UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇãO EM MATEMÁTICA

Introdução às Infinito-Categorias

Marina Maria de Miguel

São Carlos-SP
Abril de 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Introdução às Infinito-Categorias

Marina Maria de Miguel

Orientador: Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Março de 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinatura dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do(a) candidato(a) Marina Maria de Miguel, realizada em 26/04/2025:

Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino
UFSCar

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior
UFSCar

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
UNESP

Dedico este trabalho
a Laide e ao Marcos César,
meus pais.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço Deus pela minha vida e pelas oportunidades que me trouxeram até aqui, por ter me capacitado e dado força nos momentos em que o caminho ficava mais difícil. Vejo tua ação em minha trajetória e sou grata por isto.

Não poderia deixar de agradecer meus pais, sem os quais nada disso seria possível. Sei o quanto foi sofrida a luta de vocês para que a graduação nos fosse uma possibilidade, muito obrigada por isso!

Agradeço minha família por todo apoio, incentivo, suporte material e emocional ao longo desse processo. Muitas vezes vocês me ajudaram com palavras boas, afeto e tempo de qualidade quando precisava de um refúgio. Laide, Marcos, Silas, Lucas, Tutu, Calebe, Tati, Daya, Suzana, Ivana e Isaque, tios, tias, primos, primas avós, sobrinhos e doguinhos, muito obtigada!

Estendo minha gratidão referente ao suporte emocional aos amigos da Fusão, os quais deixaram os 5 anos de graduação mais leve e com momentos que levarei para vida.

Agradeço aos amigos da pós-graduação pelas risadas, ajuda nas disciplinas e por serem minha rede de apoio acadêmica. Vocês marcaram esse período com lembranças que guardarei com muito carinho. Estivemos únidos no mesmo barco, às vezes parecia o Titanic, mas agora vejo que esse barco não afundou e está nos levando em direção a nossos sonhos. Agradeço Carol, Gustavo, Lara, Danilo, Rafael, Tamires, Amanda, Fernanda, Rodrigo (por último sim) e aos demais colegas, por ouvirem minhas mágoas e me aconselharem; Tamires pela ajuda com as figuras; Carol, Fernanda, Lara, Tamires e Yasmin pela hospitalidade.

Agradeço todos os professores que participaram de minha trajetória pelos ensinamentos; aos professores da UNESP pelo acolhimento e base sólida, em especial à Thais pelos ensinamentos na Iniciação Científica; aos professores do PPGM por me desafiarem e me aprimorarem.

Agradeço ao meu orientador, Fabio Ruffino por todo o ensinamento, suporte, paciência e dedicação comigo, ser sua orientanda com certeza enriqueceu meu mestrado. Obrigada por compreender o quão difícil a pós graduação pode ser e torná-la mais leve e prazerosa.

Gratidão a toda equipe do PPGM UFSCar e à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Há diversas maneiras de se definir as infinito-categorias, embora todas possuam a mesma essência, algumas podem apresentar obstáculos quanto ao seu manuseio. Neste trabalho, definimos as infinito-categorias utilizando a linguagem dos conjuntos simpliciais, que é mais fácil de se trabalhar. Para isto, fizemos uma breve introdução à Teoria das Categorias e dissertamos sobre alguns conceitos e resultados relevantes desta área de pesquisa, como Limites e Colimites Categoriais, Conjuntos Simpliciais, Lema de Yoneda, Extensões de Kan e o Nervo de uma categoria, além de introduzir as 2-Categorias a fim de intuir as n-categorias e, consequentemente, as ∞-categorias.

Palavras-chave: Teoria das Categorias; Teoria das Infinito-Categorias; Conjuntos Simpliciais.

Abstract

There are several ways to define infinity-categories; although they all have the same essence, some of them are more difficult to handle. Here we define the notion of infinity-category through the language of simplicial sets, which is easier to work with. As a preliminary step, we make a brief introduction to category theory and we discuss some relevant tools and results in this framework (categorical (co)limits, Yoneda's lemma, Kan's extension, nerve of a category). Moreover, we introduce the notion of 2-Category and we use it to guess the structure of n-categories and ∞-categories.

Keywords: Category Theory; Infinity-Category Theory; Simplicial Sets.

Sumário

Lista de Símbolos

$Sets$: Categoria dos conjuntos;

$Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$: Conjunto dos morfismos de X aY;

Top: Categoria dos espaços topológicos;

$\simeq$: Isomorfismo;

$\frac{\mathscr{C}}{\sim}$: Categoria quociente;

$\mathscr{C}^{op}$: Categoria oposta;

$Funct(\mathscr{C},\mathscr{D})$: Categoria dos funtores de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$;

$\varprojlim \mathscr{F}$: Limite de $\mathscr{F}$;

$\varinjlim \mathscr{F}$: Colimite de $\mathscr{F}$;

Top_X: Categoria dos conjuntos abertos de X espaço topológico;

Ord: Categoria dos conjuntos ordenados;

Cat: Categoria das categorias pequenas;

Δ: Categoria dos conjuntos totalmente ordenados finitos;

$[n]$: Conjunto $\{0,\dots,n\}$ para $n \in \mathbb{N}$;

$|\Delta^n|$: n-simplexo regular em $\mathbb{R}^{n+1}$;

d_n^i: morfismo face $d_n^i : [n] \to [n+1]$;

c_n^i: morfismo degeneração $c_n^i : [n] \to [n-1]$;

P_A: Pré-feixe representado por A;

$\widehat{\mathscr{C}}$: Categoria dos pré-feixes em $\mathscr{C}$;

$\widehat{\Delta}$: Categoria dos conjuntos simpliciais;

Y: Funtor de Yoneda

$R_K\mathscr{F}$: Extensão de Kan à direita de $\mathscr{F}$ através de K;

$L_K\mathscr{F}$: Extensão de Kan à esquerda de $\mathscr{F}$ através de K;

$Y_{\mathscr{F}}$: Funtor de Yoneda generalizado de $\mathscr{F}$;

$\mathscr{F}_! = L_Y\mathscr{F}$: Extensão de Kan de $\mathscr{F}$ através de Y;

$Sing_X$: Complexo singular de X espaço topológico;

$|K|$: Realização geométrica de K conjunto simplicial;

$\iota : \Delta \hookrightarrow Cat$: Restrição do mergulho $Ord \hookrightarrow Cat$;

Y_ι: Nervo;

$Y_{\iota,\mathscr{C}}$: Nervo da categoria $\mathscr{C}$;

$\Delta^n = Y_{\iota,[n]}$: Nervo de $[n]$;

$\iota_! = L_Y \iota$: Extensão de Kan à esquerda de ι através de Y;

$\alpha\colon f \Rightarrow g$: 2-morfismo de f a g;

$\odot$: composição horizontal aplicada nos 2-morfismos;

$\pi \leq_n X$: n-grupoide fundamental de X espaço topológico;

$\pi <_\infty X$: ∞-grupoide fundamental de X espaço topológico;

Λ^n_j: j-ésimo horn;

$\infty - Cat$: Classe das ∞-categorias;

$\infty - Grp$: Classe dos ∞-grupoides;

Grp: Classe dos grupoides.

Introdução

Em Matemática é comum associar estruturas a conjuntos como grupos, variedades diferenciais, espaços topológicos, vetoriais, de medida, etc. A Teoria das Categorias reconhece as semelhanças entre esses objetos e fornece uma linguagem que unifica e simplifica conceitos de diversos campos da Matemática, resultando em propriedades gerais capazes de resolver problemas dessas áreas. Esta Teoria surgiu há menos de um século, em 1942 de forma primária por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em um trabalho de Cohomologia, sendo formalizado no artigo *"General theory of natural equivalences"*, [2], publicado por eles em 1945.

Uma categoria é formada essencialmente por objetos e morfismos. Uma generalização natural deste conceito consiste na introdução de morfismos de ordem superior ao primeiro. Por exemplo, na categoria cujos objetos são os espaços topológicos e cujos morfismos são as funções contínuas, podemos considerar as homotopias de funções como morfismos de segunda ordem (isto é, morfismos entre morfismos), as homotopias de homotopias como morfismos de terceira ordem e assim por diante. Isso leva naturalmente às noções de *n-categoria*, em que são presentes morfismos até a ordem n, e de *infinito-categoria*, em que são presentes morfismos de qualquer ordem. Entretanto, formalizar diretamente esta ideia se revela inviável por causa da inúmeras condições de compatibilidade entre os morfismos; portanto, é necessário introduzir uma linguagem mais manejável concretamente. Nesta dissertação, mostraremos como alcançar este objetivo utilizando os *conjuntos simpliciais*.

A teoria das infinito-categorias foi introduzida por vários autores na década de 1970, mas foi fortemente desenvolvida por Jacob Lurie na década de 2000 para classificar as Teorias de Campo Topológicas em *On the Classification of Topological Field Theories*, [5]. Recentemente, foi aplicada em numerosas áreas da Matemática: Geometria Algébrica e Diferencial, Física Matemática (em particular, nas Teorias de Calibre de ordem superior), Topologia Algébrica, etc. Em geral, torna-se natural usar esta teoria ao trabalhar com objetos que podem ser equivalentes em um sentido mais fraco do que o de isomorfismo: espaços topológicos homotopicamente equivalentes , mas não necessariamente homeomorfos; complexos de cadeias quase-isomorfos, mas não necessariamente isomorfos e assim por diante. Por este motivo, trata-se de uma moldura muito ampla e abrangente, em que é possível inserir várias teorias e ferramentas matemáticas de modo coerente e bem organizado.

A presente dissertação é organizada da seguinte maneira:

O Capítulo 1, fundamentada em *Categories for the Working Mathematician* de Saunders Mac Lane, [4], contém uma breve introdução à Teoria das Categorias, com definições, exemplos e alguns resultados básicos. No Capítulo 2, definimos o conceito de conjunto simplicial e estudamos suas propriedades principais; também introduzimos a noção de realização geométrica e analisamos um exemplo em detalhe.

Os Capítulos 3, 4 e 5, baseados em *Higher Categories and Homotopical Algebra* de Cisinski, [1], são dedicados respectivamente ao Lema de Yoneda e sua demonstração, à noção de Extensão de Kan e a uma generalização adequada do Lema de Yoneda, que será utilizada em seguida. No Capítulo 4 também construímos uma estrutura funtorial para as extensões de Kan e mostramos como construí-las através de limites e colimites.

No Capítulo 6, baseado no livro *2-Dimensional Categories* dos autores Donald Yau e Niles Johnson, [3], definimos as 2-Categorias Fortes e Fracas da maneira mais intuitiva, isto é, acrescentando os 2-morfismos a uma categoria e enunciando as condições de compatibilidade necessárias. Além disso, indicamos porque a generalização direta desta construção às n-categorias e às ∞-categorias não é viável concretamente. Isso motiva a definição das ∞-categorias através da linguagem dos conjuntos simpliciais, o que constitui o conteúdo do Capítulo 7, fundamentado em *Higher Topos Theory* de Jacob Lurie, [6], e *Higher Categories and Homotopical Algebra* de Cisinski, [1], com o qual concluímos este trabalho.

CAPÍTULO 1

Introdução à Teoria das Categorias

1.1 Categorias

Definição 1.1. Uma categoria $\mathscr{C}$ é definida por:

1. uma classe Ob($\mathscr{C}$) de objetos;
2. para todo par $X,Y \in$ Ob($\mathscr{C}$), um conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$;
3. para toda tripla $X,Y,Z \in Ob(\mathscr{C})$, uma função, dita composição:

$$\circ\colon Hom_{\mathscr{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathscr{C}}(X,Z)$$

tais que:

(i) se $(X,Y) \neq (Z,W)$ então $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,W) = \emptyset$;

(ii) a composição é associativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ quando os dois lados forem definidos;

(iii) para todo $X \in$ Ob($\mathscr{C}$), existe um morfismo identidade $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$ tal que $f \circ id_x = f$ e $id_X \circ g = g$ quando estas composições forem definidas.

Uma categoria $\mathscr{C}$ é pequena se a classe $Ob(\mathscr{C})$ de objetos forma um conjunto.

Observação 1.2. Um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ é denotado por $f\colon X \to Y$, sendo X dito domínio de f e Y contra-domínio de f.

Observação 1.3. O morfismo identidade de um objeto X é único.

Veremos alguns exemplos que serão importantes posteriormente.

Exemplo 1.4. Denotamos por Sets a categoria dos conjuntos, os objetos são os conjuntos e os morfismos de X a Y são as funções de X a Y, sendo a composição de dois morfismos a própria composição de funções.

Exemplo 1.5. Denotamos por Grp a categoria dos grupos, os objetos são os grupos e os morfismos de G a H são os homomorfismos de G a H, sendo a composição de dois morfismos a própria composição de funções.

Exemplo 1.6. Denotamos por GrpAb a categoria dos grupos abelianos, definida como a anterior, mas considerando os grupos abelianos como objetos.

Exemplo 1.7. Denotamos por Top a categoria dos espaços topológicos, os objetos são espaços topológicos e os morfismos de X a Y são as funções contínuas de X a Y, sendo a composição de dois morfismos a própria composição de funções.

Exemplo 1.8. Denotamos por TopHd a categoria dos espaços topológicos de Hausdorff, definida como a anterior, mas considerando os espaços topológicos de Hausdorff como objetos.

Definição 1.9. Um morfismo $f\colon X \to Y$ é dito isomorfismo se existe um morfismo $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. Dois objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ são isomoformos, denotado $X \simeq Y$, se existe um isomorfismo entre eles.

Se $f\colon X \to Y$ é um isomorfismo, seu inverso $g\colon Y \to X$ também é isomorfismo, denotado $g = f^{-1}$. A noção de isomorfismo define uma relação de equivalência na classe dos objetos.

Proposição 1.10. *Sejam $f\colon X \to X'$ e $g\colon Y \to Y'$ dois isomorfismos em uma categoria $\mathscr{C}$. Fica definida a seguinte bijeção:*

$$\begin{aligned} \Theta_{f,g}\colon Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) &\to Hom_{\mathscr{C}}(X',Y') \\ \varphi &\mapsto g \circ \varphi \circ f^{-1}. \end{aligned}$$

Definição 1.11. Uma categoria $\mathscr{C}'$ é dita subcategoria de $\mathscr{C}$ se:

1. $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}') \subset \mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$;
2. $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$;
3. para todos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(Y,Z)$, a composição $g \circ f$ em $\mathscr{C}'$ coincide com a em $\mathscr{C}$;
4. para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$, a identidade de X em $\mathscr{C}'$ coincide com a em $\mathscr{C}$.

A subcategoria $\mathscr{C}'$ é cheia se $Hom_{\mathscr{C}'}(X,Y) = Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$.

Exemplo 1.12. A categoria GrpAb é uma subcategoria cheia de Grp

Definição 1.13. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria e $\sim$ uma relação de equivalência em $\sqcup_{(X,Y)\in Ob(\mathscr{C})^2} Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ que é compatível com a composição[1]. A **categoria quociente** $\frac{\mathscr{C}}{\sim}$ é definida por:

[1] $f \sim g \Rightarrow f \circ h \sim g \circ h$ e $k \circ f \sim k \circ g$ sempre que essas composições estiverem definidas.

1. $Ob(\frac{\mathscr{C}}{\sim}) \doteq Ob(\mathscr{C})$;

2. $Hom_{\frac{\mathscr{C}}{\sim}}(X,Y) \doteq \frac{Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)}{\sim}$;

3. $[g] \circ [f] \doteq [g \circ f]$.

1.1.1 Funtores

Definição 1.14. Um funtor $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre duas categorias é definido por:

1. uma função $\mathscr{F} : Ob(\mathscr{C}) \to Ob(\mathscr{D})$;

2. para todos $X,Y \in Ob(\mathscr{C})$, uma função

$$\mathscr{F}_{X,Y} : Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}(X),\mathscr{F}(Y)),$$

   tais que, para cada $X,Y,Z \in Ob(\mathscr{C})$ e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$:

   - $\mathscr{F}_{X,Z}(g \circ f) = \mathscr{F}_{Y,Z}(g) \circ \mathscr{F}_{X,Y}(f)$;
   - $\mathscr{F}_{X,X}(id_X) = id_{\mathscr{F}(X)}$

Frequentemente a função $\mathscr{F}_{X,Y}$ será denotado apenas por $\mathscr{F}$.

Um funtor pode ser pensado como uma flecha de uma categoria para outra.

Exemplo 1.15. Considere a categoria Top_+ definida da seguinte maneira: Os objetos em Top_+ são pares da forma (X,x_0) onde X é um espaço topológico e $x_0 \in X$; os morfismos $Hom_{Top_+}((X,x_0),(Y,y_0))$ $= \{f : X \to Y$ contínua tal que$f(x_0) = y_0\}$; a composição de morfismos é a composição de funções. Fica definido o funtor grupo fundamental $\pi_1 : Top_+ \to Grp$ que associa um objeto (X,x_0) a seu grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$ e um morfismo $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ à função

$$\begin{aligned} \pi_1(f) = f_* : \pi_1(X,x_0) &\to \pi_1(Y,y_0) \\ [\sigma] &\mapsto [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Para toda categoria $\mathscr{C}$ existe o funtor identidade $Id_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, definido como a identidade entre objetos e entre morfismos. Além disso, dados dois funtores $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $\mathscr{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, fica definido o funtor $\mathscr{G} \circ \mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ por

$$\begin{aligned} \mathscr{G} \circ \mathscr{F} : Ob(\mathscr{C}) &\to Ob(\mathscr{E}) \\ X &\mapsto \mathscr{G} \circ \mathscr{F}(X) = \mathscr{G}(\mathscr{F}(X)) \end{aligned}$$

lembrando que $\mathscr{F}(X) \in Ob(\mathscr{D})$, e, dados $X,Y \in Ob(\mathscr{C})$:

$$\begin{aligned} (\mathscr{G} \circ \mathscr{F})_{X,Y} = \mathscr{G}_{\mathscr{F}(X),\mathscr{F}(Y)} \circ \mathscr{F}_{X,Y} : Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) &\to Hom_{\mathscr{E}}(\mathscr{G}(\mathscr{F}(X)),\mathscr{G}(\mathscr{F}(Y))) \\ f : X \to Y &\mapsto \mathscr{G}(\mathscr{F}) : \mathscr{G}(\mathscr{F}(X)) \to \mathscr{G}(\mathscr{F}(Y)) \end{aligned}$$

Proposição 1.16. *Um funtor manda isomorfismos em isomorfismos. Além disso, se $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ for um funtor e f um isomorfismo em $\mathscr{C}$ então $\mathscr{F}(f)^{-1} = \mathscr{F}(f^{-1})$.*

1.1.2 Categoria oposta e funtores contravariantes

Definição 1.17. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. A categoria oposta $\mathscr{C}^{op}$ é definida por:

1. $Ob(\mathscr{C}^{op}) = Ob(\mathscr{C})$;
2. para $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$, $Hom_{\mathscr{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathscr{C}}(Y,X)$;
3. dados $f \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(Y,Z)$, ou seja, $f\colon Y \to X$ e $g \to Z \to Y$ em $\mathscr{C}$, a composição $g \circ f \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(X,Z)$ coincide com a composição $f \circ g\colon Z \to X$ em $\mathscr{C}$.

Definição 1.18. Um funtor contravariante de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ é um funtor $\mathscr{F}: \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ (equivalentemente, é um funtor $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}^{op}$).

Ou seja, dados $X, Y \in \mathscr{C}$ quaisquer, um funtor contraviante $\mathscr{F}: \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ associa a cada $f\colon X \to Y$ em $\mathscr{C}$ (isto é, $f \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(Y,X)$), um morfismo $\mathscr{F}(f)\colon \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X)$.

1.1.3 Isomorfismos e mergulho de categorias

Definição 1.19. Duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são isomorfas se existem dois funtores $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $\mathscr{G}: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tais que $\mathscr{G} \circ \mathscr{F} = Id_{\mathscr{C}}$ e $\mathscr{F} \circ \mathscr{G} = Id_{\mathscr{D}}$.

Definição 1.20. Um funtor $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é dito mergulho de categorias se a função $\mathscr{F}: Ob(\mathscr{C}) \to Ob(\mathscr{D})$ é injetora e, para todos $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$, $\mathscr{F}_{X,Y}: Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}(X), \mathscr{F}(Y))$ é injetora. O mergulho $\mathscr{F}$ é dito cheio se $\mathscr{F}_{X,Y}$ é também sobrejetora para todos $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$.

Observação 1.21.
1. Se $\mathscr{C}'$ for uma subcategoria de $\mathscr{C}$, então a inclusão $i\colon \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ é um mergulho de categorias, o qual é cheio se, e somente se, $\mathscr{C}'$ for uma subcategoria cheia;
2. A imagem de um mergulho $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é uma subcategoria de $\mathscr{D}$ isomorfa a $\mathscr{C}$, a qual é cheia se, e somente se, $\mathscr{F}$ é um mergulho cheio;
3. Um funtor é um isomorfismo de categorias se, e somente se, é um mergulho cheio e é sobrejetor entre os objetos.

Exemplo 1.22. O funtor $\mathscr{F}: Sets \to Top$ que leva um conjunto A no espaço topológico A com a topologia discreta é um mergulho cheio de categorias.

1.1.4 Morfismos de funtores

Definição 1.23. Dados dois funtores $\mathscr{F}, \mathscr{G}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, um morfismo de funtores (ou transformação natural ou morfismo canônico) $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ é definido por um morfismo

$$\varphi(X)\colon \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$$

para cada $X \in Ob(\mathscr{C})$, de modo que o seguinte diagrama comute para todo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(\mathrm{X}) \arrow[r, "\varphi(\mathrm{X})"] \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"'] & \mathscr{G}(\mathrm{X}) \arrow[d, "\mathscr{G}(f)"] \\ \mathscr{F}(\mathrm{Y}) \arrow[r, "\varphi(\mathrm{Y})"'] & \mathscr{G}(\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

Para todo funtor $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, fica definido o morfismo identidade $id_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$, que associa ao objeto $X \in Ob(\mathscr{C})$ o morfismo identidade $id_{\mathscr{F}(X)} : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$.

Definição 1.24. Dados dois morfismos de funtores $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ e $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, sendo $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, definimos a composição entre φ e ψ como $(\psi \circ \varphi)(X) = \psi(X) \circ \varphi(X)$ para todo $X \in Ob(\mathscr{C})$.

As duas últimas definições nos permitem definir a categoria dos funtores entre duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ fixadas, sendo $\mathscr{C}$ pequena, $Funct(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, na qual os objetos são os funtores de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$, os morfismos entre $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ são as tranformações naturais da Definição 1.23, e a composição da Definição 1.24. Em particular, dois funtores $\mathscr{F}, \mathscr{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ são isomorfos quando o são como objetos de $Funct(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Um isomorfismo de funtores também é chamado de isomorfismo canônico ou isomorfismo natural.

Proposição 1.25. *Sejam $\mathscr{F}, \mathscr{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dois funtores. Um morfismo de funtores $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ é um isomorfismo se, e somente se, para todo $X \in Ob(\mathscr{C})$, o morfismo $\varphi(X) : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$ é um isomorfismo em $\mathscr{D}$.*

1.1.5 Equivalência de categorias

Definição 1.26. Duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são equivalentes se existem dois funtores $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $\mathscr{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tais que $\mathscr{G} \circ \mathscr{F} \simeq Id_{\mathscr{C}}$ e $\mathscr{F} \circ \mathscr{G} \simeq Id_{\mathscr{D}}$. Neste caso, $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ são ditos equivalências de categorias.

Definição 1.27. Um funtor $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é dito:

1. Fiel se, para todos $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$, a função $\mathscr{F}_{X,Y} : Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}(X), \mathscr{F}(Y))$ é injetora;

2. cheio se, para todos $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$, a função $\mathscr{F}_{X,Y}$ é sobrejetora;

3. plenamente fiel se é fiel e cheio.

Teorema 1.28. *Um funtor $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, valem as duas seguintes condições:*

1. *$\mathscr{F}$ é plenamente fiel;*

2. *para todo objeto $Y \in Ob(\mathscr{D})$, existe $X \in Ob(\mathscr{C})$ tal que $Y \simeq \mathscr{F}(X)$.*

1.1.6 Imagem essencial

Definição 1.29. Seja $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor. A imagem essencial de $\mathscr{F}$ é a subcategoria cheia $\mathscr{D}'$ de $\mathscr{D}$ definida por: $Y \in Ob(\mathscr{D})$ pertence a $\mathscr{D}'$ se, e somente se, existe $X \in Ob(\mathscr{C})$ tal que $\mathscr{F}(X) \simeq Y$.

Sejam $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor plenamente fiel e $\mathscr{D}'$ a imagem essencial de $\mathscr{F}$. O Teorema 1.28 garante que $\mathscr{F}$ é uma equivalência entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}'$. Porém, $\mathscr{D}'$ é uma subcategoria cheia de $\mathscr{D}$, desse modo, um funtor plenamente fiel é um mergulho cheio de categorias a menos de equivalência.

Pelo Teorema 1.28 temos que um funtor é uma equivalência de categorias se, e somente se, é fiel, cheio e essencialmente sobrejetor, ou seja, a imagem essencial coincide com o contra-domínio.

1.2 Limite e Colimite Categorial

Nesta seção, consideraremos a categoria I como sendo uma categoria de índices e $\mathscr{C}$ a categoria de interesse, pois é o ambiente em que calcularemos o limite ou colimite.

Definição 1.30. Seja $\mathscr{F}: I \to \mathscr{C}$ um funtor. Um **cone** de $\mathscr{F}$ é um par $(Y, \{p_i : Y \to \mathscr{F}(i)\}_{i \in Ob(I)})$, onde $Y \in Ob(\mathscr{C})$ e $p_i \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, \mathscr{F}(i))$ para todos $i \in Ob(I)$, tal que, para cada morfismo $f : i \to j$ em I, tem-se

$$\mathscr{F}(f) \circ p_i = p_j.$$

Ou seja, tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F}(i) \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"] \\ Y \arrow[ur, "p_i"] \arrow[r, "p_j"'] & \mathscr{F}(j) \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.31. Considere I uma categoria formada pelos objetos $Ob(I) = \{i_0, i_1, i_2\}$, e $Hom_I(i_j, i_j) = \{id_j\}, \forall j \in \{0,1,2\}$; $Hom_I(i_0, i_1) = \{\varphi_{01}\}$; $Hom_I(i_0, i_2) = \{\varphi_{02}\}$ e o conjunto vazio para os demais conjuntos de morfismos.

$$\begin{tikzcd} i_1 & & i_2 \\ & i_0 \arrow[ul, "\varphi_{01}"] \arrow[ur, "\varphi_{02}"'] & \end{tikzcd}$$

Considere o funtor $F\colon I \to Sets$ tal que

$$\begin{aligned}
F(i_0) &= \{0\} \\
F(i_1) &= \{0,1\} \\
F(i_2) &= \{0,2\} \\
f_{01} = F(\varphi_{01})\colon F(i_0) &\to F(i_1) \\
0 &\mapsto f_{01}(0) = 1 \\
f_{02} = F(\varphi_{02})\colon F(i_0) &\to F(i_2) \\
0 &\mapsto f_{01}(0) = 2
\end{aligned}$$

Agora, considere o conjunto $Y = \{0,1\}$ e os morfismos (ou seja, as funções) $p_j\colon Y \to F(i_j)$ tal que, para $y \in Y$, $p_j(y) = j$, com $j \in \{0,1,2\}$.

Temos que $(Y, \{p_j\colon Y \to F(i_j)\}_{j \in \{0,1,2\}})$ é um cone de F, pois o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{F}(i_2) \\
Y \arrow[ur, "p_2"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"'] & \mathscr{F}(i_0) \arrow[u, "f_{02}"'] \arrow[d, "f_{01}"] \\
& F(i_1)
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
f_{01} \circ p_0 \colon Y &\to F(i_1) \\
0 &\mapsto f_{01} \circ p_0(0) = f_{01}(0) = 1 = p_1(0) \\
1 &\mapsto f_{01} \circ p_0(1) = f_{01}(0) = 1 = p_1(1)
\end{aligned}$$

então $f_{01} \circ p_0 = p_1$ e,

$$\begin{aligned}
f_{02} \circ p_0 \colon Y &\to F(i_2) \\
0 &\mapsto f_{02} \circ p_0(0) = f_{02}(0) = 2 = p_2(0) \\
1 &\mapsto f_{02} \circ p_0(1) = f_{02}(0) = 2 = p_2(1)
\end{aligned}$$

então $f_{02} \circ p_0 = p_2$.

Definição 1.32. Seja $\mathscr{F}\colon I \to \mathscr{C}$ um funtor. Um cone $(L, \{p_i\colon L \to \mathscr{F}(i)\}_{i \in Ob(I)})$ de $\mathscr{F}$ é dito um **limite** de $\mathscr{F}$, ou limite inverso de $\mathscr{F}$, se para cada cone $(Y, \{q_i\colon Y \to \mathscr{F}(i)\}_{i \in Ob(I)})$ de $\mathscr{F}$ existir um único morfismo $t\colon Y \to L$ tal que $q_i = p_i \circ t$ para todo $i \in Ob(I)$.

Ou seja, tal que o diagrama a seguir comuta para todo $i \in Ob(I)$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "p_i"] & \mathscr{F}(i) \\
Y \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "q_i"']
\end{tikzcd}$$

Por vezes, usaremo a notação $\varprojlim \mathscr{F}$ para indicar o limite de $\mathscr{F}$.

Proposição 1.33. *Seja $\mathscr{F} : I \to \mathscr{C}$ um funtor, se $(L, \{f_i \colon L \to \mathscr{F}(i)\}_{i \in Ob(I)})$ e $(L', \{g_i \colon L' \to \mathscr{F}(i)\}_{i \in Ob(I)})$ são limites de $\mathscr{F}$, então existe um único isomorfismo $k : L \to L'$ tal que $g_i \circ k = f_i$ para todo $i \in Ob(I)$.*

Demonstração. Por $(L, \{f_i\})$ e $(L', \{g_i\})$ serem limites de $\mathscr{F}$, obtemos que existem únicos $l : L' \to L$ e $k : L \to L'$ tais que $f_i \circ l = g_i$ e $g_i \circ k = f_i$ para todo $i \in Ob(I)$, respectivamente. Então

$$f_i \circ (l \circ k) = (f_i \circ l) \circ k = g_i \circ k = f_i, \ \forall i \in Ob(I),$$

e

$$g_i \circ k \circ l = f_i \circ l = g_i.$$

Como id_L e $id_{L'}$ são os únicos morfismos que $f_i \circ id_L = f_i$ e $g_i \circ id_{L'} = g_i$ para todos $i \in Ob(I)$, segue que $id_L = l \circ k$ e $id_{L'} = k \circ l$. Portanto k e l são isomorfismos. □

Exemplo 1.34. Observe que o cone do Exemplo 1.31 não é um limite de F pois, dado qualquer conjunto unitário $X = \{x\}$, para qualquer $j \in \{0, 1, 2\}$, definimos $q_j \colon X \to F(i_j)$ pondo $q_j(x) = j$. Com isso, obtemos um cone, de maneira similar ao feito no Exemplo 1.31. Porém, existem dois possíveis morfismos $t, t' \colon X \to Y$ que fazem o diagrama da Definição 1.32 comutar, são eles

$$\begin{aligned} t \colon X &\to Y \\ 0 &\mapsto 0 \\ t' \colon X &\to Y \\ 0 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Exemplo 1.35. Sejam I uma categoria formada pelos objetos A e B, tais que os únicos morfismos são as identidades id_A e id_B. Seja também $F \colon \mathscr{D} \to Sets$ um funtor de modo que $F(A) \neq \emptyset$ e $F(B) \neq \emptyset$.

Qualquer par $(C, \{f_A \colon C \to F(A); f_B \colon C \to F(B)\})$ com $C \in Ob(Sets)$ é um cone para F. De fato, como não existem morfismos entre A e B em I, as únicas composições que obtemos são $F(id_A) \circ f_A = f_A$ e $F(id_B) \circ f_B = f_B$;

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[d, "F(id_A)"] \\ C \arrow[ur, "f_A"] \arrow[r, "f_A"'] & F(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(B) \arrow[d, "F(id_B)"] \\ C \arrow[ur, "f_B"] \arrow[r, "f_B"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

Neste caso também obtemos um limite para F, o qual é o cone $(F(A) \times F(B), \{\pi_{F(A)} \colon F(A) \times F(B) \to F(A);\ \pi_{F(B)} \colon F(A) \times F(B) \to F(B)\})$, sendo $\pi_{F(A)}$ e $\pi_{F(B)}$ as projeções como conhecemos.

De fato, seja $(C, \{g_1, g_2\})$ outro cone qualquer de F, $C \in Ob(Sets)$, $g_1 \colon C \to F(A)$ e $G_2 \colon C \to F(B)$. Temos que existe uma única função (um único morfismo) $h \colon C \to F(A) \times F(B)$ que faz o diagrama a seguir comutar:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g_2"] & \\ F(A) & F(A)\times F(B) \arrow[l, "\pi_{F(A)}"] \arrow[r, "\pi_{F(B)}"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

Essa função h é definida por

$$\begin{aligned} h\colon C &\to F(A)\times F(B) \\ x &\mapsto (g_1(x), g_2(x)) \end{aligned}$$

Note que o diagrama comuta pois, para qualquer $x \in C$,

$$\begin{aligned} \pi_{F(A)} \circ h(x) = \pi_{F(A)}(g_1(x), g_2(x)) = g_1(x) \\ \pi_{F(B)} \circ h(x) = \pi_{F(B)}(g_1(x), g_2(x)) = g_2(x) \end{aligned}$$

Agora, seja $g\colon C \to F(A)\times F(B)$ tal que $\pi_{F(A)} \circ g = g_1$ e $\pi_{F(B)} \circ g = g_2$, então para cada $z \in C$, tome $g(z) = (r,s) \in F(A)\times F(B)$. Temos

$$\begin{aligned} r = \pi_{F(A)}((r,s)) = \pi_{F(A)}(g(z)) = g_1(z) \\ s = \pi_{F(B)}((r,s)) = \pi_{F(B)}(g(z)) = g_2(z) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$g(z) = (r,s) = (g_1(z), g_2(z)) = h(z) \Rightarrow g = h$$

Portanto, o cone $(F(A)\times F(B), \{\pi_{F(A)}\colon F(A)\times F(B) \to F(A);\ \pi_{F(B)}\colon F(A)\times F(B) \to F(B)\})$ é limite de F.

Este exemplo, adaptado de maneira natural, mostra que o produto em qualquer categoria é um caso particular de limite.

Exemplo 1.36. Considere I sendo uma categoria em que os objetos são os números naturais e $Hom_I(m,n) = \{f_{mn}\}$ se $m \geq n$ e $Hom_I(m,n) = \emptyset$ se $m < n$. Ou seja, temos uma flecha sempre que $m \geq n$. Sejam K um anel comutativo com unidade e P a categoria cujos objetos são K-módulos e os morfismos são homomorfismos de K-módulos.

Tomemos o funtor $F : I \to P$ tal que, para cada $m,n \in Ob(I)$, $m \geq n$, $F(n) = K_n[t]$ e $F(f_{mn}) = p_{mn}$, onde $K_n[t] = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,\ a_i \in K,\ \forall i \in \{0, \cdots, n\}\}$ dos polinômios de grau menor ou igual a $n \in \mathbb{N}$ com coeficiências em K e

$$\begin{aligned} p_{mn}\colon K_m[t] &\to K_n[t] \\ a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots + a_m t^m &\mapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n. \end{aligned}$$

Nesse contexto, temos que o K-módulo $K[t] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,\ a_i \in K, \forall i \in \mathbb{N}\}$ das séries de potências juntamente com os morfismos

$$\begin{aligned} p_n\colon K[t] &\to K_n[t] \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \end{aligned}$$

formam um limite de F. Isto é, o cone $(K[t], \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ é o limite de F.

De fato, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & K_{n+1}[t] \arrow[d, "F(f_{n+1,n})=p_{n+1,n}"] \\ K[t] \arrow[ur, "p_{n+1}"] \arrow[r, "p_n"'] & K_n[t] \end{tikzcd}$$

Agora, seja $(S, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ outro cone de F, ou seja, $p_{n+1,n} \circ q_{n+1} = q_n$ para todo $n \in Ob(I)$. Para cada $i \in Ob(I)$ e $s \in S$ temos que $q_i(s) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_i t^i$, com isso, tomemos homomorfismo $t\colon S \to K[t]$ tal que $t(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i$. Logo, $p_n \circ t = q_n$ para todo $n \in Ob(I)$, sendo o único morfismo de S a $K[t]$ que satisfaz essa propriedade.

De modo mais geral, sendo $\mathscr{F}: I \to \mathscr{C}$, com $\mathscr{C} = Sets$ ou $\mathscr{C} = Top$, temos que $\varprojlim \mathscr{F} \subset \Pi_{i\in I}\mathscr{F}(i)$. Mais precisamente, uma família $\{a_i\}_{i\in I} \in \varprojlim \mathscr{F}$, onde $a_i \in \mathscr{F}(i)$, se e somente se, para toda $\varphi\colon i \to j$ em I, temos $\mathscr{F}(\varphi)(a_i) = a_j$ em $\mathscr{F}(\varphi)\colon \mathscr{F}(i) \to \mathscr{F}(j)$.

Exemplo 1.37. Considere I como sendo uma categoria formada pelos objetos $Ob(I) = \{i_0, i_1, i_2\}$, e $Hom_I(i_j, i_j) = \{id_j\}, \forall j \in \{0,1,2\}$; $Hom_I(i_1, i_0) = \{\varphi_1\}$; $Hom_I(i_2, i_0) = \{\varphi_2\}$ e o conjunto vazio para os demais conjuntos de morfismos.

$$\begin{tikzcd} i_1 \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & i_2 \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & i_0 & \end{tikzcd}$$

Considere um funtor $F: I \to Sets$ (podendo considerar $Tops$) qualquer:

$$\begin{tikzcd} F(i_1) \arrow[dr, "F(\varphi_1)"'] & & F(i_2) \arrow[dl, "F(\varphi_2)"] \\ & F(i_0) & \end{tikzcd}$$

Pelo que vimos, $\varprojlim F \subset F(i_1) \times F(i_2) \times F(i_0)$ (caso considere na categoria $Tops$ tomamos a topologia produto), sendo $(x, y, a) \in \varprojlim F$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} F(\varphi_1)\colon F(i_1) &\to F(i_0) \\ F(\varphi_1)(x) &= a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F(\varphi_2)\colon F(i_2) &\to F(i_0) \\ F(\varphi_2)(y) &= a \end{aligned}$$

Ou seja, $(x,y,a) \in \varprojlim F$ se, e somente se, $F(\varphi_1)(x) = a$ e $F(\varphi_2)(y) = a$.

