



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA FÍSICA

Agariel Martins Gomes Cavalcante

**Modelagem Estocástica de Ativos e Derivativos Financeiros: Do Movimento Browniano à
Equação de Black-Scholes**

São Carlos
2025

Agariel Martins Gomes Cavalcante

**Modelagem Estocástica de Ativos e Derivativos Financeiros: Do Movimento Browniano à
Equação de Black–Scholes**

Trabalho Final de Curso de Graduação em Engenharia Física
apresentado ao Departamento de Física do Centro de Ciências
Exatas e Tecnológicas como requisito para a obtenção do tí-
tulo de Bacharel em Engenharia Física da Universidade Federal
de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Alvez Diniz

São Carlos
2025

Cavalcante, Agariel Martins Gomes

Modelagem estocástica de ativos e derivativos financeiros: do movimento Browniano à equação de Black-Scholes / Agariel Martins Gomes Cavalcante -- 2025.
48f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Marcio Alvez Diniz

Banca Examinadora: Alexsandro Giacomo Grimbert Gallo, Luis Ernesto Bueno Salasar

Bibliografia

1. Finanças quantitativas. 2. Cálculo estocástico. 3. Equação de Black-Scholes. I. Cavalcante, Agariel Martins Gomes. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

Agariel Martins Gomes Cavalcante

**Modelagem Estocástica de Ativos e Derivativos Financeiros: Do Movimento Browniano à
Equação de Black-Scholes**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Bacharel em Engenharia Física” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Engenharia de Física.

São Carlos, 28 de Novembro de 2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcio Alves Diniz
Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Aleksandro Giacomo Grimbert Gallo
Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Luis Ernesto Bueno Salasar
Universidade Federal de São Carlos

"[...] Esse funcionamento silencioso, comparável ao de Deus, provoca toda espécie de conjecturas. Uma insinua abominavelmente que há séculos não existe a Companhia e que a sacra desordem das nossas vidas é puramente hereditária, tradicional; outra julga-a eterna e ensina que perdurará até a última noite, quando o último deus aniquilar o mundo. Outra afiança que a Companhia é onipotente, mas que influi somente em coisas minúsculas: no grito de um pássaro, nos matizes da ferrugem e do pó, nos entressonhos da madrugada. Outra, por boca de heresiarcas mascarados, que nunca existiu nem existirá. Outra, não menos vil, argumenta que é indiferente armar ou negar a realidade da tenebrosa corporação, porque a Babilônia não é outra coisa senão um infinito jogo de acasos." (Jorge Luis Borges, *A loteria em Babilônia*, 1941)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo versar sobre os principais desenvolvimentos teóricos no campo da modelagem do comportamento de ativos financeiros. De início apresenta-se o modelo de Bachelier para o movimento Browniano, para depois tomar o limite contínuo e chegar à equação de Fokker-Plank. Também apresenta-se uma dedução do Teorema Central do Limite. Posteriormente, estrutura-se o cálculo estocástico segundo suas distinções do cálculo determinístico, apresentando o Lema de Itô. A equação de Black e Scholes é apresentada segundo diferentes argumentos teóricos e econômicos. A solução da equação é apresentada. Algumas limitações dos modelos são discutidas, e desenvolvimentos posteriores são indicados. Conclui-se que os modelos tem uma importância não somente histórica, mas também metodológica, e permanecem no campo de estudo com alterações cada vez mais refinadas de forma a compreender os fenômenos do mercado financeiro.

Palavras-chave: Finanças quantitativas; Cálculo estocástico; Black-Scholes.

ABSTRACT

This work aims to discuss the main theoretical developments in the field of financial asset behavior modeling. It begins by presenting Bachelier's model for Brownian motion, then proceeds to take the continuous limit and derive the Fokker–Planck equation. A derivation of the Central Limit Theorem is also included. Subsequently, stochastic calculus is introduced through its distinctions from deterministic calculus, with particular emphasis on Itô's Lemma. The Black–Scholes equation is presented using different theoretical and economic arguments, and its solution is provided. Some limitations of the models are discussed, and subsequent developments are indicated. The study concludes that these models hold importance not only from a historical perspective but also from a methodological one, and they remain central to the field, with increasingly refined modifications aimed at understanding financial market phenomena.

Keywords: Quantitative finance; Stochastic calculus; Black-Scholes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A distribuição log-normal (Voit, 2005).	10
Figura 2 – Simulação da função distribuição de probabilidade para diferentes somas de variáveis aleatórias identicamente distribuídas, com a distribuição para cada variável dada no canto superior direito. Abaixo, as distribuições estão normalizadas (Mantegna; Stanley, 1999).	18
Figura 3 – Comparação entre o valor da opção e o preço da ação subjacente, retirado do artigo original de (Black; Scholes, 1973).	32
Figura 4 – $c(S, \tau)$ em relação à S em um dado τ , salientando os limites da opção (Kwok, 2008).	33
Figura 5 – Processo de Lévy. Nota-se descontinuidades frequentes em diferentes escalas, próximo de acontecimentos reais no mercado financeiro (Voit, 2005).	34
Figura 6 – Representação da função gaussiana como uma base de atração. À medida que a quantidade de variáveis aleatórias identicamente distribuídas aumenta, a função distribuição de probabilidade se aproxima de uma gaussiana (Mantegna; Stanley, 1999).	35
Figura 7 – Distribuições de probabilidade $P_t(x)$ dos retornos logarítmicos em diferentes escalas de tempo para o Índice Dow-Jones. Em azul os pontos experimentais e as linhas são o modelo teórico de Heston (Dragulescu; Yakovenko, 2002).	36

LISTA DE SÍMBOLOS

$Z(t)$	Processo de Wiener padrão
$N(x)$	Função de distribuição normal acumulada
$n(x)$	Função de distribuição normal
$g(s, t)$	Função de distribuição log-normal
Q_π	Partição do intervalo π
$\Pi(S_t, t)$	Valor de um portfólio
$c(S_t, t)$	Preço de uma call
$G(\Pi)$	Ganho acumulado do portfólio
T	Tempo de vencimento da opção
S	Preço do ativo
r	Taxa livre de risco
τ	Tempo entre o tempo presente e o vencimento da opção
$p(S_t, t)$	Preço de um put

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	O MODELO DE BACHELIER PARA O MOVIMENTO BROWNIANO	2
2.1	MOVIMENTO ALEATÓRIO EM UMA DIMENSÃO	2
2.2	O LIMITE CONTÍNUO DO MOVIMENTO ALEATÓRIO EM UMA DIMENSÃO	3
2.3	PROCESSO BROWNIANO OU PROCESSO DE WIENER	8
3	O MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO	9
4	O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE	11
5	PRINCÍPIOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO	19
5.1	INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA	19
5.1.1	Definindo integração estocástica	21
5.2	LEMA DE ITÔ E DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS	22
6	O MODELO DE BLACK E SCHOLES	25
6.1	O PRINCÍPIO DO HEDGE SEM RISCO	25
6.2	A ESTRATÉGIA DA REPLICAÇÃO DINÂMICA	27
6.3	O ARGUMENTO DA NEUTRALIDADE DE RISCO	29
6.4	O PREÇO PARA AÇÕES DO TIPO EUROPEU	30
6.4.1	A relação de paridade <i>put-call</i>	32
7	DESENVOLVIMENTOS POSTERIORES	34
7.1	DISTRIBUIÇÕES ESTÁVEIS	34
7.2	DIVISIBILIDADE DE PROCESSOS ALEATÓRIOS	34
7.3	A VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA E O MODELO DE HESTON	35
8	CONCLUSÕES	37
	Referências	38

1 INTRODUÇÃO

A tese de doutorado de Louis Bachelier, datada de 1900, Teoria da Especulação, estabeleceu direcionamentos para a teoria da probabilidade e a análise estocástica pelos sucessivos 65 anos (Davis; Etheridge, 2006). Diante do crescimento do mercado financeiro e o aumento do volume de operações, um grande volume de informações foi gerado e com isso muitas partes interessadas visavam entender o comportamento do mercado de um ponto de vista sistemático, com a criação de modelos matemáticos que se baseassem em premissas fundamentais. Até o trabalho de Bachelier, a maioria dos esforços eram compostos de explicações particulares, sem muita teoria como sustentação, tampouco munida de ferramental matemático adequado.

O mercado financeiro é o mercado em que empresas, entidades com fins lucrativos e organizações estatais buscam financiamento para suas atividades. Os juros praticados (muito menores que os oferecidos por instituições bancárias), a extensa quantidade de agentes, compradores e vendedores de papéis e contratos possíveis possibilitam um alto fluxo e alto volume monetário de negociações, atraindo mais empresas e investidores.

A fim de complexificar e comportar as demandas desses agentes, diante da incerteza de futuros cenários, não somente ações de empresas e papéis de dívida são negociados, mas produtos financeiros elaborados, que se baseiam nestes produtos básicos (denominados derivativos), como é o caso das opções.

Uma opção é um direito (e não um dever) de comprar ou vender um determinado ativo financeiro a um determinado preço (chamado preço de *strike*, ou preço de exercício) por um determinado prazo (até o vencimento para opções do tipo americano, somente no vencimento para o tipo europeu). Uma opção de compra, ou *call*, é lucrativa do ponto de vista do comprador da opção quando o preço de mercado do ativo subjacente é maior que o preço de exercício. Uma opção de venda, ou *put*, é lucrativa do ponto de vista do comprador da opção quando o preço do mercado do ativo é menor que o preço de exercício da opção. Caso a condição de lucratividade não se satisfaça, o dono da opção pode decidir por não efetuar a operação, já que se trata de um direito e não uma obrigação. Quem vendeu a opção contudo, é obrigado a cumprir os termos do contrato, desde que a outra parte se interesse em realizar a operação.

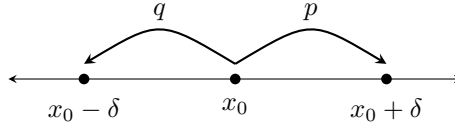
Este trabalho visa construir uma visão abrangente e coerente do desenvolvimento teórico referente à modelagem estocástica de ativos e derivativos financeiros, especificamente o modelo de precificação de Black e Scholes, evidenciando as considerações do modelo e os argumentos que levam às fórmulas.

2 O MODELO DE BACHELIER PARA O MOVIMENTO BROWNIANO

Para entender o modelo de Bachelier, é necessário entender primeiro o movimento aleatório. De início, analisemos o movimento aleatório unidimensional, para tomarmos o seu limite contínuo, para afinal definir o movimento Browniano unidimensional.

2.1 MOVIMENTO ALEATÓRIO EM UMA DIMENSÃO

Consideremos uma partícula pontual na reta



Em que $\delta \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ e $p + q = 1$, ou seja, só existem as possibilidades de ir para frente ou para trás. Suponhamos também que as probabilidades sejam as mesmas independentes da posição. Consequentemente, o sistema não tem memória.

O valor esperado do deslocamento $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ do i -ésimo passo é

$$\mathbb{E}(x_1) = p\delta + q(-\delta) = (p - q)\delta$$

independente de i .

Após $n \in \mathbb{N}$ passos, supondo que a partícula estava inicialmente na origem ($x_0 = 0$), a partícula tem a posição $X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $X_n \in \mathbb{R}$, e o valor esperado da posição da partícula é

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(x_i) = \sum_{i=1}^n (p - q)\delta = n(p - q)\delta.$$

E a variância de X_n é, por definição:

$$\text{var}(X_n) = \mathbb{E}\left\{[X_n - \mathbb{E}(X_n)]^2\right\}.$$

Que leva a

$$\mathbb{E}\{X_n^2 - 2X_n\mathbb{E}(X_n) + [\mathbb{E}(X_n)]^2\} = \mathbb{E}(X_n^2) + \mathbb{E}[-2X_n\mathbb{E}(X_n)] + \mathbb{E}\{[\mathbb{E}(X_n)]^2\} \quad (2.1)$$

$$= \mathbb{E}(X_n^2) - 2\mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_n) + [\mathbb{E}(X_n)]^2 \quad (2.2)$$

$$= \mathbb{E}(X_n^2) - [\mathbb{E}(X_n)]^2. \quad (2.3)$$

Já sabemos que $\mathbb{E}(X_n) = n\delta(p - q)$. É necessário calcular $\mathbb{E}(X_n^2)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(x_i x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(x_i^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+i}^n \mathbb{E}(x_i x_j). \end{aligned}$$

Considerando que

$$\mathbb{E}(x_i^2) = p(\delta)^2 + q(-\delta)^2 = p\delta^2 + q\delta^2 = \delta^2(p + q) = \delta^2, \quad (2.4)$$

e que

$$\mathbb{E}(x_i x_j) = \mathbb{E}(x_i)\mathbb{E}(x_j) = \delta(p - q)\delta(p - q) = \delta^2(p - q)^2, \quad (2.5)$$

podemos usar os resultados (2.4) e (2.5) para dar continuidade à resolução:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(x_i^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+i}^n \mathbb{E}(x_i x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+i}^n \delta^2(p - q)^2 \\ &= n\delta^2 + 2\delta^2(p - q)^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+i}^n 1 \\ &= n\delta^2 + 2\delta^2(p - q)^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n + 1 - (i + 1)) \\ &= n\delta^2 + 2\delta^2(p - q)^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) \\ &= n\delta^2 + 2\delta^2(p - q)^2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i \right] \\ &= n\delta^2 + 2\delta^2(p - q)^2 \left[n(n - 1) - \frac{(n - 1)n}{2} \right] \\ &= n\delta^2 + 2\delta^2(p - q)^2 \left[\frac{(n - 1)n}{2} \right] \\ &= n\delta^2(1 + (n - 1)(p - q)^2). \end{aligned}$$

E a partir disso aplicar em (2.3) para afinal obter a variância:

$$\begin{aligned} \text{var}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - [\mathbb{E}(X_n)]^2 \\ &= n\delta^2(1 + (n - 1)(p - q)^2) - [n\delta(p - q)]^2 \\ &= n\delta^2(1 + (n - 1)(p - q)^2) - n\delta^2(n(p - q)^2) \\ &= n\delta^2(1 - (p - q)^2) \\ &= n\delta^2(1 - p^2 - q^2 + 2pq). \end{aligned}$$

Levando em conta que podemos substituir $1^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$:

$$\begin{aligned} \text{var}(X_n) &= n\delta^2(1 - p^2 - q^2 + 2pq) \\ &= n\delta^2(p^2 + q^2 + 2pq - p^2 - q^2 + 2pq) \\ &= 4pqn\delta^2. \end{aligned}$$

2.2 O LIMITE CONTÍNUO DO MOVIMENTO ALEATÓRIO EM UMA DIMENSÃO

Vamos calcular o que acontece quando $\delta \rightarrow 0$, ou seja, o passo tende a zero, o que garante que a partícula possa se mover livremente. A cada passo infinitesimal, ainda há a probabilidade p de deslocar-se para frente ($+\delta$) e a probabilidade q de deslocar-se para trás ($-\delta$). Seja $u(x, t)$ a probabilidade de que a partícula esteja na dada posição x no instante t .

