

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Julia Elisa Barbosa da Silva

**Análise teórica de uma memória atômica
fundamental considerando um átomo de três
níveis em uma cavidade óptica**

Sorocaba

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Julia Elisa Barbosa da Silva

**Análise teórica de uma memória atômica fundamental
considerando um átomo de três níveis em uma cavidade
óptica**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Federal de São Carlos, *Campus* Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Física. Sorocaba, 14 de outubro de 2024.

Orientador: Prof. Dr. James Alves de Souza

Sorocaba

2024

da Silva, Julia Elisa Barbosa

Análise teórica de uma memória atômica fundamental considerando um átomo de três níveis em uma cavidade óptica / Julia Elisa Barbosa da Silva -- 2024.
37f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): James Alves de Souza

Banca Examinadora: Renato Fernandes Cantão, Johnny
Vilcarromero Lopez

Bibliografia

1. Memória quântica. 2. Transparência
eletromagneticamente induzida em cavidades. 3. Modelo
de Jaynes-Cummings. I. da Silva, Julia Elisa Barbosa. II.
Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - SOROCABA - CCFL-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298859 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 6/2024/CCFL-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

JULIA ELISA BARBOSA DA SILVA

ANÁLISE TEÓRICA DE UMA MEMÓRIA ATÔMICA FUNDAMENTAL CONSIDERANDO UM ÁTOMO DE TRÊS NÍVEIS EM UMA CAVIDADE ÓPTICA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 14 de outubro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Prof. Dr. James Alves de Souza
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Johnny Vilcarromero Lopez



Documento assinado eletronicamente por **James Alves de Souza, Docente**, em 06/11/2024, às 17:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Johnny Vilcarromero Lopez, Chefe de Departamento**, em 07/11/2024, às 15:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renato Fernandes Cantao, Docente**, em 07/11/2024, às 16:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - SOROCABA - CCFL-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298859 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-ADP nº 6/2024/CCFL-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Ata da Defesa Pública (GDP-TCC-ADP)

Aos quatorze dias do mês de outubro de 2024, realizou-se, presencialmente, a Defesa Pública do Trabalho de Conclusão de Curso da estudante Julia Elisa Barbosa da Silva do Curso de Licenciatura em Física - Sorocaba da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, devidamente matriculada na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, perante a Banca Examinadora, composta pelos Professores: Prof. Dr. James Alves de Souza, Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão e Prof. Dr. Johnny Vilcarromero Lopez, segundo o estabelecido nas Normas para apresentação de Trabalho de Conclusão do Curso.

Após a apresentação e arguições, a Banca deliberou, segundo os critérios estabelecidos nas normas supracitadas:

Nome do Docente	Função	Nota
Prof. Dr. James Alves de Souza	Orientador	10
Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão	Membro da Banca 1	10
Prof. Dr. Johnny Vilcarromero Lopez	Membro da Banca 2	10

Com isso, o Trabalho foi considerado **APROVADO**, com nota final **10 (DEZ)**.

Sorocaba, 14 de outubro de 2024.



Documento assinado eletronicamente por **James Alves de Souza, Docente**, em 06/11/2024, às 17:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Johnny Vilcarromero Lopez, Chefe de Departamento**, em 07/11/2024, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renato Fernandes Cantão, Docente**, em 07/11/2024, às 16:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1611575** e o código CRC **751BA6B9**.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. James Alves de Souza, por ter aceitado me orientar e pela paciência.

Agradeço aos meus amigos, por todo amor e carinho, por dividirem o insuportável deste mundo comigo, por me ouvirem falar de minhas paixões e me aceitarem exatamente do jeito que eu sou.

Ao meu companheiro e amigo Rubens, por ter me apoiado em toda a minha formação. Obrigada por, à sua maneira, sempre me incentivar a superar minhas dificuldades, por me acolher e por me ouvir.

Agradeço por fim minha família, minha mãe Marlene, meu pai Adriano e minha irmã Gabriela, ao suporte, compreensão e liberdade que sempre me deram.

“Toda compreensão súbita é finalmente a revelação de uma aguda incompreensão.”

Clarice Lispector

Resumo

A óptica quântica é uma área da física que lida com a aplicação da teoria quântica aos fenômenos que envolvem a luz e sua interação com a matéria. Alguns fenômenos relacionados a esta área do conhecimento nos permitem verificar a possibilidade de controlar a luz através da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQC), responsável por descrever a interação entre radiação e matéria no interior de um ressonador eletromagnético, mais conhecido como cavidade óptica. Um desses fenômenos é a transparência eletromagneticamente induzida, (EIT - *Electromagnetically Induced Transparency*), que permite induzir a transparência de um meio opaco através da aplicação de campos eletromagnéticos. Vários processos baseados no fenômeno de EIT têm fornecido aplicações promissoras, sendo uma delas a memória quântica, que consiste de um dispositivo fundamental que armazena e recupera informações quânticas, desempenhando um papel crucial em protocolos de comunicação e computação quânticas. Neste trabalho apresentamos um estudo teórico para analisar a implementação de uma memória quântica baseada no fenômeno da EIT combinado com eletrodinâmica quântica de cavidades (CEIT - *Cavity EIT*). Para isso, consideramos um sistema composto por um único átomo de três níveis em configuração Λ acoplado a um único modo do campo quântico de uma cavidade óptica. As autoenergias e autoestados do sistema foram calculados analiticamente através da diagonalização do hamiltoniano de interação segundo o modelo de Jaynes-Cummings e a dinâmica do sistema foi resolvida numericamente através do formalismo da equação mestra. Os resultados mostram que a superposição de estados quânticos são essenciais para a observação do processo de memória no sistema CEIT. Adicionalmente, analisamos a influência do acoplamento átomo-campo na performance da memória quântica implementada, mostrando que quanto maior o valor desse parâmetro mais eficiente é o processo de armazenamento de informação.

Palavras-chave: Memória quântica. Transparência eletromagneticamente induzida. Eletrodinâmica quântica de cavidades. Modelo de Jaynes-Cummings.

Abstract

Quantum optics is a branch of physics that applies quantum theory to phenomena involving light and its interaction with matter. One of the key advances in this field is the use of Cavity Quantum Electrodynamics (CQED), which describes how radiation interacts with matter inside an electromagnetic resonator, or optical cavity. A notable phenomenon within CQED is Electromagnetically Induced Transparency (EIT), which allows inducing transparency in an opaque medium through the application of electromagnetic fields. EIT has led to several promising applications, such as quantum memory, which is a technological device used for storing and retrieving quantum information, fundamental for quantum communication and computing. In this work we present a theoretical study to analyze the implementation of a quantum memory based on the EIT phenomenon combined with cavity quantum electrodynamics (CEIT – *Cavity EIT*). For this purpose, we consider a system composed of a single three-level atom in Λ configuration coupled to a single mode of the quantum field of an optical cavity. The eigenstates of the system were calculated analytically through the diagonalization of the interaction Hamiltonian according to the Jaynes-Cummings model, and the dynamics of the system were solved numerically through the master equation formalism. The results show that the superposition of quantum states is essential for the observation of the memory process in the CEIT system. Furthermore, we analyzed the role of the atom-field coupling on the performance of the implemented quantum memory, showing that efficiency of the information storage process can be optimized by increasing the value of this parameter.

Keywords: Quantum Memory. Electromagnetically induced transparency. Cavity quantum electrodynamics. Jaynes-Cummings model.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Representação de um átomo de três níveis em configuração Λ na base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, mostrando os acoplamentos das transições atômicas $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ com o campo da cavidade, de frequência ω_{cav} , e com o campo de controle, de frequência ω_c , respectivamente. A energia para observação da dinâmica do sistema átomo-campo é fornecida pelo campo de prova, de frequência ω_p , que bombeia o modo do campo da cavidade. As dessintonias são dadas por $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_{cav}$, $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ e $\Delta_p = \omega_p - \omega_{cav}$ 15
- Figura 2 – Espectro de transmissão normalizado $\langle a^\dagger a \rangle / (\varepsilon/\kappa)^2$ do sistema CEIT em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ utilizando os parâmetros $g_0 = 5,0 \kappa$, $\varepsilon = 0,01 \kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,6 \kappa$ e $\Omega_C = 2g_0/3$. A janela de 100% de transmissão é formada pelos estados escuros $\sum_n |\Psi_n^{(0)}\rangle$ e os dois picos simétricos $|\Psi_1^{(\pm)}\rangle$ são os estados brilhantes referentes à transição de um único fóton. 21
- Figura 3 – Ilustração do processo de armazenamento de um único fóton na memória CEIT. Em **(a)** mostramos o pulso de prova gaussiano contendo no máximo um fóton, $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, entrando na cavidade, cujo campo acopla a transição $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. A cavidade é preparada no estado $|0\rangle_{cav}$ e o átomo no estado $|1\rangle_{at}$, com o campo de controle, de frequência ω_c , acoplando a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. **(b)** O campo de controle é desligado adiabaticamente, mantendo o sistema átomo-campo no estado escuro $|\Psi_1^{(0)}\rangle$. **(c)** O átomo absorve o fóton de prova. **(d)** O campo de controle é ligado adiabaticamente e o átomo emite coerentemente o fóton, preservando o seu estado inicial. 24
- Figura 4 – Transmissão da cavidade normalizada em função do tempo para verificar o processo de memória quântica no sistema CEIT. Os parâmetros utilizados foram $g_0 = 2,0 \kappa$, $\varepsilon = \sqrt{0,01} \kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,6 \kappa$ e $\Omega_C = 2g_0/3$, FWHM= $1,0 \mu s$, $t_0 = t_1 = 2,0 \mu s$, $t_2 = 7,0 \mu s$ e $\zeta_1 = \zeta_2 = 1,75$ MHz. A gaussiana hachurada representa o pulso de prova, a vermelha com menor área é o sinal perdido e a gaussiana verde, com valor máximo intermediário, representa o fóton recuperado após o processo de armazenamento. A curva azul tracejada-pontilhada mostra as rampas de desligamento e religamento da frequência de Rabi Ω_C do campo de controle. A eficiência de armazenamento desta memória é de 71,4%. 26

