja solução é dada por,

$$\lambda_k^\pm = \left[ \sinh 2\phi \cosh 2\theta - \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \sinh 2\phi \sinh 2\theta \right] \pm f(\phi, \theta, k), \quad (93)$$

onde  $f(\phi, \theta, k)$  é uma função. Por outro lado, verifica-se que  $\det(a + z_k b + z_k^{-1} b^\dagger) = 1$ , isto é, definindo  $D_\lambda$  e  $U_\lambda$  como a matriz de autovalores e autovetores respectivamente,

$$\det(a + z_k b + z_k^{-1} b^\dagger) = \det(U_\lambda^\dagger D_\lambda U_\lambda) = \det D_\lambda = \lambda_k^+ \lambda_k^- = 1, \quad (94)$$

sugerindo que  $\lambda_k^\pm = e^{\pm\gamma_k}$ . Dessa maneira,

$$\frac{e^{\gamma_k} + e^{-\gamma_k}}{2} = \cosh \gamma_k = \sinh 2\phi \cosh 2\theta - \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \sinh 2\phi \sinh 2\theta. \quad (95)$$

Assim, a partir da equação (95), verifica-se a propriedade:  $\gamma_{2n-k} = \gamma_k$ , uma vez que  $\cos\left(\frac{\pi(2n-k)}{n}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi k}{n}\right) = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$ . Ainda, calculando a derivada da equação (95) com relação a  $k$ , verifica-se que:

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial k} = \frac{\pi \sinh 2\theta \sinh 2\phi}{n \sinh \gamma_k} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \geq 0, \quad \text{para } n \geq k, \quad (96)$$

isto é,  $\gamma_k$  é crescente em relação a  $k$ :  $\gamma_n \geq \gamma_{n-1} \geq \dots \geq \gamma_0$ .

Dessa forma, com a diagonalização da matriz  $\Omega^\pm$  obtém-se o conjunto de autovalores  $\{e^{\pm\gamma_k}\}$ , com  $\gamma_k$  calculado a partir da equação (95). No entanto, os autovalores necessários

para a diagonalização das matrizes são os autovalores das representações spinoriais das rotações  $\Omega^\pm$ . Assim, pelo Lema 3 e as condições impostas sobre os índices  $k$ , tem-se que:

$$\text{autovalores de } V^- : e^{\frac{1}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \dots \pm \gamma_{2n-2})}, \quad (97)$$

$$\text{autovalores de } V^+ : e^{\frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \dots \pm \gamma_{2n-1})}, \quad (98)$$

onde cada autovalor é obtido pela escolha individual dos sinais nos expoentes.

### 4.3 Limite termodinâmico

Na seção anterior, foi apresentado o processo de diagonalização da matriz  $V_2V_1$ , uma vez que a função partição é obtida dos autovalores desta. Contudo, como discutido anteriormente, no limite termodinâmico, apenas o maior autovalor desta é necessário para o cálculo da função partição. Ainda, neste limite, sabe-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln Z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Lambda_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\{ [2 \sinh 2\phi]^{n/2} \bar{\Lambda}_{\max} \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \ln [2 \sinh 2\phi] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \bar{\Lambda}_{\max}, \end{aligned} \quad (99)$$

onde  $\bar{\Lambda}_{\max}$  é o maior autovalor de  $V_2V_1$ .

Assim sendo, uma vez que os  $\gamma_k$ 's são crescentes em  $k$ , o maior autovalor de  $V_2V_1$  é igual ao maior autovalor de  $\Omega^+$ , o qual é dado por:

$$\bar{\Lambda}_{\max} = e^{\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{2n-1})}, \quad (100)$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln Z = \frac{1}{2} \ln [2 \sinh 2\phi] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \gamma_{2k-1}. \quad (101)$$

Em especial, o segundo termo do lado direito da última expressão pode ser calculado através de uma integral (quando  $n \rightarrow \infty$ ). Para isto, define-se a variável  $\nu = \frac{\pi}{n}(2k-1)$  e reescreve-se  $\gamma_{2k-1} = \gamma(\nu)$ . Assim,

$$\Delta\nu = \frac{\pi}{n} \{ [2(k+1) - 1] - [2k - 1] \} = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n\Delta\nu}{2\pi} = 1, \\ \Delta\nu \rightarrow d\nu, \text{ para } n \text{ grande.} \end{cases} \quad (102)$$

Substituindo no somatório,

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{2k-1} = \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^n \gamma(\nu) \Delta\nu \rightarrow \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\nu) d\nu. \quad (103)$$

onde o limite superior decorre do fato de que para  $n$  grande,  $\nu = \frac{\pi}{n}(2k-1) = \frac{\pi}{n}(2n) = 2\pi$ .

Ainda, definindo a grandeza:

$$\mathcal{L} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \gamma_{2k-1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\nu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \gamma(\nu) d\nu, \quad (104)$$

de forma que a última igualdade é obtida do fato de que  $\gamma_{2n-k} = \gamma_k$ , ou  $\gamma(2\pi - \nu) = \gamma(\nu)$ .

Ademais, a expressão (95) para  $\gamma_k$  pode ser simplificada, uma vez que, como apresentado anteriormente,  $\sinh 2\phi \sinh 2\theta = 1$ . Logo,

$$\cosh^2 2\theta = 1 + \sinh^2 2\theta = 1 + \frac{1}{\sinh^2 2\phi} = \coth^2 2\phi, \quad (105)$$

isto é,

$$\cosh \gamma(\nu) = \cosh 2\phi \coth 2\phi - \cos \nu, \quad (106)$$

de forma que, a partir da equação integral:

$$|z| = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt \ln(2 \cosh z - 2 \cos t), \quad (107)$$

encontra-se,

$$\begin{aligned} \gamma(\nu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\nu' \ln(2 \cosh \gamma(\nu) - 2 \cos \nu'), \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\nu' \ln(2 \cosh 2\phi \coth 2\phi - 2 \cos \nu - \cos \nu'). \end{aligned} \quad (108)$$

Consequentemente, retornando a  $\mathcal{L}$ , tem-se a integral,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\nu \int_0^\pi d\nu' \ln [2 \cosh 2\phi \coth 2\phi - 2(\cos \nu - \cos \nu')], \quad (109)$$

a qual pode ser simplificada, realizando a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{\nu+\nu'}{2} & \text{e} & \mu_2 = \nu - \nu', \\ \nu_1 = \frac{2\mu_1+\mu_2}{2} & \text{e} & \nu_2 = \frac{2\mu_1-\mu_2}{2} \end{cases} \quad (110)$$

Assim,

$$\cos \nu + \cos \nu' = \cos \left( \mu_1 + \frac{\mu_2}{2} \right) + \cos \left( \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} \right) = 2 \cos \mu_1 \cos \frac{\mu_2}{2}, \quad (111)$$

de forma que  $\mathcal{L}$  torna-se:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\mu_1 \int_0^\pi d\mu_2 \ln \left[ 2 \cosh 2\phi \coth 2\phi - 4 \cos \mu_1 \cos \frac{\mu_2}{2} \right], \quad (112)$$

sendo conveniente a mudança  $y = \frac{\mu_2}{2} \rightarrow \mu_2$ , isto é,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\mu_1 \int_0^{\pi/2} d\mu_2 \ln [2D - 4 \cos \mu_1 \cos \mu_2], \quad (113)$$

onde  $D = \cosh 2\phi \coth 2\phi$ . Dessa maneira, a integral pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\mu_1 \int_0^{\pi/2} d\mu_2 \ln 2 \cos \mu_2 \left[ \frac{D}{\cos \mu_2} - 2 \cos \mu_1 \right], \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\mu_1 \int_0^{\pi/2} d\mu_2 \ln 2 \cos \mu_2 + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\mu_1 \int_0^{\pi/2} d\mu_2 \ln \left[ \frac{D}{\cos \mu_2} - 2 \cos \mu_1 \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\mu_2 \ln 2 \cos \mu_2 + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\mu_1 \int_0^{\pi/2} d\mu_2 \ln \left[ 2 \cosh \left( \cosh^{-1} \frac{D}{2 \cos \mu_2} \right) - 2 \cos \mu_1 \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\mu_2 \ln 2 \cos \mu_2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\mu_2 \cosh^{-1} \left( \frac{D}{2 \cos \mu_2} \right), \end{aligned} \quad (114)$$

usando a identidade  $\cosh^{-1} x = \ln[x + \sqrt{x^2 - 1}]$  e também  $\mu_2 = \varphi$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \ln 2 \cos \varphi + \ln \left[ \frac{D}{2 \cos \varphi} + \sqrt{\frac{D^2}{4 \cos^2 \varphi} - 1} \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \ln \left\{ 2 \cos \varphi \left[ \frac{1}{\kappa \cos \varphi} + \frac{1}{\kappa \cos \varphi} \sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2 \varphi} \right] \right\}, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \ln \left\{ \frac{2}{\kappa} \sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2 \varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (115)$$

onde aqui,  $\kappa = \frac{2}{D}$ . Por outro lado, pode-se fazer a mudança  $\cos^2 \varphi \rightarrow \sin^2 \varphi$  devido ao intervalo de integração. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \ln \left\{ \frac{2}{\kappa} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \ln 2D + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \ln \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}) \right]. \end{aligned} \quad (116)$$