Digamos que a partícula dá $r \in \mathbb{N}$ passos por unidade de tempo. Logo, ela dá um passo a cada $\frac{1}{r}$ unidades de tempo. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = \frac{1}{r}$. No limite contínuo, $\delta \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ e portanto $\lambda \rightarrow 0$. Podemos

dizer também que o número $n \in \mathbb{N}$ de passos dados num intervalo de tempo $t \in \mathbb{R}$ é $n = rt$. Relacionando, afinal, o tempo necessário para dar uma determinada quantidade n de passos com a quantidade de passos dados por unidade de tempo, temos que $t = \lambda n = \frac{n}{r}$.

A natureza unidimensional do modelo garante que a probabilidade de que a partícula esteja num determinado ponto $x \in \mathbb{R}$ da reta num determinado tempo t ($u(x, t)$) pode ser descrita como a soma de duas probabilidades no tempo anterior: a de que a partícula estava no passo anterior ($t - \lambda$) ou à frente ($x + \delta$) e foi para trás (probabilidade q), ou estava atrás ($x - \delta$) e foi para frente (probabilidade p). A fim de facilitar os cálculos, vamos escolher o passo futuro ($t + \lambda$) para ser descrito em termos de passos presentes (t):

$$u(x, t + \lambda) = u(x - \delta, t)p + u(x + \delta, t)q. \quad (2.6)$$

Como a pretensão é de tomar os limites em que $\delta \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 0$, tornando o processo contínuo, vamos expandir os termos da equação em séries de Taylor centradas em 0 (também chamadas de séries de Maclaurin) e em relação às variáveis δ e λ .

$$\begin{aligned} u(x, t + \lambda) &= u(x, t + 0) + (\lambda - 0) \frac{\partial u(x, t + \lambda)}{\partial \lambda} + O_1(\lambda^2) \\ &= u(x, t) + \lambda \frac{\partial u(x, t + \lambda)}{\partial (t + \lambda)} \frac{\partial (t + \lambda)}{\partial \lambda} + O_1(\lambda^2) \\ &= u(x, t) + \lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O_1(\lambda^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x - \delta, t) &= u(x - 0, t) + (\delta - 0) \frac{\partial u(x - \delta, t)}{\partial \delta} + \frac{(\delta - 0)^2}{2} \frac{\partial^2 u(x - \delta, t)}{\partial \delta^2} + O_2(\delta^3) \\ &= u(x, t) + \delta \frac{\partial u(x - \delta, t)}{\partial (x - \delta)} \frac{\partial (x - \delta)}{\partial \delta} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\partial u(x - \delta, t)}{\partial (x - \delta)} \frac{\partial (x - \delta)}{\partial \delta} \right) + O_2(\delta^3) \\ &= u(x, t) - \delta \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_2(\delta^3). \end{aligned}$$

E analogamente,

$$\begin{aligned} u(x + \delta, t) &= u(x + 0, t) + (\delta - 0) \frac{\partial u(x + \delta, t)}{\partial \delta} + \frac{(\delta - 0)^2}{2} \frac{\partial^2 u(x + \delta, t)}{\partial \delta^2} + O_3(\delta^3) \\ &= u(x, t) + \delta \frac{\partial u(x + \delta, t)}{\partial (x + \delta)} \frac{\partial (x + \delta)}{\partial \delta} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\partial u(x + \delta, t)}{\partial (x + \delta)} \frac{\partial (x + \delta)}{\partial \delta} \right) + O_3(\delta^3) \\ &= u(x, t) + \delta \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_3(\delta^3). \end{aligned}$$

É possível perceber que $O_2(\delta^3) = -O_3(\delta^3)$, e substituindo esses resultados em (2.6) temos:

$$u(x, t + \lambda) = u(x - \lambda, t)p + u(x + \lambda, t)q \quad (2.7)$$

$$u(x, t) + \lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O_1(\lambda^2) = \left(u(x, t) - \delta \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_2(\delta^3) \right) p \quad (2.8)$$

$$+ \left(u(x, t) + \delta \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_3(\delta^3) \right) q \quad (2.9)$$

$$u(x, t) + \lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O_1(\lambda^2) = (p + q)u(x, t) + \delta(p - q) \frac{u(x, t)}{x} + \frac{\delta^2}{2}(p + q) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_3(\delta^3)(q - p) \quad (2.10)$$

$$\lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O_1(\lambda^2) = \delta(p - q) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_3(\delta^3)(q - p). \quad (2.11)$$

O passo seguinte é fazer com que os parâmetros de média e variância sejam postos na equação, de forma a pensar a relação da equação com os fenômenos estatísticos. É possível que somente estes

dois parâmetros sejam suficientes para caracterizar o movimento aleatório em uma dimensão, no limite contínuo? Primeiro, podemos reescrever as fórmulas para a média e a variância em termos dos novos parâmetros, mas agora com esses parâmetros definidos por unidade de tempo. Vamos definir o valor esperado por unidade de tempo de uma série de deslocamentos X_n , μ :

$$\mu = \frac{\mathbb{E}(X_n)}{t} = r(p - q)\delta = (p - q)\frac{\delta}{\lambda}. \quad (2.12)$$

E a variância de X_n por unidade de tempo σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\text{var}(X_n)}{t} = 4pqr\delta^2 = 4pq\frac{\delta^2}{\lambda}. \quad (2.13)$$

Fazer a ponte entre o processo discreto e os parâmetros de média e variância e o movimento browniano contínuo passa por fundamentalmente resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \lim_{(\sigma, \lambda) \rightarrow (0, 0)} (p - q)\frac{\delta}{\lambda} = \mu \\ \lim_{(\sigma, \lambda) \rightarrow (0, 0)} 4pq\frac{\delta^2}{\lambda} = \sigma^2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Como há uma relação entre p e q , em que a soma de ambos dá 1, é possível eliminarmos um deles nas equações e escrever um em função de μ e σ . Começando elevando a primeira equação ao quadrado:

$$\mu^2 = (p - q)^2 \frac{\delta^2}{\lambda^2} = (p^2 + q^2) \frac{\delta^2}{\lambda^2} - 2pq \frac{\delta^2}{\lambda^2} = (p^2 + q^2) \frac{\delta^2}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2}{2\lambda}.$$

Como $p = 1 - q$ e $q = 1 - p$, independente do termo substituído em função do outro, o resultado terá a mesma estrutura, a mesma "cara", o que significa que chegando à equação para p em função de μ e σ , também chegamos à equação para q em função destas mesmas variáveis. Vamos substituir q :

$$\begin{aligned} \mu^2 &= (p^2 + q^2) \frac{\delta^2}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2}{2\lambda} \\ &= (p^2 + 1 - 2p + p^2) \frac{\delta^2}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2}{2\lambda} \\ &= (2p^2 - 2p + 1) \frac{\delta^2}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2}{2\lambda} \\ \frac{\mu \lambda^2}{\sigma^2} &= 2p^2 - 2p + 1 - \frac{\lambda \sigma^2}{2\delta^2} \\ \frac{\mu \lambda^2}{2\sigma^2} &= p^2 - p + \frac{1}{2} - \frac{\lambda \sigma^2}{4\delta^2} \\ p^2 - p + \frac{1}{2} - \frac{\lambda \sigma^2}{4\delta^2} - \frac{\mu \lambda^2}{2\sigma^2} &= 0 \end{aligned}$$

Uma equação quadrática que pode ser resolvida por Báskara:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda \sigma^2}{4\delta^2} - \frac{\mu \lambda^2}{2\sigma^2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2 + \frac{\lambda \sigma^2}{\delta^2} + \frac{2\mu \lambda^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-1 + \frac{\lambda \sigma^2}{\delta^2} + \frac{2\mu \lambda^2}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Uma solução com dois resultados, que somados dão 1. Se a probabilidade q fosse escolhida, o resultado seria o mesmo. Portanto, vamos arbitrariamente escolher p para a raiz positiva e q para a raiz negativa.

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-1 + \frac{\lambda \sigma^2}{\delta^2} + \frac{2\mu \lambda^2}{\sigma^2}} \quad (2.15)$$

$$q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-1 + \frac{\lambda \sigma^2}{\delta^2} + \frac{2\mu \lambda^2}{\sigma^2}}. \quad (2.16)$$

Isso nos dá informações que serão usadas na aplicação dos limites, agora na equação (2.11). Dividindo-a toda por λ , temos:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O_1(\lambda) = \frac{\delta(p - q)}{\lambda} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2\lambda} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_3(\delta^3) \frac{(q - p)}{\lambda}. \quad (2.17)$$

Aplicando o limite $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ na equação, e retirando os termos independentes, ela toma a forma:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O_1(\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta(p - q)}{\lambda} \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta^2}{\lambda} \right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_3 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta^3(q - p)}{\lambda} \right). \quad (2.18)$$

Podemos, a partir das informações obtidas, achar os limites necessários. Começando por (2.12) e usando (2.15) e (2.16):

$$\begin{aligned} \mu &= (p - q) \frac{\delta}{\lambda} \\ \mu &= \frac{\delta}{\lambda} \sqrt{-1 + \frac{\lambda\sigma^2}{\delta^2} + \frac{2\mu\lambda^2}{\sigma^2}} \\ \mu^2 &= \frac{\delta^2}{\lambda^2} \left(-1 + \frac{\lambda\sigma^2}{\delta^2} + \frac{2\mu\lambda^2}{\sigma^2} \right) \\ \frac{\delta^2}{\lambda^2} \left(-1 + \frac{\lambda\sigma^2}{\delta^2} + \frac{2\mu\lambda^2}{\sigma^2} \right) - \mu^2 &= 0 \\ -\frac{\delta^2}{\lambda^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda} + 2\mu^2 - \mu^2 &= 0 \\ \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\lambda} - \frac{\delta^2}{\lambda^2} &= 0 \\ \lambda^2\mu^2 + \lambda\sigma^2 - \delta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo por Báskara,

$$\lambda = -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma^4}{\mu^4} + 4\frac{\delta^2}{\mu^2}}.$$

Como λ é necessariamente um intervalo de tempo positivo, a solução negativa é descartada. Podemos então aplicar o limite:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma^4}{\mu^4} + 4\frac{\delta^2}{\mu^2}} \right) \quad (2.19)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma^4}{\mu^4}} \quad (2.20)$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} \quad (2.21)$$

$$= 0. \quad (2.22)$$

Por (2.14),

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left((p - q) \frac{\delta}{\lambda} \right) = \mu \quad (2.23)$$

Considerando a aproximação em séries de Maclaurin:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \dots \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

podemos aplicar essa aproximação em:

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma^4}{\mu^4} + 4\frac{\delta^2}{\mu^2}} \\
&= -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2}\sqrt{1 + 4\frac{\mu^2\delta^2}{\sigma^4}} \\
&\approx -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2}\left(1 + 2\frac{\mu^2\delta^2}{\sigma^4}\right) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 2\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \frac{\delta^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{\delta^2}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Aplicando ao limite:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\lambda} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 \frac{\sigma^2}{\delta^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma^2 = \sigma^2. \quad (2.24)$$

E também, por (2.14):

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta^3}{\lambda} (p - q) \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta^3 \mu \lambda}{\lambda \delta} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 \mu = 0. \quad (2.25)$$

Aplicando os limites (2.22), (2.23), (2.24) e (2.25) em (2.18):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O_1(\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta(p - q)}{\lambda} \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta^2}{\lambda} \right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_3 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta^3 q - p}{\lambda} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O_1(0) = (-\mu) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} (\sigma^2) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O_3(0) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.29)$$

A (2.29) é chamada de equação de Kolmogorov avançada, ou equação de Fokker-Planck, e a solução dessa equação é a gaussiana:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}.$$

Em uma linguagem matemática moderna, Bachelier obteve o movimento Browniano como o limite da difusão do caminho aleatório (Davis; Etheridge, 2006). Definindo o movimento browniano unidimensional contínuo tal qual fizemos, temos o suficiente para entender e criticar a proposta do Bachelier em usar essa formulação como o modelo apropriado para um ativo em um mercado financeiro. A isso, importante acrescentar que ele propôs $\mu = 0$, que pode ser verdade em intervalos de tempo suficientemente pequenos, mas essa consideração pode ser excessivamente restritiva. Outra crítica contundente ao modelo é que ele dá a possibilidade, pequena mas não nula, do preço do ativo ter valores negativos. Isso quebra a lei de responsabilidade limitada do comprador de ações: ele jamais deve ser responsabilizado pelas dívidas da empresa (Napolitano, 2018).