De fato, considere as funções projeções $p_j \colon \varprojlim F \to F(i_j)$ com $j \in \{0,1,2\}$.

Temos que $(\varprojlim F, \{p_j\}_{j\in\{0,1,2\}})$ é um cone de F, pois o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}(i_1) \arrow[d, "F(\varphi_1)"] \\
\varprojlim F \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[dr, "p_2"'] & \mathscr{F}(i_0) \\
 & F(i_2) \arrow[u, "F(\varphi_2)"']
\end{tikzcd}$$

Agora, suponha $(Y, \{q_0, q_1, q_2\})$ outro cone de F, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}(i_1) \arrow[d, "F(\varphi_1)"] \\
Y \arrow[ur, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[dr, "q_2"'] & \mathscr{F}(i_0) \\
 & F(i_2) \arrow[u, "F(\varphi_2)"']
\end{tikzcd}$$

Defina a função

$$\begin{aligned}
t \colon Y &\to \varprojlim F \\
\alpha &\mapsto (q_1(\alpha), q_2(\alpha), q_0(\alpha))
\end{aligned}$$

temos que $p_i(t(\alpha)) = q_i(\alpha), \forall i \in \{0,1,2\}, \forall \alpha \in Y$, e suponha outra função

$$\begin{aligned}
t' \colon Y &\to \varprojlim F \\
\alpha &\mapsto (t'_1(\alpha), t'_2(\alpha), t'_0(\alpha))
\end{aligned}$$

que satisfaça $p_i(t'(\alpha)) = q_i(\alpha), \forall i \in \{0,1,2\}, \forall \alpha \in Y$, então

$$t'_i(\alpha) = p_i(t'(\alpha)) = q_i(\alpha),\ \forall i \in \{0,1,2\}, \forall \alpha \in Y.$$

Ou seja, existe um único morfismo $t \colon Y \to \varprojlim F$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F \arrow[r, "p_i"] & F(i) \\
Y \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "q_i"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta. Portanto, $(\varprojlim F, \{p_i\}_{i=0,1,2})$ é o limite de F. Note que

$$(x,y,a) \in \varprojlim F \Leftrightarrow (x,y) \in \{(x,y) \in F(i_1) \times F(i_2),\ F(\varphi_1)(x) = F(\varphi_2)(y)\}$$

Portanto, também podemos dizer que $\varprojlim F = \{(x,y) \in F(i_1) \times F(i_2),\ F(\varphi_1)(x) = F(\varphi_2)(y)\}$, juntamente com as respectivas projeções.

Este exemplo, adaptado de maneira natural, mostra que o produto fibrado em qualquer categoria é um caso particular de limite.

A seguir, definiremos o colimite ou limite direto de um funtor $\mathscr{F}$ cuja noção é dual à que vimos.

Definição 1.38. Seja $\mathscr{F}: I \to \mathscr{C}$ um funtor. Um **co-cone** de $\mathscr{F}$ é um par $(Y, \{\pi_i \colon \mathscr{F}(i) \to Y\}_{i \in Ob(I)})$, onde $Y \in Ob(\mathscr{C})$ e $\pi_i \in Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i), Y)$ para todos $i \in Ob(I)$, tal que, para cada morfismo $f \colon i \to j$ em I, tem-se

$$\pi_j \circ \mathscr{F}(f) = \pi_i.$$

Ou seja, tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F}(i) \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"] \\ Y & \mathscr{F}(j) \arrow[l, "\pi_j"] \end{tikzcd}$$

Definição 1.39. Seja $\mathscr{F}: I \to \mathscr{C}$ um funtor. Um co-cone $(L, \{\pi_i \colon \mathscr{F}(i) \to L\}_{i \in Ob(I)})$ de $\mathscr{F}$ é dito um **colimite** de $\mathscr{F}$, ou limite direto de $\mathscr{F}$, se para cada co-cone $(Y, \{q_i \colon \mathscr{F}(i) \to Y\}_{i \in Ob(I)})$ de $\mathscr{F}$ existir um único morfismo $t \colon L \to Y$ tal que $q_i = t \circ \pi_i$ para todo $i \in Ob(I)$.

Ou seja, tal que o diagrama a seguir comuta para todo $i \in Ob(I)$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "t"'] & \mathscr{F}(i) \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[dl, "q_i"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Temos um resultado análogo à Proposição 1.33:

Proposição 1.40. *Seja $\mathscr{F}: I \to \mathscr{C}$ um funtor, se $(L, \{\pi_i \colon \mathscr{F}(i) \to L\}_{i \in Ob(I)})$ e $(L', \{\pi_i' \colon \mathscr{F}(i) \to L'\}_{i \in Ob(I)})$ são colimites de $\mathscr{F}$, então existe um único isomorfismo $k : L \to L'$ tal que $k \circ \pi_i = \pi_i'$ para todo $i \in Ob(I)$.*

Por vezes, usaremo a notação $\varinjlim \mathscr{F}$ para indicar o colimite de $\mathscr{F}$.

Exemplo 1.41. Seja $\mathscr{F}: I \to Top$ um funtor qualquer. Seja $\bigsqcup_{i \in Ob(I)} \mathscr{F}(i)$ a união disjunta dos $\mathscr{F}(i) \in Ob(Top), i \in Ob(I)$. Consideremos o conjunto $\varinjlim \mathscr{F} = \frac{\bigsqcup_{i \in Ob(I)} \mathscr{F}(i)}{\sim}$ com a topologia quociente, em que a relação $\sim$ é dada por: para $a \in \mathscr{F}(i), b \in \mathscr{F}(j)$, $a \sim b$ se, e somente se, existe um morfismo $\varphi \colon i \to j$ em I tal que $b = (\mathscr{F}(\varphi))(a)$.

$$a \in \mathscr{F}(i) \sim (\mathscr{F}(\varphi))(a) \in \mathscr{F}(j).$$

Considere também, para cada $i \in Ob(I)$, as funções contínuas (morfismos em Top)

$$\begin{aligned} \pi_i \colon \mathscr{F}(i) &\to \varinjlim \mathscr{F} \\ a &\mapsto [a] \end{aligned}$$

Note que, dada $\varphi \colon i \to j$ em I, temos $\pi_i = \pi_j \circ \mathscr{F}(\varphi)$, pois para $a \in \mathscr{F}(i)$ qualquer:

$$\pi_j \circ \mathscr{F}(\varphi)(a) = [\mathscr{F}(\varphi)(a)] = [a] = \pi_i(a).$$

Isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(i) \arrow[r, "\pi_i"] & \varinjlim \mathscr{F} \\ \mathscr{F}(j) \arrow[u, "\mathscr{F}(\varphi)"] \arrow[ur, "\pi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Com isso, obtemos que $(\varinjlim \mathscr{F}, \{\pi_i \colon \mathscr{F}(i) \to \varinjlim \mathscr{F}\}_{i \in Ob(I)})$ é um co-cone de $\mathscr{F}$.

Afirmação: $(\varinjlim \mathscr{F}, \{\pi_i \colon \mathscr{F}(i) \to \varinjlim \mathscr{F}\}_{i \in Ob(I)})$ é colimite de $\mathscr{F}$.

De fato, seja $(Y, \{q_i \colon \mathscr{F}(i) \to Y\}_{i \in Ob(I)})$ um co-cone de $\mathscr{F}$, mostremos que existe um único morfismo $t \colon \varinjlim \mathscr{F} \to Y$ tal que $q_i = t \circ \pi_i$ para todo $i \in Ob(I)$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(i) \arrow[dr, "\pi_i"] \arrow[drr, bend left, "q_i"] \arrow[dd, "\mathscr{F}(f)"'] & & \\ & \varinjlim \mathscr{F} \arrow[r, dashed, "t"] & Y \\ \mathscr{F}(j) \arrow[ur, "\pi_j"'] \arrow[urr, bend right, "q_j"'] & & \end{tikzcd}$$

Para cada $[a] \in \varinjlim \mathscr{F}$, temos que existe um único $i \in Ob(I)$ tal que $a \in \mathscr{F}(i)$. Desse modo, defina

$$\begin{aligned} t \colon \varinjlim \mathscr{F} &\to Y \\ [a] &\mapsto q_i(a). \end{aligned}$$

Note que t está bem definida, pois para $[a] = [b]$ em $\varinjlim \mathscr{F}$, $a \in \mathscr{F}(i), b \in \mathscr{F}(j)$ para algum $i, j \in Ob(I)$, existe $\varphi \colon i \to j$ morfismo em I tal que $b = (\mathscr{F}(\varphi))(a)$. Porém, como (Y, q_i) é co-cone, temos

$$q_i(a) = q_j(\mathscr{F}(\varphi)(a)) = q_j(b)$$

logo, t está bem definida. Além disso, para $a \in \mathscr{F}(i)$ qualquer, temos

$$t \circ \pi_i(a) = t([a]) = q_i(a) \Longrightarrow t \circ \pi_i = q_i.$$

Por fim, suponha $t' \colon \varinjlim \mathscr{F} \to Y$ outro morfismo em Top tal que $q_i = t' \circ \pi_i$, então para $a \in \mathscr{F}(i)$ qualquer,

$$t([a]) = q_i(a) = t' \circ \pi_i(a) = t'([a]) \Longrightarrow t = t'.$$

Portanto, $(\varinjlim \mathscr{F}, \{\pi_i \colon \mathscr{F}(i) \to \varinjlim \mathscr{F}\}_{i \in Ob(I)})$ é colimite de $\mathscr{F}$.

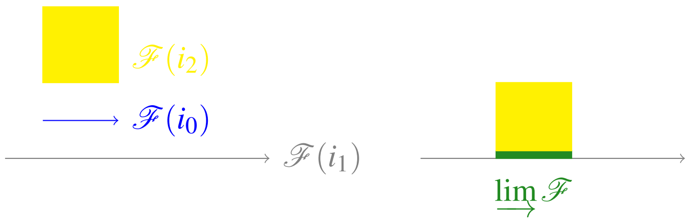
Observação 1.42. O Exemplo 1.41 pode ser adaptado a outras categorias (grupos, grupos abelianos, anéis, etc) subtituindo a união disjunta pelo coproduto correspondente.

Exemplo 1.43. Considere $\mathscr{F}: I \to Top$ um funtor, em que os objetos de I são i_0, i_1, i_2 e, além das identidades, os únicos outros morfismos são $\varphi_1 : i_0 \to i_1$ e $\varphi_2 : i_0 \to i_2$.

$$\begin{tikzcd}
i_1 & & i_2 \\
& i_0 \arrow[ul, "\varphi_1"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(i_1) & & \mathscr{F}(i_2) \\
& \mathscr{F}(i_0) \arrow[ul, "\mathscr{F}(\varphi_1)"] \arrow[ur, "\mathscr{F}(\varphi_2)"'] &
\end{tikzcd}$$

Pelo exemplo anterior, temos que $\varinjlim \mathscr{F} = \frac{\mathscr{F}(i_0) \bigsqcup \mathscr{F}(i_1) \bigsqcup \mathscr{F}(i_2)}{\sim}$ onde para todo $a \in \mathscr{F}(i_0)$, $\mathscr{F}(\varphi_1)(a) \sim a \sim \mathscr{F}(\varphi_2)(a)$. E o colimite de $\mathscr{F}$ é o co-cone formado por $\varinjlim \mathscr{F}$ juntamente com as projeções.

Mais precisamente, suponhamos que $\mathscr{F}(i_0) = [0,1], \mathscr{F}(i_1) = \mathbb{R}, \mathscr{F}(i_2) = [0,1] \times [0,1]$, e $\mathscr{F}(\varphi_1) : \mathscr{F}(i_0) \to \mathscr{F}(i_1)$ a inclusão e $\mathscr{F}(\varphi_2) : \mathscr{F}(i_0) \to \mathscr{F}(i_2)$ tal que $a \mapsto (a, 0)$. Nessas condições, o colimite de $\mathscr{F}$ é a colagem do retângulo $[0,1] \times [0,1]$ com a reta real.



1.2.1 *Objeto Final e Inicial*

Definição 1.44. Dizemos que um objeto $F \in Ob(\mathscr{C})$ é um **objeto final** da categoria $\mathscr{C}$ se, para cada $X \in Ob(\mathscr{C})$, existir um único morfismo $f_X : X \to F$.

Exemplo 1.45. Em *Sets* os objetos finais são os conjuntos unitários.

Analogamente definimos:

Definição 1.46. Dizemos que um objeto $B \in Ob(\mathscr{C})$ é um **objeto inicial** da categoria $\mathscr{C}$ se, para cada $X \in Ob(\mathscr{C})$, existir um único morfismo $g_X : B \to X$.

Exemplo 1.47. Em *Sets* o único objeto inicial é o conjunto vazio.

Observação 1.48. Dado o funtor $\mathscr{F} : \emptyset \to \mathscr{C}$, sendo $\emptyset$ a categoria vazia, obtemos o diagrama vazio em $\mathscr{C}$ referente a $\mathscr{F}$. Todo objeto de $\mathscr{C}$ forma um cone e um co-cone de $\mathscr{F}$, porém, o objeto final é o limite de $\mathscr{F}$ e o objeto inicial é o colimite de $\mathscr{F}$, a menos de isomorfismo, caso existam.

1.2.2 Talos e germes

A seguir construiremos a noção de germe, que estuda o comportamento local de uma função f em um ponto x de um espaço topológico X, e que será um exemplo de colimite de um funtor.

Seja X um espaço topológico. Definimos a categoria $(Top_X,\ \tau_X)$ por:

1. $Ob_{(Top_X)} = \tau_X = \{\text{subconjuntos abertos de } X\}$;
2. se $V \subset U$, então $Hom(V,U) = \{i\colon V \to U\}$ pensando em i na inclusão; e se $V \not\subset U$ então $Hom(V,U) = \emptyset$.
3. se $W \subset V \subset U$ então o único morfismo de W a U é a composição entre o único morfismo de W a V e o único morfismo de V a U.

Além disso, fixamos uma categoria C escolhida entre conjuntos, grupos abelianos, anéis comutativos, R-módulos (R um anel fixado com unidade), R-álgebras comutativas.

Definição 1.49. Um **pré-feixe** em X, com valores em C, é um funtor $P\colon Top_X^{op} \to C$, tal que $P(\emptyset) = 0$ (sendo 0 o zero-objeto de C)[2].

Ou seja, para todo $U \subset X$ aberto, temos $P(U) \in Ob(C)$, e se $V \subset U$, temos o morfismo $P_{VU} : P(U) \to P(V)$ tal que $P(\emptyset) = 0$, P_{UU} é a identidade de $P(U)$ e se $W \subset V \subset U$ então $P_{WU} = P_{WV} \circ P_{VU}$.

Fixamos $x \in X$, $\{(U,P)\} = \{(U,\varphi), U$ é vizinhança aberta de x e $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ é uma função contínua$\}$.

Introduzimos a seguinte relação de equivalência em $\{(U,P)\}$:

$$(U,\varphi) \sim (V,\psi) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V \text{ aberto } : x \in W \text{ e } \varphi_{|W} = \psi_{|W}$$

Definição 1.50. O **talo** das funções reais contínuas em $x \in X$ é o quociente $C^0(X)_x = \frac{\{(U,P)\}}{\sim}$. Um **germe** em x é um elemento do talo $C^0(X)_x$.

A seguir veremos o talo em x como colimite de um certo funtor, para isso, consideremos $C = Sets$ a fim de simplificação, mas poderia ser escolhida entre grupos abelianos, anéis comutativos, R-módulos (R um anel fixado com unidade), R-álgebras comutativas, anéis comutativos unitários; R-álgebras comutativas unitárias.

Para $x \in X$ fixo, consideremos a categoria Top_x dada por

1. $Ob_{(Top_x)} = \{U \text{ vizinhança aberta de } x \text{ em } X\}$;
2. se $V \subset U$, então $Hom(V,U) = \{i\colon V \to U\}$ pensando em i na inclusão; e se $V \not\subset U$ então $Hom(V,U) = \emptyset$.
3. se $W \subset V \subset U$ então o único morfismo de W a U é a composição entre o único morfismo de W a V e o único morfismo de V a U.

[2]Zero-objeto de C é um objeto inicial e final ao mesmo tempo. No caso de $Sets$ consideramos o objeto inicial (conjunto vazio).

Tomemos o funtor $P\colon Top_x^{op} \to C$ que associa uma vizinhança U de x ao conjunto $P(U) = C^0(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R};$ f é contínua$\}$. E caso $V \subset U$ forem duas vizinhanças abertas de x, temos $P_{UV}: C^0(U) \to C^0(V)$ tal que $f \mapsto f_{|V}$.

Note que, de acordo com o Exemplo 1.41, o colimite de P é dado por

$$\varinjlim P = \frac{\bigsqcup_{U \in Ob(Top_x^{op})} C^0(U)}{\sim}$$

onde $f \sim g$ se, e somente se, $g = f_{|V}$. Porém, podemos considerar

$$\varinjlim P = C^0(X)_x$$

Portanto, $C^0(X)_x$ é colimite de P.

Neste caso as projeções são dadas por

$$\begin{aligned} \pi_U : C^0(U) &\to C^0(X)_x \\ f &\mapsto [(U, f)] \end{aligned}$$

e o diagrama comuta sempre que $V \subset U$:

$$\begin{tikzcd} C^0(U) \arrow[r, "\pi_U"] \arrow[d, "P_{UV}"'] & C^0(X)_x \\ C^0(V) \arrow[ur, "\pi_V"'] & \end{tikzcd}$$

CAPÍTULO 2

Conjuntos Simpliciais

Neste capítulo trabalharemos com as noções de conjuntos e espaços simpliciais, mas para defini-las precisamos de algumas construções categoriais.

Seja $(X, \leq)$ um conjunto com uma relação de ordem parcial (reflexiva, anti-simétrica e transitiva). Este conjunto pode ser interpretado como uma categoria X da seguinte maneira: os objetos são os elementos de X e os morfismos de $a, b \in X$ são

$$Hom(a,b) = \begin{cases} \{l_a^b\}, & a \leq b \\ \emptyset, & a \not\leq b \end{cases} \tag{2.1}$$

e a composição é dada da única maneira possível: se $a \leq b \leq c$ então $l_b^c \circ l_a^b = l_a^c$. Como $a \leq a$, temos $Hom(a,a) = \{l_a^a\} = \{id_a\}$.

Exemplo 2.1. Se X for um espaço topológico, $(X, \subset)$ é um conjunto ordenado, logo a categoria Top_X como vista anteriormente é um exemplo de uma categoria ordenada.

Sejam $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ conjuntos parcialmente ordenados vistos como categorias. Para que uma função $f\colon X \to Y$ seja funtor precisamos que, para $a, b \in X$ com $a \leq_X b$, o morfismo l_a^b em X seja levado por f em um morfismo $f(l_a^b) : f(a) \to f(b)$ em Y, o que ocorre se, e somente se, $f(a) \leq_Y f(b)$. Ou seja, um funtor neste contexto é uma função crescente (não necessariamente estritamente crescente).

Consideremos as seguintes categorias:

1. *Ord* cujos objetos são conjuntos ordenados e os morfismos de X a Y em *Ord* são funções crescentes de X e Y;

2. *Cat* cujos objetos são as categorias pequenas e os morfismos $Hom(\mathscr{C}, \mathscr{D}) = Funct(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ são os funtores de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$.

Com isso, obtemos um mergulho de categorias:

$$\begin{aligned} Ord &\hookrightarrow Cat \\ (X,\leq) &\mapsto (X,\leq) \text{ como categoria} \\ f : X \to Y &\mapsto f : X \to Y \text{ como funtor.} \end{aligned}$$

Consideremos a categoria Δ dos conjuntos totalmente ordenados finitos da forma $\{0,\dots,n\}$, sendo $n \in \mathbb{N}$, definida da seguinte maneira:

1. Objetos de Δ: pares $([n],\leq)$, com $n \in \mathbb{N}$, $[n] = \{0,\dots,n\}$ e $\leq$ relação de ordem usual em $\mathbb{N}$;
2. Morfismos $f : [n] \to [m]$ são funções crescentes $f : \{0,\dots,n\} \to \{0,\dots,m\}$.

Observe que Δ é uma subcategoria cheia de *Ord*. Dessa forma, ao restringir a inclusão de *Ord* em *Cat*, podemos pensar em Δ como uma subcategoria de *Cat*.

Seja $\mathscr{C}$ uma categoria qualquer, estudemos brevemente como se comporta um funtor $\varphi : [n] \to \mathscr{C}$, $([n],\leq) \in Ob(\Delta)$. Obtemos uma função $\varphi : \{0,\dots,n\} \to Ob(\mathscr{C})$ em que

$$X_0 = \varphi(0),\dots,X_n = \varphi(n),$$

já com relação às imagens dos morfismos temos

$$\varphi_0 = \varphi(f_0),\dots,\varphi_n = \varphi(f_n)$$

onde $f_i : i \to i+1$ em $([n],\leq)$ como categoria, e os demais morfismos são composições desses.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\varphi"'] & 1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & \cdots \arrow[r, "f_{n-2}"] & n-1 \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi"'] & n \arrow[d, "\varphi"'] \\ X_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & X_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{n-2}"'] & X_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"'] & X_n \end{tikzcd}$$

Ou seja, um funtor $\varphi : [n] \to \mathscr{C}$ é equivalente a uma sequência de objetos e morfismos

$$X_0 \xrightarrow{\varphi_0} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} X_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_n$$

Além disso, temos $Funct([0],\mathscr{C}) = Ob(\mathscr{C})$, $Funct([1],\mathscr{C}) = Hom\mathscr{C} = Morf\mathscr{C}$, $Funct([2],\mathscr{C}) = \{$composições de dois morfismos$\}$ e assim por diante.

Observe que cada $[n] \in Ob(\Delta)$ pode ser identificado com o n-simplexo $|\Delta^n| \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sendo

$$|\Delta^n| = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ 0 \leq x_1,\dots,x_{n+1} \leq 1 \text{ e } x_1+\dots+x_{n+1} = 1\}.$$

Formalmente estamos mergulhando a categoria Δ em *Top*.

Exemplo 2.2. $|\Delta^0| = \{1\}$, $|\Delta^2|$ é o segmento de reta em $\mathbb{R}^2$ entre $(1,0)$ e $(0,1)$, $|\Delta^3|$ é o triângulo em $\mathbb{R}^3$ de vértices $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$.

Os vértices de $|\Delta^n|$ formam o conjunto $\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$ onde cada $e_i = (0,\dots,i,\dots,0)$ é da base canônica.

Todos os morfismos em Δ podem ser gerados por morfismos de faces e degenerações, que são maneiras naturais de passar de $[n-1]$ a $[n]$ e $[n+1]$ a $[n]$, respectivamente.

Definição 2.3. Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $i \in \{0,\dots,n+1\}$, definimos o morfismo face d_n^i como

$$\begin{aligned} d_n^i : [n] &\to [n+1] \\ j &\mapsto d_n^i(j) = \begin{cases} j, & j < i \\ j+1, & j \geq i \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} d_n^i : [n] &\to [n+1] \\ 0 &\mapsto 0 \\ &\vdots \\ i-1 &\mapsto i-1 \\ i &\mapsto i+1 \\ &\vdots \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

Do ponto de vista geométrico, temos que $d_n^i : |\Delta^n| \hookrightarrow |\Delta^{n+1}|$ é a única extensão linear de $d_n^i : [n] \to [n+1]$, o qual pode ser pensado como o mergulho de $|\Delta^n|$ como face oposta ao i-ésimo vértice de $|\Delta^{n+1}|$.

Definição 2.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0,\cdots,n-1\}$, definimos o morfismo degeneração c_n^i como

$$\begin{aligned} c_n^i : [n] &\to [n-1] \\ j &\mapsto c_n^i(j) = \begin{cases} j, & j \leq i \\ j-1, & j > i \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} c_n^i : [n] &\to [n-1] \\ 0 &\mapsto 0 \\ &\vdots \\ i &\mapsto i \\ i+1 &\mapsto i \\ i+2 &\mapsto i+1 \\ &\vdots \\ n &\mapsto n-1 \end{aligned}$$

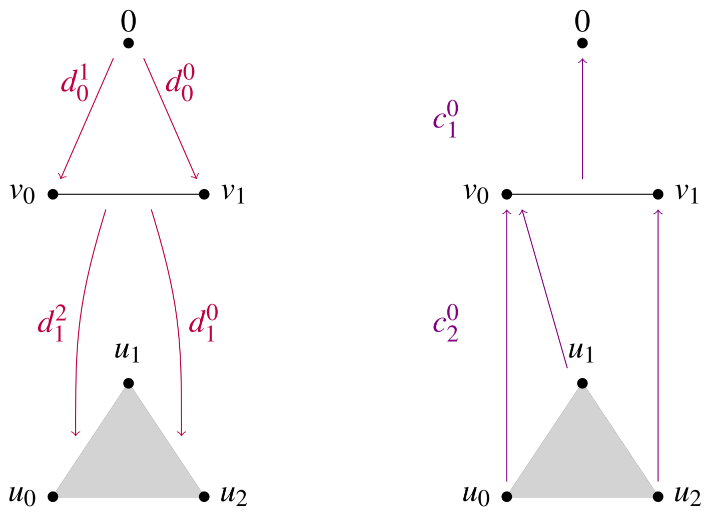
Do ponto de vista geométrico, temos que $c_n^i : |\Delta^n| \to |\Delta^{n-1}|$ é a única extensão linear de $c_n^i : [n] \to [n-1]$, o qual pode ser pensado como o colapso de $|\Delta^n|$ em $|\Delta^{n-1}|$.

Exemplo 2.5. Considerando v_j, u_j os vértices de $|\Delta^1|$ e $|\Delta^2|$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} d_0^0 : |\Delta^0| &\to |\Delta^1| \\ 0 &\mapsto v_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_0^1 : |\Delta^0| &\to |\Delta^1| \\ 0 &\mapsto v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1^0 : |\Delta^1| &\to |\Delta^2| \\ v_0 &\mapsto u_1 \\ v_1 &\mapsto u_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_1^1 : |\Delta^1| &\to |\Delta^2| \\ v_0 &\mapsto u_0 \\ v_1 &\mapsto u_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_1^2 : |\Delta^1| &\to |\Delta^2| \\ v_0 &\mapsto u_0 \\ v_1 &\mapsto u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1^0 : |\Delta^1| &\to |\Delta^0| \\ v_0 &\mapsto 0 \\ v_1 &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_2^0 : |\Delta^2| &\to |\Delta^1| \\ u_0 &\mapsto v_0 \\ u_1 &\mapsto v_0 \\ u_2 &\mapsto v_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_2^1 : |\Delta^2| &\to |\Delta^1| \\ u_0 &\mapsto v_0 \\ u_1 &\mapsto v_1 \\ u_2 &\mapsto v_1 \end{aligned}$$



Proposição 2.6. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos*

1. $d_{n+1}^{j} \circ d_n^i = d_{n+1}^i \circ d_n^{j-1}$, *se* $i < j$*;*
2. $c_n^j \circ c_{n+1}^i = c_n^i \circ c_{n+1}^{j+1}$, *se* $i \leq j$
3. $c_{n+1}^j \circ d_n^i = \begin{cases} d_{n-1}^i \circ c_n^{j-1}, & i < j \\ id_n, & i = j \text{ ou } i = j+1 \\ d_{n-1}^{i-1} \circ c_n^j, & i > j+1 \end{cases}$

Retomando, a categoria Δ tem por objetos $Ob(\Delta) = \{[0],[1],[2],\cdots\}$ e por morfismos funções crescentes, sendo que cada morfismo pode ser gerado pelas faces e pelas degenerações, ou seja, é uma composição dessas funções. Logo, para estudar Δ, basta estudar as faces e as degenerações. A seguinte definição será crucial para a formalização das ∞-categorias:

Definição 2.7. Um **conjunto simplicial** é um funtor $s : \Delta^{op} \to Sets$ ou, equivalentemente, um pré-feixe na categoria Δ.

Observação 2.8. Essa noção pode ser generalizada: Um **objeto simplicial** em $\mathscr{C}$ é um funtor $s : \Delta^{op} \to \mathscr{C}$; e um **espaço simplicial** em $\mathscr{C}$ é um funtor $s : \Delta^{op} \to Top$.

Chamaremos $s_n = s([n])$, o qual é um conjunto. Temos

$$s([0]) = s_0,\ s([1]) = s_1,\ s([2]) = s_2, \cdots$$

e, chamaremos $\partial_n^i = s(d_n^i)$ e $\delta_n^i = s(c_n^i)$, logo,

$$\partial_n^i : s_{n+1} \to s_n \quad \text{e} \quad \delta_n^i : s_{n-1} \to s_n$$

Intuitivamente, dado s conjunto simplicial, pensamos em cada elemento de s_n como um n-simplexo, logo, a quantidade de $|\Delta^n|$ é a mesma[1] de $\#s_n$. Além disso, as funções $\partial_n^i : s_{n+1} \to s_n$ levam um $n+1$-simplexo em um degenerado $|\Delta^n|$; e $\delta_n^i : s_{n-1} \to s_n$ leva cada $|\Delta^{n-1}|$ em uma face de um n-simplexo. Essa noção ficará mais esclarecida no próximo capítulo.

[1]Chamaremos $\#A$ a cardinalidade do conjunto A.

2.1 Realização Geométrica

Uma importante definição para a compreensão dos conjuntos simpliciais e, principalmente, para o estudo das ∞-categorias é a seguinte:

Definição 2.9. Dado $s : \Delta^{op} \to Sets$ um conjunto simplicial, a **realização geométrica** de s é o espaço topológico dado pelo quociente

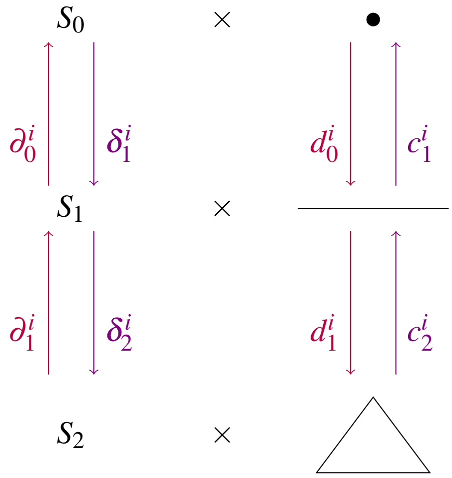
$$|s| = \frac{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} s_n \times |\Delta^n|}{\sim},$$

em que, para todos $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \cdots, n+1\}$, $a_n \in s_n$ e $x \in |\Delta^{n-1}|$

$$(a_n, d^i_{n-1}(x)) \sim (\partial^i_{n-1}(a_n), x)$$

e para todos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $a_n \in s_n$ e $x \in |\Delta^{n+1}|$

$$(a_n, c^i_{n+1}(x)) \sim (\delta^i_{n+1}(a_n), x).$$



Para exemplificar, considere $a_1 \in S_1$, $x \in \Delta^2$, então $(\delta^i_2(a_1), x) \sim (a_1, c^i_2(x))$.

2.1.1 Realização geométrica de Δ^0 e Δ^1

Na seção seguinte, com o Lema de Yoneda, veremos que um objeto $[n]$ da categoria Δ pode ser identificado com o conjunto simplicial

$$\begin{aligned} s^n : \Delta^{op} &\to Sets \\ [m] &\mapsto Hom_\Delta([m],[n]) \\ (\varphi : [m] \to [l]) &\mapsto s^n(\varphi) : Hom_\Delta([l],[n]) \to Hom_\Delta([m],[n]) \end{aligned}$$

em que $s^n(\varphi)(f) = f \circ \varphi$, para $f \in Hom_\Delta([l],[n])$. Chamaremos $s^n([m]) = Hom_\Delta([m],[n]) \doteq X_m$.

Faremos a realização geométrica de s^0 e s^1, para isso, é interessante que se consulte o Exemplo 2.5 sempre que necessário. Comecemos por s^0:

Exemplo 2.10. Seja $[m] \in \Delta$ qualquer, $Hom_\Delta([m],[0])$ é o conjunto de todas as funções crescentes $f : \{0,\dots,m\} \to \{0\}$, ou seja,

$$X_m = Hom_\Delta([m],[0]) = \{x_m\}, \ \ \forall\, [m] \in \Delta$$

Com isso, também obtemos que para todos $[m],[l] \in \Delta$ e $\varphi : [m] \to [l]$, a única opção de $s^0(\varphi) : \{x_l\} \to \{x_m\}$ é a trivial. Logo,

$$\begin{aligned} s^0 : \Delta^{op} &\to Sets \\ [m] &\mapsto X_m = \{x_m\} \\ (\varphi : [m] \to [l]) &\mapsto s^0(\varphi) : \{x_l\} \to \{x_m\} \end{aligned}$$

em particular,

$$\begin{aligned} s^0(c_1^0) &= \delta_1^0 : X_0 \to X_1 \\ s^0(c_2^0) &= \delta_2^0 : X_1 \to X_2 \\ s^0(c_2^1) &= \delta_2^1 : X_1 \to X_2 \end{aligned}$$

são triviais.

A realização geométrica de s^0 é o espaço topológico dado pelo quociente

$$|s^0| = \frac{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} \times |\Delta^n|}{\sim},$$

em que, para todos $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0,\cdots,n+1\}$ e $x \in |\Delta^{n-1}|$

$$(x_n, d_{n-1}^i(x)) \sim (x_{n-1}, x)$$

e para todos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{0,\cdots,n-1\}$ e $x \in |\Delta^{n+1}|$

$$(x_n, c_{n+1}^i(x)) \sim (x_{n+1}, x).$$

Neste exemplo em específico, basta compreender o que ocorre com respeito a

$$(x_n, c_{n+1}^i(x)) \sim (x_{n+1}, x).$$

Para $x \in |\Delta^2|$ temos

$$(x_1, c_2^0(x)) \sim (x_2, x) \ \text{ e } \ (x_1, c_2^1(x)) \sim (x_2, x)$$

e para $x \in |\Delta^1|$

$$(x_0, c_1^0(x)) \sim (x_1, x)$$

Como c_2^i leva $|\Delta^2|$ em $|\Delta^1|$ linearmente, temos que $X_2 \times |\Delta^2| \approx |\Delta^2|$ se identifica com $X_1 \times |\Delta^1| \approx |\Delta^1|$ respeitando vértices sendo levados em vértices (degenera). E também, c_1^0 degenera $|\Delta^1|$ em $|\Delta^0|$, consequentemente, $X_1 \times |\Delta^1| \approx |\Delta^1|$ se identifica com $X_0 \times |\Delta^0| \approx |\Delta^0|$. Dessa mesma forma, obtemos que $X_n \times |\Delta^n| \approx |\Delta^n|$ se identifica com $X_0 \times |\Delta^0| \approx |\Delta^0|$ pela transitividade da relação de ordem que define este espaço topológico.

Portanto, a realização geométrica de s^0 é o espaço topológico $|s^0| = X_0 \times |\Delta^0| \approx |\Delta^0|$.

Exemplo 2.11. Estudemos agora a realização geométrica de s^1.

$$\begin{aligned} s^1 : \Delta^{op} &\to Sets \\ [m] &\mapsto X_m = Hom_\Delta([m],[1]) \\ (\varphi : [m] \to [n]) &\mapsto s^1(\varphi) : Hom_\Delta([n],[1]) \to Hom_\Delta([m],[1]) \end{aligned}$$

tal que $s^1(\varphi)(f) = f \circ \varphi$ para todo $f \in Hom_\Delta([n],[1])$.

Temos[2]

$$X_0 = Hom_\Delta([0],[1]) = \{f_0^0, f_0^1\}$$

com $f_0^0(0) = 0$ e $f_0^1(0) = 1$;

$$X_1 = Hom_\Delta([1],[1]) = \{f_1^0, f_1^1, f_1^2\}$$

com $f_1^0([1]) = \{0\}$, $f_1^1 = id_{[1]}$ e $f_1^2([1]) = \{1\}$;

$$X_2 = Hom_\Delta([2],[1]) = \{f_2^0, f_2^1, f_2^2, f_2^3\}$$

com $f_2^0([2]) = \{0\}$, $f_2^1(\{0,1\}) = \{0\}$ e $f_2^1(2) = 1$, $f_2^2(0) = 0$ e $f_2^1(\{1,2\}) = \{1\}$, e $f_2^3([2]) = \{1\}$.