Figura 5 – Eficiência da memória CEIT em função do acoplamento átomo-campo normalizado g_0/κ . Os parâmetros utilizados para o cálculo das eficiências para os valores de $g_0 = 1, 0; 2, 0$ e $5, 0 \kappa$, (asteriscos azuis) foram os mesmos utilizados para obtenção do resultado apresentado na figura 4. A curva sólida vermelha foi obtida por Oliveira (2015) para vários valores de g_0 27

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	TRANSPARÊNCIA ELETROMAGNETICAMENTE INDUZIDA . .	14
2.1	Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	14
2.2	Autoenergias e autoestados do sistema CEIT	18
2.3	Formalismo da Equação Mestra	20
3	MEMÓRIA QUÂNTICA	22
4	RESULTADOS	25
5	CONCLUSÕES	28
	REFERÊNCIAS	29
	APÊNDICES	32
	APÊNDICE A – OBTENÇÃO DO HAMILTONIANO DO SISTEMA CEIT	33
A.1	Hamiltoniano do sistema CEIT independente do tempo	35

1 Introdução

A Mecânica Quântica é uma teoria física que descreve as propriedades da matéria no nível de microfenômenos, considerando as leis de movimento de micropartículas. Seu aspecto contraintuitivo mudou radicalmente a maneira pela qual a natureza é vista e interpretada. Com a consolidação de novas teorias e das crescentes descobertas científicas, houve como consequência um avanço tecnológico significativo nas últimas décadas, o que tornou cada vez mais evidente que os fenômenos intrínsecos à Mecânica Quântica desempenham um papel crucial na viabilização de novas tecnologias, especialmente para a transmissão, armazenamento e processamento de informação. Essa evolução culminou na emergência de novas áreas do conhecimento, como o processamento e a comunicação quânticos, que constituem os fundamentos da computação quântica (EISBERG; RESNICK, 1979; COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1991; ZUBAIRY, 2020).

A óptica quântica é uma área da física que lida com a aplicação da teoria quântica aos fenômenos que envolvem a luz e sua interação com a matéria, ou seja, nos permite estudar como os fótons interagem com átomos e moléculas em seu nível mais fundamental. Inicialmente, a necessidade de quantizar o campo de luz foi questionada, pois muitos experimentos, como o interferômetro de Michelson, as fendas de Young e a geração de luz por lasers, eram bem compreendidos usando modelos semiclássicos. No entanto, os trabalhos de Glauber (GLAUBER, 1963) e Sudarshan (SUDARSHAN, 1963) mostraram que alguns estados da luz não podiam ser descritos adequadamente por modelos clássicos.

A partir de 1970, a teoria da óptica quântica ganhou evidência experimental significativa. Em 1977, Kimble, Dagenais e Mandel (1977) realizaram um experimento que demonstrou a existência de correlações de intensidade não clássicas na luz fluorescente emitida por átomos de sódio excitados por um laser. Desde então, experimentos na óptica quântica têm sido utilizados para testar e compreender os fundamentos da Mecânica Quântica, revelando aspectos da luz e da matéria que desafiam as explicações clássicas e expandindo nosso conhecimento sobre o comportamento quântico da luz (BACHOR; RALPH, 2004).

Alguns fenômenos da óptica quântica permite que a luz seja controlada através da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQC), que consiste na descrição da interação entre radiação e matéria no interior de um ressonador eletromagnético, mais conhecido como cavidade óptica. Um desses fenômenos é a transparência eletromagneticamente induzida, (EIT - *Electromagnetically Induced Transparency*). A EIT representa um fenômeno de interferência quântica com a capacidade de modificar as propriedades ópticas de um meio. Isso possibilita, por exemplo, controlar a transmissão de um campo que se propaga através

de uma amostra atômica ao incidir um segundo campo, transformando o meio inicialmente opaco em transparente (HARRIS, 1997; FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005a). Estes fenômenos podem ser observados quando há interferência quântica entre determinadas transições eletrônicas em sistemas atômicos do tipo Λ , provocando mudanças nas propriedades ópticas dos átomos que constituem o meio. A configuração Λ refere-se a um sistema em que um átomo possui duas transições eletrônicas, conectando dois estados fundamentais a um único estado excitado. A EIT tem um vasto alcance de aplicações, como na computação e na comunicação quânticas (DUAN et al., 2001), o armazenamento de estados quânticos da luz (PHILLIPS et al., 2001; CHANELIÈRE et al., 2005), portas lógicas (NIU et al., 2005), entre outras.

Vários processos baseados no fenômeno da EIT têm fornecido aplicações promissoras, sendo uma delas o desenvolvimento de uma memória quântica. A memória quântica é um dispositivo essencial para o estabelecimento de comunicação e processamento de informação, principalmente na computação quântica, em que existe a necessidade de um dispositivo capaz de armazenar e restituir estados quânticos. As memórias quânticas podem ser aplicadas não apenas em computação quântica, mas também em repetidores quânticos, metrologia, detecção e emissão de fótons individuais e para o estudo de aspectos fundamentais da mecânica quântica (LEI et al., 2023; JING et al., 2024). Nas últimas décadas, uma diversidade de memórias quânticas foram demonstradas e caracterizadas, dentre elas estão as que são baseadas no fenômeno da EIT (LIU et al., 2001; PHILLIPS et al., 2001), memória eco gradiente (GEM - *Gradient Echo Memory*) (HIGGINBOTTOM et al., 2012) e pente de frequências atômicas (AFC - *Atomic Frequency Comb*) (AFZELIUS et al., 2009).

Neste trabalho estudamos teoricamente como é possível implementar uma memória quântica fundamental baseada no fenômeno de EIT em uma cavidade óptica (CEIT - *Cavity EIT*). Para isso, consideramos um único átomo de três níveis em configuração Λ no interior de uma cavidade óptica de alta eficiência, operando através da absorção e emissão dos estados da luz de dois campos coerentes. Para a modelagem da interação do sistema átomo-campo considerado deduzimos o hamiltoniano de Jaynes-Cummings utilizando as aproximações de dipolo elétrico e de onda girante, ou RWA, do inglês *Rotating Wave Approximation* (SCULLY; ZUBAIRY, 1997). Para obtenção da dinâmica e do processo de memória do sistema utilizamos o formalismo da equação mestra para o operador densidade átomo-cavidade. A performance da memória quântica fundamental foi analisada em função do acoplamento átomo-campo. Demonstramos que, quanto maior o valor desse parâmetro mais eficiente é o processo de armazenamento de informação.

2 Transparência Eletromagneticamente Induzida

O fenômeno da Transmissão Eletromagneticamente Induzida (EIT - *Electromagnetically Induced Transparency*) foi demonstrado teoricamente por Harris, Field e Imamoglu em 1990 como um processo de interferência quântica que consiste na anulação da absorção de um feixe de luz (campo de prova) que interage com um meio atômico, quando este último é submetido à incidência de outro feixe de luz (campo de controle). Estes campos, gerados por lasers, são acoplados a duas transições atômicas diferentes e dividem um estado comum em um dos níveis atômicos (HARRIS, 1997; SOUZA, 2013).

Nas próximas seções apresentamos o embasamento teórico necessário para entender o fenômeno da EIT em cavidades, também conhecido como CEIT, e a viabilidade do processo de memória no sistema considerado.

2.1 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

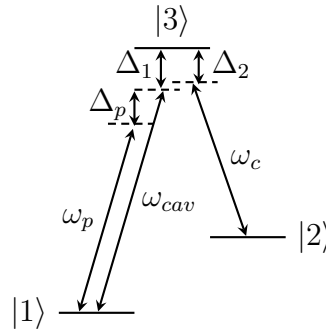
Para entendermos o sistema CEIT vamos analisar cada parte do mesmo separadamente, ou seja, vamos apresentar como o átomo e o campo eletromagnético quântico da cavidade são descritos e como a interação entre os dois é considerada.

A estrutura de níveis de energia de um átomo real é bastante complexa, com múltiplas transições eletrônicas possíveis. Para que possamos aproximar e selecionar apenas alguns níveis de energia deste sistema complexo na configuração desejada, é preciso considerar o fenômeno de ressonância (SOUZA et al., 2013). Um elétron só pode transicionar de um estado de menor energia para outro de maior energia se ele absorver um fóton com energia discreta dada por $E = \hbar\omega$, em que $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida e ω a frequência da transição considerada (EISBERG; RESNICK, 1979). O valor de E também é conhecido como *quantum* de energia e equivale à energia necessária para realizar a referida transição. Uma vez que cada transição é caracterizada por uma frequência ω correspondente, ao incidir um laser na cavidade óptica do sistema CEIT composto por fótons ressonantes com uma determinada transição eletrônica do átomo que está em seu interior, a probabilidade do elétron realizar tal transição será maior, porque as demais transições são caracterizadas por frequências (energias) diferentes. O mesmo é válido para o decaimento do elétron de um nível de maior energia para outro de menor. O fóton emitido na transição terá uma energia equivalente à energia da própria transição realizada.

A configuração atômica utilizada neste trabalho é a *Lambda* (Λ), caracterizada por

dois estados fundamentais, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, e um estado excitado $|3\rangle$, conforme ilustrado na figura 1. Esta é a configuração típica utilizada para observação do fenômeno da EIT no espaço livre e em cavidades e recebe este nome devido à configuração dos níveis de energia, que formam a letra Λ (SOUZA et al., 2013; FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005b).