Analisando de forma retroativa, a tese de Bachelier carece de rigor matemático em alguns de seus pontos, notadamente, a determinação de uma distribuição Gaussiana para o preço não foi suficientemente motivada (Mantegna; Stanley, 1999). No próximo capítulo, a prova do teorema central do limite aparece como argumento mais consistente de que essa é uma distribuição adequada.

2.3 PROCESSO BROWNIANO OU PROCESSO DE WIENER

O movimento browniano sistematizado à luz da estatística pode ser considerado um processo estocástico, denominado processo browniano ou processo de Wiener, e pode ser definido como um processo estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ em que

- (i) $X(0) = 0$ e $X(t)$ é contínuo em t
- (ii) Todo incremento $X(t+s) - X(s)$ tem distribuição normal com média μt e variância $\sigma^2 t$, em que μ e σ são parâmetros fixos.
- (iii) Cada incremento é independente, ou seja, para cada $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, os incrementos $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ são variáveis aleatórias independentes.

Como cada incremento $X(t+s) - X(s)$ independe do histórico do processo, a informação presente em $X(\tau)$, em que $\tau < s$ não interfere em nada nem na média nem na variância, nem na distribuição de probabilidade do incremento. A isso diz-se que há um caráter markoviano no processo de Wiener, em que estados (e informações) anteriores não interferem no resultado presente do sistema.

Se um processo possui os parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, o processo é chamado processo de Wiener padrão (ou standard), e a função distribuição de probabilidade $\{Z(t); t \geq 0\}$ é dada por

$$\begin{aligned} P(Z(t) \leq z | Z(t_0) = z_0) &= P(Z(t) - Z(t_0) \leq z - z_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{z-z_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-t_0)}\right) dx \\ &= N\left(\frac{z-z_0}{\sqrt{t-t_0}}\right), \end{aligned}$$

em que

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

é a função de distribuição normal acumulada, t_0 é o tempo inicial. Com média nula e variância unitária, a função densidade de probabilidade da variável aleatória normal padrão é dada por

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Vale dizer também que são válidas as propriedades

$$E[z(t)^2] = \text{var}(Z(t)) + E[Z(t)]^2 = t \tag{2.30}$$

$$E[Z(t)Z(s)] = \min(t, s). \tag{2.31}$$

3 O MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

O modelo proposto por Bachelier possui alguns problemas, como a possibilidade tangível do preço ser negativo, o que contraria a lei de responsabilidade limitada. Contudo, o retorno do ativo pode de fato ser negativo. Se o preço de um ativo era S_i ontem e hoje é S_{i+1} então o retorno relativo de um dia é

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \\ &= \frac{S_{i+1}}{S_i} - \frac{S_i}{S_i} \\ 1 + R_{i+1} &= \frac{S_{i+1}}{S_i}. \end{aligned}$$

Como os preços são positivos, podemos aplicar o logaritmo na equação, considerando que para pequenos retornos, vale a aproximação $\ln(1+x) = x$.

$$\begin{aligned} \ln(1 + R_{i+1}) &= \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) \\ R_{i+1} &\approx \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right). \end{aligned}$$

Quando consideramos que o logaritmo dos preços (para um caso contínuo) segue um processo browniano, com média μt e variância σt , temos a caracterização de um processo browniano geométrico. Chamando esse processo de $X(t)$, o caso contínuo pode ser definido como:

$$X(t) = \ln \frac{S(t)}{S_0}. \quad (3.1)$$

Em que S_0 é o preço no instante $t = 0$ e $S(t)$ é o preço no instante $t > 0$. No caso contínuo, a probabilidade de que a variável $X(t)$ tenha o valor entre x e $x + dx$ no instante t é

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx.$$

E por isso, a probabilidade de que a variável $X(t)$ tenha o valor entre $-\infty$ e $+\infty$ no instante t é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \sqrt{\pi} \sqrt{2\sigma^2 t} \\ &= 1. \end{aligned}$$

É possível interpretar $u(x, t)$ como a função densidade de probabilidade do processo browniano $X(t)$. De posse da relação em (3.1), podemos dizer qual a probabilidade de $S(t)$ ter um valor entre s e $s + ds$ no instante t . Supondo que esta tem a forma $g(s, t)ds$, podemos equacionar:

$$g(s, t)ds = u(x, t)dx.$$

Considerando a relação $s = \ln \frac{s}{s_0}$, é possível escrever o diferencial

$$dx = d\left[\ln \frac{s}{s_0}\right] = \frac{s_0}{s} \frac{1}{s_0} ds = \frac{ds}{s}.$$

A partir disso é possível compor a fórmula para $g(s, t)$

$$\begin{aligned} ds g(s, t) &= \frac{ds}{s} u(\ln(s/s_0), t) \\ &= ds \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(\ln(s/s_0) - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \\ g(s, t) &= \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(\ln s - \ln s_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}}. \end{aligned}$$

Se, por conveniência, definirmos a unidade do preço como S_0 , então em termos dessa unidade $S_0 = 1$, e

$$g(s, t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(\ln s - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}}.$$

Em que $g(s, t)$ é a densidade de probabilidade do movimento browniano geométrico.

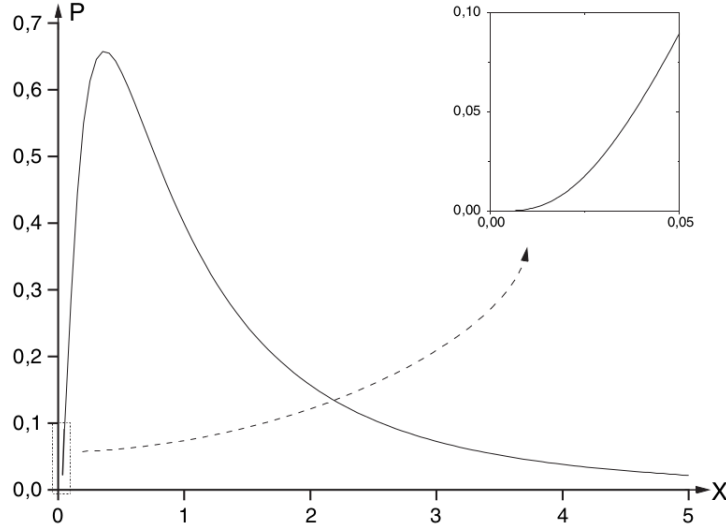


Figura 1 – A distribuição log-normal (Voit, 2005).

A média de $S(t)$ considerando que $S(0) = S_0$ é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S(t)) &= S_0 \int_0^\infty s g(s, t) ds \\ &= S_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) dx \\ &= y_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{[x - (\mu t + \sigma^2 t)]^2 - 2\mu t \sigma^2 t - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}\right) dx \\ &= y_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right). \end{aligned}$$

Da mesma forma, a variância de $S(t)$ considerando que $S(0) = s_0$ é

$$\begin{aligned} \text{var}(S(t)) &= s_0^2 \int_0^\infty s^2 g(s, t) ds - [\mathbb{E}(S(t))]^2 \\ &= s_0^2 \int_0^\infty s^2 g(s, t) ds - \left[s_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right]^2 \\ &= s_0^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{[x - (\mu t + 2\sigma^2 t)]^2 - 4\mu t \sigma^2 t - 4\sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}\right) dx \\ &\quad - \left[\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right]^2 \\ &= s_0^2 \exp(2\mu t + \sigma^2 t) [\exp(\sigma^2 t) - 1]. \end{aligned}$$

4 O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Suponhamos N variáveis x_i com $i = 1, 2, \dots, N$ identicamente distribuídas na reta real, com densidade de probabilidade dada por $p(x_i)$, para cada $i = 1, 2, \dots, N$ (isso significa que se cada variável for o resultado de um jogo, as regras do jogo nunca mudam de x_1 até x_N). Também suponhamos que a densidade p seja arbitrária, mas tal que todos os valores médios das potências de x_i sejam finitas (a fim de que os cálculos envolvendo valor esperado, desvio padrão e variância sejam também finitos). Vamos calcular a densidade de probabilidade da variável X , definida como

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Ou seja, queremos calcular a densidade de probabilidade da média dos valores x_i com $i = 1, 2, \dots, N$. E ao final, vamos provar que a distribuição dessa variável quando N é muito grande é uma distribuição gaussiana.

No fim das contas esse é o teorema central do limite: a distribuição média dos valores de uma variável aleatória é uma gaussiana. Tomemos como exemplo o lançamento de um dado: cada variável aleatória x_i é o resultado do lançamento i (i -ésimo lançamento). Cada lançamento pode resultar em uma de seis possíveis faces, ou seja $1/6$ de probabilidade de ocorrência, todas com a mesma probabilidade (identicamente distribuídas). Após N lançamentos idênticos (respeitando as mesmas regras e mantendo as mesmas condições), podemos tirar a média dos valores X . Podemos repetir isso um número grande de vezes e teremos uma relação da quantidade de vezes que um determinado intervalo de valores aparece, estimando a distribuição de probabilidade do valor de X .

Certamente, se lançarmos poucas vezes para obtermos a média, não teremos uma boa aproximação de uma gaussiana. Contudo, quanto mais lançamentos tivermos (maior N) mais nos aproximamos de uma gaussiana, segundo o teorema do limite central.

Seja $P(X)$ a função densidade de probabilidade de que a variável X tenha seu valor entre X e $X+dX$. Vamos definir $Q(K)$ como a transformada de Fourier de $P(X)$:

$$Q(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X)e^{ikX} dX. \quad (4.1)$$

Podemos escrever a exponencial como uma série infinita (que nada mais é que a série de MacLaurin)

$$e^{ikX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n}{n!} X^n.$$

E aplicando à integral temos

$$Q(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n}{n!} X^n P(X) dX = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} X^n P(X) dX.$$

Em que a integral

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} X^n P(X) dX. \quad (4.2)$$

é o valor esperado de X^n por definição. Usaremos a notação $\mathbb{E}[X^n]$ e, assumindo que todos os momentos são definidos, podemos escrever que

$$Q(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n}{n!} \mathbb{E}[X^n]. \quad (4.3)$$

Até agora tratamos da função densidade de probabilidade sem colocarmos nela os casos, ou melhor, as especificações. Vamos fazer isso.

É certo que se tivermos somente duas variáveis estocásticas x_1 e x_2 , $p(a)dx_1$ é a probabilidade de que x_1 tenha seu valor entre x_1 e $x_1 + dx_1$, e a mesma coisa para x_2 . Como estamos tratando a variável média $X = \frac{x_1+x_2}{2}$. O que importa então é saber qual a probabilidade de que as duas variáveis assumam valores tais que $X = \frac{x_1+x_2}{2}$ esteja entre X e $X + dX$. Vamos substituir a variável $x_2 = 2X - x_1$ e precisamos substituir dx_1dx_2 . É possível chegar à relação com o determinante do jacobiano.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

A probabilidade que buscamos pode ser representada como $P(X)dX$. Temos as variáveis x_1 e x_2 , e $p(x_1)p(x_2)dx_1dx_2$ é a probabilidade de que x_1 tenha seu valor entre x_1 e $x_1 + dx_1$ ao mesmo tempo em que x_2 tenha seu valor entre x_2 e $x_2 + dx_2$. Ao substituirmos em x_2 para gerarmos uma forma que dependa de x_1 e X , temos

$$p(x_1)p(x_2)dx_1dx_2 = p(x_1)p(2X - x_1)dx_1dX.$$

$2p(x_1)p(2X - x_1)dx_1dX$ não é igual a $P(X)dX$. Isso é claro, já que $P(X)dX$ depende somente de X , e não de x_1 . De fato, não importa qual valor x_1 assuma, desde que ele esteja dentro da regra $\frac{x_1+x_2}{2} = X$. Por isso,

$$P(X)dX = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 2p(x_1)p(2X - x_1)dx_1 \right) dX.$$

De fato, $p(x_1)p(x_2)dx_1dx_2$ é um valor possível, mas queremos todos, e por isso a integral.

Num intuito de voltarmos a representar a probabilidade de X em função das variáveis x_1 e x_2 , vamos usar o artifício da distribuição delta de Dirac.

$$\begin{aligned} P(X)dX &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2p(x_1)p(2X - x_1)dx_1dX \\ P(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2p(x_1) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_2)\delta(2X - x_1)dx_2 \right] dx_1 \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1)p(x_2)\delta(x_2 - (2X - x_1))dx_2dx_1. \end{aligned}$$

E considerando as propriedades da distribuição delta:

$$\begin{aligned} \delta(ay) &= \frac{1}{|a|}\delta(y) \\ \delta(y) &= \delta(-y). \end{aligned}$$

Aplicamos

$$\begin{aligned} P(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1)p(x_2)\delta\left(\frac{x_2}{2} - X + \frac{x_1}{2}\right) dx_2dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1)p(x_2)\delta\left(X - \frac{x_1+x_2}{2}\right) dx_2dx_1. \end{aligned}$$

Para $N > 2$, simplesmente generalizar a fórmula é um argumento frágil, por isso vamos aqui identificar uns mecanismos e provar o caso analiticamente. No caso em que $N = 2$, x_2 foi intencionalmente substituído pela fórmula da média para aparecer novamente depois. Agora que N é qualquer número natural, vamos substituir a última variável, x_N . Temos a média $\frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N}$ e por isso podemos colocar x_N como $x_N = NX - (x_1+x_2+\dots+x_{N-1})$. Também vamos descobrir o valor do determinante jacobiano da transformação de variáveis.