Convém, ainda, expressar  $\mathcal{L}$  em termos do ângulo  $\phi$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2 \cosh^2 2\phi}{\sinh 2\phi} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \ln \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}) \right]. \quad (117)$$

## 4.4 Funções termodinâmicas

Uma vez obtida a expressão exata para o limite  $\mathcal{L}$ , retorna-se a expressão para a expressão (101). Por outro lado, sabe-se que a energia livre de Helmholtz por sítio ( $f(H, T)$ ) em uma rede quadrada bidimensional relaciona-se com a função partição pela relação:

$$f(0, T) = -\frac{1}{n^2\beta} \ln Z, \quad (118)$$

isto é, comparando com a equação (101), tem-se que:

$$f(0, T) = -\frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{2} \ln [2 \sinh 2\phi] + \mathcal{L} \right), \quad (119)$$

ainda, de forma explícita,

$$\beta f(0, T) = -\ln(2 \cosh 2\beta J) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \ln \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}) \right]. \quad (120)$$

Dessa maneira, uma vez obtida a energia livre de Helmholtz, pode-se obter a energia interna por sítio ( $u(0, T)$ ), visto que:

$$u(0, T) = \frac{\partial}{\partial \beta} [\beta f(0, T)], \quad (121)$$

esta expressão, por sua vez, usando a notação  $\Delta_\varphi = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}$ , fornece,

$$u(0, T) = -2J \tanh(2\beta J) + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} \int_0^\pi d\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta_\varphi (1 + \Delta_\varphi)}, \quad (122)$$

onde tem-se a relação  $\Delta_\varphi^2 = 1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow \sin^2 \varphi = \frac{(1 - \Delta_\varphi)(1 + \Delta_\varphi)}{\kappa^2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} u(0, T) &= -2J \tanh(2\beta J) + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} \int_0^\pi d\varphi \frac{(1 - \Delta_\varphi)(1 + \Delta_\varphi)}{\Delta_\varphi (1 + \Delta_\varphi) \kappa^2}, \\ &= -2J \tanh(2\beta J) + \frac{1}{2\pi \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} \left( -\pi + \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta_\varphi} \right). \end{aligned} \quad (123)$$

Por outro lado, as derivadas de  $\kappa$  resultam nas relações,

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \beta} = \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \phi} \ln \left( \frac{2}{\cosh 2\phi \coth 2\phi} \right) = -2J \coth(2\beta J) (2 \tanh^2(\beta J) - 1), \quad (124)$$

$$-\frac{1}{2\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} = 2J \tanh(2\beta J) - J \coth(2\beta J) \Rightarrow -2J \tanh(2\beta J) - \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} = -J \coth(2\beta J), \quad (125)$$

as quais permitem calcular a energia interna explicitamente,

$$\begin{aligned}
u(0, T) &= -2J \tanh(2\beta J) - \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} + \frac{1}{2\pi\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta_\varphi}, \\
&= -J \coth(2\beta J) \left[ 1 + \frac{2 \tanh(2\beta J) - 1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta_\varphi} \right], \\
&= -J \coth(2\beta J) \left[ 1 + \frac{2\kappa'}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} \right], \tag{126}
\end{aligned}$$

onde,  $\kappa' = 2 \tanh(2\beta J) - 1$ . Ainda, identificando a integral elíptica completa:

$$K_1(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{127}$$

tem-se que a energia interna é dada por,

$$u(0, T) = -J \coth(2\beta J) \left[ 1 + \frac{2\kappa'}{\pi} K_1(\kappa) \right]. \tag{128}$$

Em um último momento, sabe-se que o calor específico à magnetização ( $m$ ) constante é uma grandeza relacionada com a energia interna por,

$$c_m(0, T) = \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial \beta} = -k_B \beta^2 \frac{\partial u}{\partial \beta}, \tag{129}$$

além de possibilitar a identificação de transições de fase do sistema, as quais estão relacionadas com a existência de uma magnetização espontânea.

Contudo, anteriormente ao cálculo da derivada da energia interna, convém calcular as derivadas de  $\kappa'$  e  $K_1(\kappa)$ . Assim sendo, para  $\kappa'$ ,

$$\frac{\partial \kappa'}{\partial \beta} = 4J \tanh(2\beta J) (1 - \tanh^2(2\beta J)) = 2J \tanh(2\beta J) (1 - \kappa'), \tag{130}$$

e para  $K_1(\kappa)$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_1(\kappa)}{\partial \beta} &= \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} \frac{\partial K_1(\kappa)}{\partial \kappa}, \\
&= 4J \tanh(2\beta J) \left[ \frac{1}{\sinh(2\beta J)} - \kappa \right] \left[ \frac{E_1(\kappa)}{\kappa(1 - \kappa^2)} - \frac{K_1(\kappa)}{\kappa} \right], \\
&= 2J \coth(2\beta J) [1 - 2 \tanh^2(2\beta J)] \left[ \frac{E_1(\kappa)}{\kappa'^2} - K_1(\kappa) \right], \tag{131}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{2J}{\kappa'} \coth(2\beta J) [E_1(\kappa) - \kappa'^2 K_1(\kappa)], \tag{132}$$

onde utilizou-se as relações,

$$\frac{\partial K_1(\kappa)}{\partial \kappa} = \frac{E_1(\kappa)}{\kappa(1-\kappa^2)} - \frac{K_1(\kappa)}{\kappa}, \quad (133)$$

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1, \quad (134)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \beta} = 4J \tanh(2\beta J) \left[ \frac{1}{\sinh(2\beta J)} - \kappa \right], \quad (135)$$

onde a primeira é obtida de [5] e dada por  $E_1(\kappa) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}$ , a segunda por substituição direta das definições de  $\kappa$  e  $\kappa'$  e a última é dada pela equação (124).

Consequentemente, com auxílio das derivadas calculadas, tem-se que a derivada de  $u(0, T)$  com relação a  $\beta$  é dada por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \beta} &= -2J^2 [1 - \coth^2(2\beta J)] \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] + -J \coth(2\beta J) \left[ \frac{2}{\pi} \left( \frac{\partial \kappa'}{\partial \beta} K_1(\kappa) + \kappa' \frac{\partial K_1(\kappa)}{\partial \beta} \right) \right], \\ &= -J^2 \coth^2(2\beta J) (\kappa' - 1) \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] \\ &\quad - \frac{2J \coth(2\beta J)}{\pi} \left\{ 2J \tanh(2\beta J) (1 - \kappa') K_1(\kappa) - 2J \coth(2\beta J) [E_1(\kappa) - \kappa'^2 K_1(\kappa)] \right\}, \\ &= -[J \coth(2\beta J)]^2 \left\{ (\kappa' - 1) \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} [(1 + \kappa')(1 - \kappa') K_1(\kappa) - 2E_1(\kappa) + 2\kappa'^2 K_1(\kappa)] \right\}, \\ &= -(J \coth(2\beta J))^2 \left( \frac{2}{\pi} \right) \left\{ (2 - \kappa^2) K_1(\kappa) - 2E_1(\kappa) - (1 - \kappa') \left[ \frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (136)$$

Assim, o calor específico à magnetização constante é dado por:

$$\frac{c_m(0, T)}{k_B} = (\beta J \coth(2\beta J))^2 \left( \frac{2}{\pi} \right) \left\{ (2 - \kappa^2) K_1(\kappa) - 2E_1(\kappa) - (1 - \kappa') \left[ \frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] \right\} \quad (137)$$

Em um último momento, apresenta-se o comportamento da energia interna e do calor específico a campo nulo em função da temperatura na Figura 1. Verifica-se, dessa forma, a existência de uma descontinuidade no calor específico, indicando a existência de uma transição de fase.

