

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E**  
**ENGENHARIA DE MATERIAIS**

ANÁLISE INVERSA PARA IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DO  
MODELO DE DRUCKER-PRAGER EM COMPACTO VERDE DE ALUMINA

Igor Mandatti Bonizio

São Carlos - SP

2026

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E**  
**ENGENHARIA DE MATERIAIS**

ANÁLISE INVERSA PARA IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DO  
MODELO DE DRUCKER-PRAGER EM COMPACTO VERDE DE ALUMINA

Igor Mandatti Bonizio

Dissertação apresentada  
ao Programa de Pós-Graduação em Ciência  
e Engenharia de Materiais como requisito  
parcial à obtenção do título de MESTRE EM  
CIÊNCIA E ENGENHARIA DE MATERIAIS

Orientador: Dr. Rodrigo Bresciani Canto

Coorientador: Dr. Vinicius Fiocco Sciuti

Agência Financiadora: CAPES - Processo: 88887.953781/2024-00

São Carlos - SP

2026

## **DEDICATÓRIA**

À minha esposa, por sempre me apoiar e acreditar no meu potencial. Aos meus pais por terem me incentivado desde cedo a seguir os meus sonhos. E a todos os amigos que fizeram parte dessa trajetória de alguma forma.

## **VITAE**

Bacharel em Engenharia Física pela Universidade Federal de São Carlos  
(2022).



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Ciência e Engenharia de Materiais

---

**Folha de Aprovação**

---

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Igor Mandatti Bonizio, realizada em 26/03/2026.

**Comissão Julgadora:**

Prof. Dr. Rodrigo Bresciani Canto (UFSCar)

Prof. Dr. Carlos Alberto Della Rovere (UFSCar)

Prof. Dr. Ayrton Ribeiro Ferreira (USP)

O Relatório de Defesa produzido pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se registrado no sistema direcionado para o PPGCEM Programa de Pós-Graduação em Ciência e Engenharia de Materiais.

## **AGRADECIMENTOS**

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro para realização deste trabalho com bolsa de estudos, processo nº 88887.953781/2024-00. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Rodrigo e Prof. Vinicius por me aceitarem como aluno, pela confiança, orientação, estrutura e todo o apoio. Agradeço aos membros do grupo MECM, pelo acolhimento, discussões, ideias e parcerias, o convívio com vocês me deu energia para continuar e a certeza de que estou no caminho certo. Agradeço em especial ao Caiuã, por disponibilizar os dados de sua pesquisa para que eu pudesse dar continuidade.

Agradeço à minha esposa por ter me incentivado a seguir este caminho antes mesmo de eu perceber que era o que eu queria. Agradeço aos meus pais por terem me incentivado a estudar desde criança, e por sempre me ensinarem a seguir meus sonhos. Por fim, agradeço a todos os meus amigos que fizeram parte desta trajetória, que sempre me incentivaram nos momentos frustrantes, e que me escutavam nos momentos de euforia. Obrigado por serem parte da minha vida.

## RESUMO

A prensagem de pós cerâmicos seguida de sinterização, é amplamente utilizada na indústria. Em etapas de baixo confinamento, como ejeção do molde, na manipulação e usinagem a verde, o comportamento mecânico do compacto verde pode ser descrito por um modelo constitutivo elastoplástico baseado no critério de escoamento de Drucker-Prager (DP). Este trabalho investigou a identificabilidade dos parâmetros do modelo DP linear com encruamento seguindo a lei de Voce, o que inclui o módulo elástico ( $E$ ), ângulo de atrito interno ( $\beta$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ), tensão de saturação ( $\sigma_\infty$ ) e parâmetro de encruamento ( $b$ ), a partir de dados de ensaios brasileiros cíclicos em compactos verdes de alumina, adotando hipótese de fluxo plástico associativo ( $\psi = \beta$ ). A técnica de Atualização do Modelo de Elementos Finitos (do inglês *Finite Element Model Updating*, FEMU) foi empregada em duas etapas: uma análise numérica de sensibilidade baseada em dados sintéticos e uma aplicação experimental baseada em força (FEMU-F), utilizando dados experimentais de três ensaios mecânicos da literatura. A análise numérica demonstrou que dados de força global possibilitam identificar o  $E$  e o  $\beta$  com alta sensibilidade, mas não restringem unicamente os parâmetros de encruamento, devido a um acoplamento crítico entre  $\sigma_y$ ,  $\sigma_\infty$  e  $b$ , criando um vale de soluções indistinguíveis. A incorporação de campos de deslocamento na abordagem combinada (FEMU-UF) demonstrou mitigar esse mau condicionamento, validando numericamente o ensaio como configuração viável para caracterização elastoplástica. Na aplicação experimental  $E$  e  $\beta$  foram identificados com variabilidade inferior a 4%, enquanto  $\sigma_y$  apresentou variabilidade de 38%, confirmando experimentalmente o acoplamento previsto pela decomposição de autovalores da Hessiana. Apesar dessa instabilidade paramétrica, um modelo generalizado com parâmetros médios reproduziu as curvas de força-tempo com desvio inferior a 7% em relação aos ajustes individuais. O modelo reproduz com fidelidade a resposta mecânica no ensaio brasileiro, contudo, sua capacidade preditiva global permanece restrita às condições do ensaio e à hipótese de fluxo associativo adotada.

**Palavras-chave:** Compacto verde; Ensaio Brasileiro; FEMU; Análise inversa

## ABSTRACT

### INVERSE ANALYSIS FOR THE IDENTIFICATION OF DRUCKER-PRAGER MODEL PARAMETERS IN ALUMINA GREEN COMPACT

Powder pressing followed by sintering is widely used in industry. In low-confinement stages, such as die ejection, handling, and green machining, the mechanical behavior of the green compact can be described by an elastoplastic constitutive model based on the Drucker-Prager (DP) yield criterion, incorporating isotropic hardening. This study investigated the identifiability of the linear DP model parameters with Voce hardening law, which include the elastic modulus ( $E$ ), internal friction angle ( $\beta$ ), yield stress ( $\sigma_y$ ), saturation stress ( $\sigma_\infty$ ), and hardening parameter ( $b$ ), using cyclic Brazilian test data on alumina green compacts, adopting an associative plastic flow hypothesis ( $\psi = \beta$ ). The Finite Element Model Updating (FEMU) technique was employed in two stages: a numerical sensitivity analysis based on synthetic data and a force-based experimental application (FEMU-F) using experimental data of three Brazilian tests available in the literature. The numerical analysis demonstrated that global force data enables the identification of  $E$  and  $\beta$  with high sensitivity but are unable to uniquely constrain the hardening parameters due to a critical coupling between  $\sigma_y$ ,  $\sigma_\infty$ , and  $b$ , creating a valley of indistinguishable solutions. The incorporation of displacement fields in the combined approach (FEMU-UF) proved capable of mitigating this ill-conditioning, numerically validating the cyclic Brazilian test as a viable setup for elastoplastic characterization. In the experimental application,  $E$  and  $\beta$  were identified with a variability of less than 4%, while  $\sigma_y$  exhibited a variability of 38%, experimentally confirming the coupling predicted by the Hessian eigenvalue decomposition. Despite this parametric instability, a generalized model using average parameters reproduced the force-time curves with less than a 7% deviation compared to the individual fits. In conclusion, the model reproduces faithfully the mechanical response of the Brazilian test. Nevertheless, its global predictive capacity remains limited to the specific test conditions and the adopted hypothesis of associative flow.

**Keywords:** Green compact; Brazilian test; FEMU; Inverse analysis

## **PUBLICAÇÕES**

BONIZIO, I. M.; FURLAN, M. ; SCIUTI, V. F. ; CANTO, R. B. . Identifying Drucker-Prager material model parameters using Brazilian test and FEMU approach for an alumina green compact. In: XXIII B-MRS Meeting, 2025, Salvador. XXIII B-MRS Meeting - Program, 2025.

**ÍNDICE DE ASSUNTOS**

FOLHA DE APROVAÇÃO . . . . .	i
AGRADECIMENTOS . . . . .	ii
RESUMO . . . . .	iii
ABSTRACT . . . . .	iv
PUBLICAÇÕES . . . . .	v
ÍNDICE DE ASSUNTOS . . . . .	vi
ÍNDICE DE TABELAS . . . . .	viii
ÍNDICE DE FIGURAS . . . . .	ix
SÍMBOLOS E ABREVIATURAS . . . . .	xv
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 REVISÃO DA LITERATURA . . . . .	4
2.1 Comportamento Mecânico de Compactos Verdes . . . . .	4
2.2 Modelo de Drucker-Prager . . . . .	4
2.3 Ensaio Brasileiro . . . . .	7
2.4 Correlação de Imagens Digitais . . . . .	10
3 MATERIAIS E MÉTODOS . . . . .	12
3.1 Caracterização do Material e Fabricação dos Corpos de Prova . . . . .	13
3.2 Procedimento Experimental . . . . .	14
3.3 Modelagem Numérica . . . . .	15
3.3.1 Modelo de Elementos Finitos . . . . .	15

3.3.2	Estratégia de Atualização do Modelo de Elementos Finitos (FEMU) . . . . .	17
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .	21
4.1	Análise de Convergência de Malha . . . . .	21
4.2	Análise de Sensibilidade Multiobjetivo . . . . .	24
4.2.1	Sensibilidade dos Parâmetros na Resposta de Força Global (FEMU-F) . . . . .	24
4.2.2	Sensibilidade dos Parâmetros ao Campo Total de Deslocamentos (FEMU-U) . . . . .	28
4.2.3	Abordagem Combinada (FEMU-UF) . . . . .	32
4.3	Aplicação Experimental em Compactos de Alumina . . . . .	33
4.3.1	Ensaio Brasileiro . . . . .	33
4.3.2	Determinação do Deslocamento Efetivo via Correlação de Imagens Digitais . . . . .	35
4.3.3	Análise de Sensibilidade . . . . .	38
4.3.4	Parâmetros Otimizados . . . . .	41
5	CONCLUSÕES . . . . .	46
6	SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS . . . . .	48
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	50
	APÊNDICE A: Curvas de Sensibilidade . . . . .	54
	APÊNDICE B: Dados de Correlação de Imagens Digitais . . . . .	55

**ÍNDICE DE TABELAS**

2.1	Parâmetros utilizados na análise de sensibilidade (de Melo <i>et al.</i> [8]).	7
3.1	Dimensões dos corpos de prova obtidos por Melo [26]. . . . .	15
4.1	Características da malha e desempenho computacional do estudo de convergência do modelo de EF para o ensaio brasileiro. A malha escolhida está destacada em azul. . . . .	21
4.2	Parâmetros elastoplásticos identificados via FEMU-F . . . . .	41
4.3	Valores da função custo $\chi^2$ para os três conjuntos de parâmetros avaliados em cada ensaio. . . . .	43

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Superfície de escoamento linear do modelo DP, adaptado de [28] .	5
2.2	Modelo de Drucker-Prager/Cap (reta em preto) e ensaios mecânicos (linhas e curvas em vermelho e azul) no plano dos invariantes de tensão $p$ e $q$ , são eles: (1) tração uniaxial, (2) cisalhamento puro, (3) brasileiro, (4) compressão uniaxial, (5A) ensaio triaxial, (5B) prensagem em matiz fechada, (5C) carregamento radial, (5D) prensagem isostática, (6) prensagem em matriz instrumentada. Adaptada de Shang <i>et al.</i> [30]. . . . .	8
2.3	Ilustração da condição de carga pontual de Hertz (a), a condição de carga distribuída de Hondros (b), e um esquema do ensaio brasileiro (c), no qual a placa superior avança até a fratura da amostra. As variáveis do ensaio são: $P_f$ = carga na fratura, $\Delta y_f$ = deslocamento até a fratura, $D_0$ = diâmetro inicial, $\delta$ = comprimento do contato após o achatamento, $2\theta$ = ângulo que define a região do contato após o achatamento. Adaptado de [13]. . . . .	9
3.1	Fluxograma da metodologia adotada, ilustrando a convergência das etapas numérica (sintética) e experimental para a aplicação da FEMU-F. . . . .	12
3.2	Micrografia do pó de alumina obtida em microscópio Zeiss Stemi 2000-C [37]. . . . .	13
3.3	Histograma e distribuição cumulativa do tamanho de partícula do pó de alumina. . . . .	14

- 3.4 Condições de contorno do modelo em EF do ensaio brasileiro. O corpo de prova (semicírculo) possui restrições no deslocamento vertical em seu eixo de simetria (triângulos verdes,  $u_y = 0$ ) e uma restrição de deslocamento horizontal no nó central desse eixo de simetria (triângulo azul,  $u_x = 0$ ). A placa de compressão rígida (linha vermelha) é controlada pelo seu ponto de referência com o deslocamento horizontal restrito (triângulo azul,  $u_x = 0$ ), rotação restrita (x magenta,  $\Theta_z = 0$ ) e um deslocamento vertical imposto (seta laranja). No contato foi utilizado o Lagrangiano Aumentado com  $\mu = 0,3$ . . . . . 16
- 4.1 Análise de convergência de malha para o modelo de MEF do ensaio brasileiro. Eixo esquerdo (laranja): Norma  $\|\mathbf{F}\|_2$  normalizada em relação à malha mais refinada. Eixo direito (verde): Tempo de processamento computacional em segundos. A linha tracejada vertical indica a malha selecionada, marcada com uma estrela. . . 22
- 4.2 Malha de elementos finitos do corpo de prova do Ensaio 1 em 2D, construída no ABAQUS™ com simetria horizontal. O mapa de cores mostra a distribuição do comprimento característico do elemento ( $len = \sqrt{A_{el}}$ , em mm, sendo  $A_{el}$  a área do elemento). A malha compreende 7.132 elementos quadriláteros de 4 nós com integração completa (CPS4) com um  $len$  médio de 0,5 mm. . . . . 23
- 4.3 Resultados do ensaio brasileiro virtual. Esquerda: Força aplicada vs. tempo. Direita: Força aplicada vs. deslocamento. . . . . 24
- 4.4 Análise de sensibilidade da força do ensaio virtual. Superior: Sensibilidade local da força a respeito de cada parâmetro do modelo ao longo do ensaio. Inferior: Força vs. tempo. . . . . 25

4.5	Decomposição da Hessiana do FEMU-F para o teste virtual: (a) Matriz Hessiana, com escala de cores em escala logarítmica de base 10; (b) Espectro de autovalores em um gráfico semi-log normalizado pelo maior autovalor ( $\kappa = 1744$ ); (c) Matriz de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo. . . . .	26
4.6	Decomposição da Hessiana do FEMU-U ( $u_x$ na linha 1, $u_y$ na linha 2, e $U$ na linha 3) para o teste virtual: (a, d, g) Matriz Hessiana, com escala de cores em escala logarítmica de base 10; (b, e, h) Espectro de autovalores em um gráfico semi-log normalizado pelo maior autovalor ( $\kappa(u_x) = 3865$ , $\kappa(u_y) = 403$ e $\kappa(U) = 1729$ ); (c, f, i) Matriz de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo. . . . .	29
4.7	Evolução espaço-temporal da magnitude da sensibilidade $ S $ do deslocamento em relação ao módulo de elasticidade ( $E$ ) e o ângulo de atrito interno ( $\tan \beta$ ). Linha 1: Curva de força por deslocamento com três pontos destacados. Linhas 2 a 4: Campo de sensibilidade para $E$ (esquerda) e $\tan \beta$ (direita) em três diferentes pontos do ensaio. Os campos foram normalizados pelos maiores valores $ S _{max}$ , mostrados no cabeçalho. . . . .	31
4.8	Decomposição da Hessiana combinada para o ensaio virtual: (a) Matriz Hessiana, com escala de cores em escala logarítmica de base 10; (b) Espectro de autovalores em um gráfico semi-log normalizado pelo maior autovalor ( $\kappa = 591$ ); (c) Matriz de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo. . . . .	33
4.9	Resultados do ensaio brasileiro para corpos de prova de compacto verde de alumina (1, 2 e 3) conforme descrito em 3.2. Superior: Deslocamento do travessão vs. tempo. Inferior: Força aplicada vs. tempo. . . . .	34

4.10 Malha utilizada para CID no Ensaio 1 nas faces frontal (esquerda) e traseira (direita). . . . .	36
4.11 Dados de deslocamento obtidos via CID para o CDP do Ensaio 1. Superior: Deslocamento de corpo rígido de cada face do CDP e o deslocamento médio. Inferior: Diferença entre o deslocamento das faces ao longo do ensaio. . . . .	36
4.12 Dados de deslocamento da máquina de ensaios (MTS) e obtidos via CID, multiplicados por dois, para os três ensaios. Superior: Deslocamento médio das faces de cada CDP multiplicado por dois (linhas tracejadas) e o deslocamento registrado pela máquina de ensaios no mesmo instante. Inferior: Diferença entre o deslocamento obtido via CID e o deslocamento da máquina de ensaios. . . . .	37
4.13 Análise de sensibilidade FEMU para o Ensaio 1. Superior: Sensibilidade local da resposta de força para cada parâmetro do modelo ao longo do tempo. Inferior: Comparação entre a resposta experimental força-tempo (linha sólida verde) e a simulação de MEF usando estimativas iniciais dos parâmetros (linha tracejada laranja). . . . .	38
4.14 Decomposição da Hessiana da força para os Ensaios 1, 2 e 3 (ordenados nas linhas de cima para baixo): (a, d, g) Matrizes Hessianas, com escala de cores em escala logarítmica de base 10; (b, e, h) Espectros de autovalores em escala semi-log normalizados pelo seu maior autovalor ( $\kappa_1 = 8,0 \cdot 10^3$ , $\kappa_2 = 1,6 \cdot 10^3$ , e $\kappa_3 = 1,2 \cdot 10^4$ ); (c, f, i) Matrizes de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo. . . . .	40

4.15	Decomposição da Hessiana da função custo avaliada nos parâmetros convergidos para os Ensaios 1, 2 e 3 (ordenados nas linhas de cima para baixo): (a, d, g) Matrizes Hessianas, com escala de cores em escala logarítmica em base 10; (b, e, h) Espectros de autovalores em escala semi-log normalizados pelo seu maior autovalor ( $\kappa_1 = 8,5 \cdot 10^5$ , $\kappa_2 = 9,6 \cdot 10^5$ , e $\kappa_3 = 5,2 \cdot 10^8$ ); (c, f, i) Matrizes de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo. . . . .	44
4.16	Comparação das respostas de forças experimentais com as simulações em EF para os Ensaios 1, 2 e 3. As simulações utilizaram os parâmetros iniciais (linhas tracejadas em laranja), otimizados específicos de cada ensaio (linhas tracejadas em azul) e médios (linhas tracejadas marrom). Os erros residuais normalizados $((F_{EXP} - F_{FEM})/\gamma_F)$ ao longo da duração do ensaio são apresentados abaixo de cada curva de resposta. . . . .	45
A.1	Dados de deslocamento obtidos via CID para o CDP do Ensaio 2. Superior: Deslocamento de corpo rígido de cada face do CDP e o deslocamento médio. Inferior: Diferença entre o deslocamento das faces ao longo do ensaio. . . . .	54
A.2	Dados de deslocamento obtidos via CID para o CDP do Ensaio 3. Superior: Deslocamento de corpo rígido de cada face do CDP e o deslocamento médio. Inferior: Diferença entre o deslocamento das faces ao longo do ensaio. . . . .	54
B.1	Análise de sensibilidade FEMU para o Ensaio 2. Superior: Sensibilidade local da resposta de força para cada parâmetro do modelo ao longo do tempo. Inferior: Comparação entre a resposta experimental força-tempo (linha sólida verde) e a simulação de MEF usando estimativas iniciais dos parâmetros (linha tracejada laranja). . . . .	55

B.2 Análise de sensibilidade FEMU para o Ensaio 3. Superior: Sensibilidade local da resposta de força para cada parâmetro do modelo ao longo do tempo. Inferior: Comparação entre a resposta experimental força-tempo (linha sólida verde) e a simulação de MEF usando estimativas iniciais dos parâmetros (linha tracejada laranja). 56

## SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### ABREVIATURAS E SIGLAS

**BR** - Ensaio Brasileiro

**CDP** - Corpo de Prova

**CID** - Correlação de Imagens Digitais

**DP** - Drucker-Prager

**EF** - Elementos Finitos

**FEMU** - *Finite Element Model Updating* (Atualização do Modelo de Elementos Finitos)

**FEMU-F** - FEMU baseado em Força

**FEMU-U** - FEMU baseado em Deslocamento

**FEMU-UF** - FEMU baseado em Deslocamento e Força

**FRX** - Fluorescência de Raios X

**GdL** - Graus de Liberdade

**MEF** - Método dos Elementos Finitos

**ROI** - *Region of Interest* (Região de Interesse)

**RSD** - *Relative Standard Deviation* (Desvio Padrão Relativo)

**STD** - *Standard Deviation* (Desvio Padrão)

### SÍMBOLOS LATINOS

$a_j$  - Deslocamentos nodais na formulação da CID

$b$  - Parâmetro de taxa de encruamento na Lei de Voce

$d$  - Coesão do material no modelo Drucker-Prager [MPa]

$D$  - Diâmetro do corpo de prova [mm]

