UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RAFAEL HENRIQUE BERNARDELLI.

# INTRODUÇÃO À ANÁLISE NÃO STANDARD POR MEIO DOS HIPER-REAIS.

SÃO CARLOS - SP
2025

RAFAEL HENRIQUE BERNARDELLI.

# INTRODUÇÃO À ANÁLISE NÃO STANDARD POR MEIO DOS HIPER-REAIS.

Monografia apresentada ao curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador(a): Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi.

SÃO CARLOS - SP
2025

*À Guilherme Nogueira Martinatti. (in memoriam)*

# Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, aos meus pais, Donizete e Sônia, pelo apoio incondicional e pelo suporte contínuo ao longo de toda a minha trajetória. Sem eles, nada disso seria possível.

Agradeço profundamente ao meu orientador, Rafael Fernando Barostichi, por ter aceitado me orientar em um tema pouco comum, por compartilhar seu conhecimento e por toda a orientação durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à professora Cláudia pelo incentivo constante e por toda a ajuda ao longo da graduação.

À minha companheira Maria, agradeço por estar sempre ao meu lado — especialmente por ter escutado pacientemente, durante um ano inteiro, conversas sobre números hiper-reais.

Agradeço ao PET Matemática e a todos os seus membros, atuais e antigos, pelo ambiente acolhedor e enriquecedor.

Aos meus familiares Florinda Orlanda, Raul, Laís e Nathalia.

Por fim, agradeço aos meus amigos Augusto, Lucas, Douglas e Paulo.

*"You will find out what you really wanted to do when you are doing it."*
*(Alain Robert)*

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar os números hiper-reais e a análise não standard, uma abordagem alternativa à análise clássica desenvolvida por Abraham Robinson. Por meio da construção dos hiper-reais ${}^*\mathbb{R}$, utilizando a técnica do ultraproduto, é possível estender o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ para incluir infinitésimos e infinitos, permitindo uma formalização rigorosa de conceitos intuitivos da análise. Para tornar essa construção possível, são introduzidos os conceitos de filtros e ultrafiltros, com destaque para os ultrafiltros não principais, que desempenham papel essencial na definição dos hiper-reais. A análise não standard permite reformular noções fundamentais como limite, continuidade, derivada e integral utilizando infinitesimais, sem abrir mão do rigor matemático. O trabalho discute ainda propriedades dos números hiper-reais, como sua estrutura algébrica e o princípio da transferência.

**Palavras-chave**: Hiper-reais, Análise Não Standard, Filtros, Princípio da Transferência.

# Sumário


| | | |
|---|---|---|
| 1 | INTRODUÇÃO | 9 |
| 2 | FILTROS, ULTRAFILTROS E EXISTÊNCIA DE ULTRAFILTROS NÃO PRINCIPAIS. | 11 |
| 2.1 | Filtros e ultrafiltros. | 11 |
| 2.2 | Lemas importantes sobre filtros. | 12 |
| 2.3 | Existência de ultrafiltros não principais. | 15 |
| 3 | A CONSTRUÇÃO DOS HIPER-REAIS. | 17 |
| 3.1 | Equivalência módulo $\mathcal{F}$. | 17 |
| 3.2 | A ultrapotência $^*\mathbb{R}$. | 20 |
| 3.3 | Infinitesimais e ilimitados. | 24 |
| 4 | EXTENSÕES. | 25 |
| 4.1 | Extensões de conjuntos. | 25 |
| 4.2 | Resultados em extensões de conjuntos. | 26 |
| 4.3 | Extensões de funções. | 28 |
| 4.4 | Extensões de relações. | 29 |
| 4.5 | Observações sobre extensões | 30 |
| 5 | ESTRUTURAS, LINGUAGENS E O PRINCÍPIO DA TRANSFERÊNCIA. | 32 |
| 6 | HALOS, GALÁXIAS E SHADOWS | 37 |
| 6.1 | Números infinitesimais, apreciáveis e ilimitados. | 37 |
| 6.2 | Halos e Galáxias. | 40 |
| 6.3 | Shadows e completude. | 41 |
| 7 | SEQUÊNCIAS. | 46 |
| 7.1 | Convergência. | 46 |
| 7.2 | Resultados para sequências de Cauchy. | 48 |
| 8 | FUNÇÕES CONTÍNUAS. | 51 |
| 8.1 | Limite de funções. | 53 |
| 9 | DIFERENCIAÇÃO. | 54 |
| 9.1 | Diferenciais. | 55 |
| 9.2 | Regras de derivação. | 56 |

10 INTEGRAÇÃO. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59

REFERÊNCIAS . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

# 1 Introdução

A ideia de um número infinitesimal, um número que vários matemáticos afirmam ser menor do que qualquer número real, mas ainda assim maior que zero, faz parte da matemática desde os tempos de Arquimedes.

Em seu trabalho *O Método dos Teoremas Mecânicos*, Arquimedes utiliza infinitesimais e conhecimentos físicos, como o centro de massa de determinados objetos, para calcular as áreas desses mesmos objetos.

Newton, no século XVII, fez uso de infinitesimais. Ele estudava curvas em um plano onde o tempo era o parâmetro, $(x(t), y(t))$, e chamava $x$ e $y$ de fluentes. Assim, Newton determinava a velocidade das curvas, que é o vetor $(\dot{x}, \dot{y})$, ao qual ele se referia como fluxões. Dessa forma, Newton considerava uma quantidade $\varepsilon$ infinitamente pequena e afirmava que o ponto $(x + \dot{x}\varepsilon, y + \dot{y}\varepsilon)$ pertencia à curva.

Leibniz, outro descobridor do cálculo e contemporâneo de Newton, também fez uso extensivo de infinitesimais em suas descobertas. Um exemplo é sua maneira de demonstrar a derivada de um produto. Leibniz observa que $dxy = (x + dx)(y + dy) - xy$.

Depois disso, distribui como se os infinitesimais obedecessem às regras de um corpo ordenado, da seguinte forma:

$dxy = xy + xdy + ydx + dxdy - xy = xdy + ydx.$

Em seu argumento, Leibniz afirma que $dxdy$ desaparece, pois é muito pequeno em comparação às outras parcelas.

Outro matemático que fez grande uso de infinitesimais foi Euler, que, além de empregar números infinitesimais em suas demonstrações, também considerava seus inversos, os quais ele via como números infinitamente grandes.

Obviamente, essas ideias de infinitesimais, na forma utilizada até então, além de enfrentarem resistência de vários matemáticos devido à falta de rigor e fundamentos, não correspondiam à evolução que a matemática estava experimentando. Aos poucos, com as contribuições de Cantor, Dedekind, Weierstrass e diversos outros matemáticos do século XIX, essas ideias foram gradualmente substituídas, e o cálculo passou a ser rigorosamente fundamentado, originando o que hoje conhecemos como análise real.

Em 1966, um matemático chamado Abraham Robinson percebeu que, com os avanços da lógica matemática, principalmente na teoria dos modelos, seria possível desenvolver o cálculo de maneira satisfatória utilizando infinitesimais. Robinson utilizou um teorema da lógica matemática chamado *Teorema da Compacidade* para justificar a existência de um conjunto numérico denominado hiper-reais. Esse conjunto contém os números reais, mas também inclui os infinitesimais e, além disso, possui uma estrutura bem definida, permitindo a aritmética em seus elementos e apresentando a estrutura de um corpo ordenado.

Além desse bom comportamento dos seus elementos, devido ao *Teorema de Łoś's*, esse novo ambiente respeita o princípio da transferência, que é a grande descoberta de Robinson. Isso faz com que a análise não standard seja mais do que apenas uma justificativa para os infinitesimais; ela se torna uma nova ferramenta matemática. O princípio da transferência estabelece que qualquer sentença escrita em lógica de primeira ordem que seja verdadeira nos números reais pode ser transferida para uma sentença em primeira ordem sobre os hiper-reais, sendo verdadeira nesse novo ambiente. A recíproca também é válida. Quando duas estruturas possuem essa propriedade, dizemos que elas são elementarmente equivalentes.

A abordagem moderna para o estudo da análise não standard utiliza a ideia de filtros e ultraprodutos. Vale destacar que, mesmo que este trabalho foque um ultraproduto específico, o método dos filtros e ultraprodutos pode ser aplicado em diversas áreas da matemática para a construção de modelos não standard. Soluções para problemas que até então estavam sem resposta foram encontradas utilizando a análise não standard em áreas como análise funcional, teoria da probabilidade, análise complexa, teoria dos números, física matemática e matemática econômica.

A diferença entre a análise não standard de Robinson e a abordagem moderna, como mencionado anteriormente, está no uso de filtros e na quantidade de lógica matemática necessária para o desenvolvimento do estudo. O formalismo exigido pela abordagem de Robinson afastava matemáticos que não estavam familiarizados com lógica. No estudo moderno, embora algumas noções de lógica matemática sejam necessárias, seu uso será feito apenas para que possamos compreender e justificar a transferência.

Nesse trabalho, seguiremos de perto o livro (GOLDBLATT, 1998), com algumas partes complementadas por (HURD; LOEB, 1985). Para os fundamentos lógicos, utilizaremos (MENDELSON, 2015) e (MORTARI, 2001). Por fim, para os resultados da Análise Real clássica, empregaremos (LIMA, 1976).

# 2 Filtros, ultrafiltros e existência de ultrafiltros não principais.

## 2.1 Filtros e ultrafiltros.

Nesta seção, será definida a ideia de filtro, que é fundamental para a construção dos hiper-reais. Na sua forma mais geral, filtros são conjuntos parcialmente ordenados que respeitam algumas propriedades; assim, é possível estudar filtros por meio da teoria das ordens. Para o nosso contexto, estudaremos filtros do ponto de vista de conjuntos. Além de aparecerem na teoria da ordem, também se manifestam na teoria dos reticulados, na topologia e na lógica matemática.

**Definição 2.1.** *Seja* $\mathrm{I}$ *um conjunto não vazio. Chamamos de* $\mathcal{P}(\mathrm{I})$ *o conjunto dos subconjuntos de* $\mathrm{I}$*, ou seja,*

$\mathcal{P}(\mathrm{I}) = \{\mathrm{A} : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{I}\}$.

$\mathcal{P}(\mathrm{I})$ *também é chamado de conjunto das partes de* $\mathrm{I}$.

**Definição 2.2.** *Seja* $\mathcal{F}$ *um subconjunto não vazio de* $\mathcal{P}(\mathrm{I})$. $\mathcal{F}$ *será denominado filtro em* $\mathrm{I}$ *se respeitar as seguintes propriedades:*

*I* - *Se* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}$*, então* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{F}$.

*Sc* - *Se* $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ *e* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{I}$*, então* $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$.

As duas propriedades são chamadas, respectivamente, de propriedade das interseções e propriedade dos superconjuntos. Elas nos dizem que, em um filtro $\mathcal{F}$ de um conjunto I, a interseção finita de conjuntos no filtro ainda pertence ao filtro e que todos os subconjuntos de I que estão acima de um elemento $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ na ordem linear estabelecida por $\subseteq$ em $\mathcal{P}(\mathrm{I})$ também estão em $\mathcal{F}$.

**Definição 2.3.** *Dizemos que* $\mathcal{F}$ *é próprio se* $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Observe que, se $\mathcal{F}$ não é próprio, então $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathrm{I})$ devido à propriedade do superconjunto. Além disso, a propriedade do superconjunto nos diz que $\mathrm{I} \in \mathcal{F}$.

Agora, vamos exigir ainda mais uma propriedade para obter um filtro essencial na construção dos números reais não standard.

**Definição 2.4.** *Um filtro que possui a seguinte propriedade é denominado ultrafiltro.*

*U - Para todo* $A \subseteq I$*, ou* $A$ *ou* $A^c$ *pertence a* $\mathcal{F}$ *, sendo esse* ou *exclusivo.*

A próxima definição nos apresenta um tipo especial de ultrafiltro.

**Definição 2.5.** $\mathcal{F}^i = \{A \subseteq I : i \in A\}$ *é denominado ultrafiltro principal.*

O ultrafiltro principal é um filtro no qual todo elemento contém o mesmo elemento $i$.

Mesmo que tenhamos definido o ultrafiltro principal, ainda não sabemos se se trata de um ultrafiltro ou, até mesmo, de um filtro. Vamos verificar isso.

Primeiro, observe que as propriedades de filtro são satisfeitas, pois, se $A$ e $B$ pertencem a $\mathcal{F}^i$, então $i \in A$ e $i \in B$; consequentemente, $i \in A \cap B$. Assim, $A \cap B \in \mathcal{F}^i$. Além disso, se $A \subseteq B \subseteq I$ e $i \in A$, então $i \in B$ e, portanto, $B \in \mathcal{F}^i$.

Agora, vamos verificar a asserção sobre ser um ultrafiltro. Dado $A \in \mathcal{P}(I)$, temos que $i \in A$ ou $i \in A^c$. Assim, ou $A$ ou $A^c$ pertence a $\mathcal{F}^i$.

Na análise não standard, sempre serão utilizados filtros em conjuntos infinitos. A seguinte definição nos ajuda a classificar os elementos desses filtros em conjuntos infinitos.

**Definição 2.6.** *Um conjunto* $C$ *é chamado de cofinito se* $C^c$ *é finito.*

**Exemplo 2.7.** $\mathcal{F}^{co} = \{A \subseteq I, I - A$ *é finito* $\}$ *é chamado de filtro de Fréchet ou filtro cofinito. Este filtro, se* $I$ *for infinito, conterá todos os subconjuntos cofinitos de* $I$.

**Definição 2.8.** *Seja* $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(I)$*. O filtro gerado por* $\mathcal{H}$ *é o menor filtro em* $I$ *que contém* $\mathcal{H}$*,* $\mathcal{F}^{\mathcal{H}} = \{A \subseteq I : A \supseteq B_1 \cap ... \cap B_n$*, onde* $B_i \in \mathcal{H}$ *para* $i \in \{1, ..., n\}\ \}$*. O ultrafiltro principal é um caso de filtro gerado por* $\mathcal{H} = \{i\}$.

## 2.2 Lemas importantes sobre filtros.

Nesta seção, serão enunciados e demonstrados diversos lemas sobre filtros. Estes lemas serão utilizados para provar a existência de um ultrafiltro que não é principal.

**Lema 2.9.** $\mathcal{F}^{co}$ *é próprio se, e somente se,* $I$ *é infinito.*

*Demonstração.* Se $\mathcal{F}^{co}$ é próprio, então $\emptyset \notin \mathcal{F}^{co}$, ou seja, $I - \emptyset$ é infinito.
Se $I$ é infinito, então $\emptyset \notin \mathcal{F}^{co}$, pois, caso pertencesse, $I - \emptyset = I$ seria finito. □

**Proposição 2.10.** *Se* $I$ *é finito, então todo ultrafiltro em* $I$ *é principal.*

*Demonstração.* Suponha $I$ finito. Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro não principal em $I$. Assim, por ser não principal, para cada $k \in I$, $\{k\} \notin \mathcal{F}$. Por ser um ultrafiltro, para cada $k \in I$, temos $\{k\}^c \in \mathcal{F}$. Considere o conjunto dos $\{k\}^c$ e retire $\{i\}^c$ para algum $i \in I$. Agora, utilizando a propriedade da interseção, realize a interseção finita $\bigcap_{k \in I \setminus \{i\}} \{k\}^c = \{i\}$. Assim, $\{i\} \in \mathcal{F}$, o que leva a uma contradição.

$\square$

**Lema 2.11.** *Seja* $\{\mathcal{F}_x : x \in X\}$ *uma família de filtros em um conjunto* $I$. *Suponha, adicionalmente, que essa família esteja linearmente ordenada pela ordem* $\subseteq$. *Considere a união dessa família*

$$\bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{A : \exists x (x \in X) \wedge (A \in \mathcal{F}_x)\};$$

*essa união também é um filtro em* $I$.

