UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Soluções normalizadas para equações de Schrödinger de massa supercrítica com potencial

Carolina Santana Tomaz

São Carlos-SP

Agosto de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Soluções normalizadas para equações de Schrödinger de massa supercrítica com potencial

Carolina Santana Tomaz

Orientador(a): Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

”VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”

Documento assinado digitalmente
OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI
Data: 20/09/2024 17:58:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Data da defesa:	05/08/2024
Visto do orientador:	

São Carlos-SP

Agosto de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Carolina Santana Tomaz, realizada em 05/08/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFSCar)

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira (UFSCar)

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares (USP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho e todos os que virão

a Adriana Costa Santana,

minha mãe.

Agradecimentos

Como tudo em minha vida, realizar este trabalho não teria sido possível sem o apoio da minha mãe, a qual começo agradecendo. À você mãe, que me incentivou, me levantou, apostou em mim e me deu tudo o que podia para me fazer chegar até aqui, meu muito obrigada. É um mestrado por nós.

Agradeço também ao meu irmão João, dupla de vida. Obrigada meu irmão, por ser sempre meu maior apostador e meu maior parceiro em tudo. Desde a UFV você sempre me ajudou a caminhar e no mestrado não foi diferente. Serei sempre grata a você pela parceria.

Agradeço também às minhas irmãs Alice e Letícia, pelo afeto que me sustenta. Cada ligação e cada mensagem, me permitiram estar mais forte neste mestrado. Muito obrigada. Agradeço a vocês também pelos maiores tesouros da vida, Cecília e Eloá, que fazem a vida da Tia Nêna / Nina ser bem melhor.

Agradeço às minhas amadas Julieta e Lua por me fazerem sempre lembrar onde é a minha casa e o que vale a pena nessa vida.

Ao meu tio Wander por acreditar em mim e me desafiar das melhores formas possíveis: desafios de Matemática do Facebook.

Ao meu namorado, Lucas. Obrigada por me apoiar e me incentivar sempre. Obrigada por ser o meu alívio e a minha calma.

Aos meus tantos amigos que tive a sorte de poder conhecer. Minha amiga Laryssa, obrigada por estar comigo no início, meio e fim. A todos os meus amigos de Viçosa, em especial, Brenda, Sara, Fernanda, Letícia, Kellton, Rodrigo, Mariana, Luísa, Bernardo e Isabella, obrigada pela amizade que independe da distância. Aos amigos que São Carlos me deu, Gustavo (meu irmão de mestrado), Rodrigo, Lucas Maekawa, Amanda, Danilo, Mynor, Rafael, Marina e Lídia obrigada por me permitirem amar São Carlos. Obrigada Lara pelos momentos de diversão e amizade. Obrigada Diana por ser um presente em minha vida e pela ajuda com as figuras rs. Obrigada Ana Júlia, por me acolher (não só literalmente). Aos demais colegas da natação, do PPGM, ao grupo de yoga da UFSCar, minha aluna

Dora e mais tantos outros e outras que contribuiram para minha vida e para meu mestrado, meu muito obrigada.

Agradeço também a todos e a cada um dos meu professores por me fazerem crescer. Obrigada Elaine e Lucimar por me fazerem seguir na Matemática. Obrigada a todos os professores da UFV que me deram aula na graduação. Em especial, agradeço minha professora de Iniciação Científica Margareth, pela paciência e pela persistência, por me indicar os melhores caminhos e pelo carinho de sempre.

Agradeço também ao meu orientador Olímpio. Obrigada Olímpio por acreditar e apostar em mim. Obrigada pelos ensinamentos e por ser meu orientador. Agradeço especialmente por todas as bananas que você me deu só para não falar que nunca me deu nada.

Agradeço aos professores Gustavo Ferron Madeira, Adilson Presoto, Sérgio Henrique Monari e Eudes Barboza por participarem da banca de Qualificação ou Defesa e pelas sugestões e correções que puderam enriquecer este trabalho.

Agradeço ao PPGM UFSCar e à CPG pela acolhida e pela oportunidade, no nome da qual agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a Deus por ser o meu alicerce e me sustentar no meu caminho. Obrigada pela força e pela proteção. Obrigada por me permitir concluir mais esta etapa na minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados em provar a existência de soluções normalizadas para a equação de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

no caso massa supercrítica e caso subcrítico de Sobolev, $2+\dfrac{4}{N} < p < 2^* \equiv \dfrac{2N}{(N-2)^+}$. A existência de solução $(u,\lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$ com norma prescrita será assegurada sobre várias condições técnicas sobre o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Em um primeiro momento, provaremos existência de solução para V positivo e se anulando no infinito. Em seguida, provaremos a existência de solução para V sendo um potencial negativo. As respectivas soluções serão obtidas como pontos críticos de funcionais restritos à esfera S_ρ em L^2 e λ será um Multiplicador de Lagrange. Os resultados serão provados usando Métodos Variacionais e estão contidos em [2] e [18].

Palavras-chave: Solução normalizada; Equação de Schrödinger; Métodos Variacionais.

Abstract

In this work, we are interested in proving the existence of normalized solutions to the Schrödinger equation

$$-\Delta u + V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

in the supercritical mass case and subcritical Sobolev case, $2 + \frac{4}{N} < p < 2^* \equiv \frac{2N}{(N-2)^+}$. The existence of a solution $(u, \lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$ with a prescribed norm will be ensured under various technical conditions on the potential $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Firstly, we will prove the existence of a solution where $V \geq 0$ and vanishing at infinity. Next, we will prove the existence of a solution if V is a negative potential. The respective solutions will be obtained as a critical point of functionals constrained to the sphere S_ρ in L^2 and λ will be a Lagrange multiplier. The results will be proved using Variational Methods and are contained in [2] and [18].

Keywords: Normalized solutions; Schrödinger equations; Variational Methods.

Sumário

Introdução

Entender a existência de solução (ou soluções) para problemas envolvendo a equação de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u + \lambda u = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N \tag{1}$$

é tema de bastante interesse e de muita pesquisa na área de Equações Diferenciais Parciais. Problemas desse tipo aparecem em diversos contextos físicos como, por exemplo, a aproximação clássica em mecânica estatística, teoria construtiva de campo, falso vácuo em cosmologia, óptica não linear e propagações de laser, como cita [4].

Em suma, a busca para encontrar soluções para o problema aparece ao se fazer o estudo de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear

$$iw_t + \Delta w + V(x)w = f(w) \ \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$$

cujas soluções são da forma

$$w(x,t) = e^{i\lambda t}u(x),\ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$$

sendo u é uma função real que independe do tempo e resolve a equação elíptica (1).

Em particular, consideramos o caso não linear em que $f(w) = |w|^{p-2}w$, com $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$ e, portanto, estamos interessados em obter soluções para a equação de Schrödinger não-linear

$$-\Delta u + V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Uma bibliografia extensa existe no que tange ao estudo da equação (2) quando a frequência $\lambda \in \mathbb{R}$ está fixada. Desse modo, surge então um ponto de vista significativo que considera o problema de ondas estacionárias quando a massa da partícula é conhecida, isto é, $\|u\|_2 = \rho$ para algum $\rho > 0$ e λ é desconhecido no problema. Solução cuja norma L^2 é prescrita é chamada solução normalizada. Esta abordagem parece ser particularmente significativa do ponto de vista físico, porque existe uma conservação de massa.

Uma forma natural de encarar problemas dessa natureza se dá por Métodos Variacionais. Para alguns valores de λ, a existência de soluções não triviais para o problema é obtida a partir de pontos críticos do funcional energia associado a equação e λ é obtido como um multiplicador de Lagrange, que aparece devido a restrição da massa.

Neste trabalho, estamos interessados em obter soluções $(u,\lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$ para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \quad u \geq 0, \\ \quad \|u\|_2 = \rho \end{cases} \tag{3}$$

onde V é um potencial fixado e $2 + \dfrac{4}{N} < p < 2^* \equiv \dfrac{2N}{(N-2)^+}$.

No caso em que $2 < p < 2 + \frac{4}{N}$, chamado caso subcrítico, sendo V um potencial positivo ou negativo, pode-se minimizar o funcional

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx$$

restrito à esfera de $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$S_\rho := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \rho^2 \right\}$$

de modo a obter solução, que é a solução de menor energia. Entretanto, no caso $2 + \dfrac{4}{N} < p < 2^*$, chamado caso de massa supercrítica e caso subcrítico de Sobolev, o funcional F é ilimitado inferiormente em S_ρ, o que impossibilita aplicar argumentos de minimização (global). Isso mostra que o comportamento de F em S_ρ muda de acordo com o valor de p em relação ao expoente de massa crítica $p = 2 + \frac{4}{N}$

Neste contexto, este trabalho busca abordar os resultados obtidos nos artigos ”Normalized solutions of mass supercritical Schrödinger equations with potential” [2] e “Normalized solutions to mass supercritical Schrödinger equations with negative potential” [18], que provam existência de soluções para os respectivos problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \quad u \geq 0, \\ \quad \|u\|_2 = \rho \end{cases} \tag{4}$$

com $V \geq 0$, satisfazendo $V(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$ e podendo ter singularidades, e

$$\begin{cases} -\Delta u - V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \quad u \geq 0, \\ \quad \|u\|_2 = \rho \end{cases} \tag{5}$$

com $V \geq 0$.

Sendo assim, este texto se organiza da seguinte maneira: no Capítulo 1 trazemos resultados básicos de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais, em particular, de Métodos Variacionais, a fim de fixar as notações e fornecer os tópicos base para o estudo dos artigos.

No Capítulo 2, tratamos dos resultados obtidos no artigo [2], que estuda o problema (4), com $V \geq 0$ e satisfazendo $V(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$. Apresentamos um argumento do tipo *linking* restrito à esfera S_ρ. Se V não é radial, não podemos trabalhar em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e temos que lidar com a não compacidade da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$. Por fim, vamos discutir também o caso em que V é radial, onde a solução será obtida a partir de um argumento do passo da montanha em $S_\rho \cap H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

No Capítulo 3, trazemos os resultados obtidos no artigo [18], que estuda o problema (5), com $V \geq 0$. Aqui, sobre hipóteses adequadas, obtemos duas famílias de soluções. Mais precisamente, provaremos inicialmente que, sobre hipóteses de limitação explícitas sobre V e sem qualquer condições sobre a massa, existe uma solução do Passo da Montanha de nível de energia positiva e excluímos a existência de soluções com energia negativa. Segundo, pedindo que a massa seja menor que um limitante exclícito, dependendo de V, e que V não seja muito pequeno num sentido adequado, encontraremos duas soluções: um minimizante local com energia negativa e uma solução do Passo da Montanha com energia positiva.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar resultados básicos de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais e fixar as notações que serão utilizadas no decorrer do texto. Os tópicos aqui apresentados e os resultados citados, constituem base fundamental para o estudo dos artigos principais [2] e [18]. As principais referências para este capítulo são [5], [6], [7], [8], [9], [14], [16], [20], e [21].

1.1 Espaços de funções

Definição 1.1. Para $1 \leq p < \infty$ definimos $L^p(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções Lebesgue mensuráveis em $\mathbb{R}^N$ que são p-integráveis, isto é,

$$L^p(\mathbb{R}^N) := \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ u \text{ é Lebesgue mensurável e } \|u\|_p < \infty\}$$

sendo

$$\|u\|_p := \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$, o espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é o espaço de funções mensuráveis essencialmente limitadas em $\mathbb{R}^N$, isto é,

$$L^\infty(\mathbb{R}^N) := \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ u \text{ é Lebesgue mensurável e } \|u\|_\infty < \infty\}$$

sendo

$$\|u\|_\infty := ess \sup_{\mathbb{R}^N} |u| = \inf\big\{M \in [0,\infty);\ |u(x)| \leq M, \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N\big\}.$$

Observação 1.2. Para todo $1 \leq p \leq \infty$, o espaço normado $(L^p(\mathbb{R}^N),\ \|.\|_p)$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $1 \leq p,q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ então,*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Em particular, $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja [6], página 92. $\square$

Definição 1.4. Definimos o espaço de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N);\ |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}.$$

Neste caso, considerando o produto interno em $H^1(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$\langle u,v\rangle_{H^1} := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + uv,$$

obtemos a norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} := \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 1.5. *O espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$, munido do produto interno definido anteriormente, é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração. Veja [6], página 203. $\square$

Definição 1.6. O espaço de Sobolev $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ é o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.7. Para cada $N \geq 3$, definimos o espaço

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N);\ |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

com o produto interno

$$\langle u,v\rangle_{D^{1,2}} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u . \nabla v$$

e a norma correspondente

$$\|u\|_{D^{1,2}} := \|\nabla u\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\Big)^{1/2}.$$

Teorema 1.8 (Teorema de Imersão de Sobolev)**.** *As seguintes imersões são contínuas:*

1.) Se $N \geq 3$, então $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [1,2^*]$;

2.) Se $N = 1,2$, então $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [1,\infty]$;

3.) Para todo $N \geq 3$, $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Consequentemente, se $N \geq 3$, para cada $p \in [1,2^*]$ existe $C = C(N,p) > 0$ tal que para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u\|_p \leq C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Em todo trabalho S denotará a constante de Sobolev que é a melhor constante na imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$:

$$S = \inf_{H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{H^1}^2}{\|u\|_{2^*}^2} = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}.$$

Teorema 1.9 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Se $1 \leq p < N$ então existe uma constante $C = C(N,p) > 0$ tal que para $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ temos*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|Du\|_p$$

Demonstração. Veja [5], página 233. □

Uma variação da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev pode ser enunciada no seguinte lema:

Lema 1.10. *Para todo $N \geq 3$ e $2 \leq q \leq 2^*$ existe $G_q > 0$ dependendo somente de N e de q, tal que*

$$\|u\|_q \leq G_q \|u\|_2^{1-\frac{N(q-2)}{2q}} \|\nabla u\|_2^{\frac{N(q-2)}{2q}}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. A desigualdade continua válida se $N = 1,2$ para todo $2 \leq q < \infty$. Em particular,

$$\|u\|_p \leq G\|u\|_2^{1-\frac{\gamma}{p}} \|\nabla u\|_2^{\frac{\gamma}{p}}$$

onde $G = G_p$ e $\gamma = \frac{N}{2}(p-2)$. Se $N \geq 3$, a desigualdade continua válida para $q = 2^*$.

O próximo lema segue imediatamente da Desigualdade de Hölder e da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Lema 1.11. *Para todo $2 \leq q < 2^*$, temos*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \right| \leq \|V\|_{\frac{q}{q-2}} \|u\|_q^2 \leq G_q^2 \|V\|_{\frac{q}{q-2}} \|u\|_2^{2-\frac{N(q-2)}{q}} \|\nabla u\|_2^{\frac{N(q-2)}{q}}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\nabla u.xdx\Big| \leq \|W\|_{\frac{2q}{q-2}}\|u\|_q\|\nabla u\|_2 \leq G_q\|W\|_{\frac{2q}{q-2}}\|u\|_2^{1-\frac{N(q-2)}{2q}}\|\nabla u\|_2^{1+\frac{N(q-2)}{2q}}.$$

Além disso, se $N \geq 3$ então as desigualdades acima continuam válidas para $q = 2^*$:

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx\Big| \leq \|V\|_{\frac{N}{2}}\|u\|_{2^*}^2 \leq S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}}\|\nabla u\|_2^2$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\nabla u.xdx\Big| \leq \|W\|_N\|u\|_{2^*}\|\nabla u\|_2 \leq S^{-1/2}\|W\|_N\|\nabla u\|_2^2$$

Demonstração. Pela desigualde de Hölder, temos

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)||u^2|dx \leq \|V\|_{\frac{q}{q-2}}\|u^2\|_r,$$

com r tal que $\frac{1}{\frac{q}{q-2}} + \frac{1}{r} = 1$, isto é, $r = \frac{q}{2}$. Assim, segue da desigualdade anterior e do Lema 1.10

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx\Big| \leq \|V\|_{\frac{q}{q-2}}\|u^2\|_{\frac{q}{2}} = \|V\|_{\frac{q}{q-2}}\|u\|_q^2 \leq G_q^2\|V\|_{\frac{q}{q-2}}\|u\|_2^{2-\frac{N(q-2)}{q}}\|\nabla u\|_2^{\frac{N(q-2)}{q}}.$$

Novamente, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\nabla u.xdx\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)||u||\nabla u.x|dx\Big| \leq \Big|\int_{\mathbb{R}^N} |W(x)||u||\nabla u|dx\Big| \leq \|W\|_{\frac{2q}{q-2}}\|u\|_q\|\nabla u\|_r$$

com r tal que $\frac{1}{\frac{2q}{q-2}} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, isto é, $r = 2$. Assim, segue da desigualdade anterior e do Lema 1.10

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\nabla u.xdx\Big| \leq \|W\|_{\frac{2q}{q-2}}\|u\|_q\|\nabla u\|_2 \leq G_q\|W\|_{\frac{2q}{q-2}}\|u\|_2^{1-\frac{N(q-2)}{2q}}\|\nabla u\|_2^{1+\frac{N(q-2)}{2q}}.$$

Se $N \geq 3$, considerando $q = 2^* = \frac{2N}{N-2}$ nas desigualdades anteriores, obtemos os resultados enunciandos, observando que $G_{2^*} = S^{-1}$, onde S denota a constante de Sobolev que é a melhor constante na imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. □

Definição 1.12. Definimos

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ u(g(x)) = u(x), \forall g \in O(N)\}$$

onde $O(N)$ é o grupo de rotações em $\mathbb{R}^N$. Note que, $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $u(x) = u(r)$, onde $r = |x|$ (norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$).

Definição 1.13. Um operador linear $K : H \to H$ é dito compacto se dada qualquer sequência $(x_n) \subset H$ limitada, (Kx_n) possui subsequência convergente.

Lema 1.14 (Lema de Strauss)**.** *As seguintes imersões são compactas*

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$$

onde $p \in (2, 2^*)$ *se* $N \geq 3$ *ou* $p \in (2, +\infty)$*, se* $N = 1, 2$.

Definição 1.15. Seja $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Fixado $y \in \mathbb{R}^N$, denotamos por $f(.-y)$ a translação

$$f(.-y) \equiv f(x-y), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

1.2 Baricentro de um funcional

Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e considere

$$\nu(u)(x) := \frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy.$$

Observe que

i) $\nu(u)$ é limitada, pois

$$\left| \int_{B_1(x)} |u(y)| dy \right| \leq \left(\int_{B_1(x)} 1 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_1(x)} |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = |B_1(x)| \|u\|_{L_2(B_1(x))} \leq |B_1(x)| \|u\|_2 < \infty,$$

visto que $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e $|B_1(x)|$ é limitada, pois $|u|$ é integrável.

ii) $\nu(u)$ é contínua. De fato, seja $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência com $x_n \to x$ e observe que

$$\begin{aligned} |\nu(u)(x_n) - \nu(u)(x)| &= \left| \frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(x_n)} |u(y)| dy - \frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy \right| \\ &= \frac{1}{|B_1(0)|} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_1(x_n)}(y) |u(y)| dy - \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B_1(x)}(y) |u(y)| dy \right| \\ &= \frac{1}{|B_1(0)|} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_{B_1(x_n)}(y) - \chi_{B_1(x)}(y)| |u(y)| dy \right|, \end{aligned}$$

onde

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

denota a função característica definida num conjunto A. Então, $|\nu(u)(x_n) - \nu(u)(x)| \longrightarrow 0$ quando $x_n \to x$, o que prova a continuidade.

Sendo assim, a função

$$\widehat{u}(x) := [\nu(u)(x) - \frac{1}{2}max\nu(u)]^{+}$$

está bem definida, é contínua e possui suporte compacto, visto que

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} \nu(u)(x) - \frac{1}{2}max\nu(u), \text{ se } x \in \Omega \\ 0, \text{ se } x \notin \Omega \end{cases}$$

onde

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ \nu(u)(x) \geq \frac{1}{2}max\nu(u)\right\} \ = \ \nu(u)^{-1}\left[\frac{1}{2}max\ \nu(u), max\ \nu(u)\right]$$

é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ e $supp\ \widehat{u} \subset \Omega$ (conjunto fechado contido em um compacto, portanto compacto).

Podemos então considerar a aplicação $\beta : H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$\beta(u) = \frac{1}{\|u\|_1}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(x)xdx$$

A aplicação β está bem definida, pois $\widehat{u}$ possui suporte compacto, e é conhecida por **aplicação baricentro**.

Proposição 1.16. *A função β é contínua em $H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ e satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Se u é uma função radial então $\beta(u) = 0$;

(ii) $\beta(tu) = t\beta(u)$, para todo $t \neq 0$ e todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$;

(iii) Colocando $u_z(x) = u(x-z)$, para todo $z \in \mathbb{R}^N$ e todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ vale $\beta(u_z) = \beta(u) + z$.

Demonstração. Veja [3], página 262. □

1.3 Ferramentas úteis em problemas variacionais

Teorema 1.17 (Identidade de Pohozaev)**.** *Seja $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ e $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

tal que $G(u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, onde

$$G(u) := \int_0^u g(s)ds.$$

Então, u satisfaz

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx$$

Demonstração. Veja [21], página 138. □

Multiplicadores de Lagrange

Teorema 1.18 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $J, F : X \to \mathbb{R}$ funcionais de classe $\mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$ e $M = \{u \in X;\, F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$, com $F'(u) \neq 0$, para todo $u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u)$$

então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (Multiplicador de Lagrange) tal que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Demonstração. Veja [14], página 55. □

O conjunto M é uma variedade de dimensão infinita e o espaço tangente a um ponto $u \in M$ é definido como

$$T_uM = \big\{v \in X;\, F'(u)(v) = 0\big\}.$$

A norma da derivada de J restrita a M é dada por

$$\|J|_M(u)\|_* = \sup_{v \in T_uM, \|v\|=1} |J'(u)(v)|.$$

Corolário 1.19. *A norma da derivada de J restrita a M é dada por*

$$\|J|_M(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|J'(u) - \lambda F'(u)\|.$$

Definição 1.20. Um ponto $u \in M$ é um ponto crítico de J restrito à M, se $\|J|_M(u)\|_* = 0$.

Como consequência da definição, se u é um ponto crítico de J restrito à M então, deve existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|J'(u) - \lambda F'(u)\|_* = 0,$$

isto é,

$$J'(u) = \lambda F'(u).$$

Princípio Variacional de Ekeland

Teorema 1.21 (Princípio Variacional de Ekeland (Regular)). *Seja X um espaço de Banach, $G \in \mathscr{C}^2(X,\mathbb{R})$ tal que para todo $v \in V := \{v \in X; G(v) = 1\}$ tem-se $G'(v) \neq 0$ e $F \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$ um funcional limitado inferiormente sobre V. Dado $v \in V, \varepsilon, \delta > 0$, verificando*

$$F(v) \leq \inf_V F + \varepsilon$$

existe $u \in V$ tal que

1. $F(v) \leq \inf_V F + 2\varepsilon$;
2. $\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u) - \lambda G'(u)\|_* \leq \frac{8\varepsilon}{\delta}$;
3. $\|u - v\| \leq 2\delta$

Demonstração. Veja [21], página 39, considerando $\varphi = F$. □

Como consequência deste resultado, existem $\{u_n\} \subset V$ e $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, tal que

$$F(u_n) \to \inf_V F \quad \text{e} \quad \|F'(u_n) - \lambda_n G'(u_n)\|_* \to 0$$

Definição 1.22. Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável. Uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0$$

é chamada **sequência de Palais Smale** de I de nível c. Neste caso, dizemos que u_n é $(PS)_c$.

Definição 1.23. Seja X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ se toda sequência Palais-Smale de I de nível c possui subsequência convergente em X.