$e$  - Espessura do corpo de prova [mm]

$E$  - Módulo de Elasticidade [GPa]

$f, g$  - Imagens de referência e deformada na CID

$F$  - Força ou Carga [N]

$[H]$  - Matriz Hessiana  
 $\{h\}$  - Resíduo ponderado pelo gradiente na formulação FEMU  
 $len$  - Tamanho característico do elemento de malha [mm]  
 $[M]$  - Matriz do sistema linear na CID  
 $N_t$  - Número de instantes de tempo comparados  
 $N_p$  - Número de parâmetros do modelo  
 $N_{GdL}$  - Número de graus de liberdade cinemáticos  
 $p$  - Tensão normal média compressiva (invariante hidrostático) [MPa]  
 $\{p\}$  - Vetor de parâmetros do modelo  
 $P$  - Carga aplicada diametralmente no ensaio brasileiro [N]  
 $q$  - Tensão equivalente de von Mises (invariante desviatório) [MPa]  
 $[S]$  - Matriz de Sensibilidade (Jacobiana)  
 $t$  - Tempo [s] ou instante de carregamento  
 $u$  - Campo de deslocamentos [mm]  
 $u_x, u_y$  - Componentes horizontal e vertical do deslocamento [mm]  
 $x$  - Vetor de posição dos pontos materiais

## SÍMBOLOS GREGOS

$\beta$  - Ângulo de atrito interno [°]  
 $\gamma_F$  - Incerteza de medição da força [N]  
 $\gamma_u$  - Incerteza de medição do deslocamento [mm]  
 $\delta$  - Comprimento do contato achatado no ensaio brasileiro [mm]  
 $\delta p$  - Incremento do vetor de parâmetros na iteração FEMU  
 $\varepsilon^p$  - Deformação plástica  
 $\varepsilon_{ax}^p$  - Deformação plástica axial  
 $\tilde{\varepsilon}$  - Fator de perturbação nas diferenças finitas  
 $\eta^2$  - Função de custo da CID  
 $\theta$  - Ângulo da região de contato no ensaio brasileiro [rad]  
 $\kappa$  - Número de condicionamento da matriz  
 $\mu$  - Coeficiente de atrito no contato

$\nu$  - Coeficiente de Poisson

$\sigma$  - Tensão [MPa]

$\sigma_{ax}$  - Tensão de escoamento uniaxial na lei de encruamento [MPa]

$\sigma_f$  - Tensão de ruptura no ensaio brasileiro [MPa]

$\sigma_y$  - Tensão de escoamento [MPa]

$\sigma_\infty$  - Tensão de saturação na Lei de Voce [MPa]

$\varphi_j$  - Funções de forma na formulação da CID

$\chi^2$  - Função custo (Qui-quadrado)

$\psi$  - Ângulo de dilatância [°]

$\omega$  - Fator de ponderação na função custo combinada

## 1 INTRODUÇÃO

A prensagem de pós, seguida de sinterização, é uma técnica amplamente utilizada na indústria para obtenção de peças cerâmicas e metálicas. Embora a busca por processos *near net-shape* seja constante, existem casos nos quais a usinagem a verde é necessária para atender a tolerâncias dimensionais e geométricas rigorosas. Neste contexto, modelos constitutivos e o Método dos Elementos Finitos (MEF) podem ser utilizados para aprimorar os processos de usinagem e reduzir a formação de trincas ou danos, minimizando custos e desperdício de material [1–6].

Após a etapa de prensagem, o pó assume uma forma que é comumente denominada por compacto verde. Durante as operações subsequentes de fabricação, caracterizadas por um baixo grau de confinamento, como a ejeção da matriz, manipulação da peça e, eventualmente, usinagem a verde, o compacto fica suscetível a falhas. Nessas condições, o comportamento mecânico do compacto verde deve ser avaliado considerando sua natureza granular e porosa, na qual as interações entre os grânulos resultam em uma resposta global macroscópica. Essa aproximação por um meio contínuo é válida quando as dimensões do compacto são ao menos uma ordem de grandeza maiores que as principais heterogeneidades que o compõem [7].

Para a simulação numérica estrutural de compactos verdes, nessas situações de baixo confinamento consideradas neste trabalho, adota-se o modelo constitutivo de Drucker-Prager (DP) linear com encruamento isotrópico, conforme implementado no software comercial ABAQUS™. Neste contexto, o termo *modelo de Drucker-Prager* refere-se ao conjunto completo de equações e leis disponibilizadas por essa implementação, que abrange: (i) o critério de escoamento de Drucker-Prager, que é dependente das tensão de von Mises e da tensão normal média, capaz de representar materiais cuja resistência à compressão é consideravelmente superior à resistência à tração [6, 8]; (ii) a lei de encruamento isotrópico, que governa a evolução da superfície de escoamento com a deformação plástica acumulada; e (iii) a regra de fluxo plástico, que determina

a direção dos incrementos de deformação plástica e, conseqüentemente, a variação volumétrica associada à dilatação, a qual é o fenômeno macroscópico correspondente ao desempacotamento dos grãos sob ação de tensões cisalhantes. Para tais modelos gerarem resultados confiáveis, seus parâmetros devem ser identificados com precisão e validados por meio de ensaios mecânicos. Tradicionalmente, mais de um tipo de ensaio é realizado para identificar parâmetros individuais (por exemplo, compressão uniaxial para o módulo elástico e ensaio brasileiro para a resistência à fratura) [9–12]. Contudo, devido ao comportamento elastoplástico dos compactos verdes, surgem estados de tensão complexos durante os ensaios mecânicos que não podem ser descritos com precisão por soluções analíticas linear-elásticas [13–15]. Um exemplo clássico é o ensaio brasileiro, desenvolvido originalmente pelo engenheiro brasileiro Lobo Carneiro (1943) [16] para estimar a tensão de ruptura do concreto por meio da compressão diametral de um corpo de prova cilíndrico. O estado de tensão produzido por essa configuração foi derivado originalmente por Hertz (1895) [17] para cargas pontuais e estendido por Hondros (1959) [18] para cargas distribuídas. Estas soluções analíticas, válidas para materiais elásticos lineares, desviam-se dos estados de tensão reais quando o material apresenta comportamento elastoplástico e ocorre achatamento das superfícies de contato, como observado por Procopio *et al.* [13]. Conseqüentemente, uma caracterização abrangente de corpos verdes cerâmicos pode ser realizada usando métodos inversos avançados capazes de identificar os parâmetros destes modelos constitutivos complexos [19, 20].

Com o aumento do poder computacional nas últimas décadas, simulações mais complexas tornaram-se viáveis [21], possibilitando o uso da técnica de Atualização do Modelo de Elementos Finitos (FEMU - *Finite Element Model Updating*). A FEMU combina resultados experimentais com simulações de MEF de um mesmo experimento, possibilitando a identificação simultânea de múltiplos parâmetros, a partir de um único conjunto de dados [8, 19, 22–25].

O objetivo deste trabalho é estudar a sensibilidade e aplicar a FEMU na identificação de parâmetros do modelo DP com encruamento, a partir de dados de força e deslocamento de um ensaio brasileiro, visando avaliar a identificabilidade

desses parâmetros. Como estudo de caso, o estudo da sensibilidade foi realizado utilizando um ensaio brasileiro sintético realizado em Elementos Finitos (EF) e a técnica FEMU é aplicada experimentalmente na modalidade baseada em força (FEMU-F) para calibrar o modelo constitutivo a partir de três experimentos com ensaios brasileiros em compactos verdes de alumina, com carregamento cíclico, tendo os ciclos com cargas máximas progressivas. Estes experimentos, realizados originalmente durante o trabalho de doutorado de Caiuã C. de Melo [26], foram reconstruídos digitalmente em EF buscando replicar as condições experimentais. A partir da análise inversa, busca-se identificar um parâmetro elástico ( $E$ ) e outros plásticos que compõem o modelo de DP ( $\beta$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_\infty$  e  $b$ ).

O presente estudo contribui para o preenchimento de uma lacuna na literatura ao estabelecer, de forma sistemática, as condições de identificabilidade dos parâmetros de Drucker-Prager em compactos verdes cerâmicos, fornecendo uma metodologia que pode ser aplicada para aprimorar simulações de processos com baixo grau de confinamento, como ejeção de molde, manipulação e usinagem a verde.

## **2 REVISÃO DA LITERATURA**

### **2.1 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE COMPACTOS VERDES**

Na fabricação de componentes cerâmicos, a etapa de compactação de pós resulta na formação de um corpo coeso denominado compacto verde. Esse material consiste em um meio granular e poroso que deve possuir resistência mecânica suficiente para suportar etapas de desmoldagem, manuseio e usinagem a verde, anteriores ao processo de sinterização.

Um aspecto fundamental dos compactos verdes é o seu comportamento mecânico assimétrico em relação ao sinal das tensões normais atuantes. Por se tratar de um material com porosidade intrínseca, a sua resposta sob solicitações de tração difere significativamente da resposta sob compressão. Sob carregamento trativo, os poros atuam como concentradores de tensão onde trincas podem se iniciar e se propagar facilmente, levando a uma ruptura frágil, mesmo em baixos níveis de carregamento. Em contrapartida, sob carregamento compressivo, o estado de tensão favorece o fechamento dos poros e o atrito entre as partículas, dificultando a propagação de defeitos e resultando em uma tensão de ruptura substancialmente superior [14, 27].

Essa assimetria clássica entre tração e compressão evidencia que critérios de falha tradicionais, como o de von Mises (que independem da pressão hidrostática), são inadequados para estes materiais. Torna-se imprescindível a utilização de modelos constitutivos capazes de considerar, no critério de resistência, o valor da tensão normal média em conjunto com o valor da tensão desviadora (cisalhamento) de von Mises, justificando a adoção de modelos como o de Drucker-Prager.

### **2.2 MODELO DE DRUCKER-PRAGER**

Para representar a plastificação e o encruamento de compactos verdes cerâmicos em situações com baixo grau de confinamento, como ocorre durante

um ensaio de compressão simples, ensaio brasileiro ou durante um processo de usinagem, o modelo de Drucker-Prager (DP) disponível no software comercial ABAQUS™ apresenta-se como uma formulação robusta e adequada. Nesse modelo, a curva de escoamento de DP pode ser definida como uma reta, uma hipérbole ou uma exponencial no plano dos invariantes de tensão  $q$ , tensão de von Mises e  $p$ , a tensão normal média

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2.1)$$

$$p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.2)$$

em que  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais. Na formulação linear, adotada neste trabalho, a superfície de escoamento é descrita por

$$F_s = q - p \tan \beta - d = 0 \quad (2.3)$$

cuja inclinação é governada pelo ângulo de atrito interno do material  $\beta$ , e  $d$  representa a coesão, conforme ilustrado na Figura 2.1.

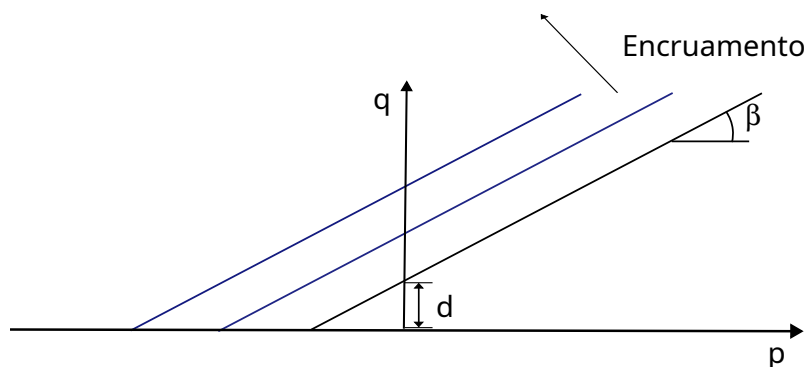


Figura 2.1: Superfície de escoamento linear do modelo DP, adaptado de [28]

Na forma na qual o modelo de Drucker-Prager está implementado no software ABAQUS™, o fluxo plástico pode ser associativo ou não-associativo. No fluxo associativo, o ângulo de dilatância  $\psi$  é igual ao ângulo de atrito interno  $\beta$ , de modo que a superfície de potencial plástico coincide com a superfície de escoamento. Embora o fluxo não-associativo permita uma descrição mais geral do compor-

tamento volumétrico com a variação do  $\psi$ , o fluxo associativo representa uma simplificação adotada na literatura para compactos verdes cerâmicos [20, 26] e sua utilização facilita a convergência em análises numéricas, uma vez que a matriz de rigidez se torna simétrica. Portanto, essa aproximação será utilizada neste trabalho.

A evolução da superfície durante a deformação plástica (encruamento) é governada pela evolução da tensão de escoamento uniaxial,  $\sigma_{ax}$ . Para descrever o comportamento de  $\sigma_{ax}$  em função da deformação plástica ( $\varepsilon_{ax}^p$ ), utilizam-se leis de encruamento empíricas.

Neste trabalho, seguindo a mesma lei utilizada por Melo *et al.* [8], adotou-se a lei de Voce [29] para descrever um comportamento de saturação da tensão

$$\sigma_{ax} = \sigma_{\infty} - (\sigma_{\infty} - \sigma_y) \exp(-b\varepsilon_{ax}^p) \quad (2.4)$$

sendo  $\sigma_y$  a tensão de escoamento inicial,  $\sigma_{\infty}$  a tensão de saturação e  $b$  o parâmetro de taxa de encruamento.

A implementação numérica no ABAQUS™ requer que os dados de encruamento sejam fornecidos de forma tabular. Seguindo a convenção de entrada de dados no software,  $\sigma_{ax}$  e  $\varepsilon_{ax}^p$  são fornecidos como valores absolutos (ou seja, positivos mesmo quando o carregamento é compressivo). Para garantir a consistência física entre o critério de escoamento tridimensional do modelo DP e os dados uniaxiais tabulares fornecidos ao ABAQUS™ pela lei de Voce, o parâmetro de evolução do modelo ( $d$ ) deve ser relacionado à tensão uniaxial instantânea  $\sigma_{ax}$ .

No modelo implementado, a coesão  $d$  relaciona-se com  $\sigma_{ax}$  e com o ângulo de atrito  $\beta$  através da expressão

$$d = \left(1 - \frac{1}{3} \tan(\beta)\right) \sigma_{ax} \quad (2.5)$$

Os valores iniciais adotados para o procedimento de otimização via FEMU foram estabelecidos com base nos resultados obtidos previamente por Melo *et al.* [8]. Em seu estudo, os autores identificaram os parâmetros constitutivos do

modelo de Drucker-Prager linear, assumido fluxo plástico associativo, com encruamento regido pela lei de Voce, para compactos verdes de alumina utilizando a técnica de análise inversa em ensaios de compressão uniaxial, fixando o ângulo de atrito interno ( $\beta$ ) em  $55^\circ$ . Esse conjunto de parâmetros, detalhado na Tabela 2.1, define o ponto de partida do algoritmo de otimização, assegurando que a busca iterativa inicie em uma região do espaço de parâmetros fisicamente consistente com o comportamento material esperado para este tipo de cerâmica.

Tabela 2.1: Parâmetros utilizados na análise de sensibilidade (de Melo *et al.* [8]).

Parâmetro	Descrição	Valor Inicial
$E$ [GPa]	Módulo Elástico	2,5
$\beta$ [°]	Ângulo de Atrito Interno	55
$\sigma_y$ [MPa]	Tensão de Escoamento	2,0
$\sigma_\infty$ [MPa]	Tensão de Saturação	12,4
$b$ [-]	Parâmetro de Encruamento	207
$\nu$ [-]	Coefficiente de Poisson	0,13

### 2.3 ENSAIO BRASILEIRO

Uma forma de identificar os parâmetros do modelo de DP é a partir de dados de diversos tipos de ensaios mecânicos. Como a superfície de Drucker-Prager ( $F_s$ ) é descrita por uma reta no plano  $q$  vs  $p$ , ao menos dois pontos são necessários para determiná-la, ou seja, dois tipos de ensaios que produzam estados de tensão distintos, *e.g.*, compressão simples e o ensaio brasileiro [30]. Na Figura 2.2 são apresentados os diversos tipos de ensaios mecânicos que possibilitam a investigação de diferentes trajetórias de carregamento em pós compactados. É importante ressaltar que, embora a figura ilustre o envelope completo que inclui a superfície de densificação do modelo de Drucker-Prager/Cap (superfície de escoamento elíptica,  $F_c$ , adicionada ao modelo DP clássico para representar o adensamento, relevante durante a prensagem do pó), no escopo deste trabalho, que lida com o compacto verde já formado e submetido a carregamentos de

baixo confinamento, a atenção recai exclusivamente sobre a linha de ruptura por cisalhamento ( $F_s$ ), avaliada pelos ensaios indicados por (3) e (4) (ensaio brasileiro e compressão uniaxial).

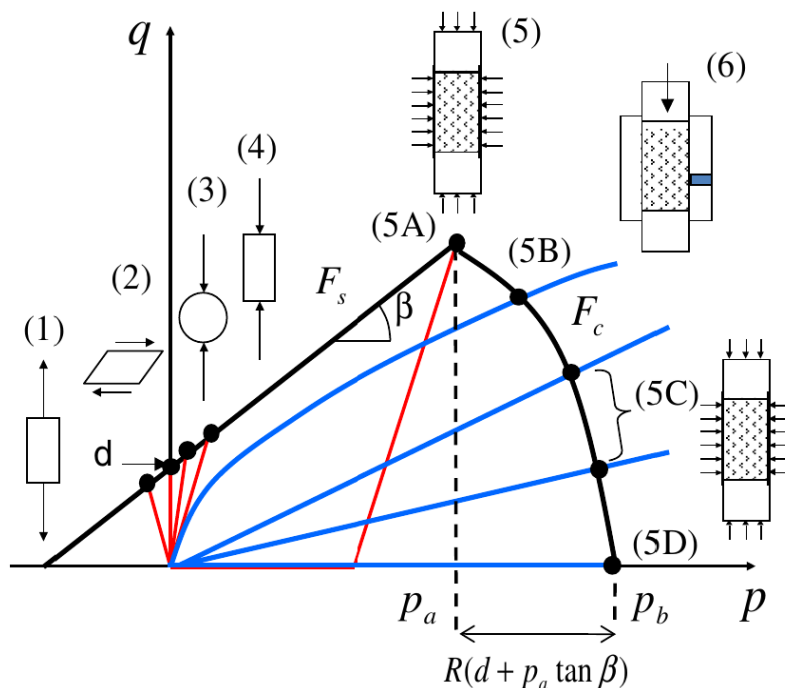


Figura 2.2: Modelo de Drucker-Prager/Cap (reta em preto) e ensaios mecânicos (linhas e curvas em vermelho e azul) no plano dos invariantes de tensão  $p$  e  $q$ , são eles: (1) tração uniaxial, (2) cisalhamento puro, (3) brasileiro, (4) compressão uniaxial, (5A) ensaio triaxial, (5B) prensagem em matriz fechada, (5C) carregamento radial, (5D) prensagem isostática, (6) prensagem em matriz instrumentada. Adaptada de Shang *et al.* [30].

Realizar um ensaio de tração simples (ou uniaxial) em materiais frágeis é extremamente complexo, pois o uso de garras de tração causará uma concentração de tensões na região de contato, podendo levar à falha fora da região útil do CDP [31].

O ensaio brasileiro (BR), proposto inicialmente por Carneiro [16], produz um estado de tensões complexo no CDP. Segundo a solução de Hertz (1895) [17], a tensão máxima principal ocorre no centro do disco, onde  $\sigma_y = -3\sigma_x$ , sendo  $y$  o eixo de aplicação de carga e  $x$  a direção perpendicular. Nessa região do CDP, há uma tensão compressiva na direção do carregamento, e uma tensão trativa na direção perpendicular. Esse ensaio se mostrou uma alternativa ao ensaio de tração uniaxial por não estar sujeito ao problema causado pelas garras de tração,

e possibilitar a identificação de um ponto na superfície de plastificação do modelo DP, diferente daquele obtido via compressão simples. Apesar de a componente compressiva ter magnitude três vezes maior, é a componente trativa que contribui mais significativamente para a falha em materiais frágeis, justificando o amplo uso do BR para a estimativa da resistência desses materiais.

O trabalho de Hertz [17], posteriormente modificado por Hondros [18] e validado por Procopio *et al.* [13], demonstra analiticamente que a tensão de ruptura  $\sigma_f$ , no ensaio brasileiro, converge para

$$\sigma_f = \frac{2P}{\pi D e} \quad (2.6)$$

no ponto  $x = 0$  e  $y = 0$ , quando  $2\theta \rightarrow 0$ , na qual  $P$  é a carga aplicada diametralmente,  $D$  o diâmetro e  $e$  a espessura do CDP. Sendo que,  $\theta$  é o ângulo formado por duas linhas radiais que definem os limites da região de contato do CDP após o achatamento ocasionado pelas deformações (dimensão  $\delta$ ), conforme indicado na Figura 2.3.