*Demonstração.* Primeiro provamos a propriedade da interseção. Sejam $A, B \in \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Assim temos $x, y \in X$, onde $A \in \mathcal{F}_x$ e $B \in \mathcal{F}_y$. Como $\bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ é linearmente ordenado, suponha, sem perda de generalidade, que $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}_y$. Daí, $A, B \in \mathcal{F}_y$, e, devido à propriedade da interseção, $A \cap B \in \mathcal{F}_y$, ou seja $A \cap B \in \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$.

Provemos agora a propriedade do superconjunto. Seja $A \in \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$, assim temos $x \in X$, onde $A \in \mathcal{F}_x$. Sejam $B \subset I$ e $A \subset B$, assim da propriedade do superconjunto temos $B \in \mathcal{F}_x$, e, consequentemente, $B \in \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$.

$\square$

**Lema 2.12.** *Sejam* $\mathcal{F}$ *um ultrafiltro em* $I$ *e* $A$ *um subconjunto finito de* $I$. *Se* $A \in \mathcal{F}$, *então* $\mathcal{F}$ *é principal.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{F}$ ultrafiltro com $A \in \mathcal{F}$ e $A$ finito. Suponha que $\mathcal{F}$ não seja principal para encontrarmos uma contradição. Assim, para cada $i \in A$, temos $\{i\} \notin \mathcal{F}$ por não ser principal. Por ser ultrafiltro, para cada $i \in A$, temos $\{i\}^c \in \mathcal{F}$. Agora, faça a interseção de todos esses conjuntos, o que é possível pois se trata de um número finito, e observe que, $\bigcap_{i \in A} \{i\}^c = A^c$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{F}$ é ultrafiltro e não podemos ter $A$ e $A^c$ pertencentes a $\mathcal{F}$. $\square$

Vemos, neste item, que um ultrafiltro em um conjunto I deve conter todos os seus subconjuntos cofinitos, caso deseje ser não principal.

**Definição 2.13.** *Um conjunto* $\mathcal{H}$ *tem a propriedade da interseção finita se dados* $B_1, ..., B_n \in \mathcal{H}$ *temos* $B_1 \cap ... \cap B_n \neq \emptyset$.

**Lema 2.14.** *Seja* $\mathcal{F}$ *um filtro próprio em* $I$. *O conjunto* $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ *possui a propriedade da interseção finita se e somente se* $A \notin \mathcal{F}$.

*Demonstração.* Se $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ possui a propriedade da interseção finita e $A \in \mathcal{F}$, temos $A^c \cap A = \emptyset$. Assim, $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ não teria a propriedade da interseção finita. Por outro lado, se $A \notin \mathcal{F}$ e, como hipótese de contradição, supomos que $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ não possui a propriedade da interseção finita; teremos $B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}$ tal que $B_1 \cap ... \cap B_n \cap A^c = \emptyset$. Como $B_1 \cap ... \cap B_n \neq \emptyset$, então $B_1 \cap ... \cap B_n \subseteq A$. Assim, do axioma do superconjunto, $A \in \mathcal{F}$, o que nos leva a um absurdo. □

Antes de prosseguir para o próximo lema, precisamos de uma definição.

**Definição 2.15.** *(Elemento $\leqslant -\mathtt{maximal}$)*

*Seja $(P, \leqslant)$ um conjunto com uma ordem parcial. Um elemento $M \in P$ é chamado de $\leqslant -\mathtt{maximal}$ caso não tenha $x \in P$ tal que $M \leqslant x$.*

**Lema 2.16.** *$\mathcal{F}$ é um ultrafiltro se, e somente se, $\mathcal{F}$ é próprio e maximal. $\mathcal{F}$ é maximal na ordem parcial $\subseteq$ em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(I))$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{F} \cup B$ um filtro próprio que contém $\mathcal{F}$, onde $B \subset \mathcal{P}(I)$. Seja $A^c \in B$. Assim, $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ possui a propriedade da interseção finita, pois, caso não a tivesse, $\mathcal{F} \cup B$ não seria próprio. Do Lema 2.11 temos que $A \notin \mathcal{F}$ e, como $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro, $A^c \in \mathcal{F}$, ou seja, para cada $A_i^c \in B$, temos $A_i^c \in \mathcal{F}$ o que implica em $\mathcal{F} \cup B = \mathcal{F}$.
($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{F}$ um filtro próprio maximal e $A^c \notin \mathcal{F}$. $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ não mantém a propriedade da interseção finita, pois, se a mantivesse, $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ ainda seria próprio e, consequentemente, uma extensão para $\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ não seria próprio maximal. Usando a contrapositiva do Lema 2.11 temos que $A \in \mathcal{F}$. Assim, ou $A$ ou $A^c$ pertencem a $\mathcal{F}$. □

**Lema 2.17.** *Seja $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ o filtro gerado por $\mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(I)$. $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ é próprio se e somente se $\mathcal{H}$ possui a propriedade da interseção finita.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ é próprio e $\mathcal{H}$ não possui a propriedade da interseção finita, então teríamos $B_1 \cap ... \cap B_n = \emptyset$ para alguns $B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}$ e, assim, $\emptyset \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ é próprio.
($\Leftarrow$) Se $\mathcal{H}$ possui a propriedade da interseção finita, então $\emptyset \notin \mathcal{F}^{\mathcal{H}} = \{A \subseteq I : A \supseteq B_1 \cap ... \cap B_n$, onde $B_i \in \mathcal{H}$ para $i \in \{1, ..., n\}\}$, pois, se estivesse, ocorreria $\emptyset \supseteq B_1 \cap ... \cap B_n$, assim $B_1 \cap ... \cap B_n = \emptyset$, o que é um absurdo, assim $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ é próprio. □

**Lema 2.18.** *Sejam $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$ e $A \in \mathcal{P}(I)$. Se $\mathcal{H}$ possui a propriedade da interseção finita, então pelo menos um dos conjuntos $\mathcal{H} \cup \{A\}$ ou $\mathcal{H} \cup \{A^c\}$ também terá a propriedade da interseção finita.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que $\mathcal{H} \cup \{A^c\}$ não tem a propriedade da interseção finita e $\mathcal{H} \cup \{A\}$ também não a tenha ao mesmo tempo. Assim, temos $n, m \in \mathbb{N}$ tal que,

$B_1, ..., B_n \in \mathcal{H}$ e $D_1, ..., D_m \in \mathcal{H}$, $B_1 \cap ... \cap B_n \cap A^c = \emptyset$ e $D_1 \cap ... \cap D_m \cap A = \emptyset$. Procedemos com a seguinte união:

$$(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \cap A^c) \cup (\bigcap_{i=1}^{m} D_i \cap A) = \emptyset.$$

Da distributiva em operações de conjuntos, temos:

$$(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \cup \bigcap_{i=1}^{m} D_i) \cap (A^c \cup \bigcap_{i=1}^{m} D_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} B_i \cup A) \cap (A^c \cup A) = \emptyset.$$

Note que $(A^c \cup A) = I$, e I é neutro para interseções. Assim:

$$\emptyset = (\bigcap_{i=1}^{n} B_i \cup \bigcap_{i=1}^{m} D_i) \cap (A^c \cup \bigcap_{i=1}^{m} D_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} B_i \cup A) \supset \bigcap_{i=1}^{n} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{m} D_i$$

Porém, $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{m} D_i$ é uma interseção finita de conjuntos de $\mathcal{H}$. Como essa interseção está contida em $\emptyset$, então ela só pode ser vazia, o que é um absurdo. Provamos assim que não podemos ter $\mathcal{H} \cup \{A^c\}$ e $\mathcal{H} \cup \{A\}$ sem a propriedade da interseção finita ao mesmo tempo. □

## 2.3 Existência de ultrafiltros não principais.

Nesta seção, será demonstrado o teorema principal deste primeiro capítulo. A existência de ultrafiltros não principais é fundamental para a construção dos hiper-reais. Antes de prosseguir, precisamos de algumas definições para que possamos apresentar um resultado, ou axioma, da teoria dos conjuntos, conhecido como Lema de Zorn.

**Definição 2.19.** *(Cadeia)*

*Seja $(P, \leqslant)$ um conjunto com uma ordem parcial. Uma cadeia em $P$ é um subconjunto $S$ de $P$ linearmente ordenado, no sentido de que dados $x, y \in S$, ou $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.*

**Definição 2.20.** *(Cota superior)*

*Seja $(P, \leqslant)$ um conjunto com uma ordem parcial e seja $S$ um subconjunto de $P$. Um elemento $c \in P$ é cota superior de $S$ se $(\forall x \in S) x \leqslant c$.*

**Axioma 2.1.** *(Lema de Zorn)*

*Se $(P, \leqslant)$ é um conjunto com uma ordem parcial na qual toda cadeia possui uma cota superior em $P$ , então $P$ contém um elemento $\leqslant -\mathrm{maximal}$.*

**Teorema 2.21.** *Qualquer coleção de subconjuntos $\mathcal{H}$ que possua a propriedade da interseção finita, onde $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$, pode ser estendida a um ultrafiltro de I.*

*Demonstração.* Primeiro tome o filtro gerado por $\mathcal{H}$. Do Lema 2.17, sabemos que $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ é próprio. Seja $P = \{\mathcal{F}, \emptyset \notin \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}^{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{F}\}$ a coleção de todos os filtros próprios de I que contenham $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, e seja $\subseteq$ uma ordem parcial em $\mathsf{P}$. Tome uma cadeia $\{\mathcal{F}_x : x \in X\}$ em $\mathsf{P}$. Sabemos pelo Lema 2.11 que $\bigcup_{x\in X} \mathcal{F}_x = \{A : \exists x(x \in X) \wedge (A \in \mathcal{F}_x)\}$ é um filtro. NOte que$\bigcup_{x\in X} \mathcal{F}_x$ é próprio, pois, caso $\emptyset$ pertencesse a ele, então $\emptyset$ pertenceria a algum dos $\mathcal{F}_x$ da cadeia que são todos próprios. Além disso, $\mathcal{H}$ está contida na união, assim a união é também um filtro próprio que contém $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ e está em $\mathsf{P}$. Ainda mais, todo filtro da cadeia $\{\mathcal{F}_x : x \in X\}$ está contido em $\bigcup_{x\in X} \mathcal{F}_x = \{A : \exists x(x \in X) \wedge (A \in \mathcal{F}_x)\}$, o que implica que a união da cadeia é cota superior da cadeia. Assim, do lema de Zorn, $\mathsf{P}$ tem um elemento $\subseteq -maximal$, o qual é um filtro próprio maximal que, do Lema 2.16, sabemos ser ultrafiltro. □

**Corolário 2.22.** *É possível construir um ultrafiltro não principal em qualquer conjunto infinito.*

*Demonstração.* Se I é infinito, o filtro de Fréchet, $\mathcal{F}^{co}$ de I, é próprio (Lema 2.9) e possui a propriedade da interseção finita. Caso contrário, $\emptyset$ pertenceria ao filtro, em virtude da propriedade da interseção dos filtros. Portanto, estendemos utilizando o Teorema 2.21 e chegamos a um ultrafiltro $\mathcal{F}$. Esse ultrafiltro é não principal, pois, caso para algum $i \in I$, $\{i\}$ pertença ao ultrafiltro, então $\{i\}^c$ não pertenceria e, como $\mathcal{F}^{co} \subseteq \mathcal{F}$, então $\{i\}^c$, que é cofinito, não pertenceria ao filtro de Fréchet que contém todos os subconjuntos cofinitos; isso resulta em uma contradição. □

Há outra forma de "demonstrar" esse corolário, mas trata-se de uma demonstração informal e incorreta, pois utiliza o argumento de que podemos realizar um procedimento infinitas vezes. Esse tipo de abordagem foi evitado na nossa demonstração, uma vez que utilizamos o Lema de Zorn, que é o Axioma da Escolha codificado de uma maneira diferente.

A demonstração incorreta prosseguiria da seguinte maneira.

Após obtermos o filtro de Fréchet do nosso conjunto infinito, podemos estender $\mathcal{F}^{co}$ utilizando o Lema 2.18 ao escolher os $\{A\}$ e $\{A\}^c$, onde ambos são infinitos, adicionando elementos que preservam a propriedade da interseção finita. Lembre-se de que não precisamos dos cofinitos, pois estes já estão incluídos no filtro.

# 3 A construção dos hiper-reais.

Neste capítulo, construiremos os hiper-reais. Assim como podemos construir os números reais de Cauchy utilizando classes de equivalência de sequências de números racionais, faremos algo semelhante utilizando sequências de números reais e um ultrafiltro não principal. A condição de que o ultrafiltro seja não principal é de extrema importância, pois, como será visto, se o ultrafiltro for principal, não conseguiríamos chegar a nada de novo. Seria como se, na construção de Cauchy dos reais, considerássemos apenas sequências de racionais que convergem para números racionais e, ao final, obtivéssemos novamente os racionais, mas sob uma forma diferente, pois agora seriam classes de equivalência de sequências.

## 3.1 Equivalência módulo $\mathcal{F}$.

**Definição 3.1.** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *é o conjunto de todas as sequências de números reais. Um elemento* $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *pode ser considerado como* $r = (r_1, r_2, r_3, ...)$*, que também será denotado como* $(r_n)$*.*

**Definição 3.2.** *Sejam* $r$ *e* $s$ *elementos de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*. Definimos a soma e o produto desses elementos ponto a ponto, ou seja:*

$$r \oplus s = (r_n + s_n)$$

$$r \odot s = (r_n \cdot s_n)$$

*onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais dos reais.*

Dessa forma, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um anel comutativo, onde o zero é representado pela sequência $(0, 0, 0, ...)$ e a unidade é representada pela sequência $(1, 1, 1, ...)$. No entanto, dadas as sequências $o = (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$ e $e = (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$, o produto $e \odot o$ é igual a zero; assim, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ não é um corpo.

**Definição 3.3.** *Equivalência módulo ultrafiltro.*

*Seja* $\mathcal{F}$ *um ultrafiltro não principal em* $\mathbb{N}$*. Em* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, definimos a relação* $\equiv$ *da seguinte maneira:* $(r_n) \equiv (s_n)$ *se, e somente se,* $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$*.*

Quando temos uma relação dessa natureza, é comum mencionar que duas sequências coincidem em quase tudo módulo $\mathcal{F}$ ou que concordam em quase todo n.

**Proposição 3.4.** $\equiv$ *é uma relação de equivalência em* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*.*

*Demonstração.*
- A relação é reflexiva, pois dado $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\{n \in \mathbb{N} : r_n = r_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$.
- A relação é simétrica, pois se $r \equiv s$, então $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$; entretanto $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} = \{n \in \mathbb{N} : s_n = r_n\}$, assim $\{n \in \mathbb{N} : s_n = r_n\} \in \mathcal{F}$ e $s \equiv r$.
- A relação é transitiva, pois se $r \equiv s$ e $s \equiv t$, temos que $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$ e $\{n \in \mathbb{N} : s_n = t_n\} \in \mathcal{F}$. Observe que $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : s_n = t_n\} = \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n = t_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : r_n = t_n\}$; todavia, temos, pelo axioma da intersecção, que $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : s_n = t_n\} \in \mathcal{F}$ e, pelo axioma do superconjunto, com a desigualdade anterior, temos $\{n \in \mathbb{N} : r_n = t_n\} \in \mathcal{F}$; assim, $r \equiv t$.

□

O conjunto das classes de equivalência, de maneira análoga a outras relações de equivalência na matemática, pode ser chamado de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/(\mathsf{módulo}\,\mathcal{F})$.

**Definição 3.5.** *As classes de equivalência de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/(\mathsf{módulo}\mathcal{F})$ *serão representadas por:* $[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : r \equiv s\}$.

**Definição 3.6.** *A notação a seguir será utilizada a partir de agora para simplificar a notação: Sejam* $r, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, definimos*

$$[\![r = s]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\}.$$

**Lema 3.7.** $[\![r = s]\!] \cap [\![s = t]\!] \subseteq [\![r = t]\!]$.

*Demonstração.* Se $n \in [\![r = s]\!] \cap [\![s = t]\!]$, então $r_n = s_n$ e $s_n = t_n$. Assim, pela transitividade da igualdade nos números reais, temos $r_n = t_n$, o que significa que $n \in [\![r = t]\!]$. □

**Lema 3.8.** $[\![r = r']\!] \cap [\![s = s']\!] \subseteq [\![r \oplus s = r' \oplus s']\!] \cap [\![r \odot s = r' \odot s']\!]$.