Saiamos de x_1, x_2, \dots, x_N para $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, X$ e por isso temos o determinante jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x_{N-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial X} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial x_{N-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial x_1} & \frac{\partial x_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial x_{N-1}} & \frac{\partial x_N}{\partial X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & N \end{vmatrix} = N$$

Todos os elementos na diagonal principal exceto $\frac{\partial x_N}{\partial X}$ dão 1 porque são da forma $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$. Como estamos, essencialmente, substituindo x_N por X , vale a relação $x_N = XN - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1})$ e por isso a última linha exceto o termo $\frac{\partial x_N}{\partial X}$ dará -1 . Ao final, o determinante dará N . Finalmente, podemos fazer nossa primeira representação da probabilidade desejada:

$$P(X)dX = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1)p(x_2) \cdots p(x_{N-1})p(XN - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1}))N dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} dX.$$

Cada integral de $-\infty$ a $+\infty$ diz respeito a uma variável x_1, \dots, x_{N-1} , por isso $N-1$ vezes, porque importa somente o valor específico (entre X e $X + dX$) de X , por isso todas as outras variáveis podem (e devem) pegar toda a reta real. Assim como fizemos no caso $N = 2$, vamos transformar $p(XN - (x_1, \dots, x_{N-1}))$ em uma integral:

$$\begin{aligned} p(XN - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1})) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_N)\delta(x_N - XN + x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1})dx_N \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_N)\delta(XN - (x_1 + x_2 + \cdots + x_N))dx_N. \end{aligned}$$

E substituindo isso na equação anterior, e fazendo o N entrar dentro da distribuição delta (segundo ??) temos a fórmula generalizada para $P(X)$:

$$P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1)p(x_2) \cdots p(x_N)\delta\left(X - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_N.$$

E vamos aplicar na seguinte fórmula:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} X^n P(X) dX. \tag{4.4}$$

Como (4.4) é uma integral na variável X , e só a distribuição delta tem X na fórmula de $P(X)$. Como a própria distribuição delta possui em sua definição, se ela está junto de uma função dentro de uma integral de $-\infty$ a $+\infty$ (ou dentro do intervalo em que $\arg(\delta) = 0$), então o resultado da integral é a função aplicada no ponto em que $\arg(\delta) = 0$. Dando prosseguimento, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^n P(X) dX \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1) \cdots p(x_N) \delta\left(X - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) dx_1 \cdots dx_N \right) X^n dX. \end{aligned}$$

E como só a função distribuição delta possui a variável X , a integral referente a ela pode entrar no integrando.

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1) \cdots p(x_N) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^n \delta\left(X - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) dX \right] dx_1 \cdots dx_N.$$

E sabemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta(x - a)dx = g(a).$$

por isso concluímos que

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1) \cdots p(x_N) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^n dx_1 \cdots dx_N.$$

Agora, voltando à fórmula (4.3), apresentada no início do capítulo:

$$\begin{aligned} Q(K) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1) \cdots p(x_N) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^n dx_1 \cdots dx_N \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1) \cdots p(x_N) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n}{n!} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^n dx_1 \cdots dx_N. \end{aligned}$$

E nós podemos identificar o somatório no integrando como uma exponencial, já que a série de MacLaurin de e^{ax} é

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n.$$

e podemos fazer um paralelo. Em suma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n}{n!} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^n = \exp \left(\frac{ik}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right).$$

E aí reescrevemos $Q(K)$:

$$\begin{aligned} Q(K) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1) \cdots p(x_N) \exp \left(\frac{ik}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right) dx_1 \cdots dx_N \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1) \exp \left(\frac{ik}{N} x_1 \right) dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_N) \exp \left(\frac{ik}{N} x_N \right) dx_N \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \exp \left(\frac{ik}{N} x \right) dx \right]^N. \end{aligned}$$

Como todas as integrais são iguais, se distinguindo somente na variável integrada, podemos juntá-las na forma final. Vamos agora nos preocupar em expandir a exponencial no integrando em termos da série de MacLaurin em relação à x :

$$e^{\frac{ik}{N}x} = 1 + \frac{ik}{N}x - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{N} \right)^2 x^2 + \frac{i}{6} \left(\frac{k}{N} \right)^3 x^3 - \frac{1}{24} \left(\frac{k}{N} \right)^4 x^4 + \dots$$

E usamos esse resultado na integral, que entra em cada termo da série:

$$Q(k) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \exp \left(\frac{ik}{N} x \right) dx \right]^N \tag{4.5}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \left(1 + \frac{ik}{N} x - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{N} \right)^2 x^2 + \frac{i}{6} \left(\frac{k}{N} \right)^3 x^3 + \dots \right) dx \right]^N \tag{4.6}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx + \frac{ik}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)x dx - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{N} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)x^2 dx + \frac{i}{6} \left(\frac{k}{N} \right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)x^3 dx + \dots \right]^N \tag{4.7}$$

$$= \left[1 + \frac{ik}{N} \langle x \rangle - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{N} \right)^2 \langle x^2 \rangle + \frac{i}{6} \left(\frac{k}{N} \right)^3 \langle x^3 \rangle + \dots \right]^N \tag{4.8}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^n \frac{\langle x^n \rangle}{n!} \right]^N. \tag{4.9}$$

A última substituição vem da definição integral de valor esperado, em (4.2). Essa já é uma forma condensada. Contudo, como $Q(K)$ foi definido numa forma exponencial, como a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade. Por isso, buscamos uma forma que não esteja em série para $Q(K)$. Dada a definição (4.1) vamos obter $P(X)$ em função de $Q(K)$, primeiramente aplicando a transformada novamente.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(k)e^{ikA}dk &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X) \exp(ikX)dX \exp(ikA)dA \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(X) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik(X+A))dkdX \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P(X)\delta(X+A)dX \\ &= 2\pi P(-A). \end{aligned}$$

E se $-A = X$, temos que $P(-A) = P(X)$ portanto,

$$P(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(k) \exp(-ikX)dk. \quad (4.10)$$

Ou seja, se antes usamos $P(X)$ para achar $Q(k)$, podemos agora usar $Q(k)$ para achar $P(X)$. Temos a forma em série de $Q(K)$ em (4.9), e então vamos aplicar na integral.

$$P(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^n \frac{\langle x^n \rangle}{n!} \right]^N \exp(-ikX)dk.$$

Uma forma de expandir $Q(K)$ em forma exponencial é usar o exponencial do logaritmo e expandir o logaritmo em uma série de Taylor centrada em 1, a fim de evitar a indefinição quando $x_0 = 0$. Vamos primeiro obter a fórmula geral para $\ln(x)$ e depois substituiremos para o nosso caso.

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n \\ &= \frac{\ln(1)}{0!} (x-1)^0 + \frac{1}{1!} (x-1) + \frac{(-1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{(-1)^2 \cdot 2}{3!} (x-1)^3 + \frac{(-1)^3 \cdot 3}{4!} (x-1)^4 + \dots \\ &= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n. \end{aligned}$$

Isso possibilita aplicar:

$$\begin{aligned} Q_N(k) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^n \frac{\langle x^n \rangle}{n!} \right]^N \\ &= \exp \left\{ \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^n \frac{\langle x^n \rangle}{n!} \right]^N \right\} \\ &= \exp \left\{ N \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^n \frac{\langle x^n \rangle}{n!} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ N \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^m \frac{\langle x^m \rangle}{m!} \right) - 1 \right)^n \right] \right\}. \end{aligned}$$

Levando em conta que o primeiro termo da série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^n \frac{\mathbb{E}[x^n]}{n!}$ é 1,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^n \frac{\mathbb{E}[x^n]}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^n \frac{\mathbb{E}[x^n]}{n!}.$$

E podemos concluir que

$$Q_N(k) = \exp \left\{ N \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^m \frac{\mathbb{E}[x^m]}{m!} \right)^n \right] \right\}.$$

Vamos desenvolver a série dos somatórios:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^m \frac{\mathbb{E}[x^m]}{m!} \right)^n &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^m \frac{\mathbb{E}[x^m]}{m!} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{ik}{N} \right)^m \frac{\mathbb{E}[x^m]}{m!} \right)^2 + \dots \\ &= \left[\frac{ik}{N} \mathbb{E}[x] + \frac{\mathbb{E}[x^2]}{2!} \left(\frac{ik}{N} \right)^2 + \dots \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{ik}{N} \mathbb{E}[x] + \frac{\mathbb{E}[x^2]}{2!} \left(\frac{ik}{N} \right)^2 + \dots \right]^2 + \dots \\ &= \frac{ik}{N} \mathbb{E}[x] + \frac{1}{2!} \left(\frac{ik}{N} \right)^2 \mathbb{E}[x^2] - \frac{1}{2} \left(\frac{ik}{N} \right)^2 \mathbb{E}[x]^2 + \dots \\ &= \frac{ik}{N} \mathbb{E}[x] - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{N} \right)^2 (\langle x^2 \rangle - \mathbb{E}[x]^2) + \dots \\ &= \frac{ik}{N} \mathbb{E}[x] - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{N} \right)^2 \text{var}(x) + \dots \\ &\approx \frac{ik}{N} \mathbb{E}[x] - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{N} \right)^2 \text{var}(x), \end{aligned}$$

para N suficientemente grande. E aí podemos dizer que

$$Q(k) \approx \exp \left[ik \mathbb{E}[x] - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N} \text{var}(x) \right].$$

E substituindo na fórmula integral (4.10) que coloca $P(X)$ como uma integral de $Q(K)$:

$$\begin{aligned} P(X) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ik \mathbb{E}[x] - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N} \text{var}(x) \right] \exp(-ikX) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ik \langle x \rangle - ikX - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N} \text{var}(x) \right] dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ik (\langle x \rangle - X) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N} \text{var}(x) \right] dk. \end{aligned}$$

Completando o quadrado para os termos na exponencial,

$$\begin{aligned} Q(K) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\text{var}(x)}{N} \left(k^2 - 2ikN \frac{\mathbb{E}[x] - X}{\text{var}(x)} + \left(\frac{iN(\mathbb{E}[x] - X)}{\text{var}(x)} \right)^2 - \left(\frac{iN(\mathbb{E}[x] - X)}{\text{var}(x)} \right)^2 \right) \right] dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\text{var}(x)}{N} \left(\left(k - i \frac{N(\mathbb{E}[x] - X)}{\text{var}(x)} \right)^2 - \left(\frac{iN(\mathbb{E}[x] - X)}{\text{var}(x)} \right)^2 \right) \right] dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left[\frac{1}{2} \frac{\text{var}(x)}{N} \left(\frac{iN(\mathbb{E}[x] - X)}{\text{var}(x)} \right)^2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\text{var}(x)}{N} \left(k - i \frac{N(\mathbb{E}[x] - X)}{\text{var}(x)} \right)^2 \right] dk. \end{aligned}$$

A integral tem resultado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\text{var}(x)}{N} \left(k - i \frac{N(\mathbb{E}[x] - X)}{\text{var}(x)} \right)^2 \right] dk = \sqrt{\frac{2\pi N}{\text{var}(x)}}.$$

E por isso podemos dizer que

$$P(X) \approx \sqrt{\frac{2\pi N}{\text{var}(x)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{N}{\text{var}(x)} (\mathbb{E}[x] - X)^2 \right] \frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{N}{2\pi \text{var}(x)}} \exp \left[-\frac{N}{2\text{var}(x)} (\mathbb{E}[x] - X)^2 \right].$$

Estamos perto do resultado, mas faltam algumas alterações. Afinal, queremos que somente X apareça como variável, e não x , que é um de seus elementos presentes. Por isso, devemos saber como representar $\text{var}(x)$ e $\langle x \rangle$ em termos de X e $\langle X \rangle$.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\infty} x_i\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[x_i] = \frac{1}{N} N \mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[x].$$

E

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x_m \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n\right] - \mathbb{E}[x]^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbb{E}[x_m x_n] - \mathbb{E}[x]^2. \end{aligned}$$

E podemos dizer que

$$\mathbb{E}[x_m x_n] = \delta_{mn} \mathbb{E}[x^2] + (1 - \delta_{mn}) \mathbb{E}[x]^2.$$

Substituindo temos

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [(\delta_{mn} \mathbb{E}[x^2]) + (1 - \delta_{mn}) \mathbb{E}[x]^2] - \mathbb{E}[x]^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \delta_{mn} \mathbb{E}[x^2] + \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbb{E}[x]^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \delta_{mn} \mathbb{E}[x]^2 - \mathbb{E}[x]^2 \\ &= \frac{1}{N^2} N \mathbb{E}[x^2] + \mathbb{E}[x]^2 - \frac{1}{N} \mathbb{E}[x]^2 - \mathbb{E}[x]^2 \\ &= \frac{1}{N} (\mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2) \\ &= \frac{\text{var}(x)}{N}. \end{aligned}$$

E afinal substituindo na equação aproximada de $P(X)$, temos:

$$P(X) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{var}(X)}} \exp\left[-\frac{(\mathbb{E}[x] - X)^2}{2 \text{var}(X)}\right],$$

que é de fato, uma gaussiana.