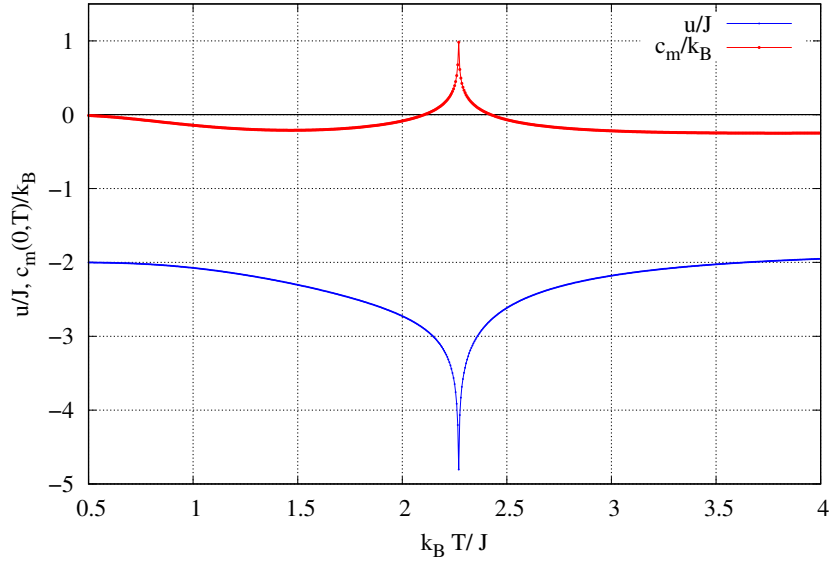


Figura 1: Comportamento da energia interna e do calor específico no modelo de Ising bidimensional.

## 5 Magnetização

Nas seções anteriores, apresentou-se a reprodução dos cálculos realizados por Onsager para a obtenção das funções termodinâmicas dos modelo de Ising bidimensional, na ausência de campo magnético. No entanto, como mencionado anteriormente, o fato de tomar  $H = 0$  não permite o cálculo da magnetização através da solução de Onsager. Assim, nesta seção será explorado o cálculo da magnetização realizado por C. N Yang [6].

Em um primeiro momento, assumindo que existe um campo  $H$  pequeno, de tal forma a introduzir uma perturbação na função partição, tem-se que, pela equação (61):

$$V_3 = \exp \left[ \sum_{\alpha} \phi' \sigma_{\alpha}^z \right] = \mathbf{I} + \sum_{\alpha} \phi' \sigma_{\alpha}^z + \text{termos de ordem superior.} \quad (138)$$

Por outro lado, pode-se simetrizar a matriz  $V = V_3 V_2 V_1$ , visto que os autovalores destas são inalterados quando:  $V \rightarrow V_1^{1/2} V V_1^{-1/2}$ , uma vez que,

$$\det(V_1^{1/2} V V_1^{-1/2}) = \det(V_1^{1/2}) \det(V) \det(V_1^{-1/2}) = \det(V). \quad (139)$$

Logo, para campos pequenos,

$$V_1^{1/2} V V_1^{-1/2} = V_1^{1/2} V_3 V_2 V_1^{1/2} = V_1^{1/2} V_2 V_1^{1/2} + \phi' V_1^{1/2} \left( \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^z \right) V_2 V_1^{1/2}. \quad (140)$$

Dessa forma, sabendo que a magnetização por sítio é calculada exatamente por:

$$m = - \left( \frac{\partial f(H, T)}{\partial H} \right)_T = \left( \frac{1}{n^2 \beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial H} \right)_T = \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta H)} \right)_T = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial \ln \text{Tr} (V_3 V_2 V_1)^n}{\partial \phi'} \right)_T, \quad (141)$$

isto é,

$$m = \frac{1}{n} \frac{\text{Tr} (V_3 V_2 V_1)^n (\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^z)}{\text{Tr} (V_3 V_2 V_1)^n} = \frac{1}{n} V_1^{1/2} \left( \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^z \right) V_1^{-1/2}, \quad (142)$$

onde a última igualdade é obtida notando que  $[\sigma_{\alpha}, V_1] = 0$ . Porém, no limite termodinâmico, apenas o maior autovalor da matriz obtida na equação acima é relevante. Portanto, se  $|\psi_{\max}\rangle$  é o autovetor associado a este autovalor, tem-se:

$$m = \frac{1}{n} \langle \psi_{\max} | V_1^{1/2} \left( \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^z \right) V_1^{-1/2} | \psi_{\max} \rangle. \quad (143)$$

Por outro lado, observando a equação (95), nota-se que no limite termodinâmico,  $\gamma_{2k-1} \approx \gamma_{2k}$ , isto implica que o estado fundamental é duplamente degenerado, visto que ambos maiores autovalores das matrizes  $V^{\pm}$  são iguais. Logo, no limite  $\phi' \rightarrow 0$ , o autovetor associado a este autovalor degenerado é dado (via teoria de perturbação) pela mistura dos autovetores associados aos maiores autovalores de  $V^{\pm}$ , sendo eles  $|\psi_{+}\rangle$  e  $|\psi_{-}\rangle$ . Assim,

$$m = \frac{1}{n} \frac{(\langle \psi_{+} | + \langle \psi_{-} |) V_1^{1/2} \left( \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^z \right) V_1^{-1/2} (|\psi_{+}\rangle + |\psi_{-}\rangle)}{\sqrt{2}} \quad (144)$$

Ainda, como os autovetores  $|\psi_{\pm}\rangle$  estão associados a um mesmo autovalor ( $\lambda$ ) no limite  $\phi' \rightarrow 0$ , tem-se que:

$$V_2 V_1 |\psi_{\pm}\rangle = V_1^{1/2} V_2 V_1^{1/2} |\psi_{\pm}\rangle = \lambda |\psi_{\pm}\rangle, \quad (145)$$

logo,

$$V_1^{-1/2} |\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\lambda} V_2 V_1^{1/2} |\psi_{\pm}\rangle. \quad (146)$$

Além disso, recuperando a matriz  $U = \sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_n^x$ , a qual atua como um operador de reversão de spins na rede, então, os autovetores  $|\psi_{\pm}\rangle$  também são autovetores de  $U$ , na forma:

$$U |\psi_{\pm}\rangle = \pm |\psi_{\pm}\rangle, \quad (147)$$

e devido a forma de  $U$ , então  $\{U, \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^z\} = 0$  (visto que  $\{\sigma^{\alpha}, \sigma^{\beta}\} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$ ) e  $[U, V_1] = 0$ , o que implica que  $\{U, V_1^{1/2} (\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^z) V_1^{-1/2}\} = 0$ . isto é,  $V_1^{1/2} (\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^z) V_1^{-1/2}$  não

possui elementos na diagonal, na base  $|\psi\rangle$ . Consequentemente, a magnetização depende apenas das grandezas,

$$\langle\psi_+|V_1^{1/2}\left(\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha}^z\right)V_1^{-1/2}|\psi_-\rangle=\frac{1}{\lambda}\langle\psi_+|V_1^{1/2}\left(\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha}^z\right)V_2V_1^{1/2}|\psi_-\rangle, \quad (148)$$

$$\langle\psi_-|V_1^{1/2}\left(\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha}^z\right)V_1^{-1/2}|\psi_+\rangle=\frac{1}{\lambda}\langle\psi_-|V_1^{1/2}\left(\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha}^z\right)V_2V_1^{1/2}|\psi_+\rangle, \quad (149)$$

as quais são iguais, visto que a segunda expressão é a transposta da primeira.