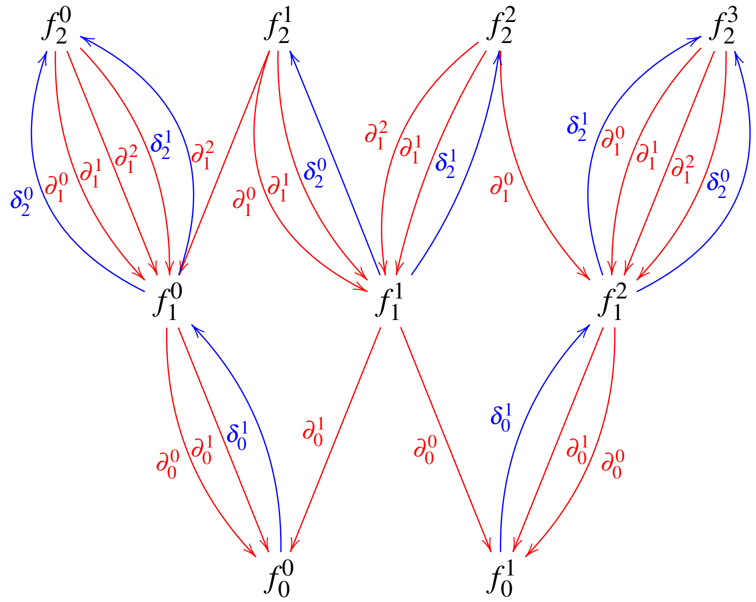
Além disso,

$$\begin{aligned} s^1(d_0^0) = \partial_0^0 : X_1 &\to X_0 \\ f_1^0 &\mapsto f_0^0 \\ f_1^1 &\mapsto f_0^1 \\ f_1^2 &\mapsto f_0^1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s^1(d_0^1) = \partial_0^1 : X_1 &\to X_0 \\ f_1^0 &\mapsto f_0^0 \\ f_1^1 &\mapsto f_0^0 \\ f_1^2 &\mapsto f_0^1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s^1(c_1^0) = \delta_1^0 : X_0 &\to X_1 \\ f_0^0 &\mapsto f_1^0 \\ f_0^1 &\mapsto f_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^1(d_1^0) = \partial_1^0 : X_2 &\to X_1 \\ f_2^0 &\mapsto f_1^0 \\ f_2^1 &\mapsto f_1^1 \\ f_2^2 &\mapsto f_1^2 \\ f_2^3 &\mapsto f_1^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s^1(d_1^1) = \partial_1^1 : X_2 &\to X_1 \\ f_2^0 &\mapsto f_1^0 \\ f_2^1 &\mapsto f_1^1 \\ f_2^2 &\mapsto f_1^1 \\ f_2^3 &\mapsto f_1^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s^1(d_1^2) = \partial_1^2 : X_2 &\to X_1 \\ f_2^0 &\mapsto f_1^0 \\ f_2^1 &\mapsto f_1^0 \\ f_2^2 &\mapsto f_1^1 \\ f_2^3 &\mapsto f_1^2 \end{aligned}$$

[2]Para uma função $f : [m] \to [1]$ ser crescente precisamos que uma quantidade de elementos de seu domínio seja levada em 0 e o restante a partir de então seja levada em 1. Como $\#[m] = m+1$, temos $m+1$ possibilidades de $i \in [m]$ que podem ser o primeiro elemento a ser elevado em 1, $f(i) = 1$. Além disso, a função $f : [m] \to [1]$ identicamente nula também é crescento, logo, $\#X_m = m+2$.

$$
\begin{aligned}
s^1(c_2^0) = \delta_2^0 : X_1 &\to X_2 \\
f_1^0 &\mapsto f_2^0 \\
f_1^1 &\mapsto f_2^1 \\
f_1^2 &\mapsto f_2^3
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
s^1(c_2^1) = \delta_2^1 : X_1 &\to X_2 \\
f_1^0 &\mapsto f_2^0 \\
f_1^1 &\mapsto f_2^2 \\
f_1^2 &\mapsto f_2^3
\end{aligned}
$$



Agora que já compreendemos bem o comportamento do conjunto simplicial s^1, podemos estudar sua realização geométrica, a qual é

$$|s^1| = \frac{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|}{\sim},$$

com

(i)
$$(a_n, d_{n-1}^i(x)) \sim (\partial_{n-1}^i(a_n), x), \quad n \in \mathbb{N}, i \in \{0, \cdots, n+1\}, a_n \in X_n, x \in |\Delta^{n-1}|$$

(ii)
$$(a_n, c_{n+1}^i(x)) \sim (\delta_{n+1}^i(a_n), x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \in \{0, \cdots, n-1\}, a_n \in X_n, x \in |\Delta^{n+1}|$$

Tendo por base o Exemplo 2.10, de (ii) segue

$$\{f_2^0\} \times |\Delta^2| \ \sim \ \{f_1^0\} \times |\Delta^1| \ \sim \ \{f_0^0\} \times |\Delta^0|$$

$$\{f_2^1\} \times |\Delta^2| \ \sim \ \{f_1^1\} \times |\Delta^1|$$

$$\{f_2^2\} \times |\Delta^2| \ \sim \ \{f_1^1\} \times |\Delta^1|$$

$$\{f_2^3\} \times |\Delta^2| \ \sim \ \{f_1^2\} \times |\Delta^1| \ \sim \ \{f_0^1\} \times |\Delta^0|$$

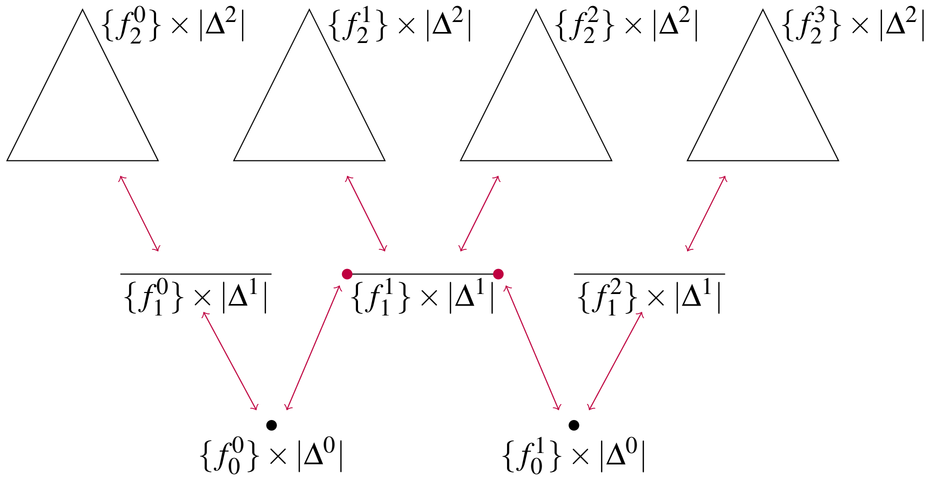
Pela transitividade da relação de equivalência, obtemos que todos os pares $\{f_n^i\} \times |\Delta^n|$ se relacionam com algum desses para as dimensões superiores a estas analisadas. Ou seja, pelas degenerações, obtemos que todos os pares $\{f_n^i\} \times |\Delta^n|$ se identificam com $\{f_0^0\} \times |\Delta^0|$ ou $\{f_1^1\} \times |\Delta^1|$ ou $\{f_0^1\} \times |\Delta^0|$. Por (i), ∂_0^1, ∂_0^0, d_0^1 e d_0^0 segue que

$$\{f_0^0\} \times |\Delta^0| \sim (f_1^1, v_0)$$

e

$$\{f_0^1\} \times |\Delta^0| \sim (f_1^1, v_1).$$

Portanto, obtemos que a realização geométrica de s^1 é $|s^1| = \{f_1^1\} \times |\Delta^1| \approx |\Delta^1|$.



A partir deste momento denotaremos os conjuntos simpliciais s^n por Δ^n, obtendo uma notação coerente ao dizer que $|\Delta^n|$ é a realização geométrica de Δ^n. Utilizando a notação do próximo capítulo temos que $\Delta^n = P_{[n]}$ para $[n] \in Ob(\Delta)$.

CAPÍTULO 3

Lema de Yoneda

De modo geral, temos a seguinte definição:

Definição 3.1. Um pré-feixe em uma categoria $\mathscr{C}$, com valores em $\mathscr{D}$, é um funtor $P : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$.

O seguinte exemplo é de grande importância e faz parte da motivação para essa definição.

Exemplo 3.2. Novamente consideremos $\mathscr{D}$ sendo a categoria escolhida entre conjuntos, grupos abelianos, anéis comutativos, R-módulos (R um anel fixado com unidade), R-álgebras comutativas, anéis comutativos unitários, R-álgebras comutativas unitárias; e X um espaço topológico.

Dado um aberto $U \subset X$, fica definido o objeto $C^0(U) = C^0(U, \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R},\ \text{função contínua}\}$ em $\mathscr{D}$. Além disso, dados $V \subset U \subset X$ abertos, definimos a restrição

$$\begin{aligned} Rest : C^0(U) &\to C^0(V) \\ f &\mapsto f_{|V} \end{aligned}$$

o qual é um morfismo entre as estruturas correspondentes. Valem:

1. $V = U \Rightarrow f_{|U} = f$;

2. $W \subset V \subset U$ em $X \Rightarrow (f_{|V})_{|W} = f_{|W}$.

Estas propriedades simples tornam essa estrutura um pré-feixe em X, $P : Top_X^{op} \to \mathscr{D}$, em que dados os abertos $V \subset U$ em X, $P(U) = C^0(U)$ e $P(i) : C^0(U) \to C^0(V)$ é tal que $P(i)(f) = f_{|V}$, onde $i : V \to U$ é o único morfismo entre V e U.

Um caso muito relevante é dos pré-feixes $P : \mathscr{C}^{op} \to Sets$.

Dado $A \in Ob(\mathscr{C})$, fica definido o pré-feixe

$$\begin{aligned} P_A : \mathscr{C}^{op} &\to Sets \\ B &\mapsto Hom_{\mathscr{C}}(B, A) \\ (\varphi : B \to C) &\mapsto P_\varphi : Hom_{\mathscr{C}}(C, A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B, A) \end{aligned}$$

em que $P_\varphi(f) = f \circ \varphi$, para $f \in Hom_{\mathscr{C}}(C,A)$.

De fato, para $id : B \to B$ e $f \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$, $P_{id}(f) = f \circ id = f$, então $P_{id} = id_{Hom_{\mathscr{C}}(B,A)}$, e para $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(B,C)$ e $\psi \in Hom_{\mathscr{C}}(C,D)$ quaisquer, isto é, $\varphi : B \to C$ e $\psi : C \to D$, temos $P_\varphi \circ P_\psi : Hom_{\mathscr{C}}(D,A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ é tal que, para $f \in Hom_{\mathscr{C}}(D,A)$, $P_\varphi \circ P_\psi(f) = f \circ \psi \circ \varphi = P_{\psi\circ\varphi}(f)$.

Definição 3.3. Um pré-feixe $P : \mathscr{C}^{op} \to Sets$ é dito representável se P for isomorfo (como funtor) a P_A para algum $A \in Ob(\mathscr{C})$.

Ou seja, um funtor P é representável se, e somente se, existir um objeto $A \in Ob(\mathscr{C})$ e $\Phi : P \to P_A$ um isomorfismo de funtores. Lembremos o que isto significa. Suponha $\Phi : P \to P_A$ um isomorfismo então, por ser um morfismo de funtores, temos que dado $B \in Ob(\mathscr{C})$, $\Phi(B) : P(B) \to P_A(B) = Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ é tal que para toda $f : B \to C$ em $\mathscr{C}$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
P(B) \arrow[r, "\Phi(B)"] & Hom_{\mathscr{C}}(B,A) \\
P(C) \arrow[u, "P(f)"] \arrow[r, "\Phi(C)"'] & Hom_{\mathscr{C}}(C,A) \arrow[u, "P_A(f)"']
\end{tikzcd}$$

e, por ser isomorfismo, $\Phi(B) : P(B) \to Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ é um isomorfismo em $Sets$, ou seja, $\Phi(B)$ é uma bijeção.

Dada uma categoria $\mathscr{C}$, fica definida a categoria $\widehat{\mathscr{C}}$ dos pré-feixes em $\mathscr{C}$, em que os objetos são os funtores $P : \mathscr{C}^{op} \to Sets$ e os morfismos são os morfismos de funtores.

Definição 3.4. O funtor de Yoneda é dado por:

$$\begin{aligned}
Y : \mathscr{C} &\to \widehat{\mathscr{C}} \\
A &\mapsto P_A \\
(f : A \to B) &\mapsto Y_{A,B}(f) : P_A \to P_B
\end{aligned}$$

onde para cada $C \in Ob(\mathscr{C})$

$$\begin{aligned}
Y_{A,B}(f)(C) : Hom_{\mathscr{C}}(C,A) &\to Hom_{\mathscr{C}}(C,B) \\
\varphi &\mapsto f \circ \varphi
\end{aligned}$$

lembrando que $Hom_{\mathscr{C}}(C,A) = P_A(C)$ e $Hom_{\mathscr{C}}(C,B) = P_B(C)$.

Observação 3.5. Formalmente Y é dado por uma função $Y : Ob(\mathscr{C}) \to Ob(\widehat{\mathscr{C}})$ entre objetos e, para cada $A,B \in Ob(\mathscr{C})$, uma função $Y_{A,B} : Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \to Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(Y(A),Y(B))$ em que para cada $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ temos $Y_{A,B}(f)$ como definido acima. A fim de não carregar a notação, escreveremos apenas $Y(f)$ para nos referir a $Y_{A,B}(f)$ quando não houver risco de confusão.

Observação 3.6. Esta aplicação é, de fato, um funtor:

Para cada $f : A \to B$ em $\mathscr{C}$, $Y(f) : P_A \to P_B$ é um morfismo de funtores. Para provar a afirmação, precisamos mostrar que para todo $g : C \to D$ em $\mathscr{C}$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
P_A(C) = Hom_{\mathscr{C}}(C,A) \arrow[r, "Y(f)(C)"] & Hom_{\mathscr{C}}(C,B) = P_B(C) \\
P_A(D) = Hom_{\mathscr{C}}(D,A) \arrow[u, "P_A(g)"] \arrow[r, "Y(f)(D)"'] & Hom_{\mathscr{C}}(D,B) = P_B(D) \arrow[u, "P_B(g)"']
\end{tikzcd}$$

Ou seja, dado $f' \in Hom_{\mathscr{C}}(D,A)$, $Y(f)(C) \circ P_A(g)(f') = P_B(g) \circ Y(f)(D)(f')$. De fato, $Y(f)(C) \circ P_A(g)(f') = Y(f)(C)(f' \circ g) = f \circ (f' \circ g)$, e, $P_B(g) \circ Y(f)(D)(f') = P_B(g)(f \circ f') = (f \circ f') \circ g$.

E também, dados $f : A \to B$ e $h : B \to C$ morfismos em $\mathscr{C}$, temos que $Y(h \circ f) = Y(h) \circ Y(f)$, pois dado $D \in Ob(\mathscr{C})$:

$$\begin{aligned} Y(h \circ f)(D) : Hom_{\mathscr{C}}(D,A) &\to Hom_{\mathscr{C}}(D,C) \\ \varphi &\mapsto h \circ f \circ \varphi \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} Y(f)(D) : Hom_{\mathscr{C}}(D,A) &\to Hom_{\mathscr{C}}(D,B) \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

então $Y(h)(D) : Hom_{\mathscr{C}}(D,B) \to Hom_{\mathscr{C}}(D,C)$ é tal que $f \circ \varphi \mapsto h \circ f \circ \varphi$, logo

$$\begin{aligned} Y(h) \circ Y(f) : Hom_{\mathscr{C}}(D,A) &\to Hom_{\mathscr{C}}(D,C) \\ f \circ \varphi &\mapsto h \circ f \circ \varphi \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $D \in Ob(\mathscr{C})$, $Y(h \circ f)(D) = Y(h) \circ Y(f)(D)$. Além disso, é simples ver que $Y(id_A) = id_{P_A} \in Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A, P_A)$.

Desta maneira, obtemos um funtor da categoria $\mathscr{C}$ à categoria $\widehat{\mathscr{C}}$, o qual é injetor nos objetos[1]. Temos por definição que a imagem essencial de Y é formada pelos funtores $P \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$ tal que existe $A \in Ob(\mathscr{C})$ com $Y(A) = P_A \simeq P$, ou seja, a imagem essencial de Y é formada pelos pré-feixes representáveis.

O corolário do Lema de Yoneda, que veremos a seguir, afirma que Y é um funtor plenamente fiel (fiel e cheio), logo, a categoria $\mathscr{C}$ é equivalente à imagem essencial de Y, isto é, $\mathscr{C}$ é equivalente à subcategoria dos pré-feixes representáveis. Isto significa que um objeto pode ser identificado com o pré-feixe que o representa.

Para enunciar o Lema de Yoneda precisamos da seguinte construção. Fixamos $A \in Ob(\mathscr{C})$ e $P \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$, isto é, $P : \mathscr{C}^{op} \to Sets$. Seja $\Phi \in Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A, P)$ um morfismo $\Phi : P_A \to P$ de pré-feixes qualquer. Para todo $B \in Ob(\mathscr{C})$, temos o morfismo (função) $\Phi_B : Hom_{\mathscr{C}}(B,A) \to P(B)$ em $Sets$. Em

[1] De fato, se A, $B \in Ob(\mathscr{C})$ então $Y(A), Y(B) : \mathscr{C}^{op} \to Sets$ são funtores tais que, para $C \in Ob(\mathscr{C})$, $Y(A)(C) = P_A(C) = Hom_{\mathscr{C}}(C,A)$ e $Y(B)(C) = P_B(C) = Hom_{\mathscr{C}}(C,B)$. Caso $Y(A) = Y(B)$ segue que $Hom_{\mathscr{C}}(C,A) = Hom_{\mathscr{C}}(C,B)$ e $A = B$.

particular, fica definido $\Phi_A : Hom_{\mathscr{C}}(A,A) \to P(A)$, que manda $id_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A,A)$ em um elemento $\Phi_A(id_A) \in P(A)$. Com isso, para cada $P \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$, construímos a seguinte função

$$\begin{aligned} \Psi_P : Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P) &\to P(A) \\ \Phi &\mapsto \Phi_A(id_A) \end{aligned}$$

Lema 3.7 (Lema de Yoneda)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $A \in Ob(\mathscr{C})$ um objeto fixado. Então a aplicação Ψ_P é uma bijeção para cada $P \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$.*

Demonstração. Seja $P \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$, mostremos que existe uma função inversa Ψ_P^{-1}. Definimos

$$\begin{aligned} \Psi_P^{-1} : P(A) &\to Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P) \\ x &\mapsto \Psi_P^{-1}(x) : P_A \to P \end{aligned}$$

onde para cada $B \in Ob(\mathscr{C})$,

$$\begin{aligned} \Psi_P^{-1}(x)(B) : P_A(B) = Hom_{\mathscr{C}}(B,A) &\to P(B) \\ (f : B \to A) &\mapsto P(f)(x) \end{aligned}$$

lembrando que $x \in P(A)$ e $P(f) : P(A) \to P(B)$ porque P é um funtor contravariante, logo $P(f)(x) \in P(B)$.

Precisamos mostrar que Ψ_P^{-1} está bem definida, isto é, $\Psi_P^{-1}(x)$ é um morfismo de funtores para todo $x \in P(A)$, e que Ψ_P^{-1} é inversa de Ψ_P.

Seja $x \in P(A)$ qualquer, mostremos que $\Psi_P^{-1}(x)$ é um morfismo de funtores. Sejam $B,C \in Ob(\mathscr{C})$ e $g : B \to C$ quaisquer, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(B,A) \arrow[r, "\Psi_P^{-1}(x)(B)"] & P(B) \\ Hom_{\mathscr{C}}(C,A) \arrow[u, "P_A(g)"] \arrow[r, "\Psi_P^{-1}(x)(C)"'] & P(C) \arrow[u, "P(g)"'] \end{tikzcd}$$

Seja $f \in Hom_{\mathscr{C}}(C,A)$ qualquer:

$$\begin{aligned} f : C \to A &\mapsto P_A(g)(f) = f \circ g : B \to A \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A) \\ &\mapsto \Psi_P^{-1}(x)(B)(P_A(g)(f)) = \Psi_P^{-1}(x)(B)(f \circ g) = P(f \circ g)(x) \in P(B) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f : C \to A &\mapsto \Psi_P^{-1}(x)(C)(f) = P(f)(x) \in P(C) \\ &\mapsto P(g)(\Psi_P^{-1}(x)(C)(f)) = P(g)(P(f)(x)) = P(g) \circ P(f)(x) \in P(B) \end{aligned}$$

Porém, $P(f \circ g) = P(g) \circ P(f)$ por P ser um funtor contravariante. Logo, o diagrama comuta, isto é, Ψ_P^{-1} está bem definida.

Agora mostremos que Ψ_P^{-1} é inversa de Ψ_P, ou seja, queremos

$$\Psi \circ \Psi_P^{-1} = id_{P(A)} : P(A) \to P(A)$$
$$\Psi_P^{-1} \circ \Psi = id_{Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P)} : Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P) \to Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P)$$

Seja $x \in P(A)$ qualquer, $\Psi_P^{-1}(x) : P_A \to P \in Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P)$ é o morfismo de funtores que, quando aplicado em A, obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_P^{-1}(x)(A) \doteq [\Psi_P^{-1}(x)]_A : Hom_{\mathscr{C}}(A,A) &\to P(A) \\ (f : A \to A) &\mapsto P(f)(x) \end{aligned}$$

Em particular, $(id_A : A \to A) \mapsto P(id_A)(x) = id_{P(A)}(x) = x$. Logo, $\Psi \circ \Psi_P^{-1}(x) = [\Psi_P^{-1}(x)]_A(id_A) = x$, ou seja, $\Psi \circ \Psi_P^{-1} = id_{P(A)}$.

Por fim, seja $\Phi \in Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P)$ qualquer, $\Phi : P_A \to P$ é um morfismo de funtores, logo para todo $B \in Ob(\mathscr{C})$, temos $\Phi_B : P_A(B) = Hom_{\mathscr{C}}(B,A) \to P(B)$. Logo,

$$\begin{aligned} \Phi &\mapsto \Psi_P(\Phi) = \Phi_A(id_A) \in P(A) \\ &\mapsto \Psi_P^{-1} \circ \Psi_P(\Phi) = \Psi_P^{-1}(\Phi_A(id_A)) : P_A \to P \end{aligned}$$

Mostremos que o morfismo de funtores $\Psi_P^{-1} \circ \Psi_P(\Phi) = \Phi$ para obtermos $\Psi_P^{-1} \circ \Psi_P = id_{Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P)}$.

Seja $B \in Ob(\mathscr{C})$ qualquer,

$$\begin{aligned} \Psi_P^{-1}(\Phi_A(id_A))(B) : Hom_{\mathscr{C}}(B,A) &\to P(B) \\ (f : B \to A) &\mapsto P(f)(\Phi_A(id_A)) \end{aligned}$$

porém, como $\Phi : P_A \to P$ é um morfismo de funtores, temos que

$$P(f)(\Phi_A(id_A)) = \Phi_B(P_A(f)(id_A)) = \Phi_B(id_A \circ f) = \Phi_B(f).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Psi_P^{-1}(\Phi_A(id_A))(B) : Hom_{\mathscr{C}}(B,A) &\to P(B) \\ (f : B \to A) &\mapsto \Phi_B(f) \end{aligned}$$

Ou seja, $\Psi_P^{-1} \circ \Psi_P(\Phi)(B) = \Psi_P^{-1}(\Phi_A(id_A)(B) = \Phi_B$ para todo $B \in Ob(\mathscr{C})$, então $\Psi_P^{-1} \circ \Psi_P(\Phi) = \Phi$. Portanto, $\Psi_P^{-1} \circ \Psi_P = id_{Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P)}$ e Ψ_P^{-1} é inversa de Ψ_P.

Concluímos que Ψ_P é uma bijeção para todo $P \in Ob(\hat{A})$. $\square$

O seguinte corolário do Lema de Yoneda é de extrema importância, pois é a partir dele que obtemos que $\mathscr{C}$ é equivalente à categoria dos pré-feixes representáveis (imagem essencial de Y).

Corolário 3.8. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. O funtor de Yoneda $Y : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ é plenamente fiel.*

Demonstração. Y é plenamente fiel se for fiel e cheio, ou seja, se para todos $A,B \in Ob(\mathscr{C})$, a função

$$\begin{aligned} Y_{A,B} : Hom_{\mathscr{C}}(A,B) &\to Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(Y(A),Y(B)) = Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P_B) \\ (f : A \to B) &\mapsto (Y_f : P_A \to P_B) \end{aligned}$$

for injetora (para fiel) e sobrejetora (para cheio), ou seja, se é uma bijeção. De fato, pelo Lema de Yoneda obtemos que para $A,B \in Ob(\mathscr{C})$ quaisquer, ao pensar em A como o objeto fixado, $\Psi_{P_B} : Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(P_A,P_B) \to P_B(A) = Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ é uma bijeção, ou seja, $Hom_{\widehat{\mathscr{C}}}(Y(A),Y(B)) \simeq Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$. Mas, $\Psi_{P_B}^{-1} = Y_{A,B}$. De fato, seja $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ e $C \in Ob(\mathscr{C})$ quaisquer,

$$\begin{aligned} \Psi_{P_B}^{-1}(f)(C) : Hom_{\mathscr{C}}(C,A) &\to Hom_{\mathscr{C}}(C,B) \\ g &\mapsto P_B(g)(f) = f \circ g \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y_f(C) : Hom_{\mathscr{C}}(C,A) &\to Hom_{\mathscr{C}}(C,B) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Portanto, $Y_{A,B}$ é uma bijeção para todos $A,B \in Ob(\mathscr{C})$. $\square$

CAPÍTULO 4

Extensão de Kan

As extensões de Kan exercem grande relevância na Teoria das Categorias. No capítulo seguinte mostraremos uma relação de adjunção entre o funtor de Yoneda generalizado $Y_{\mathscr{F}}$ de um funtor $\mathscr{F} : A \to \mathscr{C}$ e a extensão de Kan à esquerda de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_! = L_Y\mathscr{F}$. Dois importantes casos de $\mathscr{F}_!$ são para $\mathscr{F} : \Delta \to Top$ que manda $[n]$ em $|\Delta^n|$ e $\iota_! = L_Y\iota$, onde $\iota : \Delta \hookrightarrow Cat$. No Capítulo 7 entenderemos o papel de $\iota_!$.

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $P : \mathscr{C}^{op} \to Sets$ um pré-feixe, definimos a categoria $P/\mathscr{C}$ dos objetos de P (ou P sobre $\mathscr{C}$) da seguinte forma: os objetos são pares (U,a) com $U \in Ob(\mathscr{C})$ e $a \in P(U)$; e dados $(V,b),(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})$, um morfismo $f : (V,b) \to (U,a)$ em $P/\mathscr{C}$ é um morfismo $f : V \to U$ em $\mathscr{C}$ tal que $P(f)(a) = b$, lembrando que $P(f) : P(U) \to P(V)$. Ou ainda, $a_{|V} = b$ ou $f^*a = b$ usando outras notações.

Considere também o seguinte funtor fiel $\varphi : P/\mathscr{C} \to \mathscr{C}$ que $\varphi(U,a) = U$ e dados $(V,b),(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})$, $\varphi_{V,U} : Hom_{P/\mathscr{C}}((V,b),(U,a)) \to Hom_{\mathscr{C}}(V,U)$ tal que $\varphi_{V,U}(f) = f$. Ou seja

$$\begin{aligned} \varphi : P/\mathscr{C} &\to \mathscr{C} \\ (U,a) &\mapsto U \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

A partir disso e do funtor $Y : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ de Yoneda, definimos

$$\begin{aligned} \varphi_P : P/\mathscr{C} &\to \widehat{\mathscr{C}} \\ (U,a) &\mapsto Y(U) = P_U \\ (f : (V,b) \to (U,a)) &\mapsto (Y_{V,U}(f) : P_V \to P_U) \end{aligned}$$

onde para cada $W \in Ob(\mathscr{C})$,

$$\begin{aligned} \varphi_P(f)(W) = Y_{V,U}(f)(W) : Hom_{\mathscr{C}}(W,V) &\to Hom_{\mathscr{C}}(W,U) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Por definição, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} P/\mathscr{C} \arrow[rr, "\varphi_P"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \widehat{\mathscr{C}} \\ & \mathscr{C} \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

O leitor pode imaginar que o funtor φ_P simplesmente esquece os elementos $a \in P(U)$ para cada $(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})$. Porém não é o que ocorre, pois a partir de φ_P, o elemento $P_U \in Ob(\mathscr{C})$ se repete tantas vezes quanto elementos existem no conjunto $P(U)$. Dessa forma, para a seguinte afirmação, convém pensar em $P/\mathscr{C}$ como uma categoria de índices induzida por P.

Proposição 4.1. *O pré-feixe $P : \mathscr{C}^{op} \to Sets$ é o limite direto de φ_P,*

$$P = \varinjlim \varphi_P.$$

Demonstração. Primeiramente, precisamos mostrar que existe um co-cone de φ_P a $P \in Ob(\widehat{\mathscr{C}})$.

Seja $(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})$ qualquer, definimos o morfismo $\pi_{(U,a)} : \varphi_P(U,a) = P_U \to P$ em $\widehat{\mathscr{C}}$ (morfismo de funtores) da seguinte forma, dado $V \in Ob(\mathscr{C})$,

$$\begin{aligned} \pi_{(U,a)}(V) : P_U(V) = Hom_{\mathscr{C}}(V,U) &\to P(V) \\ f &\mapsto P(f)(a) \end{aligned}$$

Vejamos que $\pi_{(U,a)}$ é morfismo de funtores: Seja $f : W \to V$ um morfismo em $\mathscr{C}$ qualquer, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(V,U) \arrow[r, "\pi_{(U,a)}(V)"] & P(V) \\ Hom_{\mathscr{C}}(W,U) \arrow[u, "P_U(f)"] \arrow[r, "\pi_{(U,a)}(W)"'] & P(W) \arrow[u, "P(f)"'] \end{tikzcd}$$

De fato, seja $g \in Hom_{\mathscr{C}}(W,U)$ qualquer,

$$\pi_{(U,a)}(V)(P_U(f)(g)) = \pi_{(U,a)}(V)(f \circ g) = P(f \circ g)(a)$$

e

$$P(f)(\pi_{(U,a)}(W)(g)) = P(f)(P(g)(a)) = P(f \circ g)(a).$$

Agora, dado outro objeto (V,b) de $P/\mathscr{C}$ qualquer, precisamos mostrar que, para todo $f : (V,b) \to (U,a)$ em $P/\mathscr{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} P_V = \varphi_P(V,b) \arrow[r, "\varphi_P(f)"] \arrow[d, "\pi_{(V,b)}"'] & P_U = \varphi_P(U,a) \arrow[dl, "\pi_{(U,a)}"] \\ P & \end{tikzcd}$$

comuta para obtermos que $(P, (\pi_{(U,a)} : P_U \to P)_{(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})})$ é um co-cone de φ_P.

Seja $W \in Ob(\mathscr{C})$ e $g \in Hom_{\mathscr{C}}(W,V)$ quaisquer, $\pi_{(V,b)}(W) : Hom_{\mathscr{C}}(W,V) \to P(W)$ é tal que $\pi_{(V,b)}(W)(g) = P(g)(b)$. Por outro lado, $(\pi_{(U,a)} \circ \varphi_P(f))(W) = \pi_{(U,a)}(W) \circ \varphi_P(f)(W) : Hom_{\mathscr{C}}(W,V) \to P(W)$ é tal que

$$\pi_{(U,a)}(W)(\varphi_P(f)(W)(g)) = \pi_{(U,a)}(W)(f \circ g) = P(f \circ g)(a) = P(g) \circ P(f)(a) = P(g)(b)$$

Logo, o diagrama comuta e $(P, (\pi_{(U,a)} : P_U \to P)_{(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})})$ é um co-cone de φ_P.

Agora, suponhamos que $(Q, (q_{(U,a)} : P_U \to P)_{(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})})$ seja outro co-cone de φ_P. Então, para todo $(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})$ temos a transformação natural $q_{(U,a)} : P_U = \varphi_P(U,a) \to Q$. Mais ainda, para $V \in Ob(\mathscr{C})$, temos $q_{(U,a)}(V) : P_U(V) = Hom_{\mathscr{C}}(V,U) \to Q(V)$. Em particular,

$$q_{(U,a)}(U) : Hom_{\mathscr{C}}(U,U) \to Q(U)$$

leva $id_U \in Hom_{\mathscr{C}}(U,U)$ em $q_{(U,a)}(U)(id_U) = \alpha_a \in Q(U)$. Dessa forma, definimos a transformação natural $t : P \to Q$ que, para cada $U \in Ob(\mathscr{C})$,

$$\begin{aligned} t(U) : P(U) &\mapsto Q(U) \\ a &\mapsto \alpha_a \end{aligned}$$

Vejamos que t é um morfismo de pré-feixes. Seja $f : V \to U$ morfismo em $\mathscr{C}$ qualquer, mostremos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} P(V) \arrow[r, "t(V)"] & Q(V) \\ P(U) \arrow[u, "P(f)"] \arrow[r, "t(U)"] & Q(W) \arrow[u, "Q(f)"'] \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

comuta. Para $a \in P(U)$ qualquer, chamamos $P(f)(a) = b \in P(V)$, queremos que sejam iguais

$$t(V)(P(f)(a)) = \alpha_b$$

e

$$Q(f)(t(U)(a)) = Q(f)(\alpha_a).$$

Note que $Q(f)(t(U)(a)) = Q(f)(\alpha_a) = Q(f)(q_{(U,a)}(U)(id_U))$. Porém, como para $(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})$, $q_{(U,a)} : P_U \to Q$ é uma transformação natural, temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} P_U(V) = Hom_{\mathscr{C}}(V,U) \arrow[r, "q_{(U,a)}(V)"] & Q(V) \\ P_U(U) = Hom_{\mathscr{C}}(U,U) \arrow[u, "P_U(f)"] \arrow[r, "q_{(U,a)}(U)"'] & Q(U) \arrow[u, "Q(f)"'] \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Então

$$Q(f)(q_{(U,a)}(U)(id_U)) = Q(f)(\alpha_a) = q_{(U,a)}(V)(P_U(f)(id_U)) = q_{(U,a)}(V)(id_U \circ f) = q_{(U,a)}(V)(f)$$

ou seja,

$$Q(f)(\alpha_a) = q_{(U,a)}(V)(f) \tag{4.3}$$

E ainda, por $(Q, (q_{(U,a)})_{(U,a)\in Ob(P/\mathscr{C})})$ ser um co-cone de $\varphi_P : P/\mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$, temos que o seguinte diagrama em $\widehat{\mathscr{C}}$ comuta

$$\begin{tikzcd} \varphi_P(V,b) = P_V \arrow[rr, "\varphi_P(f)"] \arrow[dr, "q_{(V,b)}"'] & & \varphi_P(U,a) = P_U \arrow[dl, "q_{(U,a)}"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_V(V) = Hom_{\mathscr{C}}(V,V) \arrow[rr, "\varphi_P(f)(V)"] \arrow[dr, "q_{(V,b)}(V)"'] & & Hom_{\mathscr{C}}(V,U) = P_U(V) \arrow[dl, "q_{(U,a)}(V)"] \\ & Q(V) & \end{tikzcd}$$

Logo,

$$\alpha_b = q_{(V,b)}(V)(id_V) = q_{(U,a)}(V)(\varphi_P(f)(V)(id_V)) = q_{(U,a)}(V)(f)$$

Ou seja, por (4.3)

$$\alpha_b = q_{(U,a)}(V)(f) = Q(f)(\alpha_a)$$

Com isso, o diagrama (4.1) comuta e $t : P \to Q$ é uma transformação natural.

Mostremos que, para cada $(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})$, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \varphi_P(U,a) \arrow[r, "\pi_{(U,a)}"] \arrow[dr, "q_{(U,a)}"'] & P \arrow[d, "t"] \\ & Q \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Ou seja, para cada $V \in Ob(\mathscr{C})$, comuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(V,U) \arrow[r, "\pi_{(U,a)}(V)"] \arrow[dr, "q_{(U,a)}(V)"'] & P(V) \arrow[d, "t(V)"] \\ & Q(V) \end{tikzcd}$$

Seja $f \in Hom_{\mathscr{C}}(V,U)$ qualquer, chamemos $P(f)(a) = b \in P(V)$. Por (4.1) temos

$$t(V) \circ \pi_{(U,a)}(V)(f) = t(V)(P(f)(a)) = Q(f)(t(U)(a)) = Q(f)(q_{(U,a)}(U)(id_U))$$

e ainda, por (4.2)

$$Q(f) \circ q_{(U,a)}(U)(id_U) = q_{(U,a)}(V) \circ P_U(f)(id_U) = q_{(U,a)}(V)(f)$$

Logo, o (4.4) comuta.

Por fim, falta mostrarmos que $t : P \to Q$ é a única transformação natural que torna (4.4) comutativo.

Seja $t' : P \to Q$ uma transformação natural tal que para todo $(U,a) \in Ob(P/\mathscr{C})$, o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} \varphi_P(U,a) \arrow[r, "\pi_{(U,a)}"] \arrow[dr, "q_{(U,a)}"'] & P \arrow[d, "t'"] \\ & Q \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Então também comuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(U,U) \arrow[r, "\pi_{(U,a)}(U)"] \arrow[dr, "q_{(U,a)}(U)"'] & P(U) \arrow[d, "t'(U)"] \\ & Q(U) \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Sejam $U \in Ob(\mathscr{C})$ e $a \in P(U)$ quaisquer, por (4.6)

$$q_{(U,a)}(U)(id_U) = t'(U) \circ \pi_{(U,a)}(U)(id_U)$$

Mas $q_{(U,a)}(U)(id_U) = t(U)(a)$ e $\pi_{(U,a)}(U)(id_U) = P(id_U)(a) = id_{P(U)}(a) = a$, logo

$$t(U)(a) = t'(U)(a), \quad \forall U \in Ob(\mathscr{C}), \quad a \in P(U)$$

Portanto, $t = t'$. Com isso, concluímos que $P = \varinjlim \varphi_P$.