Figura 1 – Representação de um átomo de três níveis em configuração Λ na base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, mostrando os acoplamentos das transições atômicas $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ com o campo da cavidade, de frequência ω_{cav} , e com o campo de controle, de frequência ω_c , respectivamente. A energia para observação da dinâmica do sistema átomo-campo é fornecida pelo campo de prova, de frequência ω_p , que bombeia o modo do campo da cavidade. As dessintonias são dadas por $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_{cav}$, $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ e $\Delta_p = \omega_p - \omega_{cav}$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Como mostrado na figura 1, a transição $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ é acoplada pelo campo quântico da cavidade, com frequência ω_{cav} e frequência de Rabi do vácuo $2g_0$, enquanto que a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ é acoplada pelo campo clássico de controle, com frequência ω_c e frequência de Rabi $2\Omega_c$. A frequência de Rabi de cada campo é um parâmetro diretamente proporcional à intensidade do campo e ao momento de dipolo elétrico da transição que o mesmo acopla. O parâmetro g_0 também é conhecido como acoplamento átomo-campo e fornece a taxa de troca de energia entre o átomo e o campo quântico da cavidade. Isso significa que quanto maior g_0 , mais efetiva é a interação entre o átomo e o campo da cavidade. Nós analisamos a eficiência da memória quântica no sistema CEIT com relação a este parâmetro, especificamente.

A dinâmica do sistema átomo-campo é estimulada pelo campo clássico de prova, também conhecido como campo de bombeio, de frequência ω_p e força ε . O bombeio do sistema é feito injetando-se energia no campo da cavidade, de maneira que se a cavidade acopla ressonantemente à transição atômica $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e a frequência de bombeio é ressonante ao campo da cavidade $\omega_p = \omega_{cav}$, é comum nos referirmos ao bombeio na transição $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$.

A cavidade óptica otimiza a interação do átomo com o campo de prova. Esta é

formada por dois ou mais espelhos altamente reflexivos dispostos a uma pequena distância um do outro, onde a luz é aprisionada por meio de múltiplas reflexões, formando ondas estacionárias devido aos fenômenos de interferência (SOUZA, 2013).

No nosso modelo assumimos que apenas as transições eletrônicas $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ são possíveis, ou seja, a transição entre os dois níveis fundamentais $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ é considerada como sendo proibida. Isso está de acordo com as regras de seleção de dipolo, que estabelecem que nem todas as transições entre os níveis energéticos de um elétron são permitidas. Estas regras são verificadas experimentalmente, uma vez que transições consideradas como proibidas são muito difíceis de serem observadas (SOUZA et al., 2013).

O Hamiltoniano \hat{H}_{cav} do campo eletromagnético de uma cavidade óptica pode ser representado como uma soma de osciladores harmônicos independentes, cada um com uma frequência ω_j . Pela quantização do campo eletromagnético podemos escrever o mesmo em função dos operadores de aniquilação \hat{a} e criação \hat{a}^\dagger da seguinte forma (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$\hat{H}_{cav} = \sum_j \hbar\omega_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right), \quad (2.1)$$

em que \hat{a} e \hat{a}^\dagger satisfazem a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$. Quando aplicados aos estados de número $|n\rangle$, também conhecidos como estados de Fock $\{|n\rangle\}$, cujos autovalores n fornecem o número de excitações no sistema, estes descrevem, respectivamente, a aniquilação e a criação de fótons de energia $\hbar\omega$ no campo da cavidade, ou seja,

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.2)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.3)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.4)$$

O operador $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ é conhecido como operador número e sua média $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ fornece o número médio de fótons no interior da cavidade óptica, ou equivalentemente, à transmissão da cavidade. Todas estas operações são feitas em um espaço complexo com dimensão infinita conhecido como espaço de Hilbert (SCULLY; ZUBAIRY, 1997).

O termo constante de energia $E_0 = \sum_j \frac{1}{2} \hbar\omega_j$ na equação (2.1) descreve as flutuações de energia do vácuo, de maneira que este pode ser desconsiderado, por simplicidade. Dessa forma, se considerarmos apenas um modo do campo da cavidade, a equação (2.1) pode ser reescrita como (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$\hat{H}_{cav} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.5)$$

Para obtenção do hamiltoniano do átomo \hat{H}_{at} podemos utilizar a equação de Schrödinger independente do tempo, dada por:

$$\hat{H}_{at} |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (2.6)$$

em que E são as autoenergias dos autoestados correspondentes $|\psi\rangle$. Utilizando a relação de completudeza $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \hat{1}$, em que $\hat{1}$ é o operador identidade, podemos reescrever o hamiltoniano atômico da seguinte forma:

$$\hat{H}_{at} = \hat{1}\hat{H}_{at}\hat{1} = \sum_{ij} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|H|\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad (2.7)$$

$$\hat{H}_{at} = \sum_{ij} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|E_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j| = E_j|\psi_i\rangle\delta_{ij}\langle\psi_j|, \quad (2.8)$$

$$\hat{H}_{at} = \sum_i E_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.9)$$

sendo δ_{ij} a delta de Kronecker. Como os três estados eletrônicos do átomo formam a base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, tem-se que:

$$\hat{H}_{at} = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| + E_3|3\rangle\langle 3|. \quad (2.10)$$

Os operadores $|1\rangle\langle 1| = \hat{\sigma}_{11}$, $|2\rangle\langle 2| = \hat{\sigma}_{22}$ e $|3\rangle\langle 3| = \hat{\sigma}_{33}$ fornecem informações sobre a população eletrônica de cada estado. Considerando o zero de energia do nosso sistema no estado $|1\rangle$, ou seja, $E_1 = 0$, o hamiltoniano (2.10) pode ser simplificado para:

$$\hat{H}_{at} = \hbar\omega_{32}|2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_{31}|3\rangle\langle 3|, \quad (2.11)$$

$$\hat{H}_{at} = \hbar\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \hbar\omega_{31}\hat{\sigma}_{33}. \quad (2.12)$$

O Hamiltoniano de interação \hat{H}_{int} entre o átomo e o campo é obtido a partir da aproximação de dipolo elétrico, descrita por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997; GRYNBERG et al., 2010):

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mu} \cdot \hat{E}, \quad (2.13)$$

sendo $\hat{\mu}$ o operador de momento de dipolo elétrico e \hat{E} o campo elétrico aplicado. Esta aproximação só é válida quando as dimensões do sistema atômico são muito menores do que as dimensões da amplitude do campo elétrico com o qual o sistema interage (KOBÉ, 1982). Dessa forma, no referencial do campo, o átomo pode ser aproximado por um dipolo elétrico oscilante.

Considerando o campo \hat{E} total, dado pelos campos da cavidade e de controle, o hamiltoniano de interação pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= \hbar g_0 (\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}) + \hbar\Omega_c (\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \hat{\sigma}_{23}e^{-i\omega_c t}), \\ \hat{H}_{int} &= \hbar g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \hbar\Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + h.c., \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo $h.c.$ o hermitiano conjugado. Além da aproximação de dipolo elétrico utilizamos também a aproximação de onda girante (RWA). Esta consiste em considerar apenas os termos do hamiltoniano que estão próximos da ressonância e que conservam o número de excitações do sistema (SCULLY; ZUBAIRY, 1997)

O hamiltoniano total do sistema é descrito pela soma dos hamiltonianos do campo e do átomo isolados, \hat{H}_{cav} e \hat{H}_{at} , com o hamiltoniano de interação \hat{H}_{int} , de forma que:

$$\hat{H}_{total} = \hat{H}_{cav} + \hat{H}_{at} + \hat{H}_{int} \quad (2.15)$$

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \hbar\omega_{31}\hat{\sigma}_{33} + (\hbar g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \hbar\Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \text{h.c.}) \quad (2.16)$$

O hamiltoniano (2.16) é conhecido como *hamiltoniano de Jaynes-Cummings* e foi proposto por Jaynes e Cummings em 1963 para descrever a interação coerente entre um átomo de dois níveis e um único modo do campo eletromagnético de uma cavidade óptica (JAYNES; CUMMINGS, 1963).

Para ter acesso às informações provenientes da interação átomo-campo no sistema CEIT é necessário fornecer e obter energia do sistema. Conforme já discutido, isso é feito através do campo clássico de bombeio, de frequência ω_p e força ε . Em nosso sistema modelamos o bombeio no modo do campo quântico da cavidade, o qual é descrito pelos operadores de aniquilação e criação. O hamiltoniano de bombeio \hat{H}_p , que descreve a interação destes dois campos, é dado por:

$$\hat{H}_p = \hbar\varepsilon(\hat{a}e^{i\omega_p t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t}) \quad (2.17)$$

Portanto, o hamiltoniano total \hat{H} do sistema CEIT é descrito pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings com bombeio,

$$\hat{H} = \hat{H}_{JC} + \hat{H}_p, \quad (2.18)$$

$$\hat{H} = \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33} + (g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \varepsilon\hat{a}e^{i\omega_p t} + \text{h.c.}), \quad (2.19)$$

em que fizemos $\hbar = 1$, por simplicidade. Este modelo é amplamente utilizado para descrever o fenômeno de CEIT (SOUZA et al., 2013).

Na próxima seção mostramos como diagonalizar o hamiltoniano de Jaynes-Cummings com bombeio para obtenção das autoenergias e dos autoestados do sistema. A partir dessas soluções é possível identificar as condições necessárias para a observação das principais características do fenômeno de CEIT e o estabelecimento de uma memória quântica neste sistema.

2.2 Autoenergias e autoestados do sistema CEIT

Para facilitar os cálculos para a obtenção das autoenergias e dos autoestados do sistema átomo-campo é conveniente eliminar a dependência temporal do hamiltoniano (2.19). Esta foi feita mudando-se o hamiltoniano da representação de Schrödinger para a representação de Dirac, ou de Interação, utilizando-se o operador unitário $\hat{U}_0^\dagger(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}$. Essa operação equivale a considerar o sistema no referencial do campo de prova, conhecido como referencial girante.

O hamiltoniano total independente do tempo nesse novo referencial é dado por:

$$\hat{H} = \Delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} - \Delta_p \hat{\sigma}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} + (g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \varepsilon \hat{a} + h.c.), \quad (2.20)$$

em que $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_p$ e $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ são as dessintonias átomo-campo e $\Delta_p = \omega_p - \omega_{cav}$ a dessintonia prova-cavidade. Todos os cálculos são apresentados no Apêndice A deste trabalho.