Simetrização de Schwarz

Teorema 1.24 (Teorema e definição). *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Existe uma única função $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $f^* \geq 0$ e para todo $\lambda > 0$*

$$mes([f \geq \lambda]) = mes([f^* \geq \lambda]),$$

onde todo $[f^* \geq \lambda]$ é uma bola $B(0,R_\lambda)$. A função f^* é radial e decrescente e a chamamos ***rearranjo radial decrescente*** *ou* ***simetrização de Schwarz*** *da função f. Além disso, para qualquer função contínua e crescente $G:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, tal que $G(0)=0$, tem-se que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f^*(x))dx.$$

Demonstração. Ver [14], página 260. □

Proposição 1.25. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Então a simetrização u^* pertence à $H^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx$$

Demonstração. Ver [14], página 264. □

CAPÍTULO 2

Soluções normalizadas para equação de Schrödinger de massa supercrítica com potencial

Desejamos provar a existência de solução $(u,\lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$ para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0 \\ \|u\|_2 = \rho \end{cases} \tag{2.1}$$

sendo $V \geq 0$ um potencial fixado e

$$2 + \frac{4}{N} < p < 2^* \equiv \frac{2N}{(N-2)^+}. \tag{2.2}$$

Neste caso, λ é um multiplicador de Lagrange que aparecerá devido a restrição da massa $\|u\|_2 = \rho$.

Vamos considerar o potencial V satisfazendo $V(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$. Como estamos no caso (2.2), o funcional

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx$$

é ilimitado superiormente e inferiormente em S_ρ e, portanto, não podemos procurar solução do problema atráves de máximo ou mínimo global. F também possui estrutura do Passo da Montanha, mas o valor do Passo da Montanha acontece para $V \equiv 0$ e não é atingido. A fim de lidar com o problema, vamos mostrar que F, restrito à esfera S_ρ, possui uma *Geometria do Enlace* (também conhecida na literatura por *Linking geometry*), o que garantirá a existência de sequência de Palais Smale de F. Feito isto, a maior dificuldade encontrar-se-á no fato de que, se V não é radial, não podemos trabalhar em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e temos que lidar com a não compacidade da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$, de modo que sequências limitadas de Palais Smale não, necessariamente, possuem subsequências fortemente convergentes. A fim de auxiliar nessa questão, introduziremos um Lema da Separação adequado.

Por fim, vamos discutir também o caso em que V é radial, onde a solução será obtida a partir de um argumento do Passo da Montanha em $S_\rho \cap H^1(\mathbb{R}^N)$.

2.1 O Lema da Separação e algumas relações para soluções de equações autônomas

De modo a estudar o comportamento de sequências de Palais Smale, introduzimos um Lema da Separação adequado (*Splitting Lemma*). Para $\lambda > 0$, sejam

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx$$

e

$$I_{\infty,\lambda}(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx.$$

Lema 2.1 (Lema da Separação)**.** *Seja $v_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência de Palais Smale para I_λ tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, existem um inteiro $k \geq 0$, k soluções não triviais $w^1, \ldots, w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para a equação limite*

$$-\Delta w + \lambda w = |w|^{p-2} w$$

e k sequências $\{y_n^j\}_n \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq k$, tais que $|y_n^j| \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$ e

$$v_n = v + \sum_{j=1}^{k} w^j(. - y_n^j) + o(1), \quad \textit{fortemente em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Mais ainda, temos

$$\|v_n\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \sum_{j=1}^{k} \|w^j\|_2^2 + o(1)$$

e

$$I_\lambda(v_n) \longrightarrow I_\lambda(v) + \sum_{j=1}^{k} I_{\infty,\lambda}(w^j).$$

Demonstração. Veja [21], capítulo 8. □

Relações para soluções de equações autônomas

Seja $U \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta U + U = |U|^{p-2}U, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ U > 0, & \\ U(0) = \|U\|_\infty. & \end{cases} \tag{2.3}$$

(veja [15]). Considere $\rho_0 := \|U\|_2$ e para cada $\rho > 0$, seja $\mu > 0$ determinado por

$$\rho^2 = \rho_0^2 \mu^{N - \frac{4}{p-2}}.$$

Através do reescalonamento

$$Z_\rho(x) := \mu^{-\frac{2}{p-2}} U(x/\mu),$$

obtemos uma única solução $(Z_\rho, \lambda_\rho) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$ para o problema

$$\begin{cases} -\Delta Z_\rho + \lambda_\rho Z_\rho = |Z_\rho|^{p-2} Z_\rho, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ Z_\rho > 0, & \\ \|Z_\rho\|_2 = \rho & \end{cases} \tag{2.4}$$

onde

$$\lambda_\rho = \mu^{-2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-q-2}, \tag{2.5}$$

com

$$q = \frac{4(p-2)}{N(p-2)-4} = \frac{4N - 2p(N-2)}{N(p-2)-4}. \tag{2.6}$$

Note que $q > 0$, visto que $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$.

A solução Z_ρ é radial e é ponto crítico do Passo da Montanha para

$$F_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx$$

restrito à esfera

$$S_\rho := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \rho^2 \right\}.$$

Em suma, é possivel mostrar que F_∞, restrito à esfera S_ρ, possui uma solução do tipo Passo da Montanha. Assim, sendo Z_ρ a única solução do problema obtida pelo reescalonamento acima considerado, pela unicidade da solução segue que Z_ρ é ponto crítico do Passo da Montanha de F_∞ restrito à esfera S_ρ.

Agora, defina $m_\rho = F_\infty(Z_\rho)$, para cada $\rho > 0$. Então, $m_{\rho_0} = F_\infty(U)$ e vale

$$m_\rho = m_{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^q = \frac{1}{q}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-q-2}\rho^2 = \frac{1}{q}\lambda_\rho \rho^2. \tag{2.7}$$

De fato, temos

$$
\begin{aligned}
m_\rho = F_\infty(Z_\rho) &= F_\infty\big(\mu^{-\frac{2}{p-2}}U(x/\mu)\big)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\big|\nabla\big(\mu^{-\frac{2}{p-2}}U(x/\mu)\big)\big|^2dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\big|\mu^{-\frac{2}{p-2}}U(x/\mu)\big|^p dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\mu^{-\frac{4}{p-2}}\big|\nabla\big(U(x/\mu)\big)\big|^2dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\mu^{-\frac{2p}{p-2}}\big|U(x/\mu)\big|^p dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\mu^{-\frac{4}{p-2}}\mu^{-2}\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}\big(U(x/\mu)\big)^2dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\mu^{-\frac{2p}{p-2}}\big|U(x/\mu)\big|^p dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\mu^{-\frac{4}{p-2}}\mu^{-2}\mu^N\big|\nabla U(y)\big|^2dy - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\mu^{-\frac{2p}{p-2}}\mu^N\big|U(y)\big|^p dy\\
&= \mu^{\frac{-2p}{p-2}+N}\Big[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U|^2dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|U|^p dx\Big]\\
&= \mu^{\frac{-2p}{p-2}+N}F_\infty(U)\\
&= \mu^{\frac{N(p-2)-2p}{p-2}}m_{\rho_0}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\mu^{\frac{N(p-2)-2p}{p-2}} = \mu^{-2}\mu^{N-\frac{4}{p-2}} = \Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^{-q-2}\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^2 = \Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^{-q}.
$$

Observe que de (2.7), como $q>0$, podemos concluir que m_ρ é decrescente em ρ, isto é,

$$
\alpha<\beta \qquad \Rightarrow \qquad m_\alpha > m_\beta. \tag{2.8}
$$

Seja $a>0$ e $w\in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $w\not\equiv 0$ solução de

$$
-\Delta w + aw = |w|^{p-2}w.
$$

Como w é solução fraca da equação, temos

$$
\|\nabla w\|_2^2 + a\|w\|_2^2 = \|w\|_p^p \tag{2.9}
$$

e, da Identidade de Pohozaev, temos

$$
\frac{N-2}{2}\|\nabla w\|_2^2 + \frac{N}{2}a\|w\|_2^2 = \frac{N}{p}\|w\|_p^p. \tag{2.10}
$$

Então, vale

$$
a\|w\|_2^2 = \frac{2N-p(N-2)}{p-2}I_{\infty,a}(w) = \frac{4N-2p(N-2)}{N(p-2)-4}F_\infty(w). \tag{2.11}
$$

Seja ρ_a tal que $\lambda_{\rho_a} = a$ e Z_{ρ_a} definida como usual. Então,

$$-\Delta Z_{\rho_a} + aZ_{\rho_a} = Z_{\rho_a}^{p-1}$$

e Z_{ρ_a} satisfaz as mesmas condições de w. Além disso, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ não identicamente nulo,

$$I_{\infty,a}(Z_{\rho_a}) \leq \max_{t>o} I_{\infty,a}(tu).$$

Como

$$\max_{t>0} I_{\infty,a}(tw) = I_{\infty,a}(w),$$

concluímos que

- $I_{\infty,a}(w) \geq I_{\infty,a}(Z_{\rho_a})$,
- $\|w\|_2^2 \geq \|Z_{\rho_a}\|_2^2 = \rho_a$,
- $F_\infty(w) \geq F_\infty(Z_{\rho_a}) = m_{\rho_a}$.

Por fim, sendo m_ρ decrescente em ρ, temos $F_\infty(w) \geq \rho$, para todo $\rho \geq \rho_a$. Em particular,

$$F_\infty(w) \geq m_{\|w\|_2} > 0. \tag{2.12}$$

2.2 Hipóteses sobre o potencial, comentários e observações

Vamos agora estabelecer hipóteses sobre o potencial V. Algumas delas serão técnicas e as limitações sobre as normas são explícitas de modo a deixar claro que os resultados não são perturbativos.

A fim de estabelecer nossas hipóteses, considere a função auxiliar $W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$W(x) := V(x)|x|$$

Hipóteses V_1***:***

- $N \geq 1$;
- V e W estão em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$;
- $V \geq 0$;

- $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$;

- $0 < \|V\|_\infty < 2min\left(1, \frac{2}{N}\right)\frac{m_\rho}{\rho^2}$;

- $\|W\|_\infty \leq m_\rho^{\frac{1}{2}}\frac{2N-p(N-2)}{\rho}\left(\frac{N(p-2)-4}{2(p-2)\left(N(2p-1)(p-2)+2(p(2-N)+2N)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$.

com m_ρ definido anteriormente e satisfazendo (2.7).

Hipóteses V_2**:**

- $N \geq 3$;

- $V \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e $W \in L^N(\mathbb{R}^N)$;

- $V \geq 0$;

- $\|V\|_{\frac{N}{2}} < \frac{2N(p-2)}{N(p-2)-4}\left(\left(1+\frac{2}{N}\right)^{\frac{N(p-2)-4}{N(p-2)}} - 1\right)\frac{m_{\rho_0}}{\|Z_{\rho_0}\|_{2^*}^2}$;

- $2NS^{-1}\left[1+\frac{N(p-2)}{2}\right]\|V\|_{\frac{N}{2}} + 4S^{-1/2}\left[1+\frac{N(p-2^2)}{2N-p(N-2)}\right]\|W\|_N \leq N(p-2)-4$.

onde S denota a melhor constante na imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, como discutido no capítulo anterior.

Teorema 2.2. *Seja* $2+\dfrac{4}{N} < p < 2^*$ *e* $\rho > 0$*. Se* V *satisfaz as hipóteses* (V_1) *ou* (V_2) *então o problema* (2.1) *possui uma solução* $(u, \lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$.

Observação 2.3. Observe que, para qualquer p fixado, por (2.7) temos

$$\frac{m_\rho}{\rho^2} \to \begin{cases} +\infty, \text{ quando } \rho \to 0 \\ 0, \text{ quando } \rho \to \infty. \end{cases}$$

Então, para ρ pequeno, as normas L^∞ de V e W em (V_1) podem ser grandes. No entanto, não existe um único $V \not\equiv 0$ tal que o problema (2.1) possui uma única solução para todo $\rho > 0$.

Observe também que, para qualquer $\rho > 0$ fixado, por (2.5), (2.6) e (2.7) temos

$$(N(p-2)-4)\frac{m_\rho}{\rho^2} \to \begin{cases} 0, \text{ se } \rho > \rho_0^* \\ +\infty, \text{ se } \rho < \rho_0^* \end{cases}$$

quando $p \to 2+\frac{4}{N}$ superiormente, onde $\rho_0^* = \|U\|_2$, para $p = 2+\frac{4}{N}$. Concluímos que as normas L^∞ de V e W em (V_1) podem ser grandes quando $\rho < \rho_0^*$ e p está próximo a $2+\frac{4}{N}$.

Das observações anteriores e do Teorema 2.2 segue imediatamente o corolário:

Corolário 2.4. *Seja $N \geq 1$ e $2+\dfrac{4}{N} < p < 2^*$. Sejam $V, W \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $V \geq 0$ e $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$. Então, (2.1) possui uma solução $(u,\lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$, se*

(i) $\rho > 0$ é suficientemente pequeno para todo $2+\dfrac{4}{N} < p < 2^*$;

(ii) $\rho \in (0,\rho_0^*)$ desde que p esteja suficientemente próximo de $2+\frac{4}{N}$.

Caso radial

Se V é radial, então os resultados podem ser obtidos com um argumento mais simples e as hipóteses sobre V podem ser enfraquecidas (observe que a estimativa sobre a norma $\|V\|_{\frac{N}{2}}$ no quarto item da hipótese (V_2) não é necessária) .

***Hipóteses** $(V_1)_{rad}$:*

- $N \geq 2$;
- V e W estão em $L^\infty_{rad}(\mathbb{R}^N)$;
- $V \geq 0$;
- $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$;
- $0 < \|V\|_\infty < 2min\left(1, \frac{2}{N}\right)\frac{m_\rho}{\rho^2}$;
- $\|W\|_\infty \leq m_\rho^{\frac{1}{2}} \frac{2N-p(N-2)}{\rho}\left(\frac{N(p-2)-4}{2(p-2)\left(N(2p-1)(p-2)+2(p(2-N)+2N)\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$.

***Hipóteses** $(V_2)_{rad}$:*

- $N \geq 3$;
- $V \in L^{\frac{N}{2}}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $W \in L^N(\mathbb{R}^N)$;
- $V \geq 0$;
- $2NS^{-1}\left[1+\frac{N(p-2)}{2}\right]\|V\|_{\frac{N}{2}} + 4S^{-1/2}\left[1+\frac{N(p-2^2)}{2N-p(N-2)}\right]\|W\|_N \leq N(p-2)-4$.

Teorema 2.5. *Seja $2+\dfrac{4}{N} < p < 2^*$ e $\rho > 0$. Se V satisfaz as hipóteses $(V_1)_{rad}$ ou $(V_2)_{rad}$ então o problema (2.1) possui uma solução $(u,\lambda) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$.*

2.3 Geometria do Enlace

Definição 2.6. Para $h \in \mathbb{R}$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, defina

$$h \star u(x) := e^{\frac{N}{2}h} u(e^h x)$$

Observação 2.7. Note que

(i) $0 \star u = u$, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$;

(ii) O reescalonamento "$\star$" preserva norma L^2, isto é, $\|h \star u\|_2 = \|u\|_2$, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e todo $h \in \mathbb{R}$. De fato, note que

$$\|h \star u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |h \star u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{N}{2}h} |u(e^h x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{Nh} |u(y)|^2 e^{-Nh} dy = \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy = \|u\|_2^2.$$

Para $R > 0$ e $h_1 < 0 < h_2$, a serem determinados, consideramos

$$Q = B_R \times [h_1, h_2] \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

onde $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq R\}$ é a bola fechada de $\mathbb{R}^N$ com centro 0 e raio R . Para $\rho > 0$, definimos

$$\Gamma_\rho := \left\{ \gamma \in C(Q; S_\rho);\ \gamma(y,h) = h \star Z_\rho(. - y), \forall (y,h) \in \partial Q \right\}$$

onde

$$S_\rho := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \rho^2 \right\}.$$

Queremos encontrar uma solução para o problema em S_ρ cuja energia F seja dada por

$$m_{V,\rho} := \inf_{\gamma \in \Gamma_\rho} \max_{(y,h) \in Q} F(\gamma(y,h)).$$

A fim de mostrar que F possui uma *Geometria do Enlace*, precisamos provar que

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_\rho} \max_{(y,h) \in \partial Q} F(\gamma(y,h)) < m_{V,\rho}$$

ao menos para uma escolha adequada de Q.

Para este propósito temos a Proposição (2.12) que nos dá um limitante inferior para $m_{V,\rho}$ e a Proposição (2.13) que fornece um limitante superior para $F \circ \gamma$ em ∂Q, para qualquer $\gamma \in \Gamma_\rho$, e ainda determina os valores $R > 0$ e $h_1 < 0 < h_2$. Os resultados até (e incluindo) a proposição (2.12) valem para $R > 0$ e $h_1 < 0 < h_2$ arbitrários.

É preciso destacar que, como provado em [13],

$$m_\rho = \inf_{\sigma \in \Sigma_\rho} \max_{t \in [0,1]} F_\infty(\sigma(t)) \tag{2.13}$$

onde

$$\Sigma_\rho = \left\{ \sigma \in \mathscr{C}([0,1], S_\rho);\ \sigma(0) = h_1 \star Z_\rho, \sigma(1) = h_2 \star Z_\rho \right\}.$$

Defina

$$\begin{aligned}
\mathscr{D} &:= \left\{ D \subset S_\rho;\ \ D \text{ é compacto, conexo e } h_1 \star Z_\rho, h_2 \star Z_\rho \in D \right\} \\
\mathscr{D}_0 &:= \left\{ D \in \mathscr{D};\ \beta(u) = 0,\ \ \text{para todo } u \in D \right\} \\
\mathscr{D}_r &:= \mathscr{D} \cap H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

sendo β a aplicação baricentro. Observe que,

$$\mathscr{D}_r \subset \mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}.$$

De fato, por definição, $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}$. Agora, $\mathscr{D}_r \subset \mathscr{D}_0$, pois se $D \in \mathscr{D}_r$ então $D \in \mathscr{D}$ e u é radial, para todo $u \in D$. Mas então, $D \in \mathscr{D}$ e $\beta(u) = 0$, para todo $u \in D$.

Defina também,

$$\begin{aligned}
l^r_\rho &:= \inf_{D \in \mathscr{D}_r} \max_{u \in D} F_\infty(u) \\
l^0_\rho &:= \inf_{D \in \mathscr{D}_0} \max_{u \in D} F_\infty(u) \\
l_\rho &:= \inf_{D \in \mathscr{D}} \max_{u \in D} F_\infty(u)
\end{aligned}$$

Lema 2.8. $l^r_\rho = l^0_\rho = l_\rho = m_\rho$

Demonstração. Primeiramente, note que como $\mathscr{D}_r \subset \mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}$, vale

$$l^r_\rho \geq l^0_\rho \geq l_\rho.$$

De fato, seja $D \in \mathscr{D}_r$, arbitrário. Então, $D \in \mathscr{D}_0$ e

$$l^0_\rho = \inf_{D \in \mathscr{D}_0} \max_{u \in D} F_\infty(u) \leq \max_{u \in D} F_\infty(u).$$

Mas como $D \in \mathscr{D}_r$ é arbitrário, a desigualdade acima mostra que l_ρ^0 é cota inferior para $\{\max_{u\in D} F_\infty(u); D \in \mathscr{D}_r\}$. Segue, então, da definição de ínfimo que

$$l_\rho^0 \leq \inf_{D\in\mathscr{D}_r} \max_{u\in D} F_\infty(u) = l_\rho^r.$$

Analogamente, mostra-se que $l_\rho^0 \geq l_\rho$.

Sendo assim, a fim de provar as igualdades do Lema, basta que provemos que

$$l_\rho \geq m_\rho \quad \text{e} \quad m_p \geq l_\rho^r$$

Afirmação 1: $l_\rho \geq m_\rho$

Com efeito, suponha por contradição que $l_\rho < m_\rho$. Então, m_ρ não é cota inferior para o conjunto $\{\max_{u\in D} F_\infty(u);\ D \in \mathscr{D}\}$ e existe $D \in \mathscr{D}$ tal que

$$\max_{u\in D} F_\infty(u) < m_\rho.$$

Daí,

$$\sup_{u\in U_\delta(D)} F_\infty(u) < m_\rho$$

para alguma δ-vizinhança aberta e conexa $U_\delta(D)$ de D. Em particular, observe que $h_1 \star Z_\rho \in U_\delta(D)$ e $h_2 \star Z_\rho \in U_\delta(D)$. Note também que como $U_\delta(D)$ é aberto e conexo, este é conexo por caminhos. Portanto, existe um caminho $\sigma \in \Sigma_\rho$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} F_\infty(\sigma(t)) < m_\rho,$$

o que contradiz (2.13). Portanto, $l_\rho \geq m_\rho$, provando a afirmação.

Afirmação 2: $m_p \geq l_\rho^r$

De fato, considere $D := \{h \star Z_\rho; h \in [h_1, h_2]\}$. Note que $D \in \mathscr{D}_r$, pois

(i) Para todo $h \in [h_1, h_2]$,

$$\|h \star Z_\rho\|_2 = \|Z_\rho\|_2 = \rho.$$

Logo, $D \subset S_\rho$.

(ii) Considere $f : [h_1, h_2] \longrightarrow S_\rho$ definida por

$$f(h) = h \star Z_\rho = e^{\frac{N}{2}h} Z_\rho(e^h x).$$

Observe que f é contínua (composição e produto de funções contínuas) e $D = f([h_1, h_2])$, com $[h_1, h_2]$ compacto e conexo. Logo, D é compacto e conexo.

(iii) Pela definição de D, $h_1 \star Z_\rho, h_2 \star Z_\rho \in D$.

(iv) $D \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, pois $Z_\rho \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

De $(i)-(iv)$, temos $D \in \mathscr{D}_r$. Assim, para todo $u \in D$ temos

$$\max_{u\in D} F_\infty(u) = \max_{h\in[h_1,h_2]} F_\infty(h\star Z_\rho) = m_\rho,$$

donde concluímos

$$l^r_\rho = \inf_{D\in\mathscr{D}_r} \max_{u\in D} F_\infty(u) \leq \max_{h\in[h_1,h_2]} F_\infty(h\star Z_\rho) = m_\rho,$$

provando a afirmação e concluindo a demonstração. □

Definição 2.9. Seja H o espaço de Hilbert separável de dimensão infinita (único a menos de isomorfismos). Uma variedade de Hilbert é um espaço metrizável separável tal que todo ponto possui uma vizinhança homeomórfica a um aberto de H. (Veja [17])

O lema a seguir é um caso especial do Teorema 21 contido em [10].

Lema 2.10. *Seja M uma variedade de Hilbert e $J \in C^1(M,\mathbb{R})$ um funcional dado. Seja $K \subset M$ compacto e considere um subconjunto*

$$\mathscr{C} \subset \{C \subset M; C \text{ é compacto e } K \subset C\}$$

que é homotopicamente estável, isto é, é invariante com respeito a deformações deixando K fixado.

Assuma que

$$\max_{u\in K} J(u) < c := \inf_{C\in\mathscr{C}} \max_{u\in C} J(u) \in \mathbb{R}.$$

Seja $\sigma_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma_n \longrightarrow 0$ e $C_n \in \mathscr{C}$ uma sequência tal que

$$0 \leq \max_{u\in C_n} J(u) - c \leq \sigma_n.$$

Então, existe uma sequência $v_n \in M$ tal que

(1) $|J(v_n) - c| \leq \sigma_n$;

(2) $\|\nabla_{S_\rho} J(v_n)\| \leq \tilde{c}\sqrt{\sigma_n}$;

(3) $dist(v_n, C_n) \leq \tilde{c}\sqrt{\sigma_n}$,

para alguma constante $\tilde{c} > 0$.

Lema 2.11.

$$L_\rho := \inf_{D \in \mathscr{D}_0} \max_{u \in D} F(u) > m_\rho.$$

Demonstração. Como $V \geq 0$, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$F(u) \geq F_\infty(u).$$

Em particular, para todo $D \in \mathscr{D}_0$

$$\max_{u \in D} F(u) \geq \max_{u \in D} F_\infty(u).$$

Pela desigualdade anterior e pelo Lema (2.8), concluímos que para qualquer $D \in \mathscr{D}_0$,

$$\max_{u \in D} F(u) \geq \max_{u \in D} F_\infty(u) \geq \inf_{D \in \mathscr{D}_0} \max_{u \in D} F_\infty(u) = l_\rho^0 = m_\rho. \tag{2.14}$$

Assim,

$$L_\rho := \inf_{D \in \mathscr{D}_0} \max_{u \in D} F(u) \geq m_\rho.$$

Suponha agora, por contradição, que $m_\rho = L_\rho$. Então, existe uma sequência minimizante $(D_n)_n \subset \mathscr{D}_0$ tal que

$$\max_{u \in Dn} F(u) \to m_\rho, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Por (2.14) e pelo Teorema do Confronto, também temos

$$\max_{u \in Dn} F_\infty(u) \to m_\rho, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Agora, considere o funcional $\tilde{F}_\infty : H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, restrito à $M := S_\rho \times \mathbb{R}$, definido por

$$\tilde{F}_\infty(u,h) := F_\infty(h \star u).$$

Considere também

$$K := \{(h_1 \star Z_\rho, 0), (h_2 \star Z_\rho, 0)\} \subset M,$$

e

$$\mathscr{C} := \{C \subset M; C \text{ é compacto e } K \subset C\}.$$

Vamos aplicar o Lema (2.10).