*Demonstração.* Se $n \in [\![r = r']\!] \cap [\![s = s']\!]$, então temos $r_n = r'_n$ e $s_n = s'_n$. Somando os lados, obtemos $r_n + s_n = r'_n + s'_n$. De forma análoga, temos $r_n \cdot s_n = r'_n \cdot s'_n$. Concluímos que $n \in [\![r \oplus s = r' \oplus s']\!]$ e $n \in [\![r \odot s = r' \odot s']\!]$. □

**Proposição 3.9.** *A relação* $\equiv$ *é uma congruência em* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$*. Se* $r \equiv r'$ *e* $s \equiv s'$*, então,*

- $r \oplus s \equiv r' \oplus s'$;
- $r \odot s \equiv r' \odot s'$.

Isso significa que, dadas as classes de equivalência criadas pela relação módulo $\mathcal{F}$, tomemos, por exemplo, a classe $[r]$ e a classe $[s]$. Agora, dentro dessas classes, considere os elementos $(r_n)$ e $(s_n)$, respectivamente. Após serem operados $(r_n)$ e $(s_n)$, obtemos $(r_n + s_n) = (t_n)$, onde $(t_n)$ pertence à classe de equivalência $[t]$. Caso fossem escolhidos outros representantes das classes $[r]$ e $[s]$, o resultado de suas operações ainda seria um elemento da classe $[t]$.

*Demonstração.* Se $r \equiv r'$ e $s \equiv s'$, então $[\![r = r']\!] \in \mathcal{F}$ e $[\![s = s']\!] \in \mathcal{F}$. De acordo com a propriedade da interseção, temos $[\![r = r']\!] \cap [\![s = s']\!] \in \mathcal{F}$. Considerando o Lema 3.8 e utilizando a propriedade dos superconjuntos, chegamos a $[\![r \oplus s = r' \oplus s']\!] \cap [\![r \odot s = r' \odot s']\!] \in \mathcal{F}$. Usando novamente a propriedade do superconjunto e o fato de que $[\![r \oplus s = r' \oplus s']\!] \cap [\![r \odot s = r' \odot s']\!] \subseteq [\![r \oplus s = r' \oplus s']\!]$, temos $[\![r \oplus s = r' \oplus s']\!] \in \mathcal{F}$. Procedemos de maneira análoga para o produto. Assim, concluímos que $r \oplus s \equiv r' \oplus s'$ e $r \odot s \equiv r' \odot s'$. □

Até o momento, a partir do conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, separamos os elementos desse conjunto em classes e demonstramos que é possível somar e multiplicar essas classes. O próximo passo agora é criar uma relação de ordem nessas classes.

A ideia desenvolvida até agora pode ser utilizada para definir uma relação de ordem nas classes $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/(\text{módulo}\,\mathcal{F})$. Antes, para facilitar nosso cálculo, definimos o seguinte conjunto de números naturais:

**Definição 3.10.** *Dados $r, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definimos:*

$$[\![r < s]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\}.$$

**Lema 3.11.** $[\![r = r']\!] \cap [\![s = s']\!] \cap [\![r < s]\!] \subseteq [\![r' < s']\!]$.

*Demonstração.* Se $n \in [\![r = r']\!] \cap [\![s = s']\!] \cap [\![r < s]\!]$, então temos $r_n = r'_n$, $s_n = s'_n$ e $r_n < s_n$. Dessa forma, ao combinar as relações, chegamos a $r'_n = r_n < s_n = s'_n$, ou seja, $r'_n < s'_n$. Portanto, $n \in [\![r'_n < s'_n]\!]$ . □

**Lema 3.12.** *Se $[\![r = r']\!] \in \mathcal{F}$ e $[\![s = s']\!] \in \mathcal{F}$, então $[\![r < s]\!] \in \mathcal{F}$ se e somente se $[\![r' < s']\!] \in \mathcal{F}$.*

*Demonstração.* A prova decorre diretamente do Lema 3.11 e das propriedades de interseção e superconjuntos dos filtros. □

**Proposição 3.13.** *A relação $<$, em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/(\text{módulo}\,\mathcal{F})$, definida da seguinte forma, $[r] < [s]$ se, e somente se, para algum $r \in [r]$ e para algum $s \in [s]$, temos $[\![r < s]\!] \in \mathcal{F}$, é uma relação de ordem em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/(\text{módulo}\,\mathcal{F})$.*

*Demonstração.* Primeiro, observe que está bem definido, pois o Lema 3.12 nos mostra que não importa a escolha do representante da classe para a comparação. Postergamos a demonstração da transitividade e antissimetria para a próxima seção, que pode ser conferida no teorema 3.17. □

## 3.2 A ultrapotência ${}^*\mathbb{R}$.

Como mencionado anteriormente, a relação módulo $\mathcal{F}$ estabelecida em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é uma relação de equivalência e, portanto, gera classes de equivalência.

**Definição 3.14.** *O conjunto quociente das classes de equivalência será denotado por* ${}^*\mathbb{R}$, *e esse conjunto também é conhecido como o conjunto dos números hiper-reais.*

Esse tipo de quociente, realizado com ultrafiltros, é denominado ultrapotência. Utilizamos o filtro em $\mathbb{N}$, pois estamos considerando as sequências de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Entretanto, a situação poderia ser generalizada para qualquer outro conjunto infinito $I$, com um filtro em $I$, considerando $\mathbb{R}^I$. Pense nisso como o produto $\prod_{i\in I} R_i$,mas todos $R_i = \mathbb{R}$. Na verdade, a situação poderia ser ainda mais geral, na qual os $R_i$ podem ser distintos entre si. Nesse caso, ao fazermos o quociente, conforme discutido na seção anterior, o nome atribuído é ultraproduto. Observamos que a ultrapotência é um caso particular de ultraproduto.

**Definição 3.15.** *Em* ${}^*\mathbb{R}$ *definimos uma soma, um produto e uma ordem da seguinte maneira:*

- $[r] + [s] = [r \oplus s]$,
- $[r] \cdot [s] = [r \odot s]$,
- $[r] < [s]$ *se, e somente se,* $[\![r < s]\!] \in \mathcal{F}$.

Sabemos que as operações e a ordem estão bem definidas, pois isso decorre da Proposição 3.9 e do Lema 3.12.

**Definição 3.16.** *Um conjunto* $\mathbb{K}$ *com duas operações e uma relação de ordem que satisfaça as seguintes propriedades é denominado corpo ordenado, podendo ser também representado como* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$.

*A1.* $(\forall x, y, z \in \mathbb{K})$ *tem-se* $(x + y) + z = x + (y + z)$.

*A2.* $(\forall x, y \in \mathbb{K})$ *tem-se* $x + y = y + x$.

*A3.* $(\exists 0 \in \mathbb{K})$ *tal que* $\forall x \in \mathbb{K}$, $x + 0 = 0 + x = x$.

*A4.* $(\forall x \in \mathbb{K})(\exists -x \in \mathbb{K})$ *tal que* $x + (-x) = 0$.

*M1.* $(\forall x, y, z \in \mathbb{K})$ *tem-se* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

*M2.* $(\forall x, y \in \mathbb{K})$ *tem-se* $x \cdot y = y \cdot x$.

*M3.* $(\exists 1 \in \mathbb{K})$ *tal que* $\forall x \in \mathbb{K}$ $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

*M4.* $(\forall x \in \mathbb{K}\backslash\{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{K})$ *tal que* $x \cdot x^{-1} = 1$.

*D.* $(\forall x, y, z \in \mathbb{K})$ *tem-se* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

*O1.* *Se* $x < y$ *e* $y < z$ *então* $x < z$.

*O2.* *Dados* $x, y \in \mathbb{K}$ *uma e somente uma das seguintes alternativas ocorre :ou* $x < y$, *ou* $x = y$, *ou* $y < x$.

*O3.* *Se* $x < y$ *então para todo* $z \in \mathbb{K}$ *temos* $x + z < y + z$.

*O4.* *Se* $x < y$ *então para todo* $z \in \mathbb{K}$ *onde* $0 < z$ *temos* $x \cdot z < y \cdot z$.

**Teorema 3.17.** *A estrutura* $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ *é um corpo ordenado.*

*Demonstração.*

- Para o zero tomamos $[(0, 0, 0, ...)]$ e para unidade tomamos $[(1, 1, 1, ...)]$, assim satisfazendo os itens A3 e M3.

- Como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um anel comutativo com zero $(0, 0, 0, ...)$ e com unidade $(1, 1, 1, ...)$ e as operações em ${}^*\mathbb{R}$ são feitas tomando representantes da classe, então A1, A2, A4, M1, M2 e D são consequências desses fatos, propriedades herdadas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ devido ao uso de representantes para as operações em ${}^*\mathbb{R}$. Para ilustrar, o inverso aditivo da classe $[(r_1, r_2, r_3, ...)]$ é $[(-r_1, -r_2, -r_3, ...)]$.

- Para o inverso multiplicativo precisamos de ajustes. Primeiro observe que $[0]$ não tem inverso multiplicativo, assim se $[r] \neq [0]$ temos $[\![r = 0]\!] \notin \mathcal{F}$. Como estamos em um ultrafiltro, $[\![r \neq 0]\!] \in \mathcal{F}$. Seja $J = [\![r \neq 0]\!]$ e defina a sequência $s$ como:

$$s_n = \begin{cases} r_n^{-1} & \text{se } n \in J, \\ 0 & \text{se } n \notin J, \end{cases}$$

  desta forma temos $[\![r \odot s = 1]\!] = J \in \mathcal{F}$. Vamos verificar que não temos o problema das sequências $o = (1, 0, 1, 0, ...)$ e $e = (0, 1, 0, 1, ...)$ que vimos no começo do capítulo. Por estarmos em um ultrafiltro, necessariamente uma dessas sequências vai estar na classe $[0]$ e outra na classe $[1]$, assim não temos divisores de zero, e desse modo, satisfazemos M4.

- Para O1, se $n \in [\![x < y]\!]$ e $n \in [\![y < z]\!]$, então $x_n < y_n < z_n$ e $n \in [\![x < z]\!]$, desta forma $[\![x < y]\!] \cap [\![y < z]\!] \subseteq [\![y < z]\!]$. No caso em que $[\![x < y]\!] \in \mathcal{F}$ e $[\![y < z]\!] \in \mathcal{F}$, temos da desigualdade anterior e das propriedades de filtro que $[\![x < z]\!] \in \mathcal{F}$.

- Para O2, perceba que $[\![x < y]\!] \cup [\![x = y]\!] \cup [\![x > y]\!] = \mathbb{N}$ e que $[\![x < y]\!]$, $[\![x = y]\!]$ e $[\![x > y]\!]$ são disjuntos dois a dois, então somente um desses pode pertencer ao filtro, pois, caso dois pertencessem, da disjunção e da propriedade da interseção teríamos $\emptyset \in \mathcal{F}$, e por ser ultrafiltro teremos que fazer essa escolha.

- Para O3, seja $z$ uma sequência qualquer. Observe que se $n \in [\![x < y]\!]$ então $x_n < y_n$ e $x_n + z_n = y_n + z_n$, assim temos $n \in [\![x+z < y+z]\!]$, ou seja $[\![x < y]\!] \subseteq [\![x+z < y+z]\!]$. Se $[\![x < y]\!] \in \mathcal{F}$, da propriedade do superconjunto e da desigualdade anterior temos $[\![x + z < y + z]\!] \in \mathcal{F}$.

- Para O4, se $n \in [\![x < y]\!]$ e $n \in [\![0 < z]\!]$, então $x_n < y_n$ e $0 < z_n$, como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado temos $x_n \cdot z_n < y_n \cdot z_n$ e por fim $n \in [\![x \cdot z < y \cdot z]\!]$, ou seja $[\![x < y]\!] \cap [\![0 < z]\!] \subseteq [\![x \cdot z < y \cdot z]\!]$. Novamente, seguindo o exemplo das demonstrações anteriores, temos que se $[\![x < y]\!] \in \mathcal{F}$ e $[\![0 < z]\!] \in \mathcal{F}$ então $[\![x \cdot z < y \cdot z]\!] \in \mathcal{F}$.

$\square$

**Definição 3.18.** *Como temos uma ordem total em* $^*\mathbb{R}$*, podemos definir um módulo de maneira análoga ao módulo dos números reais:*

- $|[r]| = [r]$ *se* $[r] > 0$;
- $|[r]| = -[r]$ *se* $[r] < 0$.

Podemos identificar os números reais dentro dos hiper-reais da seguinte maneira: dado um $r \in \mathbb{R}$, tome a classe de equivalência em $^*\mathbb{R}$, onde se encontra a sequência $(r, r, r, r, ...)$. Chamaremos essa classe de $[r]$.

**Definição 3.19.** *A função* $^* : \mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$*, que está definida da seguinte forma* $r \mapsto [r]$*, mapeia* $\mathbb{R}$ *para* $^*\mathbb{R}$*.*

Em determinados momentos do texto, o símbolo $r$ terá dois significados: o de $r$, elemento dos números reais, e o de sequência constante de $r$, que representará a sequência da classe $^*r = [r]$, selecionada para as comparações e operações.

**Teorema 3.20.** *A função* $^* : \mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ *é um homomorfismo de corpos que preserva a ordem, ou seja,*

- $^*(r + s) = {}^* r + {}^*s$,
- $^*(r \cdot s) = {}^* r \cdot {}^*s$,
- $r < s$ *se, e somente se,* $^*r < {}^*s$,
- $r = s$ *se, e somente se,* $^*r = {}^*s$.

Antes de continuarmos, precisamos de algumas definições para que possamos apresentar o último axioma da teoria dos números reais.

**Definição 3.21.** *Seja* $(P, \leqslant)$ *um conjunto ordenado. O subconjunto* $S \subset P$ *é limitado superiormente se possui uma cota superior.*

**Definição 3.22.** *Sejam* $(P, \leqslant)$ *um conjunto ordenado e* $S$ *um subconjunto de* $P$. *Um elemento* $c \in P$ *é denominado supremo de* $S$ *se ele é uma cota superior de* $S$ *e, para toda* $c'$ *cota superior de* $S$, *temos* $c \leqslant c'$.

Agora apresentamos um axioma, que também é conhecido como o axioma da completude ou de Dedekind. Este é o último dos axiomas para os números reais.

**Axioma 3.1.** *Para todo subconjunto não vazio de números reais, se esse conjunto é limitado superiormente, então ele possui um supremo nos números reais.*

Como sabemos, os números reais, além de respeitarem os axiomas de corpo ordenado, satisfazem ao Axioma da Completude de Dedekind. Esse axioma define os números reais, salvo isomorfismo; ou seja, se encontrarmos duas estruturas que satisfaçam os axiomas de corpo ordenado e o axioma de Dedekind, essas estruturas são equivalentes, exceto pelo nome (ou forma) de seus elementos.

**Proposição 3.23.** *Caso* $\mathcal{F}$ *fosse principal,* ${}^*\mathbb{R}$ *seria uma cópia de* $\mathbb{R}$.

*Demonstração.* Sendo $\mathcal{F}$ principal, teríamos $\{n\} \in \mathcal{F}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, dada qualquer sequência $r = (r_1, r_2, r_3, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, teríamos $r \equiv {}^*s$, onde $s = r_n$. Dessa forma, toda sequência estaria em uma classe identificada como um número real. □

**Teorema 3.24.** *Princípio de Eudoxos-Arquimedes:*

*Para todo* $r \in \mathbb{R}$, *existe um* $n \in \mathbb{N}$, *de maneira que* $r < n$.

**Proposição 3.25.** *A estrutura* $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ *não satisfaz o axioma de Dedekind.*

*Demonstração.* Será mostrado posteriormente que temos elementos novos em ${}^*\mathbb{R}$, os infinitesimais e os ilimitados, então essa nova estrutura não é isomorfa a $\mathbb{R}$. Se o axioma da completude fosse satisfeito as estruturas seriam isomorfas, o que aconteceria somente no caso em que o ultrafiltro fosse principal.