Para diagonalizar o hamiltoniano (2.20) e obter os autoestados e as autoenergias do sistema CEIT é mais conveniente reescrever o mesmo na base $\{|1\rangle, |-\rangle, |+\rangle\}$, sendo $|\pm\rangle = (|2\rangle \pm |3\rangle)/\sqrt{2}$. O hamiltoniano nesta nova base possui a forma:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \Delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} - \Delta_p \hat{\sigma}_{11} - 2\Delta_1 (\hat{\sigma}_{++} + \hat{\sigma}_{--}) - \Delta_2 (\hat{\sigma}_{++} + \hat{\sigma}_{+-} + \hat{\sigma}_{-+} + \hat{\sigma}_{--}) \\ & + \frac{g_0}{\sqrt{2}} [(\hat{\sigma}_{+1} - \hat{\sigma}_{-1}) \hat{a} + (\hat{\sigma}_{1+} - \hat{\sigma}_{1-}) \hat{a}^\dagger] + \Omega_c (\hat{\sigma}_{++} - \hat{\sigma}_{--}) + \varepsilon (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para simplificar os cálculos consideramos o caso ressonante $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ e a ausência de bombeio, ou seja, Δ_p e ε nulos, porque o campo de prova é utilizado apenas para injetar energia e viabilizar o monitoramento dos níveis de energia do sistema átomo-campo, sem interferir na configuração dos mesmos. A partir dessas considerações tem-se:

$$\hat{H} = \Delta_+ \sigma_{++} + \frac{g_0}{\sqrt{2}} (\hat{a} \hat{\sigma}_{+1} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{1+}) + \Delta_- \sigma_{--} - \frac{g_0}{\sqrt{2}} (\hat{a} \hat{\sigma}_{-1} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{1-}), \quad (2.22)$$

sendo $\sigma_\pm = |\pm\rangle\langle\pm|$ e $\sigma_{\pm 1} = |\pm\rangle\langle 1|$ os operadores atômicos e $\Delta_\pm = \pm\Omega_c$, conforme descrito por Souza (2013).

Considerando a base total do sistema átomo-campo $\{|1, n\rangle, |+, n-1\rangle, |-, n-1\rangle\}$ para n excitações, podemos reescrever o hamiltoniano total na forma matricial:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \langle 1|\hat{H}|1\rangle & \langle 1|\hat{H}|2\rangle & \langle 1|\hat{H}|3\rangle \\ \langle 2|\hat{H}|1\rangle & \langle 2|\hat{H}|2\rangle & \langle 2|\hat{H}|3\rangle \\ \langle 3|\hat{H}|1\rangle & \langle 3|\hat{H}|2\rangle & \langle 3|\hat{H}|3\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} & -\frac{g_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} \\ \frac{g_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} & \Omega_c & 0 \\ -\frac{g_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} & 0 & -\Omega_c \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Diagonalizando \hat{H} , os autovalores de energia, ou autoenergias, são obtidos a partir do determinante $Det(\hat{H} - E\hat{1}) = 0$, nos fornecendo:

$$E_n^{(-)} = -\sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}, \quad (2.24)$$

$$E_n^{(0)} = 0, \quad (2.25)$$

$$E_n^{(+)} = \sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}. \quad (2.26)$$

Os respectivos autoestados do sistema, também conhecidos como estados vestidos, são obtidos a partir da propriedade de ortonormalidade $\langle \psi_n^{(j)} | \psi_n^{(j)} \rangle = 1$ e pela equação de Schrödinger independente do tempo $(\hat{H} - E_j \hat{1}) | \psi_n^{(j)} \rangle = 0$. Logo,

$$|\Psi_n^{(-)}\rangle = N_n^{(+)} [|1, n\rangle + \alpha_- |+, n-1\rangle - \beta_- |-, n-1\rangle], \quad (2.27)$$

$$|\Psi_n^{(0)}\rangle = N_n^{(0)} [|1, n\rangle - \eta (|+, n-1\rangle + |-, n-1\rangle)], \quad (2.28)$$

$$|\Psi_n^{(+)}\rangle = N_n^{(-)} [|1, n\rangle + \alpha_+ |+, n-1\rangle - \beta_+ |-, n-1\rangle], \quad (2.29)$$

sendo $N_n^{(0)}$ e $N_n^{(\pm)}$ constantes de normalização e η , α_{\pm} e β_{\pm} dados por:

$$\eta = \frac{g_0 \sqrt{n/2}}{\Omega_c}, \quad (2.30)$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{g_0 \sqrt{n/2}}{E^{\pm} - \Omega_c}, \quad (2.31)$$

$$\beta_{\pm} = \frac{g_0 \sqrt{n/2}}{E^{\pm} + \Omega_c}. \quad (2.32)$$

A superposição quântica observada entre os estados atômicos com o estado do campo faz com que não seja mais possível observar qualquer diferença ou separação entre átomo e campo. O que temos agora é um espectro de energia total do sistema átomo-campo. É por isso que os estados desse novo sistema são chamados de estados vestidos, pois o campo “veste” definitivamente o átomo.

Reescrevendo os estados $|\Psi_n^{(0)}\rangle$ (2.28), com autovalores de energia $E_n^{(0)} = 0$, na base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, tem-se que:

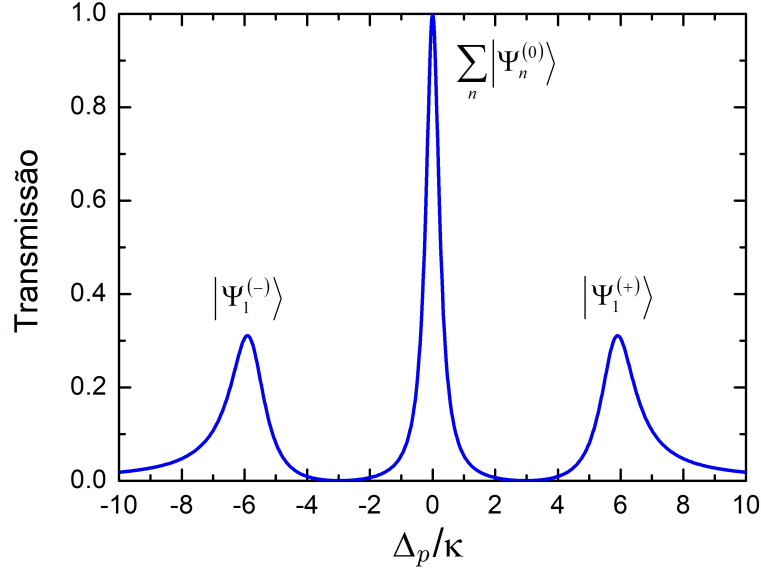
$$|\Psi_n^{(0)}\rangle = N_n^{(0)} \left[|1, n\rangle - \frac{g_0 \sqrt{n}}{\Omega_c} |2, n-1\rangle \right], \quad (2.33)$$

ou seja, estes são formados pela superposição coerente dos estados atômicos fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Como não há nenhuma contribuição do estado atômico excitado $|3\rangle$, não existe probabilidade de absorção ou emissão de fótons quando o sistema estiver no mesmo. Devido a isso, os estados $|\Psi_n^{(0)}\rangle$ são conhecidos como *estados escuros* do sistema átomo-cavidade (*intracavity dark states*) e são responsáveis pela formação de uma janela estreita de 100% de transmissão em $\Delta_p = 0$, como mostrado na figura 2. Adicionalmente, os estados vestidos $|\Psi_n^{(\pm)}\rangle$ com autoenergias $E_n^{(\pm)}$ representam o compartilhamento de n excitações entre o átomo e o campo da cavidade e são conhecidos usualmente como estados brilhantes (SOUZA et al., 2013). Na figura 2 apresentamos os estados simétricos de compartilhamento de um único fóton $|\Psi_1^{(\pm)}\rangle$.

2.3 Formalismo da Equação Mestra

O formalismo da equação mestra é amplamente utilizado para descrever a dinâmica de sistemas quânticos abertos, ou seja, aqueles que apresentam efeitos de dissipações causados pelo acoplamento com o meio, como a emissão espontânea do átomo, sua defasagem e o decaimento de cavidade (GRYNBERG et al., 2010; SCULLY; ZUBAIRY, 1997).

Figura 2 – Espectro de transmissão normalizado $\langle a^\dagger a \rangle / (\varepsilon/\kappa)^2$ do sistema CEIT em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ utilizando os parâmetros $g_0 = 5,0$, $\kappa, \varepsilon = 0,01$, $\kappa, \Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,6$ e $\Omega_C = 2g_0/3$. A janela de 100% de transmissão é formada pelos estados escuros $\sum_n |\Psi_n^{(0)}\rangle$ e os dois picos simétricos $|\Psi_1^{(\pm)}\rangle$ são os estados brilhantes referentes à transição de um único fóton.



Fonte: Elaborada pela autora.

A dinâmica do sistema átomo-cavidade com bombeio estudado neste trabalho foi obtida numericamente resolvendo-se a equação mestra para o operador densidade ρ correspondente,

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i [\hat{H}, \hat{\rho}] + \kappa (2a\hat{\rho}a^\dagger - a^\dagger a\hat{\rho} - \hat{\rho}a^\dagger a) \\ & \Gamma_{31} (2\hat{\sigma}_{13}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{33}\hat{\rho} - \rho\hat{\sigma}_{33}) + \Gamma_{32} (2\hat{\sigma}_{23}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{33}\hat{\rho} - \rho\hat{\sigma}_{33}) \\ & + \gamma_2 (2\hat{\sigma}_{22}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{22}\hat{\rho} - \rho\hat{\sigma}_{22}) + \gamma_3 (2\hat{\sigma}_{33}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{33}\hat{\rho} - \rho\hat{\sigma}_{33}), \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que o primeiro termo fornece a evolução coerente do sistema e os demais termos o acoplamento com o meio, sendo κ a taxa de decaimento da cavidade, Γ_{31} e Γ_{32} as taxas de decaimento do nível excitado $|3\rangle$ para os níveis $|1\rangle$ e $|2\rangle$, respectivamente, e γ_2 e γ_3 as defasagens, consideradas para incluir as taxas de decaimento atômico não radioativo, devido às várias interferências e ruídos observados experimentalmente.