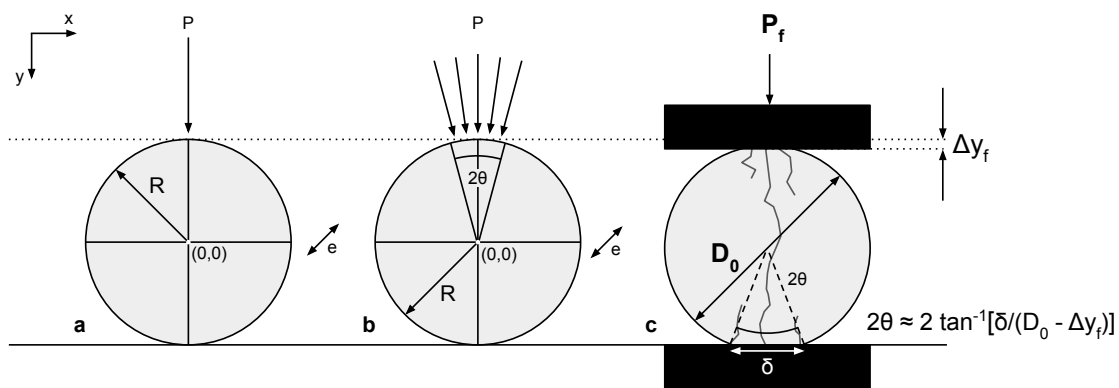


Figura 2.3: Ilustração da condição de carga pontual de Hertz (a), a condição de carga distribuída de Hondros (b), e um esquema do ensaio brasileiro (c), no qual a placa superior avança até a fratura da amostra. As variáveis do ensaio são:  $P_f$  = carga na fratura,  $\Delta y_f$  = deslocamento até a fratura,  $D_0$  = diâmetro inicial,  $\delta$  = comprimento do contato após o achatamento,  $2\theta$  = ângulo que define a região do contato após o achatamento. Adaptado de [13].

Entretanto, a solução analítica de Hertz assume comportamento linear elástico e contatos pontuais. Para compactos verdes, que exibem comportamento elastoplástico com deformações plásticas localizadas nas regiões de contato com as placas, essas premissas são violadas, gerando desvios nos estados reais de tensão [13, 15]. Isso torna necessária a utilização de métodos inversos, como o FEMU, que podem utilizar a simulação numérica completa do ensaio, considerando as não-linearidades geométricas e materiais, para a uma identificação mais robusta dos parâmetros. Além disso, a aplicação de carregamentos cíclicos no ensaio brasileiro permite a obtenção de um conjunto de dados mais rico, englobando recuperação elástica e acúmulo de deformação plástica residual após o descarregamento, muito importantes para a calibração de modelos de encruamento [32].

## 2.4 CORRELAÇÃO DE IMAGENS DIGITAIS

A técnica de Correlação de Imagens Digitais (CID) possibilita que seja medido um campo de deslocamentos a partir de imagens capturadas em diferentes estágios de carregamento mecânico. Por se tratar de uma técnica que não requer contato físico, é também útil para medir deslocamentos em situações extremas, com altas temperaturas, ou agentes químicos agressivos [33].

Para encontrar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  de uma região de interesse (*Region of Interest* - ROI), entre uma imagem de referência  $f$  e uma imagem deformada  $g$ , é necessário encontrar o campo que minimize a função de custo

$$\eta^2 = \sum_{ROI} \left[ f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \right]^2 \quad (2.7)$$

sendo,  $\mathbf{x}$ , o vetor de posição dos pontos materiais. Se a função fosse calculada pixel a pixel, o sistema de equações seria mal-posto, pois podem existir vários pixels com o mesmo tom de cinza em uma dada imagem. Assim, calcula-se o deslocamento de uma região de pixels, visando unicidade. Na abordagem local da CID, isso é feito em sub-regiões, enquanto na abordagem global, utilizada em

Melo [26] com o software Correli 3.0 [34], isso é feito via malha de elementos finitos. O campo de deslocamentos pode ser reescrito em função de  $N_j$  funções de forma,  $\varphi_j$ , e de seus deslocamentos nodais,  $a_j$ . Dessa maneira, o deslocamento do  $i$ -ésimo pixel é descrito por

$$\mathbf{u}_i = \sum_j^{N_j} a_j \varphi_j(\mathbf{x}_i) \quad (2.8)$$

Para determinar o conjunto de graus de liberdade  $\{\mathbf{a}\}$  e resolver o problema de minimização, utiliza-se uma técnica iterativa na qual os deslocamentos de cada iteração são calculados a partir do deslocamento da iteração anterior, somado-se uma correção  $\{\delta\mathbf{a}\}$  [35, 36].

$$\{\mathbf{a}\}^{n+1} = \{\mathbf{a}\}^n + \{\delta\mathbf{a}\} \quad (2.9)$$

Esse fator de correção  $\{\delta\mathbf{a}\}$  é encontrado ao resolver o sistema linear a seguir,

$$[\mathbf{M}]\{\delta\mathbf{a}\} = \{\mathbf{b}\} \quad (2.10)$$

no qual cada elemento da matriz  $[\mathbf{M}]$  é descrito por

$$M_{jk} = \sum_{i=1}^{N_i} \left( \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot \varphi_j(\mathbf{x}_i) \right) \left( \varphi_k(\mathbf{x}_i) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_i) \right) \quad (2.11)$$

e os elementos do vetor  $\{\mathbf{b}\}$  são

$$b_j = \sum_{i=1}^{N_i} \left( \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot \varphi_j(\mathbf{x}_i) \right) \left( f(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^{(n)}) \right) \quad (2.12)$$

Durante os ensaios realizados por Melo [26], as faces opostas (paralelas) dos CDPs do ensaio brasileiro foram fotografadas. A técnica de CID foi utilizada para obter os campos de deslocamentos de cada CDP ao longo dos ensaios. Esses campos foram utilizados para obter de forma mais precisa a aproximação entre as placas de compressão durante o ensaio brasileiro.

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia adotada combina uma etapa numérica, baseada em dados sintéticos, com uma etapa experimental, conduzida em ensaios brasileiros cíclicos em compactos verdes de alumina, conforme ilustrado na Figura 3.1. Na etapa numérica, um modelo de elementos finitos do ensaio brasileiro é construído no ABAQUS™ e utilizado para gerar dados sintéticos, a partir dos quais são conduzidas análises de sensibilidade e identificabilidade dos parâmetros do modelo de Drucker-Prager. Na etapa experimental, com dados da literatura [26], os corpos de prova são submetidos ao ensaio brasileiro cíclico com aquisição simultânea de força e campos de deslocamento por Correlação de Imagens Digitais (DIC). As duas etapas convergem para a aplicação da FEMU-F, que identifica os parâmetros constitutivos a partir dos dados experimentais dos três ensaios.

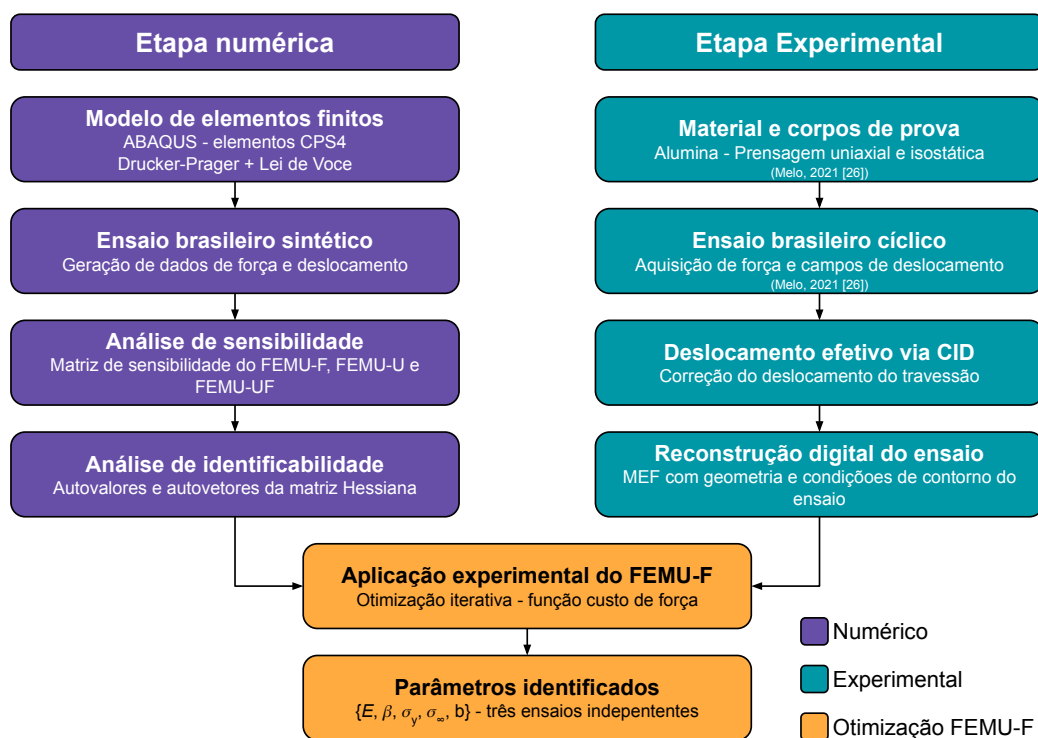


Figura 3.1: Fluxograma da metodologia adotada, ilustrando a convergência das etapas numérica (sintética) e experimental para a aplicação da FEMU-F.

### 3.1 CARACTERIZAÇÃO DO MATERIAL E FABRICAÇÃO DOS CORPOS DE PROVA

O material utilizado neste estudo foi um pó de alumina atomizada ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) fornecido pela Ceraltec Cerâmica Técnica LTDA. A caracterização do pó revelou uma densidade aparente de  $1,28 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  e uma densidade do grânulo de  $3,74 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , medidas via picnometria a hélio realizadas em trabalhos anteriores em nosso grupo de pesquisa [8, 20, 37]. Observou-se uma perda ao fogo de 2,7% em massa a  $500^\circ\text{C}$  por um período de duas horas. A morfologia dos grânulos pode ser observada na micrografia apresentada na Figura 3.2.

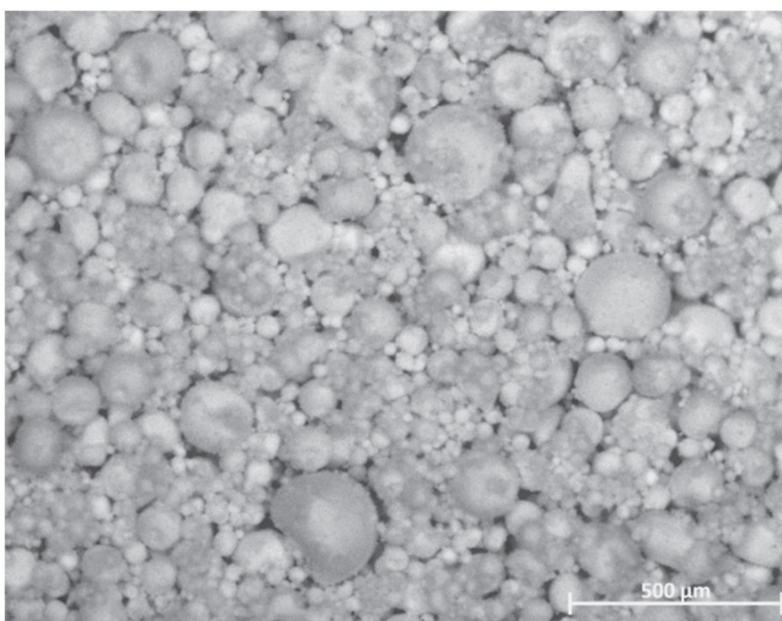


Figura 3.2: Micrografia do pó de alumina obtida em microscópio Zeiss Stemi 2000-C [37].

A composição química foi determinada via Fluorescência de Raios X (FRX). A análise identificou  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (93,1% em massa),  $\text{MgO}$  (2,8% em massa),  $\text{SiO}_2$  (2,3% em massa) e  $\text{CaO}$  (1,5% em massa) como os constituintes principais, com traços de  $\text{K}_2\text{O}$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  e  $\text{BaO}$  somando menos de 0,3% em massa. A análise granulométrica foi realizada por peneiramento do pó após secagem por 70 horas a  $60^\circ\text{C}$ . A distribuição resultante é apresentada na Figura 3.3, indicando um tamanho médio de grânulo de aproximadamente  $75 \mu\text{m}$ .

No trabalho de doutorado de Melo [26] foram fabricados três corpos de prova

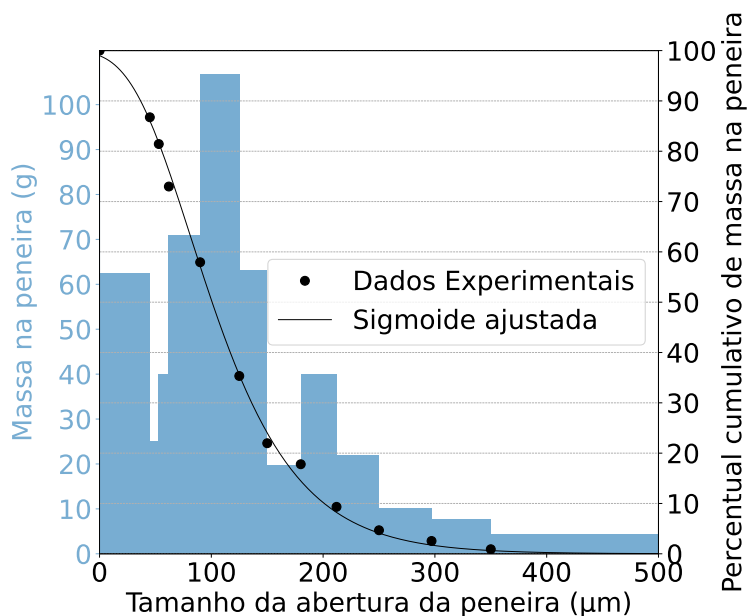


Figura 3.3: Histograma e distribuição cumulativa do tamanho de partícula do pó de alumina.

no formato de discos para os ensaios brasileiros. O processo de conformação consistiu em dois estágios distintos de prensagem para garantir a qualidade mecânica das amostras. Primeiramente, utilizou-se uma prensagem uniaxial em uma matriz cilíndrica, com dupla ação dos pistões até 10 MPa, com o propósito de criar uma pré-forma coesa e manuseável que, em seguida, passou por lixamento manual para atingir a geometria desejada. Finalmente, as pré-formas foram prensadas isostaticamente a 100 MPa para atingir a densidade alvo. A escolha da prensagem isostática como etapa final e principal de compactação é importante, pois ela resulta em uma distribuição homogênea da densidade em todo o volume do corpo de prova, minimizando gradientes que poderiam introduzir anisotropia indesejada no comportamento mecânico a ser avaliado.

### 3.2 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Os ensaios brasileiros (BR) realizados por Melo [26] foram executados em uma máquina universal de ensaios MTS® Exceed E44.304, equipada com uma célula de carga de 30 kN. Os ensaios foram conduzidos sob controle de deslo-

Tabela 3.1: Dimensões dos corpos de prova obtidos por Melo [26].

Corpo de Prova	Diâmetro [mm]	Espessura [mm]	Densidade [g.cm <sup>-3</sup> ]
1	62,63	19,36	2,34
2	62,68	19,45	2,33
3	62,86	19,00	2,36
Média	62,72	19,27	2,34
Desvio Pad.	0,12	0,24	0,02

camento a uma taxa constante de  $0,01 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$ . Empregou-se um protocolo de carregamento cíclico para capturar o comportamento elastoplástico. Os picos de carga foram definidos com base em um ensaio preliminar monotônico, que determinou a carga de ruptura aproximada do compacto verde. Esse valor foi então dividido em estágios progressivos, resultando em ciclos de carga-descarga com picos de 390 N, 780 N, 1170 N e 1560 N, correspondentes às tensões estimadas no centro do CDP (Equação 2.6) de 0,2 MPa, 0,4 MPa, 0,6 MPa e 0,8 MPa, respectivamente. Caso a fratura não ocorresse no pico de 1560 N, uma etapa final de carregamento até a fratura era aplicada. Manteve-se uma pré-carga inicial de 30 N durante as fases de descarregamento para garantir o contato contínuo entre corpo de prova e placa, prevenindo desalinhamentos.

Dados experimentais, incluindo força da célula de carga e deslocamento do travessão, foram registrados para posterior comparação com as simulações numéricas.

### 3.3 MODELAGEM NUMÉRICA

#### 3.3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Um Modelo de Elementos Finitos (MEF) do ensaio brasileiro foi construído no ABAQUS™. Para reduzir o custo computacional, apenas a metade do corpo de prova foi modelada, explorando a simetria ao longo do diâmetro horizontal. A geometria de um quarto de modelo foi descartada, pois exigiria a imposição de condições de contorno de Dirichlet no eixo vertical, coincidindo com os nós da

região de contato do carregamento, prática que não é recomendada pelo manual do software [28]. Restrições cinemáticas apropriadas foram aplicadas ao plano de simetria (Figura 3.4).

A não-linearidade geométrica foi ativada para considerar grandes deslocamentos associados ao contato com a placa metálica e à natureza elastoplástica da deformação [28]. A placa de compressão foi modelada como uma superfície analítica rígida. O contato entre a placa e o corpo de prova foi definido usando comportamento normal do tipo *Hard*, com imposição da restrição pelo método do Lagrangiano Aumentado, e comportamento tangencial com modelo de atrito de Coulomb de coeficiente  $\mu = 0,3$ , imposto pelo método de penalidade [28]. Esse valor foi adotado em conformidade com Melo [26], que o empregou no mesmo par tribológico: compacto verde de alumina e parede de aço. Na direção normal, a formulação *Hard* impede a transferência de tensões de tração através da interface, e o método do Lagrangiano Aumentado impõe essa restrição iterativamente, aumentando a pressão de contato sempre que a sobreposição das peças seja maior do que a tolerância padrão de 0,1%, tornando a solução menos sensível ao parâmetro de penalidade [28].

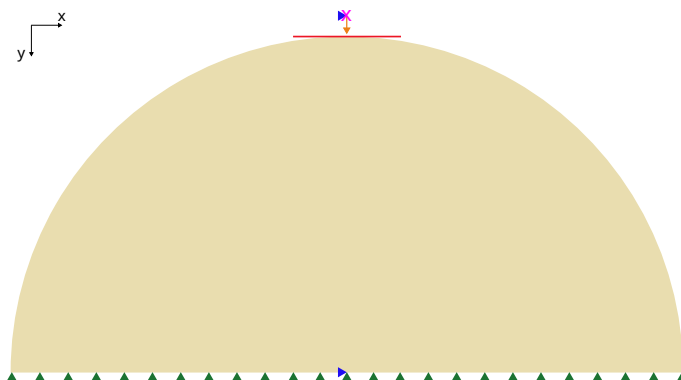


Figura 3.4: Condições de contorno do modelo em EF do ensaio brasileiro. O corpo de prova (semicírculo) possui restrições no deslocamento vertical em seu eixo de simetria (triângulos verdes,  $u_y = 0$ ) e uma restrição de deslocamento horizontal no nó central desse eixo de simetria (triângulo azul,  $u_x = 0$ ). A placa de compressão rígida (linha vermelha) é controlada pelo seu ponto de referência com o deslocamento horizontal restrito (triângulo azul,  $u_x = 0$ ), rotação restrita (x magenta,  $\Theta_z = 0$ ) e um deslocamento vertical imposto (seta laranja). No contato foi utilizado o Lagrangiano Aumentado com  $\mu = 0,3$ .

A malha consistiu em elementos quadriláteros de tensão plana bilineares de

4 nós (CPS4) com integração total. Uma análise de convergência de malha foi realizada para selecionar o tamanho ideal de elementos, utilizando a norma  $\|\mathbf{F}\|_2$  do vetor força de reação como critério de convergência (Seção 4.1).

Em conformidade com Melo [26], adotou-se a hipótese de fluxo plástico associativo, isto é,  $\psi = \beta$ . Embora essa simplificação possa diminuir a capacidade do modelo na representação do comportamento real do material, ela é justificada por duas razões: reduz o espaço de parâmetros a ser identificado, eliminando  $\psi$  como grau de liberdade independente na otimização; e preserva a simetria da matriz de rigidez, evitando o custo computacional associado à inversão da matriz assimétrica.

O coeficiente de Poisson foi fixado em  $\nu = 0,13$ , valor adotado de Melo [8], e não incluído no vetor de parâmetros a identificar. Em uma análise prévia, foi constatado que a resposta de força do ensaio brasileiro é praticamente insensível a variações em  $\nu$ , tornando sua identificação via FEMU inviável para o caso estudado e a adoção desse valor fixo não causaria impacto relevante nos resultados.

### 3.3.2 ESTRATÉGIA DE ATUALIZAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS (FEMU)

A abordagem FEMU opera a partir da definição de uma função custo que quantifica a diferença entre os dados experimentais e os resultados das simulações. A cada iteração, o conjunto de parâmetros é atualizado baseado nos valores de sensibilidade e resíduo até que um critério de convergência seja atingido [25]. Essa abordagem é particularmente potente para identificação de parâmetros de modelos complexos, como o de Drucker-Prager com encruamento, no qual muitos parâmetros acoplados governam o comportamento mecânico do material [19].