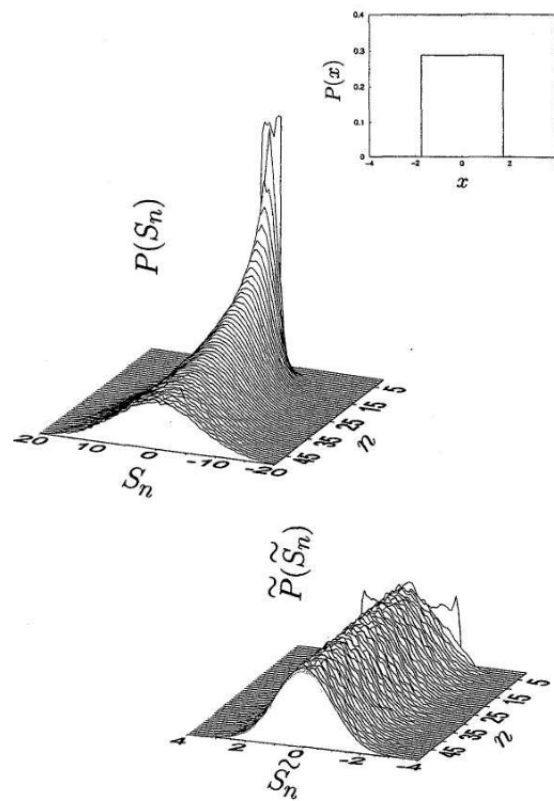


Figura 2 – Simulação da função distribuição de probabilidade para diferentes somas de variáveis aleatórias independentemente distribuídas, com a distribuição para cada variável dada no canto superior direito. Abaixo, as distribuições estão normalizadas (Mantegna; Stanley, 1999).

5 PRINCÍPIOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Os processos estocásticos não são de muita serventia sem a capacidade de fazer operações matemáticas como a diferenciação, integração e a composição de funções. Para isso, vamos definir a diferenciação e integração de funções que envolvem processos brownianos, notadamente o Lema de Itô.

5.1 INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA

Processos brownianos podem ser vistos como o limite contínuo dos modelos discretos de caminhos aleatórios, como o descrito no início deste trabalho. É possível concluir de forma intuitiva a continuidade dos caminhos, embora eles sejam cheios de mudanças da inclinação do trajeto, estas nem um pouco suaves. Os caminhos estocásticos não são diferenciáveis.

A prova dessa propriedade (a não diferenciabilidade) pode ser concluída a partir da demonstração de que a variação quadrática de um processo browniano é finita e não nula. No cálculo, a propriedade da diferenciabilidade implica que a variação quadrática da função é nula (Kwok, 2008). Na estatística, diz-se que uma sequência X_n converge na r -ésima média para X se os r -ésimos momentos absolutos $\mathbb{E}(|X_n|^r)$ e $\mathbb{E}(|X|^r)$ existem e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^r) = 0. \quad (5.1)$$

Supondo uma partição π de um intervalo $[0, T]$ cujos pontos discretos são

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

vamos definir δt_{max} como o maior dos intervalos entre os pontos da partição, ou seja, $\delta t_{max} = \max_k(t_k - t_{k-1})$. Podemos definir $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ e definir a variação quadrática do processo de Wiener padrão $Z(t)$ como

$$Q_\pi = \sum_{k=1}^n [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2. \quad (5.2)$$

Essa variação quadrática de $Z(t)$ em $[0, T]$ é não nula, e tem valor dado por

$$Q_{[0, T]} = \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} Q_\pi = T.$$

E para provar que este é o resultado, basta provar que

$$\lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \mathbb{E}[Q_\pi] = T \quad (5.3)$$

$$\lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \text{var}[Q_\pi - T] = 0. \quad (5.4)$$

Isso é equivalente a satisfazer as condições de convergência em média quadrática em (5.1), se considerarmos

que $X = T$, $r = 2$ (em suma, $Q_\pi \xrightarrow{L^2} T$) e também que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \text{var}[Q_\pi - T] &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \{ \mathbb{E} [(Q_\pi - T - \mathbb{E}(Q_\pi - T))^2] \} \\
 &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \{ \mathbb{E}((Q_\pi - T)^2) - 2\mathbb{E}^2(Q_\pi - T) + \mathbb{E}^2(Q_\pi - T) \} \\
 &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \{ \mathbb{E}((Q_\pi - T)^2) - \mathbb{E}^2(Q_\pi - T) \} \\
 &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \{ \mathbb{E}((Q_\pi - T)^2) \} - \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \mathbb{E}^2(Q_\pi - T) \\
 &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \{ \mathbb{E}((Q_\pi - T)^2) \} - \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} [\mathbb{E}(Q_\pi) - \mathbb{E}(T)]^2 \\
 &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \{ \mathbb{E}((Q_\pi - T)^2) \} - \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} [\mathbb{E}^2(Q_\pi) - 2T\mathbb{E}(Q_\pi) + T^2] \\
 &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \{ \mathbb{E}((Q_\pi - T)^2) \} - \left(\lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} [\mathbb{E}(Q_\pi)] \right)^2 + 2T \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \mathbb{E}(Q_\pi) - T^2 \\
 &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \{ \mathbb{E}((Q_\pi - T)^2) \} - T^2 + 2T^2 - T^2 \\
 &= \lim_{\delta t_{max} \rightarrow 0} \mathbb{E}((Q_\pi - T)^2).
 \end{aligned}$$

Primeiro, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Q_\pi] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(Z(t_k) - Z(t_{k-1}))^2] \\
 &= \text{var}(Z(t_n) - Z(t_0)) \\
 &= t_n - t_0 \\
 &= T.
 \end{aligned}$$

A operação de valor esperado pode ser mudada para a de variância porque $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ tem média nula, e a variância de cada intervalo pode ser substituída pela variância de todo o intervalo já que cada partição é independente (nesse caso, a soma das variâncias é igual à variância da soma). Agora, provando o resultado (5.4),

$$\text{var}(Q_\pi - T) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \{ [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2 - \Delta t_k \} \{ [Z(t_l) - Z(t_{l-1})]^2 - \Delta t_l \} \right] \quad (5.5)$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{l=1}^n \{ [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2 - \Delta t_k \}^2 \right] \quad (5.6)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [\{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^4] - 2 \sum_{k=1}^n \Delta t_k \mathbb{E} [\{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^2] + \sum_{k=1}^n \Delta t_k^2. \quad (5.7)$$

A mudança de (5.5) para (5.6) acontece em levar em conta que os incrementos da partição são independentes, logo, quando $l \neq k$, o valor esperado do produto é o produto dos valores esperados, e como eles têm média nula, o termo desaparece, restando somente os casos em que $l = k$.

O momento de quarta ordem da variação quadrática é

$$\mathbb{E} [\{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^4] = 3\Delta t_k^2.$$

E portanto

$$\text{var}(Q_\pi - T) = \sum_{k=1}^n [3\Delta t_k^2 - 2\Delta t_k^2 + \Delta t_k^2] = 2 \sum_{k=1}^n \Delta t_k^2.$$

Tomando o limite em que $\delta t_{max} \rightarrow 0$, podemos concluir que $\text{var}(Q_\pi - T) \rightarrow 0$, o que prova (5.4).

De forma geral, a variação quadrática de um processo de Wiener com a taxa de variância σ^2 sobre um intervalo $[t_1, t_2]$ é

$$Q_{[t_1, t_2]} = \sigma^2(t_2 - t_1).$$

Se considerarmos $dZ(t) = Z(t) - Z(t - dt)$, onde $dt \rightarrow 0$, podemos concluir que

$$\mathbb{E} [dZ(t)^2] = dt \quad (5.8)$$

$$\text{var}(dZ(t)^2) = 2dt^2. \quad (5.9)$$

Como dt^2 é uma grandeza infinitamente pequena de ordem superior, podemos concluir que a quantidade aleatória $dZ(t)^2$ converge num sentido da média quadrática para a quantidade determinística dt .

5.1.1 Definindo integração estocástica

Seja $f(t)$ uma função arbitrária de t e $Z(t)$ um processo de Wiener padrão. Podemos considerar a definição da integral estocástica $\int_0^T f(t)dZ(t)$ como o limite de somas parciais, feita em um sentido riemanniano comum

$$\int_0^T f(t)dZ(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_{k-1})[Z(t_k) - Z(t_{k-1})].$$

Em que os pontos discretos $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ são uma partição do intervalo $[0, T]$ e ξ_k é um ponto entre t_{k-1} e t_k . Aparentemente, a escolha do ponto intermediário muda o resultado do limite. Se tomarmos, por exemplo, $f(t) = Z(t)$ e escolhermos $\xi_k = \alpha t_k + (1 - \alpha)t_{k-1}$, em que $0 < \alpha < 1$, para todo k :

$$E \left[\sum_{k=1}^n Z(\xi_k)(Z(t_k) - Z(t_{k-1})) \right] = \sum_{k=1}^n E[Z(\xi_k)Z(t_k) - Z(\xi_k)Z(t_{k-1})] \quad (5.10)$$

$$= \sum_{k=1}^n [\min(\xi_k, t_k) - \min(\xi_k, t_{k-1})] \quad (5.11)$$

$$= \sum_{k=1}^n (\xi_k - t_{k-1}) = \alpha \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \alpha T. \quad (5.12)$$

A passagem de (5.10) para (5.11) ocorre pela propriedade (2.31). Como α sai no resultado, precisamos de definir qual ponto de fato pegar no intervalo entre t_{k-1} e t_k , e vamos fazer essa escolha considerando que, em finanças, a ação do investidor depende somente das informações presentes até o momento da ação, e que toda operação feita precede o movimento da ação no mercado. Portanto, vamos considerar $\xi_k = t_{k-1}$ (sempre o menor ponto de cada subintervalo). A definição de uma integral estocástica fica então da seguinte forma:

$$\int_0^T f(t)dZ(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_{k-1})[Z(t_k) - Z(t_{k-1})].$$

Só que ela não pode ser resolvida de uma forma não estocástica, isso induziria em um erro. Tomemos o exemplo em que $f(t) = Z(t)$:

$$\int_0^T Z(t)dZ(t) = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt}[Z(t)]^2 dt = \frac{Z(T)^2 - Z(0)^2}{2}.$$

Isso é um resultado falso, visto que, se resolvermos pela definição, um termo a mais aparece no final:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T Z(t)dZ(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n Z(t_{k-1}) [Z(t_k) - Z(t_{k-1})] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\{Z(t_{k-1}) + [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]\}^2 - Z(t_{k-1})^2 - [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [Z(t_k)^2 - Z(t_{k-1})^2] - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2 \\
 &= \frac{Z(T)^2 - Z(0)^2}{2} - \frac{T}{2}.
 \end{aligned}$$

Usando as propriedades (5.3) e (5.2) para resolver. Podemos rearranjar os termos para chegar numa relação integral.

$$\begin{aligned}
 \int_0^T Z(t)dZ(t) &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} [Z(t)]^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T dt \\
 2 \int_0^T Z(t)dZ(t) + \int_0^T dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} [Z(t)]^2 dt.
 \end{aligned}$$

Ou diferencial:

$$2Z(t)dZ(t) + dt = d[Z(t)]^2. \quad (5.13)$$

O que evidencia a necessidade de um novo conjunto de regras de diferenciação para processos estocásticos. O termo dt adicional na relação aparece justamente por causa da não nulidade da variação quadrática do processo estocástico. A preocupação para a sistematização destas regras deu origem ao lema de Itô.