3 Memória Quântica

Uma memória quântica é um dispositivo fundamental que pode armazenar um único fóton e recriar o estado quântico correspondente após um intervalo de tempo, preservando as características quânticas relevantes do mesmo. Ou seja, este dispositivo tem a função de armazenar e recuperar informações quânticas. A implementação deste dispositivo pode permitir o desenvolvimento de grandes sistemas de processamento quântico com a capacidade de manipular, armazenar informações temporariamente (*buffering*) e reprogramar coerentemente sinais fotônicos. A habilidade de memórias quânticas de sincronizar eventos probabilísticos a torna um componente essencial em repetidores quânticos e computação quântica baseada em óptica linear. Esta característica tem motivado vários grupos dedicados à pesquisa experimental e teórica a desenvolver dispositivos e protocolos para memórias ópticas quânticas com alta fidelidade e eficiência, longos tempos de armazenamento e capacidades multiplex¹, especialmente no nível de fótons individuais (NIELSEN; CHUANG, 2003; LUKIN, 2003; LVOVSKY; SANDERS; TITTEL, 2010; HESHAMI et al., 2016; LEI et al., 2023; JING et al., 2024).

Em relação ao sistema físico, a luz é ideal para o transporte de informação em meios transparentes devido à sua alta velocidade e por não interagir com outros fótons no vácuo. Já os átomos ou íons apresentam características opostas, podendo interagir com facilidade com outros átomos e serem mantidos em estados coerentes através de armadilhas eletromagnéticas (RAAB et al., 1987; STEANE; CHOWDHURY; FOOT, 1992). Dessa forma, os átomos podem ser utilizados para o armazenamento e os fótons para a transmissão de dados.

Outra propriedade importante a ser avaliada para a implementação de uma memória quântica é a sua eficiência. Esta é determinada tanto por fatores técnicos de experimentação quanto pela eficiência de armazenamento e é definida pela fração da energia dos fótons do pulso recuperado, após o armazenamento, normalizada pela energia do pulso de entrada. A perda de eficiência inclui, por exemplo, absorção não desejada, dispersão da luz e outros mecanismos dissipativos que podem reduzir a quantidade de informação que é preservada durante o armazenamento (LEI et al., 2022).

Atualmente, diversos protocolos e materiais estão sendo explorados na busca de memórias quânticas com maior eficiência de armazenamento, como em supercondutores, em que é possível atingir eficiências de até 70% (MATANIN et al., 2023), em átomos frios, com eficiências de até 87% (CHO et al., 2016; VERNAZ-GRIS et al., 2018) e em materiais sólidos 69% (HEDGES et al., 2010). No regime de armazenamento clássico já foi

¹ Multiplex é o processo de combinar dois ou mais canais de informação em um único meio de transmissão.

demonstrada a possibilidade de obtenção de eficiência de armazenamento de mais de 90% para uma memória óptica coerente utilizando EIT em atômicos frios (HSIAO et al., 2018).

Os protocolos de memória mencionados são estabelecidos usualmente em sistemas com muitos átomos. Neste trabalho analisamos teoricamente o protocolo de implementação de uma memória quântica fundamental, em que é considerada a interface entre um único quanta de luz e de matéria no interior de uma cavidade óptica, através do fenômeno da EIT, ou seja, no sistema CEIT. O armazenamento fiel de um bit quântico (*qubit*) de luz neste sistema foi demonstrado experimentalmente por Specht e colaboradores em 2011. Eles mediram uma eficiência de $(9,3 \pm 1)\%$. A incerteza na medida é devido à flutuações nos parâmetros do sistema, como a posição do átomo no interior da cavidade. Essa mudança da posição do átomo faz com que o acoplamento átomo-campo varie, de maneira que este parâmetro é um limitante para obtenção de altas eficiências. Contudo, isso pode ser minimizado experimentalmente melhorando-se o armadilhamento do átomo ou diminuindo o volume da cavidade (SPECHT et al., 2011).

Em nossas simulações computacionais não foi considerado nenhum tipo de variação instantânea no acoplamento átomo-campo g_0 do sistema. As propriedades da memória foram calculadas para g_0 constante, de maneira que a eficiência da mesma foi obtida para diferentes valores de g_0 . O hardware da memória quântica CEIT em nosso modelo é composto por um único átomo de três níveis em configuração Λ e seu princípio de funcionamento depende da janela de transmissão do sistema CEIT.

Para simularmos o fóton que será armazenado na memória CEIT consideramos um pulso coerente fraco do campo de prova, ou de bombeio, com dependência temporal Gaussiana na forma (OLIVEIRA et al., 2018):

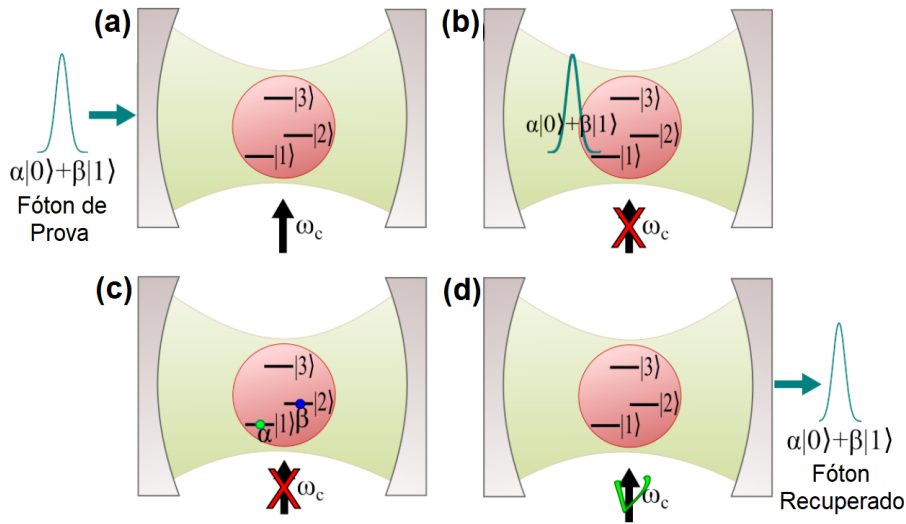
$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_M}{\sqrt{\beta\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\beta^2}}, \quad (3.1)$$

sendo ε_M o valor máximo da força do pulso de prova no tempo t_0 , β o desvio padrão, relacionado com o comprimento temporal do pulso, e o comprimento de meia altura (FWHM - *Full Width at Half Maximum*) dado por $\text{FWHM} = 2\beta\sqrt{2\ln(2)}$. O pulso coerente precisa ser fraco para evitar que transições de dois ou mais fótons sejam excitadas. A proposta é armazenar um único fóton no sistema CEIT, ou seja, acessaremos apenas os estados $|\Psi_1^{(\pm)}\rangle$ apresentados no espectro de transmissão da figura 2.

Para a implementação da memória quântica CEIT o átomo deve ser preparado no estado fundamental $|1\rangle_{at}$ e a cavidade no estado de Fock $|0\rangle_{cav}$. Quando a cavidade for bombeada pelo campo de prova contendo um único fóton, equação (3.1), o estado escuro da cavidade será dado pelo produto tensorial $|1\rangle_{at} \otimes |1\rangle_{cav}$. Se o campo de controle estiver ligado, o pulso de prova não pode ser absorvido pelo sistema átomo-campo para $\Delta_p = 0$, uma vez que o mesmo está no estado escuro $|\Psi_1^{(0)}\rangle$. Contudo, se o campo de prova for desligado adiabaticamente, mantendo o sistema no estado escuro, o pulso de prova

pode ser absorvido e o estado escuro do sistema torna-se $|2\rangle_{at} \otimes |0\rangle_{cav}$, ou seja, o fóton é armazenado no átomo, conforme equação (2.33) para $n = 1$. Para recuperar o fóton, o campo precisa ser ligado adiabaticamente (OLIVEIRA et al., 2018). Todo o processo é ilustrado na figura 3.

Figura 3 – Ilustração do processo de armazenamento de um único fóton na memória CEIT. Em (a) mostramos o pulso de prova gaussiano contendo no máximo um fóton, $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, entrando na cavidade, cujo campo acopla a transição $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. A cavidade é preparada no estado $|0\rangle_{cav}$ e o átomo no estado $|1\rangle_{at}$, com o campo de controle, de frequência ω_c , acoplado a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. (b) O campo de controle é desligado adiabaticamente, mantendo o sistema átomo-campo no estado escuro $|\Psi_1^{(0)}\rangle$. (c) O átomo absorve o fóton de prova. (d) O campo de controle é ligado adiabaticamente e o átomo emite coerentemente o fóton, preservando o seu estado inicial.



Fonte: Figura adaptada de Oliveira (p.24, 2015).

Para ligar e desligar o campo de controle adiabaticamente consideramos uma dependência temporal na frequência de Rabi do mesmo, ou seja, fizemos $\Omega_C = \Omega_C(t)$ no hamiltoniano total do sistema (2.20). A eficiência da memória quântica depende da função temporal utilizada para realizar o ligamento e o desligamento do campo de controle. Neste trabalho utilizamos o protocolo estabelecido por Oliveira e colaboradores (2018), dado por:

$$\Omega_C(t) = \frac{\Omega_{CM}}{2} \left\{ \left[1 - \tanh\left(\zeta_1(t - t_1)\right) \right] + \left[1 + \tanh\left(\zeta_2(t - t_2)\right) \right] \right\}, \quad (3.2)$$

em que $\zeta_1(\zeta_2)$ fornece a rampa para desligar (ligar) o campo de controle no tempo $t_1(t_2)$.