Porém, podemos apresentar um subconjunto de ${}^*\mathbb{R}$ que é limitado superiormente mas não possui supremo.

O conjunto dos reais que está dentro dos hiper-reais é limitado superiormente pela classe da sequência $(1, 2, 3, 4, ....)$. De fato, dado um real ${}^*r$, temos do princípio de Eudoxos-Arquimedes que existe um $n \in \mathbb{N}$ onde $r < n$, assim $[\![{}^*r < (1, 2, 3, 4, ....)]\!] \supseteq \{m \in$

$\mathbb{N}, n \leqslant m\}$ , ou seja $[\![{}^*r < (1, 2, 3, 4, ....)]\!]$ é cofinito. Do Lema 2.12, temos que pertence a $\mathcal{F}$. Gostaria também de pontuar que todas as cotas superiores de $\mathbb{R}$ em ${}^*\mathbb{R}$ são classes de ilimitados. Assim suponha que $[\omega']$ seja o menor desses ilimitados, tome um $\epsilon > 0$ pertencente aos reais, agora tome a classe $[\omega' \oplus -\epsilon]$, que é menor que $[\omega']$ e ainda assim ilimitada e maior que todos os reais.

□

## 3.3 Infinitesimais e ilimitados.

**Definição 3.26.** *Um número infinitesimal positivo é um número maior que zero, mas menor do que qualquer número real positivo.*

**Exemplo 3.27.** *Seja a sequência* $\varepsilon = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..)$. *Então* $[\![0 < \varepsilon]\!] = \{n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n}\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, *assim esse número é maior que zero em* ${}^*\mathbb{R}$. *Ainda mais, dado um real* $r$ *em* ${}^*\mathbb{R}$, *temos* $[\![\varepsilon < r]\!] = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < r\}$ *é um conjunto cofinito, e assim, pertence ao filtro, concluindo que* $[\varepsilon]$ *é menor que qualquer real.*

**Definição 3.28.** *Um número é considerado ilimitado positivo se for maior do que qualquer número real.*

**Exemplo 3.29.** *Seja a sequência* $\omega = (1, 2, 3, 4, ...)$. *Então, dado um número real* ${}^*r$ *em* ${}^*\mathbb{R}$, *temos que* $[\![r < \omega]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r < n\}$ *é cofinito devido ao princípio de Eudoxos-Arquimedes e, assim, pertence ao filtro. Concluímos que* $\omega$ *é um número ilimitado.*

Por fim, observe que $[\varepsilon] \cdot [\omega] = [1]$, ou seja, são inversos multiplicativos; isso, por enquanto, nos dá uma dica de que os inversos de números infinitesimais são ilimitados e vice-versa.

**Corolário 3.30.** *Se* $\varepsilon$ *é uma sequência que converge para zero, então sua classe em* ${}^*\mathbb{R}$ *é um infinitesimal.*

*Demonstração.* A prova é análoga àquela que foi realizada na sequência, $\varepsilon = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..)$.

□

# 4 Extensões.

Este capítulo aborda extensões. Ao redigirmos uma sentença lógica sobre uma teoria matemática, além dos símbolos lógicos e das variáveis, utilizamos símbolos de funções ou relações, que podem ser símbolos elementares da teoria e, portanto, não estão definidos, mas codificados pelos axiomas. Alternativamente, podem ser relações e funções definidas a partir desses símbolos mais elementares. Um exemplo disso é o símbolo relacional $\in$ na teoria dos conjuntos, ou o símbolo funcional $s$ da função sucessora de Peano. Para os símbolos que são definidos a partir dos símbolos primários, temos, por exemplo, o símbolo $\subset$ na teoria dos conjuntos. Como será visto posteriormente, $\mathbb{R}$ e ${}^*\mathbb{R}$ possuem a mesma linguagem; afinal, ambas as estruturas utilizam a codificação de um corpo ordenado, com dois símbolos funcionais de duas entradas e um símbolo relacional binário. Seria interessante se o que posso escrever formalmente sobre a estrutura $\mathbb{R}$ tivesse alguma relação com o que posso escrever sobre a estrutura ${}^*\mathbb{R}$. O estudo de Robinson conclui que existe essa relação e que podemos transferir sentenças de uma estrutura para sentenças da outra. As extensões são, na verdade, como interpretamos símbolos relacionais e funcionais ao realizarmos a transferência de sentenças.

## 4.1 Extensões de conjuntos.

**Definição 4.1.** *Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Esse conjunto pode ser estendido para um conjunto ${}^*A \subset {}^*\mathbb{R}$ da seguinte maneira: $[r] \in {}^*A$ se, e somente se, $\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{F}$, onde $(r_n)$ é qualquer sequência da classe $[r]$.*

Ou seja, uma classe pertence ao conjunto ampliado se, e somente se, dada uma sequência da classe, para quase todas as posições na sequência (módulo $\mathcal{F}$ ), o número encontrado nessa posição é um número de $A$. Precisamos verificar se isso está bem definido, uma vez que estamos utilizando representantes das classes e desejamos que o resultado seja independente da escolha do representante.

Antes, seguindo a notação estabelecida até aqui, definimos o seguinte conjunto de números naturais.

**Definição 4.2.** *Dado $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definimos*

$[\![r \in A]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\}.$

**Lema 4.3.** $[\![r = r']\!] \cap [\![r \in A]\!] \subseteq [\![r' \in A]\!]$.

*Demonstração.* Suponha $n \in [\![r = r']\!]$ e $n \in [\![r \in A]\!]$; assim, $r'_n = r_n \in A$ , ou seja, $n \in [\![r' \in A]\!]$. □

**Proposição 4.4.** *Se* $r \equiv r'$ *e* $[\![r \in A]\!] \in \mathcal{F}$*, então* $[\![r' \in A]\!] \in \mathcal{F}$*.*

*Demonstração.* Sendo válidas as hipóteses, temos $[\![r = r']\!] \in \mathcal{F}$ e $[\![r \in A]\!] \in \mathcal{F}$; assim, $[\![r = r']\!] \cap [\![r \in A]\!] \in \mathcal{F}$. Com base no Lema 4.3 e na propriedade dos superconjuntos, concluímos que $[\![r' \in A]\!] \in \mathcal{F}$. □

Assim, concluímos que está bem definido, não dependendo da escolha da sequência na classe para a comparação.

## 4.2 Resultados em extensões de conjuntos.

**Exemplo 4.5.** *Dado um* $r \in A$*, temos que* $[\![(r, r, r, r, ...) \in A]\!] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$*. Assim,* ${}^*r$*, que é a classe identificada como o real* $r$*, está em* ${}^*A$*. Elementos de* ${}^*A - A$ *são membros não standard que surgirão na extensão. Por exemplo, na extensão dos naturais* ${}^*\mathbb{N}$*, a sequência* $\omega = (1, 2, 3, 4, ...)$ *é um membro não standard e pode ser chamada de hiper-natural.*

**Teorema 4.6.** *Se* $A$ *é infinito, então* ${}^*A$ *possui membros não standard.*

*Demonstração.* Se $A$ é infinito, podemos criar uma sequência de membros de $A$, sem que ocorram repetições, digamos $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$. Dessa forma, dado qualquer elemento $a_n$ de $A$, podemos escolher a sequência constante $(a_n, a_n, a_n, \dots) \in {}^*a_n$ para realizar a comparação e assim concluímos $[\![a_n = a]\!] = \{n\} \notin \mathcal{F}$. Caso tenhamos um $b \in A$ não utilizado na sequência $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$, então $[\![a_n = b]\!] = \emptyset \notin \mathcal{F}$. □

**Teorema 4.7.** *Se* $A$ *é finito, então* ${}^*A \cong A$*.*

*Demonstração.* Vamos provar por contradição. Primeiro seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ e suponha que tenha um membro $c$, não standand, em ${}^*A$. Assim, comparando $c$ com as sequências constantes temos, $[\![c = a_i]\!] \notin \mathcal{F}$, onde $i \in \{1, ..., n\}$. Tome os complementares, $\overline{[\![c = a_i]\!]} \in \mathcal{F}$, os quais pertencem ao filtro, note que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{[\![c = a_i]\!]} \in \mathcal{F},$$

devido à propriedade das interseções.

Usamos a lei de Morgan para concluir que

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} [\![c = a_i]\!]} \in \mathcal{F}$$

e assim,

$$\bigcup_{i=1}^{n} [\![c = a_i]\!] \notin \mathcal{F}.$$

Porém, observe que essa união é, na realidade, o conjunto dos $n$ na sequência c em que os valores são iguais aos valores de $A$,

$$\bigcup_{i=1}^{n} [\![c = a_i]\!] = [\![c \in A]\!] \in \mathcal{F}.$$

Essa última pertinência acontece da definição de ser um membro de $^*A$. Como observado, temos um contradição, concluindo que não temos um membro não standard.

$\square$

**Exemplo 4.8.** *Dado o conjunto* $\{r\}$*, onde* $r \in \mathbb{R}$*, temos que* $^*\{r\} = \{^*r\}$*, devido a* $\{r\}$ *ser finito.*

**Proposição 4.9.** $A \subseteq B$ *se, e somente se,* $^*A \subseteq {}^*B$.

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Seja $c$ um elemento de $^*A$; assim, temos que $[\![c \in A]\!] \in \mathcal{F}$. Dessa forma, dado $n \in [\![c \in A]\!]$, temos $c_n \in A \subseteq B$. Inferimos que $[\![c \in A]\!] \subseteq [\![c \in B]\!]$ e, pela propriedade do superconjunto, temos $[\![c \in B]\!] \in \mathcal{F}$; concluímos que $^*A \subseteq {}^*B$.

($\Leftarrow$) Seja $r$ um elemento de $A$; assim, $^*r \in {}^*A$ e, consequentemente, $^*r \in {}^*B$. Disto, temos que $[\![r \in B]\!] \in \mathcal{F}$, como $r$, é a sequência constante; temos que $r \in B$. $\square$

**Corolário 4.10.** $A = B$ *se, e somente se,* $^*A = {}^*B$.

**Proposição 4.11.** $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$.

*Demonstração.* Seja $[c]$ um elemento de $^*(A \cup B)$. Assim, $[\![c \in (A \cup B)]\!] \in \mathcal{F}$, e dessa forma,

$$[\![c \in (A \cup B)]\!] = [\![c \in A]\!] \cup [\![c \in B]\!] \in \mathcal{F}.$$

Suponha que $[\![c \in A]\!] \notin \mathcal{F}$ e $[\![c \in B]\!] \notin \mathcal{F}$, assim teríamos $\overline{[\![c \in A]\!]} \in \mathcal{F}$ e $\overline{[\![c \in B]\!]} \in \mathcal{F}$.

Da propriedade da interseção dos filtros temos a seguinte relação

$$\overline{[\![c \in A]\!]} \cap ([\![c \in A]\!] \cup [\![c \in B]\!]) \cap \overline{[\![c \in B]\!]} \in \mathcal{F}.$$

Agora realizamos uma distributiva para obter

$$\begin{aligned}
&((\overline{[\![c \in A]\!]} \cap [\![c \in A]\!]) \cup (\overline{[\![c \in A]\!]} \cap [\![c \in B]\!])) \cap \overline{[\![c \in B]\!]} \in \mathcal{F} \\
\Rightarrow &(\emptyset \cup (\overline{[\![c \in A]\!]} \cap [\![c \in B]\!])) \cap \overline{[\![c \in B]\!]} \in \mathcal{F} \\
\Rightarrow &(\overline{[\![c \in A]\!]} \cap [\![c \in B]\!]) \cap \overline{[\![c \in B]\!]} \in \mathcal{F} \\
\Rightarrow &\overline{[\![c \in A]\!]} \cap ([\![c \in B]\!] \cap \overline{[\![c \in B]\!]}) \in \mathcal{F} \\
\Rightarrow &\overline{[\![c \in A]\!]} \cap \emptyset \in \mathcal{F} \\
\Rightarrow &\emptyset \in \mathcal{F},
\end{aligned}$$

e daí temos um absurdo. Portanto, $[\![c \in A]\!] \in \mathcal{F}$ ou $[\![c \in B]\!] \in \mathcal{F}$. Assim $[c] \in {}^*A \cup {}^*B$.

Agora, para a volta, suponha que $[c] \in {}^*A \cup {}^*B$. Sem perda de generalidade, suponha adicionalmente que $[c] \in {}^*A$. Assim $[\![c \in A]\!] \subseteq [\![c \in (A \cup B)]\!]$, e da propriedade dos superconjuntos temos que $[\![c \in (A \cup B)]\!] \in \mathcal{F}$. □

## 4.3 Extensões de funções.

**Definição 4.12.** *Uma função,* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, pode ser estendida para uma função* ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ *da seguinte maneira: Dado* $[r] \in {}^*\mathbb{R}$*,* ${}^*f([r]) = [(f(r_n))]$*, onde* $(r_n) \in [r]$.

Podemos visualizar como ${}^*f([(r_1, r_2, r_3, ...)]) = [(f(r_1), f(r_2), f(r_3), ...)]$.

Ainda não sabemos se essa função estendida está bem definida; afinal, tomamos um representante da classe para calcular a imagem. Desejamos que essa imagem seja a mesma para qualquer representante. Vamos verificar a boa definição a seguir.

**Proposição 4.13.** *Se* $r \equiv r'$*, então* $f(r_n) \equiv f(r'_n)$.

*Demonstração.* Seja $n \in [\![r = r']\!]$, assim $r_n = r'_n$ e, portanto, segue que $f(r_n) = f(r'_n)$. Concluímos disso que $n \in [\![f(r_n) = f(r'_n)]\!]$, ou seja, $[\![r = r']\!] \subseteq [\![f(r_n) = f(r'_n)]\!]$.

Se $[\![r = r']\!] \in \mathcal{F}$, da propriedade do superconjunto, temos $[\![f(r_n) = f(r'_n)]\!] \in \mathcal{F}$ ou, escrito de outra forma, $f(r_n) \equiv f(r'_n)$. □

Nem sempre as funções em números reais têm como domínio todos os números reais; podemos considerar subconjuntos dos reais como domínios. Para estender uma função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, precisamos fazer ajustes na definição. Em um elemento de ${}^*A$, teremos sequências com alguns valores que não estão em $A$ e, assim, ${}^*f[(r_1, r_2, r_3, ...)] = [(f(r_1), f(r_2), f(r_3), ...)]$ geraria problemas nas $r_n \notin A$. Vamos ver como contornar esse problema.

**Definição 4.14.** *Seja uma função* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, onde* $A$ *é um subconjunto dos reais, podemos estender essa função para uma função* ${}^*f : {}^*A \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ *da seguinte forma:* ${}^*f([r]) = [(h(r_n))]$ *onde*

$$h(r_n) = \begin{cases} f(r_n) & \textit{se } n \in [\![r \in A]\!], \\ 0 & \textit{se } n \notin [\![r \in A]\!], \end{cases}$$

*assim a função* $h$ *zera a função nos valores problemáticos.*

**Exemplo 4.15.** *Podemos estender a sequência* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *para a hiper-sequência* ${}^*s : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$.

Podemos também estender funções do tipo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, a definição é similar às outras.

**Definição 4.16.** *Seja uma função* $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, *podemos estender essa função para uma função* ${}^*f : {}^*A \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ *da seguinte forma:* ${}^*f([r^1], [r^2], \ldots, [r^k]) = [(h(r^1_n, r^2_n, \ldots, r^k_n))]$ *onde*

$$h(r^1_n, r^2_n, \ldots, r^k_n) = \begin{cases} f(r^1_n, r^2_n, \ldots, r^k_n) & \textit{se } n \in [\![ r^1, r^2, \ldots, r^k \in A ]\!], \\ 0 & \textit{se } n \notin [\![ r^1, r^2, \ldots, r^k \in A ]\!]. \end{cases}$$

## 4.4 Extensões de relações.

**Definição 4.17.** *Seja* $\mathbb{R}^k$ *o conjunto dos k-uplas reais. Um subconjunto* $R$ *de* $\mathbb{R}^k$ *é uma relação k-ária de* $\mathbb{R}$. *Usamos a notação da seguinte forma:* $R(r^1, r^2, ..., r^k)$ *é equivalente a afirmar que* $(r^1, r^2, ..., r^k) \in R$.