5.2 LEMA DE ITÔ E DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS

O lema de Itô é a regra definitiva para a operação e obtenção de diferenciais de processos estocásticos. Os processos estocásticos de Itô podem ser definidos da seguinte forma:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dZ(s)$$

Com a garantia de que nenhuma das integrais divirjam. O processo também pode ser expresso pela sua forma diferencial:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dZ(t).$$

Supondo uma função $f(x, t)$, duplamente diferenciável e contínua, e um processo de Itô $Y = f(X, t)$, a diferencial dY é, pelo lema de Itô:

$$dY = \left[\frac{\partial f(X, t)}{\partial t} + \mu(t) \frac{\partial f(X, t)}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t)}{2} \frac{\partial^2 f(X, t)}{\partial x^2} \right] dt + \sigma(t) \frac{\partial f(X, t)}{\partial x} dZ. \quad (5.14)$$

Podemos chegar a esse resultado de expandirmos ΔY por série de Taylor até termos de segunda ordem, chegando à configuração:

$$\Delta Y = \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta X + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Delta X \Delta t + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta X^2 \right) + O(\Delta X^3, \Delta t^3). \quad (5.15)$$

Aplicando os limites $\Delta X \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, além de que $dX dt = 0$ e $dt^2 = 0$,

$$dY = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX)^2.$$

Levando em consideração também que

$$(dX)^2 = \mu(t)^2(dt)^2 + 2\mu(t)\sigma(t)dt dZ + \sigma^2(t)(dZ)^2 \quad (5.16)$$

$$= \sigma(t)(dZ)^2 \text{ por (5.8),} \quad (5.17)$$

$$= \sigma^2(t)dt. \quad (5.18)$$

Aplicando a igualdade chegamos à forma:

$$dY = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{\sigma^2(t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt.$$

Considerando também que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dX &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mu(t)dt + \sigma(t)dZ(t)) \\ &= \mu(t)\frac{\partial f}{\partial x}dt + \sigma(t)\frac{\partial f}{\partial x}dZ(t). \end{aligned}$$

Chega-se à formulação em (5.14). Se, por exemplo, tomarmos o caso em que $f(X, t) = Z^2$, podemos chegar à fórmula (5.13). Tomar $f(X, t) = Z^2$ significa que $X(t) = Z(t)$ e $f(x, t) = f(x) = x^2$, o que leva às diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2. \end{aligned}$$

Aplicando o lema de Itô, temos que:

$$\begin{aligned} dY &= d(Z^2) = 0dt + 2XdX + \frac{1}{2}2(dX)^2 \\ &= 2XdX + (dX)^2 \\ &= 2ZdZ + (dZ)^2 \\ &= 2ZdZ + dt. \end{aligned}$$

Se considerarmos agora uma outra função, $S(t)$, tal que

$$S(t) = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma Z(t)}.$$

Se considerarmos o processo estocástico $X(t)$ tal que

$$X(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z(t).$$

Podemos estabelecer as relações

$$\begin{aligned} X(t) &= \ln \frac{S(t)}{S_0} \\ S(t) &= S_0 e^{X(t)}. \end{aligned}$$

E, a fim de obter $dS(t)$, podemos calcular as derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x} &= S \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= S. \end{aligned}$$

Aplicando ao lema de Itô, obtemos

$$\begin{aligned}
dS(t) &= S(t)dX + \frac{1}{2}S(t)(dX)^2 \\
dS(t) &= S(t) \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ(t) \right] + \frac{1}{2}S(t) \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ(t) \right]^2 \\
dS(t) &= S(t) \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (dt)^2 + \sigma dZ(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 (dZ(t))^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sigma dt dZ(t) \right] \\
dS(t) &= S(t) \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ(t) + \frac{\sigma^2}{2} (dZ(t))^2 \right] \\
dS(t) &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t) dt + \sigma S(t) dZ(t) \\
dS(t) &= rS(t) dt + \sigma S(t) dZ(t).
\end{aligned}$$

Ou mesmo

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r dt + \sigma dZ(t). \quad (5.19)$$

Em que $S(0) = S_0$. Obviamente, $S(t)$ é a solução da equação diferencial (5.19).

O lema de Itô possui também uma versão multidimensional. Suponhamos uma função duplamente diferenciável e contínua $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ e um processo estocástico Y_n definido como

$$Y_n = f(X_1, X_2, \dots, X_n, t).$$

Onde o processo $X_j(t)$ é regido pelo processo de Itô

$$dX_j(t) = \mu_j(t) dt + \sigma_j(t) dZ_j(t).$$

Em que $j = 1, 2, \dots, n$. Os processos de Wiener $Z_j(t)$ e $Z_k(t)$ tem uma correlação definida pelo coeficiente de correlação ρ_{jk} , de forma que $dZ_j dZ_k = \rho_{jk} dt$. De forma semelhante a (5.15), expandimos ΔY_n até termos de segunda ordem nas variáveis ΔX_j :

$$\begin{aligned}
\Delta Y_n &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_1, \dots, X_n, t) \Delta t + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_1, \dots, X_n, t) \Delta X_j \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X_1, \dots, X_n, t) \Delta X_j \Delta X_k \\
&\quad + O(\Delta t \Delta X_j) + O(\Delta t^2).
\end{aligned}$$

Aplicando os limites em que $\Delta X_j \rightarrow 0$, $j = 1, \dots, n$ e $\Delta t \rightarrow 0$, os termos de ordens superiores em $\Delta t \Delta X_j$ e Δt^2 , e considerando que $dX_j dX_k = \sigma_j(t) \sigma_k(t) \rho_{jk} dt$, obtém-se a forma multidimensional do lema de Itô.

$$\begin{aligned}
dY_n &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_1, \dots, X_n, t) + \sum_{j=1}^n \mu_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_1, \dots, X_n, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sigma_j(t) \sigma_k(t) \rho_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X_1, \dots, X_n, t) \right] dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \sigma_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_1, \dots, X_n, t) dZ_j.
\end{aligned}$$

6 O MODELO DE BLACK E SCHOLES

(Black; Scholes, 1973) estabeleceram um marco histórico na teoria de opções financeiras, partindo da estratégia de cobertura (ou hedging) de uma posição de expectativa de desvalorização de uma opção de compra de um ativo arriscado. Para demonstrar de forma clara o raciocínio que leva à obtenção da fórmula de precificação, vamos definir algumas operações financeiras, produtos e contratos típicos do mercado financeiro.

No contexto do mercado, a ação de comprar um ativo (que pode ser uma ação, uma opção ou outro tipo de derivativo financeiro) com a perspectiva de que ele se valorize é chamada de posição *long*, ao passo que a ação de alugar um ativo e vendê-lo no mercado (com a perspectiva de que ele seja desvalorizado), e posteriormente recomprá-lo a um preço menor e devolvê-lo é chamado de posição *short*.

Pensando na situação de um vendedor de uma opção de *call*, ele está sujeito a um prejuízo indefinido, já que o preço do ativo subjacente pode crescer sem limite superior, e ele pode ser forçado a realizar a operação (do ponto de vista dele, vender a ação subjacente; do ponto de vista do dono da opção, comprá-la) a um preço muito menor que o do mercado. Para se prevenir do risco diante da possível valorização do ativo subjacente, o vendedor da opção pode comprar ações desse ativo, de forma que a desvalorização da *call* (uma posição *short*) é balizada pela valorização do ativo (uma posição *long*), e vice-versa. O uso integrado destas posições é chamado de procedimento de cobertura, ou *hedging*. (Black; Scholes, 1973) demonstraram que é possível a criação de um portfólio de cobertura sem risco, eliminando o risco estocástico do preço do ativo subjacente. Considerando um mercado eficiente (inclusive sem qualquer oportunidade de arbitragem) um portfólio sem risco tem a mesma taxa de retorno que a taxa de juros sem risco do mercado.

6.1 O PRINCÍPIO DO HEDGE SEM RISCO

De forma a chegar à precificação, Black e Scholes assumem as seguintes condições do mercado financeiro (Kwok, 2008):

- (i) A negociação é contínua no tempo;
- (ii) A taxa de juros sem risco r é conhecida e constante;
- (iii) As ações não pagam dividendos;
- (iv) Não há custos de transação na compra e venda de ações nem de opções, e não há tributação;
- (v) As ações são infinitamente divisíveis;
- (vi) Não há penalidades por vendas em posições de *short* (vendas a descoberto);
- (vii) Não há oportunidades de arbitragem sem risco.

O preço da ação é regido pelo Movimento Browniano Geométrico:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t \quad (6.1)$$

em que μ é a taxa esperada de retorno, σ é a volatilidade e Z_t é um processo Browniano padrão. Tanto μ quanto σ são constantes.

Supondo um portfólio que compõe uma venda a descoberto (*short selling*) de uma unidade de uma opção de *call* de uma ação do tipo europeu (que não paga dividendos) e uma posição comprada (ou *long holding*) de Δ_t unidades do ativo subjacente, o valor $\Pi(S_t, t)$ do portfólio num determinado tempo t é

$$\Pi = -c + \Delta_t S_t$$

em que $c = c(S_t, t)$ é o preço da *call*. Importante salientar que Δ_t varia com o tempo, explicitando a natureza dinâmica do *hedging*. Como o preço da *call* é uma função estocástica de S_t , podemos aplicar o

lema de Itô para chegar à forma diferencial:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}$$

de forma que

$$\begin{aligned} -dc + \Delta_t dS_t &= \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) dS_t \\ &= \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t \right] dt + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dZ_t. \end{aligned}$$

O ganho acumulado do portfólio num dado tempo t , $G(\Pi)$ é dado por

$$G(\Pi(S_t, t)) = \int_0^t -dc + \int_0^t \Delta_u dS_u \quad (6.2)$$

$$= \int_0^t \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} + \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \mu S_u \right] du + \int_0^t \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \sigma S_u dZ_u. \quad (6.3)$$

O elemento estocástico na fórmula do ganho do portfólio vem do último termo da equação (6.3), $\int_0^t \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \sigma S_u dZ_u$. Se adotarmos uma estratégia de *hedging* dinâmico escolhendo $\Delta_u = \frac{\partial c}{\partial S_u}$ em todo o tempo que $u < t$, o termo estocástico desaparece e o ganho financeiro se torna determinístico. Considerando que não há oportunidade de arbitragem, o ganho financeiro é o mesmo que o ganho resultante do investimento em um ativo financeiro livre de risco com uma posição dinâmica cujo valor é $-c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u}$. O ganho determinístico dessa posição é dado por

$$M_t = \int_0^t r \left(-c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) du.$$

Tornando iguais os ganhos determinísticos de M_t e $G(\Pi(S_t, t))$:

$$-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} = r \left(-c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} \right)$$

em que $0 < u < t$. Isso é satisfeito para qualquer preço S do ativo desde que o preço da *call* $c(S, t)$ satisfaça a equação

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0. \quad (6.4)$$

Essa equação é chamada de Equação de Black e Scholes. É uma equação diferencial parabólica. O parâmetro μ , a taxa de retorno esperada do ativo não aparece na equação.

Para complementar a formulação do modelo de precificação da opção, condições auxiliares devem ser agregadas. Uma delas é o pagamento final no tempo de vencimento T de uma call do tipo europeia (cujo ativo não paga dividendo, e a operação só pode ser liquidada no tempo T , e não até o tempo T), que é

$$c(S, T) = \max(S - X, 0),$$

em que X é o preço de exercício do ativo subjacente, e S o preço do ativo no mercado no tempo T .

O modelo de precificação se baseia em cinco parâmetros: S, T, X, r e σ . Desses, somente a volatilidade σ não é diretamente observada. A independência de μ vem do conceito de neutralidade de risco: em um mercado de risco neutro, investidores não demandam obter retornos maiores que os de investimentos sem risco por investir em ativos mais arriscados. Isso não ocorre na realidade, já que a aversão ao risco dos operadores do mercado é justamente "paga" com a possibilidade de retornos maiores. Essa abordagem de *precificação neutra ao risco* é viável se os riscos de possuir o ativo e a opção referente são possíveis de compor uma estratégia de cobertura (ou *hedging*). As primeiras palavras do artigo de (Black; Scholes, 1973) são: "Se as opções são precificadas corretamente no mercado, não deve ser possível

obter lucro a partir de portfólios de *long* e *short* em opções e seus ativos subjacentes. Usando este princípio, uma fórmula teórica de precificação para opções é obtida". Essa introdução apresenta de forma direta o princípio da *precificação neutra ao risco*.

A fórmula para uma opção de *put* do tipo europeia pode ser obtida de forma semelhante à de *call* apresentada, em (6.4), e tem a forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

O preço da opção é obtido resolvendo a equação de Black e Scholes, aplicando algumas condições auxiliares específicas do contrato financeiro firmado.

O modelo apresenta algumas fraquezas. A obtenção da equação é direcionada pela noção de *hedging* sem risco e deixa pra trás a rigorosidade no tratamento da mudança do valor do portfólio protegido. Ao definir a forma diferencial do portfólio como

$$d\Pi = -dc + \Delta_t dS_t.$$

perde-se o efeito da mudança de Δ_t . Aplicando o diferencial, $d(\Delta_t S_t) = \Delta_t dS_t + S_t d\Delta_t$. O segundo termo desaparece pela consideração de que a quantidade (em unidades) do ativo subjacente à opção é instantaneamente constante.

A possibilidade de estruturar um portfólio perfeitamente coberto depende da continuidade das operações financeiras e da continuidade do caminho do preço. Ambas as considerações foram posteriormente criticadas em outros trabalhos do campo da teoria da precificação de derivativos financeiros. Um processo de Wiener geométrico pode não ser um modelo preciso para o comportamento de ativos, sobretudo diante de choques e a chegada abrupta de informações e notícias referentes à economia e ao mercado financeiro.

A taxa de juros tem uma série histórica notadamente variável, e assumir que ela é constante (ou mesmo determinística) pode ser aceitável em casos de opções de tempo curto, mas não é consistente para casos mais complexos ou abrangentes.

O modelo assume uma quantidade ilimitada de operações financeiras, a fim de cumprir a cobertura contínua em todo o tempo. Tais operações, contudo, possuem custos, e operações ilimitadas gerariam custos ilimitados.

Apesar destas limitações, o modelo ainda é considerado seminal, e muitos outros modelos surgem de modificações deste, para comportar condições mais próximas do caso real, ou diminuir as limitações apresentadas.