□

4.1 Definição de Extensão de Kan

Definição 4.2. Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ categorias e $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ e $K : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores quaisquer. Uma extensão de Kan à direita (caso exista) é um funtor $R_K\mathscr{F} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ juntamente com uma transformação natural[1] $\eta : R_K\mathscr{F} \circ K \to \mathscr{F}$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "K"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, dashed, "R_K\mathscr{F}"'] & \end{tikzcd}$$

que satisfaz a seguinte propriedade universal: Para quaisquer $\mathscr{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ e $\alpha : \mathscr{G} \circ K \to \mathscr{F}$, existe uma única transformação natural $\beta : \mathscr{G} \to R_K\mathscr{F}$ tal que

$$\alpha = \eta \circ \beta. \tag{4.7}$$

[1] Como na Definição 1.23.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "K"'] & {} & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, "\mathscr{G}"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, bend right, "K"'] & {} & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, bend left, "R_K\mathscr{F}"] \arrow[ur, bend right, "\mathscr{G}"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\alpha \quad \Uparrow\eta \quad \Uparrow\beta"] & \end{tikzcd}$$

Observação 4.3. Rigorosamente, há um abuso de notação na igualdade (4.7), pois a composição $\eta \circ \beta$ não está bem definida, uma vez que o contra-domínio de β não coincide com o domínio de η. Porém, como β induz naturalmente um morfismo de funtores $\beta' : \mathscr{G} \circ K \to R_K\mathscr{F} \circ K$ tomando $\beta'(U) = \beta(K(U)) : \mathscr{G} \circ K(U) \to R_K\mathscr{F} \circ K(U)$ para todo $U \in Ob(\mathscr{C})$, podemos utilizar (4.7) sem risco de confusão.

Observação 4.4. Dizemos que α fatora de modo único por η.

Analogamente, definimos extensão de Kan à esquerda.

Definição 4.5. Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ categorias e $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ e $K : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores quaisquer. Uma extensão de Kan à esquerda (caso exista) é um funtor $L_K\mathscr{F} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ juntamente com uma transformação natural $\eta : \mathscr{F} \to L_K\mathscr{F} \circ K$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "K"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, dashed, "L_K\mathscr{F}"'] & \end{tikzcd}$$

que satisfaz a seguinte propriedade universal: Para quaisquer $\mathscr{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ e $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G} \circ K$, existe uma única transformação natural $\beta : L_K\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tal que

$$\alpha = \beta \circ \eta. \tag{4.8}$$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "K"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, dashed, "\mathscr{G}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, bend right, "K"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha \quad \Downarrow\eta \quad \Downarrow\beta"] & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, bend left, "L_K\mathscr{F}"] \arrow[ur, bend right, "\mathscr{G}"'] & \end{tikzcd}$$

Observação 4.6. Observações análogas às do caso anterior se aplicam nesta definição.

A seguir, mostraremos que limites e colimites categoriais são casos particulares de extensões de Kan.

Exemplo 4.7. Definimos a categoria 1 em que $Ob(1) = \{1\}$ e há somente o morfismo $id_1 \in Hom_1(1,1)$. Para qualquer que seja a categoria $\mathscr{C}$, existe somente um funtor $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to 1$. Por outro lado, um funtor $\mathscr{G} : 1 \to \mathscr{E}$ se trata de escolher um objeto E na categoria $\mathscr{E}$ para ser imagem do objeto $1 \in Ob(1)$.

Consideremos a seguinte estrutura:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "K"'] & \mathscr{E} \\
& 1
\end{tikzcd}$$

$\mathscr{C}$ e $\mathscr{E}$ categorias, $\mathscr{F}$ e K funtores. Sejam $R_K\mathscr{F} : 1 \to \mathscr{E}$ funtor, com $E = R_K\mathscr{F}(1)$, e $\eta : R_K\mathscr{F} \circ K \to \mathscr{F}$ uma transformação natural. Então $(R_K\mathscr{F}, \eta)$ é uma extensão de Kan à direita se, e somente se, $(E, \eta_X)_{X \in Ob(\mathscr{C})}$ é um limite de $\mathscr{F}$ em $\mathscr{E}$.

De fato, como η é uma transformação natural, para cada $X \in Ob(\mathscr{C})$ temos $\eta_X : R_K\mathscr{F} \circ K(X) \to \mathscr{F}(X)$, mas $K(X) = 1$ e $R_K\mathscr{F}(1) = E$, então

$$\eta_X : E \to \mathscr{F}(X)$$

é tal que para todos $f : X \to Y$ em $\mathscr{C}$, comuta:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "id_E"'] & \mathscr{F}(X) \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"] \\
E \arrow[r, "\eta_Y"] & \mathscr{F}(Y)
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Ou seja.$(E, \eta_X)_{X \in Ob(\mathscr{C})}$ é um cone de $\mathscr{F}$ em $\mathscr{E}$ a partir do objeto E fixado.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_Y"'] & \mathscr{F}(X) \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"] \\
& \mathscr{F}(Y)
\end{tikzcd}$$

Acabamos de ver que dado um funtor $\mathscr{G} : 1 \to \mathscr{E}$ tal que $\mathscr{G}(1) = E'$ e uma transformação natural $\alpha : \mathscr{G} \circ K \to \mathscr{F}$ qualquer, obtemos um cone $(E', \alpha_X : E' \to \mathscr{F}(X))_{X \in Ob(\mathscr{C})}$ de $\mathscr{F}$ em $\mathscr{E}$. Reciprocamente, dado um cone $(E', \alpha_X : E' \to \mathscr{F}(X))_{X \in Ob(\mathscr{C})}$, obtemos o funtor $\mathscr{G} : 1 \to \mathscr{E}$ que leva 1 em E', e $\alpha : \mathscr{G} \circ K \to \mathscr{E}$ induzida por α_X é transformação natural pois o diagrama (4.9) comuta para qualquer $f : X \to Y$ em $\mathscr{C}$. Dessa forma, $(R_K\mathscr{F}, \eta)$ é extensão de Kan à direita se, e somente se, dado $\mathscr{G} : 1 \to \mathscr{E}$ (com $\mathscr{G}(1) = E'$) e $\alpha : \mathscr{G} \circ K \to \mathscr{F}$ transformação natural, existir um único $\beta : \mathscr{G} \to R_K\mathscr{F}$ tal que $\alpha = \eta \circ \beta$. Equivalentemente, se dado $(E', \alpha_X : E' \to \mathscr{F}(X))_{X \in Ob(\mathscr{C})}$ outro cone de $\mathscr{F}$ em $\mathscr{E}$, existir $\beta_1 : E' \to E$ tal que $\eta_X \circ \beta_1 = \alpha_X$. Isto é, $(R_K\mathscr{F}, \eta)$ é extensão de Kan à direita se, e somente se, $(E, \eta_X)_{X \in Ob(\mathscr{C})}$ é um limite de $\mathscr{F}$ em $\mathscr{E}$.

Exemplo 4.8. De modo similar, mostramos o análogo para colimite, sendo $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ e $K : \mathscr{C} \to 1$ funtores: $(L_K\mathscr{F} : 1 \to \mathscr{E}, \eta : \mathscr{F} \to L_K\mathscr{F} \circ K)$ é uma extensão de Kan à esquerda se, e somente se, o co-cone $(E, \eta_X)_{X \in Ob(\mathscr{C})}$ é um colimite de $\mathscr{F}$ em $\mathscr{E}$, com $E = R_K\mathscr{F}(1)$.

Agora, queremos dar uma estrutura funtorial a esta extensão de Kan.

Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ categorias e $K : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtor fixado, em que para toda $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ exista extensão de Kan.

Lembrando que $Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ representa a categoria dos funtores de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{E}$, podemos definir

$$\begin{aligned} R_K : Ob(Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E})) &\to Ob(Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E})) \\ \mathscr{F} &\mapsto R_K\mathscr{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_K : Ob(Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E})) &\to Ob(Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E})) \\ \mathscr{F} &\mapsto L_K\mathscr{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_K : Ob(Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E})) &\to Ob(Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E})) \\ \mathscr{G} &\mapsto \mathscr{G} \circ K \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "K"'] & & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, bend left, "R_K\mathscr{F}"] \arrow[ur, bend right, "L_K\mathscr{F}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "\mathscr{G} \circ K"] \arrow[dr, "K"'] & & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, "\mathscr{G}"'] & \end{tikzcd}$$

Nosso objetivo a seguir é estender essas funções aos morfismos em $Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ e $Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E})$, de modo a obtermos R_K, L_K, C_K funtores entre estas categorias. Além disso, mostraremos que R_K e L_K são adjuntos, respectivamente, à direita e à esquerda de C_K.

Comecemos por C_K. Sejam $\mathscr{G}, \mathscr{G}' : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ funtores, temos que $C_K(\mathscr{G}) = \mathscr{G} \circ K$ e $C_K(\mathscr{G}') = \mathscr{G}' \circ K$. Dada um morfismo de funtores $\alpha : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$, temos para cada $Y \in Ob(\mathscr{D})$,

$$\alpha_Y : \mathscr{G}(Y) \to \mathscr{G}(Y')$$

morfismo em $\mathscr{E}$. Seja $X \in Ob(\mathscr{C})$ qualquer, como $K(X) \in Ob(\mathscr{D})$, podemos definir

$$C_K(\alpha)_X : \mathscr{G} \circ K(X) \to \mathscr{G}' \circ K(X)$$

por

$$\alpha_{K(X)} : \mathscr{G}(K(X)) \to \mathscr{G}'(K(X)).$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, bend left, "\mathscr{G}\circ K"] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{G}'\circ K"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow c_K(\alpha)"] \arrow[dr, bend right, "K"'] & & \mathscr{E} \\
& \mathscr{D} \arrow[ur, "\mathscr{G}"] \arrow[ur, bend right, "\mathscr{G}'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \alpha"] &
\end{tikzcd}
$$

Observe que, dados $\mathscr{G}, \mathscr{G}', \mathscr{G}'' : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, $\alpha : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ e $\alpha' : \mathscr{G}' \to \mathscr{G}''$, temos que, para cada $Y \in Ob(\mathscr{D})$, $(\alpha' \circ \alpha)_Y = \alpha'_Y \circ \alpha_Y$. Assim, dado $X \in Ob(\mathscr{C})$ qualquer,

$$C_K(\alpha' \circ \alpha)_X \doteq (\alpha' \circ \alpha)_{K(X)} = \alpha'_{K(X)} \circ \alpha_{K(X)} \doteq C_K(\alpha')_X \circ C_K(\alpha)_X$$

Logo,

$$C_K(\alpha' \circ \alpha) = C_K(\alpha') \circ C_K(\alpha)$$

Estendendo R_K. Dados $\mathscr{F}, \mathscr{F}' : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ funtores e $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ transformação natural, precisamos definir $R_K\alpha : R_K\mathscr{F} \to R_K\mathscr{F}'$ morfismo em $Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ que respeite a composição de morfismos.

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, bend left, "\mathscr{F}"] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{F}'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] \arrow[dr, bend right, "K"'] & & \mathscr{E} \\
& \mathscr{D} \arrow[ur, "R_k\mathscr{F}"] \arrow[ur, bend right, "R_K\mathscr{F}'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow R_K\alpha"] &
\end{tikzcd}
$$

Como $R_K\mathscr{F}$ e $R_K\mathscr{F}'$ são extensões de Kan, elas estão acompanhadas de transformações naturais $\eta : R_K\mathscr{F} \circ K \to \mathscr{F}$ e $\eta' : R_K\mathscr{F}' \circ K \to \mathscr{F}'$, respectivamente. Temos $R_K\mathscr{F} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ e $\alpha \circ \eta : R_K\mathscr{F} \circ K \to \mathscr{F}'$, pela propriedade universal relacionada à $R_K\mathscr{F}'$ segue que existe uma única transformação natural $\beta : R_K\mathscr{F} \to R_K\mathscr{F}'$ tal que

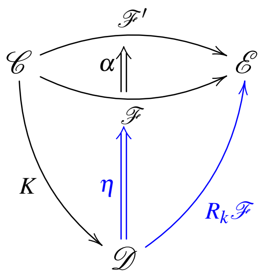
$$\alpha \circ \eta = \eta' \circ \beta.$$

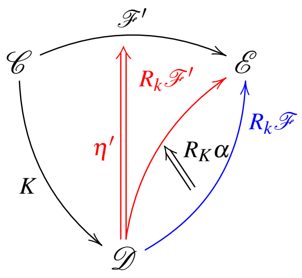
Definimos

$$R_K\alpha \doteq \beta.$$

com a importante propriedade

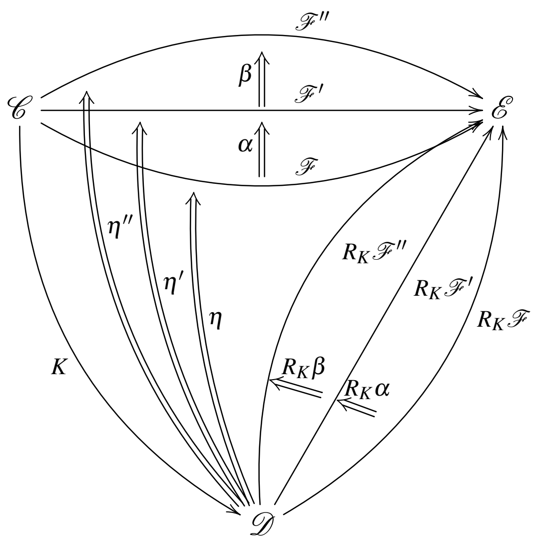
$$\alpha \circ \eta = \eta' \circ R_K\alpha \tag{4.10}$$





Sejam também $\mathscr{F}'' : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ e $\beta : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}''$, obtemos $R_K\alpha : R_K\mathscr{F} \to R_K\mathscr{F}'$ e $R_K\beta : R_K\mathscr{F}' \to R_K\mathscr{F}''$ de modo que

$$\alpha \circ \eta = \eta' \circ R_K\alpha$$
$$\beta \circ \eta' = \eta'' \circ R_K\beta$$



Logo,

$$\eta'' \circ (R_K\beta \circ R_K\alpha) = (\eta'' \circ R_K\beta) \circ R_K\alpha = \beta \circ (\eta' \circ R_K\alpha) = (\beta \circ \alpha) \circ \eta$$

Pela unicidade da propriedade universal da Extensão de Kan, obtemos que

$$R_K(\beta \circ \alpha) = R_K\beta \circ R_K\alpha.$$

Com isso, concluímos que $R_K : Funct(\mathscr{C},\mathscr{E}) \to Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})$ é um funtor.

De modo similar estendemos funtorialmente a extensão de Kan à esquerda L_K.

Mostremos que R_K é **adjunto à direita** de C_K, mas antes precisamos definir tal conceito.

Definição 4.9. Sejam $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $\mathscr{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores. Dizemos que $\mathscr{F}$ é **adjunto à esquerda** de $\mathscr{G}$, e $\mathscr{G}$ é **adjunto à direita** de $\mathscr{F}$ se existir uma bijeção canônica tal que

$$Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}(X),Y) \simeq Hom_{\mathscr{C}}(X,\mathscr{G}(Y))$$

para todos $X \in Ob(\mathscr{C})$ e $Y \in Ob(\mathscr{D})$, onde $\simeq$ denota a existência de tal bijeção.

Observação 4.10. $\mathscr{F}$ é adjunto à esquerda de $\mathscr{G}$ se, dados os funtores

$$\begin{aligned} P_1 : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D} &\to Sets \\ (X,Y) &\mapsto Hom_{\mathscr{C}}(X, \mathscr{G}(Y)) \end{aligned}$$

tal que para cada morfismo $(f,g) : (X,Y) \to (X',Y')$ em $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D}$ (sendo $f \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(X,X')$ e $g \in Hom_{\mathscr{D}}(Y,Y')$), temos o morfismo em *Sets*

$$\begin{aligned} P_1(f,g) : Hom_{\mathscr{C}}(X, \mathscr{G}(Y)) &\to Hom_{\mathscr{C}}(X', \mathscr{G}(Y')) \\ \alpha &\mapsto \mathscr{G}(g) \circ \alpha \circ f \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_2 : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D} &\to Sets \\ (X,Y) &\mapsto Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}(X), Y) \end{aligned}$$

tal que para cada morfismo $(f,g) : (X,Y) \to (X',Y')$ em $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D}$, temos o morfismo em *Sets*

$$\begin{aligned} P_2(f,g) : Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}(X), Y) &\to Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}(X'), Y') \\ \alpha &\mapsto g \circ \alpha \circ \mathscr{F}(f) \end{aligned}$$

existir uma transformação natural

$$\tau : P_1 \to P_2$$

que seja um isomorfismo na categoria $Funct(\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D}, Sets)$, isto é, de modo que exista uma transformação natural $\tau^{-1} : P_2 \to P_1$ com $\tau\tau^{-1} = id_{P_2}$ e $\tau^{-1}\tau = id_{P_1}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D} \arrow[rr, bend left, "Hom_{\mathscr{C}}(-,\mathscr{G}(-))"] \arrow[rr, bend right, "Hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}(-),-)"'] \arrow[rr, phantom, "\simeq \Downarrow \tau"] & & Sets \end{tikzcd}$$

Proposição 4.11. *Os funtores $R_K : Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E}) \to Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ e $L_K : Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E}) \to Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E})$ são adjuntos à direita e à esquerda, respectivamente, de $C_K : Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E}) \to Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E})$.*

$$\begin{tikzcd} Funct(\mathscr{D}, \mathscr{E}) \arrow[r, "C_K"] & Funct(\mathscr{C}, \mathscr{E}) \arrow[l, bend right, "R_K"'] \arrow[l, bend left, "L_K"] \end{tikzcd}$$

Demonstração. Mostraremos apenas para R_K, pois para L_K segue de forma similar.

Consideremos os funtores

$$\begin{aligned} P_1 : Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})^{op} \times Funct(\mathscr{C},\mathscr{E}) &\to Sets \\ (\mathscr{G},\mathscr{F}) &\mapsto Hom_{Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})}(\mathscr{G},R_K\mathscr{F}) \end{aligned}$$

tal que para cada morfismo $(\theta,\lambda) : (\mathscr{G},\mathscr{F}) \to (\mathscr{G}',\mathscr{F}')$, temos o morfismo em *Sets*

$$\begin{aligned} P_1(\theta,\lambda) : Hom_{Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})}(\mathscr{G},R_K\mathscr{F}) &\to Hom_{Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})}(\mathscr{G}',R_K\mathscr{F}') \\ \alpha &\mapsto R_K\lambda \circ \alpha \circ \theta \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} P_2 : Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})^{op} \times Funct(\mathscr{C},\mathscr{E}) &\to Sets \\ (\mathscr{G},\mathscr{F}) &\mapsto Hom_{Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})}(C_K\mathscr{G},\mathscr{F}) \end{aligned}$$

tal que para cada morfismo $(\theta,\lambda) : (\mathscr{G},\mathscr{F}) \to (\mathscr{G}',\mathscr{F}')$, temos o morfismo em *Sets* [2]

$$\begin{aligned} P_2(\theta,\lambda) : Hom_{Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})}(\mathscr{G}\circ K,\mathscr{F}) &\to Hom_{Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})}(\mathscr{G}'\circ K,\mathscr{F}') \\ \alpha &\mapsto \lambda \circ \alpha \circ \theta \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[r, bend left=70, "R_K\mathscr{F}'"] \arrow[r, bend left=25, "R_K\mathscr{F}" description] \arrow[r, bend right=25, "\mathscr{G}" description] \arrow[r, bend right=70, "\mathscr{G}'"'] \arrow[r, phantom, bend left=50, "\Uparrow R_K\lambda"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[r, phantom, bend right=50, "\Uparrow\theta"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, bend left, "\mathscr{F}'"] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{F}"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\lambda"] \arrow[dr, bend right, "K"'] & & \mathscr{E} \\
& \mathscr{D} \arrow[ur, bend left=15, "\mathscr{G}"] \arrow[ur, bend right=40, "\mathscr{G}'"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] &
\end{tikzcd}$$

Precisamos definir uma transformação natural $\tau : P_1 \to P_2$ que seja um isomorfismo. Seja $(\mathscr{G},\mathscr{F}) \in Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})^{op} \times Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})$ qualquer, definimos

$$\begin{aligned} \tau_{(\mathscr{G},\mathscr{F})} : Hom_{Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})}(\mathscr{G},R_K\mathscr{F}) &\to Hom_{Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})}(\mathscr{G}\circ K,\mathscr{F}) \\ \alpha &\mapsto \eta \circ \alpha \end{aligned}$$

- τ é transformação natural: Seja $(\theta,\lambda) : (\mathscr{G},\mathscr{F}) \to (\mathscr{G}',\mathscr{F}')$, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
Hom_{Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})}(\mathscr{G},R_K\mathscr{F}) \arrow[r, "\tau_{(\mathscr{G},\mathscr{F})}"] \arrow[d, "P_1(\theta,\lambda)"'] & Hom_{Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})}(\mathscr{G}\circ K,\mathscr{F}) \arrow[d, "P_2(\theta,\lambda)"] \\
Hom_{Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})}(\mathscr{G}',R_K\mathscr{F}') \arrow[r, "\tau_{(\mathscr{G}',\mathscr{F}')}"] & Hom_{Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})}(\mathscr{G}'\circ K,\mathscr{F}')
\end{tikzcd}$$

[2]Na seguinte fórmula, em relação à transformação θ, v. Observação 4.3.

De fato, seja $\alpha : \mathscr{G} \to R_K\mathscr{F}$ transformação natural qualquer. Temos

$$\tau_{(\mathscr{G}',\mathscr{F}')}(P_1(\theta,\lambda)(\alpha)) = \tau_{(\mathscr{G}',\mathscr{F}')}(R_K\lambda \circ \alpha \circ \theta) = \eta' \circ R_K\lambda \circ \alpha \circ \theta.$$

Por outro lado,

$$P_2(\theta,\lambda)(\tau_{(\mathscr{G},\mathscr{F})}(\alpha)) = P_2(\theta,\lambda)(\eta \circ \alpha) = \lambda \circ \eta \circ \alpha \circ \theta \overset{(4.10)}{=} \eta' \circ R_K\lambda \circ \alpha \circ \theta.$$

- τ é isomorfismo: Seja $\tau^{-1} : P_2 \to P_1$ tal que, para cada $(\mathscr{G},\mathscr{F}) \in Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})^{op} \times Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})$,

$$\begin{aligned} \tau^{-1}_{(\mathscr{G},\mathscr{F})} : Hom_{Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})}(\mathscr{G} \circ K,\mathscr{F}) &\to Hom_{Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})}(\mathscr{G},R_K\mathscr{F}) \\ \alpha &\mapsto \beta \end{aligned}$$

  com β sendo o único morfismo de funtores de $\mathscr{G}$ a $R_K\mathscr{F}$ que satisfaz $\eta \circ \beta = \alpha$ proveniente da propriedade universal da extensão de Kan à direita $(R_K\mathscr{F},\eta)$ de $\mathscr{F}$.

Portanto, R_K é adjunto à direita de C_K, isto é,

$$Hom_{Funct(\mathscr{C},\mathscr{E})}(\mathscr{G} \circ K,\mathscr{F}) \simeq Hom_{Funct(\mathscr{D},\mathscr{E})}(\mathscr{G},R_K\mathscr{F}). \qquad \square$$

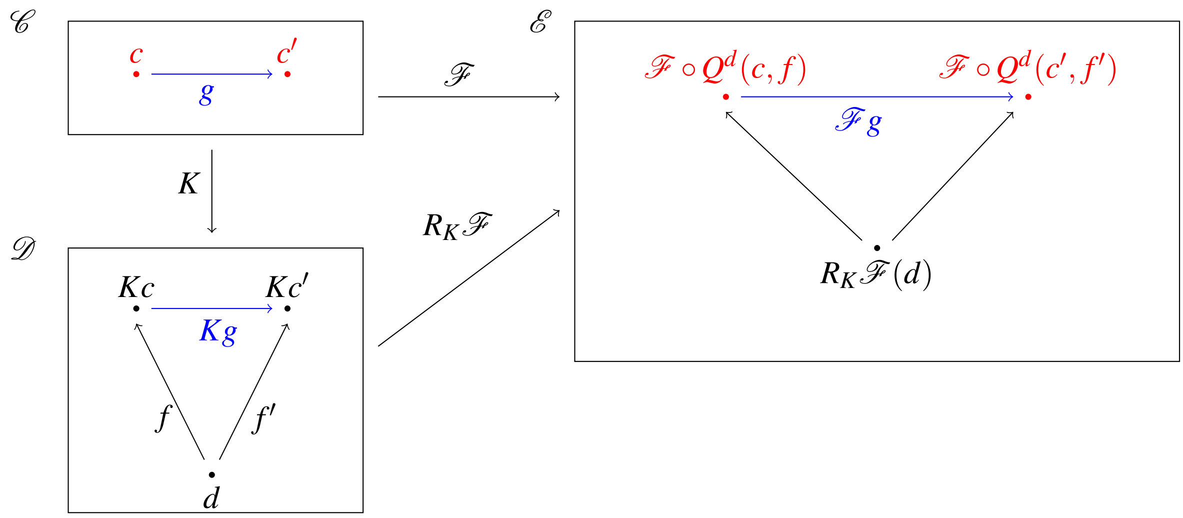
4.2 Extensões de Kan através de Limites e Colimites

Nesta seção, descreveremos a extensão de Kan à direita (analogamente obtemos à esquerda) a partir de um certo limite (à esquerda a partir de colimite) em $\mathscr{E}$. Partimos das categorias $\mathscr{C},\mathscr{D}$ e $\mathscr{E}$, sendo $\mathscr{E}$ com a propriedade de que existe limite para todos funtores a qual seja contra-domínio (exigimos que exista colimite para a construção de Extensões de Kan à esquerda), e dos funtores $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ e $K : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, e queremos construir uma extensão de Kan à direita $(R_K\mathscr{F},\eta)$. Para cada $d \in Ob(\mathscr{D})$, definimos a categoria $d \downarrow K$ por:

- Objetos de $d \downarrow K$: pares (c,f), com $c \in Ob(\mathscr{C})$ e $f : d \to K(c)$.
- Morfismos em $d \downarrow K$: dados $(c,f),(c',f') \in Ob(d \downarrow K)$, um morfismo $g : (c,f) \to (c',f')$ é um morfismo $g : c \to c'$ em $\mathscr{C}$ tal que $K(g) \circ f = f'$ em $\mathscr{D}$, ou seja, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} K(c) \arrow[rr, "K(g)"] & & K(c') \\ & d \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Fixando $d \in Ob(\mathscr{D})$ e variando c,c' e g, podemos pensar que, de certa forma, estamos aproximando d através da imagem de K por meio desses diagramas. Utilizaremos essa motivação de aproximação para definir a imagem $R_K\mathscr{F}(d) \in Ob(\mathscr{E})$ por meio de um limite em $\mathscr{E}$. Até o momento temos a seguinte situação:



A partir de $d \downarrow K$, obtemos o seguinte funtor

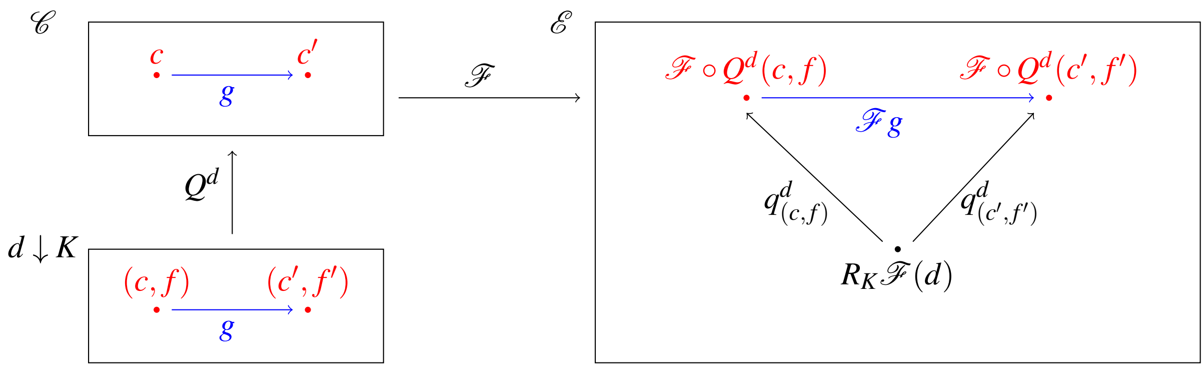
$$\begin{aligned} Q^d : d \downarrow K &\to \mathscr{C} \\ (c,f) &\mapsto c \\ g &\mapsto g \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\circ Q^d : d \downarrow K &\to \mathscr{E} \\ (c,f) &\mapsto \mathscr{F}c \\ g &\mapsto \mathscr{F}g \end{aligned}$$

Definimos $R_K\mathscr{F}(d)$ pelo limite de $\mathscr{F}\circ Q^d$, ou seja,

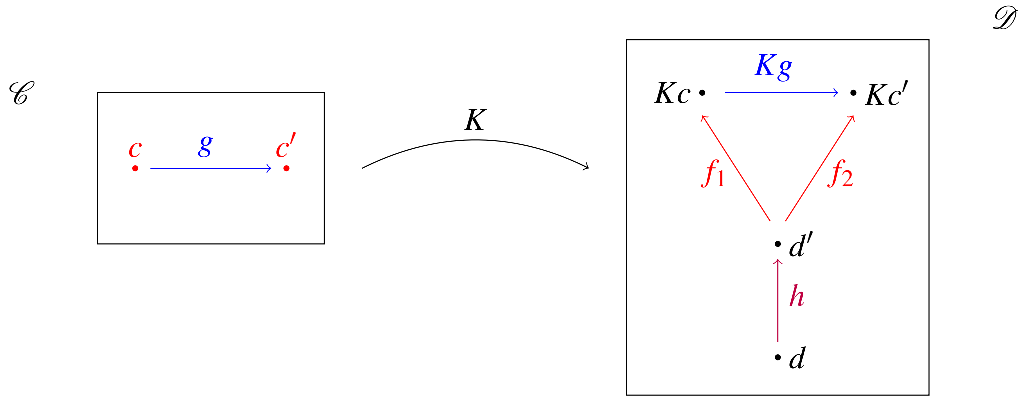
$$R_K\mathscr{F}(d) = \varprojlim(\mathscr{F}\circ Q^d).$$



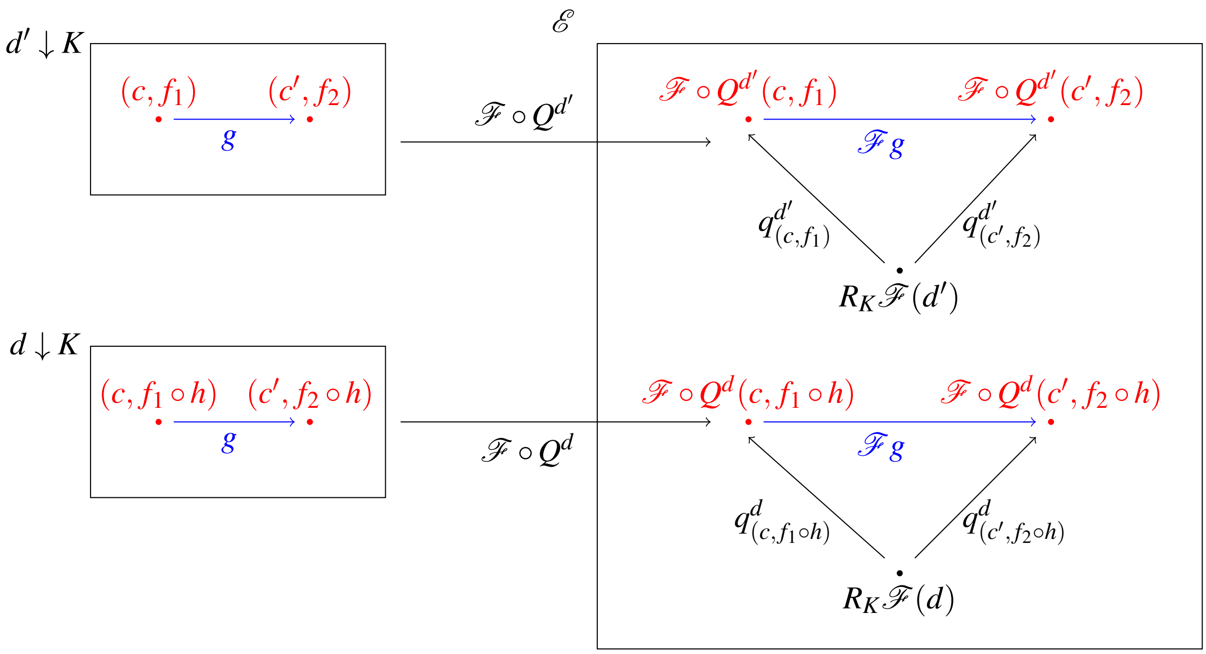
Observação 4.12. Caso d não tenha relação com a imagem de K, isto é, se não existe nenhum par (c,f) tal que $f : d \to Kc$, obtemos por $\mathscr{F}\circ Q^d$ em $\mathscr{E}$ o diagrama vazio, dessa forma, $R_K\mathscr{F}(d)$ é o objeto final[3] de $\mathscr{E}$.

[3]Como na Definição 1.44.

Precisamos também mostrar a estrutura funtorial de $R_K\mathscr{F}$, ou seja, $h : d \to d'$ em $\mathscr{D}$ deve ser mandado em $R_K\mathscr{F}(h) : R_K\mathscr{F}(d) \to R_K\mathscr{F}(d')$.



Note que ao considerarmos dois objetos d e d' em $\mathscr{D}$, obtemos dois diagramas gerados por $\mathscr{F} \circ Q^d$ e $\mathscr{F} \circ Q^{d'}$ em $\mathscr{E}$, os quais induzem $R_K\mathscr{F}(d) = \varprojlim(\mathscr{F} \circ Q^d)$ e $R_K\mathscr{F}(d') = \varprojlim(\mathscr{F} \circ Q^{d'})$. Mais precisamente, temos que os limites são cones $(R_K\mathscr{F}(d),\ \{q^d_{(c,f)} : R_K\mathscr{F}(d) \to \mathscr{F} \circ Q^d(c,f)\}_{(c,f)\in Ob(d\downarrow K)})$ e $(R_K\mathscr{F}(d'),\ \{q^{d'}_{(c,f)} : R_K\mathscr{F}(d') \to \mathscr{F} \circ Q^{d'}(c,f)\}_{(c,f)\in Ob(d'\downarrow K)})$.



Cada $(c,f) \in Ob(d' \downarrow K)$ pode ser identificado de modo único com $(c, f \circ h) \in Ob(d \downarrow K)$, a partir disso, consideremos o morfismo em $\mathscr{E}$

$$id_{\mathscr{F}c} \circ q^d_{(c,f\circ h)} : R_K\mathscr{F}(d) \to \mathscr{F} \circ Q^{d'}(c,f),$$

para $g:(c,f)\to(c',f')$ em $d'\downarrow K$ qualquer, temos que

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\circ Q^{d'}(g))\circ(id_{\mathscr{F}c}\circ q^{d}_{(c,f\circ h)}) &= \mathscr{F}(g)\circ q^{d}_{(c,f\circ h)}\\ &= (\mathscr{F}\circ Q^{d}(g))\circ q^{d}_{(c,f\circ h)}\\ &= q^{d}_{(c',f'\circ h)}\\ &= id_{\mathscr{F}c'}\circ q^{d}_{(c',f'\circ h)}\end{aligned}$$

Logo, por $R_K\mathscr{F}(d')$ ser limite de $\mathscr{F}\circ Q^{d'}$, segue que existe um único morfismo

$$t: R_K\mathscr{F}(d)\to R_K\mathscr{F}(d')$$

tal que

$$q^{d'}_{(c,f)}\circ t = id_{\mathscr{F}c}\circ q^{d}_{(c,f\circ h)}.$$

Definimos

$$R_K\mathscr{F}(h)\doteq t$$

$\mathscr{E}$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}\circ Q^{d'}(c,f)=\mathscr{F}c & \\
& R_K\mathscr{F}(d') \arrow[ul, "q^{d'}_{(c,f)}"'] \\
\mathscr{F}\circ Q^{d}(c,f\circ h)=\mathscr{F}c \arrow[uu, "id_{\mathscr{F}c}"] & \\
& R_K\mathscr{F}(d) \arrow[ul, "q^{d}_{(c,f\circ h)}"] \arrow[uu, dashed, "R_K\mathscr{F}(h)"']
\end{tikzcd}$$

A partir de agora, usaremos $q^{d}_{(c,f\circ h)}$ ao invés de $id_{\mathscr{F}c}\circ q^{d}_{(c,f\circ h)}$.

Observação 4.13. $R_K\mathscr{F}:\mathscr{D}\to\mathscr{E}$ como definido acima é de fato um funtor:

- $R_K\mathscr{F}(id_d)=id_{R_K\mathscr{F}(d)}$ para qualquer d em $\mathscr{D}$, pois estes dois morfismos fazem o seguinte diagrama comutar para qualquer $(c,f)\in Ob(d\downarrow K)$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}\circ Q^{d}(c,f)=\mathscr{F}c & \\
& R_K\mathscr{F}(d) \arrow[ul, "q^{d}_{(c,f)}"'] \\
& R_K\mathscr{F}(d) \arrow[u, "id_{R_K\mathscr{F}(d)}"'] \arrow[uul, bend left, "q^{d}_{(c,f)}"]
\end{tikzcd}$$

e por se tratar de um limite, segue que são iguais.

- Sejam $h : d \to d'$ e $h' : d' \to d''$ em $\mathscr{D}$ e $(c, f) \in Ob(d \downarrow K)$ quaisquer, temos por construção que $R_K\mathscr{F}(h' \circ h)$ é o único morfismo que faz comutar

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \circ Q^d(c,f) & \\
& R_K\mathscr{F}(d'') \arrow[ul, "q^{d''}_{(c,f)}"'] \\
& R_K\mathscr{F}(d) \arrow[u, "R_K\mathscr{F}(h' \circ h)"'] \arrow[uul, bend left, "q^d_{(c,f)}"]
\end{tikzcd}$$

porém $q^{d'}_{(c,f)} = q^{d''}_{(c,f)} \circ R_K\mathscr{F}(h')$ e $q^{d}_{(c,f)} = q^{d'}_{(c,f)} \circ R_K\mathscr{F}(h)$, logo,

$$q^{d}_{(c,f)} = (q^{d''}_{(c,f)} \circ R_K\mathscr{F}(h')) \circ R_K\mathscr{F}(h) = q^{d''}_{(c,f)} \circ (R_K\mathscr{F}(h') \circ R_K\mathscr{F}(h))$$

ou ainda, cada parte do seguinte diagrama comuta, fazendo o diagrama total comutar

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \circ Q^{d''}(c,f) & \\
\mathscr{F} \circ Q^{d'}(c,f) \arrow[u, "id_{\mathscr{F}c}"] & R_K\mathscr{F}(d'') \arrow[ul, "q^{d''}_{(c,f)}"'] \\
\mathscr{F} \circ Q^{d}(c,f) \arrow[u, "id_{\mathscr{F}c}"] & R_K\mathscr{F}(d') \arrow[u, "R_K\mathscr{F}(h')"'] \arrow[ul, "q^{d'}_{(c,f)}"'] \\
& R_K\mathscr{F}(d) \arrow[u, "R_K\mathscr{F}(h)"'] \arrow[ul, "q^{d}_{(c,f)}"']
\end{tikzcd}$$

Portanto $R_K\mathscr{F}(h') \circ R_K\mathscr{F}(h) = R_K\mathscr{F}(h' \circ h)$.