#### FORMULAÇÃO BASEADA EM FORÇA (FEMU-F)

Se a força de reação global de um experimento é a grandeza comparada, a abordagem é denominada FEMU-F [25]. Nesse caso, os dados experimentais de força  $F^{exp}(t)$ , no instante  $t$ , são comparados com a força resultante da simulação

$F^{num}(t, \{\mathbf{p}\})$ , obtida no modelo de EF e extraída do mesmo instante de tempo  $t$ , calculada utilizando o conjunto  $\{\mathbf{p}\}$  de parâmetros a serem otimizados. A divergência entre ambos é quantificada pela função custo,  $\chi^2(\{\mathbf{p}\})$ , definida como a soma das diferenças quadráticas normalizada pela incerteza de medição da força ( $\gamma_F$ ), conforme a equação:

$$\chi_F^2(\{\mathbf{p}\}) = \frac{1}{N_t} \sum_{t=0}^{N_t} \left( \frac{F^{exp}(t) - F^{num}(t, \{\mathbf{p}\})}{\gamma_F} \right)^2 \quad (3.1)$$

sendo  $N_t$  o número de medidas de força que estão sendo comparadas. Neste estudo, o termo “tempo” no contexto de EF representa um incremento de deslocamento, uma vez que nenhum dos parâmetros do material utilizados apresenta dependência temporal. A função custo é normalizada pela incerteza de medidas, por isso se aproxima da unidade conforme a diferença entre os valores experimentais e numéricos se aproxima da incerteza de medidas. Valores muito abaixo da unidade podem indicar um ajuste excessivo dos parâmetros (*overfitting*).

A otimização segue um esquema iterativo de Gauss-Newton [25]. A cada iteração  $k$ , um incremento  $\{\delta\mathbf{p}\}^k$  é calculado e adicionado ao vetor de parâmetros  $\{\mathbf{p}\}^k$  resultando no conjunto  $\{\mathbf{p}\}^{k+1}$ . O incremento dos parâmetros é calculado por meio da minimização da função custo com respeito a  $\{\mathbf{p}\}$ , levando ao sistema linear:

$$[\mathbf{H}]\{\delta\mathbf{p}\} = \{\mathbf{h}\} \quad (3.2)$$

no qual  $[\mathbf{H}]$  é a matriz Hessiana aproximada e  $\{\mathbf{h}\}$  é o resíduo ponderado pelo gradiente, ambos calculados para o conjunto de parâmetros atual  $k$ . A matriz Hessiana é calculada de maneira aproximada pela forma:

$$[\mathbf{H}] = \frac{1}{N_S} [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] \quad (3.3)$$

e  $[\mathbf{S}]$  é a matriz de sensibilidade, ou matriz Jacobiana. Ela quantifica as mudanças no valor da força simulada em relação à variação de cada parâmetro, e  $N_S$  é o número de linhas, ou pontos de observação, que essa matriz contém [38]. A

matriz de sensibilidade é aproximada utilizando diferenças finitas progressivas:

$$[\mathbf{S}] = \frac{1}{\gamma_F} \left[ \frac{\partial F^{num}}{\partial p_i}(t, \{\mathbf{p}_i\}) \right] \quad (3.4)$$

$$\{\mathbf{S}_F^{p_i}\} \approx \frac{\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}_i)\} - \{\mathbf{F}(\mathbf{p})\}}{\gamma_F \cdot \tilde{\epsilon}} \quad (3.5)$$

sendo  $\tilde{\epsilon}$  o fator de perturbação,  $\{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{p}}_i)\}$  o vetor de força obtido da simulação feita com os parâmetros  $p_i$  perturbados em  $\tilde{p}_i = p_i(1 + \tilde{\epsilon})$  e  $\{\mathbf{F}(\mathbf{p})\}$  a força da simulação de referência calculada com o conjunto de parâmetros não perturbados. Portanto, a matriz de sensibilidade terá dimensão  $(N_t \times N_p)$  para os dados de força, com  $N_p$  sendo o número de parâmetros do modelo. Cada coluna da matriz de sensibilidade corresponde a um parâmetro, exigindo  $N_p + 1$  simulações por iteração. O lado direito da Equação 3.2 é escrito como:

$$\{\mathbf{h}\} = \frac{1}{N_t} [\mathbf{S}]^T \left\{ \frac{F^{exp}(t) - F^{num}(t, \{\mathbf{p}\})}{\gamma_F} \right\} \quad (3.6)$$

### FORMULAÇÃO BASEADA NO CAMPO CINEMÁTICO (FEMU-U)

A abordagem baseada em deslocamentos pode ser equacionada utilizando dados de todo o campo cinemático para registrar deformações heterogêneas localizadas, que frequentemente são camufladas pelas curvas de força-deslocamento globais [22]. A função custo para o campo de deslocamentos,  $\chi_U^2$ , é definida como a diferença quadrada média entre os dados experimentais e numéricos de cada componente do deslocamento. Normalizar pela incerteza de medida ( $\gamma_u$ ) e pelo número de graus de liberdade ( $N_{GdL}$ ) induz a função custo a se aproximar da unidade quando as diferenças sejam da mesma magnitude do ruído do sinal, assim como feito para a abordagem de força global. Para um campo cinemático bidimensional, a função custo considera tanto o deslocamento horizontal

$(u_x)$  quanto vertical  $(u_y)$  da seguinte forma:

$$\chi_U^2(\{\mathbf{P}\}) = \frac{1}{N_t \cdot N_{GdL}} \sum_{t=0}^{N_t} \sum_{n=1}^{N_{GdL}} \left[ \left( \frac{u_x^{exp}(n, t) - u_x^{num}(n, t, \{\mathbf{P}\})}{\gamma_{u_x}} \right)^2 + \left( \frac{u_y^{exp}(n, t) - u_y^{num}(n, t, \{\mathbf{P}\})}{\gamma_{u_y}} \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

Analogamente à formulação FEMU-F, a matriz de sensibilidade é definida como:

$$\{\mathbf{S}_x^{p_i}\} \approx \frac{u_x(\tilde{p}_i) - u_x(p_i)}{\gamma_{u_x} \cdot \tilde{\epsilon}} \quad (3.8)$$

$$\{\mathbf{S}_y^{p_i}\} \approx \frac{u_y(\tilde{p}_i) - u_y(p_i)}{\gamma_{u_y} \cdot \tilde{\epsilon}} \quad (3.9)$$

resultando em matrizes de sensibilidade de dimensões  $((N_t \cdot N_{GdL}) \times N_p)$ .

#### FORMULAÇÃO COMBINADA (FEMU-UF)

Para enriquecer o modelo de otimização com as informações de força global e campo cinemático, uma função custo combinada é adotada, seguindo o modelo discutido por Bertin *et al.* [39]. Essa abordagem busca minimizar o resíduo entre força e deslocamentos experimentais e numéricos de forma simultânea. A função custo combinada é calculada como uma soma ponderada:

$$\chi_T^2(\{\mathbf{P}\}) = \omega \chi_F^2(\{\mathbf{P}\}) + (1 - \omega) \chi_U^2(\{\mathbf{P}\}) \quad (3.10)$$

em que o peso  $\omega$  pode ser definido como  $N_F / (N_F + N_{GdL})$ , sendo  $N_F$  o número de fontes de dado de forças, como a quantidade de células de carga, por exemplo. Isso garante que a otimização seja guiada pela significância estatística das diferenças e não pela magnitude absoluta da grandeza física, balanceando a sensibilidade de fenômenos globais e locais.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, inicialmente, discute-se a verificação numérica da abordagem FEMU utilizando dados sintéticos, realizando uma análise de convergência de malha de EF e, em seguida, avaliando a identificabilidade dos parâmetros de DP e a sensibilidade do Ensaio Brasileiro a diferentes fontes de dados (força e campo de deslocamento). Posteriormente, a FEMU-F é aplicada a dados experimentais de força e deslocamento de ensaios brasileiros em compactos verdes de alumina.

### 4.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE MALHA

Uma análise de convergência de malha de EF foi conduzida para determinar a discretização ótima para o modelo de MEF do ensaio brasileiro. Os parâmetros do modelo de DP identificados por Melo *et al.* [8] (Tabela 2.1) foram utilizados para o material nessa análise. Considerando o tamanho característico de um elemento ( $l_{el}$ ) como sendo a raiz quadrada de sua área ( $\sqrt{A_{el}}$ ), nove malhas com tamanhos de elemento variados foram avaliadas, variando de 1,6 mm (grosseira) a 0,1 mm (fina), conforme detalhado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Características da malha e desempenho computacional do estudo de convergência do modelo de EF para o ensaio brasileiro. A malha escolhida está destacada em azul.

Tamanho do Elemento [mm]	Elementos	GdL	Desvio de $\ \mathbf{F}\ _2$ [%]	Tempo de Processamento [s]
1,6	652	1427	7,05	9
1,2	1246	2659	2,18	17
0,8	2710	5667	1,77	41
0,6	4792	9909	1,05	72
0,5	7132	14 453	0,55	104
0,4	11 226	22 953	0,40	187
0,3	19 780	40 223	0,27	294
0,2	43 958	88 901	0,13	692
0,1	176 354	354 673	0,00	2614

A norma  $\|\mathbf{F}\|_2$  foi calculada usando a Equação 4.1 na qual  $F_i$  representa o valor da força de reação na placa de compressão no instante  $i$  de cada simulação. A Figura 4.1 mostra a norma dividida pelo valor obtido com a malha mais refinada (linha sólida laranja e círculos) e o tempo computacional real (linha sólida verde e quadrados) como funções dos graus de liberdade (GdL).

$$\|\mathbf{F}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n F_i^2} \quad (4.1)$$

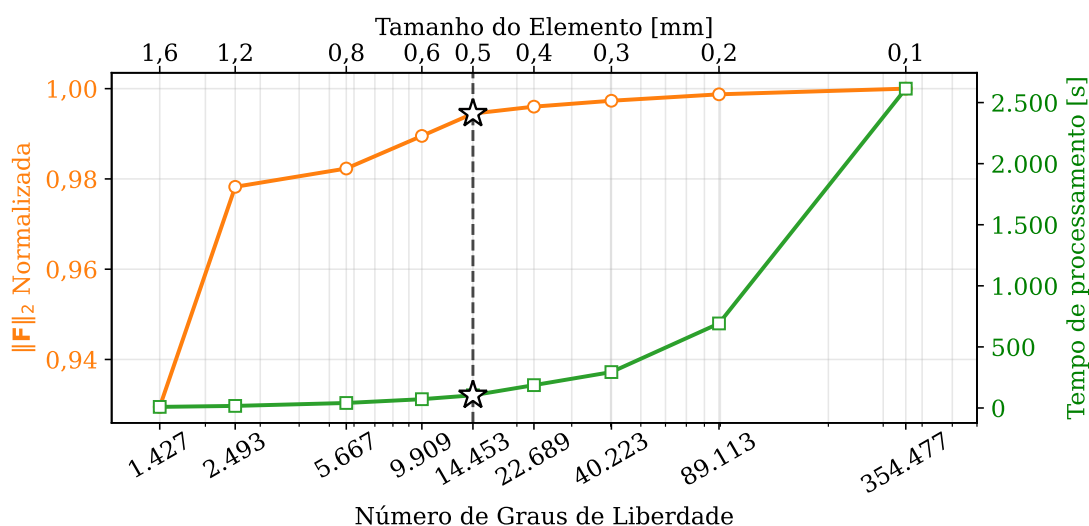


Figura 4.1: Análise de convergência de malha para o modelo de MEF do ensaio brasileiro. Eixo esquerdo (laranja): Norma  $\|\mathbf{F}\|_2$  normalizada em relação à malha mais refinada. Eixo direito (verde): Tempo de processamento computacional em segundos. A linha tracejada vertical indica a malha selecionada, marcada com uma estrela.

Adotou-se um critério de convergência de 1% de variação na norma  $\|\mathbf{F}\|_2$  como limiar para inferir a medição de força sem dependência da malha. A malha selecionada (Figura 4.2) com tamanho médio de elemento de  $\approx 0,5$  mm (destacada na Tabela 4.1), atingiu um desvio de 0,55% em relação à malha mais fina, atendendo assim a este critério. Um refinamento adicional para tamanhos médios de elemento de 0,4 mm e 0,3 mm produziu melhorias marginais de precisão (0,4% e 0,2% de convergência adicional, respectivamente), enquanto aumentou o tempo de processamento entre duas a três vezes. Como a metodologia FEMU requer múltiplas simulações por iteração de otimização, a malha de 0,5 mm foi selecionada para fornecer um equilíbrio entre precisão e eficiência computacio-

nal (104 s por simulação). Todas as simulações foram realizadas em um processador Intel® Core™ i5-13400 de 13ª geração (16 núcleos lógicos) com 64 GB de RAM.

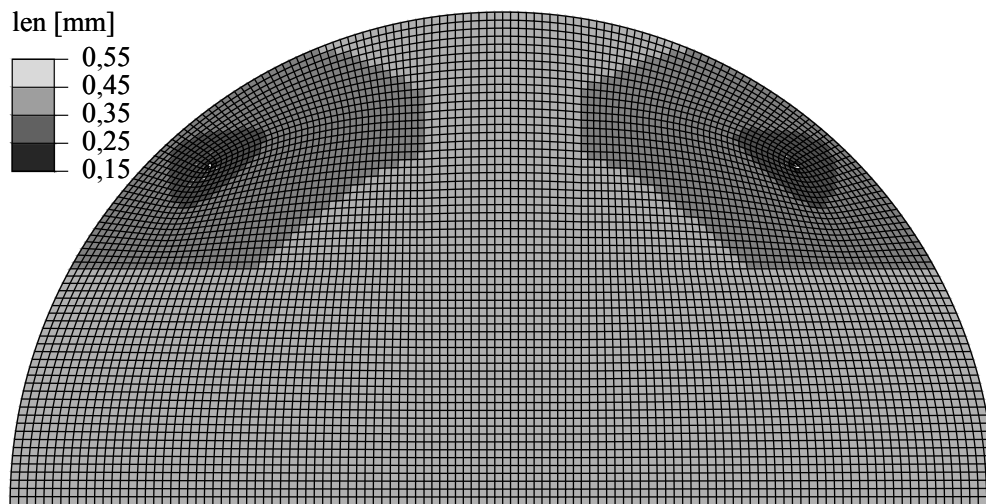


Figura 4.2: Malha de elementos finitos do corpo de prova do Ensaio 1 em 2D, construída no ABAQUS™ com simetria horizontal. O mapa de cores mostra a distribuição do comprimento característico do elemento ( $len = \sqrt{A_{el}}$ , em mm, sendo  $A_{el}$  a área do elemento). A malha compreende 7.132 elementos quadriláteros de 4 nós com integração completa (CPS4) com um  $len$  médio de 0,5 mm.

## 4.2 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE MULTIOBJETIVO

Para avaliar a viabilidade da identificação dos parâmetros constitutivos de Drucker-Prager em compactos verdes de alumina utilizando o ensaio brasileiro, foi realizada uma análise de identificabilidade abrangente utilizando dados sintéticos, obtidos de um ensaio brasileiro cíclico virtual, via MEF. Enquanto a sensibilidade indica como os parâmetros afetam a resposta do ensaio virtual, a unicidade da solução inversa depende da ortogonalidade desses parâmetros.

Todas as análises de sensibilidade foram realizadas utilizando a mesma curva de força-deslocamento de um ensaio virtual, apresentada na Figura 4.3. Diferentemente da resposta linear prevista pela teoria clássica de Hertz [17] para o ensaio brasileiro, o compacto verde apresenta um comportamento elastoplástico caracterizado pela não-linearidade. O protocolo de carregamentos cíclicos evidencia deslocamentos residuais após os descarregamentos, devido ao acúmulo de deformações inelásticas.

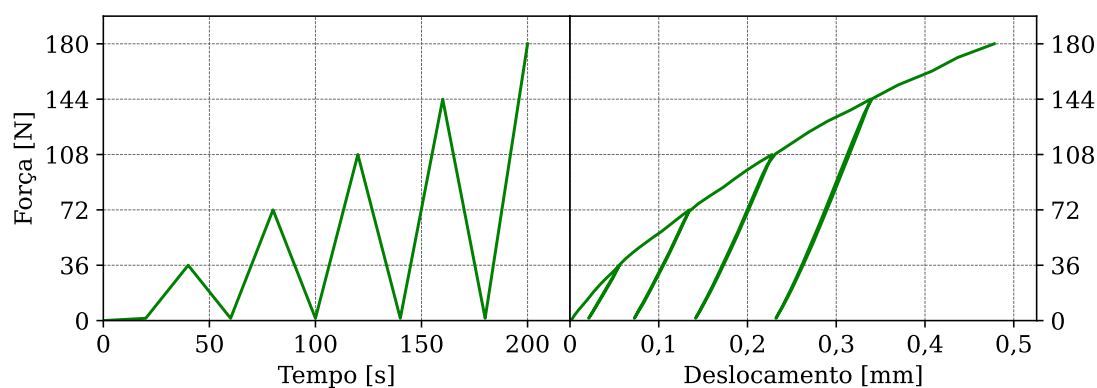


Figura 4.3: Resultados do ensaio brasileiro virtual. Esquerda: Força aplicada vs. tempo. Direita: Força aplicada vs. deslocamento.

### 4.2.1 SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS NA RESPOSTA DE FORÇA GLOBAL (FEMU-F)

A sensibilidade da resposta de força referente à variação de cada parâmetro foi calculada utilizando a Equação 3.5 com um fator de perturbação  $\epsilon$  igual a 1%. Os parâmetros de referência do modelo de DP utilizados nessas simulações foram identificados por Melo *et al.* [8] e apresentados na Tabela 2.1 (pág. 7). Na

Figura 4.4 é apresentada a evolução temporal da sensibilidade de cada parâmetro durante o ensaio virtual.

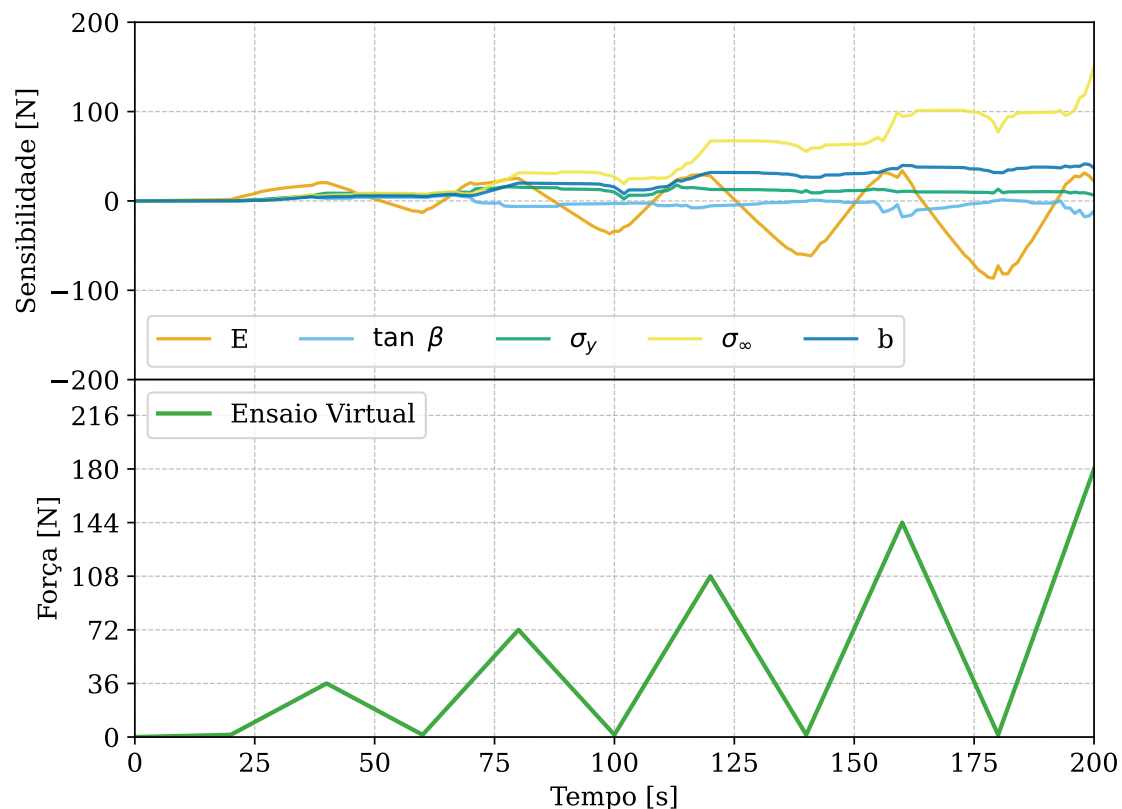


Figura 4.4: Análise de sensibilidade da força do ensaio virtual. Superior: Sensibilidade local da força a respeito de cada parâmetro do modelo ao longo do ensaio. Inferior: Força vs. tempo.

A sensibilidade do módulo elástico ( $E$ ) apresenta um padrão consistente ao longo dos ciclos, aumentando no carregamento e diminuindo no descarregamento. Esse comportamento, combinado com sua maior magnitude, indica uma maior identificabilidade desse parâmetro em relação aos outros. Em contrapartida, os parâmetros de encruamento ( $\sigma_y$ ,  $\sigma_\infty$  e  $b$ ), e o parâmetro de Drucker-Prager ( $\tan \beta$ ), apresentam um aumento na magnitude de suas sensibilidades ao longo do ensaio, conforme a deformação inelástica acumulada aumenta. Essa tendência também demonstra que a sensibilidade dos parâmetros plásticos aumenta quando ocorre o encruamento do CDP e se mantém constante durante o regime elástico.