Afirmação 1:

$$\tilde{l}_\rho := \inf_{C\in\mathscr{C}} \max_{(u,h)\in C} \tilde{F}_\infty(u,h) = l_\rho = m_\rho.$$

De fato, note que $\mathscr{D}\times\{0\}\subset\mathscr{C}$. Assim, para qualquer $D\in\mathscr{D}$, temos

$$\max_{(u,h)\in D\times\{0\}} \tilde{F}_\infty(u,h) \geq \inf_{C\in\mathscr{C}} \max_{(u,h)\in C} \tilde{F}_\infty(u,h) = \tilde{l}_\rho \tag{2.15}$$

Mas, se $(u,h)\in D\times\{0\}$, então $u\in D$ e $h=0$. Daí,

$$\tilde{F}_\infty(u,h) = F_\infty(0\star u) = F_\infty(u).$$

Logo, para qualquer $D\in\mathscr{D}$,

$$\max_{(u,h)\in D\times\{0\}} \tilde{F}_\infty(u,h) = \max_{u\in D} F_\infty(u). \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16), obtemos então,

$$\tilde{l}_\rho \leq \max_{(u,h)\in D\times\{0\}} \tilde{F}_\infty(u,h) = \max_{u\in D} F_\infty(u), \qquad \text{para todo } D\in\mathscr{D}$$

e, portanto,

$$\tilde{l}_\rho \leq \inf_{D\in\mathscr{D}} \max_{u\in D} F_\infty(u) = l_\rho. \tag{2.17}$$

Agora, observe que, para qualquer $C\in\mathscr{C}$, o conjunto $D_C := \{h\star Z_\rho; (u,h)\in C\}\in\mathscr{D}$. De fato, temos

(i) $D_C\subset S_\rho$, pois para todo $(u,h)\in C$, temos $u\in S_\rho$ e $h\in\mathbb{R}$. Daí,

$$\|h\star u\|_2 = \|u\|_2 = \rho.$$

(ii) D_C é compacto e conexo. De fato, considere $f: C\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por $f(u,h) = h\star u$. Temos que f é contínua, e $D_C = f(C)$, com C compacto e conexo.

(iii) Como $K\subset C$, $(h_1\star Z_\rho, 0), (h_1\star Z_\rho, 0)\in C$. Assim,

$$0\star(h_1\star Z_\rho) = h_1\star Z_\rho \in D_C$$

e, analogamente, $h_2\star Z_\rho\in D_C$.

De $(i),(ii),(iii)$, temos $D_C \in \mathscr{D}$, para qualquer $C \in \mathscr{C}$. Assim, para qualquer $C \in \mathscr{C}$

$$\max_{(u,h)\in C} \tilde{F}_\infty(u,h) = \max_{(u,h)\in C} F_\infty(h \star u) = \max_{v\in D_C} F_\infty(v) \geq \inf_{D\in\mathscr{D}} \max_{u\in D} F_\infty(u) = l_\rho.$$

Da definição de ínfimo segue,

$$l_\rho \leq \inf_{c\in\mathscr{C}} \max_{(u,h)\in C} \tilde{F}_\infty(u,h) = \tilde{l}_\rho.$$

Das duas desigualdades, segue a afirmação.

Resumindo, temos: $M = S_\rho \times \mathbb{R}$, variedade de Hilbert, $\tilde{F}_\infty \in C^1(M;\mathbb{R})$ um funcional, $K \subset M$ compacto e podemos assumir $\max\limits_K \tilde{F}_\infty \leq \tilde{l}_\rho = m_\rho$. Estamos na hipótese do Lema (2.10). Como consequência obtemos uma sequência $(u_n,h_n)_n \subset M$ tal que

(1) $|\tilde{F}_\infty(u_n,h_n) - m_\rho| \to 0, \quad$ quando $n \to \infty$;

(2) $\|\nabla_{S_\rho\times\mathbb{R}} \tilde{F}_\infty(u_n,h_n)\| \to 0, \quad$ quando $n \to \infty$;

(3) $dist((u_n,h_n), D_n \times \{0\}) \to 0, \quad$ quando $n \to \infty$.

Tomando $v_n := h_n \star u_n$, temos $(v_n)_n \subset S_\rho \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e, como $\tilde{F}_\infty(u_n,h_n) = F_\infty(h_n \star u_n) = F_\infty(v_n)$, em particular temos

(1) $|F_\infty(v_n) - m_\rho| \to 0$, quando $n \to \infty$;

(2) $\|\nabla_{S_\rho\times\mathbb{R}} F_\infty(v_n)\| \to 0$, quando $n \to \infty$.

Isso mostra que $(v_n)_n$ é uma sequência de Palais Smale de F_∞ em S_ρ de nível m_ρ satisfazendo a Identidade de Pohozaev para F_∞. Então, existem Multiplicadores de Lagrange $\mu_n \in \mathbb{R}$ tais que,

(I) $\dfrac{1}{2}\|\nabla v_n\|_2^2 - \dfrac{1}{p}\|v_n\|_p^p \to m_\rho$;

(II) $\|F'_\infty(v_n) - \mu_n G'(v_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))^*} \to 0, \quad$ onde $\quad G(u) = \dfrac{1}{2}\Big(\rho^2 - \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx\Big)$;

(III) $\|\nabla v_n\|_2^2 - \dfrac{N(p-2)}{2p}\|v_n\|_p^p \to 0$.

Fazendo $(I) - \frac{1}{2}(III)$, obtemos

$$\|v_n\|_p^p \to \frac{4p}{N(p-2)-4} m_\rho. \tag{2.18}$$

e fazendo $\frac{N(p-2)}{2}(I)-(III)$, obtemos

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \to \frac{2N(p-2)}{N(p-2)-4} m_\rho. \tag{2.19}$$

Logo, por (2.19), $\|\nabla v_n\|_2$ é limitada, e portanto, v_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De (II) temos

$$0 \leq \frac{|F'_\infty(v_n)[v_n] - \mu_n G'(v_n)[v_n]|}{\|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}} \leq \|F'_\infty(v_n) - \mu_n G'(v_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))*} \to 0$$

onde

$$F'_\infty(v_n)[v_n] - \mu_n G'(v_n)[v_n] = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx + \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx.$$

Sendo assim,

$$\|\nabla v_n\|_2^2 - \|v_n\|_p^p + \mu_n \|v_n\|_2^2 = o(1)$$

o que implica em

$$\mu_n = \frac{-\|\nabla v_n\|_2^2 + \|v_n\|_p^p}{\rho^2} + o(1).$$

De (2.18) e (2.19) concluímos

$$\mu_n \to \frac{m_\rho}{\rho^2}\left(\frac{2N - p(N-2)}{N(p-2)-4}\right) =: \mu > 0$$

Como v_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, passando a subsequência se necessário, v_n converge fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para v, e então, v é solução fraca de $-\Delta v + \mu v = |v|^{p-2} v$.

Afirmação: $v_n \to \pm Z_\rho$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Primeiramente, observe que para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$0 \leq \frac{|F'_\infty(v_n)[\varphi] - \mu_n G'(v_n)[\varphi]|}{\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N}} \leq \|F'_\infty(v_n) - \mu_n G'(v_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))^*} = o(1).$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p-2} v_n \varphi dx + \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n \varphi dx = o(1)\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

A igualdade acima mostra que $I'_{\infty,\mu}(v_n) \to 0$, quando $n \to \infty$ e, da convergência $\mu_n \to \mu$ e de (I), concluímos $I_{\infty,\mu}(v_n) \to m_\rho + \frac{\mu}{2}\rho^2$, quando $n \to \infty$. Assim, v_n é sequência de Palais Smale de $I_{\infty,\mu}$ de nível $m_\rho + \frac{\mu}{2}\rho^2$. Como consequência, segue do Lema da Separação que

$$v_n = v + \sum_{j=1}^{m} u^j(. - y_n^j) + o(1)$$

em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde $m \geq 0$ e $u_j \not\equiv 0$ é solução de

$$-\Delta u^j + \mu u^j = |u^j|^{p-2}u^j$$

com $|y_n^j| \longrightarrow \infty$. Mais ainda, colocando

$$\gamma := \|v\|_2^2 \quad \text{e} \quad \alpha_j := \|u^j\|_2^2$$

temos

$$\rho^2 = \gamma^2 + \sum_{j=1}^{m} \alpha^j \tag{2.20}$$

e, portanto, pelo menos uma das funções limite deve ser não trivial. Além disso,

$$I_\mu(v_n) = I_\mu(v) + \sum_{j=1}^{m} I_{\infty,\mu}(u^j)$$

de onde temos

$$F_\infty(v_n) + \frac{\mu}{2}\rho^2 = F_\infty(v) + \frac{\mu}{2}\gamma^2 + \Big(\sum_{j=1}^{m} F_\infty(u^j) + \frac{\mu}{2}\alpha_j^2\Big) + o(1)$$

e, então, por (2.20),

$$F_\infty(v_n) = F_\infty(v) + \sum_{j=1}^{m} F_\infty(u^j) + o(1).$$

Agora, como $F_\infty(w) \geq m_{\|w\|_2}$, temos

$$F_\infty(v) \geq m_{\|v\|_2} = m_\gamma \geq m_\rho$$

E, se u^j é não trivial, então

$$F_\infty(u^j) \geq m_{\alpha_j} \geq m_\rho.$$

Então, se duas ou mais funções limites são não triviais temos uma contradição pois, neste caso,

$$m_\rho + o(1) = F_\infty(v_n) = F_\infty(v) + \sum_{j=1}^{m} F_\infty(u^j) + o(1) \geq 2m_\rho + o(1).$$

Portanto, ou $m = 1$ e $v \equiv 0$ ou, $m = 0$ e $v \not\equiv 0$.

Caso $m = 1$ e $v \equiv 0$, teríamos $v_n = u_1(. - y_n^1) + o(1)$ e definimos $\tilde{v}_n := v_n(. + y_n^1) = u_1 + o(1)$. Por outro lado, por (3), temos $dist((u_n, h_n), D_n \times \{0\}) \to 0$, quando $n \to \infty$. Logo, $v_n = \varphi_n + o(1)$, com $\varphi_n \in D_n$. Como $\varphi_n \in D_n \in \mathscr{D}_0$, temos $\beta(\varphi_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pela continuidade de $\beta \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, e do fato de $u_1 = \tilde{v}_n + o(1)$ e $v_n = \varphi_n + o(1)$, obtemos

$$\beta(u_1) = \beta(\tilde{v}_n) + o(1) = \beta(\tilde{\varphi}_n) + o(1) = \beta(\varphi_n(. + y_n^1)) + o(1) = y_n^1 + o(1)$$

o que contradiz o fato de $|y_n^1| \longrightarrow \infty$.

Portanto, devemos assumir $m = 0$ e $v \not\equiv 0$. Então, $v_n \to v$, fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando novamente (3), temos $\beta(v) = 0$, isto é, v é radial. Portanto, pela unicidade da solução radial do problema segue que $v_n \to \pm Z_\rho$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Observe por fim que isso implica em

$$F(v_n) = F_\infty(v_n) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2 dx \to m_\rho + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)Z_\rho^2 > m_\rho$$

quando $n \to \infty$, o que é uma contradição, visto que $\max\limits_{u \in D_n} F(u) \to m_\rho$. □

Proposição 2.12. *Para todo $\rho > 0$, tem-se $m_{V,\rho} \geq L_\rho$.*

Demonstração. Dados $\gamma \in \Gamma_\rho$ e $h \in [h_1, h_2]$, consideremos a aplicação $f_h : B_R \to \mathbb{R}^N$, definida por $f_h(y) = \beta(\gamma(y,h))$, onde β denota o baricentro. Observe que se $(y,h) \in \partial Q$, então

$$f_h(y) = \beta(\gamma(y,h)) = \beta(h \star Z_\rho(.-y)) = \beta(h \star Z_\rho) + y = y.$$

Logo, $f_{h_i}(y) = 0$, para $i = 1,2$, se, e somente se, $y = 0$. Além disso, $f_h(y) = y \neq 0$, para qualquer $y \in \partial B_R$.

Portanto, $deg(f_h, B_R, 0) = 1$, para todo $h \in [h_1, h_2]$, onde $deg(f_h, B_R, 0)$ denota o grau topológico de Brower de f_h com respeito a B_R em 0. Sendo assim, existe um conjunto compacto e conexo $Q_0 \subset Q$, tal que $(0,h_1),(0,h_2) \in Q_0$, e $\beta(\gamma(y,h)) = 0$, para todo $(y,h) \in Q_0$. Definindo $D_0 := \gamma(Q_0) \in \mathscr{D}_0$, temos

$$\max_{(y,h)\in Q} F(\gamma(y,h)) \geq \max_{(y,h)\in Q_0} F(\gamma(y,h)) = \max_{u \in D_0} F(u) \geq \inf_{D \in \mathscr{D}_0} \max_{u \in D} F(u) = L_\rho.$$

Da definição de ínfimo, obtemos

$$L_\rho \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{(y,h)\in Q} F(\gamma(y,h)) = m_{V,\rho}.$$

□

Proposição 2.13. *Para todo $\rho > 0$ e todo $\varepsilon > 0$, existem $\overline{R} > 0$ e $\overline{h_1} < 0 < \overline{h_2}$ tais que, sendo $Q = B_R \times [h_1, h_2]$ com $R \geq \overline{R}$, $h_1 \leq \overline{h_1}$, $h_2 \geq \overline{h_2}$, vale*

$$\max_{(y,h)\in \partial Q} F(h \star Z_\rho(.-y)) < m_\rho + \varepsilon.$$

Demonstração. Como

$$F(u) = F_\infty(u) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx,$$

temos

$$\begin{aligned} F(h\star Z_\rho(.-y)) &= F_\infty(h\star Z_\rho(.-y)) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x-y)(e^{\frac{N}{2}h} Z_\rho\big(e^h(x-y)\big)^2 dx \\ &= F_\infty(h\star Z_\rho) + \frac{e^{Nh}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x-y) Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx \end{aligned}$$

onde

$$F_\infty(h\star Z_\rho) = \frac{e^2h}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Z_\rho|^2 dx - \frac{e^{\frac{Nh(p-2)}{2}}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |Z_\rho|^p dx.$$

Então,

$$F_\infty(h\star Z_\rho) = \begin{cases} O\big(e^{\frac{Nh(p-2)}{2}}\big) \to -\infty, \text{ quando } h \to \infty \\ O\big(e^{2h}\big) \to 0, \text{ quando } h \to -\infty. \end{cases} \tag{2.21}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{e^{Nh}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} V(e^{-h}x+y) Z_\rho^2(x)dx \\ &= \begin{cases} \to 0, \text{ quando } h \to -\infty \text{ uniformemente em } y \in \mathbb{R}^N \\ \leq \|V\|_\infty \rho^2, \text{ para todo } h \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

visto que $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$. Assim,

$$F(h\star Z_\rho(.-y)) \to -\infty, \text{ quando } h \to \infty \text{ uniformemente em } y \in B_R^N$$

para qualquer $R > 0$ e

$$F(h\star Z_\rho(.-y)) \to 0, \text{ quando } h \to -\infty \text{ uniformemente em } y \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto,

$$\max_{y\in B_R, h\in[h_1,h_2]} F(h\star Z_\rho(.-y)) < m_\rho,$$

desde que $|h_1|$ e h_2 sejam suficientemente grandes. Mais ainda, para $|y| = R$ com R suficientemente grande e $h \in [h_1, h_2]$ escolhemos $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\alpha(1+e^{-h_1}) < 1$$

e, então temos

$$\begin{aligned} e^{Nh}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx &= e^{Nh}\int_{|x|>\alpha R} V(x) Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx + e^{Nh}\int_{|x|\leq\alpha R} V(x) Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx \\ &\leq e^{Nh}\int_{|x|>\alpha R} V(x) Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx + e^{Nh}\int_{|x-y|>\alpha R e^{-h}} V(x) Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx. \end{aligned}$$

A primeira integral é limitada pois

$$
\begin{aligned}
e^{Nh}\int_{|x|>\alpha R} V(x)Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx &\le \|V\|_{L_\infty(|x|>\alpha R)}\int_{|x|>\alpha R} Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx\\
&\le \|V\|_{L_\infty(|x|>\alpha R)}\int_{\mathbb{R}^N} Z_\rho^2(x)dx\\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

quando $R\to\infty$, e a segunda integral satisfaz

$$
\begin{aligned}
e^{Nh}\int_{|x-y|>\alpha Re^{-h}} V(x)Z_\rho^2\big(e^h(x-y)\big)dx &= \int_{|\xi|>\alpha R} V(e^{-}h\xi-y)Z_\rho^2(\xi)d\xi\\
&\le \|V\|_\infty\int_{|\xi|>\alpha R} Z_\rho^2(\xi)d\xi\\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

quando $R\to\infty$. Portanto, segue o resultado. □

Pelas proposições (2.12) e (2.13), podemos escolher $R>0$ e $h_1<0<h_2$, tais que

$$\max_{(y,h)\in\partial Q} F(h\star Z_\rho(.-y)) < m_{V,\rho}$$

Isso implica que F possui uma Geometria do Linking e que existe uma sequência de Palais Smale de nível $m_{V,\rho}$. Nosso objetivo será provar que $m_{V,\rho}$ é um valor crítico de F. O Lema a seguir nos será útil no futuro.

Lema 2.14. *Se $|h_1|, h_2$ são sufientemente grandes, então*

$$m_{V,\rho}\le m_\rho+\frac{\|V\|_\infty}{2}\rho^2$$

Demonstração. Pela definição de $m_{V,\rho}$, temos

$$
\begin{aligned}
m_{V,\rho} &\le \max_{(y,h)\in Q} F(h\star Z_\rho(.-y))\\
&= \max_{(y,h)\in Q}\left\{F_\infty(h\star Z_\rho)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(h\star Z_\rho)^2(x-y)dx\right\}\\
&\le m_\rho+\frac{1}{2}\|V\|_\infty\rho^2
\end{aligned}
$$

para $|h_1|, h_2$ sufientemente grandes. □

Observação 2.15. Em particular, sob as hipóteses (V_1), o Lema 2.14 fornece

$$m_{V,\rho} < 2m_\rho.$$

Com efeito, por (V_1), $\|V\|_\infty < 2min\big(1,\frac{2}{N}\big)\dfrac{m_\rho}{\rho^2}$, daí $\|V\|_\infty \rho^2 < m_\rho$. Pelo Lema 2.14, temos

$$m_{V,\rho} \leq m_\rho + \frac{\|V\|_\infty}{2}\rho^2 < 2m_\rho. \tag{2.22}$$

2.4 Uma sequência de Palais Smale limitada

O objetivo desta seção é construir uma sequência limitada de Palais Smale $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ de F restrito à S_ρ de nível $m_{V,\rho}$. Como consequência, (v_n) convirgirá fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma solução fraca da equação, como desejamos.

Considere o funcional $\mathscr{C}^1$, $\tilde{F} : H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por

$$\tilde{F}(u,h) := F(h \star u) \quad \text{para todo } (u,h) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}$$

e defina

$$\widetilde{\Gamma_\rho} := \{\tilde{\gamma} \in C(Q, S_\rho \times \mathbb{R}); \tilde{\gamma}(y,h) = (h \star Z_\rho(.-y), 0) \text{ para todo } (y,h) \in \partial Q\}$$

e

$$\widetilde{m}_{V,\rho} := \inf_{\tilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}_\rho} \max_{(y,h)\in Q} \tilde{F}(\tilde{\gamma}(y,h)).$$

Lema 2.16. *(a)* $\widetilde{m}_{V,\rho} = m_{V,\rho}$

(b) Se $(u_n,h_n)_n$ é uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{F}$ e $h_n \to 0$, então $(h_n \star u_n)_n$ é uma sequência $(PS)_c$ para F.

Demonstração. (a) Primeiramente, note que, para qualquer $\gamma \in \Gamma_\rho$,

$$\big(\gamma(y,h), 0\big) = \big(h \star Z_\rho(.-y), 0\big), \quad \forall (y,h) \in \partial Q.$$

Logo, $\Gamma_\rho \times \{0\} \subset \widetilde{\Gamma}_\rho$ e, então

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{V,\rho} &= \inf_{\tilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma_\rho}} \max_{(y,h)\in Q} \tilde{F}(\tilde{\gamma}(y,h)) \\
&\leq \max_{(y,h)\in Q} \tilde{F}(\gamma(y,h), 0), \\
&\leq \max_{(y,h)\in Q} F(\gamma(y,h)).
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{m}_{V,\rho} \leq m_{V,\rho}$. Por outro lado, para $\tilde{\gamma} = (u,h) \in \widetilde{\Gamma}_\rho$, a função $\gamma := h \star u \in \Gamma_\rho$ e satisfaz

$$\begin{aligned}\max_{(y,t)\in Q} \tilde{F}(\tilde{\gamma}(y,h)) &= \max_{(y,t)\in Q} \tilde{F}(u(y,t),h)\\ &= \max_{(y,t)\in Q} F(h\star u(y,t))\\ &= \max_{(y,t)\in Q} F(\gamma(y,t)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}m_{V,\rho} &= \inf_{\gamma\in\Gamma_\rho} \max_{(y,h)\in Q} F(\gamma(y,h))\\ &\leq \max_{(y,t)\in Q} F(\gamma(y,t))\\ &= \max_{(y,t)\in Q} \tilde{F}(\tilde{\gamma}(u,h)).\end{aligned}$$

Portanto, $m_{V,\rho} \leq \tilde{m}_{V,\rho}$. Das duas desigualdades segue a igualdade.

(b) Ver [13].

$\square$

Proposição 2.17. *Seja $\tilde{g}_n \in \widetilde{\Gamma}_\rho$ uma sequência tal que*

$$\max_{(y,h)\in Q} \tilde{F}(\tilde{g}_n(y,h)) \leq m_{V,\rho} + \frac{1}{n}.$$

Então, existem uma sequência $(u_n,h_n)_n \in S_\rho \times \mathbb{R}$ e $\tilde{c} > 0$ tal que

$$m_{V,\rho} - \frac{1}{n} \leq \tilde{F}(u_n,h_n) \leq m_{V,\rho} + \frac{1}{n}$$

$$\min_{(y,h)\in Q} \|(u_n,h_n) - \tilde{g}_n(y,h)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)\times\mathbb{R}} \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}$$

e

$$\|\nabla_{S_\rho\times\mathbb{R}} \tilde{F}(u_n,h_n)\| \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}.$$

Observação 2.18. A última desigualdade significa que

$$|D\tilde{F}(u_n,h_n)[(z,s)] \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}(\|z\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + |s|)$$

para todo

$$(z,s) \in \left\{H^1(\mathbb{R}^N)\times\mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}^N} z u_n = 0\right\}$$

Demonstração. Considere $J = \tilde{F}$ e

$$M := S_\rho \times \mathbb{R}, \qquad \text{(Variedade de Hilbert);}$$

$$K := \{(h \star Z_\rho(. - y), 0); (y,h) \in \partial Q\} \subset M;$$

$$\mathscr{C} := \widetilde{\Gamma}_\rho;$$

$$C_n := \{\tilde{g}_n(y,h);\ (y,h) \in Q\}.$$

Temos

$$\mathscr{C} \subset \{C \subset M; C \text{ é compacto e } K \subset C\}$$

e, assumimos que

$$\max_{(y,h)\in\partial Q} \tilde{F}(h \star Z_\rho(. - y), 0) < \inf_{\tilde{\gamma}\in\tilde{\Gamma}_\rho} \max_{(y,h)\in\partial Q} \tilde{F}(\tilde{\gamma}(y,h)) \in \mathbb{R}.$$

Considerando $\sigma_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$, temos $\sigma_n \to 0$ e, por hipótese

$$0 \leq \max_{(y,h)\in Q} \tilde{F}(\tilde{g}_n(y,h)) - m_{V,\rho} \leq \frac{1}{n}.$$

Pelo Lema (2.10), existe uma sequência $(u_n, h_n)_n \in S_\rho \times \mathbb{R}$ tal que

(1) $|\tilde{F}(u_n, h_n) - m_\rho| \leq \sigma_n$;

(2) $\|\nabla_{S_\rho \times \mathbb{R}} \tilde{F}(u_n, h_n)\| \leq \tilde{c}\sqrt{\sigma_n}$;

(3) $dist_{(y,h)\in Q}((u_n, h_n), \tilde{g}(y,h)) \leq \tilde{c}\sqrt{\sigma_n}$,

para alguma constante $\tilde{c} > 0$. □

Como consequência, a proposição seguinte fornece uma obtemos uma sequência limitada de Palais Smale de F de nível $m_{V,\rho}$.