Antes de prosseguirmos, definimos novamente um conjunto de números naturais que nos ajudará a simplificar a notação.

**Definição 4.18.** *Sejam* $r^1, r^2, \ldots, r^k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *e seja* $P \subset \mathbb{R}^k$. *Definimos*

$$[\![ P(r^1, r^2, ..., r^k) ]\!] = \{n \in \mathbb{N} : P(r^1_n, r^2_n, ..., r^k_n)\}.$$

**Definição 4.19.** *Podemos estender uma relação* $P$, *k-ária de* $\mathbb{R}$ *da seguinte maneira:* $([r^1], [r^2], \ldots, [r^k]) \in {}^*P$ *se, e somente se,* $[\![ P(r^1, r^2, ..., r^k) ]\!] \in \mathcal{F}$, *onde* $r^i \in [r^i]$ *para* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

*Podemos escrever também da seguinte forma:* ${}^*P([r^1], [r^2], ...[, r^k])$ *se, e somente se,* $[\![ P(r^1, r^2, ..., r^k) ]\!] \in \mathcal{F}$.

Ou seja, para saber se a k-upla de hiper-reais pertence à relação estendida, tomamos um representante de cada classe. Para cada posição $n$ de cada sequência representante da classe, verificamos se a k-upla de reais nessa posição $n$ pertence à relação. Caso tenhamos, para quase todo $n$, k-uplas de reais pertencentes a $P$, então afirmamos que a k-upla de hiper-reais pertence à relação estendida.

Novamente , como estamos selecionando representantes das classes para realizar a definição, é necessário demonstrar que o resultado da extensão é independente da escolha dos representantes.

**Lema 4.20.** $[\![ r^1 = s^1 ]\!] \cap ... \cap [\![ r^k = s^k ]\!] \cap [\![ P(r^1, ..., r^k) ]\!] \subseteq [\![ P(s^1, ..., s^k) ]\!]$.

*Demonstração.* Seja $n \in [\![ r^1 = s^1 ]\!] \cap ... \cap [\![ r^k = s^k ]\!] \cap [\![ P(r^1, ..., r^k) ]\!]$, assim temos $r^1_n = s^1_n, ..., r^k_n = s^k_n$. Além disso, $(r^1_n, ..., r^k_n) \in P$. Então, substituímos os $r^i_n$ e obtemos $(s^1_n, ..., s^k_n) \in P$, o que nos leva à conclusão de $n \in [\![ P(s^1_n, ..., s^k_n) ]\!]$. □

Desse último lema, concluímos que a extensão foi bem definida.

## 4.5 Observações sobre extensões

Neste capítulo, foram definidas extensões para conjuntos, funções e relações. No entanto, como sabemos, todos esses conceitos são, na verdade, relações. Por que, então, os três são definidos separadamente? O motivo reside na linguagem que utilizamos para redigir sentenças sobre números reais, hiper-reais ou qualquer outra teoria matemática. Quando adotamos um ponto de vista lógico, funções e relações são tratadas separadamente, embora mantenham seus significados primários.

No entanto, a última definição, que se refere à extensão de relações, está alinhada com as demais definições se considerarmos conjuntos e funções como relações.

**Exemplo 4.21.** *Perceba que a extensão de conjuntos é um caso da extensão de relações unárias, onde você está verificando se a 1-upla na posição $n$ está na relação, que, neste caso, é simplesmente um subconjunto dos números reais.*

No capítulo sobre a construção dos hiper-reais, definimos uma soma, um produto, um módulo e uma relação de ordem para os hiper-reais. Desejamos que estas funções e a relação de ordem sejam as extensões da soma, produto, módulo e da ordem dos reais.

**Proposição 4.22.** *A soma e o produto dos hiper-reais são extensões da soma e do produto dos números reais.*

A prova dessa proposição é trivial; decorre diretamente da definição de extensões de funções do tipo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Proposição 4.23.** *O módulo dos hiper-reais, conforme na Definição 3.18, é uma extensão do módulo dos números reais.*

*Demonstração.* Para o módulo dos hiper-reais, tínhamos:

- $|[r]| = [r]$ se $[r] > 0$,
- $|[r]| = -[r]$ se $[r] < 0$.

Para a extensão do modulo real temos:

- $^*|[r]| = [(|r_n|)]$, onde $(r_n) \in [r]$.

Vamos sempre usar a sequência $r = (r_n)$ como representante.

Suponha que $[\mathrm{r}] > 0$, assim $[\![0 < \mathrm{r}]\!] \in \mathcal{F}$. Inferimos que, $[\![(|\mathrm{r}_n|) = (\mathrm{r}_n)]\!] \in \mathcal{F}$, ou seja ${}^*|[\mathrm{r}]| = [(|\mathrm{r}_n|)] = |[(\mathrm{r}_n)]| = |[\mathrm{r}]|$.

Suponha que $[\mathrm{r}] < 0$, assim $[\![\mathrm{r} < 0]\!] \in \mathcal{F}$. Inferimos que, $[\![(|\mathrm{r}_n|) = (-\mathrm{r}_n)]\!] \in \mathcal{F}$, ou seja ${}^*|[\mathrm{r}]| = [(|\mathrm{r}_n|)] = |[(-\mathrm{r}_n)]| = |-[\mathrm{r}]| = |[\mathrm{r}]|$. □

**Proposição 4.24.** *A relação de ordem dos hiper-reais, conforme na Definição 3.13, é uma extensão da ordem dos números reais.*

*Demonstração.* Vamos relembrar as definições. Para a ordem dos hiper-reais, temos:

- $[\mathrm{r}] < [\mathrm{s}]$ se, e somente se, para algum $\mathrm{r} \in [\mathrm{r}]$ e para algum $\mathrm{s} \in [\mathrm{s}]$, temos $[\![\mathrm{r} < \mathrm{s}]\!] \in \mathcal{F}$.

Para a extensão, temos:

- $< ([\mathrm{r}], [\mathrm{s}])$ se, e somente se, $[\![< (\mathrm{r}, \mathrm{s})]\!] \in \mathcal{F}$.

Veja que, a menos de notação, temos a mesma situação. □

# 5 Estruturas, linguagens e o princípio da transferência.

Neste capítulo, discutiremos a ferramenta mais fundamental da análise não standard: o princípio da transferência. O princípio da transferência é, na verdade, uma consequência de um teorema mais geral chamado *Teorema de Loś's*, que afirma que, devido à construção deste novo ambiente matemático utilizando ultrafiltros e à interpretação adequada das relações e funções, podemos transferir verdades de um ambiente para outro. No nosso caso, esses ambientes são os números reais e os hiper-reais. Para realizarmos essa transferência, é necessário esclarecer o que são essas verdades que serão transferidas; para isso, precisamos de conceitos de lógica, especialmente os relacionados às linguagens e à teoria de modelos.

**Definição 5.1.** *Uma estrutura relacional é uma tripla* $\mathcal{S} = \langle \mathsf{S}, \mathsf{Rel}_{\mathcal{S}}, \mathsf{Fun}_{\mathcal{S}} \rangle$*, onde* $\mathsf{S}$ *é um conjunto não vazio,* $\mathsf{Rel}_{\mathcal{S}}$ *é uma coleção de relações, que aqui são subconjuntos de algum* $\mathsf{S}^n$ *para algum n, e* $\mathsf{Fun}_{\mathcal{S}}$ *é uma coleção de funções, sendo que o domínio é algum subconjunto de* $\mathsf{S}^n$ *para algum n, e o contradomínio é* $\mathsf{S}$*.*

Depois dessa definição, as ideias não parecem muito claras. Para esclarecer o que estamos definindo, vamos realizar uma breve discussão com conceitos intuitivos e semiformais.

A principal preocupação da lógica é a análise de argumentos, ou seja, buscamos entender se, dado um conjunto de premissas e uma conclusão, a conclusão é uma consequência das premissas.

Quando utilizamos em uma lógica mais simples, uma lógica sem quantificadores, que chamamos de lógica proposicional ou de ordem zero, podemos realizar isso semanticamente, atribuindo valores às premissas, ou podemos proceder por meio de sistemas formais, utilizando o método das provas, também conhecido como método dedutivo.

Quando utilizamos o método semântico, aplicamos a conhecida tabela-verdade e afirmamos que a conclusão é uma consequência semântica das premissas se, e somente se, para todas as linhas da tabela-verdade em que todas as premissas são verdadeiras, a conclusão também se apresenta como verdadeira. Usamos o símbolo $\models$ para indicar consequência semântica. Se considerarmos uma teoria, ou seja, um conjunto de frases lógicas que denominamos axiomas, realizamos a análise de maneira similar; entretanto, em vez de focar nas premissas, avaliamos os axiomas. Assim, uma proposição será considerada uma consequência da teoria se, para todas as linhas da tabela-verdade nas quais todos os axiomas são verdadeiros, a proposição também se mostrar verdadeira.

Quando utilizamos o método das provas, também conhecido como método dedutivo, necessitamos de um sistema formal. Um sistema formal é composto por axiomas da teoria, axiomas lógicos e regras de inferência. A ideia é construir uma lista de frases lógicas, onde a frase inserida na lista pode ser apenas um axioma, seja ele da teoria ou lógico, ou uma frase inferida a partir de outras anteriores na lista, por meio das regras de inferência. Quando temos premissas que não são axiomas, tratamos essas premissas como hipóteses e iniciamos a lista colocando-as nas primeiras posições. Se, utilizando as regras de inferência, conseguimos chegar à conclusão, afirmamos que existe uma prova para essa conclusão ou, de forma alternativa, dizemos que a conclusão é uma consequência sintática. Usamos o símbolo $\vdash$ para representar consequência sintática. Ao pensarmos em uma teoria, caso tenhamos uma prova para uma proposição, chamamos essa proposição de teorema da teoria.

Agora chegamos ao ponto principal da discussão. Não é difícil, com um pouco de imaginação, pensar em como o método das provas pode ser adaptado para uma teoria em lógica de ordem um. No entanto, como realizaremos a análise semântica de uma frase como $\forall x \mathsf{P}(x)$? Observe que isso é inviável utilizando a tabela verdade; a forma de lidarmos com esse problema é por meio de interpretações.

Vamos exemplificar isso de uma maneira que nos favoreça. Pense em uma teoria de primeira ordem, ou seja, escrita com uma linguagem de primeira ordem, utilizando quantificadores. Quando escrevemos as frases lógicas dessa teoria de maneira formal, usamos símbolos lógicos $(\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, \forall, \exists)$, utilizamos símbolos que representam relações que não definimos, como, por exemplo, a relação binária $<$ em teorias de ordem, ou a relação ternária "$\mathsf{Estar\,entre}$" nos axiomas de ordem da geometria euclidiana. Além disso, utilizamos símbolos funcionais, como os símbolos $+$ e $\cdot$ em teorias algébricas, ou o símbolo s (sucessor) nos axiomas de Peano. Adicionalmente, utilizamos símbolos constantes, como, por exemplo, 0 e 1 em algumas teorias algébricas, e utilizamos variáveis, como $x, y$ e $z$, acompanhadas de quantificadores. O que faremos para analisar semanticamente essa teoria é atribuir interpretações a esses símbolos relacionais, funcionais e constantes. Por exemplo, qual é o domínio desta teoria? Um conjunto de números naturais? Um conjunto de matrizes? Ou até mesmo um conjunto de pessoas? Um símbolo de relação ternária, por exemplo, será um subconjunto das triplas desse domínio escolhido. O símbolo funcional será uma função com entradas desse domínio e saída no mesmo domínio. Assim, uma frase como $\forall x\ (\mathsf{P}(x) \Rightarrow \mathsf{N}(x))$, onde $\mathsf{P}$ e $\mathsf{N}$ representam relações unárias, pode ser analisada considerando elemento por elemento do domínio e substituindo-o no lugar de x. Obviamente, caso um elemento $c$ pertença ao conjunto P, que já foi interpretado, dizemos que P(c) é verdadeiro. Assim, se, para todos os elementos do domínio, a substituição torna a frase verdadeira, afirmamos que a frase é verdadeira. Essas interpretações são o que chamamos de estruturas. Portanto, a Definição 5.1 é a tripla dessa interpretação: o domínio, as relações e as funções. Na sua definição, as estruturas estão livres de teorias, sendo simplesmente um domínio com suas relações e funções. No entanto, quando uma estrutura surge de uma interpretação de uma teoria, ou mesmo quando já temos uma estrutura e verificamos que suas relações e funções estão de acordo com a codificação axiomática de uma teoria, dizemos que essas estruturas são modelos daquela teoria.

Assim, em lógica de ordem um, afirmamos que uma frase lógica é uma consequência semântica de uma teoria se a frase em questão é verdadeira em todos os modelos da teoria.

Repare que em $\mathcal{S} = \langle \mathsf{S}, \mathsf{Rel}_{\mathcal{S}}, \mathsf{Fun}_{\mathcal{S}} \rangle$, os conjuntos $\mathsf{Rel}_{\mathcal{S}}$ e $\mathsf{Fun}_{\mathcal{S}}$ não contêm necessariamente todas as relações e funções daquele domínio S; afinal, eles surgiram da interpretação dos símbolos de uma teoria, que geralmente são limitados. Assim, isso nos leva à nossa próxima definição.

**Definição 5.2.** *A estrutura completa* $\mathsf{S} = \langle \mathsf{S}, \mathsf{Rel}_{\mathsf{S}}, \mathsf{Fun}_{\mathsf{S}} \rangle$ *é a estrutura em que* $\mathsf{Rel}_{\mathsf{s}}$ *contém todas as relações de* $\mathsf{S}$*, ou seja, todos os subconjuntos de todos os* $\mathsf{S}^n$ *e* $\mathsf{Fun}_{\mathsf{S}}$ *contêm todas as funções, com domínios que são subconjuntos de* $\mathsf{S}^n$ *para algum n e contradomínio* $\mathsf{S}$*.*

**Exemplo 5.3.** *Temos a estrutura para os reais* $\mathsf{R} = \langle \mathbb{R}, \mathsf{Rel}_{\mathsf{R}}, \mathsf{Fun}_{\mathsf{R}} \rangle$*, onde* $\mathsf{Rel}_{\mathsf{R}}$ *e* $\mathsf{Fun}_{\mathsf{R}}$ *são interpretações para* $=, <, +$ *e* $\cdot$ *.*

*Também temos* $\mathfrak{R}$ *que é a estrutura completa baseada em* $\mathbb{R}$*.*

*Associada a* $\mathfrak{R}$ *temos* ${}^*\mathfrak{R} = \langle {}^*\mathbb{R}, \{{}^*\mathsf{P} : \mathsf{P} \in \mathsf{Rel}_{\mathbb{R}}\}, \{{}^*\mathsf{f} : \mathsf{f} \in \mathsf{Fun}_{\mathbb{R}}\} \rangle$*, porém observe que* ${}^*\mathfrak{R}$ *não é uma estrutura completa, existem relações de* ${}^*\mathbb{R}$ *que não estão em* $\{{}^*\mathsf{P} : \mathsf{P} \in \mathsf{Rel}_{\mathbb{R}}\}$*.*

**Proposição 5.4.** *O subconjunto de* ${}^*\mathbb{R}$ *que identificamos como* $\mathbb{R}$ *não pertence a* $\{{}^*\mathsf{P} : \mathsf{P} \in \mathsf{Rel}_{\mathbb{R}}\}$*.*

Agora, seguindo a discussão inicial que tivemos sobre lógica, vamos introduzir alguns conceitos mais formais. Refiro-me à linguagem lógica e às expressões que podemos formar utilizando essa linguagem.