Para que a memória possa ser implementada no sistema CEIT, este procedimento é fundamental, uma vez que energia e informação podem ser perdidas devido à excitação de estados de maior energia (REISERER; REMPE, 2015).

4 Resultados

Nossos resultados foram obtidos numericamente utilizando um programa próprio fornecido pelo Grupo de Óptica Quântica e Ensino de Ciências (GOQEC) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), *campus* Sorocaba. Este foi escrito na linguagem MATLAB.

A equação mestra foi resolvida truncando-se o espaço de Hilbert do modo quântico da cavidade em $N_{EH} = 3$ fótons. Isso é justificado porque trabalhamos com no máximo um fóton no pulso de prova, considerando $\varepsilon_M = 0,01 \kappa$. Todos os parâmetros do sistema foram normalizados em relação à taxa de decaimento da cavidade $\kappa/2\pi = 2,5$ MHz (REISERER; REMPE, 2015).

Para obter a máxima performance da memória consideramos perfeita ressonância entre os campos da cavidade e de controle com o átomo em todas as simulações, ou seja, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. O máximo valor da frequência de Rabi do campo de controle foi ajustada em $\Omega_{CM} = 2g_0/3$, conforme demonstrado por Oliveira (OLIVEIRA, 2015). O comprimento de meia altura do pulso foi fixado em FWHM = $1,0 \mu s$ e as taxas de decaimento atômico em $\Gamma_{31} \equiv \Gamma_{32} = 0,6 \kappa$.

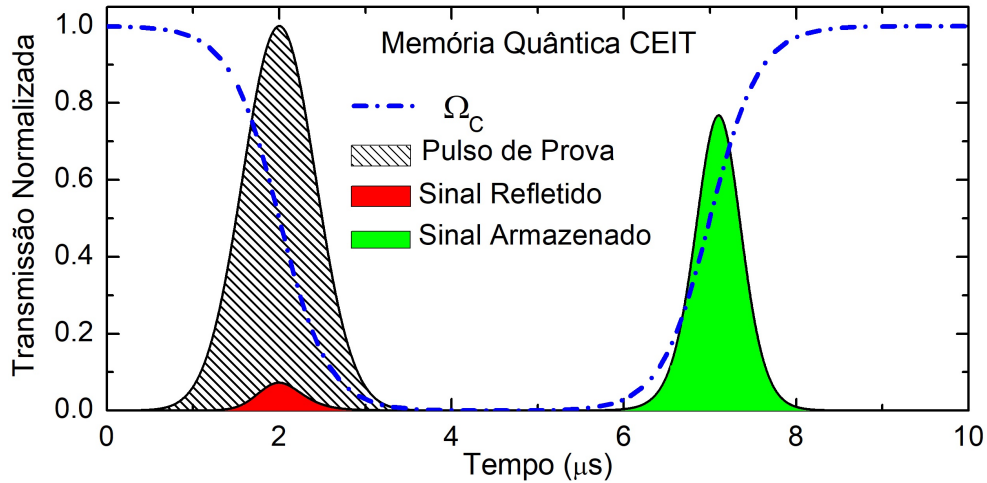
Para verificar o processo de memória no sistema CEIT, mostramos na figura 4 a transmissão normalizada da cavidade $\langle a^\dagger a \rangle / (\varepsilon/\kappa)^2$ em função do tempo para $g_0 = 2,0 \kappa$. Note que o valor máximo do pulso de prova ε_M é fixado em $t_0 = 2,0 \mu s$, conforme equação (3.1). Este é representado pela gaussiana hachurada. O campo de controle é desligado em torno de $t_1 = t_0$ e religado em torno de $t_2 = 7,0 \mu s$ a uma taxa de $\zeta_1 = \zeta_2 = 1,75$ MHz, conforme a curva tracejada-pontilhada azul. Quando o campo de controle é religado adiabaticamente, um fóton é produzido (área verde), mesmo na ausência de bombeio na cavidade ($\varepsilon = 0$). Isso nos permite concluir que o fóton de entrada foi armazenado no sistema átomo-campo, quando o mesmo está no estado de superposição descrito pelo estado escuro para $\Delta_p = 0$. A fração de informação perdida durante o processo de armazenamento é representada pela gaussiana menor, com área vermelha.

A eficiência η de armazenamento da memória CEIT foi calculada como sendo a fração do fóton recuperado após o armazenamento, dado pela transmissão $\langle a_{out}^\dagger a_{out} \rangle / (\varepsilon/\kappa)^2$, normalizado pelo pulso de prova, que representa o fóton de entrada, com transmissão $\langle a_{in}^\dagger a_{in} \rangle / (\varepsilon/\kappa)^2$ para $g_0 = 0$, ou seja,

$$\eta = \frac{\int \langle a_{out}^\dagger a_{out} \rangle}{\int \langle a_{in}^\dagger a_{in} \rangle}. \quad (4.1)$$

O intervalo de integração para obtenção da área que representa o pulso de prova vai de $t = 0$ a $4 \mu s$, e para o fóton recuperado de $t = 5$ a $9 \mu s$, conforme figura 4.

Figura 4 – Transmissão da cavidade normalizada em função do tempo para verificar o processo de memória quântica no sistema CEIT. Os parâmetros utilizados foram $g_0 = 2,0 \kappa$, $\varepsilon = \sqrt{0,01} \kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,6 \kappa$ e $\Omega_C = 2g_0/3$, FWHM = $1,0 \mu s$, $t_0 = t_1 = 2,0 \mu s$, $t_2 = 7,0 \mu s$ e $\zeta_1 = \zeta_2 = 1,75$ MHz. A gaussiana hachurada representa o pulso de prova, a vermelha com menor área é o sinal refletido e a gaussiana verde, com valor máximo intermediário, representa o fóton recuperado após o processo de armazenamento. A curva azul tracejada-pontilhada mostra as rampas de desligamento e religamento da frequência de Rabi Ω_C do campo de controle. A eficiência de armazenamento desta memória é de 71,4%.

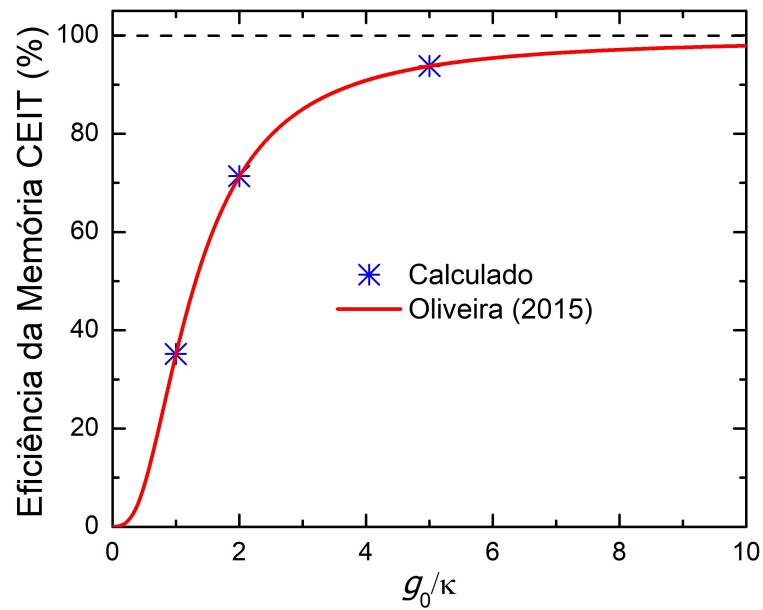


Fonte: Elaborada pela autora.

O processo de memória foi calculado para mais dois valores do acoplamento átomo-campo, $g_0 = 1,0$ e $5,0 \kappa$. Os valores correspondentes da eficiência de armazenamento foram de $\eta = 35,2\%$ e $93,8\%$, respectivamente. Dessa forma, é possível notar que a eficiência da memória CEIT aumenta à medida que g_0 aumenta. Isso é esperado, pois este parâmetro fornece a taxa com que um único fóton é absorvido ou emitido pelo átomo, de maneira que se g_0 for maior do que qualquer outra taxa do sistema, como Γ e κ , é possível verificar dinâmicas em um regime cuja descrição é completamente quântica (SOUZA, 2013).

Na figura 5 apresentamos os três valores de eficiência obtidos em função de g_0 em comparação com o resultado obtido por Oliveira (2015) para vários valores de g_0 , mostrando perfeito acordo entre os resultados. Note que à medida que g_0 aumenta, o valor da eficiência da memória quântica CEIT fundamental tende a 100%. Oliveira mostrou que para $g_0 = 20,0 \kappa$ a memória CEIT pode atingir uma eficiência de 99%. Ou seja, para que a eficiência desse sistema seja de 100%, o mesmo deve ser preparado em um regime de acoplamento muito forte $g_0 \gg (\Gamma, \kappa)$.

Figura 5 – Eficiência da memória CEIT em função do acoplamento átomo-campo normalizado g_0/κ . Os parâmetros utilizados para o cálculo das eficiências para os valores de $g_0 = 1,0; 2,0$ e $5,0 \kappa$, (asteriscos azuis) foram os mesmos utilizados para obtenção do resultado apresentado na figura 4. A curva sólida vermelha foi obtida por Oliveira (2015) para vários valores de g_0 .



Fonte: Elaborada pela autora.

5 Conclusões

Neste trabalho analisamos teoricamente a influência do acoplamento átomo-campo g_0 na observação do processo de armazenamento e recuperação de informação de uma memória quântica fundamental baseada no fenômeno de EIT em cavidades ópticas (CEIT). O sistema CEIT considerado consiste de um único átomo de três níveis em configuração Λ acoplado a um único modo do campo quântico de uma cavidade óptica, interagindo com dois campos clássicos externos (lasers), o campo de prova, que representa o fóton de entrada, e o campo de controle.