Portanto, a magnetização pode ser reescrita como:

$$m=\frac{1}{2n}2\langle\psi_-|V_1^{1/2}\left(\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha}^z\right)V_1^{-1/2}|\psi_+\rangle=\frac{1}{n}\langle\psi_-|V_1^{1/2}\left(\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha}^z\right)V_1^{-1/2}|\psi_+\rangle, \quad (150)$$

a qual ainda pode ser simplificada, utilizando um operador de permutação cíclica na rede isto é:  $L\sigma_i^{\alpha}L^{-1}=\sigma_{i+1}^{\alpha}$ . Neste sentido, como  $V_1$  e  $V_2$  devem ser invariantes por permutação cíclica, assumindo condições periódicas de contorno, então o operador  $L$  comuta com estas matrizes, implicando na relação  $L|\psi_{\pm}\rangle=a|\psi_{\pm}\rangle$ .

Dessa forma, observando que  $L^n=\mathbf{I}$ , então,  $L^n|\psi_{\pm}\rangle=a^n|\psi_{\pm}\rangle=|\psi_{\pm}\rangle$ , isto é,  $a=1$ , pois  $L$  é real. Assim sendo, visto que  $L^{i-1}\sigma_1^zL^{-(i-1)}=\sigma_i^z$ , a magnetização é encontrada calculando:

$$m=\langle\psi_-|V_1^{1/2}\sigma_1^zV_1^{-1/2}|\psi_+\rangle. \quad (151)$$

Assim sendo, em um primeiro momento, é necessário obter as expressões dos autovetores  $|\psi_{\pm}\rangle$ . No entanto, durante a diagonalização da matriz  $V_2V_1$  nas seções anteriores, os autovetores não foram obtidos. Para isto, pode-se recorrer a dedução realizada por Kaufman [4], onde analogamente às seções anteriores, as matrizes  $V^{\pm}$  são diagonalizadas após um processo de simetrização (embora neste trabalho este processo tenha sido realizado nas rotações, obtendo  $\Omega^{\pm}$ ). Assim, uma vez na forma simétrica, propõe-se rotações  $T_{\pm}$  tais que  $V_0^{\pm}$  ( $V^{\pm}$  simetrizada) sejam levadas a matrizes  $\Lambda_0^{\pm}$  diagonais, na base  $\{\Gamma_{\alpha}^*\}$ :

$$gS(T_{\pm})V_0^{\pm}S(T_{\pm})^{-1}g^{-1}=\Lambda_0^{\pm}. \quad (152)$$

Logo, assumindo que os autovalores de  $\Lambda_0^{\pm}$  são organizados de tal forma que o maior

autovalor está na primeira linha e coluna, então:

$$|\psi_{\pm}\rangle = S(T_{\pm})^{-1} \mathbf{g} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = S(T_{\pm})^{-1} |\tau\rangle. \quad (153)$$

Dessa forma, retornando a magnetização, a qual é um escalar, então:

$$m = \text{Tr} \langle \psi_- | V_1^{1/2} \sigma_1^z V_1^{-1/2} | \psi_+ \rangle = \text{Tr} V_1^{1/2} \sigma_1^z V_1^{-1/2} | \psi_+ \rangle \langle \psi_- |, \quad (154)$$

onde  $|\psi_+\rangle \langle \psi_-| = S(T_+)^{-1} |\tau\rangle \langle \tau| S(T_-)$  e utilizando a expressão (20),

$$|\tau\rangle \langle \tau| = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} (\mathbf{I} + \sigma_1^x)(\mathbf{I} + \sigma_2^x) \cdots (\mathbf{I} + \sigma_n^x). \quad (155)$$

Nota-se, assim, que  $|\tau\rangle \langle \tau|$  assemelha-se a uma representação spinorial de uma rotação, no entanto, para que esta de fato seja uma representação spinorial, utiliza-se:

$$(\mathbf{I} + \sigma_r^x) = \lim_{a \rightarrow i\infty} \frac{\cos a - i\sigma_r^x \sin a}{\cos a} = \lim_{a \rightarrow i\infty} \frac{e^{-ia\sigma_r^x}}{\cos a}, \quad (156)$$

isto é,

$$|\tau\rangle \langle \tau| = \frac{1}{2^n} (\mathbf{I} + \sigma_1^x)(\mathbf{I} + \sigma_2^x) \cdots (\mathbf{I} + \sigma_n^x) = \lim_{a \rightarrow i\infty} \frac{1}{(2 \cos a)^n} \exp \left[ -ia \sum_r \sigma_r^x \right], \quad (157)$$

sendo esta expressão uma representação spinorial de uma rotação. Esta representação, por definição, ao atuar sobre um elemento da álgebra de Clifford realiza a seguinte transformação,

$$\exp \left[ -ia \sum_r \sigma_r^x \right] \Gamma_\alpha \exp \left[ ia \sum_\alpha \sigma_\alpha^x \right] = \sum_\beta M_{\alpha\beta} \Gamma_\beta, \quad (158)$$



Ainda, como  $V_1$  e  $\sigma_1^z$  podem ser escritos como produtos de  $\Gamma_\alpha$ , convém calcular a expressão geral:

$$\begin{aligned}\text{Tr } \Gamma_j \text{S}(T_+^{-1} M T_-) &= \text{Tr } \Gamma_j \text{S}(\zeta^{-1}) \text{S}(W) \text{S}(\zeta), \\ &= \text{Tr } \text{S}(\zeta) \Gamma_j \text{S}(\zeta^{-1}) \text{S}(W),\end{aligned}\tag{163}$$

onde, inicialmente, por definição tem-se  $\text{S}(\zeta) \Gamma_j \text{S}(\zeta^{-1}) = \sum_\alpha \zeta_{\alpha j} \Gamma_\alpha$ . Ademais, devido à  $W$  ser uma rotação imprópria, tem-se que:

$$\text{S}(W) = i \Gamma_1 (\Gamma_3 \Gamma_4) (\Gamma_5 \Gamma_6) \cdots (\Gamma_{2n-1} \Gamma_{2n}) e^{\frac{1}{2} \sum_\beta \theta_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}},\tag{164}$$

de forma que essa expressão pode ser verificada notando que, pela definição,  $\text{S}(W^{-1}) \Gamma_\alpha \text{S}(W)$  deve produzir a mesma transformação que  $W$ . Assim, calculando apenas a atuação do bloco de autovalores 1 e  $-1$  de  $W$ , tem-se:

$$W : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1,\tag{165}$$

$$\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2,\tag{166}$$

de forma que este bloco equivale ao termo  $i \Gamma_1 (\Gamma_3 \Gamma_4) (\Gamma_5 \Gamma_6) \cdots (\Gamma_{2n-1} \Gamma_{2n})$ , o qual produz, com auxílio da equação (14)

$$[i \Gamma_1 (\Gamma_3 \Gamma_4) (\Gamma_5 \Gamma_6) \cdots (\Gamma_{2n-1} \Gamma_{2n})]^{-1} \Gamma_1 [i \Gamma_1 (\Gamma_3 \Gamma_4) (\Gamma_5 \Gamma_6) \cdots (\Gamma_{2n-1} \Gamma_{2n})] = \Gamma_1,\tag{167}$$

$$[i \Gamma_1 (\Gamma_3 \Gamma_4) (\Gamma_5 \Gamma_6) \cdots (\Gamma_{2n-1} \Gamma_{2n})]^{-1} \Gamma_2 [i \Gamma_1 (\Gamma_3 \Gamma_4) (\Gamma_5 \Gamma_6) \cdots (\Gamma_{2n-1} \Gamma_{2n})] = -\Gamma_2.\tag{168}$$

Dessa maneira, tem-se,

$$\begin{aligned}\text{Tr } \Gamma_j \text{S}(T_+^{-1} M T_-) &= \text{Tr } \sum_\alpha \zeta_{\alpha j} \Gamma_\alpha i \Gamma_1 (\Gamma_3 \Gamma_4) (\Gamma_5 \Gamma_6) \cdots (\Gamma_{2n-1} \Gamma_{2n}) e^{\frac{1}{2} \sum_\beta \theta_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}}, \\ &= i \text{Tr } \zeta_{1j} \left( \prod_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta} e^{\frac{1}{2} \theta_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha \neq 1} \zeta_{\alpha j} \Gamma_\alpha \left( \prod_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta} e^{\frac{1}{2} \theta_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}} \right).\end{aligned}$$