6.2 A ESTRATÉGIA DA REPLICAÇÃO DINÂMICA

Por uma via alternativa, é possível chegar à equação de precificação de opções. (Merton et al., 1971) desenvolveu a partir de um portfólio contendo a opção, o ativo subjacente e um ativo sem risco, continuamente coberto, ou com *hedge* dinâmico. Considerando $Q_S(t)$ a quantidade de unidades do ativo financeiro, $Q_V(t)$ a quantidade de unidades da opção, $M_S(t)$ o valor monetário de $Q_S(t)$ unidades do ativo, $M_V(t)$ o valor monetário de $Q_V(t)$ unidades da opção e $M(t)$ o valor monetário investido na ação livre de risco, o valor do portfólio pode ser equacionado como

$$\Pi(t) = M_S(t) + M_V(t) + M(t) = Q_S(t)S + Q_V(t)V + M(t). \quad (6.5)$$

O portfólio é dinâmico no sentido de seu valor mudar com o tempo, bem como a proporção dos produtos financeiros que o compõe. Se considerarmos que não há aporte financeiro uma vez que este é estruturado, denominamos o portfólio auto-financiado. Nesta dedução, o portfólio é iniciado com investimento inicial nulo. Alterações na composição pela compra de novos produtos só podem ser feitas a partir da venda

de outros que já estão na carteira. Uma vez que os preços das opções são governados por processos estocásticos, podemos usar o lema de Itô pra chegar à diferencial do valor da opção V :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ. \end{aligned}$$

Podemos estruturar a dinâmica da opção V como um processo geométrico browniano:

$$\frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_V dZ. \quad (6.6)$$

Em que os termos novos são

$$\mu_V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \frac{1}{V} \quad (6.7)$$

e

$$\sigma_V = \frac{\sigma S}{V} \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (6.8)$$

O retorno instantâneo do portfólio ocorre pela mudança diferencial do preço dos ativos arriscados (dS), opções (dV) e ativos sem risco (rdt , em que r é a taxa de juros livre de risco) presentes, mais a diferença nas quantidades dos ativos arriscados ($dQ_S(t)$), opções ($dQ_V(t)$) e ativos livres de risco ($dM(t)$). Portanto,

$$d\Pi(t) = [Q_S(t)dS + Q_V(t)dV + rM(t)dt] + [SdQ_S(t) + VdQ_V(t) + dM(t)].$$

Só que o portfólio é auto-financiado, portanto, a soma dos termos entre os últimos colchetes se anula. Portanto, o resultado fica

$$d\Pi(t) = [Q_S(t)dS + Q_V(t)dV + rM(t)dt] = M_S(t) \frac{dS}{S} + M_V(t) \frac{dV}{V} + rM(t)dt.$$

$M(t)$ pode ser eliminado da equação substituindo-o a partir da equação (6.5). Isolando $M(t)$, obtemos

$$M(t) = \Pi(t) - Q_S(t)S(t) - Q_V(t)V(t). \quad (6.9)$$

O diferencial do portfólio autofinanciado é dado por

$$d\Pi(t) = Q_S(t) dS(t) + Q_V(t) dV(t) + r M(t) dt. \quad (6.10)$$

Substituindo (6.9) em (6.10), obtemos

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= Q_S dS + Q_V dV + r [\Pi - Q_S S - Q_V V] dt \\ &= Q_S (dS - rS dt) + Q_V (dV - rV dt) + r\Pi(t) dt. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Introduzindo as dinâmicas estocásticas de $S(t)$ e $V(t)$ segundo (6.1) e (6.6), e substituindo em (6.11), obtemos

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= Q_S [(\mu S dt + \sigma S dZ) - rS dt] + Q_V [(\mu_V V dt + \sigma_V V dZ) - rV dt] + r\Pi(t) dt \\ &= Q_S S(\mu - r) dt + Q_S S \sigma dZ + Q_V V(\mu_V - r) dt + Q_V V \sigma_V dZ + r\Pi(t) dt. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$M_S(t) = Q_S(t)S(t) \quad (6.12)$$

$$M_V(t) = Q_V(t)V(t) \quad (6.13)$$

a expressão torna-se

$$d\Pi(t) = [(\mu - r)M_S(t) + (\mu_V - r)M_V(t)] dt + [\sigma M_S(t) + \sigma_V M_V(t)] dZ(t) + r\Pi(t) dt. \quad (6.14)$$

Esta é a expressão da dinâmica estocástica do portfólio autofinanciado. A fim de "eliminar" o último termo, vamos fazer uma mudança, comparando o valor do portfólio descontado em relação ao crescimento do ativo livre de risco. Definimos o processo descontado como sendo

$$\tilde{\Pi}(t) = e^{-rt} \Pi(t).$$

Aplicando o lema de Itô,

$$d\tilde{\Pi}(t) = e^{-rt} d\Pi(t) - re^{-rt} \Pi(t) dt = e^{-rt} (d\Pi(t) - r\Pi(t) dt). \quad (6.15)$$

Substituímos a expressão de $d\Pi(t)$ dada em (6.14) em (6.15):

$$\begin{aligned} d\tilde{\Pi}(t) &= e^{-rt} \left\{ [(\mu - r)M_S + (\mu_V - r)M_V] dt + (\sigma M_S + \sigma_V M_V) dZ + r\Pi dt - r\Pi dt \right\} \\ &= e^{-rt} \left\{ [(\mu - r)M_S + (\mu_V - r)M_V] dt + (\sigma M_S + \sigma_V M_V) dZ \right\}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

E aí os termos com $r\Pi dt$ se cancelam, e o termo de juros do portfólio não aparece na dinâmica do processo descontado. Vamos olhar somente para o termo dentro das chaves, definindo-o como $d\Pi_2$.

$$d\Pi_2 = [(\mu - r)M_S(t) + (\mu_V - r)M_V(t)] dt + [\sigma M_S(t) + \sigma_V M_V(t)] dZ.$$

Como fazer para eliminar o caráter estocástico do portfólio? Isso o faria ser instantaneamente sem risco, e pode acontecer se uma certa proporção é seguida:

$$\sigma M_S(t) + \sigma_V M_V(t) = \sigma S Q_S(t) + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} Q_V(t) = 0.$$

Lembrando de (6.8) e (6.13). Isso leva à relação proporcional entre unidades da opção e do ativo subjacente igual a

$$\frac{Q_S(t)}{Q_V(t)} = -\frac{\partial V}{\partial S}. \quad (6.17)$$

Uma relação dependente do tempo, que deve ser satisfeita sempre. Como temos agora um portfólio que possui retorno determinístico, sem risco, e de investimento inicial nulo, o retorno não estocástico $d\Pi(t)$ é zero. Isso tem como consequência a seguinte mudança na equação (6.16):

$$0 = [(\mu - r)M_S(t) + (\mu_V - r)M_V(t)] dt.$$

Substituindo a proporção (6.17) na equação, temos que

$$(\mu - r)S \frac{\partial V}{\partial S} = (\mu_V - r)V. \quad (6.18)$$

Substituindo o valor de μ_V , definido em (6.7), chegamos à equação de Black-Scholes para a opção V :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

6.3 O ARGUMENTO DA NEUTRALIDADE DE RISCO

Outra forma de chegar ao resultado foi feita por (Cox; Ross, 1976), relacionando o conceito de *neutralidade de risco* com o *prêmio do mercado pelo risco*.

Tomando a fórmula para o preço da ação em (6.6), os termos μ_V e σ_V são definidos então como (6.7) e (6.8), respectivamente. Usando a equação (6.7) e reorganizando, a equação fica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu_V V = 0. \quad (6.19)$$

Só que os parâmetros μ e μ_V estão presentes. Podemos pegar uma relação a partir de (6.18), substituindo a relação da derivada parcial com (6.8), chegando a

$$\frac{\mu_V - r}{\sigma_V} = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

As quantidades $\mu_V - r$ e $\mu - r$ representam as taxas de retorno extra em relação à taxa livre de risco r , e dividindo pela volatilidade de cada produto (que já é uma medida associada ao risco), essa relação é interpretada como o prêmio de risco do mercado. Por essa relação, a equação estabelece que tanto a opção quanto o ativo subjacente devem ter o mesmo prêmio do risco de mercado. Se substituirmos as equações (6.7) e (6.8) na relação, chegamos à equação

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Que é exatamente a equação de Black-Scholes, que é como a (6.19) com a condição de que $\mu_V = \mu = 0$, ou seja, não há prêmio de mercado pelo risco de possuir a opção e o ativo subjacente em vez de possuir um ativo livre de risco. Isso significa, em suma, que supor um mercado que não paga o prêmio pelo risco, ou que os agentes do mercado não buscam o retorno adicional por apostar em um ativo mais arriscado, a precificação do mercado condiciona uma estratégia de *hedge* de forma a diminuir o risco do portfólio, precificando a opção segundo a equação de Black-Scholes.

6.4 O PREÇO PARA AÇÕES DO TIPO EUROPEU

A equação de Black-Scholes para o preço de uma call europeia é dada por

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc. \quad (6.20)$$

Em que onde S é o preço do ativo, $\tau = T - t$ é o tempo até o vencimento e X é o preço de exercício, além de que $0 < S < \infty$, $\tau > 0$ e $c = c(S, \tau)$.

Pensando algumas condições de contorno para o problema, a condição inicial (payoff) é

$$c(S, \tau) = \max(S - X, 0). \quad (6.21)$$

Em que X é o preço de exercício. Em outras palavras, o preço de uma opção de compra que expira no momento presente é a diferença entre o preço de exercício e o preço do ativo no momento presente.

Caso o ativo subjacente atinja o preço zero (entre o tempo presente e o vencimento), a opção de compra perde seu valor também, ou seja:

$$c(0, \tau) = 0.$$

Se o preço do ativo for muito grande (ou suficientemente grande), é muito provável que a opção de compra aconteça. Como o valor presente do preço de exercício é $Xe^{-r\tau}$, ou seja, descontado como juros compostos à taxa livre de risco em todo o tempo que falta entre o presente e o vencimento, então, o valor presente da *call* é

$$c(S, \tau) \approx S - Xe^{-r\tau},$$

quando $S \rightarrow \infty$.

Fazemos a transformação logarítmica

$$y = \ln S$$

$$c(S, \tau) = e^{-r\tau} w(y, \tau)$$

que elimina o termo de decaimento $-r\tau$ e torna os coeficientes constantes. Substituindo em (6.20), obtemos a equação parabólica

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad -\infty < y < \infty, \quad \tau > 0. \quad (6.22)$$

A condição inicial correspondente é

$$w(y, 0) = \max(e^y - X, 0). \quad (6.23)$$

A equação (6.22) é do tipo Fokker-Planck para um processo de difusão com drift constante. Para resolver (6.22), consideramos a solução correspondente a uma excitação impulsiva inicial:

$$w(y, 0) = \delta(y - \xi).$$

A solução resultante é a função de Green $\phi(y, \tau; \xi)$, isto é, a resposta do sistema após um impulso unitário aplicado em ξ no instante inicial. A forma de ϕ é conhecida, pois (6.22) é a equação de Fokker-Planck de um movimento browniano com drift

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2},$$

e variância $\sigma^2\tau$. Assim, a função de Green é a densidade normal

$$\phi(y, \tau; \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{\left[y - \xi - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right). \quad (6.24)$$

Ela satisfaz a condição de fronteira

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \phi(y, \tau; \xi) = \delta(y - \xi).$$

Como a equação é linear, a solução com condição inicial arbitrária (6.23) é dada pela convolução da função de Green com o estado inicial:

$$w(y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi, 0) \phi(y, \tau; \xi) d\xi. \quad (6.25)$$

Usando que $w(\xi, 0) = \max(e^\xi - X, 0)$, o integral restringe-se a $\xi > \ln X$, e substituindo (6.24) encontramos

$$c(y, \tau) = e^{-r\tau} w(y, \tau) = e^{-r\tau} \int_{\ln X}^{\infty} (e^\xi - X) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{[y + (r - \sigma^2/2)\tau - \xi]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi. \quad (6.26)$$

Esta expressão é a representação integral da solução pelo método de Green. Vamos separar a integral em dois termos

$$I_1 = \int_{\ln X}^{\infty} e^\xi \phi(y, \tau; \xi) d\xi,$$

$$I_2 = \int_{\ln X}^{\infty} \phi(y, \tau; \xi) d\xi.$$

Completando quadrados na exponencial, obtemos

$$I_1 = \exp(y + r\tau) \int_{\ln X}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{[y + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau - \xi]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\xi$$

$$= e^{r\tau} S N\left(\frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

onde $y = \ln S$ e N é a função distribuição normal acumulada padrão. Analogamente,

$$I_2 = N\left(\frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Substituindo I_1 e I_2 em (6.26), obtemos

$$c(S, \tau) = S N(d_1) - X e^{-r\tau} N(d_2),$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Esta é exatamente a fórmula clássica de Black-Scholes derivada inteiramente por meio da função de Green aplicada à equação transformada. Observa-se facilmente que a solução satisfaz as condições de fronteira:

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} c(S, \tau) = 0,$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} c(S, \tau) = S - X e^{-r\tau},$$

bem como a condição inicial (6.21).

O preço da *call* está entre dois limites:

$$\max(S - X e^{-r\tau}, 0) \leq c(S, \tau) \leq S.$$

Em que $S \geq 0$, e $\tau \geq 0$. Que estão em concordância com as condições limite como em (6.21).

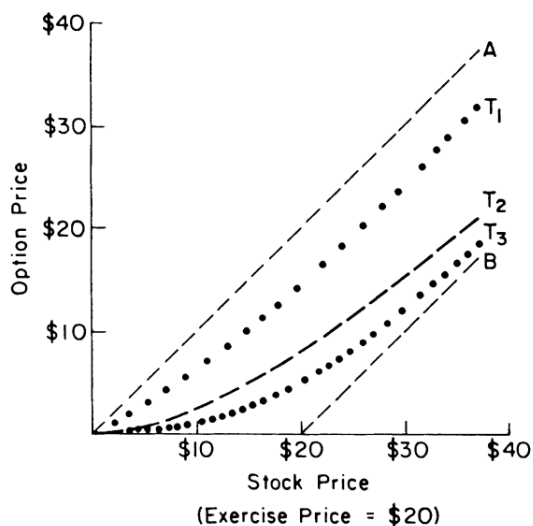


Figura 3 – Comparação entre o valor da opção e o preço da ação subjacente, retirado do artigo original de (Black; Scholes, 1973).