**Definição 5.5.** *Associado à estrutura* $\mathcal{S}$ *temos uma linguagem* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$*, onde a mesma é dada pelo seguinte alfabeto:*

- *Conectivos lógicos:* $\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$.
- *Quantificadores:* $\forall, \exists$.
- *Parêntesis : (,).*
- *Variáveis : Uma coleção contável de símbolos, usamos* $x, y, z, x_1, y_1, \ldots$.
- *Elementos do conjunto S : Constantes.*
- *Símbolos de Predicado : Representantes das relações de* $\mathsf{Rel}_{\mathcal{S}}$*.*

- *Símbolos funcionais : Representantes das funções de* $\mathsf{Fun}_{\mathcal{S}}$.

**Definição 5.6.** *Termos de* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$*, ou* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} - \mathsf{termos}$*:*

- *Variáveis são termos.*
- *Constantes são termos.*
- *Se* $f \in \mathsf{Fun}_{\mathcal{S}}$ *é m-ária e* $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m$ *são termos, então* $f(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m)$ *é termo.*

**Definição 5.7.** *Termo fechado é aquele que não contém variáveis.*

Observe que um termo fechado pode ser indefinido; isso acontece quando inserimos na função um valor que não pertence ao domínio da função.

**Definição 5.8.** *Fórmulas atômicas de* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$.

*São strings da forma* $P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)$*, onde* $P \in \mathsf{Rel}_{\mathcal{S}}$ *e os* $\tau_i$ *são* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} - \mathsf{termos}$.

*Se k=1,* $P$ *pode ser visto como um subconjunto de* $S$*, assim usamos* $\tau \in P$ *ao invés de* $P(\tau)$.

**Definição 5.9.** *Fórmulas de* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$*:*

- *Fórmulas atômicas são fórmulas.*
- *Se* $\varphi$ *e* $\psi$ *são fórmulas, então* $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ *e* $\neg\varphi$ *também são fórmulas.*
- *Se* $\varphi$ *é fórmula, x é variável e* $P \in \mathsf{Rel}_{\mathcal{S}}$ *é unaria, então* $(\forall x \in P)\varphi$ *e* $(\exists x \in P)\varphi$ *também são fórmulas.*

Veja que $(\forall x \in P)\varphi$ quer dizer $\forall x(P(x) \Rightarrow \varphi)$, e $(\exists x \in P)\varphi$ quer dizer $\exists x(P(x) \wedge \varphi)$. Porém, como o estudo está sendo feito com uma referência principal, manteremos a primeira notação. A vantagem da notação utilizada é que, ao quantificarmos a variável, já limitamos seu domínio.

Podemos ter fórmulas nas quais não é possível atribuir um valor de verdade ou de falsidade, como, por exemplo, a fórmula $\varphi(x, y) \equiv (x < 1) \wedge (\forall x \in \mathbb{N})(x > y)$. Isso ocorre porque existem variáveis que estão fora do escopo de qualquer quantificador. Observe que utilizamos $\varphi(x, y)$ para simbolizar que a fórmula possui variáveis livres $x$ e $y$.

**Definição 5.10.** *(Variável fechada). A ocorrência da variável* $x$ *em uma fórmula é considerada fechada se estiver dentro do escopo de um quantificador.*

**Definição 5.11.** *(Sentença). Uma sentença é uma* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} - \mathsf{fórmula}$ *na qual todas as variáveis estão fechadas.*

**Definição 5.12.** *Verdade para sentenças:*

- *Seja P um símbolo relacional* $k-\text{ário}$ *e* $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ *termos fechados, falamos que a sentença atômica* $P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)$ *é verdade se, e somente se,* $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k) \in P$.

- $(\forall x \in P)\varphi(x)$ *é verdade se, e somente se, para todo* $s \in P$ *a sentença* $\varphi(s)$ *é verdadeira.*

  *Essa definição ignora os termos que ficam indefinidos, como por exemplo* $(\forall x \in \mathbb{R})(\tan(-x) = -\tan(x))$ *é verdadeira mas tem termos indefinidos* $\tan(\pi/2 + k\pi)$.

- $(\exists x \in P)\varphi(x)$ *é verdade se, e somente se, existe um* $s \in P$ *onde* $\varphi(s)$ *fica verdadeiro.*

- $(\varphi \wedge \psi)$ *é verdadeiro se, e somente se,* $\varphi$ *e* $\psi$ *são verdadeiros.*

- $(\varphi \vee \psi)$ *é verdadeiro se, e somente se,* $\varphi$ *ou* $\psi$ *são verdadeiros.*

- $\neg\varphi$ *é verdadeiro se , e somente se,* $\varphi$ *é falso.*

- $(\varphi \Rightarrow \psi)$ *é verdadeiro se, e somente se,* $\varphi$ *é falso ou* $\psi$ *é verdadeiro.*

**Definição 5.13.** *Uma* $^*$*-transformação transforma* $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}} - \text{fórmulas}$ *em* $\mathcal{L}_{^*\mathfrak{R}} - \text{fórmulas}$, *seguindo as regras a seguir:*

- $^*(P(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)) \doteq {}^*P(^*\tau_1, ^*\tau_2, ..., ^*\tau_k))$,

- $^*((\varphi \wedge \psi)) \doteq (^*\varphi \wedge ^*\psi)$,

- $^*((\exists x \in P)\varphi) \doteq (\exists x \in ^*P)^*\varphi$.

*Para* $\vee, \neg, \forall$, *procede-se de maneira idêntica.*

O que a $^*$-transformação faz na sentença é que colocamos o símbolo $^*$ antes de cada relação ou função; também o colocamos antes de cada símbolo de conjunto que aparece na sentença. As interpretações do que esse símbolo faz com relações, funções e conjuntos foram vistas no capítulo anterior, ou seja, são as extensões. Quanto aos termos constantes que aparecem, que são os números reais, a interpretação dada ao colocar o símbolo $^*$ antes deles é simplesmente identificá-los nos hiper-reais, como foi visto na Definição 3.19. Não utilizaremos mais o símbolo $^*r$ para representar o real $r$ nos hiper-reais; simplesmente utilizaremos $r$.

**Proposição 5.14.** *(Princípio da transferência):*

*Uma* $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}-$*sentença* $\varphi$ *é verdadeira se, e somente se,* $^*\varphi$ *é verdadeira.*

# 6 Halos, Galáxias e Shadows

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos de Halos, Galáxias e Sombras. Esses conceitos serão fundamentais para a análise hiper-real.

## 6.1 Números infinitesimais, apreciáveis e ilimitados.

Começamos com um lema sobre desigualdades em corpos ordenados, que será utilizado nas demonstrações deste capítulo:

**Lema 6.1.** *Em um corpo ordenado* $F$*, temos as seguintes relações:*

1. $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, $\forall x, y \in F$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in F$.
3. $|x|-|y| \leqslant |x-y|$, $\forall x, y \in F$.
4. $|x|-|y| \leqslant |x+y|$, $\forall x, y \in F$.

**Definição 6.2.** *Um número hiper-real* $b$ *é:*

- *Limitado se* $r < b < s$ *para algum* $r, s \in \mathbb{R}$.
- *Positivamente ilimitado se* $r < b$ *para todos* $r \in \mathbb{R}^+$.
- *Negativamente ilimitado se* $b < r$ *para todos* $r \in \mathbb{R}^-$.
- *Ilimitado se é positivamente ou negativamente ilimitado.*
- *Infinitesimal positivo se* $0 < b < r$ *para todos* $r \in \mathbb{R}^+$.
- *Infinitesimal negativo se* $r < b < 0$ *para todos* $r \in \mathbb{R}^-$.
- *Infinitesimal se é infinitesimal positivo, infinitesimal negativo ou 0.*
- *Apreciável se é limitado mas não infinitesimal.*

Alternativamente, devido ao Princípio de Eudoxus-Arquimedes, podemos afirmar que:

- É limitado se, e somente se, $|b| < n_b$ para algum $n_b \in \mathbb{N}$.
- É ilimitado se, e somente se $|b| > n$ para todos $n \in \mathbb{N}$.

- É infinitesimal se, e somente se, $|b| < \frac{1}{n}$ para todos $n \in \mathbb{N}$.
- É apreciável se, e somente se, $\frac{1}{n_b} < |b| < n_b$ para algum $n_b \in \mathbb{N}$.

Usamos o símbolo $\mathbb{L}$ para o conjunto dos limitados e usamos o símbolo $\mathbb{I}$ para o conjunto dos infinitesimais. Obviamente, temos $\mathbb{I} \subset \mathbb{L}$.

Vamos falar agora sobre a aritmética dos hiper-reais. Estabelecemos aqui que $\varepsilon$ e $\delta$ representam infinitesimais, $b$ e $c$ representam números apreciáveis, e $H$ e $K$ representam ilimitados.

**Proposição 6.3.** *Em somas de hiper-reais, temos que:*

1. $\varepsilon + \delta$ *é infinitesimal.*
2. $b + \varepsilon$ *é apreciável.*
3. $b + c$ *é limitado.*
4. $H + \varepsilon$ *e* $H + b$ *são ilimitados.*
5. $H + K$ *é indeterminado.*

Neste momento, já dispomos de ferramentas e descrições suficientes dos hiper-reais, para que, na maioria dos casos, não precisemos utilizar sua forma de classe de sequências para conduzir as demonstrações.

*Demonstração.* 1) Se $\varepsilon$ e $\delta$ são infinitesimais, então $|\varepsilon| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $|\delta| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Veja que $|\varepsilon + \delta| \leqslant |\varepsilon| + |\delta| < \frac{2}{n}$, e isso é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é suficiente para mostrarmos que $|\varepsilon + \delta|$ é infinitesimal. A desigualdade triangular decorre do fato dos hiper-reais serem um corpo ordenado.

2) Para $b + \varepsilon$:

$$\frac{1}{n_b} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n_b} - |\varepsilon| < |b| - |\varepsilon| \leqslant |b + \varepsilon| \leqslant |b| + |\varepsilon| < n_b + |\varepsilon| < n_b + \frac{1}{m},$$

isto para todo $m \in \mathbb{N}$.

Inclusive é válido para $m = 2n_b$ , assim, $\frac{1}{n_b} < |b + \varepsilon| < n_b + \frac{1}{2n_b}$.

5) Para as indeterminações, recorreremos à forma de classes de sequências. Sejam os ilimitados: $H = [(n)_{n \in \mathbb{N}}]$, $2H = [(2n)_{n \in \mathbb{N}}]$ e $H + r_1 = [(n + r_1)_{n \in \mathbb{N}}]$, onde $r_1 \in \mathbb{R}$. Temos $2H + (-H) = H$, que é ilimitado, $(H + r_1) + (-H) = r_1$ que é apreciável e $H + (-H) = 0$, que é infinitesimal.

□

**Proposição 6.4.** *Os opostos da soma são:*

1. *$-\varepsilon$ é infinitesimal.*

2. *$-b$ é apreciável.*

3. *$-H$ é ilimitado.*

*Demonstração.* As provas decorrem diretamente da definição alternativa utilizando módulos, afinal, se $x$ é hiper-real, $|-x| = |x|$. □

**Proposição 6.5.** *Em relação ao produto, temos:*

1. *$\varepsilon \cdot \delta$ e $\varepsilon \cdot b$ são infinitesimais.*

2. *$b \cdot c$ é apreciável.*

3. *$b \cdot H$ e $H \cdot K$ são ilimitados.*

4. *$\varepsilon \cdot H$ é indeterminado.*

*Demonstração.* 1) Para $\varepsilon \cdot \delta$, temos:
$|\varepsilon \cdot \delta| = |\varepsilon| \cdot |\delta| < \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3) Para $H \cdot K$:
Primeiro, $|H| \cdot |K| = |H \cdot K|$, mas $n < |K|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, inclusive para $2 \in \mathbb{N}$, assim temos, $m < |H| < |H| \cdot 2 < |H| \cdot |K| = |H \cdot K|$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

4) Para as indeterminações, novamente recorreremos à forma de classes de sequências dos hiper-reais. Sejam $r_1 = [(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}]$, $r_2 = [(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}]$, $r_3 = [(n)_{n \in \mathbb{N}}]$ e $r_4 = [(n^2)_{n \in \mathbb{N}}]$, números hiper-reais. Repare que $r_1$ e $r_2$ são infinitesimais, $r_3$ e $r_4$ são ilimitados. $r_1 \cdot r_3 = 1$, $r_1 \cdot r_4 = r_3$ e $r_2 \cdot r_3 = r_1$, ou seja, um apreciável, um ilimitado e um infinitesimal. □

**Proposição 6.6.** *Os recíprocos do produto são:*

1. *$\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}$ é ilimitado, $\varepsilon \neq 0$.*

2. *$b^{-1} = \frac{1}{b}$ é apreciável.*

3. *$H^{-1} = \frac{1}{H}$ é infinitesimal.*

Repare que ambos os conjuntos, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{L}$, são grupos abelianos em relação à soma, são também fechados em relação ao produto, e o produto é distributivo com a soma, pois estamos em um corpo. Assim, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{L}$ são subanéis de ${}^*\mathbb{R}$. Agora observe que, $\mathbb{I} \subset \mathbb{L}$ e $\mathbb{I}$ absorve o produto, pois qualquer limitado vezes um infinitesimal é um infinitesimal. Assim, $\mathbb{I}$ é um ideal no anel $\mathbb{L}$, veremos mais à frente qual é o anel quociente $\mathbb{L}/\mathbb{I}$.

## 6.2 Halos e Galáxias.

**Definição 6.7.** *Sejam* $\mathtt{b}$ *e* $\mathtt{c}$ *dois hiper-reais. Dizemos que* $\mathtt{b} \simeq \mathtt{c}$ *se* $\mathtt{b} - \mathtt{c}$ *é infinitesimal. Quando* $\mathtt{b} \simeq \mathtt{c}$*, dizemos também que* $\mathtt{b}$ *está infinitamente perto de* $\mathtt{c}$*. Dado um número hiper-real* $\mathtt{b}$*, chamamos de* $\mathsf{Halo}$ *de* $\mathtt{b}$ *o conjunto* $\mathsf{hal}(\mathtt{b}) = \{\mathtt{c} \in {}^*\mathbb{R} : \mathtt{b} \simeq \mathtt{c}\}$.

**Proposição 6.8.** *A relação* $\simeq$ *de estar infinitamente perto é uma relação de equivalência.*

*Demonstração.*

- Primeiro, para a reflexividade, é imediato, pois temos $\mathtt{b} - \mathtt{b} = 0$ e $0$ é infinitesimal.
- Para a simetria, se temos $\mathtt{b} - \mathtt{c}$ infinitesimal, observe que $(\mathtt{c} - \mathtt{b}) = -(\mathtt{b} - \mathtt{c})$, e como vimos anteriormente, o oposto da soma de um infinitesimal é um infinitesimal.
- Para a transitividade, se temos $\mathtt{b} \simeq \mathtt{c}$ e $\mathtt{c} \simeq \mathtt{d}$, observe que $\mathtt{b} - \mathtt{d} = (\mathtt{b} - \mathtt{c}) + (\mathtt{c} - \mathtt{d})$, que é a soma de dois infinitesimais, já vimos anteriormente que esta soma é um infinitesimal.

□

**Definição 6.9.** *Sejam* $\mathtt{b}$ *e* $\mathtt{c}$ *dois números hiper-reais. Dizemos que* $\mathtt{b} \sim \mathtt{c}$ *se* $\mathtt{b} - \mathtt{c}$ *é limitado. Quando* $\mathtt{b} \sim \mathtt{c}$*, dizemos também que* $\mathtt{b}$ *está a uma distância limitada de* $\mathtt{c}$*. Dado um número hiper-real* $\mathtt{b}$*, chamamos de* $\mathsf{Galaxia}$ *de* $\mathtt{b}$ *o conjunto* $\mathsf{gal}(\mathtt{b}) = \{\mathtt{c} \in {}^*\mathbb{R} : \mathtt{b} \sim \mathtt{c}\}$.

**Proposição 6.10.** *A relação* $\sim$ *de estar a uma distância limitada é uma relação de equivalência.*

*Demonstração.* A prova é análoga à anterior. □

Se $\mathtt{b}$ é infinitesimal, então $\mathtt{b} - 0$ também é; assim, um número é infinitesimal se, e somente se, pertence ao $\mathsf{Halo}$ de 0. O mesmo pode ser dito dos limitados; assim, podemos afirmar que $\mathbb{I} = \mathsf{hal}(0)$ e $\mathbb{L} = \mathsf{gal}(0)$.