Agora que já temos o funtor $R_K\mathscr{F} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, falta apenas definir a transformação natural $\eta : R_K\mathscr{F} \circ K \to \mathscr{F}$. Seja $c \in Ob(\mathscr{C})$, pensando em Kc como o objeto $d \in Ob(\mathscr{D})$, podemos considerar o objeto (c, id_{Kc}) na categoria $Kc \downarrow K$, e obtemos um morfismo

$$q^{Kc}_{(c,id_{Kc})} : R_K\mathscr{F}(Kc) \to \mathscr{F} \circ Q^{Kc}(c, id_{Kc})$$

em $\mathscr{E}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}: & Kc & & \Longrightarrow & \mathscr{E}: & \mathscr{F} \circ Q^{Kc}(c, id_{Kc}) & \\
& & Kc \arrow[ul, "id_{Kc}"] & & & & R_K\mathscr{F}(K(c)) \arrow[ul, "q^{Kc}_{(c,id_{Kc})}"]
\end{tikzcd}$$

Definimos

$$\eta_c \doteq q^{Kc}_{(c,id_{Kc})} : R_K\mathscr{F} \circ K(c) \to \mathscr{F}c.$$

Observação 4.14. η é transformação natural: seja $g : c \to c'$ em $\mathscr{C}$ qualquer, precisamos que comute

$$\begin{tikzcd} R_K\mathscr{F}(Kc) \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "R_K\mathscr{F}(Kg)"'] & \mathscr{F}c \arrow[d, "\mathscr{F}g"] \\ R_K\mathscr{F}(Kc') \arrow[r, "\eta_{c'}"] & \mathscr{F}c' \end{tikzcd}$$

Por um lado, temos que

$$\begin{tikzcd} Kc' & \\ & Kc' \arrow[ul, "id_{Kc'}"] \\ & Kc \arrow[u, "Kg"] \end{tikzcd}$$

em $\mathscr{D}$ induz o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \circ Q^{Kc'}(c', id_{Kc'}) & \\ & R_K\mathscr{F}(Kc') \arrow[ul, "q^{Kc'}_{(c',id_{Kc'})}"'] \\ & R_K\mathscr{F}(Kc) \arrow[u, "R_K\mathscr{F}(Kg)"'] \arrow[uul, bend left, "q^{Kc}_{(c',id_{Kc'}\circ Kg)}"] \end{tikzcd}$$

em $\mathscr{E}$, ou seja,

$$\eta_{c'} \circ R_K\mathscr{F}(Kg) = q^{Kc'}_{(c',id_{Kc'})} \circ R_K\mathscr{F}(Kg) = q^{Kc}_{(c',id_{Kc'}\circ Kg)} = q^{Kc}_{(c',Kg)}.$$

Por outro lado, claramente $Kg = Kg \circ id_{Kc}$, logo $g : (c, id_{Kc}) \to (c', Kg)$ é morfismo em $Kc \downarrow K$. Aplicamos $\mathscr{F} \circ Q^{Kc}(g) = \mathscr{F}g$ e o seguinte diagrama comuta, por se tratar de um cone em $\mathscr{E}$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \circ Q^{Kc}(c, id_{Kc}) \arrow[rr, "\mathscr{F}g"] & & \mathscr{F} \circ Q^{Kc}(c', Kg) \\ & R_K\mathscr{F}(Kc) \arrow[ul, "q^{Kc}_{(c,id_{Kc})}"] \arrow[ur, "q^{Kc}_{(c',Kg)}"'] & \end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\mathscr{F}g \circ \eta_c = \mathscr{F}g \circ q^{Kc}_{(c,id_{Kc})} = q^{Kc}_{(c',Kg)} = \eta_{c'} \circ R_K\mathscr{F}(Kg).$$

Proposição 4.15. $(R_K\mathscr{F}, \eta)$ *como construído acima é uma extensão de Kan à direita de* $\mathscr{F}$ *através de* K.

Demonstração. Sejam $\mathscr{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ funtor e $\alpha : \mathscr{G} \circ K \to \mathscr{F}$ transformação natural. A princípio construiremos a transformação natural $\beta : \mathscr{G} \to R_K\mathscr{F}$ candidata.

Seja $d \in Ob(\mathscr{D})$ qualquer, precisamos de um morfismo $\beta_d : \mathscr{G}(d) \to R_K\mathscr{F}(d)$ em $\mathscr{E}$ e para isso construiremos outro cone de $\mathscr{F} \circ Q^d$ com vértice em $\mathscr{G}(d)$. Sejam $(c,f),(c',f')$ e $g : (c,f) \to (c',f')$ em $d \downarrow K$, ou seja, $g : c \to c'$ em $\mathscr{C}$ tal que

$$\begin{tikzcd} Kc \arrow[rr, "Kg"] & & Kc' \\ & d \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \tag{4.11}$$

comuta. Obtemos $\alpha_c \circ \mathscr{G}(f) : \mathscr{G}(d) \to \mathscr{F}c$ para cada $(c,f) \in Ob(d \downarrow K)$,

$$\mathscr{G}(d) \xrightarrow{\mathscr{G}(f)} \mathscr{G}(Kc) \xrightarrow{\alpha_c} \mathscr{F}c\ .$$

Por (4.11) segue $\mathscr{G}(f') = \mathscr{G}(Kg) \circ \mathscr{G}(f)$; e por α ser transformação natural, $\mathscr{F}g \circ \alpha_c = \alpha_{c'} \circ \mathscr{G}(Kg)$, logo

$$\alpha_{c'} \circ \mathscr{G}(f') = \alpha_{c'} \circ \mathscr{G}(Kg) \circ \mathscr{G}(f) = \mathscr{F}g \circ (\alpha_c \circ \mathscr{G}(f)).$$

Com isso, $(\mathscr{G}(d), \alpha_c \circ \mathscr{G}(f))_{(c,f)\in Ob(d\downarrow K)}$ é cone de $\mathscr{F} \circ Q^d$, e existe um único morfismo $t : \mathscr{G}(d) \to R_K\mathscr{F}(d)$ tal que

$$\begin{tikzcd} R_K\mathscr{F}(d) \arrow[r, "q^d_{(c,f)}"] & \mathscr{F} \circ Q^d(c,f) \\ \mathscr{G}(d) \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "\alpha_c \circ \mathscr{G}(f)"'] & \end{tikzcd} \tag{4.12}$$

comute para todo $(c,f) \in Ob(d \downarrow K)$. Definimos

$$\beta_d \doteq t.$$

Note que se trata de uma transformação natural, pois para $h : d \to d'$ temos que os diagramas de três pontas a seguir

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \circ Q^{d'}(c,f) & & \mathscr{F} \circ Q^{d'}(c,f) & & \mathscr{F} \circ Q^{d'}(c,f) \\ R_K\mathscr{F}(d) \arrow[u, "q^d_{(c,f\circ h)}"'] & R_K\mathscr{F}(d) \arrow[ur, "q^d_{(c,f\circ h)}"] \arrow[rr, "R_K\mathscr{F}(h)"] & & R_K\mathscr{F}(d') \arrow[ul, "q^{d'}_{(c,f)}"'] & R_K\mathscr{F}(d') \arrow[u, "q^{d'}_{(c,f)}"] \\ \mathscr{G}(d) \arrow[u, "\beta_d"'] \arrow[uu, bend left=60, "\alpha_c \circ \mathscr{G}(f\circ h)"] & \mathscr{G}(d) \arrow[u, "\beta_d"] \arrow[rr, "\mathscr{G}(h)"'] & & \mathscr{G}(d') \arrow[u, "\beta_{d'}"'] & \mathscr{G}(d') \arrow[u, "\beta_{d'}"] \arrow[uu, bend right=60, "\alpha_c \circ \mathscr{G}(f)"'] \end{tikzcd}$$

comutam, e $\mathscr{G}(f \circ h) = \mathscr{G}(f) \circ \mathscr{G}(h)$, logo o retângulo também comuta.

Falta mostrar que $\eta_c \circ \beta_{Kc} = \alpha_c$ em $\mathscr{E}$, ou seja, que o diagrama

$$\begin{tikzcd} R_K\mathscr{F}(Kc) \arrow[r, "\eta_c"] & \mathscr{F}c \\ \mathscr{G}(Kc) \arrow[u, "\beta_{Kc}"] \arrow[ur, "\alpha_c"'] & \end{tikzcd} \tag{4.13}$$

comuta. Basta observar que ao tomarmos a categoria $Kc \downarrow K$, obtemos $\eta_c = q^{Kc}_{(c,id_{Kc})}$ e $\alpha_c = \alpha_c \circ \mathscr{G}(id_{Kc})$, logo o diagrama (4.13) comuta porque (4.12) em particular para $(c, id_{Kc}) \in Ob(Kc \downarrow K)$. $\square$

A construção da extensão de Kan à esquerda de $\mathscr{F}$ através de K utilizando colimite segue de forma similiar. Consideramos que exista um colimite para qualquer funtor de contra-domínio $\mathscr{E}$, e para cada $d \in Ob(\mathscr{D})$, definimos a categoria $d \uparrow K$ por:

- Objetos de $d \uparrow K$: pares (c, f), com $c \in Ob(\mathscr{C})$ e $f : Kc \to d$.

- Morfismos em $d \uparrow K$: dados $(c, f), (c', f') \in Ob(d \uparrow K)$, um morfismo $g : (c, f) \to (c', f')$ é um morfismo $g : c \to c'$ em $\mathscr{C}$ tal que $f' \circ Kg = f$ em $\mathscr{D}$, ou seja, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} K(c) \arrow[rr, "K(g)"] \arrow[dr, "f"'] & & K(c') \arrow[dl, "f'"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

A partir de $d \uparrow K$, obtemos o seguinte funtor

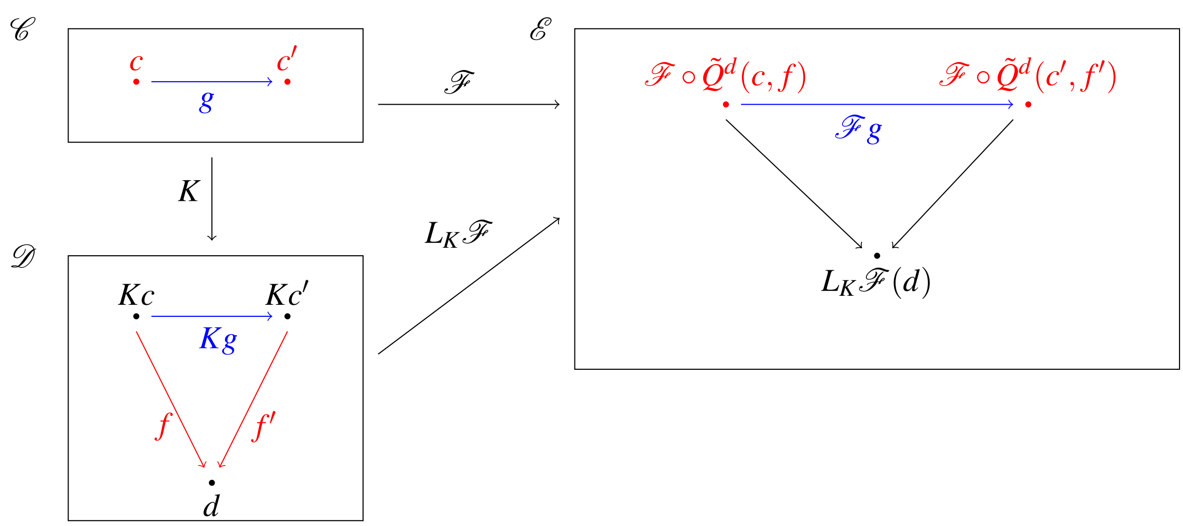
$$\begin{aligned} \tilde{Q}^d : d \uparrow K &\to \mathscr{C} \\ (c, f) &\mapsto c \\ g &\mapsto g \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d : d \uparrow K &\to \mathscr{E} \\ (c, f) &\mapsto \mathscr{F}c \\ g &\mapsto \mathscr{F}g \end{aligned}$$

$\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d$ possui um colimite $(\varinjlim(\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d), \{p^d_{(c,f)} : \mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d(c, f) \to \varinjlim(\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d)\}_{(c,f) \in Ob(d \uparrow \mathscr{D})})$. Definimos

$$L_K\mathscr{F}(d) \doteq \varinjlim(\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d).$$



Para $h : d \to d'$ em $\mathscr{D}$, consideramos os co-cones gerados por $\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d$ e $\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^{d'}$, para cada $(c, f) \in Ob(d \uparrow \mathscr{D})$ e $g : (c, f) \to (c', f')$, o morfismo $p^{d'}_{(c,f)} \circ id_{\mathscr{F}c} : \mathscr{F}c \to L_K\mathscr{F}(d)$ é tal que

$$p^{d'}_{(c,f)} \circ id_{\mathscr{F}c} = (p^{d'}_{(c',f')} \circ id_{\mathscr{F}c'}) \circ (\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d(g))$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d(c,f) \arrow[rr, "\mathscr{F}\circ\tilde{Q}^d(g)"] \arrow[d, "id_{\mathscr{F}c}"'] \arrow[dr, "p^d_{(c,f)}"] & & \mathscr{F} \circ \tilde{Q}^d(c',f') \arrow[d, "id_{\mathscr{F}c'}"] \arrow[dl, "p^d_{(c',f')}"'] \\
\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^{d'}(c,f) \arrow[dr, "p^{d'}_{(c,f)}"'] & L_K\mathscr{F}(d) \arrow[d, dotted] & \mathscr{F} \circ \tilde{Q}^{d'}(c',f') \arrow[dl, "p^{d'}_{(c',f')}"] \\
& L_K\mathscr{F}(d') &
\end{tikzcd}$$

então por se tratar de um colimite, definimos $L_K\mathscr{F}(h)$ pelo único morfismo

$$L_K\mathscr{F}(h) : L_K\mathscr{F}(d) \to L_K\mathscr{F}(d')$$

tal que

$$L_K\mathscr{F}(h) \circ p^d_{(c,f)} = p^{d'}_{(c,f)} \circ id_{\mathscr{F}c}.$$

Ainda de modo análogo ao caso anterior, definimos a transformação $\eta : \mathscr{F} \to L_K\mathscr{F} \circ K$ por

$$\eta_c \doteq p^{Kc}_{(c,id_{Kc})} : \mathscr{F}c \to L_K\mathscr{F}(Kc)$$

para cada $c \in Ob(\mathscr{C})$. Obtemos que $(L_K\mathscr{F}, \eta)$ é extensão de Kan à esquerda de $\mathscr{F}$ através de K.

CAPÍTULO 5

Yoneda Generalizado

Dada uma categoria A, temos o mergulho de Yoneda $Y : A \to \widehat{A}$ como na Definição 3.4. Neste capítulo, trabalharemos um pouco com uma generalização desse conceito. Um caso específico de funtor de Yoneda generalizado é o nervo, o qual será fundamental para obtermos um mergulho de *Cat* em $\widehat{\Delta}$, ou seja, visualizarmos uma categoria pequena como certo conjunto simplicial. Outro exemplo de Yoneda generalizado são os complexos singulares, conjuntos simpliciais que formarão uma importante classe de ∞-categorias.

Definição 5.1. Sejam $\mathscr{C}$ e A categorias e $\mathscr{F} : A \to \mathscr{C}$ funtor. O funtor de Yoneda generalizado é dado por

$$\begin{aligned} Y_{\mathscr{F}} : \mathscr{C} &\to \widehat{A} \\ c &\mapsto Y_{\mathscr{F},c} \\ (g : c \to e) &\mapsto (Y_{\mathscr{F}}(g) : Y_{\mathscr{F},c} \to Y_{\mathscr{F},e}) \end{aligned}$$

em que $Y_{\mathscr{F},c}$ é o pré-feixe dado por

$$\begin{aligned} Y_{\mathscr{F},c} : A^{op} &\to Sets \\ b &\mapsto Y_{\mathscr{F},c}(b) = Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(b), c) \\ (f : b \to d) &\mapsto (Y_{\mathscr{F},c}(f) : Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(d), c) \to Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(b), c)) \end{aligned}$$

onde $Y_{\mathscr{F},c}(f)(\varphi) = \varphi \circ \mathscr{F}(f)$ para cada $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(d), c)$; e $Y_{\mathscr{F}}(g)$ é a transformação natural em que, dado $b \in Ob(A)$,

$$\begin{aligned} Y_{\mathscr{F}}(g)b : Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(b), c) &\to Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(b), e) \\ \psi &\mapsto g \circ \psi \end{aligned}$$

Observação 5.2. É simples verificar que $Y_{\mathscr{F}}$ é funtor. Note que quando $A = \mathscr{C}$ e $\mathscr{F} = id_A$, $Y_{\mathscr{F}}$ é o próprio mergulho de Yoneda, porém não é mergulho em um caso genérico.

A partir dessa construção, podemos considerar a transformação natural

$$\eta : Y \to Y_{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F}$$

em que para cada $a \in Ob(A)$

$$\eta_a : Y_a \to Y_{\mathscr{F},\mathscr{F}(a)}$$

é o morfismo de funtores em $\widehat{A}$ tal que, para $b \in Ob(A)$,

$$\eta_a(b) : \underbrace{Y_a(b)}_{Hom_A(b,a)} \to \underbrace{Y_{\mathscr{F},\mathscr{F}(a)}(b)}_{Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(b),\mathscr{F}(a))}$$

é definido por

$$\eta_a(b) \doteq \mathscr{F}_{b,a}$$

Observação 5.3. η_a é morfismo de funtores porque para $f : b \to d$ em A e $\xi \in Hom_A(d,a)$, temos

$$\mathscr{F}_{b,a} \circ Y_a(f)(\xi) = \mathscr{F}_{b,a}(\xi \circ f) = \mathscr{F}(\xi) \circ \mathscr{F}(f) = Y_{\mathscr{F},\mathscr{F}(a)}(f)(\mathscr{F}(\xi)) = Y_{\mathscr{F},\mathscr{F}(a)}(f) \circ \mathscr{F}_{d,a}(\xi).$$

Além disso, η também é transformação natural: seja $f : a \to b$ em A, precisamos mostrar que comuta

$$\begin{tikzcd} Y_a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "Y(f)"'] & Y_{\mathscr{F},\mathscr{F}(a)} \arrow[d, "Y_{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(f))"] \\ Y_b \arrow[r, "\eta_b"] & Y_{\mathscr{F},\mathscr{F}(b)} \end{tikzcd}$$

Isto é, que para $d \in Ob(A)$,

$$Y_{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(f))d \circ \eta_a(d) = \eta_b(d) \circ Y(f)(d) : Hom_A(d,a) \to Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(d),\mathscr{F}(b)).$$

De fato,

$$\begin{array}{ccccc} Hom_A(d,a) & \xrightarrow{\eta_a(d)} & Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(d),\mathscr{F}(a)) & \xrightarrow{Y_{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(f))d} & Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(d),\mathscr{F}(b)) \\ h & \longmapsto & \mathscr{F}(h) & \longmapsto & h_{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(f))d\ (\mathscr{F}(h)) = \mathscr{F}(f) \circ \mathscr{F}(h) \end{array}$$

por outro lado,

$$\begin{array}{ccccc} Hom_A(d,a) & \xrightarrow{Y(f)} & Hom_A(d,b) & \xrightarrow{\eta_b(d)} & Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(d),\mathscr{F}(b)) \\ h & \longmapsto & f \circ h & \longmapsto & \mathscr{F}(f \circ h) = \mathscr{F}(f) \circ \mathscr{F}(h). \end{array}$$

Com isso, obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "\mathscr{F}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & \widehat{A} \\ & \mathscr{C} \arrow[ur, "Y_{\mathscr{F}}"'] & \end{tikzcd}$$

que apesar de sua forma, em geral não se trata de uma extensão de Kan à esquerda. Podemos considerar também o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "Y"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta'"] & \mathscr{C} \\ & \widehat{A} \arrow[ur, "\mathscr{F}_! \doteq L_Y \mathscr{F}"'] & \end{tikzcd}$$

sendo o par $(\eta', \mathscr{F}_!)$ a extensão de Kan de $\mathscr{F}$ através de Y, supondo que exista. Lembrando que, dado $P \in Ob(\widehat{A})$, obtemos a categoria $P \uparrow Y$ de objetos (a, ξ) com $a \in Ob(A)$ e $\xi : Y_a \to P$ em $\widehat{A}$, o funtor

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \circ \tilde{Q}^P : P \uparrow Y &\to \mathscr{C} \\ (a, \xi) &\mapsto \mathscr{F} a \\ g &\mapsto \mathscr{F} g \end{aligned}$$

que resulta em

$$L_Y \mathscr{F}(P) \doteq \mathscr{F}_!(P) = \varinjlim(\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^P)$$

como vimos anteriormente. Nosso objetivo neste capítulo é provar a seguinte proposição.

Proposição 5.4. *O funtor $\mathscr{F}_!$ é adjunto à esquerda de $Y_{\mathscr{F}}$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "\mathscr{F}"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & \widehat{A} \\ & \mathscr{C} \arrow[ur, "Y_{\mathscr{F}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "Y"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta'"] & \mathscr{C} \\ & \widehat{A} \arrow[ur, "\mathscr{F}_! \doteq L_Y \mathscr{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Para isto, precisaremos dos dois seguintes resultados.

Lema 5.5. *Seja $\mathscr{F} : I \to \mathscr{C}$ um funtor e $(c, \{\varphi_i : \mathscr{F}(i) \to c\}_{i \in Ob(I)})$ um colimite de $\mathscr{F}$ então, para qualquer $c' \in Ob(\mathscr{C})$,*

$$Hom_{\mathscr{C}}(c, c') = Hom_{\mathscr{C}}(\varinjlim \mathscr{F}, c') \simeq \varprojlim \tilde{\mathscr{F}},$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{F}} : I^{op} &\to Sets \\ i &\mapsto Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i), c') \\ (f : i \to j) &\mapsto (\tilde{\mathscr{F}}(f) : Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(j), c') \to Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i), c')) \end{aligned}$$

em que $\tilde{\mathscr{F}}(f)(h) = h \circ \mathscr{F}(f)$ para $h \in Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(j), c')$

Uma notação mais intuitiva para este fato é

$$Hom_{\mathscr{C}}(\varinjlim \mathscr{F}(i), c') \simeq \varprojlim Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i), c').$$

Demonstração. Através do funtor $\tilde{\mathscr{F}}$, o co-cone

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(i) \arrow[rr, "\mathscr{F}(f)"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & \mathscr{F}(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \\ & c & \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

induz o cone

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(j),c') \arrow[rr, "\tilde{\mathscr{F}}(f)"] & & Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i),c') \\ & Hom_{\mathscr{C}}(c,c') \arrow[ul, "\tilde{\varphi}_j"] \arrow[ur, "\tilde{\varphi}_i"'] & \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

onde

$$\tilde{\varphi}_i : Hom_{\mathscr{C}}(c,c') \to Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i),c')$$
$$\psi \mapsto \psi \circ \varphi_i$$

É cone pois para $\psi \in Hom_{\mathscr{C}}(c,c')$,

$$\tilde{\mathscr{F}}(f) \circ \tilde{\varphi}_j(\psi) = \tilde{\mathscr{F}}(f)(\psi \circ \varphi_j) = \psi \circ \varphi_j \circ \mathscr{F}(f) = \psi \circ \varphi_i = \tilde{\varphi}_i(\psi).$$

Mostremos que (5.1) ser colimite implica em (5.2) ser limite.

Seja $(S, \{\tilde{q}_i : S \to Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i),c')\}_{i \in Ob(I)})$ outro cone, precisamos mostrar que existe um único morfismo $t : S \to Hom_{\mathscr{C}}(c,c')$ tal que

$$\tilde{q}_i = \tilde{\varphi}_i \circ t$$

Sejam $x \in S$ e $i \in Ob(I)$, consideramos o elemento $\tilde{q}_i(x) \in Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i),c')$. Como (5.2) comuta:

$$\tilde{\mathscr{F}}(f) \circ \tilde{q}_j = \tilde{q}_i \Longrightarrow \tilde{q}_i(x) = \tilde{\mathscr{F}}(f) \circ \tilde{q}_j(x) = \tilde{q}_j(x) \circ \mathscr{F}(f),$$

então $(c', \{\tilde{q}_i(x) : \mathscr{F}(i) \to c'\}_{i \in Ob(I)})$ é outro co-cone de $\mathscr{F}$. Logo, por c ser colimite de $\mathscr{F}$, existe um único morfismo $t(x) : c \to c'$ tal que $\tilde{q}_i(x) = t(x) \circ \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(i) \arrow[rr, "\mathscr{F}(f)"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{q}_i(x)"'] & & \mathscr{F}(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \arrow[ddl, bend left, "\tilde{q}_j(x)"] \\ & c \arrow[d, dotted, "t(x)"] & \\ & c' & \end{tikzcd}$$

Definimos a função

$$t : S \to Hom_{\mathscr{C}}(c,c')$$
$$x \mapsto t(x)$$

que tem a propriedade de $\tilde{q}_i = \tilde{\varphi}_i \circ t$, pois

$$\tilde{q}_i(x) = t(x) \circ \varphi_i = \tilde{\varphi}_i(t(x))$$

para cada $x \in S$.

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(j), c') \arrow[rr, "\tilde{\mathscr{F}}(f)"] & & Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(i), c') \\
& Hom_{\mathscr{C}}(c, c') \arrow[ul, "\tilde{\varphi}_j"'] \arrow[ur, "\tilde{\varphi}_i"] & \\
& S \arrow[u, "t"] \arrow[uul, bend left, "\tilde{q}_j"] \arrow[uur, bend right, "\tilde{q}_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Seja $t : S \to Hom_{\mathscr{C}}(c, c')$ tal que $\tilde{q}_i = \tilde{\varphi}_i \circ l$, então para $x \in S$, $\tilde{q}_i(x) = \tilde{\varphi}_i \circ l(x) = l(x) \circ \varphi_i$. Como $t(x)$ é o único morfismo em $\mathscr{C}$ com esta propriedade, temos que $l(x) = t(x)$, logo, $l = t$. Concluímos que $Hom_{\mathscr{C}}(c, c') \simeq \varprojlim \tilde{\mathscr{F}}$. □

Lema 5.6. *Neste contexto, se $\mathscr{C} = A$ e $\mathscr{F} = Y$ então $L_Y Y = id_{\widehat{A}}$ e $\eta' = id_Y$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "Y"'] & \arrow[d, Rightarrow, "\eta'"] & \widehat{A} \\
& \widehat{A} \arrow[ur, "\mathscr{F}_! \doteq L_Y Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. 1. $L_Y Y = id_{\widehat{A}}$:

Seja $P \in \widehat{A}$ qualquer, queremos mostrar que $L_Y Y(P) = P$. Porém, pelo Lema de Yoneda, P é representável, isto é, $P \simeq Y_d$ para algum $d \in Ob(A)$, logo, é suficiente mostrar que $L_Y Y(Y_d) = Y_d$. Para isso, consideramos a categoria $Y_d \uparrow Y$ de objetos $(a \in Ob(A),\ f : Y_a \to Y_d)$ e morfismos $g : (a, f) \to (a', f')$ sendo $g : a \to a'$ em A tal que comuta

$$\begin{tikzcd}
Y_a \arrow[rr, "Y_g"] \arrow[dr, "f"'] & & Y_{a'} \arrow[dl, "f'"] \\
& Y_d &
\end{tikzcd}$$

Essa categoria induz o funtor

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^{Y_d} : Y_d \uparrow Y &\to \widehat{A} \\
(a, f) &\mapsto Y_a \\
g &\mapsto Y_g
\end{aligned}$$

que resulta em

$$L_Y Y(Y_d) = Y_!(Y_d) = \varinjlim(\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^{Y_d}).$$

Mostraremos que $M_d = (Y_d, \{f : Y_a^{(a,f)} \to Y_d\}_{(a,f)\in Ob(Y_d\uparrow Y)})$[1] é colimite de $\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^{Y_d}$.

Sejam $(a,f),(a',f') \in Ob(Y_d \uparrow Y)$ e $g : (a,f) \to (a',f')$ quaisquer. Pela própria definição de morfismo em $Y_d \uparrow Y$, temos que

$$\begin{tikzcd} Y_a^{(a,f)} \arrow[rr, "Y_g"] \arrow[dr, "f"'] & & Y_{a'}^{(a',f')} \arrow[dl, "f'"] \\ & Y_d & \end{tikzcd}$$

comuta então M_d é co-cone de $\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^{Y_d}$.

Seja $(R, \{r_{(a,f)} : Y_a^{(a,f)} \to R\}_{(a,f)\in Ob(Y_d\uparrow Y)})$ outro co-cone, também podemos identificar R com Y_b para algum $b \in Ob(Y_d \uparrow Y)$. Precisamos mostrar que existe uma única transformação natural $t : Y_d \to Y_b$ tal que $t \circ f = r_{(a,f)}$ para qualquer $(a,f) \in Ob(Y_d \uparrow Y)$.

$$\begin{tikzcd} Y_a^{(a,f)} \arrow[rr, "Y_g"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[ddr, bend right, "r_{(a,f)}"'] & & Y_{a'}^{(a',f')} \arrow[dl, "f'"] \arrow[ddl, bend left, "r_{(a',f')}"] \\ & Y_d \arrow[d, dotted, "t"] & \\ & Y_b & \end{tikzcd}$$

Em $Y_d \uparrow Y$ tomamos o objeto (d, id_{Y_d}) e obtemos o morfismo

$$r_{(d,id_{Y_d})} : Y_d^{id_{Y_d}} \to Y_b$$

em $\widehat{A}$. Definimos

$$t \doteq r_{(d,id_{Y_d})}.$$

Seja $(a,f) \in Ob(Y_d \uparrow Y)$ qualquer, $f : Y_a \to Y_d$. Como o funtor de Yoneda é plenamente fiel, existe um único $\tilde{f} : a \to d$ tal que $Y_{\tilde{f}} = f$. Além disso,

$$\begin{tikzcd} Y_a \arrow[rr, "Y_{\tilde{f}}=f"] \arrow[dr, "f"'] & & Y_d \arrow[dl, "id_{Y_d}"] \\ & Y_d & \end{tikzcd}$$

comuta então $\tilde{f} : (a,f) \to (d, id_{Y_d})$ é morfismo em $Y_d \uparrow Y$. Como $(Y_b, r_{(a,f)})_{(a,f)\in Y_d\uparrow Y}$ é co-cone de $Y \circ \tilde{Q}^{Y_d}$ então

$$\begin{tikzcd} Y_a^{(a,f)} \arrow[rr, "Y_{\tilde{f}}=f"] \arrow[dr, "r_{(a,f)}"'] & & Y_d^{(d,id_{Y_d})} \arrow[dl, "r_{(d,id_{Y_d})}=t"] \\ & Y_b & \end{tikzcd}$$

[1]estamos denotando $\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^{Y_d}(a,f) = Y_a$ por $Y_a^{(a,f)}$, e f o mesmo morfismo de Y_a a Y_d que aparece em (a,f).

comuta, ou seja,

$$t \circ f = r_{(a,f)}.$$

Seja $l : Y_d \to Y_b$ outra transformação natural tal que

$$l \circ f = r_{(a,f)}.$$

para todo $(a,f) \in Y_d \uparrow Y$. Em particular, para (d, id_{Y_d})

$$\begin{tikzcd}
Y_d^{(d,id_{Y_d})} \arrow[r, "id_{Y_d}"] \arrow[dr, "r_{(d,id_{Y_d})}"'] & Y_d \arrow[d, "l"] \\
& Y_b
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é,

$$t = t \circ id_{Y_d} = r_{(d,id_{Y_d})} = l.$$

2. $\eta' = id_Y$: Seja $c \in Ob(A)$ qualquer, pela construção de extensão de Kan à esquerda por colimites feita no capítulo anterior, obtemos que $\eta'_c \doteq p^{Y_c}_{(c,id_{Y_c})}$, porém pelo co-cone M_c ser o colimite em questão neste caso, temos que $p^{Y_c}_{(c,id_{Y_c})} \doteq id_{Y_c}$. Portanto $\eta' = id_Y$. $\square$

Agora podemos demonstrar a Proposição 5.4.

Demonstração. Dados os diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "\mathscr{F}"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & \widehat{A} \\
& \mathscr{C} \arrow[ur, "Y_{\mathscr{F}}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "Y"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta'"] & \mathscr{C} \\
& \widehat{A} \arrow[ur, "\mathscr{F}_! \doteq L_Y \mathscr{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

queremos mostrar que o funtor $\mathscr{F}_!$ é adjunto à esquerda de $Y_{\mathscr{F}}$. Para isto, sendo $P \in Ob(\widehat{A})$ e $c \in Ob(\mathscr{C})$ quaisquer, mostremos que

$$Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_!(P),\ c) \simeq Hom_{\widehat{A}}(P,\ Y_{\mathscr{F}}(c)).$$

Ao longo desta demonstração, utilizaremos a notação (a,f) para acima do respectivo objeto para dizer que este objeto esta indexado na categoria $P \uparrow Y$ através do funtor $\tilde{Q}^P$. A princípio temos que

$$Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_!(P),c) = Hom_{\mathscr{C}}(L_Y \mathscr{F}(P),c) = Hom_{\mathscr{C}}(\varinjlim \mathscr{F} \circ \tilde{Q}^P, c) = Hom_{\mathscr{C}}(\varinjlim \mathscr{F}(a)^{(a,f)}, c).$$

Pelo Lema 5.5, obtemos o funtor $H : P \uparrow Y^{op} \to Sets$ tal que $H(a,f) = Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F} \circ \tilde{Q}^P(a,f), c)$ para $(a,f) \in Ob(P \uparrow Y)$ com a propriedade de

$$Hom_{\mathscr{C}}(\varinjlim \mathscr{F} \circ \tilde{Q}^P, c) \simeq \varprojlim H,$$

isto é,

$$Hom_{\mathscr{C}}(\varinjlim \mathscr{F}(a)^{(a,f)}, c) \simeq \varprojlim Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(a)^{(a,f)}, c),$$

porém por definição de $Y_{\mathscr{F}}$

$$\varprojlim Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}(a)^{(a,f)}, c) = \varprojlim Y_{\mathscr{F},c}(a)^{(a,f)}.$$

Como $Y_{\mathscr{F},c} : A^{op} \to Sets$ é um funtor, temos pelo Lema que Yoneda que $Hom_{\widehat{A}}(Y_a, Y_{\mathscr{F},c})$ está em bijeção com $Y_{\mathscr{F},c}(a)$, então

$$\varprojlim Y_{\mathscr{F},c}(a)^{(a,f)} \simeq \varprojlim Hom_{\widehat{A}}(Y_a^{(a,f)}, Y_{\mathscr{F},c}).$$

Novamente pelo Lema 5.5,

$$\varprojlim Hom_{\widehat{A}}(Y_a^{(a,f)}, Y_{\mathscr{F},c}) \simeq Hom_{\widehat{A}}(\varinjlim Y \circ \tilde{Q}^P, Y_{\mathscr{F},c}) = Hom_{\widehat{A}}(L_Y Y(P), Y_{\mathscr{F},c}),$$

e pelo Lema 5.6 concluímos que

$$Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_!(P), c) \simeq Hom_{\widehat{A}}(P, Y_{\mathscr{F}}(c)) \qquad \square$$

O seguinte exemplo será muito importante no Capítulo 7.

Exemplo 5.7. Podemos adequar toda essa construção aos espaços topológicos da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "\mathscr{F}"'] & & \widehat{\Delta} \\ & Top \arrow[ur, "Sing \doteq Y_{\mathscr{F}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Delta \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "Y"'] & & Top \\ & \widehat{\Delta} \arrow[ur, "\mathscr{F}_! \doteq L_Y \mathscr{F}"'] & \end{tikzcd}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : \Delta &\to Top \\ [n] &\mapsto |\Delta^n| \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} Sing : Top &\to \widehat{\Delta} \\ X &\mapsto Sing_X \end{aligned}$$

onde $Sing_X : \Delta^{op} \to Sets$, chamado **complexo singular** de X, é o conjunto simplicial determinado por $[n] \mapsto Hom_{Top}(|\Delta^n|, X)$, e

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_! \doteq L_Y \mathscr{F} : \widehat{\Delta} &\to Top \\ K &\mapsto |K| \end{aligned}$$

lembrando que $|K|$ é a realização geométrica de K e Δ^n é a imagem de $[n]$ pelo funtor de Yoneda $Y : \Delta \to \widehat{\Delta}$. De acordo com a Proposição 5.4 temos que $\mathscr{F}_!$ é adjunto à esquerda de $Sing$.

De acordo com Jacob Lurie, [6], um espaço topológico X é determinado, sob equivalência homotópica fraca[2], por $Sing_X$, e a função contínua $|Sing_X| \to X$ é uma equivalência homotópica fraca. Se o interesse for estudar espaços topológicos sob equivalência homotópica fraca, basta trabalhar com $\widehat{\Delta}$.