A decomposição da matriz Hessiana é apresentada na Figura 4.5. Os termos

na diagonal principal da Hessiana (Figura 4.5a) indicam a sensibilidade média de cada parâmetro durante o ensaio, enquanto os termos fora da diagonal principal indicam o acoplamento entre um dado par de parâmetros. O sinal positivo (+) indica que um acréscimo em um dos parâmetros pode ser compensado por um acréscimo no outro sem alterar significativamente a resposta simulada, ao passo que o sinal negativo (-) indica que a compensação ocorre em sentidos opostos, ou seja, o aumento de um parâmetro é compensado pela diminuição do outro. Em ambos os casos, a existência dessa compensação dificulta a identificação independente do par. Um forte acoplamento é notado entre os parâmetros de encruamento ( $\sigma_y$ ,  $\sigma_\infty$  e  $b$ ).

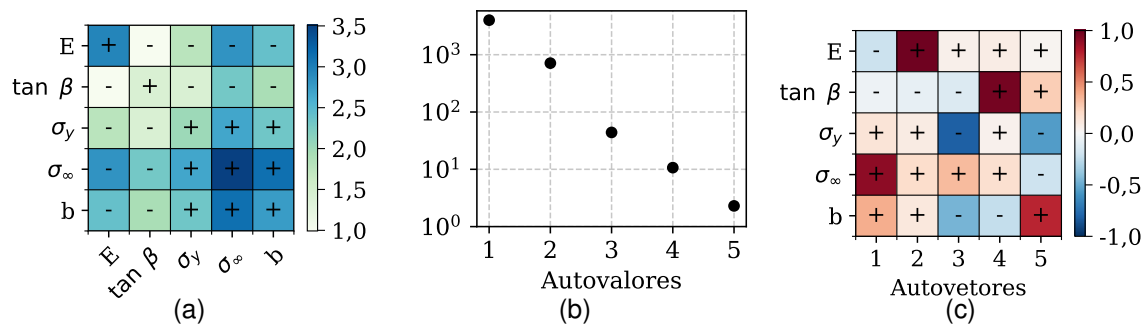


Figura 4.5: Decomposição da Hessiana do FEMU-F para o teste virtual: (a) Matriz Hessiana, com escala de cores em escala logarítmica de base 10; (b) Espectro de autovalores em um gráfico semi-log normalizado pelo maior autovalor ( $\kappa = 1744$ ); (c) Matriz de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo.

É possível quantificar se o sistema é mau-posto a partir da decomposição de autovalores na Figura 4.5b, que demonstra uma queda acentuada com autovalores cobrindo uma faixa de três ordens de grandeza. A composição dos autovetores apresentados na Figura 4.5c revela quais parâmetros estão associados às direções mal condicionadas. Os autovetores 3 e 5 são praticamente compostos pela combinação linear de  $\sigma_y$  e  $b$ , indicando seu acoplamento. Isso demonstra que variações na tensão de escoamento podem ser compensadas por ajustes no parâmetro de encruamento para produzir uma resposta de força-deslocamento similar. Essa compensação cria um vale de soluções não únicas para a função custo, confirmando que apenas a força global não é uma fonte

suficiente de dados para identificar, de maneira independente, os parâmetros de encruamento desse modelo.

#### 4.2.2 SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS AO CAMPO TOTAL DE DESLOCAMENTOS (FEMU-U)

No contexto da verificação numérica, os dados do campo de deslocamentos sintéticos ( $u^{exp}$ ) são gerados pelo modelo EF. Consequentemente, as coordenadas nodais do experimento virtual e da simulação ( $u^{num}$ ) são idênticas, não havendo a necessidade de interpolação espacial ou mapeamento dos dados, geralmente necessário em aplicações experimentais utilizando CID.

As matrizes Hessianas e suas autodecomposições, calculadas a partir de dados cinemáticos apenas, são apresentadas na Figura 4.6. A análise dos campos de deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$  revelam características diferentes em relação à sensibilidade dos parâmetros. O ângulo de atrito interno ( $\tan \beta$ ) é associado ao maior autovalor nas matrizes dos dois campos de deslocamento (Figuras 4.6c e 4.6f), indicando que este parâmetro exerce a maior influência na variação desses. Comparando ambas as componentes, a Hessiana do deslocamento vertical ( $[\mathbf{H}]_{u_y}$ ) apresenta um número de condicionamento melhor do que a Hessiana referente ao deslocamento horizontal ( $[\mathbf{H}]_{u_x}$ ),  $\kappa = 403$  e  $3865$ , respectivamente. Entretanto, embora o campo vertical apresente um melhor condicionamento, a magnitude da sensibilidade global dos parâmetros é expressivamente maior no campo de deslocamentos horizontais, ou seja, o campo horizontal varia muito mais do que o campo vertical, para uma mesma perturbação nos parâmetros do modelo. Além disso, o acoplamento está presente nos dois campos, por exemplo, no espectro de  $u_y$  (Figura 4.6f), enquanto o autovetor 1 é dominado por  $\tan \beta$ , os autovetores subsequentes apresentam interações complexas: autovetor 2 é dominado por  $\sigma_\infty$ ; autovetor 3 é uma combinação linear de  $E$ ,  $\sigma_y$ , e  $b$ ; autovetor 4 combina  $\sigma_y$  e  $b$ ; e o autovetor 5 combina  $E$ ,  $\sigma_y$ , e  $\sigma_\infty$ .

Na terceira linha da Figura 4.6 relaciona-se ao campo cinemático total ( $[\mathbf{H}]_U$ ), que leva em consideração a sensibilidade nas duas direções. Uma característica da matriz Hessiana (Figura 4.6g) é a diferença entre os dois maiores autovalores (Figura 4.6h) que diferem em quase duas ordens de grandeza. A direção principal é dominada por  $\tan \beta$ , indicando uma alta identificabilidade desse parâmetro, utilizando este conjunto de dados. Os autovetores remanescentes de  $[\mathbf{H}]_U$  mos-

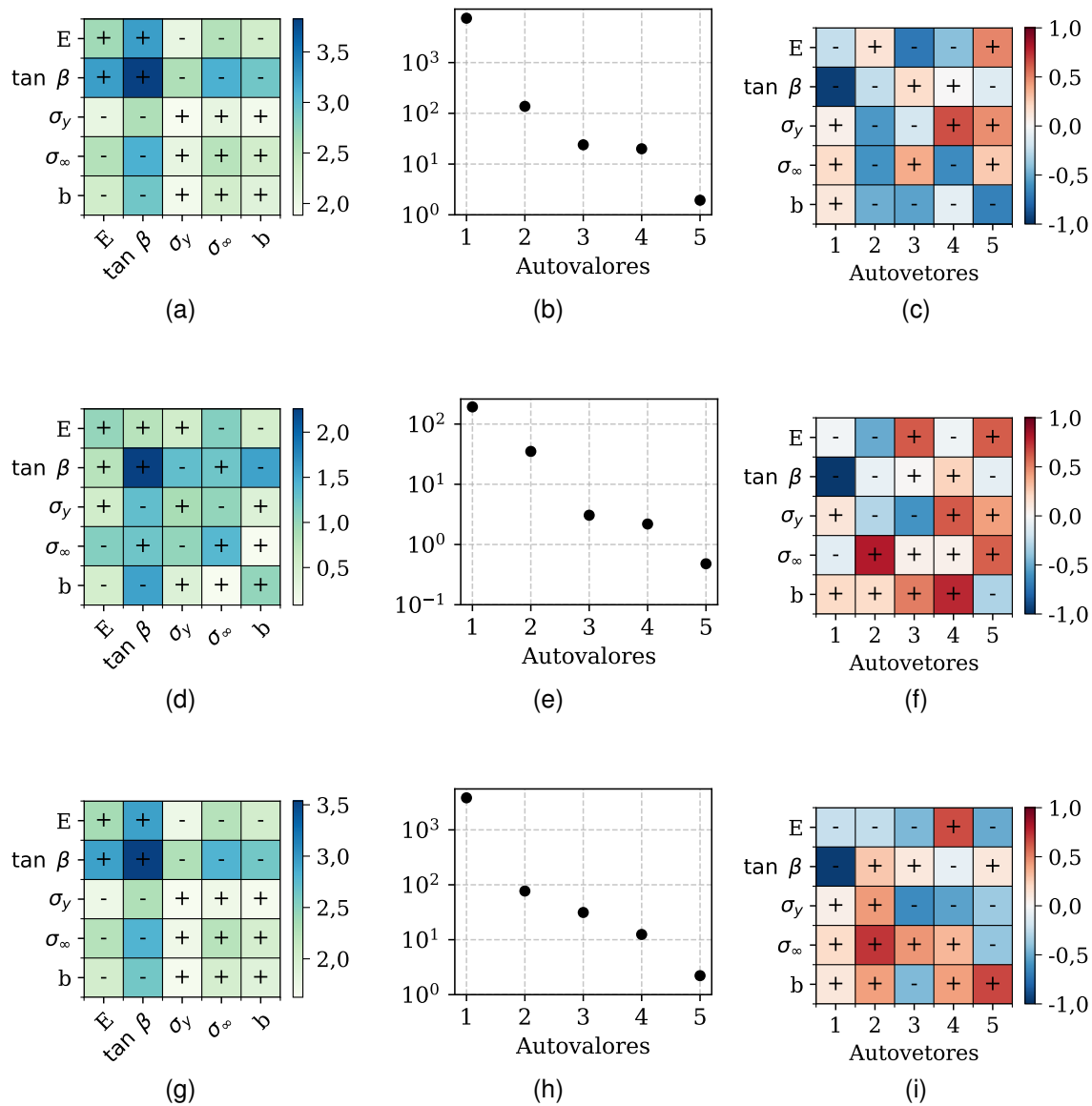


Figura 4.6: Decomposição da Hessiana do FEMU-U ( $u_x$  na linha 1,  $u_y$  na linha 2, e  $U$  na linha 3) para o teste virtual: (a, d, g) Matriz Hessiana, com escala de cores em escala logarítmica de base 10; (b, e, h) Espectro de autovalores em um gráfico semi-log normalizado pelo maior autovalor ( $\kappa(u_x) = 3865$ ,  $\kappa(u_y) = 403$  e  $\kappa(U) = 1729$ ); (c, f, i) Matriz de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo.

tram uma predominância de um único parâmetro, mas ainda apresentam certo grau de acoplamento, indicando que, apesar dos dados cinemáticos contribuírem com uma grande identificabilidade dos parâmetros, estes não resultam em um espaço de parâmetros ortogonal.

Para melhor compreender a contribuição dos dados de campo para o processo de identificação, na Figura 4.7 é apresentada a evolução espaço-temporal da magnitude da sensibilidade do deslocamento ( $|S| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$ ) para o módulo elástico ( $E$ ) e o ângulo de atrito interno ( $\tan \beta$ ). Três pontos do ensaio foram selecionados: o regime elástico durante o carregamento do segundo ciclo ( $t = 65$ ); o regime elastoplástico ( $t = 120$ ); e a carga máxima do último ciclo de carregamento ( $t = 200$ ).

No regime elástico ( $t = 65$ ), a sensibilidade ao módulo de elasticidade é mais pronunciada na região do contato. Em contrapartida, a sensibilidade ao ângulo de atrito interno é desprezível neste estágio, uma vez que o material não está deformando plasticamente. Isso confirma que os parâmetros elásticos e plásticos podem ser desacoplados se forem utilizados dados de carregamento e descarregamento em um ensaio cíclico.

Conforme a deformação plástica aumenta ( $t = 120$  e  $t = 200$ ), a sensibilidade a  $\tan \beta$  passa a ser relevante, principalmente nas regiões próximas à borda lateral do disco ( $x = \pm R$ ) onde os nós são mais afetados pela variação desse parâmetro. Essa localização pode ser uma consequência do fenômeno da dilatância observado por Montilha *et al.* [37]. Como descrito em seu trabalho, compactos verdes passam por uma expansão volumétrica significativa, chamada de dilatância, devido ao rearranjo das partículas que ocorre antes da falha quando submetidos a uma tensão cisalhante. Assumir que o modelo do material possui fluxo plástico associativo ( $\psi = \beta$ ) conecta diretamente a taxa de deformação volumétrica ao ângulo de atrito interno  $\beta$ , tornando o campo cinemático uma fonte importante de informações para identificar  $\tan \beta$ . Portanto, as regiões de alta sensibilidade observadas na Figura 4.7 podem representar as zonas onde a dilatância, causada por tensões cisalhantes, afeta mais o deslocamento nodal.

No que diz respeito ao módulo de elasticidade, a sensibilidade também au-

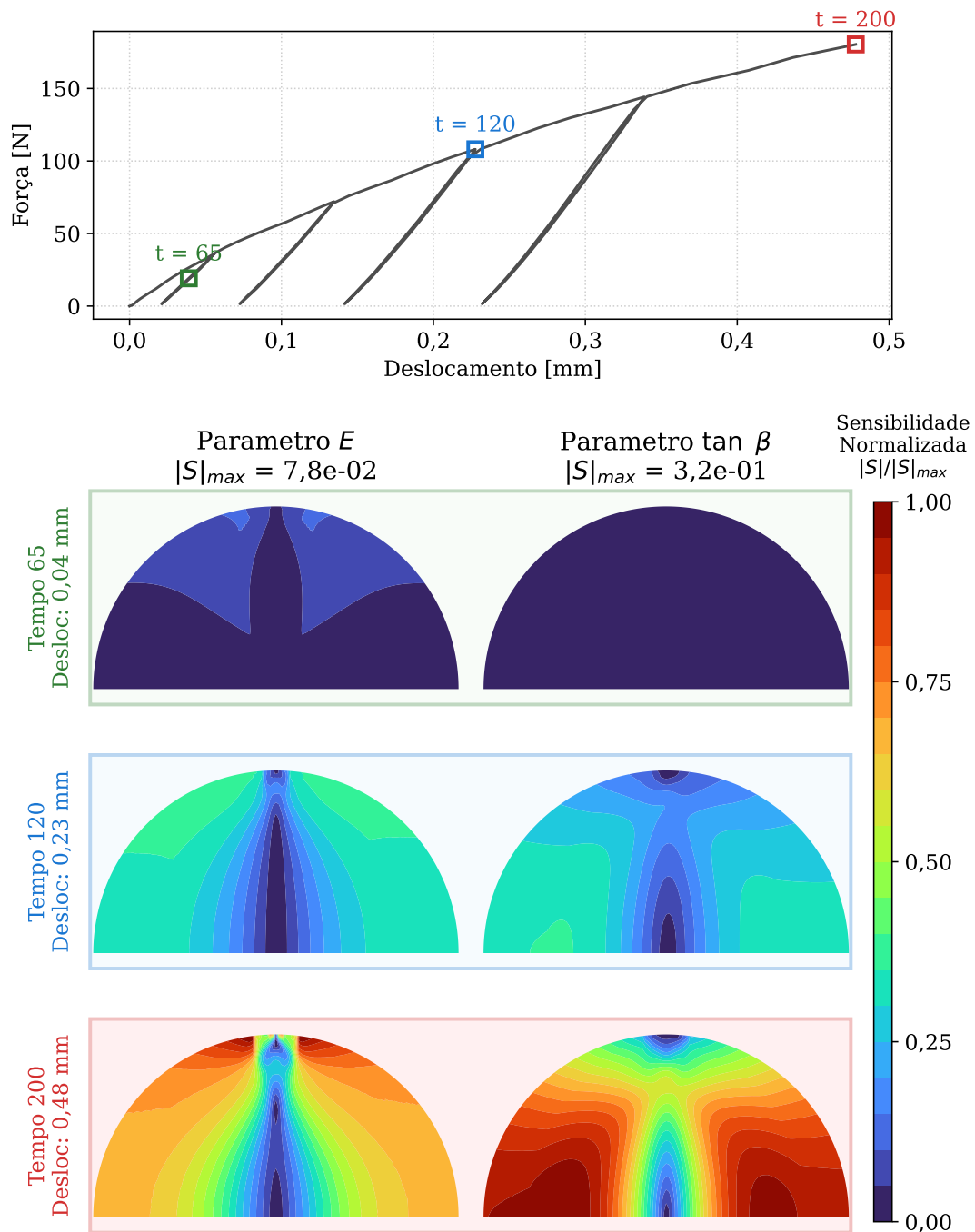


Figura 4.7: Evolução espaço-temporal da magnitude da sensibilidade  $|S|$  do deslocamento em relação ao módulo de elasticidade ( $E$ ) e o ângulo de atrito interno ( $\tan \beta$ ). Linha 1: Curva de força por deslocamento com três pontos destacados. Linhas 2 a 4: Campo de sensibilidade para  $E$  (esquerda) e  $\tan \beta$  (direita) em três diferentes pontos do ensaio. Os campos foram normalizados pelos maiores valores  $|S|_{max}$ , mostrados no cabeçalho.

menta durante os ciclos de carregamento, persistindo mesmo após o início do encruamento. Entretanto, ele está concentrado próximo à região do contato. Isso indica que simular de maneira precisa a interface de contato e capturar o campo cinemático nessa região são importantes para identificação do parâmetro elástico  $E$ .

### 4.2.3 ABORDAGEM COMBINADA (FEMU-UF)

Para combinar a informação da rigidez global e do campo cinemático, a Hessiana combinada ( $[\mathbf{H}]_{comb}$ ) foi calculada da seguinte forma:

$$[\mathbf{H}]_{comb} = [\mathbf{H}]_F + [\mathbf{H}]_U \quad (4.2)$$

A análise de  $[\mathbf{H}]_{comb}$  (Figura 4.8) revela a melhora na identificabilidade dos parâmetros em relação às abordagens individuais. O número de condicionamento reduz para  $\kappa = 591$ , substancialmente inferior ao obtido com dados de força ( $\kappa = 1744$ ) ou com o campo cinemático total ( $\kappa = 1729$ ), isoladamente. Além disso, os três primeiros autovetores distribuem-se dentro de uma ordem de grandeza, indicando que essas direções do espaço de parâmetros passam a exercer influência de mesma magnitude sobre a função custo combinada.

A análise dos autovetores (Fig. 4.8c) mostra que essa melhora é consequência do desacoplamento entre os parâmetros  $\sigma_y$  e  $b$ , que na abordagem FEMU-F estavam fortemente acoplados e compartilhavam as mesmas direções principais, e na formulação combinada aparecem como contribuições dominantes em autovetores distintos (4 e 5, respectivamente).

Entretanto, a combinação não resolve integralmente o problema de identificabilidade. O autovetor 2, embora predominantemente orientado por  $\tan \beta$ , apresenta uma contribuição significativa de  $\sigma_\infty$ , evidenciando um novo acoplamento introduzido pela abordagem combinada. Isso sugere que a informação cinemática disponível nesta configuração de ensaio é suficiente para separar os parâmetros de encruamento entre si, mas insuficiente para isolá-los completamente do parâmetro de Drucker-Prager,  $\tan \beta$ . A realização de um ensaio brasileiro similar, com captura de campo cinemático de alta resolução em toda a face do

CDP e o uso de modelos não-associativos poderiam mitigar esse acoplamento residual.

Em suma, a abordagem combinada FEMU-UF demonstra numericamente que o ensaio brasileiro cíclico, quando associado a medições de campo total, constitui uma configuração viável para a caracterização elastoplástica completa do modelo de Drucker-Prager. Esse resultado motiva a aplicação experimental de CID como fonte de dados cinemáticos.

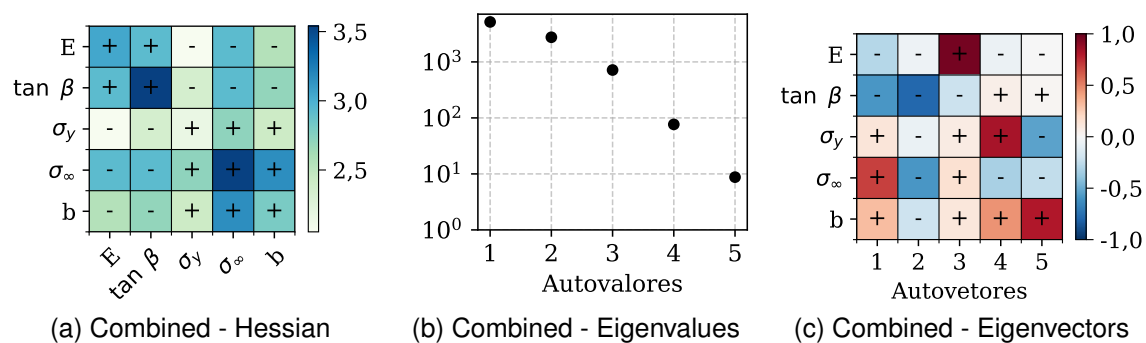


Figura 4.8: Decomposição da Hessiana combinada para o ensaio virtual: (a) Matriz Hessiana, com escala de cores em escala logarítmica de base 10; (b) Espectro de autovalores em um gráfico semi-log normalizado pelo maior autovalor ( $\kappa = 591$ ); (c) Matriz de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo.