O termo $\mathsf{Monad}$ já foi utilizado no lugar de $\mathsf{Halo}$; assim, ainda é comum encontrar livros com o termo antigo.

**Proposição 6.11.** *Sejam* $\mathtt{x} \in \mathsf{hal}(\mathtt{b})$ *e* $\mathtt{y} \in \mathsf{hal}(\mathtt{c})$*, com* $\mathtt{b}, \mathtt{c} \in \mathbb{R}$*. Se* $\mathtt{x} \leqslant \mathtt{y}$ *então* $\mathtt{b} \leqslant \mathtt{c}$.

*Demonstração.* Se temos $\mathtt{x} \leqslant \mathtt{y}$, então $0 \leqslant \mathtt{y} - \mathtt{x}$. Como $\mathtt{x} \in \mathsf{hal}(\mathtt{b})$ e $\mathtt{y} \in \mathsf{hal}(\mathtt{c})$, então $|\mathtt{x} - \mathtt{b}| < \frac{1}{n}$ e $|\mathtt{y} - \mathtt{c}| < \frac{1}{m}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Suponha que $\mathtt{c} < \mathtt{b}$. Então $0 < \mathtt{b} - \mathtt{c}$ e $\mathtt{b} - \mathtt{c} = \epsilon$, onde $\epsilon$ é um número real positivo. Do princípio de Eudoxos-Arquimedes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$. Assim, temos um $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathtt{x} - \mathtt{b}| < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$ e $|\mathtt{y} - \mathtt{c}| < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$. Agora, observe as desigualdades:

$$(\mathtt{b} - \mathtt{c}) \leqslant (\mathtt{b} - \mathtt{c}) + (\mathtt{y} - \mathtt{x}) = (\mathtt{b} - \mathtt{x}) + (\mathtt{y} - \mathtt{c}) < \frac{2 \cdot \epsilon}{3}.$$

Desta forma, teríamos $\epsilon < \frac{2\cdot\epsilon}{3}$, o que é um absurdo.

$\square$

**Proposição 6.12.** *Para o* $\mathsf{Halo}$ *de* $b$*, temos a seguinte identidade:* $hal(b) = \{b + \varepsilon : \varepsilon \in hal(0)\}$.

*Demonstração.* Se $x \in hal(b)$, então $x - b = \varepsilon \in hal(0)$. Dessa forma, $x = b + \varepsilon$. A reciproca é evidente. $\square$

**Proposição 6.13.** *Para a* $\mathsf{Galaxia}$ *de* $b$*, temos a seguinte identidade:* $gal(b) = \{b + c : c \in gal(0)\}$.

*Demonstração.* Se $x \in gal(b)$, então $x - b = c \in gal(0)$. Assim, $x = b + c$. A reciproca é evidente. $\square$

## 6.3 Shadows e completude.

**Teorema 6.14.** *Todo hiper-real* $b$ *limitado está infinitamente próximo de um, e somente um, número real. Esse número real será chamado de shadow de* $b$*, e o denotamos como* $sh(b)$.

*Demonstração.* Seja $A$ o conjunto dos reais menores que $b$, $A = \{r \in \mathbb{R} : r < b\}$. O hiper-real $b$ é limitado, assim $r < b < s$ para algum $r, s \in \mathbb{R}$, então $A$ é não vazio e limitado superiormente. Da completude de $\mathbb{R}$, temos que $A$ tem supremo $c$. Tome qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Não podemos ter $c + \epsilon < b$, pois assim $c$ não seria cota superior, então $b \leqslant c + \epsilon$. Se $b \leqslant c - \epsilon$, então $c - \epsilon$ seria uma cota superior menor que $c$, o que contraria o fato de que $c$ é supremo. Assim $c - \epsilon < b \leqslant c + \epsilon$, então $-\epsilon < b - c \leqslant \epsilon$, e assim $|b - c| < \epsilon$, onde $\epsilon$ é qualquer real, inclusive $\epsilon = \frac{1}{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Portanto $c \in hal(b)$.

Já temos um real $c$ no $\mathsf{Halo}$ de $b$, agora queremos sua unicidade. Se $c'$ é outro real no $\mathsf{Halo}$ de $b$, então $c' \simeq c$, pois é uma relação de equivalência, assim $c' - c$ é infinitesimal, onde o único infinitesimal possível desta subtração é o 0, afinal $c'$ e $c$ são reais. Assim $c' = c$. $\square$

**Lema 6.15.** *Vamos agora listar algumas propriedades importantes dos* $\mathsf{Shadows}$.

1. $sh(b + c) = sh(b) + sh(c)$.

2. $sh(b \cdot c) = sh(b) \cdot sh(c)$.

3. *Se* $b \leqslant c$*, então* $sh(b) \leqslant sh(c)$.

*Demonstração.* 1. Sejam $\mathsf{sh}(b+c) = r_1$, $\mathsf{sh}(b) = r_2$ e $\mathsf{sh}(c) = r_3$.

Agora, observe que,

$$|(b+c)-(r_2+r_3)| < |b-r_2| + |c-r_3| < \frac{2}{n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

Assim, pela unicidade do $\mathsf{Shadow}$, $r_1 = r_2 + r_3$.

2. Sejam, $\mathsf{sh}(b+c) = r_1$, $\mathsf{sh}(b) = r_2$ e $\mathsf{sh}(c) = r_3$.

Agora, observe que,

$$|b \cdot c - r_2 \cdot r_3| = |b \cdot c - b \cdot r_3 + b \cdot r_3 - r_2 \cdot r_3| = |b(c-r_3) + r_3(b-r_2)|,$$

assim,

$$|b(c-r_3) + r_3(b-r_2)| \leqslant |b||(c-r_3)| + |r_3||(b-r_2)| < (|b| + |r_3|)\frac{2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $b$ é limitado, temos um $r_4 \in \mathbb{R}$ tal que, $b < r_4$. Assim,

$$|b \cdot c - r_2 \cdot r_3| < (|r_4| + |r_3|)\frac{2}{n} \leqslant (\lceil |r_4| \rceil + \lceil |r_3| \rceil)\frac{2}{n} = \frac{1}{m}, \forall m \in \mathbb{N},$$

onde $(\lceil |r_4| \rceil + \lceil |r_3| \rceil)2m = n$.

3. A demonstração da desigualdade segue da Proposição 6.11.

□

**Proposição 6.16.** *O mapa:* $\mathsf{sh} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é um homomorfismo que preserva a ordem.*

Observe que $\mathsf{ker}(\mathsf{sh}) = \mathbb{I}$ e a função $\mathsf{sh}$ é sobrejetiva; assim, do teorema fundamental do homomorfismo para anéis, o quociente $\mathbb{L}/\mathbb{I}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Isto, neste momento, nos proporciona uma visualização intuitiva do que está acontecendo com os hiper-reais limitados. Primeiro, temos o fato de que $\mathbb{R} \subset \mathbb{L}$. Ao redor do zero, colocamos todos os infinitesimais, que dão origem ao $\mathsf{Halo}$ de zero. Para cada número real, também "colocamos"todos esses infinitesimais ao redor; isso origina todos os $\mathsf{Halos}$ que compõem $\mathbb{L}$. Esses $\mathsf{Halos}$ são os cosets do quociente $\mathbb{L}/\mathbb{I}$. Porém, devido ao homomorfismo $\mathsf{sh}$, podemos visualizar cada $\mathsf{Halo}$ como uma unidade, com essas unidades se comportando como números reais. Cada $\mathsf{Halo}$ é um átomo ou mônada, com um núcleo real, que é seu $\mathsf{Shadow}$; ao redor do $\mathsf{Shadow}$, temos os hiper-reais próprios, que foram obtidos somando todos os infinitesimais a esse $\mathsf{Shadow}$.

Sabemos que ser Dedekind completo, ou Cauchy completo, são proposições equivalentes nos números reais. Assim, podemos partir tanto do axioma do supremo para provar que todas as sequências de Cauchy convergem, quanto do fato de que todas as sequências de Cauchy convergem para demonstrar que todo conjunto de números reais não vazio e limitado superiormente possui supremo nos números reais.

Para provarmos que todo hiper-real limitado possui um $\mathsf{Shadow}$ , utilizamos o axioma do supremo. Na verdade, essas propriedades são equivalentes, o que será demonstrado no seguinte teorema.

**Definição 6.17.** *Uma sequência de números reais,* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, é chamada de sequência de Cauchy se,* $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists k \in \mathbb{N})\ [(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant k \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon)]$.

**Teorema 6.18.** *Se todo hiper-real limitado possui um* $\mathsf{Shadow}$*, então toda sequência de Cauchy de números reais converge nos números reais.*

*Demonstração.* Seja $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de Cauchy, isto é:

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists k_\epsilon \in \mathbb{N})[(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant k_\epsilon \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon)]$$

Inclusive para $\epsilon = 1$, temos um $k_\epsilon \in$ que deixa

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant k_1 \Rightarrow |s_n - s_m| < 1)$$

verdadeiro.

Assim, do princípio da transferência, temos que

$$(\forall m, n \in {}^*\mathbb{N})(m, n \geqslant k_1 \Rightarrow |{}^*s_n -^* s_m| < 1)$$

é verdadeiro.

Vamos agora interpretar o que esta sentença está nos dizendo.

Para todo $n$ e $m$ hiper-naturais, se esses $n$ e $m$ são maiores ou iguais que o natural $k_1$, então $|{}^*s_n - {}^*s_m| < 1$, onde ${}^*s$ é a extensão de $s$.

Em particular, podemos considerar $m = k_1$ e $n = N$, onde $N$ é um hiper-natural ilimitado; assim:

$|{}^*s_N -^* s_{k_\epsilon}| < 1$ é verdade, e como $s_{k_\epsilon}$ é real, ${}^*s_{k_\epsilon}$ também o será.

Assim, $|{}^*s_N| - |{}^*s_{k_1}| \leqslant |{}^*s_N -^* s_{k_1}| < 1$ e, consequentemente, $|{}^*s_N| < 1 + |{}^*s_{k_1}|$, ou seja, ${}^*s_N$ é limitado; dessa forma, temos $sh({}^*s_N) = L$, para algum $L \in \mathbb{R}$.

Nosso objetivo agora será demonstrar que a sequência $s$ converge para esse $L$.

Como escolhemos $N$ ilimitado, ele é maior do que qualquer número natural; assim, para qualquer $\epsilon > 0$ número real escolhido, dado o $k_\epsilon \in \mathbb{N}$, temos $N > k_\epsilon$.

Assim, se $m \geqslant k_\epsilon$ temos $|{}^*s_m - {}^*s_N| < \epsilon$, e segue a seguinte desigualdade:

$$|{}^*s_m - L| \leqslant |{}^*s_m - {}^*s_N| + |{}^*s_N - L| < \epsilon + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde podemos escolher um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_1} < \epsilon$.

Por fim, temos: $|{}^*s_m - L| < 2 \cdot \epsilon$, assim transferimos a sentença para obtermos: $|s_m - L| < 2 \cdot \epsilon$, o que se verifica para todo $\epsilon > 0$ real, e concluímos que a sequência converge para $L$. $\square$

Agora enunciaremos e provaremos lemas que serão utilizados nos capítulos de derivadas e integrais.

**Lema 6.19.** *Se* $b, c \in {}^*\mathbb{R}$ *são limitados e também* $b' \in hal(b)$ *e* $c' \in hal(c)$*, então temos:*

1. $b' + c' \in hal(b + c)$.
2. $b' \cdot c' \in hal(b \cdot c)$.
3. $\frac{b'}{c'} \in hal(\frac{b}{c})$ *se* $c \notin hal(0)$.

*Demonstração.* Este lema nos informa que, pelo menos para os números limitados, a relação de estar infinitamente próximo é uma congruência. Portanto, buscamos demonstrar que $b' \simeq b$ e $c' \simeq c$ implicam $b' + c' \simeq b + c$.

1. Como $b' \simeq b$ e $c' \simeq c$ temos $|b' - b| < \frac{1}{2 \cdot n}$ e $|c' - c| < \frac{1}{2 \cdot n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $|b' + c' - b - c| = |b' - b + c' - c| \leqslant |b' - b| + |c' - c| < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Primeiro, pontuamos que como $c'$ e $b$ são limitados, existem $n_{c'}, n_b \in \mathbb{N}$ tais que $c' < n_{c'}$ e $b < n_b$. Temos que $|b' - b| < \frac{1}{2 \cdot n_{c'} \cdot n}$ e $|c' - c| < \frac{1}{2 \cdot n_b \cdot n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então
$$|b' \cdot c' - b \cdot c| = |b' \cdot c' - b \cdot c' + b \cdot c' - b \cdot c| = |c'| \cdot |b' - b| + |b| \cdot |c' - c| < \frac{1}{n},$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Primeiro, pontuamos que como $b$ e $c$ são limitados e $b' \simeq b$ e $c' \simeq c$, temos $n_b, n_c \in \mathbb{N}$, onde $b$ e $b'$ são limitados por $n_b$ e $c$ e $c'$ são limitados por $n_c$. temos que $|b' - b| < \frac{n_c}{2 \cdot n}$ e $|c' - c| < \frac{n_c^2}{2 \cdot n_b \cdot n}$, isso para todo $n \in \mathbb{N}$.
Agora observe a seguinte equação,
$$\begin{aligned} \left| \frac{b'}{c'} - \frac{b}{c} \right| = \left| \frac{b' \cdot c - b \cdot c'}{c' \cdot c} \right| &= \left| \frac{b' \cdot c - b \cdot c + b \cdot c - b \cdot c'}{c' \cdot c} \right| \\ &= \left| \frac{c \cdot (b' - b) + b \cdot (c - c')}{c' \cdot c} \right| \\ &\leqslant \frac{|c| \cdot |b' - b|}{|c'| \cdot |c|} + \frac{|b| \cdot |c - c'|}{|c'| \cdot |c|} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, o que conclui a prova.

□

Repare que, para a soma, não utilizamos a hipótese de $b$ e $c$ serem limitados. Dessa forma, temos uma congruência de soma para todo hiper-real.

**Lema 6.20.** *Se* $x \simeq y$ *e* $b \in \mathbb{L}$, *então* $b \cdot x \simeq b \cdot y$.

*Demonstração.* Como $b$ é limitado, temos $n_b \in \mathbb{N}$, onde $|b| < n_b$. Temos $|x - y| < \frac{1}{n_b \cdot n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, temos $|b \cdot x - b \cdot y| = |b| \cdot |x - y| < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Vamos falar agora um pouco sobre o conjunto ${}^*\mathbb{N}$ dos hiper-naturais. Primeiro, verificamos que esse conjunto é fechado para a soma, pois $(\forall n, m \in \mathbb{N})(n + m \in \mathbb{N})$. Assim, transferimos a sentença e obtemos $(\forall n, m \in {}^*\mathbb{N})(n + m \in {}^*\mathbb{N})$.

**Proposição 6.21.** *O conjunto dos hiper-naturais limitados é* $\mathbb{N}$.

*Demonstração.* Se $k \in {}^*\mathbb{N}$ é limitado, então temos que $k \leqslant n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Agora observe a sentença: $\forall x \in \mathbb{N}(x \leqslant n \Rightarrow x = 1 \vee \cdots \vee x = n)$, que é uma sentença verdadeira. Vamos transferir a sentença para verificar que: $\forall x \in {}^*\mathbb{N}(x \leqslant n \Rightarrow x = 1 \vee \cdots \vee x = n)$. Assim, se o hiper-natural k é limitado por n, então $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

□

Temos, como consequência desta proposição, que todos os membros de ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ são ilimitados. Utilizamos o símbolo ${}^*\mathbb{N}_\infty$ para representar os hiper-naturais ilimitados.

# 7 Sequências.

A partir de agora, direcionaremos toda a nossa atenção para a análise básica. Neste capítulo, estudaremos conceitos sobre sequências e limites. Devido à transferência, poderemos relacionar resultados clássicos com resultados não standard, ainda mais, poderemos provar resultados clássicos por meios não standard.