No entanto, como  $e^{\frac{1}{2} \theta_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}} = \cos \frac{\theta_\beta}{2} + \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta} \sin \frac{\theta_\beta}{2}$ , o segundo termo na soma sempre resultará em matrizes proporcionais a produtos de  $\sigma^\alpha$  os quais possuem traço zero.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{Tr } \Gamma_j \mathbf{S}(T_+^{-1} M T_-) &= i \text{Tr } \zeta_{1j} \left( \prod_{\beta=2}^n \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta} e^{\frac{1}{2} \theta_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}} \right), \\
&= i \zeta_{1j} \text{Tr} \prod_{\beta=2}^n \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta} \left[ \cos \frac{\theta_\beta}{2} + \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta} \sin \frac{\theta_\beta}{2} \right], \\
&= i \zeta_{1j} \text{Tr} \prod_{\beta=2}^n \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta} \cos \frac{\theta_\beta}{2} - \sin \frac{\theta_\beta}{2}, \\
&= i \zeta_{1j} \text{Tr} (-1)^{n-1} \mathbf{I} \prod_{\beta=2}^n \sin \frac{\theta_\beta}{2} + \text{termos que dependem de } \Gamma, \\
&= i \zeta_{1j} (-1)^{n-1} 2^n \prod_{\beta=2}^n \sin \frac{\theta_\beta}{2}. \tag{169}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
V_1^{1/2} \sigma_1^z V_1^{-1/2} &= \left[ e^{\frac{i}{2} \theta \sum_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}} \right] \Gamma_1 \left[ e^{-\frac{i}{2} \theta \sum_\beta \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}} \right], \\
&= \left[ e^{\frac{i}{2} \theta \Gamma_1 \Gamma_2} \right] \Gamma_1 \left[ e^{-\frac{i}{2} \theta \Gamma_1 \Gamma_2} \right] \left[ e^{\frac{i}{2} \theta \sum_{\beta \neq 1} \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}} \right] \left[ e^{-\frac{i}{2} \theta \sum_{\beta \neq 1} \Gamma_{2\beta-1} \Gamma_{2\beta}} \right], \\
&= \Gamma_1 \left[ e^{-i \theta \Gamma_1 \Gamma_2} \right], \\
&= \Gamma_1 [\cosh \theta - i \Gamma_1 \Gamma_2 \sinh \theta], \\
&= \Gamma_1 \cosh \theta - i \Gamma_2 \sinh \theta. \tag{170}
\end{aligned}$$

Dessa forma, a expressão para a magnetização é dada por:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{a \rightarrow i\infty} \frac{1}{(2 \cos a)^n} \text{Tr } V_1^{1/2} \sigma_1^z V_1^{-1/2} \mathbf{S}(T_+^{-1} M T_-), \\
&= \lim_{a \rightarrow i\infty} \frac{1}{(2 \cos a)^n} \text{Tr} [\Gamma_1 \cosh \theta - i \Gamma_2 \sinh \theta] \mathbf{S}(\zeta^{-1}) \mathbf{S}(W) \mathbf{S}(\zeta), \\
&= \lim_{a \rightarrow i\infty} \frac{1}{(2 \cos a)^n} \text{Tr} [\mathbf{S}(\zeta) \Gamma_1 \mathbf{S}(\zeta^{-1}) \mathbf{S}(W) \cosh \theta - i \mathbf{S}(\zeta) \Gamma_2 \mathbf{S}(\zeta^{-1}) \mathbf{S}(W) \sinh \theta], \\
&= \lim_{a \rightarrow i\infty} \frac{1}{(2 \cos a)^n} i (-1)^{n-1} 2^n \left( \prod_2^n \sin \frac{\theta_\alpha}{2} \right) (\zeta_{11} \cosh \theta - i \zeta_{12} \sinh \theta), \\
&= \left( \prod_2^n \lambda_\alpha \right) i [\xi_{11} \cosh \theta - i \xi_{12} \sinh \theta], \tag{171}
\end{aligned}$$



onde, como  $\theta_\alpha = \theta_\alpha(a)$ , assume-se que este ângulo dependa de  $a$  de tal forma que neste limite  $\theta_\alpha + 2a \rightarrow \#$ finito. Isto, por sua vez, implica que:

$$\lim_{a \rightarrow i\infty} 2e^{2ia} e^{-i\theta_\alpha} = 0. \quad (177)$$

Assim, partindo da definição de  $\lambda_\alpha$ , encontra-se,

$$\lambda_\alpha^2 = \lim_{a \rightarrow i\infty} \frac{\sin^2 \frac{\theta_\alpha}{2}}{\left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)^2} = \lim_{a \rightarrow i\infty} 4e^{2ia} \left(\frac{e^{i\frac{\theta_\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\theta_\alpha}{2}}}{2i}\right)^2 = - \lim_{a \rightarrow i\infty} e^{2ia} e^{i\theta_\alpha} = -\frac{l_\alpha}{2}, \quad (178)$$

isto é, a expressão para  $\lambda_\alpha$  é obtida diagonalizando a matriz  $G$ . Dessa forma, convém reescrever a matriz  $G$ , utilizando os elementos  $t_{ij}^\pm$  das matrizes  $T_\pm$  obtidos explicitamente em [4], sendo estes dados por:

$$\text{Para } T_-, \quad t_{ij}^- = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{2ij\pi}{n} + \frac{1}{2}\delta'_{2i}\right), & i \text{ ímpar e } j \text{ ímpar} \\ \frac{-1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{2ij\pi}{n} + \frac{1}{2}\delta'_{2i}\right), & i \text{ par e } j \text{ ímpar} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{2ij\pi}{n} - \frac{1}{2}\delta'_{2i}\right), & i \text{ ímpar e } j \text{ par} \\ \frac{-1}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{2ij\pi}{n} - \frac{1}{2}\delta'_{2i}\right), & i \text{ par e } j \text{ par} \end{cases} \quad (179)$$

$$\text{Para } T_+, \quad t_{ij}^+ = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{(2i-1)j\pi}{n} + \frac{1}{2}\delta'_{2i-1}\right), & i \text{ ímpar e } j \text{ ímpar} \\ \frac{-1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{(2i-1)j\pi}{n} + \frac{1}{2}\delta'_{2i-1}\right), & i \text{ par e } j \text{ ímpar} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{(2i-1)j\pi}{n} - \frac{1}{2}\delta'_{2i-1}\right), & i \text{ ímpar e } j \text{ par} \\ \frac{-1}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{(2i-1)j\pi}{n} - \frac{1}{2}\delta'_{2i-1}\right), & i \text{ par e } j \text{ par} \end{cases} \quad (180)$$

onde  $\delta'_r$  é um ângulo definido de tal forma que satisfaça as equações:

$$\sinh \gamma_r \cos \delta'_r = \sinh(2\theta) \cosh(2\phi) - \cosh(2\theta) \sinh(2\phi) \cos\left(\frac{r\pi}{n}\right), \quad (181)$$

$$\sinh \gamma_r \sin \delta'_r = \sinh(2\phi) \sin\left(\frac{r\pi}{n}\right). \quad (182)$$

Assim sendo, ao escrever explicitamente  $T_\pm$  e realizar o produto definido por  $G$ , obtém-se uma matriz que pode ser simplificada na forma:

$$G = \begin{pmatrix} D_+^{-1} & 0 \\ 0 & -iD_+^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+^{-1} \\ p_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_- & p_-^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_- & 0 \\ 0 & iD_- \end{pmatrix}, \quad (183)$$

sendo, ao definir  $\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{n}}$ ,

$$D_- = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2n} \\ \varepsilon^4 & \varepsilon^8 & \dots & \varepsilon^{4n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{2n} & \varepsilon^{4n} & \dots & \varepsilon^{2nn} \end{pmatrix}, \quad D_+ = D_- \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & & & \\ & \varepsilon^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{-n} \end{pmatrix},$$

$$p_- = \begin{pmatrix} e^{i\delta'_2/2} & & & \\ & e^{i\delta'_4/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\delta'_{2n}/2} \end{pmatrix}, \quad p_+ = \begin{pmatrix} e^{i\delta'_1/2} & & & \\ & e^{i\delta'_3/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\delta'_{2n-1}/2} \end{pmatrix}, \quad (184)$$

onde todas estas matrizes são unitárias.