Proposição 2.19. *Existe uma sequência* **limitada** $(v_n)_n$ *em* S_ρ *tal que*

$$F(v_n) \to m_{V,\rho} \quad e \quad \nabla_{S_\rho} F(v_n) \to 0 \tag{2.23}$$

e

$$\|v_n\|_2^2 - \frac{N(p-2)}{2p}\|v_n\|_p^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(Nv_n^2 + 2v_n \nabla v_n . x)dx \to 0 \tag{2.24}$$

quando $n \to \infty$. Além disso, a sequência de Multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_n := -\frac{DF(v_n)[v_n]}{\rho^2} \tag{2.25}$$

admite uma subsequência $\lambda_n \to \lambda$, com

$$0 < \lambda \leq \Big(2q + \frac{8}{N(p-2)-4}\min(1, \frac{2}{N})\Big)\frac{m_\rho}{\rho^2}. \tag{2.26}$$

Demonstração. Por definição de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $g_n \in \Gamma_\rho$ tal que

$$\max_{(y,h)\in Q} F(g_n(y,h)) \leq m_{V,\rho} + \frac{1}{n}.$$

Como $F(u) = F(|u|)$, para qualquer $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $g_n(y,h) \geq 0$, q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Tomando $\tilde{g}_n := (g_n(y,h), 0) \in \widetilde{\Gamma}_\rho$, temos

$$\max_{(y,h)\in Q} \tilde{F}(\tilde{g}_n(y,h)) = \max_{(y,h)\in Q} \tilde{F}(g_n(y,h), 0) = \max_{(y,h)\in Q} F(0 \star g_n(y,h)) = \max_{(y,h)\in Q} F(g_n(y,h)) \leq m_{V,\rho} + \frac{1}{n}.$$

Assim, pela proposição anterior, existe uma sequência $(u_n, h_n)_n \in S_\rho \times \mathbb{R}$ tal que

$$F(h_n \star u_n) \to m_{V,\rho}$$

$$\min_{(y,h)\in Q} \|(u_n, h_n), \tilde{g}(y,h)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)\times\mathbb{R}} \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{\sigma_n}}$$

$$\|\nabla_{S_\rho \times \mathbb{R}} \tilde{F}(u_n, h_n)\| \leq \tilde{c}\sqrt{\sigma_n}.$$

Esta última condição significa que

$$|D\tilde{F}(u_n, h_n)[(z,s)] \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}(\|z\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + |s|) \tag{2.27}$$

para todo

$$(z,s) \in \Big\{H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}^N} z u_n = 0\Big\},$$

como observado anteriormente. Além disso, da segunda condição

$$|h_n| \leq |h_n - 0| \leq \min_{(y,h)\in Q} \|(u_n, h_n), (g(y,h), 0)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Assim, existe $(y_n, \overline{h}_n) \in Q = B_R \times [h_1, h_2]$ tal que

$$u_n - g_n(y_n, \overline{h}_n) = o(1)$$

em $H^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$.

Defina, $v_n := h_n \star u_n$. Como $g_n(y,h) \geq 0, \quad$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, então

$$\|u_n^-\|_2 \leq \|u_n - g_n(y_n, \overline{h}_n)\|_2 = o(1)$$

Podemos então concluir, passando a subsequência se necessário, que $u_n^- \to 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$\|v_n^-\|_2 = \|(h_n \star u_n^-)\|_2 = \|u_n^-\|_2 \to 0$$

Mais ainda, pelo Lema (2.16), (v_n) é uma sequência de Palais Smale de F.

Similarmente, para $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, definindo $\tilde{w}_n := -h_n \star w$ temos que

$$\begin{aligned}
D\tilde{F}(u_n,h_n)[(\tilde{w}_n,0)] &= \partial_{u_n}\tilde{F}(u_n,h_n)[\tilde{w}_n] + \partial_{h_n}\tilde{F}(u_n,h_n)[0] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{F}(u_n+t\tilde{w}_n,h_n)-\tilde{F}(u_n,h_n)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{F(h_n\star(u_n+t\tilde{w}_n))-\tilde{F}(u_n,h_n)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{F(h_n\star u_n+th_n\star\tilde{w}_n)-\tilde{F}(u_n,h_n)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{F(v_n+tw)-F(v_n)}{t} \\
&= DF(v_n)[w].
\end{aligned}$$

Além disso, podemos perceber que $\int_{\mathbb{R}^N} v_n w = 0$ é equivalente a ter $\int_{\mathbb{R}^N} u_n \tilde{w}_n = 0$ visto que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} v_n w &= \int_{\mathbb{R}^N}(h_n\star u_n)(x)w(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{N}{2}h}u_n(e^{h_n x})w(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_n(y)e^{\frac{-N}{2}h_n}w(e^{-h_n y})dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_n(y)(-h_n\star w)(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_n\tilde{w}_n dy
\end{aligned}$$

Logo, por (2.27) temos

$$\nabla_{S_p}F(v_n) \to 0$$

e segue (2.23).

Agora, vamos provar que

$$\|v_n\|_2^2 - \frac{N(p-2)}{2p}\|v_n\|_p^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(Nv_n^2 + 2v_n\nabla v_n.x)dx \to 0$$

quando $n \to \infty$. Pela proposição (2.17),

$$|D\tilde{F}(u_n,h_n)[(0,1)] \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}$$

e, portanto, $D\tilde{F}(u_n,h_n)[(0,1)] \to 0$, quando $n \to \infty$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)e^{Nh}u^2(e^hx)dx\Big) &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)e^{Nh}Nu^2(e^hx)+V(x)e^{Nh}2u(e^hx)e^h\nabla u(e^hx).xdx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)[N(e^{\frac{Nh}{2}}u(e^hx))^2+2(e^{Nh}u(e^hx))(e^h\nabla u(e^hx)).xdx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)[N\tilde{v}^2+2\tilde{v}\nabla\tilde{v}.x]dx\end{aligned}$$

com $\tilde{v} = h\star u$. Assim, como

$$F_\infty(h\star u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(h\star u)|^2dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|h\star u|^pdx \;=\; \frac{e^h}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{e^{\frac{Nh(p-2)}{2}}}{p}\|u\|_p^p$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}\Big(F_\infty(h\star u)\Big) &= \frac{e^h}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{N(p-2)}{2p}e^{\frac{Nh(p-2)}{2}}\|u\|_p^p\\ &= \|\nabla v\|^2 - \frac{N(p-2)}{2p}\|v\|_p^p\end{aligned}$$

Como $h_n \to 0$, temos para $v_n = h_n\star u_n$

$$\|v_n\|_2^2 - \frac{N(p-2)}{2p}\|v_n\|_p^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(Nv_n^2+2v_n\nabla v_n.x)dx = \frac{d}{dh}F(h_n\star u_n) = D\tilde{F}(u_n,h_n)[(0,1)] \to 0,$$

quando $n \to \infty$, isto é, v_n satisfaz a Identidade de Pohozaev.

A fim de mostramos que (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, indicamos

$$a_n := \|\nabla v_n\|_2$$

$$b_n := \|v_n\|_p^p$$

$$c_n := \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2dx$$

$$d_n := \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n\nabla v_n.xdx$$

Então, podemos escrever

$$F(v_n) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n - \frac{1}{p}b_n,$$

de onde obtemos

$$a_n + c_n - \frac{2}{p}b_n = 2m_{V,\rho} + o(1), \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.28}$$

Reescrevendo (2.24), temos

$$a_n - \frac{N(p-2)}{2p}b_n + \frac{N}{2}c_n + d_n = o(1), \quad \text{quando } n \to \infty, \tag{2.29}$$

e, por (2.25)

$$a_n + c_n - b_n + \rho^2\lambda_n = o(1)\big(a_n^{\frac{1}{2}} + 1\big), \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.30}$$

A presença do termos $a_n^{\frac{1}{2}} + 1$ na expressão acima vem do fato de que, até então, não sabemos se a_n é limitada.

Subtraindo membro a mebro da igualdade obtida em (2.29), a igualdade obtida em (2.30), obtemos

$$b_n = \frac{2p}{N(p-2)-4}\Big(2m_{V,\rho} + \frac{(N-2)}{2}c_n + d_n\Big) + o_1$$

Substituindo em (2.29), segue que

$$a_n = \frac{N(p-2)}{N(p-2)-4}2m_{V,\rho} + \frac{N(4-p)}{N(p-2)-4}c_n + \frac{4}{N(p-2)-4}d_n + o(1) \tag{2.31}$$

Agora, observe que, pelas hipóteses (V_1), $\|V\|_\infty\rho^2 < 2m_\rho$. Portanto, por Hölder, obtemos

$$c_n \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2 dx \leq \|V\|_\infty\rho^2 < 2m_\rho.$$

Além disso, como $2 + \frac{4}{N} < p$, temos $2N - 4 > N(4-p)$, daí

$$N(4-p)c_n < (2N-4)c_n < 2(2N-4)m_\rho < 6Nm_\rho.$$

Também por Hölder,

$$d_n = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n\nabla v_n.xdx \leq \|W\|_\infty\|v_n\|_2\|\nabla v_n\|_2 = \|W\|_\infty\rho a_n^{1/2}$$

Assim, de (2.31)

$$(N(p-2)-4)a_n^{1/2} \leq 2\|W\|_\infty\rho + \sqrt{2N(2p-1)m_\rho(N(p-2)-4) + 4\|W\|_\infty^2\rho^2} + o(1).$$

Portanto, $(a_n)_n$ é limitada, isto é, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx < \infty$. Então,

$$\|v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|v_n\|_2^2 + \|\nabla v_n\|_2^2 < \infty$$

de onde concluímos que (v_n) é limitada.

Resta provar que a sequência de Multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_n := -\frac{DF(v_n)[v_n]}{\rho^2}$$

admite subsequência convergente e vale (2.26).

Como a_n é limitada, podemos perceber por (2.28) e (2.30), que também são limitadas as sequências $(b_n), (c_n), (d_n), (\lambda_n)$. Por Bolzano Weierstrass, passando a subsequência, temos

$$a_n \to a \geq 0;$$

$$b_n \to b \geq 0;$$

$$c_n \to c \geq 0;$$

$$d_n \to d;$$

$$\lambda_n \to \lambda.$$

Desse modo, passando a subsequência adequada e, fazendo $n \to \infty$ em (2.28), (2.29) e (2.30), obtemos

$$a + c - \frac{2}{p} b = 2m_{V,\rho}, \tag{2.32}$$

$$a - \frac{N(p-2)}{2p} b + \frac{N}{2} c + d = 0, \tag{2.33}$$

e

$$a + c - b + \rho^2 \lambda = 0, \tag{2.34}$$

o que implica em

$$
\begin{aligned}
\rho^2\lambda &= b-a-c \\
&= \frac{p-2}{p}b - 2m_{V,\rho} \\
&= \frac{p(2-N)+2N}{N(p-2)-4}2m_{V,\rho} + \frac{(N-2)(p-2)}{N(p-2)-4}c + \frac{2(p-2)}{N(p-2)-4}d \\
&> \frac{p(2-N)+2N}{N(p-2)-4}2m_{\rho} + \frac{(N-2)(p-2)}{N(p-2)-4}c + \frac{2(p-2)}{N(p-2)-4}d.
\end{aligned}
$$

Por (V_1),

$$
\|W\|_\infty \leq m_\rho^{\frac{1}{2}} \frac{2N-p(N-2)}{\rho}\Big(\frac{N(p-2)-4}{2(p-2)\big(N(2p-1)(p-2)+2(p(2-N)+2N)\big)}\Big)^{\frac{1}{2}},
$$

e, portanto,

$$
(p-2)\|W\|_\infty\rho\Big(\frac{2\|W\|_\infty\rho+\sqrt{4\|W\|_\infty^2\rho^2+2N(2p-1)m_\rho(N(p-2)-4)}}{N(p-2)-4}\Big)^{\frac{1}{2}} < (p(2-N)+2N)m_\rho.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
(p-2)|d| &\leq (p-2)\|W\|_\infty a^{1/2} \\
&\leq (p-2)\|W\|_\infty\rho\Big(\frac{2\|W\|_\infty\rho+\sqrt{4\|W\|_\infty^2\rho^2+2N(2p-1)m_\rho(N(p-2)-4)}}{N(p-2)-4}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (p(2-N)+2N)m_\rho.
\end{aligned}
$$

Se $N>2$,

$$
\begin{aligned}
\rho^2\lambda &> \frac{p(2-N)+2N}{N(p-2)-4}2m_\rho + \frac{(N-2)(p-2)}{N(p-2)-4}c + \frac{2(p-2)}{N(p-2)-4}d \\
&> \frac{1}{N(p-2)-4}\Big[(p(2-N)+2N)2m_\rho + (N-2)(p-2)c - 2m_\rho(2N-p(N-2))\Big] \\
&= \frac{(N-2)(p-2)}{N(p-2)-4}c \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Se $N=1$, então

$$
\begin{aligned}
\rho^2\lambda &= \frac{2+p}{p-6}2m_{V,\rho} - \frac{(p-2)}{p-6}c + \frac{2(p-2)}{p-6}d \\
&> \frac{2+p}{p-6}2m_\rho + \frac{(p-2)}{p-6}m_\rho - \frac{2m_\rho(p+2)}{p-6} \\
&= \frac{(p-2)}{p-6}m_\rho \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

e, por fim, se $N = 2$, então

$$\rho^2\lambda = \frac{8}{2p-8}2m_{V,\rho} + \frac{2(p-2)}{2p-8}d > 0$$

visto que $-2(p-2)d \leq (p-2)|d| \leq 8m_\rho \leq 8m_{V,\rho}$. De todos os casos segue que $\lambda > 0$.

De modo análogo, como

$$\begin{aligned}
&\lambda\rho^2 = \frac{2N-p(N-2)}{N(p-2)-4}2m_{V,\rho} + \frac{(p-2)(N-2)}{N(p-2)-4}c + \frac{2(p-2)}{N(p-2)-4}d \\
&(p-2)|d| \leq m_\rho(2N-p(N-2)) \\
&c \leq \|V\|_\infty\rho^2 < 2\theta m_\rho, \quad \text{com } \theta = min\Big(1,\frac{2}{N}\Big)
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda\rho^2 &\leq \frac{2N-p(N-2)}{N(p-2)-4}2\Big(m_\rho + \frac{\|V\|_\infty}{2}\rho^2\Big) + \frac{(p-2)(N-2)}{N(p-2)-4}\|V\|_\infty\rho^2 + \frac{(2N-p(N-2)}{N(p-2)-4}2m_\rho \\
&\leq \frac{2N-p(N-2)}{N(p-2)-4}2(m_\rho+\theta m_\rho) + \frac{(p-2)(N-2)}{N(p-2)-4}2\theta m_\rho + \frac{(2N-p(N-2)}{N(p-2)-4}2m_\rho \\
&= m_\rho\Big(2\Big(\frac{4N-2p(N-2)}{N(p-2)-4}\Big) + \frac{8\theta}{N(p-2)-4}\Big) \\
&= m_\rho\Big(2q + \frac{8\theta}{N(p-2)-4}\Big)
\end{aligned}$$

com q definido em (2.6). Logo,

$$0 < \lambda \leq \Big(2q + \frac{8}{N(p-2)-4}\min(1,\frac{2}{N})\Big)\frac{m_\rho}{\rho^2}.$$

□

2.5 Convergência da sequência de Palais Smale

Como (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, passando a subsequência, v_n converge fracamente para $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De $\|v_n^-\|_2 \to 0$, quando $n \to \infty$, temos $v \geq 0$, e pela convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$, temos que v é solução da equação

$$-\Delta u + V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

satisfazendo

$$\|v\|_2 \leq \lim inf\|v_n\|_2 = \rho$$

Para garantir que v é solução do problema (2.1), resta mostrar que $\|v\|_2 = \rho$. Pelo Teorema de Multiplicadores de Lagrange,

$$\|DF(v_n) - \lambda_n G'(v_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^N))^*} = o(1), \quad \text{onde } G(u) := \frac{1}{2}\Big(\rho^2 - \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\Big).$$

Assim,

$$DF(v_n)\varphi + \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n \varphi dx = o(1)\|\varphi\|, \quad \text{para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

de onde temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n \varphi dx \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p-2} v_n \varphi dx = o(1)\|\varphi\|,$$

isto é,

$$DI_\lambda(v_n) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Além disso,

$$I_\lambda(v_n) = F(v_n) + \frac{\lambda_n}{2}\rho^2 \longrightarrow m_{V,\rho} + \frac{\lambda}{2}\rho^2.$$

Portanto, (v_n) é sequência de Palais Smale de I_λ de nível $m_{V,\rho} + \frac{\lambda}{2}\rho^2$. Pelo Lema da Separação, existem $k \geq 0$ inteiro, k soluções não triviais $w^1, ..., w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para a equação limite

$$-\Delta w + \lambda w = |w|^{p-2} w$$

e k sequências $\{y_n^j\}_n \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq k$, com $|y_n^j| \longrightarrow \infty$, de modo que

$$v_n = v + \sum_{j=1}^{k} w^j(. - y_n^j) + o(1), \quad \text{fortemente em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$\|v_n\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \sum_{j=1}^{k} \|w^j\|_2^2 + o(1),$$

e

$$I_\lambda(v_n) \longrightarrow I_\lambda(v) + \sum_{j=1}^{k} I_{\infty,\lambda}(w^j)$$

Observe que, se $k = 0$, então $v_n \to v$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\rho = \|v_n\|_2 = \|v\|_2$. Portanto, v é solução do problema (2.1).

Suponhamos então, por contradição, que $k \geq 1$, ou equivalentemente, $\gamma := \|v\|_2 < \rho$. Primeiramente, observe que o caso $v \equiv 0$, pode ser excluído. De fato, se $v \equiv 0$ e $k = 1$ então

$$0 \leq v_n = w^1(. - y_n^1) + o(1)$$

e

$$\|v_n\|_2^2 = \|w^1\|_2^2 + o(1)$$

donde $w^1 > 0$ e $\|w^1\|_2 = \rho$. Além disso, teríamos

$$I_\lambda(v_n) \longrightarrow I_{\infty,\lambda}(w^1) = F_\infty(w^1) + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(w^1)^2dx = m_\rho + \frac{\lambda}{2}\rho^2$$

Mas, por outro lado,

$$I_\lambda(v_n) \longrightarrow m_{V,\rho} + \frac{\lambda}{2}\rho^2$$

Da unicidade do limite, teríamos $m_{V,\rho} = m_\rho$, um absurdo visto que $m_{V,\rho} > m_\rho$.

Agora, observe que como

$$I_\lambda(v_n) = I_\lambda(v) + \sum_{j=1}^{k} I_{\infty,\lambda}(w^j)$$

se $v \equiv 0$ e $k \geq 2$,

$$F(v_n) \to \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j).$$

Tomando $\alpha_j = \|w^j\|_2$, observamos que

$$F_\infty(w^j) \geq m_{\alpha_j} \geq m_\rho.$$

Logo,

$$m_{V,\rho} = \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) \geq \sum_{j=1}^{k} m_{\alpha_j} > km_\rho \geq 2m_\rho$$

contradizendo (2.22).

Sendo assim, podemos assumir $v \not\equiv 0$. Como $F(v_n) \to m_{V,\rho}$ e

$$I_\lambda(v_n) = I_\lambda(v) + \sum_{j=1}^{k} I_{\infty,\lambda}(w^j),$$

temos

$$F(v_n) + \frac{\lambda}{2}\|v_n\|_2^2 = F(v) + \frac{\lambda}{2}\|v\|_2^2 + \sum_{j=1}^{k}\left(F_\infty(w^j) + \frac{\lambda}{2}\|w^j\|_2^2\right)$$

o que equivale a

$$m_{V,\rho} + \frac{\lambda}{2}\rho^2 = F(v) + \frac{\lambda}{2}\|v\|_2^2 + \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) + \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j^2.$$

Mas, pelo Lema da Separação

$$\rho^2 = \gamma^2 + \sum_{j=1}^{k}\alpha_j^2.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} m_{V,\rho} &= F(v) + \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) \\ &> F(v) + \sum_{j=1}^{k} m_{\alpha_j} \\ &\geq F(v) + m_\alpha \\ &\geq F(v) + m_\rho \end{aligned}$$

onde $\alpha := \max_j \alpha_j$. Mais ainda,

$$I_\lambda(v) = \max_{t>0} I_\lambda(tv).$$

Agora, seja β tal que $\lambda_\beta = \lambda$ e Z_β solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta Z_\beta & +\lambda_\beta Z_\beta = |Z_\beta|^{p-2} Z_\beta, \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\ & Z_\beta > 0, \\ & \|Z_\beta\|_2 = \beta \end{cases} \tag{2.35}$$

isto é, Z_β satisfaz a equação limite com multiplicador λ e $\beta \leq \alpha$. Escreva $\theta = min\Big(1, \dfrac{2}{N}\Big)$ então, por (V_1), $\|V\|_\infty \dfrac{\rho^2}{2} < \theta m_\rho$ e

$$\begin{aligned} (1+\theta) m_\rho &= m_\rho + \theta m_\rho \\ &\geq m_\rho + \|V\|_\infty \frac{\rho^2}{2} \\ &\geq m_{V,\rho} \\ &\geq m_\alpha + F(v) \\ &= m_\alpha + I_\lambda(v) - \frac{\lambda}{2}\gamma^2 \\ &= m_\alpha + \max_{t>0} I_\lambda(tv) - \frac{\lambda}{2}\gamma^2 \\ &\geq m_\alpha + \max_{t>0} I_{\infty,\lambda(tv)} - \frac{\lambda}{2}(\rho^2 - \alpha^2) \\ &\geq m_\alpha + I_{\infty,\lambda(Z_\beta)} - \frac{\lambda}{2}(\rho^2 - \alpha^2) \\ &\geq m_\alpha + m_\beta + \frac{\lambda}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2). \end{aligned}$$

Como $m_\beta \geq m_\alpha > m_\rho$ e $\theta \leq 1$, temos

$$(1+\theta) m_\rho > 2m_\rho + \frac{\lambda}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2)$$

e, portanto,

$$0 > \frac{\lambda}{2}(\alpha^2+\beta^2-\rho^2).$$

Logo,

$$\alpha^2+\beta^2-\rho^2 < 0. \tag{2.36}$$

Além disso, pela Proposição 2.19 e por (2.7) temos

$$\begin{aligned}(1+\theta)m_\rho &\geq m_\alpha + m_\beta + \frac{\lambda}{2}(\alpha^2+\beta^2-\rho^2)\\ &\geq m_\rho\Big(\frac{\rho}{\alpha}\Big)^q + m_\rho\Big(\frac{\rho}{\beta}\Big)^q - \frac{\rho^2-\alpha^2-\beta^2}{\rho^2}\Big(q+\frac{4\theta}{N(p-2)-4}\Big)m_\rho\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$1+q+\frac{\theta N(p-2)}{N(p-2)-4} > \frac{\rho^q}{\alpha^q}+\frac{\rho^q}{\beta^q}+\Big(\frac{\alpha^2}{\rho^2}+\frac{\beta^2}{\rho^2}\Big)\Big(q+\frac{4\theta}{N(p-2)-4}\Big).$$

Agora, vamos considerar a seguinte afirmação: **Afirmação:** Para todo $A > q$

$$\min\Big\{x^{-q/2}+y^{-q/2}+A(x+y)\ ;\ x,y>0 \text{ e } x+y\leq 1\Big\} \geq \frac{3}{2}q+2$$