5.1 Nervo

Um caso muito importante dessa construção é quando $A = \Delta$, $\mathscr{C} = Cat$ e $\mathscr{F} = \iota$,[3] sendo

$$\iota : \Delta \hookrightarrow Cat$$

a restrição do mergulho

$$\iota : Ord \hookrightarrow Cat,^4$$

ou seja, para cada $[n] \in Ob(\Delta)$, $\iota[n]$ é uma categoria de objetos $\{0, \ldots, n\}$ e com um único morfismo $l_i^j : i \to j$ se $i \leq j$ e nenhum morfismo caso contrário. Lembramos também que $\widehat{\Delta}$ é a categoria dos conjuntos simpliciais $P : \Delta^{op} \to Sets$. Neste contexto, temos a seguinte definição:

Definição 5.8. O funtor de Yoneda generalizado relacionado a ι é o **Nervo**:

$$\begin{aligned} Y_\iota : Cat &\to \widehat{\Delta} \\ \mathscr{C} &\mapsto Y_{\iota,\mathscr{C}} \\ (\mathscr{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}') &\mapsto (Y_\iota(\mathscr{G}) : Y_{\iota,\mathscr{C}} \to Y_{\iota,\mathscr{C}'}) \end{aligned}$$

em que $Y_{\iota,\mathscr{C}}$ é o pré-feixe dado por

$$\begin{aligned} Y_{\iota,\mathscr{C}} : \Delta^{op} &\to Sets \\ [n] &\mapsto Y_{\iota,\mathscr{C}}([n]) = Hom_{Cat}(\iota[n], \mathscr{C}) \\ (g : [n] \to [m]) &\mapsto (Y_{\iota,\mathscr{C}}(g) : Hom_{Cat}(\iota[m], \mathscr{C}) \to Hom_{Cat}(\iota[n], \mathscr{C})) \end{aligned}$$

onde $Y_{\iota,\mathscr{C}}(g)(\psi) = \psi \circ \iota(g)$ para cada $\psi \in Hom_{Cat}(\iota[m], \mathscr{C})$; e $Y_\iota(\mathscr{G})$ é a transformação natural em que, dado $[n] \in Ob(\Delta)$,

$$\begin{aligned} Y_\iota(\mathscr{G})[n] : Hom_{Cat}(\iota[n], \mathscr{C}) &\to Hom_{Cat}(\iota[m], \mathscr{C}') \\ \psi &\mapsto \mathscr{G} \circ \psi \end{aligned}$$

[2]Um morfismo entre conjuntos simpliciais $P : K \to L$ é uma equivalência homotópica fraca se a função das realizações geométricas induzidas $|P| : |K| \to |L|$ for uma equivalência de homotopia fraca de espaços topológicos (função contínua que induz isomorfismos em todos os respectivos grupos de homotopia). Neste caso, X e Y espaços topológicos possuem uma equivalência homotopica fraca se, e só se, $Sing_X \simeq Sing_Y$ em $\widehat{\Delta}$.

[3]Estamos denotando por Cat a categoria das categorias pequenas como definido no Capítulo 2.

[4]Ord sendo a categoria em que os objetos são conjuntos ordenados e os morfismos são funções crescentes.

Observação 5.9. O nervo também pode ser denotado por $Y_\iota = N_\bullet : Cat \to \widehat{\Delta}$; para $\mathscr{C} \in Ob(Cat)$, $Y_{\iota,\mathscr{C}} = N_\bullet(\mathscr{C}) : \Delta^{op} \to Sets$; para $[n] \in Ob(\Delta)$, $Y_{\iota,\mathscr{C}}([n]) = N_n(\mathscr{C}) = Hom_{Cat}(\iota[n],\mathscr{C})$; para $\mathscr{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, $Y_\iota(\mathscr{G})[n] = N_n(\mathscr{G})$.

Uma propriedade muito importante do Nervo é ser um mergulho cheio de categorias. É simples verificar que o funtor Y_ι é injetor nos objetos, a dificuldade maior está em visualizar a bijeção nos morfismos, ou seja, dados $\mathscr{C}, \mathscr{C}' \in Ob(Cat)$,

$$Y_{\iota,(\mathscr{C},\mathscr{C}')} : Hom_{Cat}(\mathscr{C},\mathscr{C}') \to Hom_{\widehat{\Delta}}(Y_{\iota,\mathscr{C}}, Y_{\iota,\mathscr{C}'})$$

é bijetor. Para podermos demonstrar este fato, precisamos ressaltar que a categoria $\iota[n]$ é totalmente determinada por[5]

$$0 \xrightarrow{l_0^1} 1 \xrightarrow{l_1^2} 2 \xrightarrow{l_2^3} \cdots \xrightarrow{l_{n-2}^{n-1}} n-1 \xrightarrow{l_{n-1}^n} n$$

A partir disto, podemos relacionar a categoria $\mathscr{C}$ com o conjunto $Hom_{Cat}(\iota[n],\mathscr{C})$ da seguinte forma:

- $n = 0$: cada objeto $C \in Ob(\mathscr{C})$ é unicamente identificado com o funtor $\varphi_C \in Hom_{Cat}(\iota[0],\mathscr{C})$,

$$\begin{aligned} \varphi_C : \iota[0] &\to \mathscr{C} \\ 0 &\mapsto \varphi_C(0) = C \end{aligned}$$

  então $C \in Ob(\mathscr{C}) \sim \varphi_C \in Hom_{Cat}(\iota[0],\mathscr{C})$.

- $n = 1$: cada morfismo $u : C \to D$ em $\mathscr{C}$ é unicamente identificado com o funtor $h_u \in Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C})$, $u \sim h_u$, onde

$$\begin{aligned} h_u : \iota[1] &\to \mathscr{C} \\ 0 &\mapsto C \\ 1 &\mapsto D \\ l_0^1 &\mapsto u \end{aligned}$$

- Para n qualquer, a sequência

$$\star = \{\, C_0 \xrightarrow{u_0} C_1 \xrightarrow{u_1} \cdots \xrightarrow{u_{n-2}} C_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} C_n \,\}$$

  em $\mathscr{C}$ é unicamente identificado com o funtor $h_\star \in Hom_{Cat}(\iota[n],\mathscr{C})$, $\star \sim h_\star$, onde

$$\begin{aligned} h_\star : \iota[n] &\to \mathscr{C} \\ i &\mapsto C_i \\ l_{i-1}^i &\mapsto u_{i-1} \end{aligned}$$

[5] Usaremos a notação introduzida no Capítulo 2 em que $l_a^b : a \to b$ é o único morfismo de a para b sempre que $a \leq b$ na categoria ordenada $(X, \leq)$.

Lema 5.10. *Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{C}' \in Ob(Cat)$ quaisquer,*

$$Y_{\iota,(\mathscr{C},\mathscr{C}')} : Hom_{Cat}(\mathscr{C}, \mathscr{C}') \to Hom_{\widehat{\Delta}}(Y_{\iota,\mathscr{C}}, Y_{\iota,\mathscr{C}'})$$

é injetor.

Demonstração. Sejam $\mathscr{G}, \mathscr{G}' \in Hom_{Cat}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ funtores com $\mathscr{G} \neq \mathscr{G}'$, precisamos mostrar que $Y_\iota(\mathscr{G}) \neq Y_\iota(\mathscr{G}')$, ou seja, que para algum $[n] \in Ob(\widehat{\Delta})$ e $\psi : \iota[n] \to \mathscr{C}$, temos $\mathscr{G} \circ \psi \neq \mathscr{G}' \circ \psi$. Por $\mathscr{G}$ e $\mathscr{G}'$ serem diferentes, podemos supor que exista $u : C \to D$ em $\mathscr{C}$ tal que $\mathscr{G}(u) \neq \mathscr{G}'(u)$.[6] Então tomando $h_u : \iota[1] \to \mathscr{C}$ obtemos que

$$\mathscr{G} \circ h_u(l_0^1) = \mathscr{G}(u) \neq \mathscr{G}'(u) = \mathscr{G}' \circ h_u(l_0^1)$$

logo, $Y_\iota(\mathscr{G})[1]\ (h_u) \neq Y_\iota(\mathscr{G}')[1]\ (h_u)$ e consequentemente $Y_\iota(\mathscr{G}) \neq Y_\iota(\mathscr{G}')$. Portanto, $Y_{\iota,(\mathscr{C},\mathscr{C}')}$ é injetor. □

Lema 5.11. *Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{C}' \in Ob(Cat)$ quaisquer,*

$$Y_{\iota,(\mathscr{C},\mathscr{C}')} : Hom_{Cat}(\mathscr{C}, \mathscr{C}') \to Hom_{\widehat{\Delta}}(Y_{\iota,\mathscr{C}}, Y_{\iota,\mathscr{C}'})$$

é sobrejetor.

Demonstração. Seja $f : Y_{\iota,\mathscr{C}} \to Y_{\iota,\mathscr{C}'}$ um morfismo de conjuntos simpliciais, logo, para cada $[n] \in Ob(\Delta)$, temos uma função de conjuntos

$$f_n : \underbrace{Hom_{Cat}(\iota[n], \mathscr{C})}_{Y_{\iota,\mathscr{C}}[n]} \to \underbrace{Hom_{Cat}(\iota[n], \mathscr{C}')}_{Y_{\iota,\mathscr{C}'}[n]}$$

e precisamos mostrar que existe um funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ tal que $Y_\iota(F) = f$.

- Construindo o candidato ao funtor F desejado:
  - $F : Ob(\mathscr{C}) \to Ob(\mathscr{C}')$: Seja $C \in Ob(\mathscr{C})$ qualquer, sabemos que $C \sim \varphi_C \in Hom_{Cat}(\iota[0], \mathscr{C})$ de modo único. Além disso, $f_0(\varphi_C) \in Hom_{Cat}(\iota[0], \mathscr{C}')$ também se relaciona unicamente com um objeto de $\mathscr{C}'$ o qual definiremos por $F(C)$, $F(C) \sim f_0(\varphi_C)$.
  - $F_{(C,D)} : Hom_{\mathscr{C}}(C,D) \to Hom_{\mathscr{C}'}(F(C), F(D))$ para $C, D \in Ob(\mathscr{C})$ quaisquer:
    Seja $u : C \to D$ em $\mathscr{C}$, tomando $h_u \in Hom_{Cat}(\iota[1], \mathscr{C})$ tal que $u \sim h_u$, temos que $f_1(h_u) : \iota[1] \to \mathscr{C}' \in Hom_{Cat}(\iota[1], \mathscr{C}')$ se relaciona com um morfismo $f_1(h_u)\ (l_0^1) : f_1(h_u)\ (0) \to F_1(h_u)\ (1)$, o qual definiremos por $F(u)$. Porém, falta mostrar que $F(u) : F(C) \to F(D)$, faremos somente $f_1(h_u)\ (0) = F(C)$.

[6] Podemos supor isto pois, caso $\mathscr{G}(C) \neq \mathscr{G}'(C)$ para algum $C \in Ob(\mathscr{C})$, então $\mathscr{G}(id_C) \neq \mathscr{G}'(id_C)$.

Em Δ^{op} temos o morfismo

$$\begin{aligned} d_0^1 : [0] &\to [1] \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_0^1) : Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}) &\to Hom_{Cat}(\iota[0],\mathscr{C}) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \iota(d_0^1) \end{aligned}$$

Como $f : Y_{\iota,\mathscr{C}} \to Y_{\iota,\mathscr{C}'}$ é uma transformação natural, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{Cat}(\iota[0],\mathscr{C}) \arrow[r, "f_0"] & Hom_{Cat}(\iota[0],\mathscr{C}') \\ Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}) \arrow[r, "f_1"'] \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_0^1)"] & Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}) \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}'}(d_0^1)"'] \end{tikzcd}$$

logo,

$$f_0(h_u \circ \iota(d_0^1)) = f_0(Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_0^1)\ (h_u)) = Y_{\iota,\mathscr{C}'}(d_0^1)\ (f_1(h_u)) = f_1(h_u) \circ \iota(d_0^1)$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} h_u \circ \iota(d_0^1) : \iota[0] &\to \mathscr{C} \\ 0 &\mapsto h_u \circ \iota(d_0^1)(0) = h_u(0) = C \end{aligned}$$

então $h_u \circ \iota(d_0^1) = \varphi_C$, logo

$$\begin{aligned} f_0(h_u \circ \iota(d_0^1)) : \iota[0] &\to \mathscr{C}' \\ 0 &\mapsto F(C) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f_1(h_u) \circ \iota(d_0^1) : \iota[0] &\to \mathscr{C}' \\ 0 &\mapsto f_1(h_u) \circ \iota(d_0^1)\ (0) = f_1(h_u)\ (0) \end{aligned}$$

Portanto, $f_1(h_u)\ (0) = F(C)$. $f_1(h_u)\ (1) = F(D)$ segue de modo análogo considerando o morfismo (d_0^0).

- F é funtor:

- $F(id_C) = id_{F(C)}$ para $C \in Ob(Cat)$ qualquer: Primeiramente notemos que $Y_{\iota,\mathscr{C}}(c_1^0)\ (\varphi_C) = h_{id_C}$, onde $c_1^0 : [1] \to [0]$ com $c_1^0(0) = c_1^0(1) = 0$ em Δ^{op}. De fato,

$$\begin{aligned} Y_{\iota,\mathscr{C}}(c_1^0) : Hom_{Cat}(\iota[0],\mathscr{C}) &\to Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}) \\ \psi &\mapsto \psi \circ \iota(c_1^0) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} Y_{\iota,\mathscr{C}}(c_1^0)\ (\varphi_C) = \varphi_C \circ \iota(c_1^0) : \iota[1] &\to \mathscr{C} \\ 0 &\mapsto \varphi_C \circ \iota(c_1^0)(0) = \varphi_C(0) = C \\ 1 &\mapsto \varphi_C \circ \iota(c_1^0)(1) = \varphi_C(0) = C \\ l_0^1 &\mapsto \varphi_C \circ \iota(c_1^0)(l_0^1) = \varphi_C(id_0) = id_C \end{aligned}$$

logo, $Y_{\iota,\mathscr{C}}(c_1^0)\ (\varphi_C) = h_{id_C}$. Por conta disto, para $f : Y_{\iota,\mathscr{C}} \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$ transformação natural,

$$f_1(h_{id_C}) = f_1 \circ Y_{\iota,\mathscr{C}}(c_1^0)\ (\varphi_C) \in Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}')$$

e

$$h'_{id_{F(C)}} = Y_{\iota,\mathscr{C}'}(c_1^0)\ (\varphi'_{F(C)}) = Y_{\iota,\mathscr{C}'}(c_1^0)\ (f_0(\varphi_C)) \in Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}')$$

Como f é transformação natural, o diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd} Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}) \arrow[r, "f_1"] & Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}') \\ Hom_{Cat}(\iota[0],\mathscr{C}) \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}}(c_1^0)"] \arrow[r, "f_0"'] & Hom_{Cat}(\iota[0],\mathscr{C}) \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}'}(c_1^0)"'] \end{tikzcd}$$

então

$$F(id_C) \sim f_1(h_{id_C}) = h'_{id_{F(C)}} \sim id_{F(C)}.$$

- $F(v) \circ F(u) = F(v \circ u)$ para $u : C \to D$ e $v : D \to E$ em C quaisquer. Observamos que a sequência

$$C \xrightarrow{u} D \xrightarrow{v} E$$

pode ser identificado com $\sigma \in Y_{\iota,\mathscr{C}}([2]) = Hom_{Cat}(\iota[2],\mathscr{C})$, $\sigma : \iota[2] \to \mathscr{C}$ com $\sigma(0) = C$, $\sigma(1) = D$, $\sigma(2) = E$, $\sigma(l_0^1) = u$, $\sigma(l_1^2) = v$ e $\sigma(l_0^2) = v \circ u$. Por $f : Y_{\iota,\mathscr{C}} \to Y_{\iota,\mathscr{C}'}$ ser transformação natural, comuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}) \arrow[r, "f_1"] & Hom_{Cat}(\iota[1],\mathscr{C}') \\ Hom_{Cat}(\iota[2],\mathscr{C}) \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_1^1)"] \arrow[r, "f_2"'] & Hom_{Cat}(\iota[2],\mathscr{C}) \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}'}(d_1^1)"'] \end{tikzcd}$$

onde $d_1^1 : [1] \to [2]$ é tal que $d_1^1(0) = 0$, $d_1^1(1) = 2$ e $d_1^1(l_0^1) = l_0^2$.

Por um lado,

$$Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_1^1)(\sigma) = \sigma \circ \iota(d_1^1) : \iota[1] \to \mathscr{C}$$
$$0 \mapsto \sigma \circ \iota(d_1^1)(0) = \sigma(0) = C$$
$$1 \mapsto \sigma \circ \iota(d_1^1)(1) = \sigma(2) = E$$
$$l_0^1 \mapsto \sigma \circ \iota(d_1^1)(l_0^1) = \sigma(l_0^2) = v \circ u$$

então

$$f_1 \circ Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_1^1)(\sigma) \sim F(v \circ u).$$

Por outro lado, como

$$\sigma \sim \{\ C \xrightarrow{u} D \xrightarrow{v} E\ \}$$

segue da Observação 5.12 adiante que

$$f_2(\sigma) \sim \{\ F(C) \xrightarrow{F(u)} F(D) \xrightarrow{F(v)} F(E)\ \}$$

isto é, $f_2(\sigma)(l_0^2) = F(v) \circ F(u)$. Logo, $Y_{\iota,\mathscr{C}'}(d_1^1) \circ f_2(\sigma) \sim F(v) \circ F(u)$. Como $Y_{\iota,\mathscr{C}'}(d_1^1) \circ f_2(\sigma) = f_1 \circ Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_1^1)(\sigma)$, concluímos que $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$.

- $Y_\iota(F) = f$: Precisamos mostrar que, para cada $n \in Ob(\Delta)$ e $\psi \in Hom_{Cat}(\iota[n], \mathscr{C})$, $f_n(\psi) = F \circ \psi$. Temos que

$$\psi \sim \star = \{\ C_0 \xrightarrow{u_0} C_1 \xrightarrow{u_1} \cdots \xrightarrow{u_{n-2}} C_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} C_n\ \}$$

diagrama em $\mathscr{C}$. Então

$$\begin{aligned} f_n(\psi) &\sim \{\ F(C_0) \xrightarrow{F(u_0)} F(C_1) \xrightarrow{F(u_1)} \cdots \xrightarrow{F(u_{n-1})} F(C_n)\ \} \\ &= \{\ F(\psi(0)) \xrightarrow{F(\psi(l_0^1))} F(\psi(1)) \xrightarrow{F(\psi(l_1^2))} \cdots \xrightarrow{F(\psi(l_{n-1}^n))} F(\psi(n))\ \} \\ &\sim F \circ \psi \end{aligned}$$

□

Observação 5.12. Note que

$$f_n(\psi) \sim \{\ F(C_0) \xrightarrow{F(u_0)} F(C_1) \xrightarrow{F(u_1)} \cdots \xrightarrow{F(u_{n-1})} F(C_n)\ \}$$

pois

$$\begin{tikzcd} Hom_{Cat}(\iota[1], \mathscr{C}) \arrow[r, "f_1"] & Hom_{Cat}(\iota[1], \mathscr{C}') \\ Hom_{Cat}(\iota[n], \mathscr{C}) \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}}(h)"] \arrow[r, "f_n"'] & Hom_{Cat}(\iota[n], \mathscr{C}) \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}'}(h)"'] \end{tikzcd}$$

comuta, sendo $h : [1] \to [n]$ morfismo em Δ^{op} que leva $h(0) = 0$ e $h(1) = 1$. Temos

$$\begin{aligned} Y_{\iota,\mathscr{C}}(h)(\psi) : \iota[1] &\to \mathscr{C} & \Longrightarrow \quad f_1 \circ Y_{\iota,\mathscr{C}}(h)(\psi) : \iota[1] &\to \mathscr{C}' \\ 0 &\mapsto C_0 & 0 &\mapsto F(C_0) \\ 1 &\mapsto C_1 & 1 &\mapsto F(C_1) \\ l_0^1 &\mapsto u_0 & l_0^1 &\mapsto F(u_0) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f_n(\psi) : \iota[n] &\to \mathscr{C}' & \Longrightarrow \quad Y_{\iota,\mathscr{C}'}(h)(f_n(\psi)) : \iota[1] &\to \mathscr{C}' \\ 0 &\mapsto f_n(\psi)(0) & 0 &\mapsto f_n(\psi)(0) \\ 1 &\mapsto f_n(\psi)(1) & 1 &\mapsto f_n(\psi)(1) \\ &\vdots & l_0^1 &\mapsto f_n(\psi)(l_0^1) \\ l_0^1 &\mapsto f_n(\psi)(l_0^1) & & \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Como $Y_{\iota,\mathscr{C}'}(h)(f_n(\psi)) = f_1 \circ Y_{\iota,\mathscr{C}}(h)(\psi)$, segue que $f_n(\psi)(0) = F(C_0)$, $f_n(\psi)(1) = F(C_1)$ e $f_n(\psi)(l_0^1) = F(u_0)$. Seguindo esse raciocínio para os demais morfismos $h_i^{i+1} : [1] \to [n]$ que levam $h_i^{i+1}(0) = i$ e $h_i^{i+1}(1) = i+1$, obtemos $f_n(\psi)(i) = F(C_i)$ e $f_n(\psi)(l_i^{i+1}) = F(u_i)$.

Proposição 5.13. *O Nervo é um mergulho cheio de categorias*

Demonstração. Segue dos Lemas 5.10 e 5.11. □

Ressaltamos que $Y_{\iota,\mathscr{C}}([n])$ é o conjunto de todas sequências de composições de tamanho n

$$C_0 \xrightarrow{u_0} C_1 \xrightarrow{u_1} \cdots \xrightarrow{u_{n-2}} C_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} C_n$$

de morfismos de $\mathscr{C}$. Além disso, o funtor $\iota(d_{n-1}^i) : \iota[n-1] \to \iota[n]$ manda $i \mapsto i+1$ e $l_{i-1}^i \mapsto i_{i-1}^{i+1}$, logo o funtor $\psi : \iota[n] \to \mathscr{C}$ que manda $i \mapsto C_i$ e $l_i^{i+1} \mapsto u_i$ (ou seja, associada à sequencia acima) é enviada por $\partial_{n-1}^i = Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_{n-1}^i)$ em $\psi \circ \iota(d_{n-1}^i) : \iota[n-1] \to \mathscr{C}$ que envia $i \mapsto C_{i+1}$ e $l_{i-1}^i \mapsto u_i \circ u_{i-1}$. Ou seja, ∂_{n-1}^i manda a sequência acima em

$$C_0 \xrightarrow{u_0} \cdots \longrightarrow C_{i-1} \xrightarrow{u_i \circ u_{i-1}} C_{i+1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} C_n$$

e de modo parecido δ_{n+1}^i manda a sequência acima em

$$C_0 \xrightarrow{u_0} \cdots \longrightarrow C_i \xrightarrow{id_{C_i}} C_i \longrightarrow \cdots \xrightarrow{u_{n-1}} C_n$$

E ainda, todas as informações de $\mathscr{C}$ podem ser recuperadas por $Y_{\iota,\mathscr{C}}$: os objetos C se identificam com os elementos de $\varphi_C \in Y_{\iota,\mathscr{C}}([0])$; os morfismos $u : C_0 \to C_1$ se identificam com $h_u \in Y_{\iota,\mathscr{C}}([1])$ de modo que $\partial_0^1(h_u) = C_0$ e $\partial_0^0(h_u) = C_1$; o morfismo identidade id_C com $\delta_1^0(\varphi_C) \in Y_{\iota,\mathscr{C}}([1])$; uma composição $u_1 \circ u_0$ se identifica com $\sigma \in Y_{\iota,\mathscr{C}}([2])$ tal que $\delta_1^2(\sigma) = u_0$, $\delta_1^0(\sigma) = u_1$ e $\delta_1^1(\sigma) = u_1 \circ u_0$.

Neste contexto, temos o seguinte caso que nos é de extrema importância, pois será fundamental para definirmos as $\infty-$categorias.

$$
\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[rr, "Y"] \arrow[dr, "\iota"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \widehat{\Delta} \\
& Cat \arrow[ur, "Y_\iota"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "Y"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta'"] & Cat \\
& \widehat{\Delta} \arrow[ur, "\iota_! \doteq L_Y \iota"'] &
\end{tikzcd}
$$

sendo o funtor $\iota_!$ adjunto à esquerda de Y_ι.

CAPÍTULO 6

2 - Categorias

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos de 2-categoria forte e fraca, que constituem um primeiro passo para estudarmos as categorias de ordem superior.

6.1 2 - Categorias Fortes

Antes de definir as infinito categorias, é interessante compreender o que é uma n-categoria forte, começaremos com as 2-categorias fortes, as quais, de certo modo, se assemelham com a noção topológica de homotopia. Em uma 2-categoria $\mathfrak{C}$ também precisamos de uma classe de objetos $Ob(\mathfrak{C})$, porém com uma característica a mais: para cada $X,Y \in Ob(\mathfrak{C})$, está associada uma categoria pequena $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ em que os objetos são chamados morfismos de $\mathfrak{C}$ e os morfismos são chamados 2-morfismos de $\mathfrak{C}$. Geralmente os objetos $f \in Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y))$ são denotados $f : X \to Y$ e os morfismos $\alpha \in Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)}(f,g)$ são denotados por $\alpha : f \Rightarrow g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

Além disso, para que um objeto $\mathfrak{C}$ nessas condições seja uma 2-categoria precisamos que, para cada $X,Y,Z \in Ob(\mathfrak{C})$, seja dado um funtor composição horizontal

$$\circ_{X,Y,Z} : Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{C}}(X,Z)$$

satisfazendo certos axiomas explanados posteriormente. O funtor $\circ$ age separadamente nos objetos e nos morfismos dessas categorias. A imagem de um objeto $(f_2, f_1) \in Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y))$ por este funtor é $\circ(f_2, f_1) \doteq f_2 \circ f_1$, trata-se da composição de morfismos na categoria obtida desconsiderando os 2-morfismos de $\mathfrak{C}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[rr, bend right, "f_2\circ f_1"'] & Y \arrow[r, bend left, "f_2"] & Z \end{tikzcd}$$

Com relação aos morfismos, para dois objetos $(f_2, f_1), (g_2, g_1) \in Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y))$ quaisquer, temos associado o conjunto $Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z)\times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)}((f_2, f_1), (g_2, g_1))$ dos morfismos (β, α) : $(f_2, f_1) \to (g_2, g_1)$ em $Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"{name=A}] \arrow[r, bend right, "g_1"'{name=B}] \arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\alpha"] & Y \arrow[r, bend left, "f_2"{name=C}] \arrow[r, bend right, "g_2"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=C, to=D, "\beta"] & Z \end{tikzcd}$$

Com isso, obtemos a função

$$\begin{aligned} \circ_{(f_2,f_1),(g_2,g_1)} : Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z)\times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)}((f_2, f_1), (g_2, g_1)) &\to Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(X,Z)}(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) \\ (\beta, \alpha) &\mapsto \circ(\beta, \alpha) \doteq \beta \odot \alpha \end{aligned}$$

sendo $\circ(\beta, \alpha)$ denotado por $\beta \odot \alpha$ somente para melhor distinção da natureza dessa operação.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_2\circ f_1"{name=A}] \arrow[r, bend right, "g_2\circ g_1"'{name=B}] \arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\beta\odot\alpha"] & Z \end{tikzcd}$$

Agora podemos definir uma 2-categoria forte:

Definição 6.1. Uma 2**-categoria forte** $\mathfrak{C}$ é definida por:

1. uma classe Ob($\mathfrak{C}$) de objetos, chamados 0**-morfismos de** $\mathfrak{C}$;

2. para todo par $X, Y \in Ob(\mathfrak{C})$, uma categoria pequena $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, cujos objetos são chamados 1**-morfismos de** $\mathfrak{C}$, os morfismos de 2**-morfismos de** $\mathfrak{C}$ e a composição de **composição vertical**;

3. para toda tripla $X, Y, Z \in Ob(\mathfrak{C})$, um funtor, dito **composição horizontal**:

$$\circ : Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{C}}(X,Z)$$

tais que:

(i) as categorias pequenas são duas a duas disjuntas para diferentes pares de objetos;

(ii) a composição horizontal é associativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ e $(\gamma \odot \beta) \odot \alpha = \gamma \odot (\beta \odot \alpha)$ sempre que forem definidas;

(iii) para todo $X \in Ob(\mathfrak{C})$, existe um morfismo identidade $id_X \in Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(X,X))$ tal que $f \circ id_x = f$ e $id_X \circ g = g$ quando estas composições forem definidas;

(iv) a composição horizontal é unitária nos 2-morfismos: $id_{id_X} \odot \alpha = \alpha = \alpha \odot id_{id_X}$ quando estas composições forem definidas.

Notação 6.2. *Denotamos a coleção dos* 0-*morfismos de* $\mathfrak{C}$ *por* $\mathfrak{C}_0$*, a dos* 1-*morfismos por* $\mathfrak{C}_1$ *e a dos* 2-*morfismos por* $\mathfrak{C}_2$.

Observamos que a composição vertical, que é referente à categoria $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, está implícita nesta definição, na qual para $f,g,h : X \to Y$, se $\alpha : f \Rightarrow g$ e $\beta : g \Rightarrow h$ são morfismos em $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ então obtemos a composição (associativa por se tratar de uma categoria) $\beta \circ \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, "g"{name=G, swap}] \arrow[r, bend right=50, "h"{name=H, swap}] & Y \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F2}] \arrow[r, bend right=50, "h"{name=H2, swap}] & Y
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\alpha"]
\arrow[Rightarrow, from=G, to=H, "\beta"]
\arrow[Rightarrow, from=F2, to=H2, "\beta\circ\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Analisemos os axiomas da Definição 6.1:

1. O item (i) significa que para todos $X,Y,Z,W \in Ob(\mathfrak{C})$: se $(X,Y) \neq (Z,W)$ então as categorias $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ e $Hom_{\mathfrak{C}}(Z,W)$ não possuem objetos e nem morfismos em comum: $Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)) \cap Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(Z,W)) = \emptyset$; além disso, para quaisquer $f,g \in Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y))$ e $h,l \in Ob (Hom_{\mathfrak{C}}(Z,W))$ se $(f,g) \neq (h,l)$ então $Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)}(f,g) \cap Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(Z,W)}(h,l) = \emptyset$. Caso isso não ocorra, podemos facilmente impor por construção tal condição.

2. Para o item (ii), no contexto

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left=50, "f_3"{name=A}] \arrow[r, bend right=50, "g_3"{name=B, swap}] & Y \arrow[r, bend left=50, "f_2"{name=C}] \arrow[r, bend right=50, "g_2"{name=D, swap}] & Z \arrow[r, bend left=50, "f_1"{name=E}] \arrow[r, bend right=50, "g_1"{name=F, swap}] & W
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\alpha"]
\arrow[Rightarrow, from=C, to=D, "\beta"]
\arrow[Rightarrow, from=E, to=F, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

precisamos que a ordem com a qual aplicamos os funtores composição horizontal não altere o resultado final, isto é, que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left=50, "f_1\circ(f_2\circ f_3)"{name=A}] \arrow[r, bend right=50, "g_1\circ(g_2\circ g_3)"{name=B, swap}] & W
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\gamma\odot(\beta\odot\alpha)"]
\end{tikzcd}$$

seja igual a

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left=50, "(f_1\circ f_2)\circ f_3"{name=A}] \arrow[r, bend right=50, "(g_1\circ g_2)\circ g_3"{name=B, swap}] & W
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "(\gamma\odot\beta)\odot\alpha"]
\end{tikzcd}$$

3. $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ ser uma categoria garante que, para todo $f : X \to Y$, existe um 2-morfismo $id_f : f \Rightarrow f$ de $\mathfrak{C}$ tal que $\alpha \circ id_f = \alpha$ e $id_f \circ \beta = \beta$ sempre que essas composições verticais[1] estiverem bem definidas, no entanto, não garante a existência do morfismo id_X do item (iii). Porém, uma vez que existe $id_X \in Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(X,X))$, a existência de $id_{id_X} \in Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(X,X)}(id_X, id_X)$ está

[1]Referentes à categoria $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$.

garantida, sendo necessário exigir em (iv) apenas que $id_{id_X} \odot \alpha = \alpha = \alpha \odot id_{id_X}$ quando estas composições forem definidas. Note que as propriedades exigidas (iii) e (iv) são referentes ao funtor composição e não à composição de $Hom_{\mathfrak{C}}(X,X)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "id_X"] \arrow[r, bend right, "id_X"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{id_X}"] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & Y \arrow[r, Rightarrow] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{id_X}\odot\alpha"] & Y \arrow[r, phantom, "="] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

Lema 6.3. *Os dois seguintes diagramas possuem o mesmo resultado*[2]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=50, "f_1"] \arrow[r, "g_1"'] \arrow[r, bend right=50, "h_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha_1"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta_1"] & Y \arrow[r, bend left=50, "f_2"] \arrow[r, "g_2"'] \arrow[r, bend right=50, "h_2"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha_2"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta_2"] & Z \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "h_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta_1\circ\alpha_1"] & Y \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right, "h_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta_2\circ\alpha_2"] & Z \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, bend left, "f_2\circ f_1"] \arrow[r, bend right, "h_2\circ h_1"'] \arrow[r, phantom, "(\beta_2\circ\alpha_2)\odot \Downarrow (\beta_1\circ\alpha_1)"] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=50, "f_1"] \arrow[r, "g_1"'] \arrow[r, bend right=50, "h_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha_1"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta_1"] & Y \arrow[r, bend left=50, "f_2"] \arrow[r, "g_2"'] \arrow[r, bend right=50, "h_2"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha_2"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta_2"] & Z \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, bend left=50, "f_2\circ f_1"] \arrow[r, "g_2\circ g_1"'] \arrow[r, bend right=50, "h_2\circ h_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha_2\odot\alpha_1"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta_2\odot\beta_1"] & Z \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, bend left, "f_2\circ f_1"] \arrow[r, bend right, "h_2\circ h_1"'] \arrow[r, phantom, "(\beta_2\odot\beta_1)\circ \Downarrow (\alpha_2\odot\alpha_1)"] & Z \end{tikzcd}$$

Ou seja,

$$(\beta_2 \circ \alpha_2) \odot (\beta_1 \circ \alpha_1) = (\beta_2 \odot \beta_1) \circ (\alpha_2 \odot \alpha_1).$$

Demonstração. O funtor $\circ$ respeita a composição de seu domínio e contra-domínio justamente por ser funtor[3], então

$$\begin{aligned} (\beta_2 \circ \alpha_2) \odot (\beta_1 \circ \alpha_1) &= \odot(\beta_2 \circ \alpha_2, \beta_1 \circ \alpha_1) \\ &= \odot((\beta_2, \beta_1) \circ (\alpha_2, \alpha_1)) \\ &= (\odot(\beta_2, \beta_1)) \circ (\odot(\alpha_2, \alpha_1)) \\ &= (\beta_2 \odot \beta_1) \circ (\alpha_2 \odot \alpha_1). \end{aligned}$$ □

Lema 6.4. *Para todos $f_1 : X \to Y$ e $f_2 : Y \to Z$ temos*

$$id_{f_2} \odot id_{f_1} = id_{f_2 \circ f_1}$$

[2]Aqui, a notação $\beta \circ \alpha$ se refere à composição da categoria $Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, enquanto $\beta \odot \alpha$ se refere ao funtor composição horizontal.

[3]Se $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é funtor então $\mathscr{F}(f \circ_{\mathscr{C}} g) = \mathscr{F}(f) \circ_{\mathscr{D}} \mathscr{F}(g)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{f_1}"] & Y \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{f_2}"] & Z \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, bend left, "f_2\circ f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2\circ f_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{f_2}\odot id_{f_1}"] & Z = X \arrow[r, bend left, "f_2\circ f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2\circ f_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{f_2\circ f_1}"] & Z \end{tikzcd}$$

Demonstração. Como (id_{f_2}, id_{f_1}) é a identidade do objeto $(f_2, f_1) \in Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y))$, então o funtor composição horizontal leva (id_{f_2}, id_{f_1}) na identidade de $\circ(f_2, f_1) = f_2 \circ f_1$, que é justamente $id_{f_2 \circ f_1}$. $\square$

É simples verificar que toda 2-categoria forte se torna uma categoria caso esqueçamos os 2-morfismos. Por outro lado, uma categoria $\mathscr{C}$ pode ser vista como uma 2-categoria $\mathfrak{C}$ da seguinte maneira: $Ob(\mathfrak{C}) = Ob(\mathscr{C})$ e para todos $X,Y \in Ob(\mathfrak{C})$ tomamos a categoria pequena $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, cujo conjunto de objetos é $Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)) = Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ e cujos morfismos são somente as identidades; isto é, os únicos 2-morfismos são as identidades. Desse modo, vemos que existe um mergulho natural das categorias nas 2-categorias, como também uma projeção inversa das 2-categorias nas categorias.

6.1.1 Exemplos

Um exemplo muito importante é a **2-categoria dos espaços topológicos** $\mathfrak{Top}$, em que pensamos nos espaços topológicos como objetos, as funções contínuas como morfismos e as homotopias como 2-morfismos, porém com questões técnicas a serem trabalhadas. Estamos considerando X,Y espaços topológicos. Abaixo faremos essa construção.

Definição 6.5. Sejam $f,g : X \to Y$ funções contínuas, uma **homotopia** de f a g é uma função contínua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Definição 6.6. Sejam $f,g : X \to Y$ funções contínuas e $H,K : X \times I \to Y$ homotopias de f a g, uma **homotopia de homotopias** de H a K é uma homotopia de H a K relativa a $X \times \partial I$, isto é, uma função contínua $\theta : X \times I \times I \to Y$ tal que

1. $\theta(x,t,0) = H(x,t)$;

2. $\theta(x,t,1) = K(x,t)$;

3. $\theta(x,0,u) = f(x)$;

4. $\theta(x,1,u) = g(x)$.

Para definirmos a categoria $Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y)$, consideramos a seguinte relação de equivalência entre as homotopias de f a g: $H \sim K$ se, e somente se, existe uma homotopia de homotopias de H a K.