Para a diagonalização de  $G$ , pode-se definir autovetores similares aos vetores utilizados na diagonalização das matrizes  $\Omega^\pm$ , isto é,

$$G \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (185)$$

de forma que ao efetuar este produto, utilizando  $G$  na forma da expressão (183), encontra-se o sistema de equações,

$$\begin{cases} D_+^{-1} p_+^{-1} (p_- D_- \varphi + i p_-^{-1} D_- \eta) = l \varphi, \\ -i D_+^{-1} p_+ (p_- D_- \varphi + i p_-^{-1} D_- \eta) = l \eta, \end{cases} \quad (186)$$

ou,

$$\begin{cases} p_- D_- \varphi + i p_-^{-1} D_- \eta = l p_+ D_+ \varphi, \\ p_- D_- \varphi + i p_-^{-1} D_- \eta = i l p_+^{-1} D_+ \eta, \end{cases} \quad (187)$$

Portanto,  $p_+ D_+ \varphi = i p_+^{-1} D_+ \eta \Rightarrow \eta = -i D_+^{-1} p_+^2 D_+ \varphi$ . Assim, substituindo na primeira equação do sistema, encontra-se:

$$p_- D_- \varphi + p_-^{-1} D_- D_+^{-1} p_+^2 D_+ \varphi = l p_+ D_+ \varphi, \quad (188)$$

tal que, definindo  $\varphi_1 = D_+ \varphi$  e  $D = D_- D_+^{-1}$ , tem-se a equação para os autovalores  $l_\alpha$ :

$$[D + (p_-^{-1})^2 D p_+^2] \varphi_1 = l (p_-^{-1} p_+) \varphi_1. \quad (189)$$

Como apresentado até o momento, para a magnetização ser obtida, necessita-se calcular os termos  $\xi_{11}$  e  $\xi_{12}$ . Assim, como estes são definidos em termos de  $\zeta_{\alpha\beta}$ , inicialmente, nota-se que o primeiro vetor da matriz  $\zeta$  é um autovetor da rotação  $T_+^{-1}MT_-$ , através da definição (162), associado ao autovalor 1. Logo,

$$(T_+^{-1}MT_-)\zeta_1 = \zeta_1. \quad (190)$$

Definindo, um vetor  $\xi_1$  que satisfaz as relações:

$$\begin{cases} G\xi_1 = 0, \\ G\xi_1^* = 2\xi_1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} G^*\xi_1^* = 0, \\ G^*\xi_1 = 2\xi_1^*, \end{cases} \quad (191)$$

pode-se propor  $\zeta_1 = \frac{1}{2}(e^{-ia}\xi_1 + e^{ia}\xi_1^*)$ . Assim, testando na equação (174), encontra-se:

$$(T_+^{-1}MT_-)\zeta_1 = \frac{1}{2} \left( Ge^{-2ia} + \frac{1}{2}G^*e^{2ia} \right) \frac{1}{2}(e^{-ia}\xi_1 + e^{ia}\xi_1^*) = \frac{1}{2}(e^{-ia}\xi_1 + e^{ia}\xi_1^*) = \zeta_1. \quad (192)$$

Verifica-se, que no limite  $a \rightarrow i\infty$ ,  $\zeta_1$  e  $\xi_1$  são proporcionais, da mesma forma que na equação (173). Além disso, a normalização do vetor  $\zeta_1$  ( $(\zeta_1)^T\zeta_1 = 1$ ) implica, com uso das equações (191), nas condições:

$$\begin{cases} \xi_1^T\xi_1 = 0, \\ \xi_1^T\xi_1^* = 2, \end{cases} \quad (193)$$

Logo, como  $\zeta_1$  e  $\xi_1$  estão relacionados, pode-se utilizar as condições impostas em  $\xi_1$  de forma a obter:

$$G\xi_1 = \begin{pmatrix} D_+^{-1} & 0 \\ 0 & -iD_+^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+^{-1} \\ p_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_- & p_-^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_- & 0 \\ 0 & iD_- \end{pmatrix} \xi_1 = 0, \quad (194)$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} p_- & p_-^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_- & 0 \\ 0 & -iD_- \end{pmatrix} \xi_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} D_- & 0 \\ 0 & iD_- \end{pmatrix} \xi_1 = \begin{pmatrix} p_-^{-1} \\ -p_- \end{pmatrix} y, \quad (195)$$

onde  $y$  é um vetor coluna de dimensão  $n$ , o qual garante a dimensionalidade da equação acima.

Assim, como  $\xi_1$  é dado em termos de  $y$  por,

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} D_-^{-1} & 0 \\ 0 & -iD_-^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_-^{-1} \\ -p_- \end{pmatrix} y \quad \Rightarrow \quad \xi_1^* = \begin{pmatrix} D_- & 0 \\ 0 & iD_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_- \\ -p_-^{-1} \end{pmatrix} y^*, \quad (196)$$

pode-se substituir  $\xi_1^*$  na expressão  $G\xi_1^* = 2\xi_1$ , de forma a obter o sistema de equações,

$$\begin{cases} D_+^{-1}p_+^{-1}(p_-D_-^2p_- + p_-^{-1}D_-^2p_-^{-1})y^* = 2D_-^{-1}p_-^{-1}y, \\ -D_+^{-1}p_+(p_-D_-^2p_- + p_-^{-1}D_-^2p_-^{-1})y^* = 2D_-^{-1}p_-y. \end{cases} \quad (197)$$

Por outro lado, sabendo que os elementos da matriz  $D_-$  são dados por  $(D_-)_{rs} = n^{-1/2}\varepsilon^{2rs}$ , então,

$$(D_-)_{rs}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon^{2rt} \varepsilon^{2ts} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \exp\left(t \frac{2i\pi(r+s)}{n}\right), \quad (198)$$

de forma que, se  $r+s \neq n$ :

$$(D_-)_{rs}^2 = \frac{1}{n} \frac{\exp\left(\frac{2i\pi(r+s)}{n}\right) [\exp(2i\pi(r+s)) - 1]}{\exp\left(\frac{2i\pi(r+s)}{n}\right) - 1} = 0, \text{ pois } r+s = \text{inteiro}. \quad (199)$$

Mas, se  $r+s = n$ , isto é,  $s = n-r$ , então:

$$(D_-)_{r \ n-r}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n 1 = 1. \quad (200)$$

Logo,

$$D_-^2 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & & 1 & \\ & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (201)$$

Dessa forma, calculando as matrizes,

$$(p_-)^2 = \begin{pmatrix} e^{i\delta'_2} & & & \\ & e^{i\delta'_4} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\delta'_{2n}} \end{pmatrix}, \quad (p_-^{-1})^2 = \begin{pmatrix} e^{-i\delta'_2} & & & \\ & e^{-i\delta'_4} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-i\delta'_{2n}} \end{pmatrix}, \quad (202)$$

e utilizando a propriedades de  $\delta'_r$  para  $T$  menor que a temperatura crítica ( $\delta_{2n-2r} = -\delta'_{2r}$  e  $\exp(i\delta'_{2n}) = -1$ ), tem-se que,

$$(p_-^{-1})^2 = \begin{pmatrix} e^{i\delta'_{2n-2}} & & & \\ & e^{i\delta'_{2n-4}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = D_-^2 p_-^2 D_-^2. \quad (203)$$