6.4.1 A relação de paridade *put-call*

A relação de paridade entre *puts* e *calls* é dada por

$$p = c - S + D + X B(\tau).$$

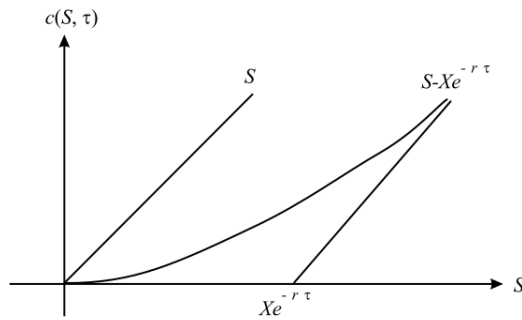


Figura 4 – $c(S, \tau)$ em relação à S em um dado τ , salientando os limites da opção (Kwok, 2008).

Como já temos a fórmula para o preço de uma opção de compra, podemos obter o preço de uma opção de venda $p(S_t, t)$:

$$\begin{aligned} p(S, \tau) &= c(S, \tau) + Xe^{-r\tau} - S \\ &= S[N(d_1) - 1] + Xe^{-r\tau}[1 - N(d_2)] \\ &= Xe^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned}$$

Para um valor suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} N(-d_2) &\rightarrow 1 \\ SN(-d_1) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

e por isso

$$p(S, \tau) \approx Xe^{-r\tau}.$$

À medida que $S \rightarrow 0$ pela direita. O valor da opção de compra pode ser menor que seu valor intrínseco, que é $X - S$, quando S é suficientemente pequeno. No limite em que $S \rightarrow \infty$, $SN(-d_1) \rightarrow 0$, e portanto o preço limite da opção de venda se anula:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p(S, \tau) = 0.$$

7 DESENVOLVIMENTOS POSTERIORES

7.1 DISTRIBUIÇÕES ESTÁVEIS

Todo esse trabalho versou sobre a pertinência e o quão apropriado é o uso da função gaussiana como função distribuição de probabilidade, tanto como modelo para o preço de uma ação (no modelo de Bachelier), quando na forma logarítmica para fundamentar o movimento Browniano geométrico, passando pela sua obtenção extraindo o limite em que calculamos o valor da média de múltiplas variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Contudo, ela não é a única distribuição de probabilidade possível de aparecer em muitos fenômenos estatísticos, inclusive nos modelos do campo da finança quantitativa.

Há uma família de distribuições estáveis, chamadas de distribuições de Lévy, que possuem seu próprio teorema limite generalizado (Voit, 2005). Essa classe de distribuições lida bem melhor com o fenômeno de alta curtose, ou caudas largas: quando analisadas, há um número elevado de operações no mercado financeiro que resultam em um ganho ou prejuízo elevado. No contexto das distribuições de Lévy, distribuições estáveis são definidas como aquelas que, quando tomada a convolução dela com ela mesma, o resultado é a mesma distribuição com uma diferença de escala somente. Processos estocásticos governados por distribuições de Lévy também são mais descontínuas que processos brownianos, o que pode se adaptar melhor a comportamentos do mercado como a reação a notícias repentinas e imprevisíveis (Mantegna; Stanley, 1999).

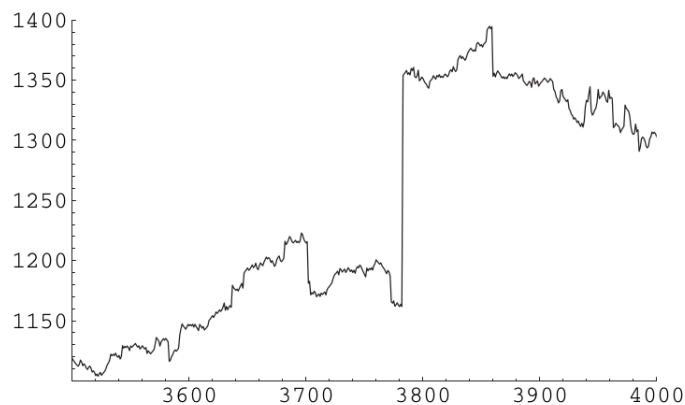


Figura 5 – Processo de Lévy. Nota-se descontinuidades frequentes em diferentes escalas, próximo de acontecimentos reais no mercado financeiro (Voit, 2005).

Rigorosamente falando, os processos estáveis de Lévy definem uma *base de atração* no espaço funcional da funções densidade de probabilidade (Mantegna; Stanley, 1999).

7.2 DIVISIBILIDADE DE PROCESSOS ALEATÓRIOS

A classe de processos aleatórios infinitamente divisíveis é uma classe que envolve a dos processos aleatórios estáveis. Esses processos podem ter variância finita ou não. Processos gaussianos são os únicos estáveis com variância finita.

O uso de distribuições de Lévy levanta um novo problema, que envolve o intervalo restrito para a variância finita destes processos. Usá-los como modelos levanta novas questões teóricas, e ofusca a análise do risco (Mantegna; Stanley, 1999).

Observações empíricas, conjuntamente com teoremas limite para distribuições estáveis direcionaram a modelagem de retornos de ativos financeiros para o campo de distribuições não estáveis, como as distribuições de Lévy Truncadas e as distribuições de t-Student. Ambas possuem o benefício de

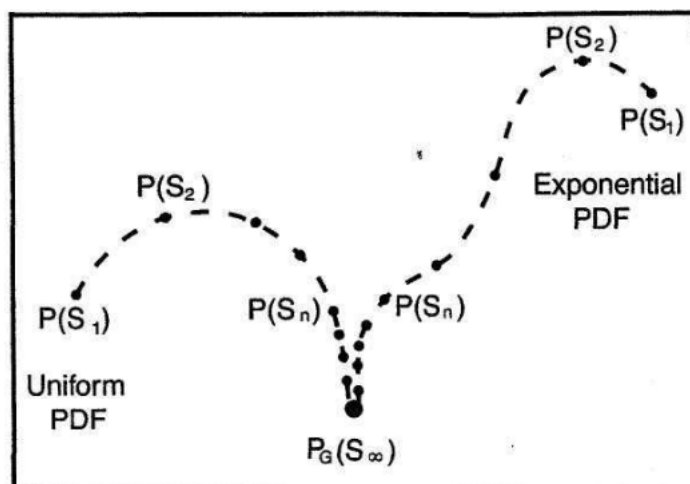


Figura 6 – Representação da função gaussiana como uma base de atração. À medida que a quantidade de variáveis aleatórias identicamente distribuídas aumenta, a função distribuição de probabilidade se aproxima de uma gaussiana (Mantegna; Stanley, 1999).

suas caudas decaírem segundo leis de potência que estão fora da restrição de estabilidade das distribuições estáveis de Lévy (Voit, 2005).

7.3 A VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA E O MODELO DE HESTON

Já foi dito aqui que na equação de Black-Scholes, todos os parâmetros são observáveis, exceto a volatilidade σ . O cálculo da chamada *volatilidade implícita* indica fortemente que ela não é constante, e considerá-la como tal é um fator limitante do modelo. Há fenômenos documentados que possuem suas próprias teorizações que se baseiam nesse fato, sendo o "sorriso da volatilidade" um dos mais notórios (Samuelson, 2016)(Sircar; Papanicolaou et al., 1999).

Em teorias mais recentes, a volatilidade não é nem mesmo considerada determinística, mas estocástica. O modelo de Heston para a volatilidade contempla essa propriedade, e sendo capaz de respeitar a equação de Fokker-Plank, permanece condizente com os pressupostos teóricos apropriados para modelar os retornos de ativos e derivativos no mercado financeiro. Resultados recentes indicam uma concordância alta com dados empíricos em mercados como o do S&P500 (Dragulescu; Yakovenko, 2002).

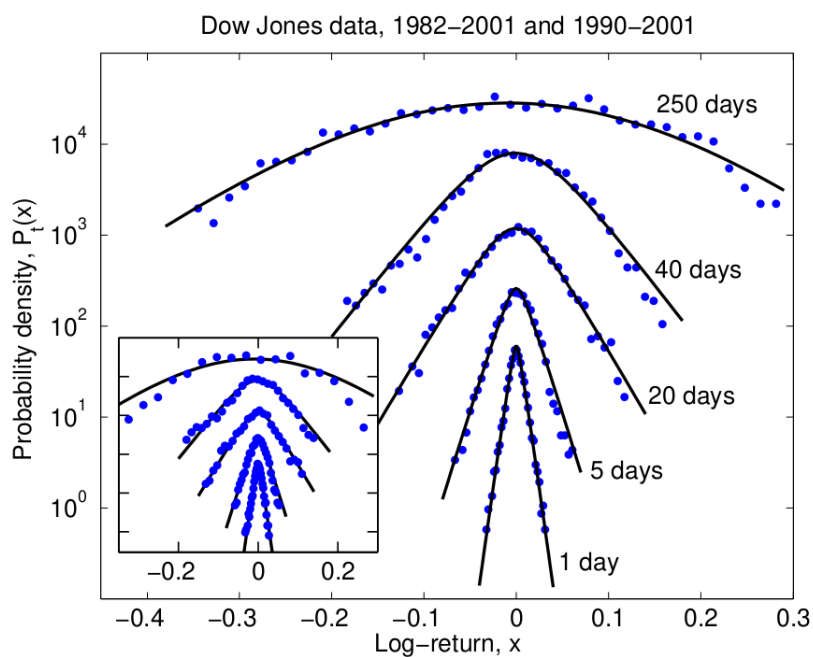


Figura 7 – Distribuições de probabilidade $P_t(x)$ dos retornos logarítmicos em diferentes escalas de tempo para o Índice Dow-Jones. Em azul os pontos experimentais e as linhas são o modelo teórico de Heston (Dragulescu; Yakovenko, 2002).

8 CONCLUSÕES

Desde a publicação da *Teoria da especulação*, tese de doutorado de Louis Bachelier, muito se desenvolveu, tanto no refinamento de modelos para os ativos financeiros, quanto a fundamentação matemática que tornou possíveis a operação de aplicações como a diferenciação e integração de processos estocásticos, quanto mesmo os produtos largamente utilizados no mercado financeiro. A tese de Bachelier segue sendo um marco teórico histórico no campo da finança quantitativa. Sua abordagem refinada para a época, evitando alterações *ad hoc* (isso é, alterações particulares e pontuais posteriores a incoerências entre a observação e a teoria) e evidenciando a importância de analisar as trajetórias estocásticas, estabeleceu critérios e campos de investigação que ajudaram a construir toda a teoria posterior.

De forma semelhante, o modelo de Black e Scholes, mesmo que posteriormente aprimorado e revisitado por outros argumentos, possibilitou uma precificação poderosa e abrangente para opções financeiras a partir de concisas e consistentes afirmações, notadamente a noção de *hedge* dinâmico para reduzir ao máximo o risco associado a possuir uma opção, utilizando somente o ativo subjacente e um ativo livre de risco.

A teoria estatística que circunda e sustenta todo o campo do conhecimento também foi se desenvolvendo, com destaque para o lema de Itô, ferramenta crucial para a obtenção de resultados mais refinados no âmbito da precificação de opções financeiras.

Mesmo com toda a robustez apresentada, muitos aspectos do mercado não são contemplados, e muitas alterações à teoria apresentada neste trabalho visam comportar, racionalizar, modelar e compreender estes fenômenos, como a variação da volatilidade, a alta curtose dos retornos de aplicações financeiras, pagamento de dividendos, custos operacionais e mercados não idealizados. Estas inadequações são combustível para o desenvolvimento de novas teorias e descobertas no campo da finança quantitativa.

REFERÊNCIAS

- BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of political economy**, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.
- COX, John C; ROSS, Stephen A. The valuation of options for alternative stochastic processes. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 3, n. 1-2, p. 145–166, 1976.
- DAVIS, Mark; ETHERIDGE, Alison. Louis Bachelier’s theory of speculation. **URL: <https://f-origin.hypotheses.org/wp-content/blogs.dir/1596/files/2014/12/Mark-Davis-Talk.pdf>**, 2006.
- DRAGULESCU, Adrian A; YAKOVENKO, Victor M. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. **Quantitative finance**, IOP Publishing, v. 2, n. 6, p. 443, 2002.
- KWOK, Yue-Kuen. **Mathematical models of financial derivatives**. [S.l.]: Springer, 2008.
- MANTEGNA, Rosario N; STANLEY, H Eugene. **Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999.
- MERTON, Robert C et al. Theory of rational option pricing. **Journal of political economy**, World Scientific, 1971.
- NAPOLITANO, Reginaldo de Jesus. **Introdução à Econofísica: Notas de Aula**. [S.l.]: Edição pessoal, 2018.
- SAMUELSON, Paul A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. **The world scientific handbook of futures markets**, World Scientific, p. 25–38, 2016.
- SIRCAR, K Ronnie; PAPANICOLAOU, George C et al. Stochastic volatility, smile & asymptotics. **Applied Mathematical Finance**, CHAPMAN & HALL, v. 6, p. 107–145, 1999.
- VOIT, Johannes. **The statistical mechanics of financial markets**. [S.l.]: Springer, 2005.