Observação: Garantida a validade da afirmação, concluímos o resultado, pois basta tomar

$$A = q+\frac{4\theta}{N(p-2)-4} \qquad x=\frac{\alpha^2}{\rho^2} \qquad y=\frac{\beta^2}{\rho^2};$$

Por (2.36), $x+y\leq 1$, e temos $x,y>0$, com

$$x^{-q/2}=\frac{\rho^q}{\alpha^q} \qquad \text{e} \qquad y^{-q/2}=\frac{\rho^q}{\beta^q}$$

e, assim

$$x^{-q/2}+y^{-q/2}+A(x+y)=\frac{\rho^q}{\alpha^q}+\frac{\rho^q}{\beta^q}+\Big(\frac{\alpha^2}{\rho^2}+\frac{\beta^2}{\rho^2}\Big)\Big(q+\frac{4\theta}{N(p-2)-4}\Big) < 1+q+\frac{\theta N(p-2)}{N(p-2)-4}$$

o que implica

$$\min\{x^{-q/2}+y^{-q/2}+A(x+y)\} < 1+q+\frac{\theta N(p-2)}{N(p-2)-4}$$

e, pela afirmação, teríamos

$$\frac{3}{2}q+2 < 1+q+\frac{\theta N(p-2)}{N(p-2)-4} \quad\Rightarrow\quad \theta > \frac{2}{N},$$

um absurdo. $\diamondsuit$

Provemos então a afirmação. Para isso, considere a função $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) := 2x^{-q/2} + 2Ax$. Observe que

$$g'(x) = -qx^{\frac{-q-2}{2}} + 2A$$

e, portanto,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \Big(\frac{q}{2A}\Big)^{\frac{2}{q+2}}.$$

Além disso,

$$g''(x) = \Big(\frac{q^2+2q}{2}\Big)x^{-q/2-2} \geq 0$$

isto é, g é côncava para cima em todo seu domínio. Logo, g atinge mínimo em $\bar{x} = \Big(\frac{q}{2A}\Big)^{\frac{2}{q+2}}$, e é estritamente decrescente em $(0,\bar{x})$ e estritamente crescente em $(\bar{x},\infty)$. Então,

$$\min_{(0,1/2]} g = \begin{cases} g(\bar{x}), & \text{se } \bar{x} \leq 1/2 \\ g(1/2), & \text{se } \bar{x} \geq 1/2. \end{cases} \tag{2.37}$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} M &= \min\{x^{-q/2} + y^{-q/2} + A(x+y) \ ; \ x,y > 0 \text{ e } x+y \leq 1\} \\ &= \min\{(x^{-q/2} + Ax) + (y^{-q/2} + Ay) \ ; \ x,y > 0 \text{ e } x+y \leq 1\} \\ &= \min\Big\{\frac{g(x)+g(y)}{2} \ ; \ x,y > 0 \text{ e } x+y \leq 1\Big\} \\ &= \min_{(0,1/2]} g. \end{aligned}$$

No caso $\bar{x} \leq 1/2$, temos

$$\begin{aligned} \min_{(0,1/2]} g = g(\bar{x}) &= 2\Big[\Big(\frac{q}{2A}\Big)^{\frac{2}{q+2}}\Big]^{-q/2} + 2A\Big(\frac{q}{2A}\Big)^{\frac{2}{q+2}} \\ &= (2+q)\Big(\frac{2A}{q}\Big)^{\frac{q}{q+2}} \\ &\geq (2+q)2^{\frac{q}{2+q}} \\ &\geq (2+q)ln2^{\frac{q}{2+q}+1} \\ &= qln2 + 2 + q \\ &> q\frac{1}{2} + 2 + q \\ &= \frac{3}{2}q + 2. \end{aligned}$$

No caso em que $\bar{x} \geq 1/2$, temos

$$\begin{aligned}
\min_{(0,1/2]} g = g(1/2) &= 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{-q/2} + 2A\Big(\frac{1}{2}\Big) \\
&= 2.2^{q/2} + A \\
&> 2.2^{q/2} + q \\
&\geq q ln 2 + 2 + q \\
&> \frac{3}{2}q + 2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$M = \min_{(0,1/2]} g \geq \frac{3}{2}q + 2,$$

provando a afirmação e concluindo o resultado. □

2.6 Prova do Teorema no caso (V_2)

A estratégia para provar o Teorema 2.5 assumindo que valem as hipóteses (V_2) será similar a utilizada quando consideramos as hipóteses (V_1). Primeiramente, garantiremos que F possui uma Geometria do Linking e, a partir daí, garantiremos existência de sequência limitada de Palais Smale. Os resultados comuns e detalhes análogos serão omitidos. Em particular, observe que os resultados obtidos até, e incluindo, a proposição (2.12), continuam válidos para o caso (V_2), com prova exatamente igual. Entretanto, precisaremos adaptar a prova da Proposição (2.13), esta que é fundamental para garantir a Geometria do Linking. O próximo Lema fornecerá uma limitação superior para $m_{V,\rho}$.

Lema 2.20. *Se*

$$\|V\|_{\frac{N}{2}} < \frac{2N(p-2)}{N(p-2)-4}\left(\Big(1+\frac{2}{N}\Big)^{\frac{N(p-2)-4}{N(p-2)}} - 1\right)\frac{m_{\rho_0}}{\|Z_{\rho_0}\|_{2*}^2}$$

então $m_{V,\rho} < \big(1+\frac{2}{N}\big)m_\rho$.

Demonstração. Primeiramente, observe que para todo $(y,h) \in Q$, tomando $\gamma(y,h) := h \star Z_\rho(.-y)$, temos

$$
\begin{aligned}
m_{V,\rho} &\leq \max_{(y,h)\in Q} F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big)\\
&\leq \max_{y\in\mathbb{R}^N,h\in\mathbb{R}} F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big)\\
&= \max_{y\in\mathbb{R}^N,h\in\mathbb{R}} \Big(F_\infty(h\star Z_\rho)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(h\star Z_\rho(x-y))^2dx\Big)\\
&= \max_{y\in\mathbb{R}^N,h\in\mathbb{R}} \Big(F_\infty(h\star Z_\rho)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x+y)(h\star Z_\rho)^2dx\Big)\\
&\leq \max_{h\in\mathbb{R}} \Big(F_\infty(h\star Z_\rho)+\frac{1}{2}\|V\|_{\frac{N}{2}}\|h\star Z_\rho\|_{2^*}^2\Big)\\
&= \max_{h\in\mathbb{R}} \Big(\frac{e^{2h}}{2}\big(\|\nabla Z_\rho\|_2^2+\|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2\big)-\frac{e^{\frac{Nh(p-2)}{2}}}{p}\|Z_\rho\|_p^p\Big).
\end{aligned}
$$

Considere

$$
m(h) := \frac{e^{2h}}{2}\big(\|\nabla Z_\rho\|_2^2+\|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2\big)-\frac{e^{\frac{Nh(p-2)}{2}}}{p}\|Z_\rho\|_p^p
$$

e seja $h_0\in\mathbb{R}$ tal que $\max_{h\in\mathbb{R}} m(h)=m(h_0)$. Então, h_0 satisfaz $m'(h_0)=0$, de onde obtemos

$$
e^{\frac{N(p-2)}{2}h_0} = \Big[\frac{2p}{N(p-2)\|Z_\rho\|_p^p}\Big(\|\nabla Z_\rho\|_2^2+\|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2\Big)\Big]^{\frac{N(p-2)}{N(p-2)-4}}.
$$

E, observe que de

$$
m_\rho = \frac{N(p-2)-4}{4p}\|Z_\rho\|_p^p,
$$

temos

$$
e^{\frac{N(p-2)}{2}h_0} = \Big[\frac{\|\nabla Z_\rho\|_2^2+\|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2}{m_\rho}.\frac{N(p-2)-4}{2N(p-2)}\Big]^{\frac{N(p-2)}{N(p-2)-4}} \tag{2.38}
$$

e, vale também

$$
\begin{aligned}
m_{V,\rho} &\leq \max_{h\in\mathbb{R}} m(h)\\
&= \frac{e^{2h_0}}{2}\big(\|\nabla Z_\rho\|_2^2+\|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2\big)-\frac{e^{\frac{Nh_0(p-2)}{2}}}{p}\|Z_\rho\|_p^p\\
&= \frac{N(p-2)}{4p}e^{\frac{N(p-2)h_0}{2}}\|Z_\rho\|_p^p-\frac{e^{\frac{Nh_0(p-2)}{2}}}{p}\|Z_\rho\|_p^p\\
&= \Big(\frac{N(p-2)-4}{4p}\Big)e^{\frac{N(p-2)h_0}{2}}\|Z_\rho\|_p^p\\
&= m_\rho e^{\frac{N(p-2)h_0}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, escrevendo $\theta=\frac{N}{2}$, temos $m_{V,\rho}\leq m_\rho e^{\theta(p-2)h_0}$ e, então, se $e^{\theta(p-2)h_0}<1+\theta$, temos

$$
m_{V,\rho} \leq (1+\theta)m_\rho,
$$

como desejado. Agora, observe que, por (2.38), mostrar $e^{\theta(p-2)h_0} < 1+\theta$ é equivalente a mostrar

$$e^{\frac{N(p-2)}{2}h_0} = \Big[\frac{\|\nabla Z_\rho\|_2^2 + \|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2}{m_\rho}.\frac{N(p-2)-4}{2N(p-2)}\Big]^{\frac{N(p-2)}{N(p-2)-4}} < 1+\theta.$$

Para concluir, observamos primeiramente que

$$\frac{m_\rho}{\|Z_\rho\|_{2^*}^2} = \frac{m_{\rho_0}}{\|Z_{\rho_0}\|_{2^*}^2}.$$

Sendo assim, por hipótese temos

$$\|V\|_{\frac{N}{2}} < \frac{2N(p-2)}{N(p-2)-4}\Big(\big(1+\frac{2}{N}\big)^{\frac{N(p-2)-4}{N(p-2)}} - 1\Big)\frac{m_\rho}{\|Z_\rho\|_{2*}^2}.$$

Além disso, como

$$\|Z_\rho\|_2^2 = \frac{2N(p-2)}{N(p-2)-4}m_\rho$$

segue

$$\begin{aligned}
& \|V\|_{\frac{N}{2}} < \Big((1+\theta)^{\frac{N(p-2)-4}{N(p-2)}} - 1\Big)\frac{\|\nabla Z_\rho\|_2^2}{\|Z_\rho\|_{2*}^2} \\
\Rightarrow \quad & \|\nabla Z_\rho\|_2^2 + \|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2*}^2 < \|\nabla Z_\rho\|_2^2(1+\theta)^{\frac{N(p-2)-4}{N(p-2)}} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\|\nabla Z_\rho\|_2^2 + \|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2}{m_\rho}.\frac{N(p-2)-4}{2N(p-2)} < (1+\theta)^{\frac{N(p-2)-4}{N(p-2)}}
\end{aligned}$$

e, então

$$\Big[\frac{\|\nabla Z_\rho\|_2^2 + \|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2}{m_\rho}.\frac{N(p-2)-4}{2N(p-2)}\Big]^{\frac{N(p-2)}{N(p-2)-4}} < 1+\theta,$$

como desejado. □

Agora vamos adaptar a prova da Proposição 2.13 para o caso (V_2).

Demonstração. Já que, para todo $(y,h) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned}
F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big) &= F_\infty(h\star Z_\rho) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(h\star Z_\rho(x-y))^2dx \\
&= \frac{e^{2h}}{2}\big(\|\nabla Z_\rho\|_2^2 - \frac{e^{\frac{Nh(p-2)}{2}}}{p}\|Z_\rho\|_p^p + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(h\star Z_\rho(x-y))^2dx
\end{aligned}$$

e, levando em conta que

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(h\star Z_\rho(x-y))^2dx \le \|V\|_{\frac{N}{2}}\|h\star Z_\rho\|_{2^*}^2 = e^{2h}\|V\|_{\frac{N}{2}}\|Z_\rho\|_{2^*}^2$$

é possível concluir que

$$\lim_{h\to-\infty} F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big)=0$$

e

$$\lim_{h\to\infty} F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big)=-\infty,\ \text{ uniformemente em } y\in\mathbb{R}^N.$$

Portanto, podemos tomar $h_1<0<h_2$ tais que

$$\sup_{(y,h)\in\mathbb{R}^N\times\{h_1,h_2\}} F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big)\le\frac{m_\rho}{2}. \tag{2.39}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
&\max_{h\in[h_1,h_2]}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)(h\star Z_\rho(x-y))^2dx\\
&=\max_{h\in[h_1,h_2]}\Big(\int_{B_{\frac{|y|}{2}}(0)}V(x)(h\star Z_\rho(x-y))^2dx+\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{|y|}{2}}(0)}V(x)(h\star Z_\rho(x-y))^2dx\Big)\\
&\le\|V\|_{\frac{N}{2}}\max_{h\in[h_1,h_2]}\|h\star Z_\rho\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{|y|}{2}}(0))}+\|V\|_{L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^n\backslash B_{\frac{|y|}{2}}(0)}\max_{h\in[h_1,h_2]}\|h\star Z_\rho\|_{2^*}^2
\end{aligned}$$

Por isso,

$$\lim_{|y|\to\infty} sup\max_{h\in[h_1,h_2]}F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big)=\lim_{|y|\to\infty} sup\max_{h\in[h_1,h_2]}F_\infty(h\star Z_\rho)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)(h\star Z_\rho(x-y))^2dx\le\frac{m_\rho}{2}$$

o que fornece, junto a $F_\infty(h\star Z_\rho)>m_\rho$, que

$$\lim_{|y|\to\infty}\max_{h\in[h_1,h_2]}F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big)=m_\rho, \tag{2.40}$$

para todo $y\in\mathbb{R}^N$. Assim, de (2.39) e (2.40), segue

$$\max_{(y,h)\in\partial Q}F\big(h\star Z_\rho(.-y)\big)<m_\rho+\varepsilon,$$

com $Q=B_R\times[h_1,h_2]$, para $R>0$ suficientemente grande e h_1,h_2 adequados, provando a proposição.

$\square$

Prova da Proposição 2.19 para o caso V_2. A existência da sequência de Palais Smale v_n segue exatamente como na prova em (2.19). Resta apenas provar que esta é limitada e vale a estimativa (2.26) para λ. Tomando

$$a_n:=\|\nabla v_n\|_2\quad b_n:=\|v\|_p^p,\quad c_n:=\int_{\mathbb{R}^N}V(x)v_n^2dx\quad d_n:=\int_{\mathbb{R}^N}V(x)v_n\nabla v_n.xdx$$

observamos que pelo Lema 1.11, temos

$$c_n = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2 dx \leq S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} a_n$$

e

$$|d_n| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n \nabla v_n . x dx \right| \leq S^{-1/2} \|W\|_N a_n.$$

Assim, usando que

$$a_n = \frac{N(p-2)}{N(p-2)-4} 2m_{V,\rho} + \frac{N(4-p)}{N(p-2)-4} c_n + \frac{4}{N(p-2)-4} d_n + o(1)$$

(obtido em (2.31)), temos

$$a_n \leq \frac{N(p-2)}{N(p-2)-4} 2m_{V,\rho} + \frac{N(4-p)}{N(p-2)-4} S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} + \frac{4}{N(p-2)-4} S^{-1/2} \|W\|_N a_n + o(1)$$

e, portanto,

$$a_n \big(N(p-2) - 4 - N(4-p) S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{-1/2} \|W\|_N \big) < N(p-2) 2m_{V,\rho} + o(1)$$

de onde concluímos que

$$a_n \big(N(p-2) - 4 - 2NS^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{-1/2} \|W\|_N \big) < 4N(p-2) m_\rho + o(1).$$

Como, por (V_2),

$$2Ns^{-1} \left[1 + \frac{N(p-2)}{2} \right] \|V\|_{\frac{N}{2}} + 4S^{-1/2} \left[1 + \frac{N(p-2^2)}{2N - p(N-2)} \right] \|W\|_N \leq N(p-2) - 4,$$

segue que $N(p-2) - 4 - 2NS^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{-1/2} \|W\|_N > 0$ e, portanto, a_n é limitada.

A fim de provar que λ_n admite subsequência que converge a $\lambda > 0$ argumentamos como na prova da Proposição 2.19 e vemos que, passando a subsequência, $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\lambda \rho^2 > \frac{2N - p(N-2)}{N(p-2)-4} 2m_\rho + \frac{(p-2)(N-2)}{N(p-2)-4} c + \frac{2(p-2)}{N(p-2)-4} d$$

e $\lambda > 0$ provém de

$$(p-2)|d| \leq m_\rho (2N - p(N-2))$$

visto que, por (V_2)

$$\begin{aligned}
(p-2)|d| &\leq (p-2) \|W\|_N S^{-1/2} a \\
&\leq \frac{\|W\|_N 4S^{-1/2} (p-2)^2 m_\rho}{N(p-2) - 4 - 2NS^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{-1/2} \|W\|_N} \\
&\leq m_\rho (2N - p(N-2)).
\end{aligned}$$

Além disso

$$c \leq S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} a \leq \|V\|_{\frac{N}{2}} \frac{4N(p-2)m_\rho S^{-1}}{N(p-2)-4-2NS^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{-1/2}\|W\|_N} \leq \frac{4}{N} m_\rho$$

Então, o Lema 2.20 e a estimativa anterior para λ fornecem (2.26) e a proposição segue. □

A conclusão da prova do Teorema 2.2 sob as hipóteses (V_2) é exatamente a mesma que fizemos sob as hipóteses (V_1) e, portanto, segue o resultado.

2.7 O caso radial

Sendo V um potencial radial satisfazendo as hipóteses $(V_1)_{rad}$ ou $(V_2)_{rad}$, podemos aplicar um argumento do Passo da Montanha. Para isso, considere

$$S_\rho^r := S_\rho \cap H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\Sigma_\rho^r := \left\{ \sigma \in \mathscr{C}\big([0,1]; S_\rho^r\big);\ \sigma(0) = h_1 \star Z_\rho \text{ e } \sigma(1) = h_2 \star Z_\rho \right\}$$

com $h_1 < 0 < h_2$ tais que

$$\max\left\{F(h_1 \star Z_\rho), F(h_2 \star Z_\rho)\right\} < m_\rho.$$

Observe que tal escolha é possível pois, como observado na demonstração da Proposição 2.13,

$$F(h \star Z_\rho) \to \begin{cases} 0, \text{ quando } h \to -\infty \\ -\infty, \text{ quando } h \to \infty. \end{cases}$$

Procuramos, como usual, por ponto crítico de F de nível

$$m_{V,\rho}^r := \inf_{\sigma \in \Sigma_\rho^r} \max_{t \in [0,1]} F(\sigma(t)).$$

Lema 2.21. *Sobre as hipóteses do Teorema 2.5, temos $m_{V,\rho}^r > m_\rho$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que

$$m_\rho \leq m_\rho^r := \inf_{\sigma \in \Sigma_\rho^r} \max_{t \in [0,1]} F_\infty(\sigma(t)).$$

Agora, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, considerando $u^\star$ simetrização de Schwarz de u, observamos que $F_\infty(u^\star) \leq F(u)$ e, portanto, $m_\rho \geq m_\rho^r$. Logo, $m_\rho = m_\rho^r$ e, portanto, é suficiente provar que

$$m_{V,\rho}^r > m_\rho^r.$$

Claramente $m^r_{V,\rho} \geq m^r_\rho$, pois $V \geq 0$ e $F(u) = F_\infty(u) + \frac{1}{2}\int Vu^2dx$. Suponha, por contradição, que $m^r_{V,\rho} = m^r_\rho$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\sigma_n \in \Sigma^r_\rho$ tal que

$$0 \leq \max_{t\in[0,1]} F(\sigma_n(t)) - m^r_\rho \leq \frac{1}{n}. \tag{2.41}$$

Como consequência, argumentando como na prova do Lema (2.11), obtemos uma sequência Palais Smale $v_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de F_∞ tal que $v_n \to \pm Z_\rho$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$dist\big(v_n, \sigma_n([0,1])\big) = \|v_n - \sigma_n(\overline{t_n})\| \to 0,$$

para algum $\overline{t_n} \in [0,1]$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\max_{t\in[0,1]} F(\sigma_n(t)) \geq F(\sigma_n(\overline{t_n})) = F(v_n) + o(1) & \\
&= F_\infty(v_n) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2dx + o(1)\\
&\to m_\rho + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)Z_\rho^2dx\\
&= m^r_\rho + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)Z_\rho^2dx
\end{aligned}$$

o que é uma contradição a (2.41). □

Note que a maior parte da prova da Proposição 2.19 vale se V satisfaz $(V_1)_{rad}$ ou $(V_2)_{rad}$. Na verdade, a hipótese

$$\|V\|_{\frac{N}{2}} < \frac{2N(p-2)}{N(p-2)-4}\left(\left(1+\frac{2}{N}\right)^{\frac{N(p-2)-4}{N(p-2)}} - 1\right)\frac{m_{\rho_0}}{\|Z_{\rho_0}\|^2_{2*}}$$

foi usada somente para provar o limitante superior para λ, que são cruciais para garantirmos que $\|v\|_2 = \rho$, mas que não serão necessárias aqui. Em particular, para obtermos uma limitação de $a_n := \|\nabla v_n\|_2^2$ procedemos como na prova da Proposição 2.19 se V satisfaz $(V_1)_{rad}$ ou procedemos como em "Prova para o caso (V_2)"se V satisfaz $(V_2)_{rad}$.

Argumentando como na prova da Proposição 2.19, provamos a existência de sequência limitada $v_n \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, de modo que

$$F(v_n) \to m^r_{V,\rho} \qquad \text{e} \qquad \nabla_{S^r_\rho} F(v_n) \to 0.$$

Mais ainda, a sequência de Multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_n := -\frac{DF(v_n)[v_n]}{\rho^2}$$

admite subsequência convergente para $\lambda > 0$. Como consequência, existe uma subsequência de v_n convergindo fracamente em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ para $v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ solução fraca de

$$-\Delta v + V(x)v + \lambda v = |v|^{p-2}v \quad \text{em } H^1_{rad}(\mathbb{R}^N),$$

com $\|v\|_2 \leq \rho$.

A compacidade da imersão de Sobolev $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, para $p \in (2, 2^*)$ implica que $v_n \to v$ fortemente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $p \in (2, 2^*)$. Como consequência, usando que $\lambda > 0$ obtemos

$$v_n := \Big(-\Delta + \lambda + V \Big)^{-1} \big(|v_n|^{p-2} v_n + (\lambda - \lambda_n) v_n \big) \to v$$

fortemente em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e, então $\|v\|_2 = \rho$. $\square$

CAPÍTULO 3

Soluções normalizadas para equação de Schrodinger de massa supercrítica com potencial negativo

Agora, buscamos solução $(u,\lambda) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^+$, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u & -V(x)u + \lambda u = |u|^{p-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ & u \geq 0, \\ & \|u\|_2 = \rho \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $N \geq 1$, $\rho > 0$ e $V \not\equiv 0$ é um potencial fixado satisfazendo $V \geq 0$. Novamente estaremos tratando do caso de massa supercrítica e caso Sobolev subcrítico:

$$2 + \frac{4}{N} < p < 2^* \equiv \frac{2N}{(N-2)^+}.$$

Análogo ao caso estudado no Capítulo 3, quando $V \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para algum $r \in [max(1,N/2),\infty)$, soluções podem ser encontradas como ponto crítico do funcional energia

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - V(x)u^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx$$

restrito à S_ρ e λ vem como um multiplicador de Lagrange.

Sobre hipóteses adequadas, obteremos duas famílias de solução. Primeiramente, mostraremos que a solução do Passo da Montanha de [13] existe também nesta situação e que tal estrutura do passo da Montanha também fornece um minimizante local. Mais precisamente, provaremos inicialmente que, sobre hipóteses de limitação explícitas sobre V e sem qualquer condições sobre a massa, existe uma solução do Passo da Montanha de nível de energia positiva e, sobre as mesmas hipóteses, excluímos a existência de soluções com energia negativa. Segundo, pedindo que a massa seja menor que um limitante explícito, dependendo de V e que V não seja muito pequeno num sentido adequado, encontraremos duas soluções: um minimizante local com energia negativa e uma solução do Passo da Montanha com energia positiva. Este segundo resultado continua verdadeiro em dimensão $N = 1$. Mais ainda, um resultado de não existência será provado. Os dois resultados estão enunciados nos dois teoremas seguintes e nosso principal objetivo será prová-los:

Teorema 3.1. *Seja $N \geq 3$, $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$ e $V \geq 0$, com $V \not\equiv 0$. Existe uma constante positiva explícita $L = L(N, p)$, tal que se*

$$max\left\{\|V\|_{\frac{N}{2}}, \|W\|_N\right\} < L \tag{3.2}$$

então o problema (3.1) possui uma solução do passo da Montanha para todo $\rho > 0$, em um nível de energia positivo, enquanto solução com energia negativa não existe.