### 4.3 APLICAÇÃO EXPERIMENTAL EM COMPACTOS DE ALUMINA

Com base na verificação numérica, a FEMU baseada em força (FEMU-F) foi aplicada aos dados experimentais dos compactos de alumina. Embora os parâmetros de encruamento não sejam unicamente identificáveis com dados de força,  $E$  e  $\tan \beta$  podem ser determinados por esta abordagem, como demonstrado a seguir.

#### 4.3.1 ENSAIO BRASILEIRO

Os ensaios brasileiros desenvolvidos por Melo [26] foram realizados conforme descrito na Seção 3.2 e as curvas obtidas são apresentadas na Figura 4.9. As medições de força foram registradas com uma incerteza de  $\pm 1$  N a partir da

célula de carga de 30 kN, representando um erro inferior a 0,05% nas cargas de pico.

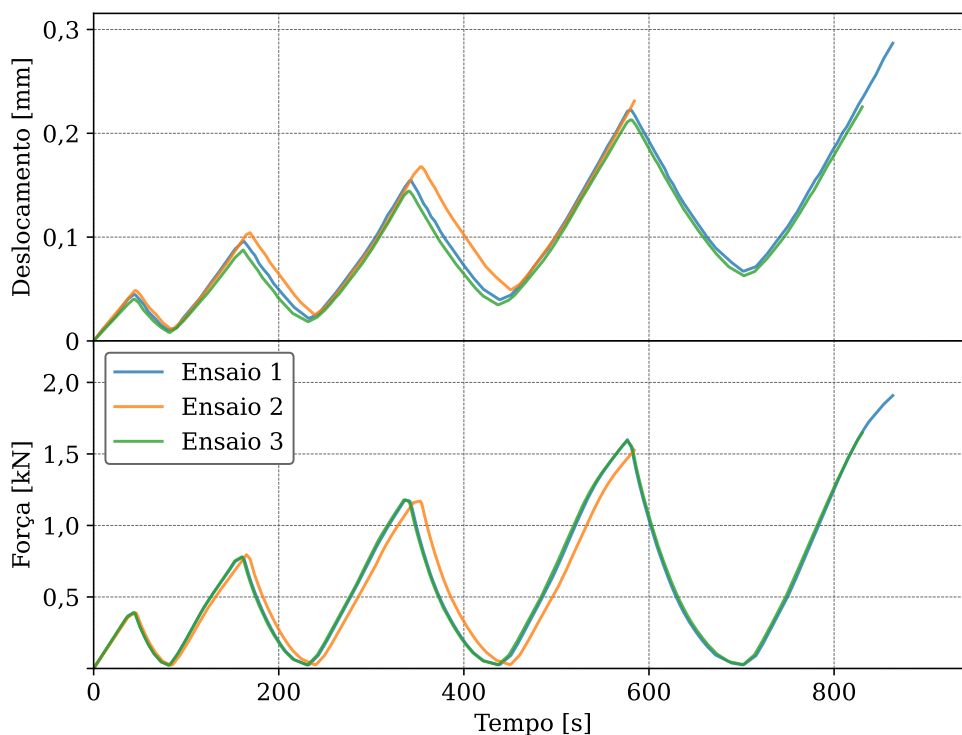


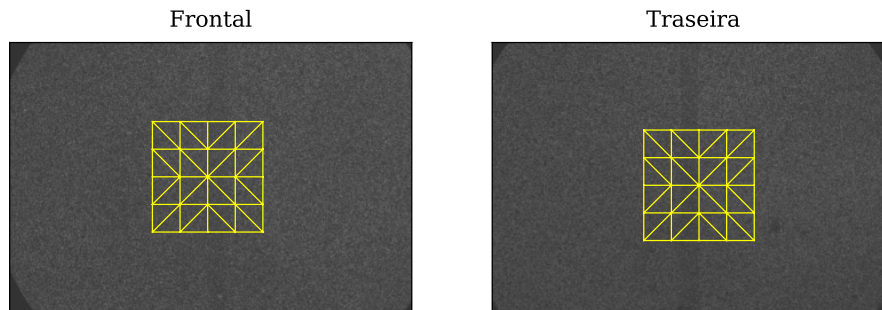
Figura 4.9: Resultados do ensaio brasileiro para corpos de prova de compacto verde de alumina (1, 2 e 3) conforme descrito em 3.2. Superior: Deslocamento do travessão vs. tempo. Inferior: Força aplicada vs. tempo.

Os ensaios mostram tanto a recuperação elástica quanto um aumento progressivo no deslocamento residual a cada ciclo, assim como observado no ensaio virtual, indicando o acúmulo de deformação inelástica. O CDP 2 fraturou durante o quarto ciclo de carregamento (1,52 kN), enquanto os CDPs 1 e 3 suportaram um ciclo de carregamento adicional antes da fratura. Essa variabilidade no comportamento de fratura é típica para compactos verdes cerâmicos, devido às heterogeneidades microestruturais inerentes ao processo de prensagem do pó. Os três primeiros ciclos de todos os corpos de prova apresentaram resposta mecânica consistente, demonstrando boa repetibilidade do ensaio e dos protocolos de fabricação das amostras.

### **4.3.2 DETERMINAÇÃO DO DESLOCAMENTO EFETIVO VIA CORRELAÇÃO DE IMAGENS DIGITAIS**

Em ensaios mecânicos como o ensaio brasileiro, os dados de deslocamento obtidos diretamente do travessão da máquina universal de ensaios frequentemente embutem erros sistemáticos. No presente estudo, a curva de deslocamento do travessão contabiliza não apenas a parcela que causa deformação no corpo de prova, mas também a flexibilidade de todo o sistema de carregamento, folgas mecânicas inerentes à montagem e a deformação de pequenos filetes de massa epóxi introduzidos nas superfícies de contato para a estabilização inicial das amostras nas placas. Conseqüentemente, a resposta macroscópica extraída diretamente do equipamento não reflete com precisão a cinemática imposta ao compacto verde, sendo inadequada para a calibração precisa do modelo numérico.

Empregou-se a técnica de Correlação de Imagens Digitais (CID) para extrair o deslocamento efetivo entre as placas de compressão. A análise foi conduzida em ambas as faces de cada corpo de prova (frontal e traseira). Para tal, definiu-se uma malha quadrada, simétrica e posicionada no centro geométrico de cada amostra, conforme mostrado na Figura 4.10. A partir dessa discretização, calculou-se o deslocamento de corpo rígido (deslocamento nodal médio) do CDP ao longo do ensaio. Assumindo que o CDP exibe um comportamento macroscópico isotrópico no plano de análise, o deslocamento de corpo rígido na direção de carregamento corresponde à metade da aproximação total entre as placas de compressão. Os deslocamentos de cada face e o valor médio são apresentados na Figura 4.11, para o Ensaio 1, e no Apêndice A para os Ensaios 2 e 3. A análise comparativa entre as duas faces de cada corpo de prova revelou valores de deslocamento com uma diferença progressiva ao longo do ensaio, indicando que uma extremidade do CDP deforma mais do que a outra durante o ensaio. Essa diferença pode ser uma consequência de diversos artefatos do ensaio, como a falta de paralelismo entre as placas de compressão, a geometria do CDP ser um tronco de cone, a eventual deformação plástica de uma face antes da outra.



(a) Ensaio 1.

Figura 4.10: Malha utilizada para CID no Ensaio 1 nas faces frontal (esquerda) e traseira (direita).

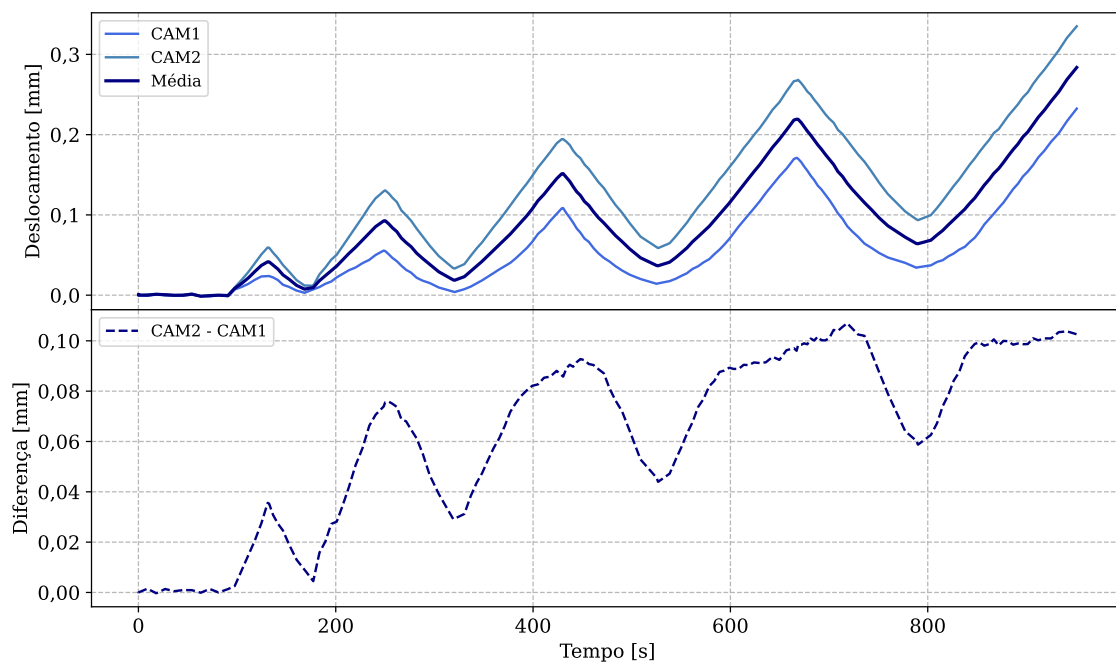


Figura 4.11: Dados de deslocamento obtidos via CID para o CDP do Ensaio 1. Superior: Deslocamento de corpo rígido de cada face do CDP e o deslocamento médio. Inferior: Diferença entre o deslocamento das faces ao longo do ensaio.

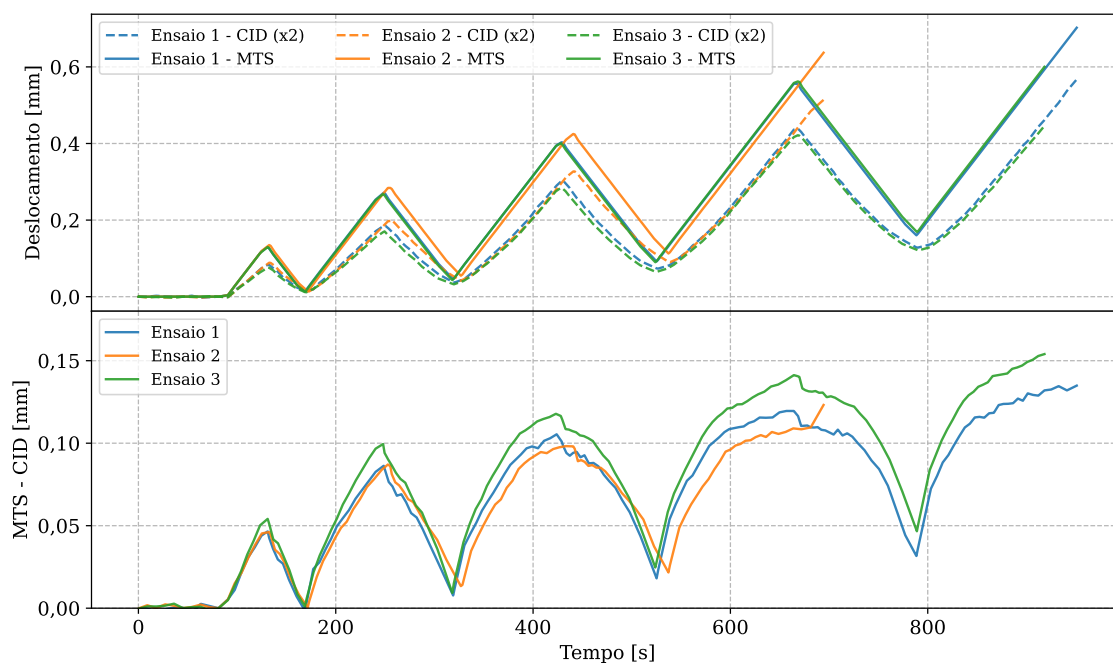


Figura 4.12: Dados de deslocamento da máquina de ensaios (MTS) e obtidos via CID, multiplicados por dois, para os três ensaios. Superior: Deslocamento médio das faces de cada CDP multiplicado por dois (linhas tracejadas) e o deslocamento registrado pela máquina de ensaios no mesmo instante. Inferior: Diferença entre o deslocamento obtido via CID e o deslocamento da máquina de ensaios.

Dessa forma, a média do deslocamento efetivo entre as faces frontal e traseira foi calculada. Esse valor médio minimiza o efeito de eventuais assimetrias do ensaio, mas representa uma simplificação em relação ao deslocamento real de cada face. Este conjunto de dados corrigidos, que representa a cinemática do ensaio brasileiro, foi adotado como a condição de contorno de deslocamento prescrito (*input*) no modelo de Elementos Finitos, buscando se aproximar das condições experimentadas pelo material.

### 4.3.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Uma análise de sensibilidade foi executada utilizando os dados experimentais dos três ensaios brasileiros, com o objetivo de avaliar se a análise feita anteriormente em um ensaio virtual se mantém consistente quando aplicada em experimentos reais. Os parâmetros utilizados foram os mesmos identificados por Melo *et al.* [8], mostrados na Tabela 2.1, e utilizados na análise anterior.

A Figura 4.13 mostra a sensibilidade da força para cada parâmetro no modelo de MEF do Ensaio 1. As respostas de sensibilidade para os Ensaios 2 e 3 são apresentadas no Apêndice B.

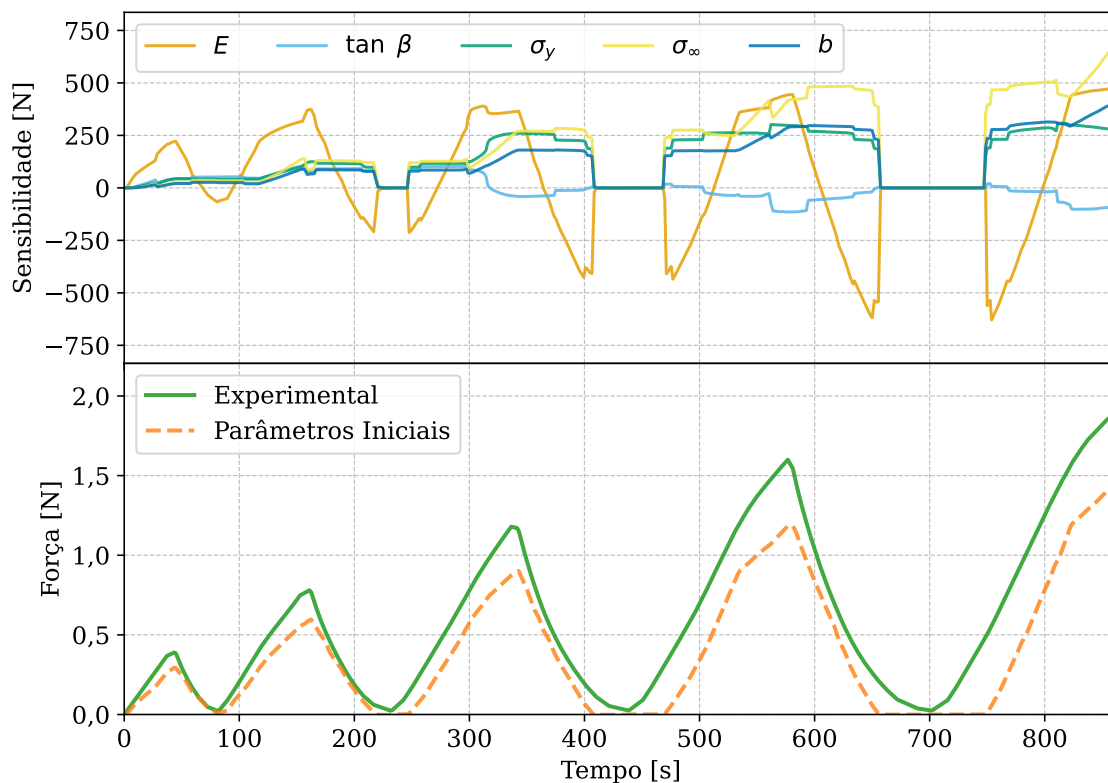


Figura 4.13: Análise de sensibilidade FEMU para o Ensaio 1. Superior: Sensibilidade local da resposta de força para cada parâmetro do modelo ao longo do tempo. Inferior: Comparação entre a resposta experimental força-tempo (linha sólida verde) e a simulação de MEF usando estimativas iniciais dos parâmetros (linha tracejada laranja).

A evolução da sensibilidade dos parâmetros é consistente com o observado na Figura 4.4. Entretanto, os resultados da simulação exibiram regiões de platô de força nula devido à separação entre a placa e o corpo de prova. Esse fenômeno não ocorreu durante o experimento porque o protocolo de ensaio manteve

o contato, interrompendo o descarregamento quando a carga atingia a pré-carga aplicada no início. Isso mostra que os parâmetros com os quais a sensibilidade foi calculada não representam bem o comportamento mecânico do material em um ensaio brasileiro, justificando a necessidade de uma otimização.

A decomposição de autovalores da matriz Hessiana para todos os ensaios é apresentada na Figura 4.14. As Hessianas apresentaram um padrão consistente de acoplamento entre os parâmetros de encruamento, corroborando o observado na análise de sensibilidade para o ensaio virtual. Porém, o uso dos dados de deslocamento dos experimentos 1 e 3 resultou em um pior condicionamento numérico do sistema quando comparado aos dados do experimento 2. Esse condicionamento pode ser uma consequência da fratura ter ocorrido no experimento 2 antes dos demais, fazendo com que este possua menos dados da curva força vs. deslocamento, como o ciclo de descarregamento e carregamento. Além disso, observa-se que a composição dos autovetores é diferente daquela obtida da análise do ensaio virtual, sendo mais evidente o acoplamento entre os parâmetros de encruamento no autovetor 1, correspondente ao maior autovalor, para os três casos experimentais. Por outro lado, os autovetores 2 e 3 possuem uma contribuição considerável de  $E$  e  $\tan \beta$  nos três experimentos, o que sugere que esses parâmetros poderão ser identificados com um nível adequado de confiabilidade. Isso mostra que as condições de contorno do problema irão afetar a identificabilidade e acoplamento entre os parâmetros do modelo escolhido, entretanto, certos acoplamentos podem ser inerentes ao modelo constitutivo escolhido (Drucker-Prager linear com encruamento segundo a lei de Voce).

Conforme constatado pela análise prévia, a falta de identificabilidade observada poderia ser mitigada utilizando uma técnica de medição de campo total associada a um FEMU-U. A Correlação de Imagens Digitais (CID) é um desses métodos e, com a captura de todo o campo cinemático do ensaio brasileiro, poderia auxiliar na identificação de parâmetros mais confiáveis. Apesar de haver estes dados disponíveis [26], não houve tempo hábil para fazer esta análise neste trabalho de mestrado.