Ainda, a última expressão pode ser escrita na forma  $p_- D_-^2 p_- = p_-^{-1} D_-^2 p_-^{-1}$ . Dessa forma, utilizando essa identidade, reduz-se o sistema de equações para  $y$  em:

$$\begin{cases} D_+^{-1} p_+^{-1} p_- D_-^2 p_- y^* = D_-^{-1} p_-^{-1} y, \\ -D_+^{-1} p_+ p_- D_-^2 p_- y^* = D_-^{-1} p_- y, \end{cases} \quad (204)$$

de forma que ao resolver para  $y^*$ , tem-se  $y^* = p_-^{-1} (D_-^{-1})^2 p_-^{-1} p_+ D_-^{-1} p_-^{-1} y$ . Portanto, da segunda equação,  $(D_-^{-1} + (p_+^{-1}) D_-^{-1} p_-^2) (p_-^{-1} y) = 0$ . Assim, a partir das seguintes equações, determina-se  $y$ , e conseqüentemente,  $\xi_1$ , do qual o primeiro e  $n+1$ -ésimo termo é necessário para o cálculo da magnetização (dada a ordenação dos termos desse vetor).

$$\begin{cases} D p_+^{-1} p_- D_-^2 p_- y^* = p_-^{-1} y, \\ (D_-^{-1} + (p_+^{-1})^2 D_-^{-1} p_-^2) (p_-^{-1} y) = 0. \end{cases} \quad (205)$$

## 5.2 Limite termodinâmico

Nas seções anteriores, a magnetização foi expressa em termos das quantidades  $\lambda_a$  e  $\xi_{\alpha\beta}$ , no limite de uma rede finita. Assim, nesta seção, calcula-se o limite termodinâmico dessa grandeza, visto que neste regime as grandezas necessárias para o cálculo da magnetização são obtidas através de integrais.

Inicialmente, somando as equações (185) e eliminando  $\gamma_r$  destas, encontra-se a relação entre  $\delta'_r$  e as variáveis termodinâmicas  $\theta$  e  $\phi$ ,

$$e^{2i\delta'} = \frac{\tanh^2 \theta (z - \coth \phi \coth \theta) (z - \tanh \phi \coth \theta)}{(z - \coth \phi \tanh \theta) (z - \tanh \phi \tanh \theta)}, \quad (206)$$

onde  $z = \exp\left(\frac{i\pi r}{n}\right)$  de tal forma que a raiz quadrada dessa expressão fornece, ao definir as funções  $A = \coth \phi \coth \theta$  e  $B = \tanh \phi \coth \theta$ ,

$$\Theta = e^{i\delta'} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \left[ \frac{(z - A)(z - B)}{(z - A^{-1})(z - B^{-1})} \right]^{1/2}. \quad (207)$$

Por outro lado, observando as equações (185) e (95), verifica-se que para  $n$  grande  $\delta'_{2r} \approx \delta'_{2r-1}$ , visto que  $\gamma_{2r} \approx \gamma_{2r-1}$ . Dessa forma, tem-se que  $p_- = p_+ \equiv p$ , e por conseguinte, a equação (189) reduz-se à:

$$[D + (p^{-1})^2 D p^2] \varphi_1 = l \varphi_1. \quad (208)$$

Dessa maneira, para calcular a equação acima necessita-se determinar o resultado da atuação de  $D$  em um vetor  $\varphi$ . Para isto, explicita-se os elementos de  $D$ ,

$$\begin{aligned} (D)_{rs} &= (D_- D_+^{-1})_{rs}, \\ &= \sum_{t=1}^n (D_-)_{rt} \varepsilon^t (D_+^{-1})_{ts}, \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon^{2rt} \varepsilon^t \varepsilon^{-2ts}, \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \exp \left[ -t \frac{i\pi(2s - 2r - 1)}{n} \right], \\ &= -\frac{2}{n} \frac{1}{1 - \exp [i\pi(2s - 2r - 1)]}, \\ &= -\frac{2}{n} \frac{1}{1 - z_{2s}/(z_{2r}\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (209)$$

Logo,

$$(D\varphi)_r = \sum_{s=1}^n (D)_{rs} \varphi_s = -\frac{2}{n} \sum_{s=1}^n \frac{\varphi_s}{1 - z_{2s}/(z_{2r}\varepsilon)}. \quad (210)$$

Ainda, utilizando a mesma argumentação que para o cálculo de  $D_-^2$ , verifica-se que  $D^2 = \mathbf{I}$ .

Assim, no limite termodinâmico,

$$(D\varphi)_r = -\frac{2}{n} \int ds \frac{\varphi(s)}{1 - z/(z_{2r})}, \quad (211)$$

onde  $\varepsilon$  é desconsiderado pois a integral é calculada pelo resíduo gerado pelo polo  $z = z_{2r}$ . Ainda, na mudança de variáveis  $z = e^{2i\pi s/n}$ ,  $dz = \frac{2i\pi}{n} z ds$  e notando que o conjunto  $\{z_{2s}\}$  equivale a  $n$  raízes de 1, então a integral é feita sobre um contorno  $C$  dado pelo círculo de raio unitário no plano complexo,

$$(D\varphi)_r = -\frac{2}{n} \int_C \frac{n dz}{2i\pi z} \frac{\varphi(z)}{1 - z/(z_{2r})} = -\frac{1}{i\pi} \int_C \frac{dz}{z} \frac{\varphi(z)}{1 - z/(z_{2r})}. \quad (212)$$

De forma geral, tomando  $t = z_{2r}$  e escolhendo um contorno  $C'$  que não contenha  $t$ , então adiciona-se um termo na expressão anterior:

$$(D\varphi)_r = \varphi(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\varphi(z)}{1-z/t}, \quad (213)$$

de tal forma que, a equação (208) resulta em,

$$\begin{aligned} l\varphi_1(t) &= [D + (p^{-1})^2 D p^2] \varphi_1, \\ &= \varphi_1(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\varphi_1(z)}{1-z/t} + (p^{-1})^2 D(\Theta\varphi_1), \\ &= \varphi_1(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\varphi_1(z)}{1-z/t} + \frac{1}{\Theta(t)} \Theta(t) \varphi_1(t) - \frac{1}{\Theta(t)} \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\Theta(z) \varphi_1(z)}{1-z/t}, \\ &= 2\varphi_1(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\varphi_1(z)}{1-z/t} \left( 1 + \frac{\Theta(z)}{\Theta(t)} \right), \end{aligned} \quad (214)$$

isto é, os autovalores de  $G$  são obtidos resolvendo a equação integral acima.

Por outro lado, a partir das equações (205), tem-se pela segunda e da propriedade  $D^2 = 1$ ,

$$(D + (p^{-1})^2 D p^2)(p_-^{-1} y) = 0, \quad (215)$$

a qual implica uma proporcionalidade entre  $(p_-^{-1} y)$  e  $\varphi_1$ , visto que o operador que atua sobre estes vetores é o mesmo, resultando, neste caso, o autovalor  $l = 0$ . Assim, propondo  $(p_-^{-1} y) = n^{-1/2} \Phi$ , obtém-se:

$$2\Phi(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\Phi(z)}{1-z/t} \left( 1 + \frac{\Theta(z)}{\Theta(t)} \right) = 0. \quad (216)$$

Como  $y$  e  $\xi_1$  estão relacionados por  $\xi_1 = (D_-^{-1} p_-^{-1} \quad iD_-^{-1} p_-) y = \frac{1}{\sqrt{n}} D_-^{-1} \Phi + \frac{1}{\sqrt{n}} D_-^{-1} p_-^2 \Phi$ , então, tem-se que os elementos  $\xi_{11}$  e  $\xi_{12}$  são dados por:

$$\xi_{11} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \varepsilon^{-2s} \Phi_s = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z^2} \Phi(z), \quad (217)$$

$$\xi_{12} = \frac{i}{n} \sum_{s=1}^n \varepsilon^{-2s} \Theta(\varepsilon^{2s}) \Phi_s = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dz}{z^2} \Theta(z) \Phi(z). \quad (218)$$

Além disso, pela segunda condição das equações (191) e pela relação entre  $\xi_1$  e  $y$ ,

$$\xi_1^T \xi_1^* = y^T \begin{pmatrix} p_-^{-1} & -p_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_-^{-1} & 0 \\ 0 & -iD_-^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_- & 0 \\ 0 & iD_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_- \\ -p_-^{-1} \end{pmatrix} y^* = 2y^T y^* = 2, \quad (219)$$

logo,  $\frac{1}{n}\Phi^T\Phi^* = 1$ . Esta expressão, por sua vez, pode ser reescrita notando que,

$$\frac{1}{n}\Phi^T\Phi^* = \frac{1}{2i\pi} \int_C |\Phi(z)|^2 \frac{dz}{z} = 1. \quad (220)$$