Teorema 3.2. *Sejam $N \geq 1$, $2 + \frac{4}{N} < p < 2^*$, $V \geq 0$, com $V \not\equiv 0$, e $r \in [max(1, N/2), \infty)$, $s \in [max(2, N), \infty)$.*

1. *Existem constantes positivas $\sigma = \sigma(N, p, r)$ e $K = K(N, p, r)$ tais que, se*

$$r \leq +\infty \quad e \lim_{|x| \to \infty} V(x) = 0; \tag{3.3}$$

$$\|V\|_r \rho^{\sigma} < K \tag{3.4}$$

$$existe \ \ \varphi \in S_\rho; \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 - V(x)\varphi^2 dx \leq 0, \tag{3.5}$$

então, o problema (3.1) possui uma solução, que corresponde a um minimizante local de F em S_ρ com energia negativa.

2. *Existem constantes positivas $\sigma_i = \sigma_i(N, p, r)$ e $\overline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_i(N, p, s)$ e $\tilde{L} = \tilde{L}(N, p, r, s)$ tais que, se*

$$\max\left\{\|V\|_r \rho^{\sigma_i}, \|W\|_s \rho^{\overline{\sigma_i}}\right\} < \tilde{L}, \quad i = 1, 2 \tag{3.6}$$

então, o problema (3.1) possui uma solução do Passo da Montanha com energia positiva.

De modo a estudar o comportamento de sequências de Palais Smale, vamos adequar o Lema da Separação estudado no capítulo anterior. Para $\lambda > 0$, sejam

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx$$

e

$$I_{\infty,\lambda}(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx.$$

Vamos assumir que

1. $N \geq 3$: $V \in L^{N/2}\big(B_1(0)\big)$ e $V \in L^{\tilde{r}}\big(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)\big)$, para $\tilde{r} \in [N/2, +\infty]$;
2. $N = 1,2$: $V \in L^{r}\big(B_1(0)\big)$ e $V \in L^{\tilde{r}}\big(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)\big)$, para $r, \tilde{r} \in [1, +\infty]$;
3. No caso $\tilde{r} = +\infty$, V deve satisfazer $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = 0$;

Então, o Lema da Separação vale, com as devidas adequações.

Observação 3.3. Observe que as hipóteses sobre V no Lema da Separação seguem aquelas em nossos principais resultados. Destacamos apenas que, no caso $r = \infty$, no caso (2) do Teorema 3.2, de $\|W\|_s < \infty$, temos

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$$

se $s = \infty$ e,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |V(x)|^s dx \leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |V(x)|x||^s dx \leq \|W\|_s^s < \infty,$$

donde temos $V \in L^s(\mathbb{R}^N \setminus B_1(0))$, se $s \in (max(2,N), \infty)$.

As seguintes proposições nos fornecem resultados de não existência.

Proposição 3.4. *Sejam $p \in (2, 2^*)$ e $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e assuma que exista $\dfrac{\partial V}{\partial v} \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para algum $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $s \in [max(1, \frac{N}{2}), \infty]$. Se $\dfrac{\partial V}{\partial v} \geq 0$ e $\dfrac{\partial V}{\partial v} \not\equiv 0$. Então, o problema (3.1) não possui solução em $C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,2}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Assuma, por contradição, que o problema possua solução $(u, \lambda) \in S_\rho \times \mathbb{R}$, com $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,2}(\mathbb{R}^N)$. Então, $u \not\equiv 0$ e é ponto crítico do funcional I_λ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$I'_\lambda(u)[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \varphi dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $I'_\lambda(u)[\nabla u.v] = 0$. Agora, observe que

$$\frac{d}{dt} I_\lambda\big(u(x+tv)\big)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial v} u^2 dx.$$

De fato,

$$I_\lambda\big(u(x+tv)\big) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\big(u(x+tv)\big)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\big(u(x+tv)\big)^2 dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \big(u(x+tv)\big)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u(x+tv)|^p dx$$

e, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_\lambda\big(u(x+tv)\big)\Big|_{t=0} &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(\nabla u.v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \nabla u.v dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial v} u^2 dx \\
&+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u \nabla u.v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \nabla u.v dx \\
&= I'_\lambda(u)[\nabla u.v] - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial v} u^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial v} u^2 dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como a curva $t \mapsto u(.tv)$ é curva suave em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$0 = I'_\lambda(u)[\nabla u \cdot v] = d(I_\lambda \circ u)(v) = (I_\lambda \circ u \circ \alpha)'(0)$$

onde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, é uma curva suave com $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v$. Em particular, para $\alpha(t) = x + tv$, segue

$$\frac{d}{dt} I_\lambda\big(u(x+tv)\big)\Big|_{t=0} = 0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial v} u^2 = 0.$$

Como, por hipótese, $\dfrac{\partial V}{\partial v} \geq 0$ e $\dfrac{\partial V}{\partial v} \not\equiv 0$, uma contradição surge uma vez que provemos que a medida do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; u(x) = 0\}$ é nula, pois, neste caso, teríamos $u(x) \neq 0, q.t.p$, e então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial v} u^2 dx \neq 0.$$

Sendo assim, considere $c(x) := \lambda - V(x) - |u|^{p-2} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Como u é solução do problema, u é solução não trivial da equação

$$-\Delta u + c(x) u = 0, \quad u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,2}(\mathbb{R}^N).$$

A prova da afirmação segue direto do Teorema 1.7 de [11]. $\square$

Proposição 3.5. *Seja $p \in (2, 2*)$, $V \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para algum $r \in [max(1, \frac{N}{2}), \infty]$. Se $u \in S_\rho \cap W^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico de F restrito à S_ρ, então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \frac{\partial u}{\partial v} dx = 0$$

para toda direção $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Demonstração. Se u é ponto crítico de F restrito à S_ρ, então existe $\lambda > 0$ tal que, para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$F'(u)[\varphi] - \lambda G'(u)[\varphi] = 0, \qquad \text{com } G(u) = \frac{1}{2}\Big(\rho^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx\Big).$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx = -\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u \varphi dx,$$

e, portanto, $I'(u)[\varphi] = 0$, para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $I'_\lambda(u)[\nabla u.v] = 0$, para toda direção $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Logo, para todo $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial v} u^2 dx = 0.$$

Entretanto, note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \frac{\partial u}{\partial v} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial v} u^2 dx$$

e, portanto, o resultado segue. □

3.1 Prova do Teorema 3.1

Vamos assumir que $L > 0$ de modo que (3.2) implique nos explícitos limitantes sobre V e W, para algum $\delta \in (0, 1)$ fixado:

$$\|V\|_{\frac{N}{2}} < (1 - \delta) S$$

$$N|4 - p| S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} + 4 S^{-1/2} \|W\|_N < B \tag{3.7}$$

$$AMN|4 - p| + (N - 2) D] S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} + [4AM + 2D] S^{-1/2} \|W\|_N < ABM \tag{3.8}$$

onde

$$A = 2N - (N-2)p$$

$$B = N(p-2) - 4$$

$$D = N(p-2)^2$$

$$M = \left[\frac{\delta}{\gamma}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \left[\frac{\gamma}{2} - 1\right] \left(\frac{p}{G^p}\right)^{\frac{2}{\gamma-2}} \frac{1}{m_{\rho_0}\rho_0^s}$$

com $s = 2\frac{2N-(N-2)p}{N(p-2)-4} = \frac{2A}{B}$. Mais ainda,

$$3(p-4)^+ S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} + 4S^{-1/2}\|W\|_N \leq N(p-2) - 4. \tag{3.9}$$

Provaremos que F possui uma Geometria do Passo da Montanha, que garantirá a existência de uma sequência de Palais Smale de F. Então, a fim de recuperar a compacidade para esta sequência, usaremos o Lema da Separação. Para aplicá-lo, precisamos provar que o limite da sequência de multiplicadores de Lagrange relacionado a sequência Palais Smale é positivo. Desde modo, a prova do Teorema se estrututrará da seguinte forma:

1°) Garantimos a Geometria do Passo da Montanha de F;

2°) Mostramos que F possui uma sequência limitada de Palais Smale restrito à S_ρ;

3°) Provamos que a sequência de multiplicadores de Lagrange relacionada é positivo;

4°) Provamos que a energia é positiva;

5°) Garantimos que a solução está na esfera S_ρ, o que termina a demonstração do teorema.

Para começar, focamos na estrutura geométrica de F, observando primeiro a seguinte propriedade do reescalonamento:

Definição 3.6. Para todo $u \in S_\rho$ e $h > 0$, definimos a função

$$u_h(x) := h^{\frac{N}{2}} u(hx)$$

Observação 3.7. Para todo $h \in \mathbb{R}$, $u_h \in S_\rho$. De fato,

$$\|u_h\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_h(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |h^{\frac{N}{2}} u(hx)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} h^N |u(y)| h^{-N} dy = \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 dy = \|u\|_2^2 = \rho^2.$$

Agora, observe que

$$F(u_h) = \frac{h^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V\left(\frac{x}{h}\right) u^2 dx - \frac{h^{\frac{N(p-2)}{2}}}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Assim,

$$\lim_{h \to \infty} F(u_h) = -\infty.$$

Além disso, para $u \in S_\rho$ fixado, vale

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_h^2 dx \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \to 0$$

visto que, pelo Lema 1.11, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_h^2 dx \right| \leq \|V\|_{\frac{N}{2}} \|u_h\|_{2^*}^2 = h^2 \|V\|_{\frac{N}{2}} \|u\|_{2^*}^2 \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\lim_{h \to 0^+} F(u_h) = 0.$$

Observe também que $\|\nabla u_h\|_2 = h \|\nabla u\|_2$, logo

$$\lim_{h \to 0^+} \|\nabla u_h\|_2 = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{h \to \infty} \|\nabla u_h\|_2 = \infty.$$

O próximo lema nos fornecerá uma estimativa inferior para F, o que será útil para mostrar que F possui uma Geometria do Passo da Montanha.

Lema 3.8. *Para todo $u \in S_\rho$, temos*

$$F(u) \geq \frac{\delta}{2} \|\nabla u\|_2^2 - c(\rho) \|\nabla u\|_2^\gamma, \tag{3.10}$$

onde $c(\rho) = \dfrac{G^p}{p} \rho^{p-\gamma}$.

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx - \frac{1}{p}\|u\|_p^p \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2}S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{G^p}{p}\rho^{p-\gamma}\|\nabla u\|_2^\gamma \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}S^{-1}(\delta-1)S\|\nabla u\|_2^2 - c(\rho)\|\nabla u\|_2^\gamma \\
&= \frac{\delta}{2}\|\nabla u\|_2^2 - c(\rho)\|\nabla u\|_2^\gamma.
\end{aligned}
$$

□

Portanto, de (3.10) concluímos que existe $\overline{R} > 0$ tal que

$$\mathscr{M} = \inf\left\{F(u); u \in S_\rho,\ \|\nabla u\|_2 = \overline{R}\right\} > 0$$

Agora, vamos considerar $Z_\rho \in S_\rho$, solução do problema (2.4). Dos limites anteriores, existem $0 < h_0 < h_1$ tais que

$$\|\nabla(Z_\rho)_{h_0}\|_2 < \overline{R} \qquad \|\nabla(Z_\rho)_{h_1}\|_2 > \overline{R}$$

e

$$F\big((Z_\rho)_{h_0}\big) < M \qquad F\big((Z_\rho)_{h_1}\big) < 0$$

Então, definimos do modo usual o valor do Passo da Montanha

$$m_{V,\rho} := \inf_{\xi\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} F(\xi(t))$$

onde

$$\Gamma := \left\{\xi \in C([0,1];S_\rho);\ \xi(0) = (Z_\rho)_{h_0} \text{ e } \xi(1) = (Z_\rho)_{h_1}\right\}.$$

Observação 3.9. Como

$$m_\rho := \inf_{\xi\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} F_\infty(\xi(t))$$

é imediato que $m_{V,\rho} < m_\rho$. Além disso, $m_{V,\rho} \geq Mm_\rho$, para todo $\rho > 0$.

Proposição 3.10. *Existe uma sequência* **limitada** $(v_n)_n$ *de Palais Smale de F restrita à S_ρ de nível $m_{V,\rho}$, a saber*

$$F(v_n) \to m_{V,\rho} \quad e \quad \nabla_{S_\rho}F(v_n) \to 0$$

tal que

$$\|v_n\|_2^2 - \frac{N(p-2)}{2p}\|v_n\|_p^p - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(Nv_n^2 + 2v_n\nabla v_n.x)dx \to 0 \tag{3.11}$$

quando $n \to \infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^-\|_2 = 0. \tag{3.12}$$

Além disso, a sequência de Multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_n := -\frac{DF(v_n)[v_n]}{\rho^2}$$

é limitada e verifia, passando a subsequência, $\lambda_n \to \lambda$, com $\lambda > 0$.

A prova da proposição se assemelha muito ao caso da Proposição 2.19. A título de formalização de resultados, vamos fazê-la, adaptando a estratégia e omitindo os detalhes análogos.

Demonstração. Introduza o funcional

$$\tilde{F}(u,h) := F(h \star u) \qquad \text{para todo } (u,h) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}$$

e considere

$$\widetilde{\Gamma_\rho} := \left\{ \tilde{\xi} \in C^0([0,1]; S_\rho \times \mathbb{R}); \tilde{\xi}(0) = \big((Z_\rho)_{h_0}, 0\big), \tilde{\xi}(1) = \big((Z_\rho)_{h_1}, 0\big) \right\}.$$

e

$$\widetilde{m}_{V,\rho} := \inf_{\tilde{\xi}\in\tilde{\Gamma}_\rho} \max_{t\in[0,1]} \tilde{F}(\tilde{\xi}(t)).$$

Vale que:

(a) $\tilde{m}_{V,\rho} = m_{V,\rho}$

(b) Se $(u_n, h_n)_n$ é uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{F}$ e $h_n \to 0$, então $(h_n \star u_n)_n$ é uma sequência $(PS)_c$ para F.

Agora, vamos considerar uma sequência $\xi_n \in \Gamma$ tal que

$$m_{V,\rho} \leq \max_{t\in[0,1]} F(\xi_n(t)) < m_{V,\rho} + \frac{1}{n}.$$

Como $F(u) = F(|u|)$, para qualquer $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\xi_n(t) \geq 0$, pata todo $t \in [0,1]$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Lema (2.10) com respeito a

$$M = S_\rho \times \mathbb{R}$$

$$K = \{\big((Z_\rho)_{h_0}, 0\big), \big((Z_\rho)_{h_1}, 0\big)\}$$

$$C = \widetilde{\Gamma_\rho}$$

$$C_n = \Big\{(\xi_n(t), 0); t \in [0,1]\Big\}$$

$$J = \tilde{F}$$

concluímos que existe um sequência $(u_n, h_n)_n \in S_\rho \times \mathbb{R}$ e $\tilde{c} > 0$ tal que

$$m_{V\rho} - \frac{1}{n} < \tilde{F}(u_n, h_n) m_{V\rho} + \frac{1}{n}$$

$$\min_{t\in[0,1]} \|(u_n, h_n) - (\xi_n(t), 0)\|_{H^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}} \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{\sigma_n}}$$

$$\|\nabla_{S_\rho \times \mathbb{R}} \tilde{F}(u_n, h_n)\| \leq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{\sigma_n}}.$$

Definimos $v_n := h_n \star u_n$. Das conclusões anteriores $(v_n)_n$ é uma sequência de Palais Smale de F em S_ρ de nível m_ρ. Diferenciando $\tilde{F}$ com respeito a h, obtemos (3.11). Como $\xi_n(t) \geq 0$, temos (3.12). Vamos mostrar que (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, seja

$$a_n := \|\nabla v_n\|_2, \qquad b_n := \|v\|_p^p, \qquad c_n := \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2 dx, \qquad d_n := \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n \nabla v_n . x dx.$$

Então, podemos escrever

$$F(v_n) = \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} c_n - \frac{1}{p} b_n$$

Argumentando como no Capítulo 3, obtemos:

$$a_n - c_n - \frac{2}{p} b_n = 2 m_{V,\rho} + o(1) \tag{3.13}$$

$$a_n - \frac{N(p-2)}{2p} b_n - \frac{N}{2} c_n + d_n = o(1) \tag{3.14}$$

$$a_n - c_n - b_n + \rho^2\lambda = o(1)\big(a_n^{\frac{1}{2}} + 1\big) \tag{3.15}$$

onde o termo $(a_n^{\frac{1}{2}} + 1)$ na última igualdade aparece pois não sabemos, até então, se a_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Das relações acima obtemos

$$a_n = \frac{N(p-2)}{N(p-2)-4} 2m_{V,\rho} - \frac{N(4-p)}{N(p-2)-4} c_n - \frac{4}{N(p-2)-4} d_n + o(1). \tag{3.16}$$

Agora, como

$$c_n \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2 dx \right| \leq S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} \|\nabla v_n\|_2^2$$

e

$$|d_n| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n \nabla v_n . x dx \right| \leq S^{\frac{-1}{2}} \|W\|_N \|\nabla v_n\|_2^2$$

temos

$$0 \leq (N(p-2)-4) a_n \leq N(p-2) 2m_{V\rho} + N|4-p| S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} a_n + 4S^{\frac{-1}{2}} \|W\|_N a_n$$

o que implica em

$$\big((N(p-2)-4) - N|4-p| S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{\frac{-1}{2}} \|W\|_N\big) a_n \leq N(p-2) 2m_{V\rho} + o(1).$$

Mas, de (3.7), temos $(N(p-2)-4) - N|4-p| S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{\frac{-1}{2}} \|W\|_N > 0$ e, então

$$a_n \leq \frac{N(p-2) 2m_{V\rho}}{N(p-2)-4) - N|4-p| S^{-1} \|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{\frac{-1}{2}} \|W\|_N} < \infty$$

ou seja, a_n é limitada. Sendo assim, são também limitadas as sequências $(b_n), (c_n), (d_n), (\lambda_n)$. Pelo Teorema de Bolzano Weierstrass, passando a subsequência, temos

$$a_n \to a \geq 0$$

$$b_n \to b \geq 0$$

$$c_n \to c \geq 0$$

$$d_n \to d$$

$$\lambda_n \to \lambda$$

Das relações (3.13), (3.14) e (3.15), obtemos

$$a - c - \frac{2}{p}b = 2m_{V,\rho} \tag{3.17}$$

$$a - \frac{N(p-2)}{2p}b - \frac{N}{2}c + d = 0 \tag{3.18}$$

$$a - c - b + \rho^2\lambda = 0, \tag{3.19}$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned}
\rho^2\lambda &= \frac{(p-2)}{p}b - 2m_{V,\rho} \\
&= \frac{2(p-2)}{B}\Big(2m_{V,\rho} - \frac{N-2}{2}c - d\Big) - 2m_{V,\rho} \\
&= \frac{2N-(N-2)p}{B}2m_{V,\rho} - \frac{(N-2)(p-2)}{B}c - \frac{2(p-2)}{B}d \\
&\geq \frac{1}{B}\Big[\big(2N-(N-2)p\big)M + \frac{N(N-2)(p-2)^2S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}}}{B-N|4-p|S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{\frac{-1}{2}}\|W\|_N} \\
&- \frac{2N(p-2)^2S^{-1/2}\|W\|_N}{B-N|4-p|S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{\frac{-1}{2}}\|W\|_N}\Big]2m_\rho \\
&= \frac{1}{B}\Big[\frac{AMB - \big[(AMN|4-p| + (N-2)D)S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} + (4AM+2D)S^{-1/2}\|W\|_N\big]}{B-N|4-p|S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} - 4S^{\frac{-1}{2}}\|W\|_N}\Big]
\end{aligned}$$

Segue da hipótese (3.8) que $\lambda > 0$.

□

Lema 3.11. *Seja v uma solução fraca do problema (3.1), para algum $\rho > 0$. Se*

$$3(p-4)^+S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} + 4S^{-1/2}\|W\|_N \leq N(p-2) - 4 \tag{3.20}$$

então $F(v) \geq 0$.

Demonstração. Como v é solução fraca da equação, v satisfaz a Identidade de Pohozaev, isto é,

$$\frac{1}{p}\|v\|_p^p = \frac{2}{N(p-2)}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{1}{p-2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2dx - \frac{2}{N(p-2)}V(x)\nabla v.xdx.$$

Deste modo, podemos reescreve $F(v)$ na forma

$$F(v) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{2}{N(p-2)}\Big)\|\nabla v\|_2^2 + \frac{4-p}{2(p-2)}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 dx + \frac{2}{N(p-2)} V(x)\nabla v.xdx.$$

Se $N = 3$ ou $N \geq 4$ e $p \in (\frac{10}{3}, 4]$, então do Lema 1.11, temos

$$\begin{aligned} F(v) &\geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{2}{N(p-2)}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{2}{N(p-2)}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\nabla v.xdx \\ &\geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{2}{N(p-2)}\Big)\|\nabla v\|_2^2 - \frac{2}{N(p-2)} S^{-1/2}\|W\|_N\|\nabla v\|_2^2 \\ &= \Big(\frac{N(p-2) - 4S^{-1/2}\|W\|_N}{2N(p-2)}\Big)\|\nabla v\|_2^2. \end{aligned}$$

Então, como $p \leq 4$, temos

$$4S^{-1/2}\|W\|_N = 3(p-4)^+ S^{-1}\|V\|_{\frac{N}{2}} + 4S^{-1/2}\|W\|_N \leq N(p-2) - 4$$

e, portanto, $F(v) \geq 0$.

Agora, se $N = 3$ e $p \in (4, 6)$, então, por hipótese,

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 dx + \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p dx \\ &\geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{2}{3(p-2)}\Big)\|\nabla v\|_2^2 - \frac{2}{3(p-2)} S^{-1/2}\|W\|_3\|\nabla v\|_2^2 \\ &\geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{2}{3(p-2)}\Big)\|\nabla v\|_2^2 - \frac{2}{3(p-2)} S^{-1/2}\|W\|_3\|\nabla v\|_2^2 - \frac{p-4}{2(p-2)} S^{-1}\|V\|_{\frac{3}{2}}\|\nabla v\|_2^2 \\ &= \Big[\frac{3(p-2)-4}{6(p-2)} - \Big(\frac{p-4}{2} S^{-1}\|V\|_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} S^{-1/2}\|W\|_3\Big)\frac{1}{(p-2)}\Big]\|\nabla v\|_2^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Provamos no Lema 3.11 que não existe solução de (3.1) com energia negativa. A fim de terminar a prova do Teorema 3.1, precisamos garantir a existência de uma solução. Seja (v_n) a sequência de Palais Smale limitada dada pela Proposição (3.10). Como v_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, passando a subsequência, v_n converge fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e pontualmente em $\mathbb{R}^N$ para $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que, portanto, é solução fraca de

$$-\Delta v - V(x)v + \lambda v = |v|^{p-2}v$$

com $\|v\|_2 \leq \rho$. A fim de provar o teorema, resta mostrar que $\|v\|_2 = \rho$ e $v \geq 0$. Para isso, basta que v_n convirja forte para v em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e então, $v \geq 0$ visto que $\lim_{n\to\infty} \|v_n^-\|_2 = 0$. Ora, adaptando a prova feita no Capítulo 3, para os respectivos funcionais F, F_∞, I_λ e $I_{\infty,\lambda}$, obtemos o desejado.