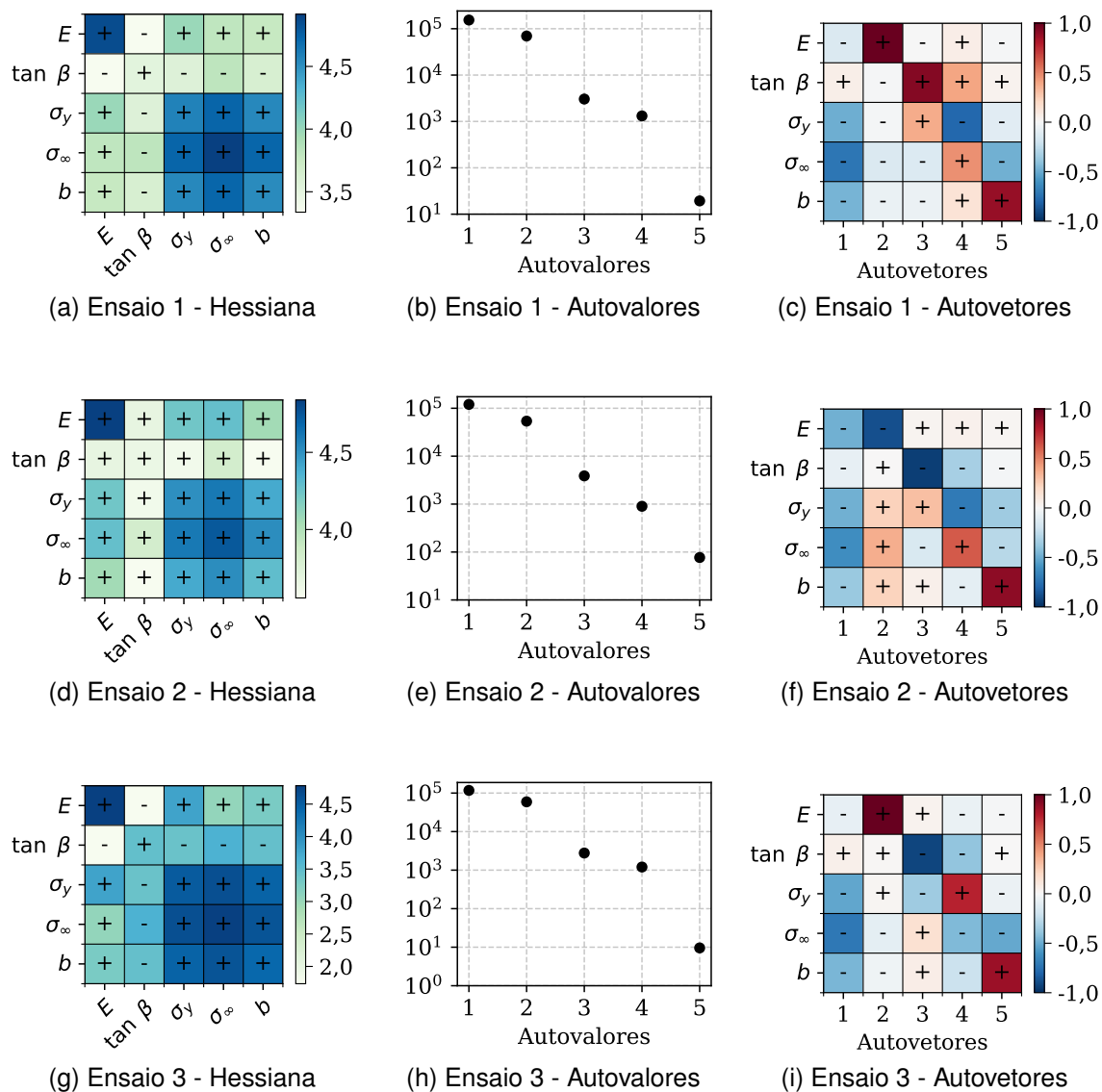


Figura 4.14: Decomposição da Hessiana da força para os Ensaio 1, 2 e 3 (ordenados nas linhas de cima para baixo): (a, d, g) Matrizes Hessianas, com escala de cores em escala logarítmica de base 10; (b, e, h) Espectros de autovalores em escala semi-log normalizados pelo seu maior autovalor ( $\kappa_1 = 8,0 \cdot 10^3$ ,  $\kappa_2 = 1,6 \cdot 10^3$ , e  $\kappa_3 = 1,2 \cdot 10^4$ ); (c, f, i) Matrizes de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo.

#### 4.3.4 PARÂMETROS OTIMIZADOS

Após a convergência do algoritmo FEMU-F, foram identificados os parâmetros otimizados para os Ensaio 1, 2 e 3, após 23, 27 e 26 iterações, respectivamente. Esses parâmetros são apresentados na Tabela 4.2, juntamente com a média, o desvio padrão (STD) e desvio padrão relativo (RSD) entre os três ensaios.

Tabela 4.2: Parâmetros elastoplásticos identificados via FEMU-F

Parâmetro	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média	STD	RSD
$E$ [GPa]	3,46	3,41	3,66	3,51	0,13	4 %
$\beta$ [°]	70,83	70,64	70,93	70,80	0,15	0,21 %
$\sigma_y$ [MPa]	7,2	4,6	10,2	7,3	2,8	38 %
$\sigma_\infty$ [MPa]	31,5	30,5	33,1	31,7	1,3	4 %
$b$ [-]	542	500	562	535	32	6 %

Os parâmetros  $E$  e  $\beta$  são consistentes em todos os ensaios, com RSD de 4% e 0,21%, respectivamente, confirmando sua identificabilidade robusta a partir de dados de força global. Em contraste, a tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) exibe variação de 38% entre os ensaios, com valores identificados variando de 4,6 a 10,2 MPa. Os outros parâmetros de encruamento,  $\sigma_\infty$  e  $b$  apresentaram uma variação de 4% e 6%, respectivamente, sugerindo que eles podem ser identificados.

Para investigar a origem dessa variabilidade, a Hessiana da função custo foi calculada no ponto de convergência de cada ensaio, e sua decomposição é apresentada na Figura 4.15. Diferentemente de uma análise de sensibilidade global, a Hessiana, avaliada no mínimo, quantifica a curvatura local da função custo ao redor da solução convergida, e é proporcional à inversa da matriz de covariância. Seus autovalores, portanto, são inversamente proporcionais à incerteza associada a cada direção do espaço de parâmetros na solução ótima. Os principais autovalores indicam direções bem restritas pelos dados, portanto com menor incerteza, enquanto autovalores menores indicam direções ao longo das quais a função custo possui menor concavidade, indicando maior incerteza.

Em todos os ensaios, o espectro de autovalores (Figuras 4.15b, 4.15e, e 4.15h) apresenta um autovalor dominante, seguido de uma queda abrupta de duas a quatro ordens de grandeza em relação ao segundo autovalor, com os seguintes

apresentando uma queda de mais três ou quatro ordens de grandeza. No total, o espectro cobre até nove ordens de grandeza, contraste expressivo com as aproximadamente três ordens observadas na análise com os parâmetros iniciais (Figura 4.14). Esse agravamento do mau condicionamento no ponto convergido, em comparação com os parâmetros iniciais, é consistente com o fato de que a solução se encontra sobre um vale alongado da função custo e, no mínimo, a função custo é necessariamente mais plana nas direções dos parâmetros acoplados do que no ponto inicial da otimização no espaço de parâmetros.

As direções principais associadas aos autovalores dominantes correspondem essencialmente a  $E$  e  $\tan \beta$ , conforme indicado pela matriz de autovetores. A alta curvatura da função custo nessas direções, mesmo em seu mínimo, implica em baixa incerteza para esses parâmetros. Em contraste, os três autovalores restantes são muito baixos, e os autovetores correspondentes combinam  $\sigma_y$ ,  $\sigma_\infty$  e  $b$ , o que é uma evidência de que a matriz de covariância (proporcional à inversa da Hessiana) é numericamente singular nessas direções, tornando os intervalos de confiança desses parâmetros muito grandes a partir dos dados disponíveis. Esse resultado explica diretamente o alto RSD de 38% observado em  $\sigma_y$ , cada ensaio convergiu para um ponto diferente, igualmente admissível do ponto de vista da função custo. O baixo RSD de  $\sigma_\infty$  e  $b$  não deve ser interpretado como indicativo de boa identificabilidade, pois, devido ao acoplamento com  $\sigma_y$ , o conjunto  $\{\sigma_y, \sigma_\infty, b\}$  varia coletivamente dentro deste vale de soluções. Destaca-se ainda o aumento expressivo de  $\beta$  em relação ao valor inicial, de  $55^\circ$  para  $70,8^\circ$ . Sob a hipótese de fluxo associativo ( $\psi = \beta$ ), esse parâmetro governa simultaneamente o critério de plastificação e a direção do fluxo plástico, de modo que a otimização pode estar compensando limitações do modelo associativo por meio do ajuste de  $\beta$ , introduzindo um possível viés no resultado. Investigações com o modelo não-associativo são necessárias para verificar essa hipótese.

As respostas força-tempo para os parâmetros inicial, otimizado e médio são comparadas com os dados experimentais na Figura 4.16, e os valores da função custo correspondentes são sumarizados na Tabela 4.3. A otimização reduziu com sucesso  $\chi^2$  em todos os casos, com reduções de uma a duas ordens de

grandeza em relação aos parâmetros iniciais.

Tabela 4.3: Valores da função custo  $\chi^2$  para os três conjuntos de parâmetros avaliados em cada ensaio.

Ensaio	Inicial	Otimizado	Médio
1	66.744	3.037	3.249
2	16.578	1.482	4.239
3	80.085	2.846	5.124

A diferença entre os ajustes com parâmetros otimizados individuais e médios é pequena nos três ensaios se comparados com o valor  $\chi^2$  para os parâmetros iniciais. Além disso, a função custo calculada com os parâmetros médios atingiu valores similares para os três casos, mesmo que no Ensaio 2, a diferença entre o ajuste otimizado individual e médio seja maior do que nos outros, diferença que, ainda assim, corresponde a um ajuste que reproduz bem as curvas experimentais, como pode ser verificado na Figura 4.16. Essa semelhança, consistente nos três ensaios, é uma consequência direta do acoplamento identificado pela Hessiana: se a função custo é quase plana ao longo do vale de  $\{\sigma_y, \sigma_\infty, b\}$ , a substituição dos parâmetros individuais pelos valores médios representa apenas um deslocamento dentro desse vale, com impacto mínimo sobre o ajuste. No entanto, os gráficos de resíduos (Figura 4.16) revelam erros sistemáticos persistentes, particularmente nos picos de força. Esses desvios não são atribuíveis apenas ao acoplamento de parâmetros, mas, provavelmente, também a limitações do modelo constitutivo adotado, em especial à hipótese de fluxo associativo e à lei de encruamento de Voce. A incorporação de medições de campos completos via CID e a investigação de modelos constitutivos alternativos, como o modelo de Drucker-Prager Hiperbólico ou o Exponencial, a lei de encruamento de Swift e o modelo de Cam/Clay são sugeridos como estudos visando superar essas limitações.

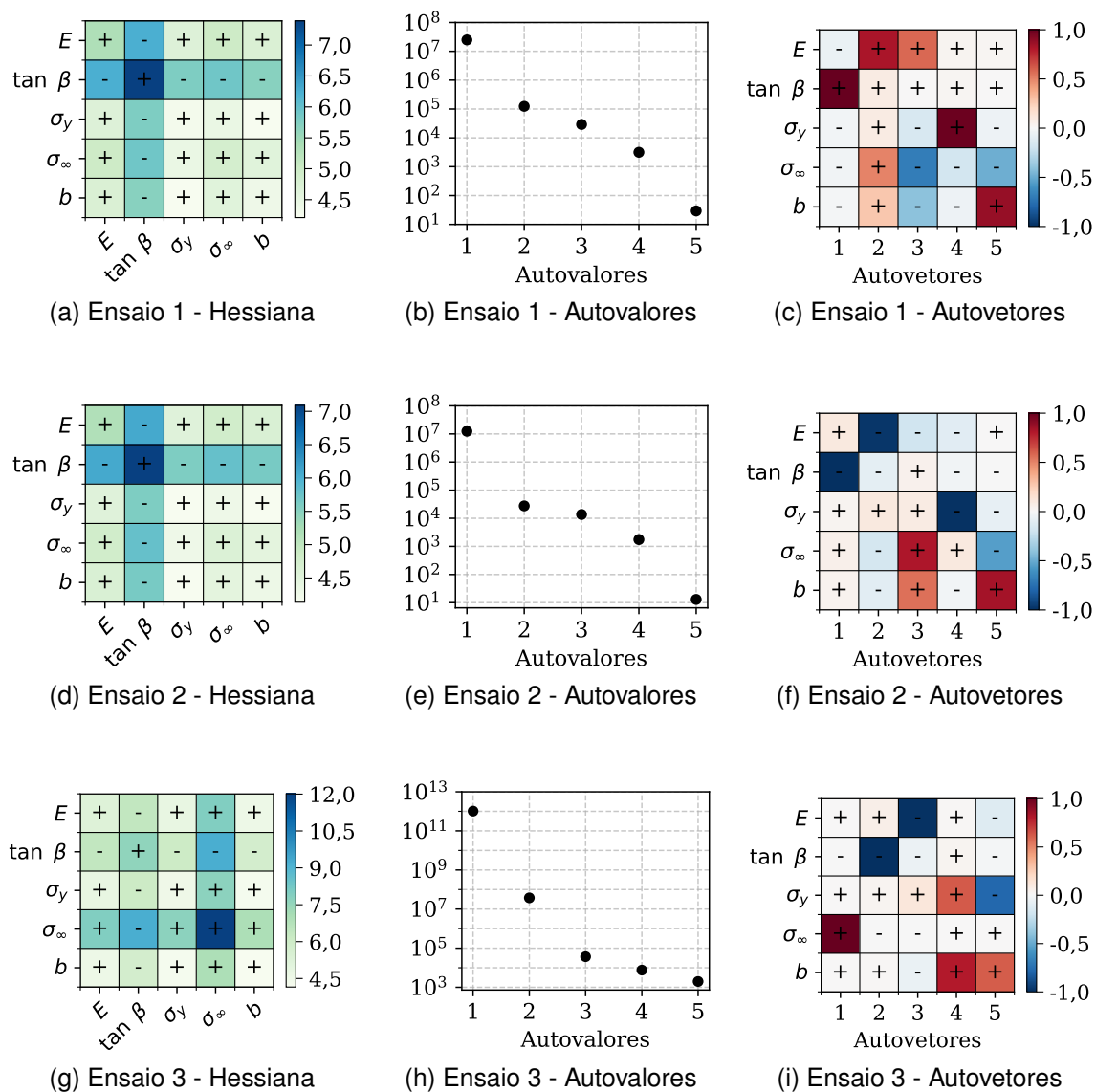


Figura 4.15: Decomposição da Hessiana da função custo avaliada nos parâmetros convergidos para os Ensaios 1, 2 e 3 (ordenados nas linhas de cima para baixo): (a, d, g) Matrizes Hessianas, com escala de cores em escala logarítmica em base 10; (b, e, h) Espectros de autovalores em escala semi-log normalizados pelo seu maior autovalor ( $\kappa_1 = 8,5 \cdot 10^5$ ,  $\kappa_2 = 9,6 \cdot 10^5$ , e  $\kappa_3 = 5,2 \cdot 10^8$ ); (c, f, i) Matrizes de autovetores mostrando a composição de cada direção principal em termos dos parâmetros do modelo.

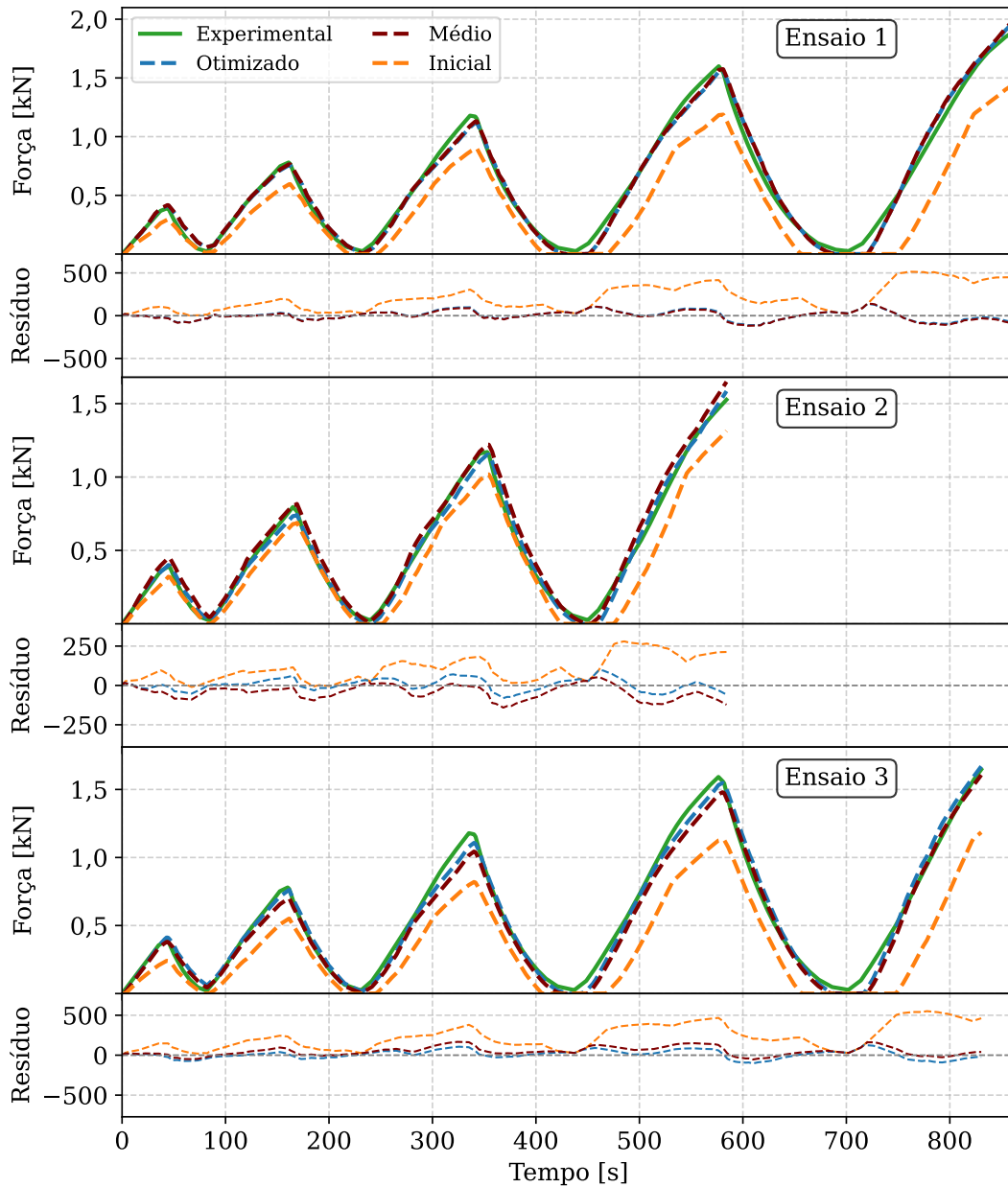


Figura 4.16: Comparação das respostas de forças experimentais com as simulações em EF para os Ensaios 1, 2 e 3. As simulações utilizaram os parâmetros iniciais (linhas tracejadas em laranja), otimizados específicos de cada ensaio (linhas tracejadas em azul) e médios (linhas tracejadas marrom). Os erros residuais normalizados  $((F_{EXP} - F_{FEM})/\gamma_F)$  ao longo da duração do ensaio são apresentados abaixo de cada curva de resposta.

## 5 CONCLUSÕES

Os estudos apresentados estabeleceram um arcabouço de verificação numérica e aplicação experimental para a identificação dos parâmetros constitutivos do modelo Drucker-Prager em compactos verdes de alumina, utilizando o ensaio brasileiro cíclico e a abordagem FEMU. As principais conclusões são:

- A análise numérica baseada em dados sintéticos demonstrou que a resposta de força global apresenta alta sensibilidade ao módulo elástico ( $E$ ) e ao ângulo de atrito interno ( $\beta$ ), mas é insuficiente para restringir unicamente os parâmetros de encruamento, devido a um acoplamento crítico entre  $\sigma_y$ ,  $\sigma_\infty$  e  $b$ , que cria um vale de soluções indistinguíveis na função custo;
- A análise de sensibilidade dos campos de deslocamento revelou que a informação referente a ( $\beta$ ) é espacialmente localizada nas bordas laterais da amostra, possivelmente como consequência direta da dilatação induzida por cisalhamento sob a hipótese de fluxo plástico associativo ( $\psi = \beta$ );
- A integração de dados de força e campos completos de deslocamento (FEMU-UF) mostrou-se uma estratégia mais robusta, diminuindo consideravelmente o mau condicionamento observado na formulação baseada apenas em força, e validando numericamente o ensaio brasileiro cíclico como configuração viável para a caracterização elastoplástica completa, desde que empregadas medições de campo completo;
- Na aplicação experimental (FEMU-F),  $E$  e  $\beta$  foram identificados de forma consistente a partir de uma única configuração de ensaio, com baixa variabilidade entre os três corpos de prova. Os parâmetros  $\sigma_\infty$  e  $b$  também apresentaram baixa variância; contudo,  $\sigma_y$  exibiu variabilidade de 38%, confirmando experimentalmente seu caráter estatisticamente não identificável isoladamente — em acordo com o acoplamento previsto pela decomposição de autovalores da Hessiana;
- Apesar do mau condicionamento paramétrico, a capacidade preditiva do

modelo não foi comprometida para os ensaios estudados: um modelo generalizado com parâmetros médios reproduziu as curvas força-tempo com desvio inferior a 7% em relação aos ajustes individuais, confirmando a robustez qualitativa da abordagem;

- As análises identificaram limitações no modelo constitutivo adotado, evidenciadas por erros residuais sistemáticos e pelo acoplamento severo nos parâmetros de encruamento, sugerindo que a incorporação de dados de campo completo e a revisão da hipótese de fluxo associativo constituem direções naturais para trabalhos futuros.