Em última análise, como mencionado anteriormente, para a determinação do vetor  $y$  tem-se duas equações, onde a segunda fornece as formas integrais para  $\xi_{11}$  e  $\xi_{12}$ . Por outro lado, a primeira torna-se, no limite termodinâmico,

$$p_-^{-1}y = \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi = Dp_+^{-1}p_-D_-^2p_-y^* = \frac{1}{\sqrt{n}}DD_-^2\Phi^* \Rightarrow DD_-^2\Phi^* = \Phi, \quad (221)$$

de forma que,  $D_-^2$  inverte a ordem dos elementos de  $\Phi^*$ . Mas, utilizando a relação  $\delta'_{2n-2r} = -\delta'_{2r}$ , então,

$$D_-^2\Phi^*(z) = [\Phi(z^*)]^* \equiv \Phi^\dagger(z), \quad (222)$$

isto é,

$$\Phi(t) = DD_-^2\Phi^* = D\Phi^\dagger(z) = \Phi^\dagger(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\Phi^\dagger(z)}{1-z/t}. \quad (223)$$

Assim sendo, a magnetização é exatamente calculada resolvendo as seguintes equações integrais:

$$2\Phi(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\Phi(z)}{1-z/t} \left(1 + \frac{\Theta(z)}{\Theta(t)}\right) = 0, \quad (224)$$

$$l\varphi_1(t) = 2\varphi_1(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\varphi_1(z)}{1-z/t} \left(1 + \frac{\Theta(z)}{\Theta(t)}\right), \quad (225)$$

$$\xi_{11} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z^2} \Phi(z), \quad (226)$$

$$\xi_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{dz}{z^2} \Theta(z) \Phi(z). \quad (227)$$

de forma que a função  $\Phi(z)$  satisfaça as condições:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C |\Phi(z)|^2 \frac{dz}{z} = 1, \quad (228)$$

$$\Phi(t) = \Phi^\dagger(t) - \frac{1}{i\pi} \int_{C'} \frac{dz}{z} \frac{\Phi^\dagger(z)}{1-z/t}, \quad (229)$$

A primeira, por sua vez, é resolvida por inspeção e possui como solução a função:

$$\Phi(z) = \frac{Fz}{\sqrt{(A-z)(B-z)}}, \quad (230)$$

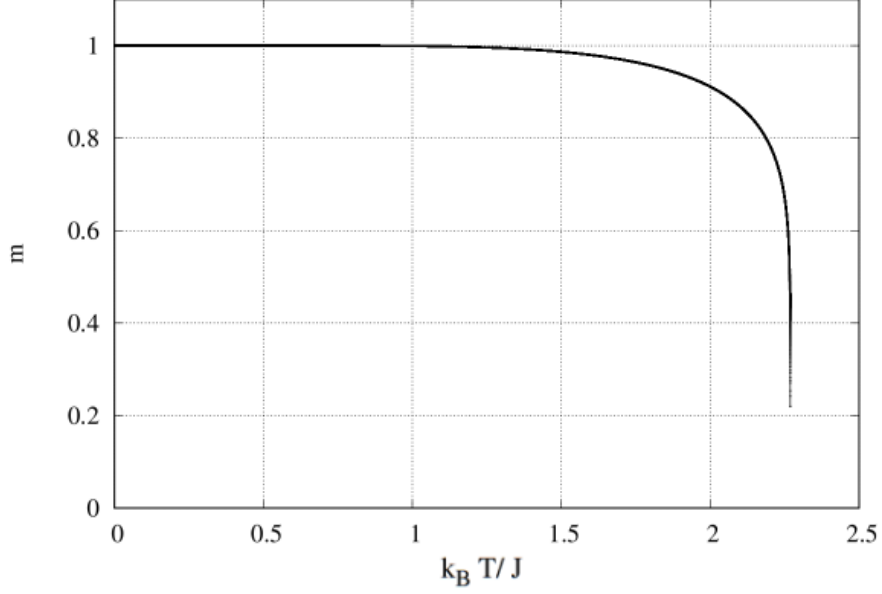


Figura 2: Comportamento exato da magnetização espontânea.

sendo  $F$  uma constante de normalização, qual é determinada pela primeira condição imposta sobre  $\Phi(z)$ . Assim, obtém-se a relação,

$$\frac{F^2}{2i\pi} \int_C \frac{dz}{\sqrt{(A-z)(B-z)(Az-1)(Bz-1)}} = 1, \quad (231)$$

que permite relacionar a constante  $F$  à integral elíptica completa  $K_1$  por,

$$F^{-2} = \frac{4\sqrt{k_{-1}}}{\pi(A-B)} K_1(k_{-1}), \quad (232)$$

onde,  $k_{-1} = \left[ \frac{\sqrt{(A^2-1)} - \sqrt{(B^2-1)}}{A\sqrt{(B^2-1)} + B\sqrt{(A^2-1)}} \right]^2$ .

Assim, utilizando a solução para  $\Phi(z)$ , obtém-se,

$$\xi_{11} = \frac{F}{\sqrt{AB}} \quad \text{e} \quad \xi_{12} = 0, \quad (233)$$

de tal forma que a magnetização reduz-se à,

$$m^4 = \left( \prod_2^n \frac{l_\alpha^2}{4} \right) \frac{F^4}{(AB)^2} \cosh^4 \theta = \left( \prod_2^n \frac{l_\alpha^2}{4} \right) \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{1}{K(k)} \right]^2. \quad (234)$$

uma vez feita a transformação  $k = \frac{2\sqrt{k_{-1}}}{1+k_{-1}}$  em  $F$ .

Assim, para a determinação do produto de  $l_\alpha$ 's, realiza-se um longo processo de transformações elípticas [7] na equação integral (225), de tal forma que, via análise de resíduos,

$$\prod_2^n \frac{l_\alpha^2}{4} = \frac{4}{\pi^2} K^2(k) \frac{1 + e^{-4\phi}}{(1 - e^{-4\phi})^2} [1 - 6e^{-4\phi} + e^{-8\phi}]^{\frac{1}{2}}. \quad (235)$$

Dessa maneira, retornando à magnetização, tem-se,

$$m = \left\{ \frac{1 + e^{-4\beta J}}{(1 - e^{-4\beta J})^2} [1 - 6e^{-4\beta J} + e^{-8\beta J}]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{4}}. \quad (236)$$

Ainda, mostra-se o comportamento da magnetização na Figura 2, onde o final da curva deve intersectar o eixo horizontal, no entanto, devido a rápida variação da curva, é necessário uma maior precisão no cálculo dos pontos.

## 6 Conclusão

Neste trabalho, realiza-se calcula-se propriedades termodinâmicas do modelo de Ising bidimensional, de forma exata, a partir das soluções obtidas por Onsager para a energia livre de Helmholtz, energia livre e calor específico e por Yang para a magnetização espontânea de um ferromagneto. Neste sentido, verifica-se a existência de uma transformação de fase mesmo no regime de campo magnético externo nulo, a partir de uma descontinuidade do calor específico.

Em um segundo momento, a partir da obtenção a magnetização espontânea, observa-se a formação de uma fase ferromagnética (ou ainda uma fase ordenada) do modelo. Ainda, o estudo das soluções apresentadas no trabalho introduz novas ferramentas matemáticas mais sofisticadas para o estudo de modelos físicos, sendo elas as representações spinoriais.

## Referências

- [1] S. G. Brush, History of the Lenz-Ising Model. *Rev. Mod. Phys.* 39, 883 (1967).
- [2] K. Huang, *Statistical Mechanics*. (John Wiley & Sons, 1987) 2ed.
- [3] L. Onsager, Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Phys. Rev.* 65, 117 (1944).
- [4] B. Kaufman, Crystal Statistics. II. Partition Function Evaluated by Spinor Analysis. *Phys. Rev.* 76, 1232 (1949).

- [5] G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*. (Elsevier) 7ed.
- [6] C. N. Yang, The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model. *Phys. Rev.* 85, 808 (1952).
- [7] E. Y. Whittaker, G. N. Watson, *Modern Analysis* (Cambridge University Press, London, 1927), 4 ed.