Observação 6.7. Observe que é relação de equivalência:

- $H \sim H$: basta tomar $\theta : X \times I \times I \to Y$ tal que $\theta(x,t,u) = H(x,t)$;
- $H \sim K \Rightarrow K \sim H$: existe θ homotopia de homotopias de H a K, basta tomarmos $\theta' : X \times I \times I \to Y$ tal que $\theta'(x,t,u) = \theta(x,t,1-u)$ e obtemos uma homotopia de homotopias de K a H;
- $H \sim K$ e $K \sim T \Rightarrow H \sim T$: Sejam θ e θ' homotopias de homotopias de H a K e de K a T, respectivamente. Tomamos $\theta'' : X \times I \times I \to Y$ tal que $\theta''(x,t,u) = \theta(x,t,2u)$ para $u \in [0,\frac{1}{2}]$ e $\theta''(x,t,u) = \theta'(x,t,2u-1)$ para $u \in [\frac{1}{2},1]$.

A partir dessas definições podemos definir a categoria pequena $Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y)$ do seguinte modo: Os objetos de $Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y)$ são as funções contínuas $f : X \to Y$ e para $f,g \in Ob(Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y))$, o conjunto $Hom_{Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y)}(f,g)$ é formado pelas classes de equivalência (conforme a relação acima definida) $[H]$, onde H é uma homotopia de f a g. Para $[H] : f \Rightarrow g$ e $[K] : g \Rightarrow h$ a composição vertical $[K] \circ [H] : f \Rightarrow h$ é definida por $[K * H]$, onde

$$\begin{aligned} K * H &: X \times I \to Y \\ (x,t) &\mapsto K * H(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ K(x,2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} \end{aligned}$$

e para cada $f : X \to Y$, a identidade $[id_f] \in Hom_{Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y)}(f,f)$ é a classe da homotopia $id_f : X \times I \to Y$ tal que $id_f(x,t) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Observação 6.8. É necessário considerar as classes de equivalência para que obtenhamos uma categoria, pois caso contrário esta composição não seria associativa e id_f não seria identidade. De fato, se $H : f \Rightarrow g$, $K : g \Rightarrow h$ e $T : h \Rightarrow l$ forem homotopias, então

$$\begin{aligned} T * (K * H) &: X \times I \to Y \\ (x,t) &\mapsto T * (K * H)(x,t) = \begin{cases} (K * H)(x,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ T(x,2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} (T * K) * H &: X \times I \to Y \\ (x,t) &\mapsto (T * K) * H(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ T * K(x,2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} \end{aligned}.$$

Ou seja, $T * (K * H) \neq (T * K) * H$, porém existe uma homotopia de homotopias entre elas, resultando em classes de equivalência iguais. Trata-se do mesmo motivo que faz os caminhos módulo homotopia formarem o grupo fundamental.

A partir dessa construção temos o seguinte:

Exemplo 6.9. A **2-categoria forte** $\mathfrak{Top}$ é formada por:

- Os objetos são espaços topológicos;

- Para cada $X, Y \in Ob(\mathfrak{Top})$, a categoria pequena $Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y)$;

- para cada tripla $X,Y,Z \in Ob(\mathfrak{Top})$, o funtor composição horizontal:

$$\circ : Hom_{\mathfrak{Top}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Z)$$

que associa o par (g,f) na composição de funções $g \circ f$;

para $([K],[H]) \in Hom_{Hom_{\mathfrak{Top}}(Y,Z)\times Hom_{\mathfrak{Top}}(X,Y)}((g_1,f_1),(g_2,f_2))$, isto é,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow[H]"] & Y \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow[K]"] & Z \end{tikzcd}$$

temos $[K] \odot [H] \doteq [K\#H]$, onde

$$\begin{aligned} K\#H : X \times I &\to Z \\ (x,t) &\mapsto K(H(x,t),t) \end{aligned}$$

Observamos que esta composição é associativa, pois para o caso

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow[T]"] & Y \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow[H]"] & Z \arrow[r, bend left, "h_1"] \arrow[r, bend right, "h_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow[K]"] & W \end{tikzcd}$$

obtemos

$$\begin{aligned} (K\#H)\#T : X \times I &\to Z \\ (x,t) &\mapsto (K\#H)(T(x,t),t) = K(H(T(x,t),t),t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K\#(H\#T) : X \times I &\to Z \\ (x,t) &\mapsto K(H\#T(x,t),t) = K(H(T(x,t),t),t). \end{aligned}$$

Um fato importante desse exemplo é que todo 2-morfismo $[H] : f \Rightarrow g$ é um 2-isomorfismo com inverso $[H]^{-1} : g \Rightarrow f$ sendo $H^{-1}(x,t) = H(x,1-t)$. De modo similar definimos as 2-categorias dos espaços topológicos com ponto marcado e dos pares de espaços topológicos.

Exemplo 6.10. Temos também a 2**-categoria das categorias pequenas** $\mathfrak{Cat}$ definida por

- Os objetos são as categorias pequenas;

- Os morfismos de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ são os funtores $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$;

- Se $\mathscr{F},\mathscr{G}:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ são funtores então os 2-morfismos de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{G}$ são os morfismos de funtores $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$;

- Se $\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H}:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ são funtores e $\alpha:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ e $\beta:\mathscr{G}\to\mathscr{H}$ morfismos de funtores, a composição que torna $Hom_{\mathfrak{Cat}}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ uma categoria pequena é a composição de transformações naturais usual $\beta\circ\alpha:\mathscr{F}\to\mathscr{H}$;

- O funtor composição horizontal age nos objetos associando $\mathscr{F}:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ e $\mathscr{G}:\mathscr{D}\to\mathscr{E}$ a $\mathscr{G}\circ\mathscr{F}:\mathscr{C}\to\mathscr{E}$ de modo usual;

- Dados dois 2-morfismos $\varphi:\mathscr{F}_1\to\mathscr{G}_1$ e $\psi:\mathscr{F}_2\to\mathscr{G}_2$, onde $\mathscr{F}_1,\mathscr{G}_1:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ e $\mathscr{F}_2,\mathscr{G}_2:\mathscr{D}\to\mathscr{E}$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "\mathscr{F}_1"] \arrow[r, bend right, "\mathscr{G}_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "\mathscr{F}_2"] \arrow[r, bend right, "\mathscr{G}_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

definimos $\psi\odot\varphi:\mathscr{F}_2\circ\mathscr{F}_1\Rightarrow\mathscr{G}_2\circ\mathscr{G}_1$ por

$$\begin{aligned}\psi\odot\varphi(X) &\doteq \psi(\mathscr{G}_1(X))\circ\mathscr{F}_2(\varphi(X))\\ &= \mathscr{G}_2(\varphi(X))\circ\psi(\mathscr{F}_1(X))\end{aligned}$$

Observe que esta última igualdade ocorre pois $\varphi(X):\mathscr{F}_1(X)\to\mathscr{G}_1(X)$ é um morfismo em $\mathscr{D}$ e ψ é transformação natural, então comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(X)) \arrow[r, "\psi(\mathscr{F}_1(X))"] \arrow[d, "\mathscr{F}_2(\varphi(X))"'] & \mathscr{G}_2(\mathscr{F}_1(X)) \arrow[d, "\mathscr{G}_2(\varphi(X))"] \\ \mathscr{F}_2(\mathscr{G}_1(X)) \arrow[r, "\psi(\mathscr{G}_1(X))"'] & \mathscr{G}_2(\mathscr{G}_1(X)) \end{tikzcd}$$

Além disso, vejamos que $\psi\odot\varphi$ é uma trasformação natural. Precisamos que para todo $f:X\to Y$ em $\mathscr{C}$ comute:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(X)) \arrow[r, "\psi\odot\varphi(X)"] \arrow[d, "\mathscr{F}_2\circ\mathscr{F}_1(f)"'] & \mathscr{G}_2(\mathscr{G}_1(X)) \arrow[d, "\mathscr{G}_2\circ\mathscr{G}_1(f)"] \\ \mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(Y)) \arrow[r, "\psi\odot\varphi(Y)"'] & \mathscr{G}_2(\mathscr{G}_1(Y)) \end{tikzcd}$$

De fato, como φ é transformação natural, comuta

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_1(X) \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d, "\mathscr{F}_1(f)"'] & \mathscr{G}_1(X) \arrow[d, "\mathscr{G}_1(f)"] \\ \mathscr{F}_1(Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"'] & \mathscr{G}_1(Y) \end{tikzcd}$$

então

$$\varphi(Y)\circ\mathscr{F}_1(f)=\mathscr{G}_1(f)\circ\varphi(X),$$

logo

$$\mathscr{F}_2(\varphi(Y)) \circ \mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(f)) = \mathscr{F}_2(\mathscr{G}_1(f)) \circ \mathscr{F}_2(\varphi(X)). \tag{6.1}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
(\psi \odot \varphi)(Y) \circ \mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(f)) &= \underbrace{\psi(\mathscr{G}_1(Y)) \circ \mathscr{F}_2(\varphi(Y))}_{\psi \odot \varphi(Y)} \circ \mathscr{F}_2(\mathscr{F}_1(f)) \\
&= \psi(\mathscr{G}_1(Y)) \circ \underbrace{\mathscr{F}_2(\mathscr{G}_1(f)) \circ \mathscr{F}_2(\varphi(X))}_{(6.1)} \\
&= \underbrace{\mathscr{G}_2(\mathscr{G}_1(f)) \circ \psi(\mathscr{G}_1(X))}_{\psi \text{ transformação natural}} \circ \mathscr{F}_2(\varphi(X)) \\
&= \mathscr{G}_2(\mathscr{G}_1(f)) \circ \psi \odot \varphi(X)
\end{aligned}$$

6.1.2 2-funtores, morfismos e 2-morfismos de 2-funtores

Para definir um funtor precisamos de uma função nos objetos e uma nos morfismos que respeite a composição e a identidade; para os 2-funtores é a mesma ideia, porém com o acréscimo de uma função entre os 2-morfismos que também respeite a composição e a identidade

Definição 6.11. Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ 2-categorias. Um 2-funtor $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ é definido por

- Uma função $\mathfrak{F} : Ob(\mathfrak{C}) \to Ob(\mathfrak{D})$;
- Para todos $X, Y \in Ob(\mathfrak{C})$, um funtor $\mathfrak{F}_{X,Y} : Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{F}(Y))$ tal que
  (a) $\mathfrak{F}_{X,X}(id_X) = id_{\mathfrak{F}(X)}$;
  (b) $\mathfrak{F}(f \circ g) = \mathfrak{F}(f) \circ \mathfrak{F}(g)$ para $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$;
  (c) $\mathfrak{F}(\alpha \odot \beta) = \mathfrak{F}(\alpha) \odot \mathfrak{F}(\beta)$ para $\alpha : f_1 \Rightarrow g_1$ e $\beta : f_2 \Rightarrow g_2$, onde $f_1, g_1 : X \to Y$ e $f_2, g_2 : Y \to Z$.

De modo similiar ao que ocorre com as 2-categorias, se desconsiderarmos a ação do 2-funtor nos 2-morfismos temos um funtor.

Já vimos que a partir de duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, obtemos a categoria dos funtores $Funct(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. O mesmo ocorre para duas 2-categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$, o conjunto dos 2-funtores $2 - Funct(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ também forma uma 2-categoria com as definições a seguir.

Definição 6.12. Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ 2-categorias e $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 2-funtores. Um **morfismo de 2-funtores** $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ é definido associando a cada $X \in Ob(\mathfrak{C})$ um morfismo $\varphi(X) \in Ob(Hom_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{G}(X)))$, $\varphi(X) : \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{G}(X)$, tal que

- Para todo morfismo $f : X \to Y$, comute

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(X) \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(f)"'] & \mathfrak{G}(X) \arrow[d, "\mathfrak{G}(f)"] \\
\mathfrak{F}(Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"'] & \mathfrak{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

- Para todos morfismos $f, g : X \to Y$ e 2-morfismo $\alpha : f \Rightarrow g$, o diagrama a seguir é 2-comutativo

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\mathfrak{F}(X) \arrow[r, bend left, "\varphi(X)"] \arrow[r, bend right, "\varphi(X)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{\varphi(X)}"] \arrow[d, bend right, "\mathfrak{F}(f)"'] \arrow[d, bend left, "\mathfrak{F}(g)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathfrak{F}(\alpha)}{\Longrightarrow}"] & \mathfrak{G}(X) \arrow[d, bend right, "\mathfrak{G}(f)"'] \arrow[d, bend left, "\mathfrak{G}(g)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathfrak{G}(\alpha)}{\Longrightarrow}"] \\
\mathfrak{F}(Y) \arrow[r, bend left, "\varphi(Y)"] \arrow[r, bend right, "\varphi(Y)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{\varphi(Y)}"] & \mathfrak{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

ou seja, $id_{\varphi(Y)} \odot \mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{G}(\alpha) \odot id_{\varphi(X)}$.

Definição 6.13. Dados os morfismos de 2-funtores $\varphi, \psi : \mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{G}$, um **2-morfismo de 2-funtores** $\rho : \varphi \Rightarrow \psi$ é definido associando a cada $X \in Ob(\mathfrak{C})$ um 2-morfismo em $\mathfrak{D}$ $\rho(X) : \varphi(X) \Rightarrow \psi(X)$ tal que para todos morfismos $f, g : X \to Y$ e 2-morfismo $\alpha : f \Rightarrow g$ em $\mathfrak{C}$, o seguinte diagrama seja 2-comutativo:

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\mathfrak{F}(X) \arrow[r, bend left, "\varphi(X)"] \arrow[r, bend right, "\psi(X)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \rho(X)"] \arrow[d, bend right, "\mathfrak{F}(f)"'] \arrow[d, bend left, "\mathfrak{F}(g)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathfrak{F}(\alpha)}{\Longrightarrow}"] & \mathfrak{G}(X) \arrow[d, bend right, "\mathfrak{G}(f)"'] \arrow[d, bend left, "\mathfrak{G}(g)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathfrak{G}(\alpha)}{\Longrightarrow}"] \\
\mathfrak{F}(Y) \arrow[r, bend left, "\varphi(Y)"] \arrow[r, bend right, "\psi(Y)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \rho(Y)"] & \mathfrak{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

ou seja, $\rho(Y) \odot \mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{G}(\alpha) \odot \rho(X)$.

6.1.3 Definições naturais

Podemos generalizar algumas definições categoriais de modo bem natural:

Definição 6.14. Dois objetos X e Y em uma 2-categoria $\mathfrak{C}$ são ditos **equivalentes** se existirem morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ (ditos **equivalência** entre X e Y e entre Y e X, respectivamente) tais que existem 2-isomorfismos $\alpha : g \circ f \Rightarrow id_X$ e $\beta : f \circ g \Rightarrow id_Y$.

Observação 6.15. Na 2-categoria $\mathfrak{Cat}$ coincide com a noção de equivalência de categorias pequenas.

Definição 6.16. Duas 2-categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ são ditas **equivalentes** se existirem 2-funtores $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ e $\mathfrak{G} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ (ditos **equivalência** entre $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ e entre $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{C}$, respectivamente) tais que existem isomorfismos de 2-funtores $\alpha : \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F} \Rightarrow id_{\mathfrak{C}}$ e $\beta : \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} \Rightarrow id_{\mathfrak{D}}$.

Definição 6.17. Seja $\mathfrak{C}$ uma 2-categoria. Uma 2-categoria $\mathfrak{D}$ é dita **sub-2-categoria** de $\mathfrak{C}$ se

- $Ob(\mathfrak{D}) \subset Ob(\mathfrak{C})$;
- Para todos $X, Y \in Ob(\mathfrak{D})$, a categoria $Hom_{\mathfrak{D}}(X,Y)$ é uma subcategoria de $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$.

Além disso, $\mathfrak{D}$ é uma **sub-2-categoria 2-cheia** de $\mathfrak{C}$ se para todos $f, g \in Hom_{\mathfrak{D}}(X,Y)$ tem-se $Hom_{Hom_{\mathfrak{D}}(X,Y)}(f,g) = Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)}(f,g)$.
Ainda, $\mathfrak{D}$ é uma **sub-2-categoria cheia** se $Hom_{\mathfrak{D}}(X,Y) = Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$.

Definição 6.18. Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ 2-categorias, definimos a **2-categoria produto** $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ por:

- $Ob(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) \doteq Ob(\mathfrak{C}) \times Ob(\mathfrak{D})$;
- $Hom_{\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}}((X,X'),(Y,Y')) \doteq Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathfrak{D}}(X',Y')$;
- $Hom_{Hom_{\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}}((X,X'),(Y,Y'))}((f,f'),(g,g')) \doteq Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)}(f,g) \times Hom_{Hom_{\mathfrak{D}}(X',Y')}(f',g')$;
- $(g,g') \circ (f,f') \doteq (g \circ f, g' \circ f')$;
- $(\alpha,\alpha') \odot (\beta,\beta') \doteq (\beta \odot \alpha, \beta' \odot \alpha')$.

Definição 6.19. Sejam $\mathfrak{C}$ uma 2-categoria, (X,Y) um par de objetos de $\mathfrak{C}$, $f, g : X \to Y$ e $\sim_{(f,g)}$ uma relação de equivalência em $Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)}(f,g)$. Denotemos por $\sim$ a união de tais relações, a qual é compatível com a 2-composição: $\alpha \sim_{(f,g)} \beta$ implica $\alpha \circ \gamma \sim_{(h,g)} \beta \circ \gamma$ e $\lambda \circ \alpha \sim_{(f,h)} \lambda \circ \beta$; e $\alpha \sim_{(f,g)} \beta$ implica $\alpha \odot \gamma \sim_{(f\circ h, g\circ k)} \beta \odot \gamma$ e $\delta \odot \alpha \sim_{(h\circ f, k\circ g)} \delta \odot \beta$, sempre que essas composições forem definidas. A partir disto, definimos a **2-categoria quociente** $\frac{\mathfrak{C}}{\sim}$ por:

- $Ob(\frac{\mathfrak{C}}{\sim}) \doteq Ob(\mathfrak{C})$;
- $Ob(Hom_{\frac{\mathfrak{C}}{\sim}}(X,Y)) \doteq Ob(Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y))$;
- $Hom_{Hom_{\frac{\mathfrak{C}}{\sim}}(X,Y)}(f,g) \doteq \frac{Hom_{Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)}(f,g)}{\sim_{(f,g)}}$;
- $g \circ f$ coincide em $\mathfrak{C}$ e $\frac{\mathfrak{C}}{\sim}$;
- $[\beta] \circ [\alpha] \doteq [\beta \circ \alpha]$;
- $[\beta] \odot [\alpha] \doteq [\beta \odot \alpha]$.

6.2 2 - Categoria Fraca

Uma generalização das 2-categorias fortes são as 2-categorias fracas, em que se flexibiliza certas condições de igualdade para isomorfismos, como ficará claro a seguir.

Definição 6.20. Uma 2**-categoria fraca**[4] $\mathfrak{B}$ consiste em:

- Uma classe de objetos $Ob(\mathfrak{B}) \doteq \mathfrak{B}_0$ com a propriedade que para cada dois objetos $X,Y \in \mathfrak{B}_0$, também chamados de 0**-morfismos** de $\mathfrak{B}$, temos associada uma categoria pequena $Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$. As categorias $Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ devem ser dois a dois disjuntas.

  Os objetos de $Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ são chamados 1**-morfismos** de $\mathfrak{B}$, os morfismos são os 2**-morfismos** de $\mathfrak{B}$ e suas coleções são denotadas, respectivamente, por $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$. As composições são ditas **composições verticais** e para $f \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y))$, sua identidade id_f é 2**-morfismo identidade** de f. Um isomorfismo em $Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ é chamado 2**-morfismo invertível** e seu inverso de **inverso vertical**.

- Para cada $X \in Ob(\mathfrak{B})$, existe um objeto $id_X \in Hom_{\mathfrak{B}}(X,X)$ chamado de 1**-morfismo identidade** de X. Podemos identificar este objeto com o funtor[5] $1_X : 1 \to Hom_{\mathfrak{B}}(X,X)$ tal que $1_X(1) = id_X$.

- Para toda tripla $X,Y,Z \in Ob(\mathfrak{B})$, um funtor $\circ_{X,Y,Z} : Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{B}}(X,Z)$ dito **composição horizontal**. Denotamos $\circ_{X,Y,Z}(g,f) \doteq g \circ f$ e $\circ_{X,Y,Z}(\beta,\alpha) \doteq \beta \odot \alpha$.

- Para todos objetos $W,X,Y,Z \in Ob(\mathfrak{B})$, um isomorfismo natural

$$A_{W,X,Y,Z} : \circ_{WXZ} \circ (\circ_{XYZ} \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)}) \to \circ_{WYZ} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z)} \times \circ_{WXY})$$

  chamado **associador** entre os funtores de $Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \times Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)$ a $Hom_{\mathfrak{B}}(W,Z)$.

- Para todos $X,Y \in OB(\mathfrak{B})$, isomorfismos naturais

$$\circ_{XYY} \circ (1_Y \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)}) \xrightarrow{l_{X,Y}} Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \xleftarrow{r_{X,Y}} \circ_{XXY} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \times 1_X)$$

  chamados de **unitor a direita** e **unitor a esquerda**, respectivamente, que satisfaçam para todos $f \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(V,W)), g \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)), h \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)), k \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z))$:

  - **Axioma da unidade**: O diagrama

$$\begin{tikzcd}
(g \circ 1_W) \circ f \arrow[rr, "a_{(g,1_W,f)}"] \arrow[dr, "r_g \odot id_f"'] & & g \circ (1_W \circ f) \arrow[dl, "id_g \odot l_f"] \\
& g \circ f &
\end{tikzcd} \tag{6.2}$$

[4]Na literatura também se encontra as 2-categorias fracas com a nomenclatura de *bicategorias*.
[5]1 sendo a categoria 1 como no Exemplo 4.9.

em $Hom_{\mathfrak{B}}(V,X)$ é comutativo.

∘ **Axioma pentagonal**: O diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & (k\circ h)\circ(g\circ f) \arrow[drr, "A_{k,h,gf}"] & & \\
((k\circ h)\circ g)\circ f \arrow[urr, "A_{kh,g,f}"] \arrow[dr, "A_{k,h,g}\odot id_f"'] & & & & k\circ(h\circ(g\circ f)) \\
 & (k\circ(h\circ g))\circ f \arrow[rr, "A_{k,hg,f}"'] & & k\circ((h\circ g)\circ f) \arrow[ur, "id_k\odot A_{h,g,f}"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.3}$$

em $Hom_{\mathfrak{B}}(V,Z)$ é comutativo.

Precisamos compreender esta definição. Da mesma forma que ocorre com as 2-categorias fortes, para cada $X,Y \in Ob(\mathfrak{B})$, a composição vertical em $Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ é associativa e respeita as identidades pelo próprio fato de $Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ ser categoria; e ainda, a composição horizontal respeita as composições verticais e os 2-morfismos identidades, por ser um funtor. Também continuamos denotando os 1-morfismos $f,g \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y))$ por $f,g : X \to Y$, um 2-morfismo $\alpha \in Hom_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)}(f,g)$ por $\alpha : f \Rightarrow g$ e os representando por

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] & Y \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

As diferenças mais significativas entre as 2-categorias fortes e as fracas se dão na associatividade e no objeto identidade id_X para $X \in Ob(\mathfrak{B})$, pois nas 2-categorias fortes se pede a respectiva igualdade, enquanto nas fracas basta que se tenha um isomorfismo natural. As transformações naturais presentes na definição acima podem ser um pouco complicadas de compreender a princípio, por isso as analisaremos com cuidado.

Comecemos pelo associador. Sejam $W,X,Y,Z \in Ob(\mathfrak{B})$, note que

$$\circ_{XYZ} : Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{B}}(X,Z)$$

e

$$Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)} : Hom_{\mathfrak{B}}(W,X) \to Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)$$

são funtores, então

$$\begin{aligned}
\circ_{XYZ} \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)} : Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \times Hom_{\mathfrak{B}}(W,X) &\to Hom_{\mathfrak{B}}(X,Z) \times Hom_{\mathfrak{B}}(W,X) \\
(f,g,h) &\mapsto (f\circ g,h) \\
(\alpha,\beta,\gamma) &\mapsto (\alpha\odot\beta,\gamma)
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\circ_{WXZ} : Hom_{\mathfrak{B}}(X,Z) \times Hom_{\mathfrak{B}}(W,X) \to Hom_{\mathfrak{B}}(W,Z)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\circ_{WXZ} \circ (\circ_{XYZ} \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)}) : Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \times Hom_{\mathfrak{B}}(W,X) &\to Hom_{\mathfrak{B}}(W,Z)\\ (f,g,h) &\mapsto (f \circ g) \circ h\\ (\alpha,\beta,\gamma) &\mapsto (\alpha \odot \beta) \odot \gamma\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio e expandindo os funtores de $\circ_{WYZ} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z)} \times \circ_{WXY})$ obtemos que

$$\begin{aligned}\circ_{WYZ} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z)} \times \circ_{WXY}) : Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z) \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \times Hom_{\mathfrak{B}}(W,X) &\to Hom_{\mathfrak{B}}(W,Z)\\ (f,g,h) &\mapsto f \circ (g \circ h)\\ (\alpha,\beta,\gamma) &\mapsto \alpha \odot (\beta \odot \gamma)\end{aligned}$$

A partir disto, faz sentido exigir na definição o isomorfismo natural associador

$$A_{W,X,Y,Z} : \circ_{WXZ} \circ (\circ_{XYZ} \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)}) \to \circ_{WYZ} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z)} \times \circ_{WXY}).$$

Logo, em uma 2-categoria fraca $\mathfrak{B}$, para quaisquer 1-morfismos $f \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Z))$, $g \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y))$ e $h \in Ob(Hom_{\mathfrak{B}}(W,X))$ de $\mathfrak{B}$, o 2-morfismo

$$A_{(f,g,h)} : (f \circ g) \circ h \to f \circ (g \circ h)$$

em $Hom_{\mathfrak{B}}(W,Z)$ é invertível, logo, $(f \circ g) \circ h \simeq f \circ (g \circ h)$. Ainda, a naturalidade de A garante que para $(\alpha,\beta,\gamma) : (f,g,h) \to (f',g',h')$, isto é, para os 2-morfismos $\alpha : f \Rightarrow f'$, $\beta : g \Rightarrow g'$ e $\gamma : h \Rightarrow h'$, o seguinte diagrama em $Hom_{\mathfrak{B}}(W,Z)$ é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(f \circ g) \circ h \arrow[r, "A_{(f,g,h)}"] \arrow[d, "(\alpha\odot\beta)\odot\gamma"'] & f \circ (g \circ h) \arrow[d, "\alpha\odot(\beta\odot\gamma)"] \\
(f' \circ g') \circ h' \arrow[r, "A_{(f',g',h')}"'] & f' \circ (g' \circ h')
\end{tikzcd}$$

Estudemos os unitores. Temos os funtores $1_Y : 1 \to Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Y)$ e $Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)} : Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$, então

$$\begin{aligned}1_Y \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)} : 1 \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) &\to Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Y) \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)\\ (1,f) &\mapsto (id_Y, f)\\ (id_1, \alpha) &\mapsto (id_{id_f}, \alpha)\end{aligned}$$

e ainda $\circ_{XYY} : Hom_{\mathfrak{B}}(Y,Y) \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ é a composição horizontal, logo

$$\begin{aligned}\circ_{XYY} \circ (1_Y \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)}) : 1 \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) &\to Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)\\ (1,f) &\mapsto id_Y \circ f\\ (id_1, \alpha) &\mapsto id_{id_f} \odot \alpha\end{aligned}$$

A partir disto, é exigido na definição o isomorfismo natural

$$l_{XY} : \circ_{XYY} \circ (1_Y \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)}) \to Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)}.$$

Observamos que rigorosamente deveríamos tomar o funtor $Id'_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)} : 1 \times Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ que leva $(1, f)$ em f para a boa definição de l_{XY}, o qual é canonicamente isomorfo a $Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)}$.

Analogamente temos o funtor

$$\begin{aligned} \circ_{XXY} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \times 1_X) : Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \times 1 &\to Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y) \\ (f, 1) &\mapsto f \circ id_X \\ (\alpha, id_1) &\mapsto \alpha \odot id_{id_f} \end{aligned}$$

e exigimos o isomorfismo natural

$$r_{XY} : \circ_{XXY} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \times 1_X) \to Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)}$$

ressaltando a mesma observação acerca de $Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)}$.

Como l e r são isomorfismos naturais temos que para qualquer 1-morfismo $f \in Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$, os 2-morfismos

$$l_f : id_Y \circ f \to f \quad \text{e} \quad r_f : f \circ id_X \to f$$

em $Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ são isomorfismos, isto é, $id_Y \circ f \simeq f$ e $f \circ id_X \simeq f$. Além disso, para cada 2-morfismo $\alpha : f \Rightarrow f'$ em $Hom_{\mathfrak{B}}(X,Y)$ o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} id_Y \circ f \arrow[r, "l_f"] \arrow[d, "id_{id_Y} \odot \alpha"'] & f \arrow[d, "\alpha"] & f \circ id_X \arrow[l, "r_f"'] \arrow[d, "\alpha \odot id_{id_X}"] \\ id_Y \circ f' \arrow[r, "l_{f'}"'] & f' & f' \circ id_X \arrow[l, "r_{f'}"] \end{tikzcd}$$

Para compreendermos o diagrama (6.2) do **axioma da unidade** precisamos considerar a seguinte situação

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "f"] & W \arrow[r, bend left, "id_W"] & W \arrow[r, bend left, "g"] & X \end{tikzcd}$$

que nos proporciona o associador

$$A_{VWWX} : \underbrace{\circ_{VWX} \circ (\circ_{WWX} \times Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(V,X)})}_{\lambda_1} \to \underbrace{\circ_{VWX} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)} \times \circ_{VWW})}_{\lambda_2}$$

em que $\lambda_1, \lambda_2 : Hom_{\mathfrak{B}}(W,X) \times Hom_{\mathfrak{B}}(W,W) \times Hom_{\mathfrak{B}}(V,W) \to Hom_{\mathfrak{B}}(V,X)$ com $\lambda_1(g, id_W, f) = (g \circ id_W) \circ f$ e $\lambda_2(g, id_W, f) = g \circ (id_W \circ f)$ e, consequentemente,

$$A_{(g,id_W,f)} : (g \circ id_W) \circ f \Rightarrow g \circ (id_W \circ f)$$

morfismo em $Hom_{\mathfrak{B}}(V,X)$.

Também temos a transformação natural $r_{WX} : \circ_{WWX} \circ (Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)} \times 1_W) \to Id_{Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)}$ que nos proporciona o morfismo

$$r_g \sim r_{(g,1)} : g \circ id_W \Rightarrow g$$

em $Hom_{\mathfrak{B}}(W,X)$, resultando em

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_f"] & W \arrow[r, bend left, "g \circ id_W"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow r_g"] & X \end{tikzcd}$$

logo, $r_g \odot id_f : (g \circ id_W) \circ f \Rightarrow g \circ f$ em $Hom_{\mathfrak{B}}(V,X)$.

De forma similar obtemos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "id_W \circ f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow l_f"] & W \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_g"] & X \end{tikzcd}$$

que resulta no 2-morfismo $id_g \odot l_f : g \circ (id_W \circ f) \Rightarrow g \circ f$. Então

$$(id_g \odot l_f) \circ A_{(g,id_W,f)} : (g \circ id_W) \circ f \Rightarrow g \circ f$$

em $Hom_{\mathfrak{B}}(V,X)$. Assim, o diagrama (6.2) comutar significa que

$$r_g \odot id_f = (id_g \odot l_f) \circ A_{(g,id_W,f)}$$

em $Hom_{\mathfrak{B}}(V,X)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left=60, "(g \circ id_W) \circ f"] \arrow[r, "g \circ (id_W \circ f)" description] \arrow[r, bend right=60, "g \circ f"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow A_{(g,id_W,f)}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow id_g \odot l_f"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left=60, "(g \circ id_W) \circ f"] \arrow[r, bend right=60, "g \circ f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow r_g \odot id_f"] & X \end{tikzcd}$$

Já para o **axioma pentagonal**[6] consideramos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "f"] & W \arrow[r, bend left, "g"] & X \arrow[r, bend left, "h"] & Y \arrow[r, bend left, "k"] & Z. \end{tikzcd}$$

O diagrama (6.3) comutar significa a igualdade entre os 2-morfismos

$$A_{k,h,gf} \circ A_{kh,g,f} = (id_k \odot A_{h,g,f}) \circ A_{k,hg,f} \circ (A_{k,h,g} \odot id_f)$$

em $Hom_{\mathfrak{B}}(V,Z)$. Ou seja, compor

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=60, "((kh)g)f"] \arrow[r, "(kh)(gf)" description] \arrow[r, bend right=60, "k(h(gf))"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow A_{kh,g,f}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow A_{k,h,gf}"] & Z \end{tikzcd}$$

[6] Deixaremos subentendido o símbolo de composição entre os objetos a fim de simplificar a notação.

resulta no mesmo que compor

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left=70, "((kh)g)f"] \arrow[rr, bend left=30, "(k(hg))f"] \arrow[rr, "k((hg)f)"'] \arrow[rr, bend right=50, "k(h(gf))"'] \arrow[rr, phantom, bend left=50, "\Downarrow A_{khg}\odot id_f"] \arrow[rr, phantom, bend left=15, "\Downarrow A_{k,hg,f}"] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow id_k\odot A_{hgf}"] & & Z
\end{tikzcd}$$

Exemplo 6.21. Seja $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos. Definimos a 2-categoria fraca $2-Vect_{\mathbb{C}}$ por:

- Objetos de $2-Vect_{\mathbb{C}}$ são da forma $\{n\}$, com n número inteiro não negativo;
- Para $\{m\},\{n\} \in Ob(2-Vect_{\mathbb{C}})$ a categoria $Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(\{m\},\{n\})$ tem por objetos as $n\times m$ 2-matrizes que são matrizes $V=(V_{ij})=(V_{ij})_{n\times m}$, $1\leq i\leq n$ e $1\leq j\leq m$, onde cada V_{ij} é um espaço vetorial complexo de dimensão finita.

$$V_{n\times m}=\begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{n1} & \dots & V_{nm}\end{pmatrix}$$

  e um morfismo $\theta: V\to V'$ em $Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(\{m\},\{n\})$ é dado por uma família $\theta=(\theta_{ij})$ de tranformações lineares $\theta_{ij}: V_{ij}\to V'_{ij}$.

$$\begin{tikzcd}
\{m\} \arrow[rr, bend left, "V_{n\times m}"] \arrow[rr, bend right, "V'_{n\times m}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\theta"] & & \{n\}
\end{tikzcd}$$

  Para $V\in Ob(Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(\{m\},\{n\}))$, $id_V: V\to V$ é tal que $(id_V)_{ij}=id_{V_{ij}}$, e a composição vertical é dada coordenada por coordenada:

$$(\phi\circ\theta)_{ij}=(\phi_{ij})\circ(\theta_{ij})$$

- Para $\{n\}\in Ob(2-Vect_{\mathbb{C}})$, o 1-morfismo identidade $id_{\{n\}}\in Ob(Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(\{n\},\{n\}))$ é da forma

$$id_{\{n\}}=\begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{C} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{C}\end{pmatrix}$$

- Sejam $\{m\},\{n\},\{p\}\in Ob(2-Vect_{\mathbb{C}})$, o funtor composição horizontal

$$\circ_{m,n,p}: Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(\{n\},\{p\})\times Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(\{m\},\{n\})\to Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(\{m\},\{p\})$$

age nos objetos associando o par $(W_{p\times n}, V_{n\times m})$ à matriz $(WV)_{p\times m}$ em que as entradas (k, j) são dadas por

$$(WV)_{kj} = \oplus_{i=1}^{n}(W_{ki}\otimes V_{ij}),\ \ 1\leq k\leq p,\ 1\leq j\leq m$$

onde $\oplus$ é a soma direta e $\otimes$ é o produto tensorial de espaços vetoriais complexos de dimensão finita, logo, para

$$W_{p\times n} = \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & W_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{p1} & \dots & W_{pn} \end{pmatrix} \quad V_{n\times m} = \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{n1} & \dots & V_{nm} \end{pmatrix}$$

segue

$$WV_{p\times m} = \begin{pmatrix} \oplus_{i=1}^{n}(W_{1i}\otimes V_{i1}) & \dots & \oplus_{i=1}^{n}(W_{1i}\otimes V_{im}) \\ \vdots & & \vdots \\ \oplus_{i=1}^{n}(W_{pi}\otimes V_{i1}) & \dots & \oplus_{i=1}^{n}(W_{pi}\otimes V_{im}) \end{pmatrix}$$

Com relação aos morfismos, seja $\theta : V \to V'$ e $\phi : W \to W'$, $\circ_{m,n,p}$ leva o par (θ, ϕ) em $\phi\odot\theta : WV \to W'V'$ tal que

$$(\phi\odot\phi)_{kj} = \oplus_{i=1}^{n}(\phi_{ki}\otimes\theta_{ij}) : \oplus_{i=1}^{n}(W_{ki}\otimes V_{ij}) \to \oplus_{i=1}^{n}(W'_{ki}\otimes V'_{ij})$$

- Sejam $\{m\}, \{n\}, \{p\}, \{q\} \in Ob(2-Vect_{\mathbb{C}})$ e

$$\{m\} \xrightarrow{V} \{n\} \xrightarrow{W} \{p\} \xrightarrow{X} \{q\},$$

o associador

$$A_{m,n,p,q} : \circ_{mnq}\circ(\circ_{npq}\times Id_{Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(m,n)}) \to \circ_{mpq}\circ(Id_{Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(p,q)}\times\circ_{mnp})$$

é tal que cada $A_{X,W,V} : (XW)V \to X(WV)$ tem suas entradas (l, j) induzidas pelos isomorfimos:

$$\begin{aligned}
[(XW)V]_{lj} =& \oplus_{i=1}^{n}\,(\oplus_{k=1}^{p}X_{lk}\otimes W_{ki})\otimes V_{ij} \\
\simeq& \oplus_{i=1}^{n}\oplus_{k=1}^{p}(X_{lk}\otimes W_{ki})\otimes V_{ij} \\
\simeq& \oplus_{k=1}^{p}\oplus_{i=1}^{n}X_{lk}\otimes(W_{ki}\otimes V_{ij}) \\
\simeq& \oplus_{k=1}^{p}X_{lk}\otimes(\oplus_{i=1}^{n}W_{ki}\otimes V_{ij}) \\
=& \oplus_{k=1}^{p}X_{lk}\otimes(WV)_{kj} \\
=& [X(WV)]_{lj}.
\end{aligned}$$

- Sejam $\{m\}, \{n\} \in Ob(2-Vect_{\mathbb{C}})$, os unitores

$$\circ_{mnn}\circ(1_n\times Id_{Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(m,n)}) \xrightarrow{l_{m,n}} Id_{Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(m,n)} \xleftarrow{r_{m,n}} \circ_{mmn}\circ(Id_{Hom_{2-Vect_{\mathbb{C}}}(m,n)}\times 1_m)$$

são tais que, para cada $V_{n\times m}$, os 2-morfismos $l_V : id_nV \to V$ e $r_V : Vid_m \to V$ são induzidos pelos isomorfismos $\mathbb{C}\otimes A\simeq A\simeq A\otimes\mathbb{C}$, $0\otimes A\simeq 0\simeq A\otimes 0$ e $0\oplus A\simeq A\simeq A\oplus 0$.