3.2 Prova do Teorema 3.2

3.2.1 Existência de um minimizante local

A fim de provar a primeira parte do Teorema 3.2, mostraremos primeiramente que sob a hipótese

$$\|V\|_r \rho^{\sigma} < K \tag{3.21}$$

o funcional F, restrito à S_ρ admite uma estrutura do Passo da Montanha que depende de $\|V\|_r$ mas é uniforme com respeito a ρ. Isso é dado pela seguinte proposição:

Proposição 3.12. *Seja $N \geq 1$ e $r \in (max(1, N/2), \infty]$. Então, existem constantes positivas explícitas $\sigma, \kappa, \Theta, \Upsilon$, dependendo somente de N, p e r, tais que se vale (3.21), então*

$$\inf \left\{ F(u); u \in S_\rho, R_* - \varepsilon \leq \|\nabla\|_2 \leq R_* \right\} > 0$$

onde $R_* = \Theta \|V\|_r^{\Upsilon}$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno dependendo somente de um limitante superior para ρ.

Para provar tal proposição, precisamos do seguinte lema auxiliar:

Lema 3.13. *Sejam A, B, s, α, β parâmetros positivos, com $\alpha \leq 1$ e defina*

$$f_z(t) = t - Az^s t^{1-\alpha} - Bzt^{1+\beta}, \quad z, t > 0.$$

Sejam

$$z_* = \left(\frac{\alpha}{B}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+s\beta}} \left(\frac{\beta}{A}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+s\beta}} (\alpha+\beta)^{\frac{-\alpha+\beta}{\alpha+s\beta}}$$

$$t_* = \left(\frac{\alpha}{B}\right)^{\frac{s}{\alpha+s\beta}} \left(\frac{A}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+s\beta}} (\alpha+\beta)^{\frac{1-s}{\alpha+s\beta}}$$

Então,

$$0 < z < z_* \quad \Rightarrow \quad f_z(t_*) > 0$$

Demonstração. Observe que

$$\frac{d}{dz} f_z(t_*) = -Asz^{s-1} t_*^{1-\alpha} - Bt_*^{1+\beta} < 0$$

para todo $z > 0$, isto é, $f_z(t_*)$ é decrescente em z. Em particular,

$$0 < z < z_* \quad \Rightarrow \quad f_z(t_*) > f_{z_*}(t_*).$$

onde $f_{z_*}(t_*) = 0$. □

Prova da Proposição 3.12. Seja $u \in S_\rho$ com $\|\nabla u\|_2 = R$ e considere $r = \frac{q}{q-2}$, com $2 \leq q < 2^*$. Então, $r \in (max(1, N/2), +\infty]$ e, do Lema 1.11,

$$\begin{aligned} 2F(u) &= \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx - \frac{2}{p}\|u\|_p^p dx \\ &\geq R^2 - G_q^2 \|V\|_{\frac{q}{q-2}} \rho^{2-\frac{N(q-2)}{2}} R^{\frac{N(q-2)}{2}} - \frac{2}{p} G_p^p \rho^{p-\frac{N(p-2)}{2}} R^{\frac{N(p-2)}{2}} \end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned} A &= G_q^2 \|V\|_{\frac{q}{q-2}}, \\ B &= \frac{2}{p} G_p^p, \\ \alpha &= \frac{2N - q(n-2)}{2q}, \\ \beta &= \frac{N(p-2) - 4}{4}, \\ s &= \frac{2}{q} \frac{2N - q(N-2)}{2N - p(N-2)} \end{aligned}$$

e seja $f_z(t)$ definida como no Lema 3.13, com a notação correspondente

$$t = R^2 \qquad \text{e} \qquad z = \rho^{\frac{2N-p(N-2)}{2}}.$$

Observe que, em particular, apenas A depende de $\|V\|_{\frac{q}{q-2}}$, enquanto as demais constantes dependem apenas de N, p e r (via q). Nessas condições, temos

$$z_* = C_1(N,p,q) \|V\|_{\frac{q}{q-2}}^{-\frac{N(p-2)-4}{4} \frac{q}{p-2} \frac{2N-p(N-2)}{2N-q(N-2)}}$$

e

$$t_* = C_2(N,p,q) \|V\|_{\frac{q}{q-2}}^{\frac{q}{p-2} \frac{2N-p(N-2)}{2N-q(N-2)}}$$

onde $C_1(N,p,q)$ e $C_2(N,p,q)$ são constantes positivas dadas explícitamente em termos apenas de N, p e r. Agora, observe que

$$z < z_* \Leftrightarrow \rho^{\frac{2N-p(N-2)}{2}} \leq C_1(N,p,q) \|V\|_{\frac{q}{q-2}}^{-\frac{N(p-2)-4}{4} \frac{q}{p-2} \frac{2N-p(N-2)}{2N-q(N-2)}}$$

Ou seja,

$$\rho^{\frac{2N-p(N-2)}{2} - \frac{4}{N(p-2)-4}\frac{p-2}{q}\frac{2N-q(N-2)}{2N-p(N-2)}} \leq K(N,p,q)\|V\|_r^{-1}$$

que equivale a

$$\|V\|_r \rho^{\sigma} < K$$

com $\sigma = \sigma(N,p,q)$ e $K = K(N,p,q)$ positivos e dados explicitamente em termos de N,p e q. Além disso,

$$R_*^2 = t_* = C_2(N,p,q)\|V\|_{\frac{q}{q-2}}^{\frac{q}{p-2}\frac{2N-p(N-2)}{2N-q(N-2)}}$$

fornece $R_* = \Theta\|V\|_r^{\Upsilon}$, com $\Upsilon = \frac{1}{2}\frac{q}{p-2}\frac{2N-p(N-2)}{2N-q(N-2)} > 0$, e a proposição segue aplicando o lema anterior. □

Daqui em diante vamos assumir que ρ, V satisfazem (3.21), isto é,

$$0 < \rho < \rho_* := H\|V\|_r^{-\tau}$$

para H e τ adequados. Pela proposição, sabemos que para todo $\alpha < \rho_*$,

$$\inf\left\{F(u); u \in S_\alpha, \|\nabla u\|_2 = R_*\right\} > 0$$

onde $R_* = \Theta\|V\|_r^{\Upsilon}$ independe de α. Definimos então

$$c_{V,\alpha} := \inf\left\{F(u); u \in S_\alpha \|\nabla u\|_2 \leq R_*\right\}.$$

Lema 3.14. *Se* $c_{V,\rho} < 0$ *então*

$$0 < \alpha \leq \rho \quad \Rightarrow \quad c_{V,\alpha} \geq c_{V,\rho}$$

Demonstração. Se $c_{V,\alpha} \geq 0$, o lema segue trivialmente de

$$c_{V,\rho} < 0 \leq c_{V,\alpha}.$$

Suponhamos então, $c_{V,\alpha} < c' < 0$ e seja $u \in S_\alpha$ tal que $\|\nabla u\|_2 < R_*$ e $F(u) < c'$. Observe que, para todo $t \geq 1$, temos $tu \in S_{t\alpha}$, visto que

$$\|tu\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |tu|^2 dx = t^2 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = t^2\|u\|_2^2 = t^2\alpha^2.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
F(tu) &= \frac{1}{2}\|\nabla tu\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(tu)^2 dx - \frac{1}{p}\|tu\|_p^p dx \\
&= \frac{t^2}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx - \frac{t^p}{p}\|u\|_p^p dx \\
&\le \frac{t^2}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx - \frac{t^2}{p}\|u\|_p^p dx \\
&= t^2 F(u) \\
&< t^2 c' \\
&< c' \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

Afirmação:$\|\nabla(\frac{\rho}{\alpha}u)\|_2 \le R_*$

Com efeito, suponha por contradição que

$$\frac{\rho}{\alpha}\|\nabla u\|_2 = \|\nabla(\frac{\rho}{\alpha}u)\|_2 > R_*.$$

Como $\rho/\alpha > 1$ e $\|\nabla u\|_2 < R_*$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\bar{t} \in (1, \rho/\alpha)$ tal que

$$\bar{t}\|\nabla u\|_2 = \|\nabla(\bar{t}u)\|_2 = R_*.$$

Além disso,

$$\|\bar{t}u\|_2 = \bar{t}\|u\|_2 < \frac{\rho}{\alpha}\|u\|_2 = \rho,$$

ou seja, $\bar{t} \in (1, \rho/\alpha)$, $\|\bar{t}u\|_2 < \rho$ e $\|\nabla(tu)\|_2 = R_*$ Assim, como $\bar{t} > 1$, $F(\bar{t}u) < c' < 0$, contradizendo o fato de

$$\inf\left\{F(u); u \in S_{\bar{t}\alpha}\|\nabla u\|_2 \le R_*\right\} > 0.$$

Logo, por definição

$$
\begin{aligned}
c_{V,\rho} &= \inf\left\{F(u); u \in S_\rho \|\nabla u\|_2 \le R_*\right\} \\
&\le F\left(\frac{\rho}{\alpha}u\right) \\
&< c'.
\end{aligned}
$$

Como $c' > c_{V,\alpha}$ é arbitrário, segue $c_{V,\rho} \le c_{V,\alpha}$. $\square$

A prova da primeira parte do Teorema 3.2 é baseada na seguinte proposição:

Proposição 3.15. *Se $c_{V,\rho} < 0$ então $c_{V,\rho}$ é atingido por uma solução do problema (3.1).*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência minimizante para $c_{V,\rho}$. Pela proposição 3.12, sabemos que $\|\nabla u_n\|_2 \leq R_* - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, pelo Princípio Variacional de Ekeland, podemos assumir que (u_n) é sequência Palais Smale para F restrito à S_ρ.

Como o funcional F e a sua restrição são funções pares, podemos assumir que $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, (u_n) é limitada, por construção, e portanto, é também limitada a sequência de Multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_n := -\frac{DF(u_n)[u_n]}{\rho^2}.$$

Passando a subsequência, obtemos que $u_n \rightharpoonup u \geq 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$. Agora, como $\nabla_{S_\rho} F(v_n) \to 0$, temos

$$\begin{aligned} o(1) &= \frac{1}{2}\Big(\|\nabla u_n\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2 dx - \|u_n\|_p^p dx\Big) + \frac{1}{2}\lambda_n \rho^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(\|\nabla u_n\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2 dx\Big) - \frac{1}{p}\|u_n\|_p^p dx + \frac{1}{2}\lambda_n \rho^2 \\ &= F(u_n) + \frac{1}{2}\lambda_n \rho^2 \\ &= c_{V,\rho} + \frac{1}{2}\lambda_n \rho^2 + o(1) \end{aligned}$$

o que força a $\lambda_n \geq -\dfrac{2c_{V,\rho}}{\rho^2} > 0$, ja que $c_{V,\rho} < 0$. Argumentando como na prova do Teorema 3.1 obtemos que (u_n) é uma sequência de Palais Smale (sem restrição) para o funcional I_λ, com $\lambda > 0$. Então, aplicando o Lema da Separação, segue

$$u_n = u + \sum_{j=1}^{k} w^j(. - y_n^j) + o(1), \qquad \text{fortemente em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $w^1, \ldots, w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ são soluções não triviais para a equação limite

$$-\Delta w^j + \lambda w^j = |w^j|^{p-2} w$$

e vale

$$\rho^2 = \|u_n\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{j=1}^{k} \|w^j\|_2^2 + o(1)$$

e

$$c_{V,\rho} + \frac{\rho^2}{\lambda} = I_\lambda(u_n) = I_\lambda(u) + \sum_{j=1}^{k} I_{\infty,\lambda}(w^j),$$

o que implica em

$$c_{V,\rho} + o(1) = F(u_n) = F(u) + \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j).$$

Escrevendo $\|u\|_2 = \alpha \leq \rho$, temos

$$\|\nabla u\|_2 \leq \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_2 < R_*$$

e, então $F(u) \geq c_{V,\alpha}$. Pelo Lema 3.14, segue

$$\begin{aligned} c_{V,\rho} &= F(u) + \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) \\ &\geq c_{V,\alpha} + \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) \\ &\geq c_{V,\rho} + \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) \end{aligned}$$

forçando

$$\sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0,$$

visto que $F_\infty(w^j) > 0$, para todo j. Logo, $u_n \to u$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, provando a proposição. $\square$

Observação 3.16. Pela Proposição 3.15, só precisamos provar que, sobre as hipóteses do Teorema 3.2, $c_{V,\rho} < 0$. Seja φ, satisfazendo a hipótese (3.5), isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 - V(x)\varphi^2 dx \leq 0$$

Observe que, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} F(t\varphi) &= \frac{t^2}{2}\|\nabla\varphi\|_2^2 - \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\varphi^2 dx - \frac{t^p}{p}\|\varphi\|_p^p dx \\ &\leq -\frac{t^p}{p}\|\varphi\|_p^p dx \\ &< 0. \end{aligned}$$

Considere $\bar{t} = \frac{R_*}{\|\nabla\varphi\|_2}$ e então $\|\nabla\bar{t}\varphi\|_2 = R_*$ e $F(\bar{t}\varphi) < 0$. Assim,

$$F(\bar{t}\varphi) < 0 \;\Rightarrow\; \bar{t}\rho \geq \rho_* \;\Rightarrow\; \|\nabla\varphi\|_2 \leq R_*\frac{\rho}{\rho_*} < R_*$$

ou seja, $\varphi \in S_\rho$ e $\|\nabla\varphi\|_2 \leq R_*$. Por definição, concluímos que

$$c_{V,\rho} = \inf\left\{F(u); u \in S_\rho, \|\nabla u\|_2 \leq R_*\right\} \leq F(\varphi) < 0.$$

Observação 3.17. Hipótese semelhante a (3.5) é tratada no trabalho [12].

Observação 3.18. Uma condição suficiente para (3.5) é que existam $\eta, R > 0$ tais que

$$\inf_{B_R} V \geq \eta \quad \text{com} \quad \begin{cases} \eta > 0 \text{ e } R > 0, & \text{se } N = 1,2; \\ R^2\eta \geq N(N-2), & \text{se } N \geq 3. \end{cases} \tag{3.22}$$

De fato, sejam R e η como acima e, sem perda de generalidade, suponha que B_R esteja centrada em 0. No caso $N = 1$ é suficiente escolher uma constante $t^* > 0$, onde

$$t^*\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq R; \\ \left(\frac{kR-|x|}{(k-1)R}\right)^+, & \text{se } |x| \geq R. \end{cases}$$

com $k > 1$ suficientemente grande. No caso $N = 2$, é suficiente escolher $t^* > 0$, onde

$$t^*\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq R; \\ \left(\frac{ln(k-1)R-ln|x|}{ln(k-1)}\right)^+, & \text{se } |x| \geq R. \end{cases}$$

com $k > 2$ suficientemente grande. Finalmente, se $N \geq 3$, seja $\delta > 0$ pequeno e fixado e $t^* > 0$ tal que

$$t^*\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq R; \\ \left((1+\delta)R^{N-2}|x|^{2-N} - \delta\right)^+, & \text{se } |x| \geq R. \end{cases}$$

Colocando $|\partial B_1| = \omega_N$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 - V(x)\varphi^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\varphi^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} |\nabla\varphi|^2 - \int_{B_R} \eta\varphi^2 dx \\ &\leq (1+\delta)^2 R^{2(N-2)}(N-2)^2\omega_N \int_R^{+\infty} r^{2(1-N)} r^{N-1} dr - \frac{\omega_N}{N} R^N \eta \\ &= \frac{R^{N-2}\omega_N}{N}\left((1+\delta)^2 N(N-2) - R^2\eta\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

se δ é suficientemente pequeno.

Observação 3.19. Note que, para todo V é sempre possível escolher ρ suficientemente pequeno de modo que valham (3.4) e (3.6). Além disso, se $N \geq 3$, a condição (3.22) pode ser reformulada como

$$\|V\|_r^r \geq \eta^r |B_R| \geq \eta^{r-\frac{N}{2}} \frac{\omega_N}{N} [N(N-2)]^{\frac{N}{2}}$$

Em particular, como $r > \frac{N}{2}$, pode-se exibir potenciais V com norma L^r suficientemente pequena satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2 (com ρ suficientemente pequeno e R suficientemente grande).

3.2.2 Solução do Passo da Montanha

A segunda parte do Teorema 3.2 pode ser obtida argumentando como na prova do Teorema 3.1. Algumas mudanças serão feitas, especialmente sobre a condição de Palais Smale, porque, neste caso, o Lema 3.11 não funciona.

Aqui, ao invés de trabalhar com uma Geometria do Passo da Montanha uniforme em ρ, como fizemos para encontrar um minimizante, será mais conveniente usar uma Geometria do Passo da Montanha dependente de ρ. Isto permitirá uma comparação direta entre o nível do Passo da Montanha e m_ρ, permitindo mostrar que os Multiplicadores de Lagrange da sequência de Palais Smale são positivos. Observe que a hipótese

$$max\left\{\|V\|_r\rho^{\sigma_i}, \|W\|_s\rho^{\overline{\sigma_i}}\right\} < \tilde{L}, \quad i=1,2$$

garante que as hipóteses do Lema da Separação valem para $r=+\infty$.

Vamos assumir que $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i, \tilde{L}, \quad i=1,2$, são tais que

$$\|V\|_r\rho^{(2-\frac{N}{r})\frac{2(p-2)}{N(p-2)-4}} \leq L_1 \qquad \text{e} \qquad \|W\|_s\rho^{(1-\frac{N}{s})\frac{2(p-2)}{N(p-2)-4}} \leq L_1 \tag{3.23}$$

$$\|V\|_r\rho^{2-\frac{N}{r}} \leq L_2 \qquad \text{e} \qquad \|W\|_s\rho^{1-\frac{N}{s}} \leq L_2 \tag{3.24}$$

$$\|V\|_r\rho^{2-\frac{N}{r}} \leq L_3 m_\rho \qquad \text{e} \qquad \|W\|_s\rho^{1-\frac{N}{s}} \leq L_3 m_\rho \tag{3.25}$$

para constante positivas L_i adequadas a serem escolhidas mais tarde, independente de V, W e ρ. Mais ainda, observamos que (3.23), nos fornece

$$\|V\|_r^{\frac{2r}{2r-N}} \leq L_1' \frac{m_\rho}{\rho^2} \qquad \text{e} \qquad \|W\|_s^{\frac{2s}{s-N}} \leq L_1' \frac{m_\rho}{\rho^2}. \tag{3.26}$$

Geometria do Passo da Montanha

Recordemos que, para todo $u \in S_\rho$

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{G_q^2}{2}\|V\|_{\frac{q}{q-2}}\rho^{2-\frac{N(q-2)}{2}}\|\nabla u\|_2\frac{N(q-2)}{q} - \frac{1}{p}G_p^p\rho^{p-\gamma}\|\nabla u\|_2^\gamma$$

onde $q \in [2, 2*)$ satisfazendo $\frac{q}{q-2} = r$ e $\gamma = \frac{N(p-2)}{2}$. Seja $\tilde{R} > 0$, tal que

$$\tilde{\mathscr{M}}_0 := \frac{1}{2}\tilde{R}^2 - \frac{1}{p}G^p\rho^{p-\gamma}\tilde{R}^\gamma = \max_{t\geq 0}\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{p}G^p\rho^{p-\gamma}t^\gamma$$

Então, $\tilde{\mathscr{M}}_0 = 2\tilde{M}m_\rho$, para $\tilde{M} > 0$ uma constante adequada dependendo somente de ρ.

Assim, podemos escolher $L_1 > 0$, dependendo somente de N, p e q tal que

$$\frac{G_q^2}{2}\|V\|_{\frac{q}{q-2}}\rho^{2-\frac{N(q-2)}{2}}\tilde{R}^{\frac{N(q-2)}{q}} \leq \tilde{M}m_\rho$$

ou, equivalentemente

$$\|V\|_r\rho^{(2-\frac{N}{r})\frac{2(p-2)}{N(p-2)-4}} \leq L_1. \tag{3.27}$$

Por (3.23) e (3.27), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{M}} &:= \frac{1}{2}\tilde{R}^2 - \frac{G_q^2}{2}\|V\|_{\frac{q}{q-2}}\rho^{2-\frac{N(q-2)}{2}}\tilde{R}\frac{N(q-2)}{q} - \frac{1}{p}G_p^p\rho^{p-\gamma}\tilde{R}^\gamma \\
&= \tilde{\mathscr{M}}_0 - \frac{G_q^2}{2}\|V\|_{\frac{q}{q-2}}\rho^{2-\frac{N(q-2)}{2}}\tilde{R}^{\frac{N(q-2)}{q}} \\
&\geq \tilde{\mathscr{M}}_0 - \tilde{M}m_\rho \\
&= \tilde{M}m_\rho.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{\mathscr{M}} \geq \tilde{M}m_\rho. \tag{3.28}$$

Agora, fixemos $u_0 = (Z_\rho)_{h_0} \in S_\rho$ e $u_1 = (Z_\rho)_{h_1} \in S_\rho$, tais que

$$\|\nabla u_0\|_2 < \tilde{R} \qquad\qquad \|\nabla u_1\|_2 > \tilde{R}$$

e

$$F\big(u_0\big) < \tilde{\mathscr{M}} \qquad\qquad F\big(u_1\big) < 0$$

e defina o valor do Passo da Montanha

$$m_{V,\rho} := \inf_{\xi\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} F(\xi(t))$$

com

$$\Gamma := \big\{\xi \in C([0,1];S_\rho);\ \xi(0) = u_0 \ \text{ e } \xi(1) = u_1\big\}.$$

Por (3.28), como $V \geq 0$ e $V \not\equiv 0$, concluímos que

$$\tilde{M}m_\rho \leq m_{V,\rho} < m_\rho.$$

Como na Proposição 3.10, obtemos uma sequência de Palais Smale $(v_n)_n$, de nível $m_{V,\rho}$, tal que

$$\|v_n\|_2^2 - \frac{N(p-2)}{2p}\|v_n\|_p^p - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(Nv_n^2 + 2v_n \nabla v_n.x)dx \to 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^-\|_2 = 0.$$

Temos agora que verificar que (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e que a sequência de Multiplicadores de Lagrange relacionada $(\lambda_n)_n$ é limitada e convergente (a uma subsequência) a um valor positivo. A prova da limitação de (v_n) segue os mesmos passos da proposição (3.10), com notação análoga, donde obtivemos

$$a_n = \frac{N(p-2)}{B}2m_{V,\rho} - \frac{N|4-p|}{B}c_n - \frac{4}{B}d_n + o(1) \tag{3.29}$$

sendo $a_n = \|\nabla v_n\|_2$ e $B = N(p-2) - 4$. Do Lema 1.11

$$c_n \leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2 dx\right| \leq G_q^2 \|V\|_r \rho^{(2-\frac{N}{r})a_n^{\frac{N}{2r}}}$$

e

$$|d_n| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n \nabla v_n.xdx\right| \leq G_{q_1}\|W\|_s \rho^{1-\frac{N}{s}} a_n \frac{1}{2}(1+\frac{N}{s}) + o(1)$$

onde $q_1 \in [2, 2*)$ satisfaz $\frac{2q_1}{q_1-2} = s$. Assim,

$$Ba_n \leq 2N(p-2)m_\rho + N|4-p|G_q^2\|V\|_r \rho^{(2-\frac{N}{r})a_n^{\frac{N}{2r}}} + 4G_{q_1}\|W\|_s \rho^{1-\frac{N}{s}} a_n \frac{1}{2}(1+\frac{N}{s}) + o(1). \tag{3.30}$$

Como $r > max(1, N/2)$ e $s > max(2, N)$, temos $\frac{N}{2r} < 1$ e $\frac{1}{2}(1+\frac{N}{s}) < 1$. Então, se $a_n \geq 1$

$$a_n^{\frac{N}{2r}} < a_n \quad \text{e} \quad a_n \frac{1}{2}(1+\frac{N}{s}) < a_n.$$

Logo, em (3.30), obtemos

$$\left[b - N|4-p|G_q^2\|V\|_r \rho^{2-\frac{N}{r}} - 4G_{q_1}\|W\|_s \rho^{1-\frac{N}{s}}\right] a_n \leq 2N(p-2)m_\rho + o(1).$$

Escolhendo L_2 suficientemente pequeno em (3.24), segue

$$a_n \leq max\left\{1, \frac{3N(p-2)}{N(p-2)-4} m_\rho\right\},$$

de onde temos a_n limitada e, portanto, (v_n) limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Sendo (a_n) limitada, conseguimos concluir que as sequências $(b_n),(c_n),(d_n),(\lambda_n)$, são também limitadas, e passando a subsequência adequada, convergem, respectivamente a b,c,d e λ. Resta mostrar que $\lambda > 0$.