Quando o fóton, modelado por um pulso gaussiano, é injetado ressonantemente na cavidade este pode ser totalmente, parcialmente ou não ser absorvido pelo sistema CEIT, dependendo da dessintonia entre o fóton e o campo quântico da cavidade Δ_p . Para $\Delta_p = 0$ mostramos que o sistema está em um estado de superposição descrito pelos níveis fundamentais do átomo, conhecido como estado escuro. Neste estado o fóton é completamente transmitido pela cavidade, pois o mesmo não interage com o átomo. Contudo, se o campo de controle for adiabaticamente desligado, o sistema CEIT absorve o fóton preservando o seu estado. Quando o campo de controle é religado nas mesmas condições, um fóton é produzido no modo da cavidade, ou seja, o fóton de entrada é recuperado. Mostramos que quanto maior for o valor de g_0 , maior é a eficiência de armazenamento e recuperação do fóton. A cavidade óptica exerce um papel fundamental neste processo, pois ela permite que a interação entre o átomo e o fóton individual seja mais efetiva.

O estudo de sistemas abertos para o controle de átomos e fótons individuais é de grande importância para a transmissão e processamento de informação a nível quântico. O processo de memória que analisamos é fundamental para a computação quântica e também essencial para o desenvolvimento de repetidores quânticos, metrologia, detecção e emissão de fótons individuais, além de possibilitar a exploração de aspectos fundamentais da mecânica quântica. Experimentalmente, já foi possível verificar a eficácia e o potencial de sistemas como o que estudamos neste trabalho para a geração de fótons isolados, para a implementação de portas lógicas quânticas e em outras aplicações que são essenciais para o avanço da tecnologia quântica (REISERER; REMPE, 2015).

Referências

- AFZELIUS, M. et al. Multimode quantum memory based on atomic frequency combs. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 79, p. 052329, May 2009. 13
- BACHOR, H.-A.; RALPH, T. A guide to experiments in quantum optics, 2nd, revised and enlarged edition. 03 2004. 12
- CHANELIÈRE, T. et al. Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 438, n. 7069, p. 833–836, dez. 2005. 13
- CHO, Y.-W. et al. Highly efficient optical quantum memory with long coherence time in cold atoms. *Optica*, v. 3, n. 1, p. 100–107, 2016. 22
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 1991. 914 p. (Quantum Mechanics, Vol. 1). 12
- DUAN, L.-M. et al. Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 414, n. 6862, p. 413–418, nov. 2001. 13
- EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física quântica*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1979. 12, 14
- FLEISCHHAUER, M.; IMAMOGLU, A.; MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 77, Jul 2005. 13
- FLEISCHHAUER, M.; IMAMOGLU, A.; MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 77, p. 633–673, Jul 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.633>>. 15
- GLAUBER, R. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, v. 130, p. 2529, 06 1963. 12
- GRYNBERG, G. et al. *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. 17, 20
- HARRIS, S. E. Electromagnetically induced transparency. *Physics Today*, v. 50, n. 7, p. 36–42, jul. 1997. 13, 14
- HEDGES, M. P. et al. Efficient quantum memory for light. *Nature*, v. 465, n. 7301, p. 1052–1056, 2010. 22
- HESHAMI, K. et al. Quantum memories: emerging applications and recent advances. *Journal of Modern Optics*, v. 63, n. 20, p. 2005–2028, 2016. 22
- HIGGINBOTTOM, D. B. et al. Spatial-mode storage in a gradient-echo memory. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 86, p. 023801, Aug 2012. 13

- HSIAO, Y.-F. et al. Highly efficient coherent optical memory based on electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 120, n. 18, maio 2018. 23
- JAYNES, E.; CUMMINGS, F. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/proc.1963.1664>>. Acesso em: 20 de Novembro de 2019. 18
- JING, B. et al. Approaching scalable quantum memory with integrated atomic devices. *Applied Physics Reviews*, v. 11, n. 031304, 2024. 13, 22
- KIMBLE, H. J.; DAGENAIS, M.; MANDEL, L. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 39, p. 691–695, Sep 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.39.691>>. 12
- KOBE, D. H. Gauge transformations and the electric dipole approximation. *American Journal of Physics*, v. 50, n. 2, p. 128–133, 1982. 17
- LEI, X. et al. Electromagnetically induced transparency quantum memory for non-classical states of light. *Advances in Physics: X*, v. 7, n. 1, p. 2060133, 2022. 22
- LEI, Y. et al. Quantum optical memory for entanglement distribution. *Optica*, v. 10, n. 11, p. 1511–1528, 2023. 13, 22
- LIU, C. et al. Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses. *Nature*, v. 409, n. 6819, p. 490–493, 2001. 13
- LUKIN, M. D. Colloquium: Trapping and manipulating photon states in atomic ensembles. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 75, p. 457–472, Apr 2003. 22
- LVOVSKY, A. I.; SANDERS, B. C.; TITTEL, W. *Optical quantum memory*. 2010. 22
- MATANIN, A. R. et al. Toward highly efficient multimode superconducting quantum memory. *Physical Review Applied*, v. 19, n. 3, p. 034011, 2023. 22
- NIELSEN, M.; CHUANG, I. *Computação quântica e informação quântica*. [S.l.]: Bookman, 2003. 22
- NIU, Y. et al. Giant kerr nonlinearity induced by interacting dark resonances. *Opt. Lett.*, Optica Publishing Group, v. 30, n. 24, p. 3371–3373, Dec 2005. 13
- OLIVEIRA, R. R. *Quantum memory based on electromagnetically induced transparency in optical cavities*. Dissertação (Mestre em Física) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015. 25
- OLIVEIRA, R. R. et al. A multitasking device based on electromagnetically induced transparency in optical cavities. *Quantum Information Processing*, v. 17, n. 311, p. 1–17, 2018. 23, 24
- PHILLIPS, D. F. et al. Storage of light in atomic vapor. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 86, p. 783–786, Jan 2001. 13
- RAAB, E. L. et al. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 59, p. 2631–2634, Dec 1987. 22

- REISERER, A.; REMPE, G. Cavity-based quantum networks with single atoms and optical photons. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 87, n. 4, p. 1379–1418, dez. 2015. 24, 25, 28
- SCULLY, M.; ZUBAIRY, M. *Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. (Quantum Optics). 13, 16, 17, 20
- SOUZA, J. A. d. *Controle das propriedades estatísticas do campo e biestabilidade óptica em eletrodinâmica quântica de cavidades*. Tese (Doutorado em física) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Abril 2013. 14, 16, 19, 26
- SOUZA, J. A. de et al. Coherent control of quantum fluctuations using cavity electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 111, n. 5, p. 112, 2013. 14, 15, 16, 18, 20
- SPECHT, H. P. et al. A single-atom quantum memory. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 473, n. 7346, p. 190–193, maio 2011. 23
- STEANE, A. M.; CHOWDHURY, M.; FOOT, C. J. Radiation force in the magneto-optical trap. *J. Opt. Soc. Am. B*, Optica Publishing Group, v. 9, n. 12, p. 2142–2158, Dec 1992. 22
- SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 10, p. 277–279, 1963. 12
- VERNAZ-GRIS, P. et al. Highly-efficient quantum memory for polarization qubits in a spatially-multiplexed cold atomic ensemble. *Nature*, v. 9, n. 1, p. 1–6, 2018. 22
- ZUBAIRY, M. S. *Quantum Mechanics for Beginners with applications to quantum communication and quantum computing*. [S.l.]: Oxford University Press, 2020. 12

Apêndices

APÊNDICE A – Obtenção do Hamiltoniano do sistema CEIT

O hamiltoniano de Jaynes-Cummings com bombeio que descreve a interação átomo-campo do sistema CEIT é dado por:

$$\hat{H} = \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33} + (g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \varepsilon\hat{a}e^{i\omega_p t} + h.c.). \quad (\text{A.1})$$

Este é obtido através das aproximações de dipolo elétrico e de onda girante (RWA).

Podemos escrever o hamiltoniano (A.1) separadamente na forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (\text{A.2})$$

em que o primeiro termo descreve o modo quântico do campo da cavidade e o átomo individualmente, $\hat{H}_0 = \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33}$, e o segundo termo a interação átomo-campo, $\hat{H}_{int} = g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \varepsilon\hat{a}e^{i\omega_p t} + h.c.$

Para eliminar a dependência temporal de (A.1) é necessário fazer uma transformação unitária da representação de Schrödinger para a representação de Dirac através da aplicação do seguinte operador unitário no hamiltoniano,

$$\hat{U}_0^\dagger(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}, \quad (\text{A.3})$$

de maneira que o hamiltoniano na representação de Dirac (\hat{H}') é dado por:

$$\hat{H}' = \hat{U}_0^\dagger\hat{H}\hat{U}_0 = \hat{U}_0^\dagger(\hat{H}_0 + \hat{H}_{int})\hat{U}_0 \quad (\text{A.4})$$

Para calcular o termo da interação $\hat{U}_0^\dagger\hat{H}_{int}\hat{U}_0$ utiliza-se a relação de Campbell-Baker-Hausdorff descrita por:

$$e^{\hat{B}}\hat{A}e^{-\hat{B}} = \hat{A} + [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!}[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \frac{1}{3!}[\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + \dots \quad (\text{A.5})$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\hat{H}'_{int} = \hat{U}_0^\dagger\hat{H}_{int}\hat{U}_0 = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}\hat{H}_{int}e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}, \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{H}'_{int}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} [g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \varepsilon\hat{a}e^{i\omega_p t} + h.c.] e^{-i\hat{H}_0 t}, \quad (\text{A.7})$$

Considerando $t_0 = 0$ e substituindo \hat{H}_0 e \hat{H}_{int} definidos no início dessa seção e considerando os três primeiros termos da equação separadamente, tem-se:

$$(I) = e^{i(\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} (g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31}) e^{-i(\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} \quad (A.8)$$

$$(II) = e^{i(\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} \left(\Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i\omega_c t} \right) e^{-i(\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} \quad (A.9)$$

$$(III) = e^{i(\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} \left(\varepsilon \hat{a} e^{i\omega_p t} \right) e^{-i(\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} \quad (A.10)$$