A definição das 2-categorias fortes é consideravelmente mais simples quando comparada com a das fracas, enquanto as 2-categorias fracas são mais naturais ao exigir condições de isomorfismos ao invés de igualdades. Um fato interessante, que não será aprofundado neste trabalho[7], é que essas noções são essencialmente equivalentes. Porém isto não ocorre para n-categorias sendo $n > 2$.

[7]Esse resultado está demonstrado no Teorema 8.4.1 em [3].

CAPÍTULO 7

$\infty-$Categorias

Nosso objetivo neste capítulo é estudar as ∞-categorias, as quais a princípio poderiam ser formalizadas como uma generalização das n-categorias. Embora esta definição seja de intuitiva compreensão, é de difícil manipulação. Logo, veremos outra abordagem utilizando conjuntos simpliciais, que é mais fácil de se trabalhar.

7.1 Abordagem a partir das n - Categorias

Podemos definir as n-categorias fortes analogamente ao caso $n = 2$, pedindo que tenha morfismos até a ordem n. Neste caso, para cada dois objetos A e B associamos uma $(n-1)$-categoria $Hom(A,B)$. Essa noção se generaliza para as ∞-categorias fortes, em que temos morfismos a toda ordem. A princípio, poderiamos tentar definir as n-categorias e as $\infty-$categorias fracas de modo parecido com as 2-categorias fracas. Todavia, esta construção se torna inviável por conta da grande quantidade de condições de compatibilidade; uma abordagem eficaz é utilizarmos a linguagem dos Conjuntos Simpliciais.

Exemplo 7.1. Sejam X um espaço topológico e $0 \leq n < \infty$. Podemos definir a n-categoria $\pi \leq_n X$ em que os objetos são pontos $x \in X$, os morfismos de x a y são os caminhos de x a y, os 2-morfismos são homotopias de caminhos que fixam os extremos, os 3-morfismos são homotopias de homotopias, e assim sucessivamente. Os morfismos de grau máximo, isto é, os n-morfismos, são quocientados módulo homotopia para que a composição seja associativa, como vimos no Exemplo 6.9. Chamamos $\pi \leq_1 X$ de **grupoide fundamental**[1] de X e $\pi \leq_n X$ de n-**grupoide fundamental**[2] de X. Observamos que $\pi \leq_0 X$ se identifica com o conjunto das componentes conexas por caminhos de X.

Definimos $\pi <_\infty X$ da seguinte maneira: os objetos são pontos $x \in X$, os morfismos de x a y são os caminhos de x a y, os 2-morfismos são homotopias de caminhos, os 3-morfismos são homotopias

[1]Um grupoide é uma categoria em que todo morfismo é um isomorfismo.

[2]Um n-grupoide é uma n-categoria em que todo k-morfismo, $k \leq n$, é um isomorfismo.

de homotopias, e assim sucessivamente, mas sem quocientar a nenhum grau. Chamamos $\pi <_\infty X$ de **∞-grupoide fundamental** de X.

Não podemos dizer que $\pi <_\infty X$ é uma ∞-categoria pois nem possuimos uma definição formal desse termo ainda, porém, podemos entender $\pi <_\infty X$ como uma boa motivação para tal definição. Salientamos que $\pi <_\infty X$ não é objeto de $\widehat{\Delta}$, porém estamos buscando uma definição de ∞-categorias via abordagem simplicial em que uma classe de objetos se assemelhem a certo nível com os ∞-grupoides fundamentais. Mais adiante veremos que, para X espaço topógico, o conjunto simplicial $Sing_X$ será o análogo a $\pi <_\infty X$ nessa teoria.

A noção de ∞-categorias pode ser simplificada se considerarmos quase todos morfismos de ordem superior invertíveis.

Notação 7.2.

- *Usaremos a notação (∞, n)-**categoria** para as ∞-categorias cujos k-morfismos são invertíveis para $k > n$;*
- *$(\infty, 0)$-categorias serão denotadas por ∞-grupoides;*
- *$(\infty, 1)$-categorias serão denotadas por ∞-categorias;*

Desse modo, em um ∞-grupoide os morfismos de todas ordens são invertíveis. Observe que no Exemplo 7.1 os $\pi <_\infty X$ seriam ∞-grupoides, pois caminhos e homotopias são invertíveis. Além disso, $\pi <_\infty X$ traz as informações homotópicas de X, o que o torna objeto de estudo na Teoria de Homotopia.

O estudo realizado neste capítulo será acerca das $(\infty, 1)$-categorias por se tratar de um caso em que conseguimos adequar naturalmente muitos conceitos da Teoria das Categorias, além de simplificar o manejo teórico e a compreensão desses objetos. Salientamos que em uma ∞-categoria os morfismos não precisam ser invertíveis, mas para $n \geq 2$ todos n-morfismos serão, o que induz definir uma ∞-categoria $\mathscr{C}$ por uma coleção de objetos em que para $X, Y \in Ob(\mathscr{C})$ esteja associado um ∞-grupoide $Map_{\mathscr{C}}(X,Y)$; de fato, os 1-morfismos de $\mathscr{C}$ se tornam os 0-morfismos de $Map_{\mathscr{C}}(X,Y)$ não necessariamente invertíveis, enquanto os n-morfismos de $\mathscr{C}$, $n \geq 2$, se tornam os $(n-1)$-morfismos de $Map_{\mathscr{C}}(X,Y)$ necessariamente invertíveis. Por causa da equivalência entre ∞-grupoides e espaços topológicos, poderiamos definir ∞-categorias também como categorias topológicas[3], mas este enfoque traz inúmeras desvantagens técnicas.

7.2 Abordagem Simplicial

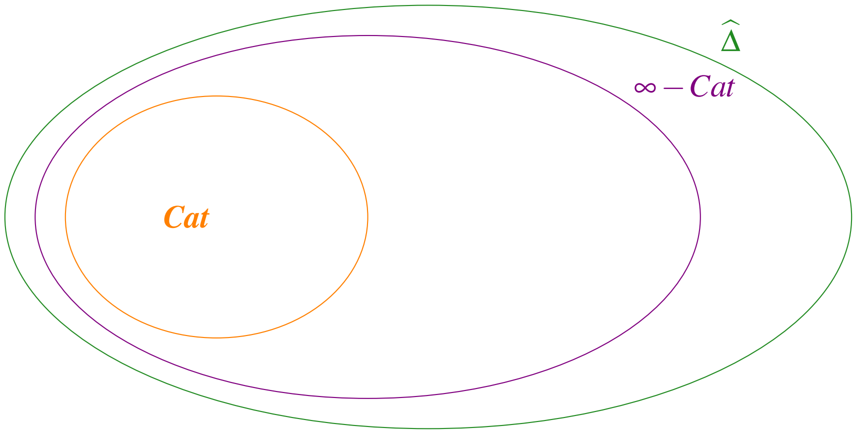
Vimos que algumas formalizações desse tema são tecnicamente inviáveis, mas há abordagens mais flexíveis e convenientes, como a que estudaremos nessa seção a partir dos Conjuntos Simpli-

[3]Uma categoria topológica é uma categoria enriquecida sobre a categoria dos espaços topológicos compactamente gerados e fracamente Hausdorff, como definido em [6, Seção 1.1.1].

ciais, também chamada de *Weak Kan Complexes* e *quasi-categorias*. Essa construção satisfará propriedades intrínsecas de uma ∞-categoria $\mathscr{C}$: se todo morfismo for invertível então $\mathscr{C}$ é equivalente ao ∞-grupoide fundamental de um espaço topológico e voltamos à Teoria de Homotopia; se todos n-morfismos para $n > 1$ forem triviais temos uma categoria.

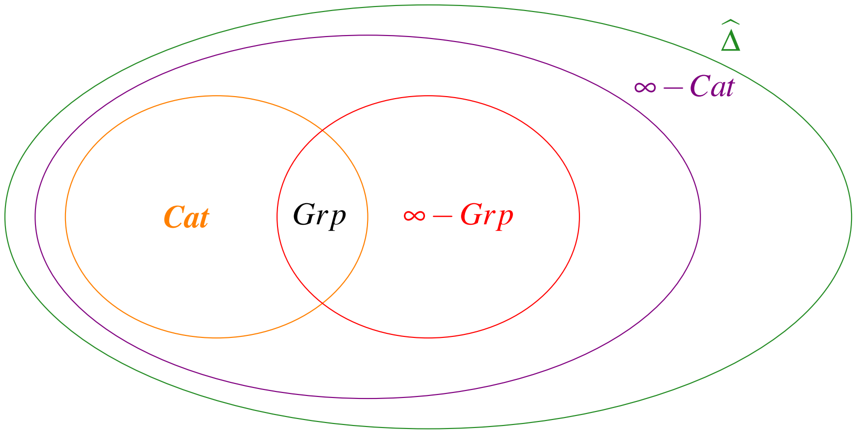
7.2.1 Relação com o Nervo

Mostramos que o nervo $Y_\iota : Cat \to \widehat{\Delta}$ mergulha Cat em $\widehat{\Delta}$, desse modo, já temos uma forma de visualizar as categorias pequenas como conjuntos simpliciais. Construiremos as ∞-categorias (∞-Cat) como um nível intermediário.



Definiremos os Complexos de Kan, uma classe de infinito-categorias que serão os nossos ∞-grupoides (∞-Grp). A interseção de $\infty-$Grp com Cat consiste nos grupoides.

Nesse contexto, temos a seguinte situação:



Desse modo, o nervo de um grupoide é um ∞-grupoide, assim, os complexos de Kan generalizam os grupoides.

Por outro lado, de acordo com Cisinski, [1, Teorema 1.6.6], a restrição de $\iota_! : \widehat{\Delta} \to Cat$ a $\infty - Cat$ mandará uma $\infty-$categoria $\mathscr{C}$ na categoria homotópica $Hom\mathscr{C}$ (categoria obtida a partir de $\mathscr{C}$ quocientando os morfismos pela existência de um 2-isomorfismo); $\iota_!$ esquece a estrutura de um $\infty-$grupoide e o leva no grupoide fundamental do espaço topológico subjacente.

7.2.2 Definição via Conjuntos Simpliciais

Nosso objetivo é que no final desta seção tenhamos contruído todas as ferramentas e intuições necessárias a fim de definirmos as infinito-categorias a partir dos conjuntos simpliciais. Nesse contexto, os complexos de Kan serão, por definição, os ∞-grupoides. Para defini-los precisamos do seguinte:

Definição 7.3. Seja $0 \leq j \leq n$, o j**-ésimo horn** é o conjunto simplicial

$$\begin{aligned} \Lambda_j^n &: \Delta^{op} \to Sets \\ [m] &\mapsto (\Lambda_j^n)_m = \{p : [m] \to [n] \text{ função crescente tal que } \{j\} \cup p([m]) \neq [n]\} \end{aligned}$$

Geometricamente se trata do subconjunto de $|\Delta^n|$ obtido ao retirar a j-ésima face e seu interior. Isto porque ao retirar de Δ_m^n, para todo m, as funções $p : [m] \to [n]$ tais que $[n] - \{j\} \subset p([m])$, estamos retirando a j-ésima face de $|\Delta^n|$ a nível topológico[4]. O próximo exemplo tem por objetivo tornar mais visual essa definição e facilitar a compreensão de tudo o que vem a seguir.

Exemplo 7.4. Considere $n = 2$, denotaremos $p_{k_0 \ldots k_m}$ a função crescente de $[m]$ a $[2]$ que envia $i \in [m]$ em $k_i \in [2]$, por exemplo

$$\begin{aligned} p_{011} &: [2] \to [2] \\ 0 &\mapsto 0 \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

então como $\Delta^2 : \Delta^{op} \to Sets$ é tal que $\Delta_m^2 = \{f : [m] \to [2] \text{ função crescente}\}$, temos

$$\begin{aligned} \Delta^2 &: \Delta^{op} \to Sets \\ [0] &\mapsto \{p_0, p_1, p_2\} \\ [1] &\mapsto \{p_{00}, p_{11}, p_{22}, p_{01}, p_{02}, p_{12}\} \\ [2] &\mapsto \{p_{000}, p_{111}, p_{222}, p_{012}, p_{011}, p_{001}, p_{002}, p_{022}, p_{122}, p_{112}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

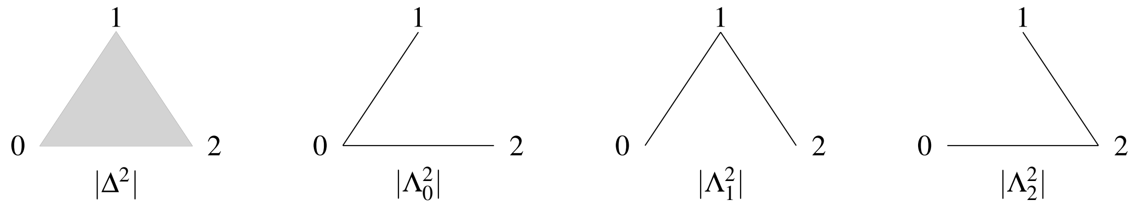
do ponto de vista geométrico, temos que as funções constantes se relacionam com os vértices de $|\Delta^2|$, enquanto as demais funções se relacionam com o subespaço gerado pelos elementos de sua imagem, por exemplo, p_{01} se relaciona com a aresta que liga 0 a 1, enquanto p_{012} se relaciona com o triângulo todo. Ao estudarmos Λ_0^2 percebemos que $p_{12} \notin (\Lambda_0^2)_1$ e $p_{012}, p_{122}, p_{112} \notin (\Lambda_0^2)_2$ pois $\{1,2\}$ está contido na imagem dessas funções e $\{0\} \cup \{1,2\} = [2]$, ou seja, retiramos justamente o interior e a aresta oposta ao vértice 0 em $|\Delta^2|$. Da mesma forma retiramos p_{01} de $(\Lambda_2^2)_1$ e $p_{012}, p_{011}, p_{001}$ de $(\Lambda_2^2)_2$. Obtemos

[4]Lembramos que $\Delta^n : \Delta^{op} \to Sets$ é a imagem de $[n] \in Ob(\Delta)$ pelo funtor de Yoneda $Y : \Delta \to \widehat{\Delta}$ e $\Delta_m^n = \Delta^n([m])$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_0^2 : \Delta^{op} &\to Sets\\
[0] &\mapsto \{p_0, p_1, p_2\}\\
[1] &\mapsto \{p_{00}, p_{11}, p_{22}, p_{01}, p_{02}\}\\
[2] &\mapsto \{p_{000}, p_{111}, p_{222}, p_{011}, p_{001}, p_{002}, p_{022}\}\\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Lambda_2^2 : \Delta^{op} &\to Sets\\
[0] &\mapsto \{p_0, p_1, p_2\}\\
[1] &\mapsto \{p_{00}, p_{11}, p_{22}, p_{02}, p_{12}\}\\
[2] &\mapsto \{p_{000}, p_{111}, p_{222}, p_{002}, p_{022}, p_{122}, p_{112}\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^2 : \Delta^{op} &\to Sets\\
[0] &\mapsto \{p_0, p_1, p_2\}\\
[1] &\mapsto \{p_{00}, p_{11}, p_{22}, p_{01}, p_{12}\}\\
[2] &\mapsto \{p_{000}, p_{111}, p_{222}, p_{011}, p_{001}, p_{122}, p_{112}\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$



Definição 7.5. Seja K um conjunto simplicial, K é um **complexo de Kan** se, para todo $0 \leq i \leq n$ e qualquer diagrama de setas sólidas

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_i^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \\
\Delta^n \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

em $\widehat{\Delta}$, existe uma seta pontilhada que torne o diagrama comutativo.

Lembrando que as flechas neste diagrama se tratam de transformações naturais por estar inserido em $\widehat{\Delta}$, e a inclusão se trata de $i_j^n : \Lambda_j^n \to \Delta^n$ tal que para cada $[m] \in Ob(\Delta)$

$$\begin{aligned}
(i_j^n)_m : (\Lambda_j^n)_m &\to \Delta_m^n\\
p &\mapsto p
\end{aligned}$$

No seguinte exemplo, utilizaremos o Exemplo 5.7.

Exemplo 7.6. Note que existe uma retração $r : |\Delta^n| \to |\Lambda_i^n|$ então para qualquer transformação natural $\lambda : \Lambda_i^n \to Sing_X$ em $\widehat{\Delta}$ obtemos em Top a função contínua $\mathscr{F}_!(\lambda) \circ r$

$$\begin{tikzcd}
|\Lambda_i^n| \arrow[r, "\mathscr{F}_!(\lambda)"] & |Sing_X| \\
|\Delta^n| \arrow[u, "r"] \arrow[ur, "\mathscr{F}_!(\lambda)\circ r"'] &
\end{tikzcd}$$

que induz a flecha tracejada para que o diagrama a seguir comute

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, hook] & Sing_X \\ \Delta^n \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Logo, o complexo singular $Sing_X$ de um espaço topológico X é um complexo de Kan. Ainda, conforme Jacob Lurie, [6, Seção 1.1.2], a recíproca vale: todo complexo de Kan é equivalente a $Sing_X$ para algum espaço topológico X. Nessa teoria, formalizamos o conceito de $\pi <_\infty X$ definido informalmente em 7.1 através de $Sing_X$. Logo, a Teoria dos ∞-grupoides é equivalente à Teoria dos Espaços Topológicos a menos de equivalência homotópica fraca.

Proposição 7.7. *Seja K um conjunto simplicial, são equivalentes:*

(a) Existe uma categoria pequena $\mathscr{C}$ e um isomorfismo $K \sim Y_{\iota,\mathscr{C}}$.

(b) Para cada $0 < i < n$ e cada diagrama de setas sólidas

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

existe uma única seta pontilhada que torna o diagrama comutativo.

Observação 7.8. Antes da demonstração, vamos entender o que significa existir uma única seta pontilhada na Proposição 7.7 que torne o diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda^2_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y_{\iota,\mathscr{C}} \\ \Delta^2 \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

comutativo com $\mathscr{C}$ categoria pequena. Embora um morfismo $f_0 : \Lambda^2_1 \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$ em $\widehat{\Delta}$ se trate de uma transformação natural, ela induz um diagrama

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dr, "u"] & \\ C_0 \arrow[ur, "t"] & & C_2 \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

em $\mathscr{C}$, e existir uma única extensão $f : \Delta^2 \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$ de f_0 significa que existe um único morfismo $v : C_0 \to C_2$ que torne

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dr, "u"] & \\ C_0 \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "v"'] & & C_2 \end{tikzcd} \tag{7.2}$$

comutativo.

De fato, para cada $[k] \in Ob(\Delta)$, temos um morfismo $f_0(k) : (\Lambda_1^2)_k \to Y_{\iota,\mathscr{C}}([k]) = Funct(\iota[k],\mathscr{C})$ em $Sets$, com isso[5]

$$\begin{aligned} f_0(0) : (\Lambda_1^2)_0 &\to Y_{\iota,\mathscr{C}}([0]) \\ p_0 &\mapsto h_{C_0} \\ p_1 &\mapsto h_{C_1} \\ p_2 &\mapsto h_{C_2} \end{aligned}$$

fornece os objetos C_0, C_1 e C_2 de $\mathscr{C}$; enquanto $f_0(1) : (\Lambda_1^2)_1 \to Y_{\iota,\mathscr{C}}([1])$ leva p_{00}, p_{11}, p_{22} em id_{C_0},id_{C_1}, id_{C_2} respectivamente, p_{01} em h_t, e p_{12} em h_u, logo $f_0(1)$ fornece os morfismos $t : C_0 \to C_1$ e $u : C_1 \to C_2$ em $\mathscr{C}$. Os morfismos $f_0(k)$ para $k > 1$ manterão a estrutura fornecida por $f_0(0)$ e $f_0(1)$ justamente por f_0 se tratar de uma transformação natural, pois existe essa compatibilidade com as ordens anteriores. Logo, f_0 induz o diagrama (7.1) e de modo similar obtemos que a extensão f completa o diagrama (7.1) como em (7.2) fazendo $f(1)(p_{02}) = h_v \sim v$.

Ainda por conta da compatibilidade com os índices anteriores, devemos ter que $f(2)$ manda $p_{012} \in (\Lambda_1^2)_2$ em $f(2)(p_{012}) \in Y_{\iota,\mathscr{C}}([2])$ que se relaciona com

$$C_0 \xrightarrow{t} C_1 \xrightarrow{u} C_2.$$

Como f é transformação natural,

$$\begin{tikzcd} (\Lambda_1^2)_1 \arrow[r, "f(1)"] & Y_{\iota,\mathscr{C}}([1]) \\ (\Lambda_1^2)_2 \arrow[r, "f(2)"'] \arrow[u, "\Lambda_1^2(d_2^1)"] & Y_{\iota,\mathscr{C}}([2]) \arrow[u, "Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_2^1)"'] \end{tikzcd}$$

comuta, logo

$$Y_{\iota,\mathscr{C}}(d_2^1) \circ f(2)\ (p_{012}) = h_{u \circ t}$$

é igual a

$$f(1) \circ \Lambda_1^2(d_2^1)\ (p_{012}) = f(1)(p_{02}) = h_v$$

portanto, $v = u \circ t$.

A seguir temos a demonstração da Proposição 7.7:

Demonstração. • $(a) \Rightarrow (b)$:

[5]Usaremos a notação da Seção 5.1 para relacionar $Y_{\iota,\mathscr{C}}$ com $\mathscr{C}$: $h_C \in Y_{\iota,\mathscr{C}}([0])$ é o funtor tal que $h_C(0) = C \in Ob(\mathscr{C})$, logo $h_C \sim C$; $h_u \in Y_{\iota,\mathscr{C}}([1])$ é o funtor $h_u : \iota[1] \to \mathscr{C}$ tal que $h_u(0) = C_0$, $h_u(1) = C_1$ e $h_u(l_0^1) = u$ onde $u : C_0 \to C_1$ em $\mathscr{C}$, logo, $h_u \sim u$.

A fim de simplificar o raciocínio façamos $K = Y_{\iota,\mathscr{C}}$, para algum $\mathscr{C} \in Ob(Cat)$, e seja $f_0\colon (\Lambda^n_i)_0 \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$, onde $0 < i < n$. Temos que $f_0(0)\colon (\Lambda^n_i)_0 \to Y_{\iota,\mathscr{C}}(0)$ leva os elementos[6]

$$\begin{aligned} p_k\colon [0] &\to [n] \\ 0 &\mapsto k \end{aligned}$$

em h_{X_k} que se relaciona com $X_k \in Ob(\mathscr{C})$, $0 \leq k \leq n$. Logo, $f_0(0)$ fornece $n+1$ objetos em $\mathscr{C}$.

Para $0 < k \leq n$ as funções[7]

$$\begin{aligned} p_{k-1,k}\colon [1] &\to [n] \\ 0 &\mapsto k-1 \\ 1 &\mapsto k \end{aligned}$$

são levadas por $f_0(1)\colon (\Lambda^n_i)_1 \to Y_{\iota,\mathscr{C}}(1)$ em

$$\begin{aligned} h_{g_k}\colon \iota[1] &\to \mathscr{C} \\ 0 &\mapsto X_{k-1} \\ 1 &\mapsto X_k \\ l^1_0 &\mapsto \{g_k : X_{k-1} \to X_k\} \end{aligned}$$

que se relacionam com os morfismos $g_k : X_{k-1} \to X_k$ em $\mathscr{C}$.

Com isso, obtemos uma cadeia de composição de morfismos

$$X_0 \xrightarrow{g_1} X_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_n} X_n.$$

em $\mathscr{C}$ que determina $f\colon \Delta^n \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$ de modo similar à Observação 7.8 em que os elementos $p \in \Delta^n_l - (\Lambda^n_i)_l$ serão mandados por $f(t)$ em composições relativas à cadeia acima.

O morfismo f é a extensão desejada. A unicidade é simples de compreender, pois se $f'\colon \Delta^n \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$ é outra tranformação natural com $f'_{|\Lambda^n_i} = f_0$, f' deve corresponder a mesma cadeia de morfismos em $\mathscr{C}$, logo $f = f'$.

Resta $f_{|\Lambda^n_i} = f_0$ e para isso é suficiente provar para todo $0 \leq j \leq n$ que se $j \neq i$ então

$$(\star_j) \qquad f_{|\Delta^{\{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}}} = f_{0|\Delta^{\{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}}}$$

onde $\Delta^{\{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}}$ é a face oposta ao j-ésimo vértice de $|\Delta^n|$, logo mostrar $(\star_j)$ consiste em mostrar a igualdade em cada face de $|\Lambda^n_i|$. Faremos isso mostrando a igualdade entre as restrições de f e f_0 a cada aresta consecutiva em questão, isto é, a cada $\Delta^{\{k,k'\}}$ onde k e k' são elementos adjacentes no conjunto linearmente ordenado $\{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\} \subset [n]$.

[6] Os elementos $p_k \in (\Lambda^n_i)_0$ também são chamados de vértices $\{k\} \subset \Lambda^n_i$.

[7] Os elementos $p_{k-1,k} \in (\Lambda^n_i)_1$ também são chamados de arestas $\Delta^{\{k-1,k\}} \subset \Lambda^n_i$. De modo análogo, teremos adiante que uma k-face $\Delta^{a_1,\ldots,a_k}$ é o elemento $p_{a_1,\ldots,a_k} \in (\Lambda^n_i)_{k-1}$ tal que $p_{a_1,\ldots,a_k}(l) = a_l$, $0 < k \leq n$ e $0 \leq l \leq k$.

Caso k e k' forem consecutivos em $[n]$ o resultado segue por construção, consequentemente $(\star_0)$ e $(\star_1)$ são válidos. Analisemos $k = j-1$ e $k' = j+1$, com $0 < j < n$ e para isso podemos assumir $n > 2$ pois se $n = 2$ então $j = 1 = i$, contradição. Neste caso, ou $j-1 > 0$ ou $j+1 < n$, suponhamos $j-1 > 0$ (similar para $j+1 < n$), logo $\Delta^{\{j-1,j+1\}} \subset \Delta^{\{1,\dots,n\}}$. Como $(\star_0)$ vale, temos a igualdade entre as restrições de f e f_0 a $\Delta^{\{1,\dots,n\}}$, em particular $f_{|\Delta^{\{j-1,j+1\}}} = f_{0|\Delta^{\{j-1,j+1\}}}$.

- $(b) \Rightarrow (a)$: Seja K um conjunto simplicial que satisfaz (b), construíremos a categoria $\mathscr{C}$ tal que $K \simeq Y_{\iota,\mathscr{C}}$ da seguinte forma:

  (i) Os objetos de $\mathscr{C}$ são os vértices de K, ou seja, $Ob(\mathscr{C}) = K_0$.

  (ii) Dados $x, y \in Ob(\mathscr{C})$, o conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(x,y)$ é formado por todas as transformações naturais $e\colon \Delta^1 \to K$ tais que $e_0(d_0^1) = x$ e $e_0(d_0^0) = y$.

  (iii) Dado $x \in Ob(\mathscr{C})$, o morfismo identidade id_x é definido como a composição

  $$\Delta^1 \longrightarrow \Delta^0 \xrightarrow{e_x} K$$

  onde $e_x\colon \Delta^0 \to K$ é a transformação natural que se relaciona com o ponto $x \in K_0$.

  (iv) Sejam $f\colon x \to y$ e $g\colon y \to z$ em $\mathscr{C}$, segue que f e g determinam um morfismo $\sigma_0\colon \Lambda_1^2 \to K$

  $$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] & & z \end{tikzcd}$$

  $$\sigma_0\colon \Lambda_1^2 \to K$$

  Como K satisfaz (2), σ_0 pode ser estendido a $\sigma\colon \Delta^2 \to K$. Temos a seguinte situação

  $$\Delta^1 \simeq \Delta^{\{0,2\}} \subset \Delta^2 \xrightarrow{\sigma} K$$

  Definimos $g \circ f\colon x \to z$ em $\mathscr{C}$ como a restrição $\sigma_{|\Delta^{\{0,2\}}} : \Delta^{\{0,2\}} \to K$.

  $$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & z \end{tikzcd}$$

  $$\sigma\colon \Delta^2 \to K$$

Mostremos que $\mathscr{C}$ é uma categoria:

- Para quaisquer $y \in Ob(\mathscr{C})$, $f\colon x \to y$ e $g\colon y \to z$ em $\mathscr{C}$ temos

$$id_y \circ f = f \quad \text{e} \quad g \circ id_y = g$$

As transformações naturais $f\colon \Delta^1 \to K$ e $id_y\colon \Delta^1 \to K$ induzem um morfismo $\sigma_0\colon \Lambda^2_1 \to K$ que se relaciona com o diagrama

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "id_y"] & \\ x \arrow[ur, "f"] & & y \end{tikzcd}$$

Temos $id_y \circ f = \sigma_{|\Delta^{\{0,2\}}}$ onde $\sigma\colon \Delta^2 \to K$ é a única extensão de σ_0. Porém a transformação natural $\sigma'\colon \Delta^2 \to K$ que se relaciona com o diagrama

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "id_y"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"'] & & y \end{tikzcd}$$

também é extensão de σ_0, logo $id_y \circ f = f$. Segue análogo para $g \circ id_y = g$.

- A composição é associativa: para toda sequência

$$w \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$$

temos $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$. Para isso, formaremos um tetraedro relacionando os vértices 0 com w, 1 com x, 2 com y e 3 com z. Sejam $\sigma_{012}, \sigma_{123}, \sigma_{023} : \Delta^2 \to K$ as transformações naturais que se relacionam com os diagramas

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "g"] & \\ w \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "h"] & \\ x \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h\circ g"'] & & z \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "h"] & \\ w \arrow[ur, "g\circ f"] \arrow[rr, "h\circ(g\circ f)"'] & & z \end{tikzcd}$$

respectivamente. Eles juntos induzem um morfismo $\tau_0 : \Lambda^3_2 \to K$ como o esquema abaixo sem a face da frente do tetraedro

$$\begin{tikzcd} & & x \arrow[d, dotted, "g"] \arrow[ddrr, "h\circ g"] & & \\ & & y \arrow[drr, dotted, "h"] & & \\ w \arrow[uurr, "f"] \arrow[urr, dotted, "g\circ f"] \arrow[rrrr, "h\circ(g\circ f)"'] & & & & z \end{tikzcd}$$

Por (2) podemos estender τ_0 a uma única $\tau : \Delta^3 \to K$, em que a face $\Delta^{\{0,1,3\}}$ corresponde ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ w \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h\circ(g\circ f)"'] & & z \end{tikzcd}$$

Portanto, $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

Com isso, obtemos que $\mathscr{C}$ é uma categoria. Por construção temos uma transformação canônica $\phi\colon K \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$, falta mostrar que ϕ é um isomorfismo. Sabemos que ϕ ser isomorfismo é equivalente a $\phi_n\colon K_n \to Y_{\iota,\mathscr{C}}([n])$ ser bijeção para todo n. Pelo Lema de Yoneda, temos bijeções $K_n \simeq Hom_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, K)$ e $Y_{\iota,\mathscr{C}}([n]) \simeq Hom_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, Y_{\iota,\mathscr{C}})$, logo, basta mostrar que ϕ induz uma bijeção $Hom_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, K) \to Hom_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, Y_{\iota,\mathscr{C}})$ para todo n.

Façamos por indução em $n \geq 0$. Para $n = 0$ e $n = 1$ segue por construção. Sejam $n \geq 2$ e $0 < i < n$, $i \in \mathbb{N}$. Temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, K) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, Y_{\iota,\mathscr{C}}) \arrow[d] \\ Hom_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^n_i, K) \arrow[r] & Hom_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^n_i, Y_{\iota,\mathscr{C}}) \end{tikzcd}$$

As setas verticais são bijeções porque K e $Y_{\iota,\mathscr{C}}$ satisfazem (2), e a seta inferior é bijeção pela hipótese de indução. Portanto a seta de cima também é uma bijeção.

□

Observamos que o item (b) da Proposição 7.7 é parecido com a Definição 7.5, no entanto em 7.7 exigimos a extensão apenas para $0 < i < n$, sem considerar as extremidades, e essa extensão deve ser única. Para entender o motivo dessa distinção, consideremos $n = 2$ e $K = Y_{\iota,\mathscr{C}}$ para algum $\mathscr{C} \in Ob(Cat)$, pelo mesmo raciocínio utilizado anteriormente $f_0\colon \Lambda^2_2 \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$ e $f_0'\colon \Lambda^2_0 \to Y_{\iota,\mathscr{C}}$ induzem, respectivamente, as setas sólidas em

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dr, "u"] & \\ C_0 \arrow[ur, dotted, "t"] \arrow[rr, "v"'] & & C_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dr, dotted, "u'"] & \\ C_0 \arrow[ur, "t'"] \arrow[rr, "v'"'] & & C_2 \end{tikzcd}$$

e a existência de únicas extensões de f_0 e f_0' completaria os diagramas de modo comutativo. Porém isso só é sempre verdade se, e somente se, $\mathscr{C}$ é um grupoide. De fato, se todos morfismos de $\mathscr{C}$ forem invertíveis podemos completar os diagramas com $t = u^{-1}\circ v$ e $u' = v'\circ t'^{-1}$; reciprocamente, seja $u\colon C_1 \to C_2$ em $\mathscr{C}$ qualquer, se os diagramas

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dr, "u"] & \\ C_2 \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, "id_{C_2}"'] & & C_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_2 \arrow[dr, dotted] & \\ C_1 \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "id_{C_1}"'] & & C_1 \end{tikzcd}$$

puderem ser completados de modo comutativo então u é invertível.

Já vimos que se $K \in Ob(\widehat{\Delta})$ for um complexo de Kan, K pode ser visto como um ∞-grupoide; se K satisfizer o item (b) da Proposição 7.7 pode ser visto como uma categoria pequena. Logo, é de se esperar que uma classe maior de conjuntos simpliciais sirva de modelo para as ∞-categorias.

Até poderíamos tentar visualizar $K \in Ob(\widehat{\Delta})$ qualquer como uma ∞-categoria pensando nos elementos de K_0 como objetos, os elementos de K_1 como os 1-morfismos, e assim sucessivamente. O problema se dá por não conseguirmos sempre compor esses morfismos, dados os 1-morfismos $\phi : X \to Y$ e $\psi : Y \to Z$ pode não existir $\sigma : \Delta^2 \to K$ que complete o diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "\psi"] & \\ X \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rr] & & Z \end{tikzcd}$$

Podemos formalizar uma condição de existência para $\psi \circ \phi$ motivados pela Observação 7.8 pois ϕ e ψ determinam um morfismos de pré-feixes $f_0 : \Lambda^2_1 \to K$, logo a existência da composição dependerá da existência de uma extensão f de f_0:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^2_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^2 \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Nesse contexto, a unicidade de $\psi \circ \phi$ não é necessária. Vimos que $\pi <_\infty X$ definido informalmente no Exemplo 7.1, para X espaço topológico, é uma boa motivação para as ∞-categorias, vamos entender porque tal unicidade não é necessária: dados dois 1-morfismos (ou seja, caminhos) $\phi : x \to y$ e $\psi : y \to z$ em $\pi <_\infty X$, uma forma de definir a composição entre eles é pela concatenação

$$\psi * \phi : [0,1] \to X$$
$$s \mapsto \psi * \phi(s) = \begin{cases} \psi(2s), s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \phi(2s-1), s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

porém qualquer caminho homotópico a $\psi * \phi$ pode ser tomado como composição entre ϕ e ψ.

Com isso, chegamos na tão esperada definição:

Definição 7.9. Uma **∞-categoria** é um conjunto simplicial K tal que, para todo $0 < i < n$, qualquer morfismo $f_0 : \Lambda^n_i \to K$ admite uma extensão $f : \Delta^n \to K$.

Exemplo 7.10. Qualquer complexo de Kan é uma ∞-categoria; em particular, $Sing_X$ para X espaço topológico é um ∞-grupoide.

Exemplo 7.11. O nervo de uma categoria é uma ∞-categoria. Logo, a Teoria das Categorias pode ser vista como um caso particular da Teoria das ∞-Categorias.

Referências Bibliográficas

[1] CISINSKI, Denis-Charles. **Higher Categories and Homotopical Algebra.** Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2023.

[2] EILENBERG, Samuel; LANE, Saunders Mac. **General Theory of Natural Equivalences**. Transactions of the American Mathematical Society, 58(2), 1945, 231–294. https://doi.org/10.2307/1990284.

[3] JOHNSON, Niles; YAU, Donald. **2-Dimensional Categories**. Oxford University Press, 2020.

[4] LANE, Saunders Mac. **Categories for the Working Mathematician**. Springer Verlag, 1998.

[5] LURIE, Jacob. **On the Classification of Topological Field Theories**. Current Developments in Mathematics, 2009: 129-280.

[6] LURIE, Jacob. **Higher Topos Theory**. Princeton University Press, 2009.

[7] RIBEIRO, Maico Felipe Silva. **Teoria das Categorias para Matemáticos: Uma breve introdução**. 1. ed. SBM, 2020.

Índice Remissivo