## 6 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Com base nas limitações identificadas neste trabalho, sugerem-se as seguintes direções para investigações futuras:

- **Validação experimental da abordagem combinada FEMU-UF.** A análise numérica de identificabilidade demonstrou que a incorporação de campos cinemáticos mitiga o acoplamento entre os parâmetros de encruamento. A etapa natural seguinte é a validação experimental dessa abordagem, utilizando a Correlação de Imagens Digitais (CID) para obter os campos de deslocamento ao longo do ensaio brasileiro como dado de entrada na otimização combinada (FEMU-UF), verificando se a identificabilidade prevista numericamente se confirma na prática;
- **Investigação de modelos constitutivos alternativos.** O modelo DP linear com encruamento de Voce e fluxo associativo, adotado neste trabalho, não é o único capaz de representar o comportamento mecânico de compactos verdes cerâmicos. Formulações alternativas, como as superfícies de escoamento hiperbólica e exponencial do modelo DP, a lei de encruamento de Swift e o modelo Cam-Clay modificado, poderiam descrever os dados experimentais de maneira satisfatória, porém com conjuntos de parâmetros e estruturas de acoplamento distintas. A investigação sistemática dessas alternativas, aplicando a mesma metodologia FEMU desenvolvida neste trabalho a diferentes configurações de ensaio, como compressão simples, ensaio brasileiro, flexão três pontos, permitiria identificar qual formulação representa de forma mais geral e consistente o comportamento do material, independentemente do tipo de carregamento aplicado. Essa caracterização mais abrangente é essencial para o uso confiável de modelos constitutivos em simulações de processos industriais nos quais diferentes estados de tensão coexistem simultaneamente;
- **Incorporação da mecânica do dano contínuo.** Os resíduos sistemáticos observados nas curvas de força do FEMU-F sugerem que o modelo elas-

toplástico puro não captura adequadamente a resposta do material nas etapas finais do ensaio, onde a nucleação e propagação de microfissuras podem contribuir para a perda de rigidez. A incorporação de uma variável de dano escalar acoplada ao modelo DP possibilitaria descrever essa degradação progressiva, com impacto direto na forma das curvas força-tempo e potencial melhora na qualidade do ajuste;

- **Extensão para modelos tridimensionais.** O modelo de elementos finitos adotado neste trabalho assume estado plano de tensões, explorando a simetria do ensaio brasileiro. Para geometrias mais complexas, essa simplificação pode ser inválida. A extensão da metodologia FEMU para modelos 3D, com malhas mais custosas computacionalmente, requereria estratégias de otimização mais eficientes para viabilizar o número de simulações necessárias por iteração, mas possibilitaria criar modelos em EF mais próximos do experimento executado.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] El-Wardany, T., Barth, R., Holowczak, J., Tredway, W., Chen, L.. Optimum process parameters to produce green ceramic complex parts. *CIRP annals* 2009;58(1):109–112. doi:10.1016/j.cirp.2009.03.105.
- [2] Bukvic, G., Sanchez, L.E.D.A., Fortulan, C.A., Fiocchi, A.A., Marinescu, I.D.. Green machining oriented to diminish density gradient for minimization of distortion in advanced ceramics. *Machining Science and Technology* 2012;16(2):228–246. doi:10.1080/10910344.2012.673968.
- [3] Zhang, Y., Yang, D., Zeng, L., Zhang, Z., Li, S.. Simulation and algorithmic optimization of the cutting process for the green machining of PM green compacts. *Materials* 2024;17(16). doi:10.3390/ma17163963.
- [4] Canto, R.B.. Projeto de fabricação de moldes para prensagem isostática utilizando tecnologia CAD/CAE e prototipagem rápida. Master's thesis; Universidade de São Paulo; 2002.
- [5] Canto, R.B.. Estudo teórico e experimental dos processos de compactação e sinterização do politetrafluoretileno (PTFE). Ph.D. thesis; Universidade de São Paulo - Brasil/École Normale Supérieure de Cachan - França; 2007.
- [6] Furlan, M.. Simulação computacional da prensagem de pós para a previsão de falhas em compactos verdes. Master's thesis; Federal University of São Carlos (UFSCar) - Brazil; 2024.
- [7] Lemaitre, J., Chaboche, J.L.. *Mécanique des matériaux solides*. 2 ed.; Paris: Dunod; 1985.
- [8] Melo, C.C., Furlan, M., Hild, F., Schmitt, N., Canto, R.B.. Uniaxial compression test on ceramic green compact with bending consideration using digital image correlation. *Powder Technology* 2020;376:136 – 148.
- [9] Canto, R.B., Tita, V., Carvalho, J., Purquerio, B.M.. Finite element simulation of ceramic powder isostatic pressing process using material parameters for uniaxial compaction. *Materials Science Forum* 2003;561-566:416–418.
- [10] Mazel, V., Busignies, V., Diarra, H., Tchoreloff, P.. Measurements of elas-

- tic moduli of pharmaceutical compacts: a new methodology using double compaction on a compaction simulator. *Journal of pharmaceutical sciences* 2012;101(6):2220–2228. doi:10.1002/jps.23122.
- [11] Öztekin, E., Pul, S., Hüsem, M.. Experimental determination of drucker-prager yield criterion parameters for normal and high strength concretes under triaxial compression. *Construction and Building Materials* 2016;112:725–732. doi:10.1016/j.conbuildmat.2016.02.127.
- [12] Morais, M.M., Melo, C.C., Canto, R.B., Fortulan, C.A.. Calibration of powder constitutive model using digital image correlation validated for hollow hemisphere of lead zirconate titanate. *Powder Technology* 2021;392:212–223.
- [13] Procopio, A.T., Zavaliangos, A., Cunningham, J.C.. Analysis of the diametrical compression test and the applicability to plastically deforming materials. *Journal of Materials Science* 2003;38(17):3629 – 3639. doi:10.1023/A:1025681432260.
- [14] Bortzmeyer, D., Langguth, G., Orange, G.. Fracture mechanics of green products. *Journal of the European Ceramic Society* 1993;11(1):9 – 16. doi:DOI:10.1016/0955-2219(93)90053-T.
- [15] Markides, C.F., Kourkoulis, S.. The stress field in a standardized brazilian disc: the influence of the loading type acting on the actual contact length. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 2012;45(2):145–158. doi:10.1007/s00603-011-0201-2.
- [16] Lobo Carneiro, F.C.. Um novo método para determinação da resistência à tração dos concretos. *Proc Anais 5a reunião da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) em São Paulo* 1943;:127–129.
- [17] Hertz, H.. *Gesammelte Werke*. Leipzig: Johann Ambrosius Barth; 1895.
- [18] Hondros, G.. The evaluation of poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete. *Aust J Appl Sci* 1959;10:243 – 264.
- [19] Buljak, V., Baivier-Romero, S., Kallel, A.. Calibration of Drucker-Prager cap

- constitutive model for ceramic powder compaction through inverse analysis. *Materials* 2021;14(14):4044. doi:10.3390/ma14144044.
- [20] Melo, C.C., Moraes, A.L.I., Rocco, F.O., Montilha, F.S., Canto, R.B.. A validation procedure for numerical models of ceramic powder pressing. *Journal of the European Ceramic Society* 2018;38:2928–2936.
- [21] Rasheed, A., San, O., Kvamsdal, T.. Digital twin: Values, challenges and enablers from a modeling perspective. *IEEE Access* 2020;8:21980–22012. doi:10.1109/ACCESS.2020.2970143.
- [22] Avril, S., Bonnet, M., Bretelle, A.S., Grédiac, M., Hild, F., Lenny, P., et al. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics* 2008;48:381–402.
- [23] Pierron, F., Grédiac, M.. Towards Material Testing 2.0. A review of test design for identification of constitutive parameters from full-field measurements. *Strain* 2021;57(1):e12370.
- [24] Tariq, A., Deliktaş, B.. An inverse parameter identification in finite element problems using machine learning-aided optimization framework. *Experimental Mechanics* 2025;65(3):325–349. doi:10.1007/s11340-024-01136-z.
- [25] Chen, B., Starman, B., Halilović, M., Berglund, L.A., Coppieters, S.. Finite element model updating for material model calibration: A review and guide to practice. *Archives of Computational Methods in Engineering* 2025;32(4):2035–2112.
- [26] Melo, C.C.. Computational modeling of rubber multiaxial pressing applied to ceramic materials. Ph.D. thesis; Universidade Federal de São Carlos; 2021.
- [27] Gupta, S., Green, D.J., Messing, G.L., Peterson, I.M.. Thermomechanical behavior of ceramic green bodies during presintering. *Journal of the American Ceramic Society* 2010;93(9):2611–2616.
- [28] Abaqus 6.14 Documentation. Dassault Systèmes Simulia Corp.; Providence, RI, USA.; 2014.
- [29] Voce, E.. The relationship between stress and strain for homogeneous deformation. *Journal of the Institute of Metals* 1948;74:537–562.

- [30] Shang, C., Sinka, I., Pan, J.. Constitutive model calibration for powder compaction using instrumented die testing. *Experimental Mechanics* 2012;52(7):903–916.
- [31] Seshadri, S., Chila, K.Y.. Tensile testing of ceramics. *Journal of the American Ceramic Society* 1987;70(10):C–242.
- [32] Hangl, M., Börger, A., Danzer, R., Luxner, H.M.. *Fracture Mechanics of Ceramics: Volume 13; chap. Application of the Brazilian Disc Test for Strength Measurements on Ceramic Green Bodies*. New York, NY: Springer US; 2002, p. 159–167.
- [33] Grédiac, M., Hild, F.. *Full-field measurements and identification in solid mechanics*. John Wiley & Sons; 2012.
- [34] Leclerc, H., Neggers, J., Mathieu, F., Roux, S., Hild, F.. Correli 3.0. 2015. IDDN.FR.001.520008.000.S.P.2015.000.31500.
- [35] Sutton, M.A.. Computer vision-based, noncontacting deformation measurements in mechanics: A generational transformation. *Applied Mechanics Reviews* 2013;65(AMR-13-1009, 050802).
- [36] Neggers, J., Mathieu, F., Hild, F., Roux, S.. Simultaneous full-field multi-experiment identification. *Mechanics of Materials* 2019;.
- [37] Montilha, F.S., Rocco, F.O., Melo, C.C., Sciuti, V.F., Canto, R.B.. Identification of dilatancy in green compacted ceramic powder via digital image correlation. *Powder Technology* 2018;330:471–476.
- [38] Vargas, R., Canto, R.B., Smaniotto, B., Hild, F.. Calibration of cohesive parameters for a castable refractory using 4D tomographic data and realistic crack path from in-situ wedge splitting test. *Journal of the European Ceramic Society* 2023;43(2):676–691.
- [39] Bertin, M., Hild, F., Roux, S., Mathieu, F., Leclerc, H., Aïmedieu, P.. Integrated digital image correlation applied to elastoplastic identification in a biaxial experiment. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 2016;51(2):118–131.

Nas Figuras A.1 e A.2 são apresentados os deslocamentos de cada face e o valor médio juntamente com a diferença entre o deslocamento de cada face, para os Ensaio 2 e 3, respectivamente.

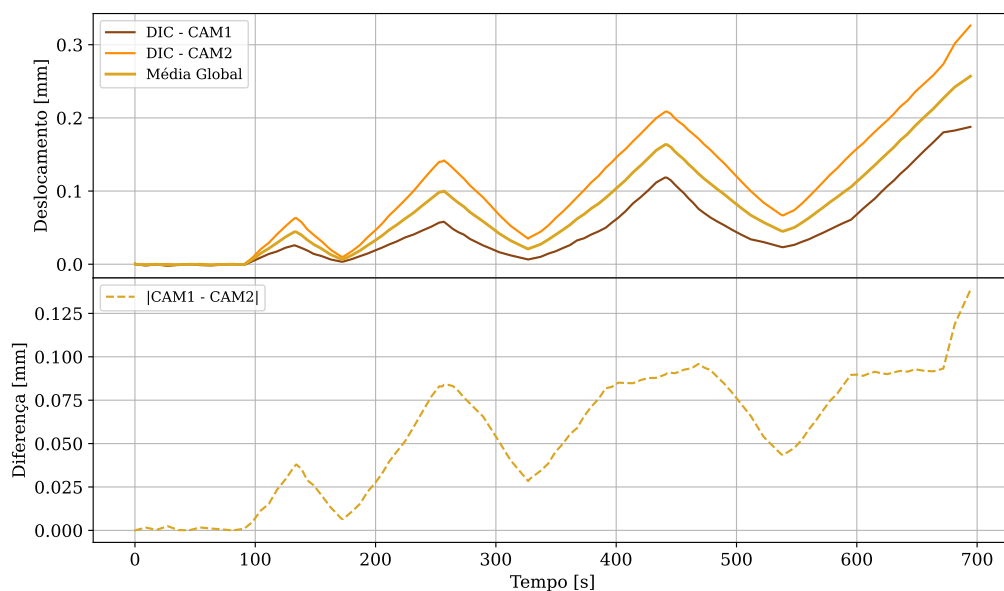


Figura A.1: Dados de deslocamento obtidos via CID para o CDP do Ensaio 2. Superior: Deslocamento de corpo rígido de cada face do CDP e o deslocamento médio. Inferior: Diferença entre o deslocamento das faces ao longo do ensaio.

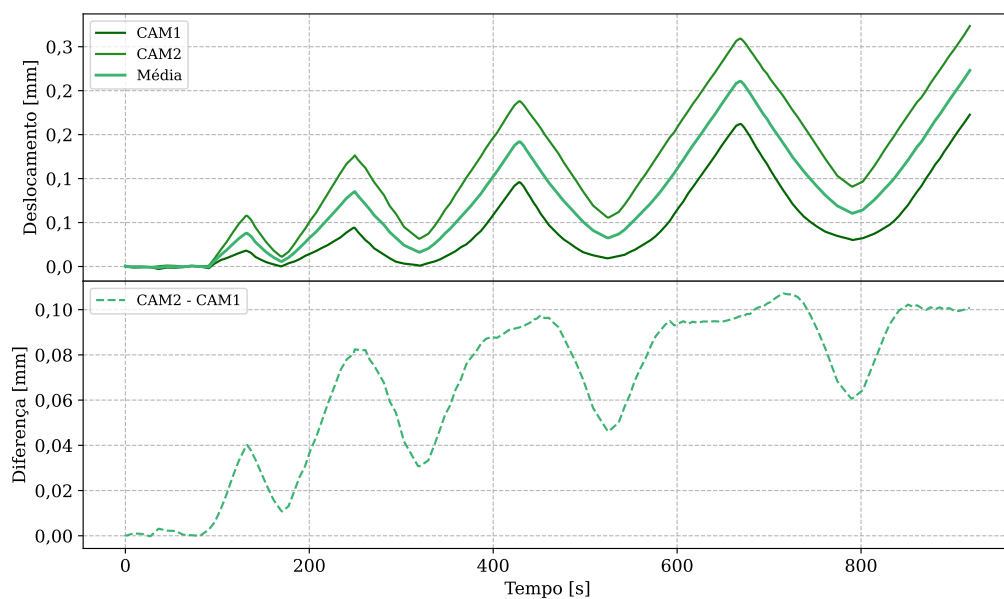


Figura A.2: Dados de deslocamento obtidos via CID para o CDP do Ensaio 3. Superior: Deslocamento de corpo rígido de cada face do CDP e o deslocamento médio. Inferior: Diferença entre o deslocamento das faces ao longo do ensaio.

Nas Figuras B.1 e B.2 são apresentadas as curvas de sensibilidade dos parâmetros do modelo em relação à força de reação na placa de compressão dos ensaios brasileiros cíclicos realizados por Melo *et al.* [26].

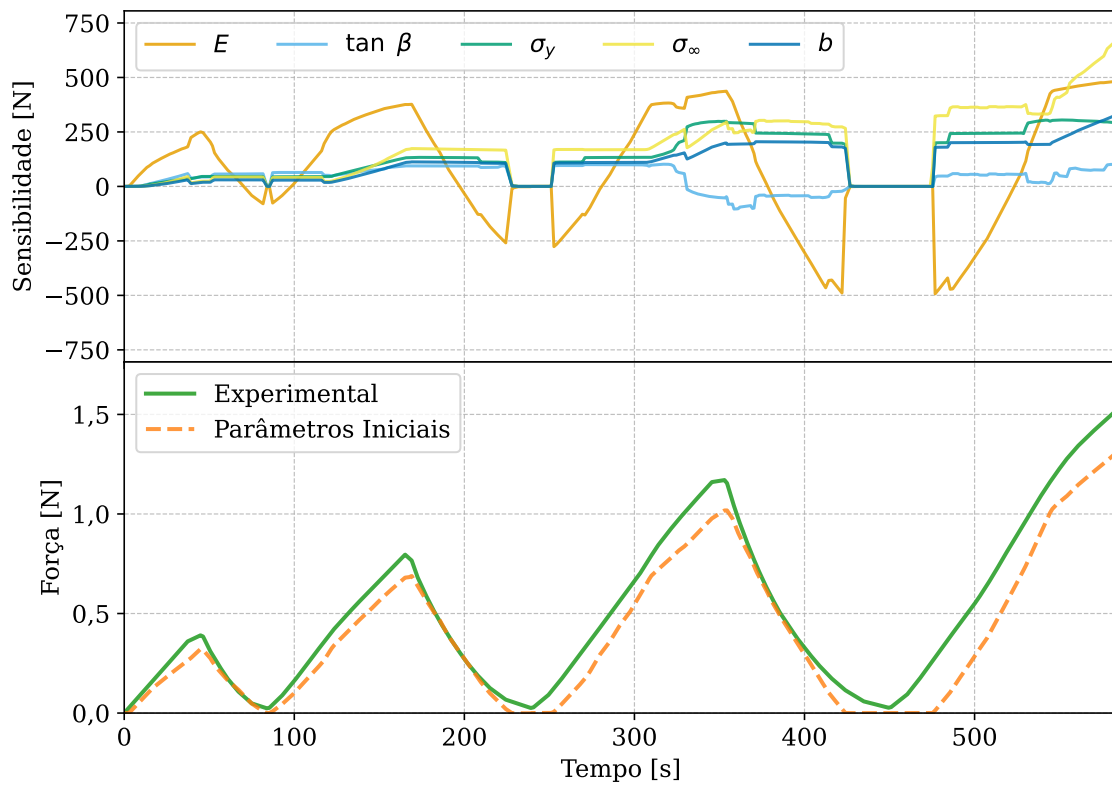


Figura B.1: Análise de sensibilidade FEMU para o Ensaio 2. Superior: Sensibilidade local da resposta de força para cada parâmetro do modelo ao longo do tempo. Inferior: Comparação entre a resposta experimental força-tempo (linha sólida verde) e a simulação de MEF usando estimativas iniciais dos parâmetros (linha tracejada laranja).

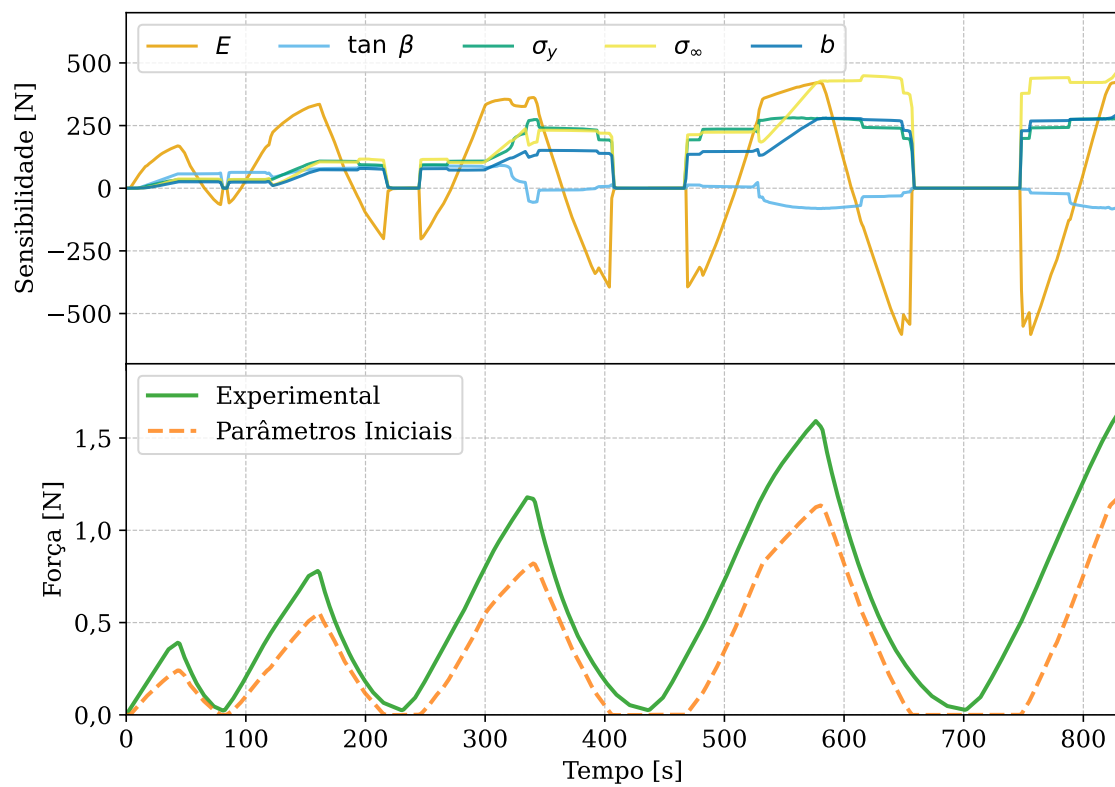


Figura B.2: Análise de sensibilidade FEMU para o Ensaio 3. Superior: Sensibilidade local da resposta de força para cada parâmetro do modelo ao longo do tempo. Inferior: Comparação entre a resposta experimental força-tempo (linha sólida verde) e a simulação de MEF usando estimativas iniciais dos parâmetros (linha tracejada laranja).