Como feito na demonstração da Proposição 3.10, temos

$$\rho^2\lambda = \frac{2N-(N-2)p}{B}2m_{V,\rho} - \frac{(N-2)(p-2)}{B}c - \frac{2(p-2)}{B}d$$

com

$$c = \lim c_n \leq \lim G_q^2\|V\|_r\rho^{(2-\frac{N}{r})}a_n^{\frac{N}{2r}} = G_q^2\|V\|_r\rho^{(2-\frac{N}{r})}a^{\frac{N}{2r}} \tag{3.31}$$

e

$$d = \lim d_n \leq \lim G_{q_1}\|W\|_s\rho^{1-\frac{N}{s}}a_n^{\frac{1}{2}(1+\frac{N}{s})} = G_{q_1}\|W\|_s\rho^{1-\frac{N}{s}}a^{\frac{1}{2}(1+\frac{N}{s})}. \tag{3.32}$$

Daí,

$$\rho^2\lambda \geq C_1 2\tilde{M}m_\rho - C_2\|V\|_r\rho^{(2-\frac{N}{r})}a^{\frac{N}{2r}} - C_3\|W\|_s\rho^{1-\frac{N}{s}}a^{\frac{1}{2}(1+\frac{N}{s})} \tag{3.33}$$

onde C_1,C_2,C_3, são constantes positivas dependendo somente de N,p,q e q_1. Se $a \geq 1$, então

$$\frac{3N(p-2)}{N(p-2)-4}m_\rho \geq 1$$

e, de (3.33)

$$\rho^2\lambda \geq \left[C_1' - C_2'\|V\|_r\rho^{(2-\frac{N}{r})} - C_3'\|W\|_s\rho^{1-\frac{N}{s}}\right]m_\rho \tag{3.34}$$

com $C_1',C_2',C_3' > 0$. Usando novamente (3.24), para L_2 suficientemente pequeno, concluímos $\lambda > 0$.

Se, entretanto, $a \leq 1$, podemos usar (3.25) e obter de 3.33 que

$$\begin{aligned}\rho^2\lambda &\geq C_1 2\tilde{M}m_\rho - C_2\|V\|_r\rho^{(2-\frac{N}{r})} - C_3\|W\|_s\rho^{1-\frac{N}{s}}\\ &\geq (C_1 2\tilde{M} - (C_2+C_3)L_3))m_\rho.\end{aligned}$$

Então, $\lambda > 0$, visto que podemos escolher L_3 suficientemente pequeno em (3.25).

Até agora obtivemos que a sequência de Palais Smale $(v_n)_n$, obtida pela Geometria do Passo da Montanha, e a sequência de Multiplicadores de Lagrange correspondente $(\lambda_n)_n$ satisfazem

$$F(v_n) \to m_{V,\rho}$$

$$F'(v_n)\phi = \lambda_n \phi + o(1)\|\phi\|_{H^1}$$

$$\lambda_n \to \lambda > 0$$

$$v_n \rightharpoonup v \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Então, v é solução de

$$-\Delta v - V(x)v + \lambda v = |v|^{p-2}v$$

e (v_n) e sequência de Palais Smale de I_λ, sem restrição. Pelo Lema da Separação,

$$v_n = v + \sum_{j=1}^{k} w^j(. - y_n^j) + o(1), \quad \text{fortemente em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $w^1, \ldots, w^k \in H^1(\mathbb{R}^N)$ são soluções não triviais para a equação limite

$$-\Delta w^j + \lambda w^j = |w^j|^{p-2} w$$

Argumentando como no capítulo anterior, obtemos

$$m_{V,\rho} = F(v) + \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j).$$

Suponhamos, por contradição, que v_n não convirja fortemente para v em $H^1(\mathbb{R}^N)$, ou equivalentemente, $k \geq 1$. Então, denotamos

$$\mu = \|v\|_2 \quad \text{e} \quad \alpha_j = \|w^j\|_2$$

e, pelo Lema da Separação

$$\sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) \geq \sum_{j=1}^{k} m_{\alpha_j} \geq m_{\alpha 1} = m_\rho \left(\frac{\alpha 1}{\rho}\right)^{-2\theta}$$

onde $\theta := \dfrac{2N - p(N-2)}{N(p-2) - 4}$.

Afirmação: $F(v) \geq -\theta m_\rho \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2$.

Observe que, provada a afirmação, concluímos a prova, pois

$$
\begin{aligned}
m_{V,\rho} &= F(v) + \sum_{j=1}^{k} F_\infty(w^j) \\
&\geq -\theta m_\rho \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 + m_\rho \left(\frac{\alpha 1}{\rho}\right)^{-2\theta} \\
&\geq \theta\left(-1 + \left(\frac{\alpha 1}{\rho}\right)^2\right) m_\rho + m_\rho \left(\frac{\alpha 1}{\rho}\right)^{-2\theta} \\
&= m_\rho \left[-\theta + \theta\left(\frac{\alpha 1}{\rho}\right)^{-2\theta}\right] \\
&\geq m_\rho \min_{t\in[0,1]} [-\theta + \theta t + t^{-\theta}] \\
&= m_\rho
\end{aligned}
$$

visto que $\min_{t\in[0,1]} -\theta + \theta t + t^{-\theta} = 1$. Ou seja, teríamos, $m_\rho \leq m_{V,\rho}$, uma contradição.

Provemos então a afirmação. Sejam

$$
a := \|\nabla v\|_2 \quad b := \|v\|_p^p \quad c := \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v^2 dx \quad d := \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v \nabla v.x dx
$$

Pela Identidade de Pohozaev

$$
a - \frac{N(p-2)}{2p} b - \frac{N}{2} c - d = 0.
$$

Assim, concluímos que

$$
\begin{aligned}
F(v) &= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} c - \frac{1}{p} b \\
&= \frac{N(p-2)-4}{2N(p-2)} a - \frac{p-4}{2(p-2)} c + \frac{2}{N(p-2)} d \\
&\geq C_0 \big[2a - K_1 c - K_2 d\big]
\end{aligned}
$$

onde C_0, C_1, C_2 são constantes positivas dependendo somente de N e p. Da relação

$$
\text{"se } x > 0 \text{ e } 0 < \tau < 1 \text{ e } k > 0 \text{ então } a - k a^\tau \geq -(1-\tau)\tau^{\frac{\tau}{1-\tau}} k^{\frac{1}{1-\tau}}\text{"}
$$

obtemos

$$
a - K_1 c \geq -K_1' \|V\|_r \frac{2r}{2r-N} \mu^2
$$

e

$$a - K_2 c \geq -K_2' \|W\|_s \frac{2s}{s-N} \mu^2$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(v) &\geq C_0 \left[K_1' \|V\|_r \frac{2r}{2r-N} - K_2' \|W\|_s \frac{2s}{s-N} \right] \mu^2 \\ &= -K L_1' \frac{m_\rho}{\rho^2} \mu^2 \\ &\geq -\theta m_\rho \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 \end{aligned}$$

visto que podemos tomar L_1' suficientemente pequeno de modo a satisfazer $L_1' \leq \dfrac{\theta}{k}$. □

APÊNDICE A

Métodos Variacionias

Muitos problemas em Equações Diferenciais podem ser colocados na forma

$$DE(u) = 0$$

onde $E : X \to Y$, uma aplicação diferenciável entre espaços de Banach adequados, é o funcional de Euler-Lagrange associado à equação, cuja derivada é denotada por DE. Neste caso, falamos que a equação está na forma Variacional, de modo que para garantir solução fraca para o problema precisamos procurar por pontos críticos de E.

Neste sentido, Métodos Minimax foram desenvolvidos para buscar por pontos críticos que não são mínimos globais, por exemplo, pontos de sela. Seguindo [19], estes são métodos que caracterizam valores críticos do funcional E sobre uma classe adequada de conjuntos S:

$$c = \inf_{A \in S} \max_{u \in A} E(u).$$

O Teorema do Passo da Montanha e o Teorema do Linking são resultados Minimax que serão destacados nesta seção.

A.1 O Teorema do Passo da Montanha

Definição A.1. Sejam X um espaço de Banach e $B \subset X$ um subconjunto. Uma deformação de B é uma função contínua $\eta : [0,1] \times B \to B$ tal que $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in B$.

Definição A.2. Sejam X um espaço de Banach e $A \subset B \subset X$ subconjuntos. Dizemos que B é deformável em A se existe uma deformação η de B tal que

$$\eta(t,u) \in A \quad \text{para todo } u \in A \text{ e todo } t \in [0,1];$$

e

$$\eta(1,u) \in A \quad \text{para todo } u \in B.$$

Definição A.3. Sejam X um espaço de Banach e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Para $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$J^a := \{u \in X;\ J(u) \leq a\}.$$

Definição A.4. Sejam H um espaço de Hilbert e $\eta : [0,1] \times H \to H$ uma deformação de H. Uma família Γ de subconjuntos de H é dita invariante sob η se satisfaz:

"para todo $A \in \Gamma$ e todo $t \in [0,1]$, tem-se $\eta(t,A) \in \Gamma$".

Definição A.5. Sejam H um espaço de Hilbert e $J : H \to \mathbb{R}$ um funcional. Uma família Γ de subconjuntos de H é chamada uma classe minimax. O valor

$$c := \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in A} J(u)$$

é chamado nível minimax associado a Γ. Observe que pode acontecer $c = +\infty$ ou $c = -\infty$.

Definição A.6. Sejam H um espaço de Hilbert, $J : H \to \mathbb{R}$ um funcional, Γ uma classe minimax e c o nível minimax associado a Γ. Dizemos que Γ é admissível com respeito a J se

1. $c \in \mathbb{R}$;
2. Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, Γ é invariante com respeito a deformações que deixam $J^{c-2\varepsilon}$.

Exemplo A.7. Seja H um espaço de Hilbert e $J \in C^{1,1}(H)$. Considere a classe minimax trivial

$$\Gamma = \{\{u\};\ u \in H\}$$

chamada classe de subconjuntos de H consistindo de um único ponto. Observe que esta classe é invariante a toda deformação η, pois $\eta(t,\{u\})$ é único para todo t e, portanto, continua pertencente a Γ. Então, esta classe é admissível se, e somente se, c é finito. Mas,

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in A} J(u) = \inf_{\{u\} \in \Gamma} \sup_{u \in \{u\}} J(u) = \inf_{u \in H} J(u).$$

Logo, esta classe é admissível se, e somente se, J e limitado inferiormente. $\square$

Teorema A.8 (Princípio Minimax). *Sejam H um espaço de Hilbert, $J \in C^{1,1}(H)$ e Γ uma classe minimax admissível de nível c. Então existe uma sequência Palais-Smale de J de nível c. Se J satisfaz a condição de Palais Smale no nível c, então c é valor crítico de J.*

Demonstração. Veja [1], página 154. □

Teorema A.9 (Teorema do Passo da Montanha). *Sejam H um espaço de Hilbert e $J \in C^{1,1}(H)$ satisfazendo $J(0) = 0$. Assuma que existam números positivos ρ e α tais que*

1. *$J(u) \geq \alpha$ se $\|u\| = \rho$;*

2. *Existe $v \in H$ tal que $\|v\| > \rho$ e $J(v) \leq \alpha$.*

Então existe uma sequência de Palais Smale para J de nível $c \geq \alpha$. Se J satisfaz condição de Palais-Smale no nível c então c é valor crítico de J.

Demonstração. Definimos a classe minimax

$$\Gamma = \{\gamma([0,1]);\ \gamma : [0,1] \to H \text{ é contínua e } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$$

e o correspondente nível minimax

$$c = \inf_{\gamma([0,1]) \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma([0,1])} J(u) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)).$$

Vamos provar que Γ é admissível. Claramente $c < \infty$ pois estamos maximizando uma função contínua em um conjunto compacto. Resta provar que $c > -\infty$. Para isso, observe que qualquer $\gamma \in \Gamma$ satisfaz $\|\gamma(0)\| = 0$ e $\|\gamma(1)\| = \|v\| > \rho$. Como γ é contínua, existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que $\|\gamma(t_\gamma)\| = \rho$. Da hipótese (1), segue que

$$\max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq J(\gamma(t_\gamma)) \geq \alpha.$$

Como vale para todo $\gamma \in \Gamma$, segue que

$$c \geq \alpha > 0.$$

Resta mostrar que Γ é invariante com respeito à deformações fixam $J^{c-2\varepsilon}$. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$J(0) < c - 2\varepsilon \quad \text{e} \quad J(v) < c - 2\varepsilon.$$

Isto é possível visto que $max\{J(0), J(v)\} = max\{0, J(v)\} < \alpha \leq c$. Então, 0 e v pertencem a $J^{c-2\varepsilon}$.

Sejam η uma deformação que fixa $J^{c-2\varepsilon}$ e $\gamma \in \Gamma$. Precisamos provar que, para todo $t \in [0,1]$,

$$\eta(t, \gamma([0,1]) \in \Gamma.$$

Sendo assim, considere $\tilde{\gamma} : [0,1] \to H$ definida por $\tilde{\gamma}(s) := \eta(t, \gamma(s))$. Claramente $\tilde{\gamma}$ é contínua e como η fixa $J^{c-2\varepsilon}$, temos

$$\tilde{\gamma}(0) = \eta(t, \gamma(0)) = \eta(t, 0) = 0$$

e

$$\tilde{\gamma}(1) = \eta(t, \gamma(1)) = \eta(t, v) = v.$$

Portanto, $\tilde{\gamma}([0,1]) \in \Gamma$ e Γ é admissível. Aplicando o Princípio Minimax segue o resultado. $\square$

Observação A.10. Um funcional que satisfaz as hipóteses do Teorema A.9 é dito possuir a Geometria do Passo da Montanha. O termo "Passo da Montanha"é justificado pelas propriedades geométricas do gráfico de J. De fato, é comum pensar os pontos 0 e v como duas vilas. As hipóteses do Teorema implicam que essas duas vilas são separadas por uma cadeia de montanhas: para ir de 0 a v é preciso subir ao menos até uma altura α que é estritamente maior que as duas alturas $J(0)$ e $J(v)$. As figuras a seguir conseguem ilustrar a estrutura geométrica do Teorema.

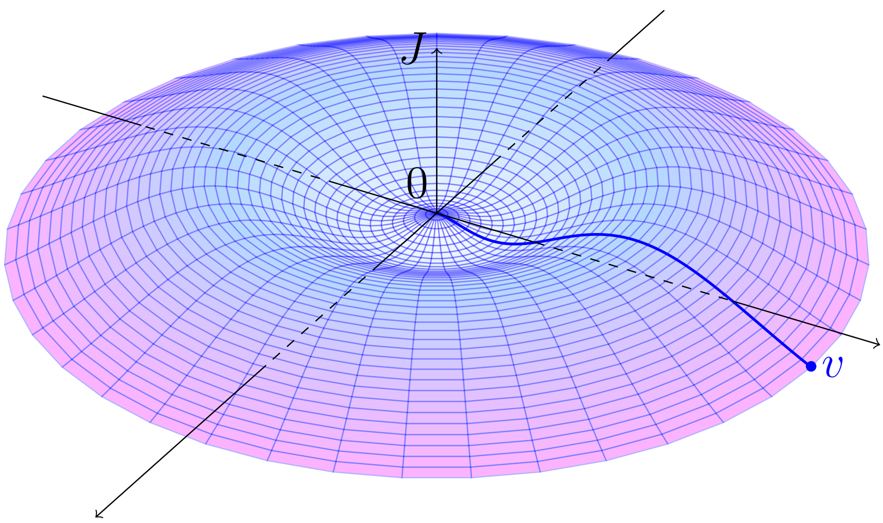

Figura A.1. Fonte: Adaptado de [20].

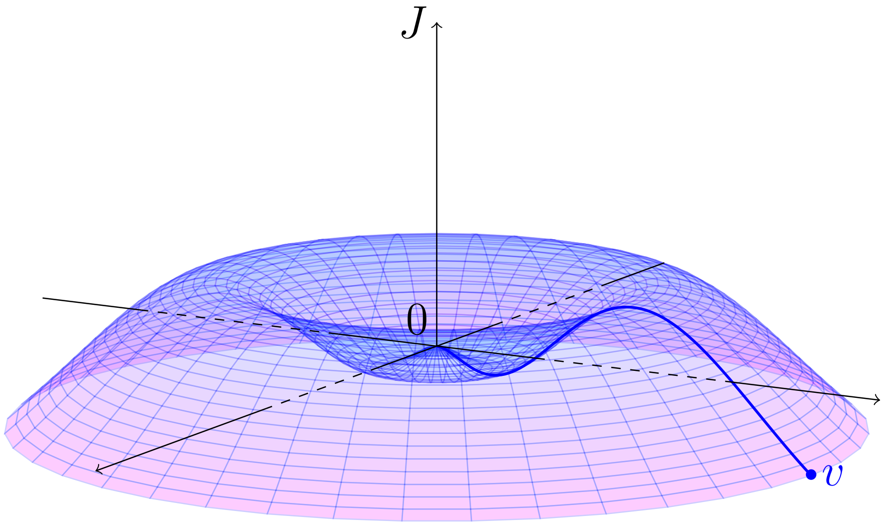

Figura A.2. Fonte: Adaptado de [20].

Observação A.11. A classe minimax usada na prova do teorema é construída da seguinte forma: tenta-se todos os caminhos possíveis entre 0 e v, mede-se a altura maximal atingida no caminho $\max\limits_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$ e tenta-se minimizar a altura máxima dentre a classe dos caminhos: a altura do caminho ótimo está localizada no passo da montanha. Outro modo de enunciar o Teorema do Passo da Montanha se dá a seguir:

Teorema A.12. *Seja X um espaço de Banach e $\varphi \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de Palais Smale. Se $e \in X$ e $0 < r < \|e\|$ são tais que*

$$a := \max\{\varphi(0), \varphi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) = b,$$

então

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathscr{C}([0,1],X);\ \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

é um ponto crítico de φ com $c \geq b$.

Veja [7], Capítulo 4, para mais detalhes.

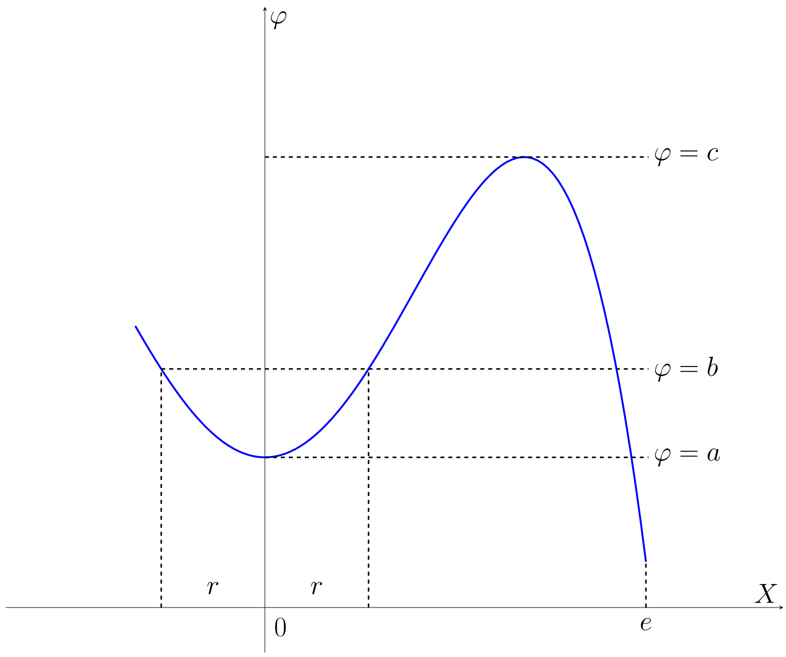

Figura A.3. Fonte: Adaptado de [7].

A.2 O Teorema do Linking

Consideremos, primeiramente, o seguinte princípio Minimax geral:

Teorema A.13. *Seja X um espaço de Banach, M_0 um subespaço fechado do espaço métrico M e $\Gamma_0 \subset \mathscr{C}(M_0, X)$. Defina $\Gamma := \{\gamma \in \mathscr{C}(M, X);\ \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}$. Se $\varphi \in \mathscr{C}^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz*

$$\infty > c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u)) \tag{A.1}$$

então, para todo $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\sup_M \varphi \circ \gamma \leq c + \varepsilon$$

existe $u \in X$ tal que

a) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$;

b)$dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$;

c)$\|\varphi'(u)\| \leq 8\varepsilon/\delta$

Demonstração. Veja [21], página 41, Teorema 2.8. □

Observação A.14. Observe que o Teorema do Passo da Montanha segue imediatamente do anterior, basta tomar $M = [0,1]$, $M_0 = \{0,1\}$, $\Gamma_0 = \{\gamma_0\}$ onde $\gamma_0(0) = 0$ e $\gamma_0(1) = e$.

Teorema A.15. *Sob a hipótese (A.1), existe uma sequência* $(u_n) \subset X$ *satisfazendo*

$$\varphi(u_n) \to c \quad e \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

Em particular, se φ *satisfaz a condição de Palais Smale em* c*, então* c *é ponto crítico de* φ*.*

Teorema A.16 (Teorema do Linking)**.** *Seja* $X = Y \oplus Z$ *um espaço de Banach com* $\dim Y < \infty$*. Sejam* $\rho > r > 0$ *e* $z \in Z$ *tal que* $\|z\| = r$*. Defina*

$M := \{u = y + \lambda z;\ \|u\| \leq \rho,\ \lambda \geq 0 \text{ e } y \in Y\}$;

$M_0 := \{u = y + \lambda z;\ y \in Y,\ \|u\| = \rho \text{ e } \lambda \geq 0 \text{ ou } \|u\| \leq \rho \text{ e } \lambda = 0\}$;

$N := \{u \in Z;\ \|u\| = r\}$.

Seja $\varphi \in \mathscr{C}^1(X, \mathbb{R})$*, tal que*

$$b := \inf_N \varphi > a := \max_{M_0} \varphi.$$

Se φ *satisfaz a condição de Palais Smale em* c *com*

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} \varphi(\gamma(u)),$$

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathscr{C}(M, X);\ \gamma|_{M_0} = id\},$$

então c *é um valor crítico de* φ*.*

Demonstração. Veja [21], página 43. □

Referências Bibliográficas

[1] Marino Badiale and Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*. Universitext. Springer, 2011.

[2] Thomas Bartsch, Riccardo Molle, Matteo Rizzi, and Gianmaria Verzini. Normalized solutions of mass supercritical Schrödinger equations with potential. *Communications in Partial Differential Equations*, 46(9):1729–1756, 2021.

[3] Thomas Bartsch and Tobias Weth. Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations on domains without topology. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C. Analyse Non Linéaire*, 22(3):259–281, 2005.

[4] H. Berestycki and P.-L. Lions. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 82(4):313–345, 1983.

[5] Rodney Josué Biezuner. Notas de aula de equações diferenciais parciais i e ii, 2010. Acesso em: 12 jun. 2024.

[6] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, New York, 2010.

[7] David G. Costa. *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*. Birkhäuser, Boston, 2007.

[8] César R. de Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

[9] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2 edition, 2010.

[10] Nassif Ghoussoub. *Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1993.

[11] Robert Hardt and Leon Simon. Nodal sets for solutions of elliptic equations. *Journal of Differential Geometry*, 30(2):505–522, 1989.

[12] Norihisa Ikoma and Yasuhito Miyamoto. Stable standing waves of nonlinear Schrödinger equations with potentials and general nonlinearities. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 59(2):Paper No. 48, 20 pp,, 2020.

[13] Louis Jeanjean. Existence of solutions with prescribed norm for semilinear elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 28(10):1633–1659, 1997.

[14] Otares Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques*, volume 1984 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.

[15] Man Kam Kwong. Uniqueness of positive solutions of $\triangle u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 105:243–266, 1989.

[16] César Torres Ledesma and Claudionor Oliveira Alves. *Una Introducción a las Ecuaciones Elípticas*. Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Peru, 2017.

[17] Lennart Meier. Hilbert manifold - definition. *Bulletin of the Manifold Atlas*, 2014.

[18] Riccardo Molle, Giuseppe Riey, and Gianmaria Verzini. Normalized solutions to mass supercritical Schrödinger equations with negative potential. *Journal of Differential Equations*, 333:302–331, 2022.

[19] Paul H. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, volume 65 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1984.

[20] Michael Struwe. *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Springer, Berlin, 4 edition, 2008.

[21] Michel Willem. *Minimax Theorems*. Birkhäuser, Boston, 1 edition, 1996.