As equações (A.8), (A.9) e (A.10) podem ser reescritas separando-se os operadores do átomo e do campo. A equação (A.8) fica na forma:

$$(I) = g_0 \left[e^{i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} (\hat{\sigma}_{31}) e^{-i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} \right] \left[e^{i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t} (\hat{a}) e^{-i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t} \right] \quad (A.11)$$

Expandindo cada termo da relação de Campbell-Baker-Hausdorff para a equação (A.11), obtemos o operador atômico σ_{31} :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{31} &= (i\omega_{31}t)^0 \hat{\sigma}_{31}, \\ [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{31}] &= (i\omega_{31}t)^1 \hat{\sigma}_{31}, \\ [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{31}]] &= (i\omega_{31}t)^2 \hat{\sigma}_{31}, \\ [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \dots [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{31}]] &= (i\omega_{31}t)^n \hat{\sigma}_{31}, \end{aligned}$$

Utilizando o comutador $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, temos para o operador do campo da cavidade \hat{a} :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= (-i\omega_{cav}t)^0 \hat{a}, \\ [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, \hat{a}] &= (-i\omega_{cav}t)^1 \hat{a}, \\ [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, \hat{a}]] &= (-i\omega_{cav}t)^2 \hat{a}, \\ [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, \dots [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, \hat{a}]] &= (-i\omega_{cav}t)^n \hat{a}. \end{aligned}$$

Pelas relações obtidas anteriormente, podemos reescrever a equação (A.8) na forma:

$$(I) = g_0 \left[\hat{\sigma}_{31} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega_{31}t)^n}{n!} \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega_{cav}t)^n}{n!} \right]$$

$$(I) = g_0 \hat{\sigma}_{31} e^{i\omega_{31}t} \hat{a} e^{-i\omega_{cav}t} = g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} e^{i(\omega_{31}-\omega_{cav})t} \quad (A.12)$$

Tomando o hermitiano conjugado de (A.12), obtemos:

$$(I)^\dagger = g_0^* \hat{\sigma}_{13} \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_{31}-\omega_{cav})t} \quad (A.13)$$

Reescrevendo a equação (II) dada por (A.9):

$$(II) = \Omega_c e^{i\omega_c t} \left[e^{i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} (\hat{\sigma}_{32}) e^{-i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22}+\omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} \right] \quad (A.14)$$

Repetindo os mesmos procedimentos anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{32} &= [i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^0 \hat{\sigma}_{32} \\ [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{32}] &= [i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^1 \hat{\sigma}_{32} \\ [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{32}]] &= [i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^2 \hat{\sigma}_{32} \\ [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \dots [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{32}]] &= [i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^n \hat{\sigma}_{32},\end{aligned}$$

o que fornece:

$$(II) = \Omega_c e^{i\omega_c t} \left[\hat{\sigma}_{32} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^n}{n!} \right] = \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i(\omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c)t}, \quad (A.15)$$

$$(II)^\dagger = \Omega^* \hat{\sigma}_{23} e^{-i(\omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c)t}. \quad (A.16)$$

Considerando o termo (III), dado por (A.10):

$$(III) = \varepsilon e^{i\omega_p t} \left[e^{i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger \hat{a}t} (\hat{a}) e^{-i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger \hat{a}t} \right], \quad (A.17)$$

e o comutador $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= (-i\omega_{cav}t)^0 \hat{a} \\ [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger \hat{a}t, \hat{a}] &= (-i\omega_{cav}t)^1 \hat{a} \\ [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger \hat{a}t, [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger \hat{a}t, \hat{a}]] &= (-i\omega_{cav}t)^2 \hat{a} \\ [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger \hat{a}t, \dots [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger \hat{a}t, \hat{a}]] &= (-i\omega_{cav}t)^n \hat{a},\end{aligned}$$

fornecendo:

$$(III) = \varepsilon e^{i\omega_p t} \left[\hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega_{cav}t)^n}{n!} \right] = \varepsilon \hat{a} e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t}, \quad (A.18)$$

$$(III)^\dagger = \varepsilon^* \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_p - \omega_{cav})t}. \quad (A.19)$$

Considerando todos os termos obtidos, a equação (A.1) na representação de Dirac pode ser escrita como:

$$\hat{H}'_{int}(t) = g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i(\omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c)t} + \varepsilon \hat{a} e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t} + h.c. \quad (A.20)$$

A.1 Hamiltoniano do sistema CEIT independente do tempo

Para obtenção do hamiltoniano total independente do tempo é necessário realizar mais uma transformação unitária na equação (A.20), aplicando o operador unitário $\hat{U}_1 = e^{i\hat{A}t}$, sendo \hat{A} um operador que relaciona o hamiltoniano do átomo e do campo da cavidade na forma:

$$\hat{A} = \Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}. \quad (A.21)$$

de modo que a parte de interação do hamiltoniano do sistema é dado por,

$$\hat{H} = \hat{U}_1 \hat{H}' \hat{U}_1 = e^{i\hat{A}t} \hat{H}' e^{-i\hat{A}t} \quad (\text{A.22})$$

Considerando novamente os três primeiros termos da equação separadamente, temos:

$$(I) = e^{i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} (g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t}) e^{-i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t}, \quad (\text{A.23})$$

$$(II) = e^{i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} (\Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i(\omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c)t}) e^{-i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t}, \quad (\text{A.24})$$

$$(III) = e^{i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} (\varepsilon \hat{a} e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t}) e^{-i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t}. \quad (\text{A.25})$$

Expandindo cada termo da relação de Campbell-Baker-Hausdorff para (A.23), temos:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{31} &= (\Delta_\delta - \Delta_\beta)^0 \hat{\sigma}_{31} \\ [(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \hat{\sigma}_{31}] &= (\Delta_\delta - \Delta_\beta)^1 \hat{\sigma}_{31} \\ [(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \dots [(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \hat{\sigma}_{31}]] &= (\Delta_\delta - \Delta_\beta)^n \hat{\sigma}_{31} \end{aligned}$$

Utilizando o comutador $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$,

$$\begin{aligned} \hat{a} &= (-\Delta_\alpha)^0 \hat{a} \\ [\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] &= (-\Delta_\alpha)^1 \hat{a} \\ [\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}, \dots [\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}]] &= (-\Delta_\alpha)^n \hat{a}. \end{aligned}$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, temos para (I), com seus respectivos conjugados hermitianos:

$$\begin{aligned} (I) &= g_0 e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t} \left[\hat{\sigma}_{31} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(\Delta_\delta - \Delta_\beta)t)^n}{n!} \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\Delta_\alpha t)^n}{n!} \right] \\ (I) &= g_0 e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t} \hat{\sigma}_{31} e^{i(\Delta_\delta - \Delta_\beta)t} \hat{a} e^{-i\Delta_\alpha t} \\ (I) &= g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav} + \Delta_\delta - \Delta_\beta + \Delta_\alpha)t} \\ (I)^\dagger &= g_0^* \hat{\sigma}_{13} \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_{31} - \omega_{cav} + \Delta_\delta - \Delta_\beta + \Delta_\alpha)t} \end{aligned}$$

De maneira similar para (II), dado por (A.24), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{32} &= (\Delta_\delta - \Delta_\gamma)^0 \hat{\sigma}_{32}, \\ [(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \hat{\sigma}_{32}] &= (\Delta_\delta - \Delta_\gamma)^1 \hat{\sigma}_{32} \\ [(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \dots [(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \hat{\sigma}_{32}]] &= (\Delta_\delta - \Delta_\gamma)^n \hat{\sigma}_{32} \end{aligned}$$

o que fornece:

$$\begin{aligned}
 (II) &= \Omega_c e^{i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c)t} \left[\hat{\sigma}_{32} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(\Delta_\delta - \Delta_\gamma)t)^n}{n!} \right] \\
 (II) &= \Omega_c e^{i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c)t} \sigma_{32} e^{i(\Delta_\delta - \Delta_\gamma)t} \\
 (II) &= \Omega_c \sigma_{32} e^{i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c+\Delta_\delta - \Delta_\gamma)t} \\
 (II)^\dagger &= \Omega_c^* \sigma_{23} e^{-i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c+\Delta_\delta - \Delta_\gamma)t}
 \end{aligned}$$

Para (III), dado por (A.25), obtemos:

$$\begin{aligned}
 (III) &= \varepsilon e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t} \left[e^{i\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a}) e^{-i\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right] \\
 (III) &= \varepsilon e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t} \left[\hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\Delta_\alpha t)^n}{n!} \right] \\
 (III) &= \varepsilon \hat{a} e^{i(\omega_p - \omega_{cav} - \Delta_\alpha)t} \\
 (III)^\dagger &= \varepsilon^* \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_p - \omega_{cav} - \Delta_\alpha)t}
 \end{aligned}$$

Aplicando a condição $e^{i\Delta_j t} = 1$ para eliminar a dependência temporal de (I), (II) e (III), obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \omega_{31} - \omega_{cav} + \Delta_\delta - \Delta_\beta + \Delta_\alpha = 0 \\ \omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c + \Delta_\delta - \Delta_\gamma = 0 \\ \omega_p - \omega_{cav} + \Delta_\alpha = 0 \end{cases} \quad (A.26)$$

O sistema linear (A.26) possui uma possível solução da forma:

$$\begin{aligned}
 -\Delta_\alpha &= \Delta_\beta = \omega_p - \omega_{cav} \\
 \Delta_\delta &= \omega_{31} - \omega_{cav} \\
 \Delta_\gamma - \Delta_\delta &= \omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c
 \end{aligned} \quad (A.27)$$

Partindo das relações (A.27) obtemos o hamiltoniano independente do tempo com bombeio do sistema átomo-campo estudado neste trabalho:

$$\hat{H} = \Delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} - \Delta_p \hat{\sigma}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} + (g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \varepsilon \hat{a} + \text{h.c.}). \quad (A.28)$$