## 7.1 Convergência.

Na análise de números reais, dizemos que uma sequência, $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ , converge para o número real $L$ se, $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists m_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > m_\epsilon \Rightarrow |s_n - L| < \epsilon)$. Isso significa que, ao considerar o intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, a partir de um $n$, todos os termos $s_n, s_{n+1}, \ldots$ estão incluídos neste intervalo.

A ideia agora é que, nos hiper-reais, a transferência nos permite considerar os hiper-naturais ilimitados. Queremos que, para esses ilimitados, os termos estejam infinitamente próximos do limite; ou seja, para os termos de hiper-naturais ilimitados, os valores estejam no $\mathrm{Halo}$ do limite.

**Teorema 7.1.** *Uma sequência de números reais,* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, converge para* $L \in \mathbb{R}$ *se, e somente se,* ${}^*s_n \in hal(L)$ *para todo* $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$*.*

*Demonstração.* $(\Rightarrow)$: Suponha que é valido

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists m_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > m_\epsilon \Rightarrow |s_n - L| < \epsilon).$$

Podemos então escolher um $\epsilon'$ real positivo e teremos a existência de um $m_{\epsilon'}$ natural onde temos a seguinte sentença,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > m_{\epsilon'} \Rightarrow |s_n - L| < \epsilon').$$

Do princípio da transferência temos:

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n > m_{\epsilon'} \Rightarrow |{}^*s_n - L| < \epsilon').$$

Porém, todo hiper-natural $N$ ilimitado é maior que esse $m_{\epsilon'}$, afinal $m_{\epsilon'}$ é natural.

Assim, para qualquer $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$, será escolhido um $m_{\epsilon'}$ natural, e, dado um $N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, $N$ será maior que este $m_{\epsilon'}$ e assim $|{}^*s_N - L| < \epsilon'$. Como $\epsilon'$ é arbitrário, para todo $N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, segue que ${}^*s_n \in hal(L)$.

$(\Leftarrow)$: Primeiro fixamos um $N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. Obviamente se, dado um $n \in {}^*\mathbb{N}$, tal que $n > N$, então este $n$ também é ilimitado, consequentemente o termo estendido, ${}^*s_n$, está em $hal(L)$. Podemos falar:

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n > N \Rightarrow |{}^*s_n - L| < \epsilon),$$

onde $\epsilon$ representa qualquer real positivo.

Observe que esta sentença anterior, fazendo uso do quantificador existencial, pode ser obtida da seguinte sentença,

$$(\exists z_\epsilon \in {}^*\mathbb{N})(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n > z_\epsilon \Rightarrow |{}^*s_n - L| < \epsilon),$$

onde os $\epsilon$ são reais positivos.

Gostaria de chamar a atenção neste momento para pontuar uma sutileza da prova. O $\epsilon$ da sentença surge da definição de um número estar no $Halo$ de outro. Ele não é uma variável da sentença, ele funciona, na realidade, como se estivéssemos considerando infinitas sentenças, uma para cada $\epsilon$ real positivo, a cada $\epsilon$ tem valor constante na sentença. Por este motivo, simbolizamos a variável do existencial, $z_\epsilon$, com o subscrito $\epsilon$, afinal esse $z_\epsilon$ está "linkado"a uma sentença onde $\epsilon$ é uma constante.

Agora estamos em condições de aplicar transferência, uma vez que conseguimos eliminar $N$, que é uma constante ilimitada, não é a transferência de nenhum real, o que nos impedia de voltar a sentença para os reais. Assim temos:

$$(\exists z_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > z_\epsilon \Rightarrow |s_n - L| < \epsilon),$$

onde os $\epsilon$ são reais positivos.

Na última sentença obtida, podemos concluir que para cada $\epsilon$ real, teremos um $z_\epsilon \in \mathbb{N}$ onde, para os $n \in \mathbb{N}$, se $n > z_\epsilon$ então os valores $s_n$ estão no intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

□

A sentença não terminou exatamente como a definição de convergência; afinal, não tínhamos o $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)$ no início. Isso se deve ao fato de que a definição de infinitesimal faz apenas comparações com números reais. Tivemos que usar o "truque"de considerar a sentença verdadeira, utilizando o $\epsilon$ não como variável, mas sim como válido para cada número real positivo, separadamente.

Quando a sequência $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ converge para o número real $L$, escrevemos também desta forma: $lim_{n\to\infty} s_n = L$. Chamamos o número $L$ de limite da sequência.

**Proposição 7.2.** *Se temos* $lim_{n\to\infty} s_n = L_1$ *e* $lim_{n\to\infty} s_n = L_2$*, então* $L_1 = L_2$*.*

*Demonstração.* Observe a primeira parte da prova do Teorema 7.1. Caso a sequência $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ possuísse dois limites, então, para nosso $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, ${}^*s_n \in hal(L_1)$ e ${}^*s_n \in$

$\mathsf{hal}(L_2)$, se esses limites fossem diferentes, não teríamos unicidade no $\mathsf{Shadow}$, o que é um absurdo. □

**Definição 7.3.** *Uma sequência,* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, de números reais é limitada em* $\mathbb{R}$ *se:* $(\forall n \in \mathbb{N})|s_n| < b$*, para algum* $b \in \mathbb{R}$*.*

**Definição 7.4.** *Uma sequência,* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, de números reais é limitada superiormente em* $\mathbb{R}$ *se:* $(\forall n \in \mathbb{N})s_n < b$*, para algum* $b \in \mathbb{R}$*.*

**Definição 7.5.** *Uma sequência,* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, de números reais é limitada inferiormente em* $\mathbb{R}$ *se:* $(\forall n \in \mathbb{N})b < s_n$*, para algum* $b \in \mathbb{R}$*.*

Para as duas últimas definições, o número real $b$ é denominado, respectivamente, de cota superior e cota inferior.

Veja que agora temos definições para conjuntos limitados e sequências limitadas. Na realidade, podemos usar a mesma definição de conjuntos limitados para sequências; fazemos isso considerando que a limitação da sequência se refere ao conjunto de seus termos.

**Proposição 7.6.** *Uma sequência* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de números reais é limitada em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se,* $(\forall n \in {}^*\mathbb{N}_\infty)|{}^*s_n| < b$*, para algum* $b \in \mathbb{R}$*.*

Antes da demonstração, um comentário: precisamos, na proposição, esclarecer que a sequência é limitada em $\mathbb{R}$, pois em ${}^*\mathbb{R}$ qualquer sequência de números reais seria limitada por um hiper-real ilimitado.

*Demonstração.* Se $s_n$ é limitada, temos: $(\forall n \in \mathbb{N})|s_n| < b$, para algum $b \in \mathbb{R}$, assim, por transferência, temos,

$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})|{}^*s_n| < b$, para algum $b \in \mathbb{R}$, o que vale também para os $n \in {}^*\mathbb{N}$ ilimitados.

Suponha que temos, $(\forall n \in {}^*\mathbb{N}_\infty)|{}^*s_n| < b$. Não podemos realizar a transferência, afinal ${}^*\mathbb{N}_\infty$ não é um conjunto real transferido. Observe que, ao tomarmos um $R \in {}^*\mathbb{R}_\infty$, temos que $(\forall n \in \mathbb{N})|{}^*s_n| < R$, afinal, mesmo que a sequência $s$ seja divergente, os termos nunca ficam ilimitados. Assim, como $b < R$, temos $(\forall n \in {}^*\mathbb{N})|{}^*s_n| < R$, ou ainda podemos afirmar que $(\exists x \in {}^*\mathbb{R})(\forall n \in {}^*\mathbb{N})|{}^*s_n| < x$, uma sentença verdadeira na qual é possível aplicar a transferência contrária; assim, por fim, temos: $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})|s_n| < x$. □

## 7.2 Resultados para sequências de Cauchy.

**Proposição 7.7.** *Se a sequência* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma sequência de Cauchy, então ela é limitada.*

*Demonstração.* Se a sequência é de Cauchy, então escrevemos,

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists k_{\epsilon} \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant k_{\epsilon} \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon).$$

Tome qualquer número real positivo $\epsilon'$, assim, temos um $k_{\epsilon'} \in \mathbb{N}$ que resulta na sentença

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant k_{\epsilon'} \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon').$$

Assim, pela transferência,

$$(\forall m, n \in {}^*\mathbb{N})(m, n \geqslant k_{\epsilon'} \Rightarrow |{}^*s_n - {}^*s_m| < \epsilon')$$

é uma sentença verdadeira. Inclusive, tome qualquer $n = N \in {}^*\mathbb{N}_{\infty}$ e $m = k_{\epsilon'} \in \mathbb{N}$. Por fim temos, $|{}^*s_N| - |{}^*s_{k_{\epsilon'}}| < |{}^*s_N - {}^*s_{k_{\epsilon'}}| < \epsilon'$, e consequentemente, $|{}^*s_N| < (\epsilon' + |{}^*s_{k_{\epsilon'}}|) \in \mathbb{R}$. □

**Proposição 7.8.** *Uma sequência,* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, *é Cauchy em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se,* $(\forall n, m \in {}^*\mathbb{N}_{\infty})\, {}^*s_m \simeq {}^*s_n$.

*Demonstração.* Se temos uma sequência de Cauchy, escrevemos,

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+})(\exists k_{\epsilon} \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant k_{\epsilon} \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon).$$

Tome um número real positivo $\epsilon'$; assim, obtemos um $k_{\epsilon'} \in \mathbb{N}$ que mantém a sentença verdadeira:

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant k_{\epsilon'} \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon').$$

Assim, pela transferência,

$$(\forall m, n \in {}^*\mathbb{N})(m, n \geqslant k_{\epsilon'} \Rightarrow |{}^*s_n - {}^*s_m| < \epsilon')$$

é verdadeira.

Veja que podemos escrever

$$(\forall m, n \in {}^*\mathbb{N}_{\infty})|{}^*s_n - {}^*s_m| < \epsilon',$$

pois se $m$ e $n$ são hiper-naturais ilimitados, eles serão maiores do que qualquer $k_{\epsilon} \in \mathbb{N}$. Assim, esta última sentença obtida nos diz que $(\forall n, m \in {}^*\mathbb{N}_{\infty})\, {}^*s_m \simeq {}^*s_n$, afinal $\epsilon'$ é arbitrário.

Por outro lado, supondo que temos

$$(\forall n, m \in {}^*\mathbb{N}_{\infty})\, {}^*s_m \simeq {}^*s_n,$$

podemos escrever esta sentença de outra forma

$$(\forall n, m \in {}^*\mathbb{N}_{\infty})|{}^*s_n - {}^*s_m| < \epsilon,$$

onde $\epsilon$ é qualquer real positivo.

Na realidade, podemos tomar um $N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ e escrever

$$(\forall n, m \in {}^*\mathbb{N})(n, m > N \Rightarrow |{}^*s_n - {}^*s_m| < \epsilon),$$

onde $\epsilon$ é qualquer real positivo. Observe que eliminamos o símbolo de infinito; afinal, para que $n$ e $m$ sejam maiores que $N$, eles necessariamente têm que ser ilimitados. Estamos quase na condição para aplicar a transferência; precisamos "sumir"com a constante $N$. Então reescrevemos a sentença como

$$(\exists z_\epsilon \in {}^*\mathbb{N})(\forall n, m \in {}^*\mathbb{N})(n, m > z_\epsilon \Rightarrow |{}^*s_n - {}^*s_m| < \epsilon),$$

onde $\epsilon$ é qualquer real positivo. Para a conclusão, aplicamos a transferência para obter a sentença

$$(\exists z \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m > z \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon),$$

onde $\epsilon$ é qualquer real positivo.

□

O próximo teorema é de grande importância; seu nome é critério de convergência de Cauchy para sequências de números reais.

**Teorema 7.9.** *Uma sequência, $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, é Cauchy em $\mathbb{R}$ se, e somente se, é convergente em $\mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Se a sequência, $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, é de Cauchy, então, pela Proposição 7.7 ela é limitada, ou seja, $(\forall n \in \mathbb{N})|s_n| < b$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Assim pelo resultado da Proposição 7.6 temos que a sequência estendida também é limitada. Como seus termos estendidos são limitados, todos tem $\mathsf{Shadow}$. Porém, da Proposição 7.8, o $\mathsf{Shadow}$ é o mesmo, pois todos estão no mesmo $\mathsf{Halo}$. Assim, do Teorema 7.1, temos que a sequência converge.

No caso em que a sequência converge, temos que todos os seus termos estendidos estão no $\mathsf{Halo}$ do limite, ou seja, todos os seus termos estendidos estão infinitamente próximos, o que vimos na Proposição 7.8 que é equivalente a ser sequência de Cauchy.

□

# 8 Funções contínuas.

Neste capítulo, discutiremos funções contínuas e demonstraremos alguns teoremas clássicos.

Ao abordarmos a continuidade de uma função em um ponto $P$ de maneira ingênua, desejamos que, ao fornecer "entradas" muito próximas de $P$, as "saídas" também estejam muito próximas de $f(P)$. Mas o que significa que um número está muito próximo do outro? Afinal, dados dois números reais, eles sempre estarão a uma distância real um do outro, e essa distância pode ser considerada relativamente grande em comparação a outra distância real. Para contornar esse problema, utilizamos sequências, pois em uma sequência sempre poderemos escolher números cada vez mais próximos do nosso limite.

Ou seja, a função será contínua em um ponto $P$ se, ao considerarmos uma sequência $(s_n)$ no domínio que converge para o ponto $P$, a sequência $f(s_n)$ converge para o ponto $f(P)$. Esse tipo de definição apresenta a problemática de que, para verificarmos se uma função real é contínua, precisamos analisar um número infinito de sequências. Portanto, de maneira equivalente, utilizamos a ordem para formular a seguinte definição:

**Definição 8.1.** *Dizemos que uma função,* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, é contínua em um ponto* $p \in D$ *se, e somente se, a seguinte condição for satisfeita:*
$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon)$.

Na definição de continuidade por meio de épsilons e deltas, utilizamos $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)$ para contornar o problema dos infinitésimos; afinal, antes da formalização de seu uso por Robinson, os infinitésimos representavam um desafio à consistência da matemática.
Porém, quando um instrutor ou estudante se depara com essa definição, seja por motivos didáticos ou de cognição, interpretamos esse épsilon como um raio de infinitesimal potencial. Perceba que, como não conseguimos obter elementos do domínio que estejam extremamente próximos de $p$, contornamos essa situação utilizando sequências e raios, que evocam a ideia de infinitesimal potencial.

Agora estamos em um mundo matemático onde essas entidades extremamente pequenas realmente existem. Queremos que, após todo o nosso trabalho até aqui, nossas ideias formais desenvolvidas estejam alinhadas com nossas interpretações ingênuas.

Veremos isso no seguinte teorema:

**Teorema 8.2.** *A função* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em um ponto de acumulação* $p \in D$ *se, e somente se,* $(\forall x \in {}^*D)(x \in hal(p) \Rightarrow {}^*f(x) \in hal(f(p)))$*; ou, de maneira análoga,* ${}^*f(hal(p)) \subseteq hal(f(p))$.

*Demonstração.* Caso tenhamos uma função contínua em um ponto $p \in D$, então, de maneira formal, podemos escrever a sentença,

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon').$$

Fazemos a escolha prévia de um $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$ e, para este épsilon, será escolhido um $\delta_{\epsilon'} \in \mathbb{R}^+$ adequado.

Com essas escolhas, agora estamos na seguinte situação,

$$(\forall x \in D)(|x - p| < \delta_{\epsilon'} \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon'),$$

onde esta sentença é verdadeira. Assim, aplicamos a transferência e obtemos,

$$(\forall x \in {}^*D)(|x - p| < \delta_{\epsilon'} \Rightarrow |{}^*f(x) - f(p)| < \epsilon').$$

Não escrevemos ${}^*f(p)$ pois $f(p)$ é uma constante real. Agora, seja $c \in hal(p)$, podemos escrever $|c - p| < \psi$, onde $\psi$ é qualquer número real positivo. Inclusive, podemos escolher $\psi = \delta_{\epsilon'}$, e, da sentença transferida, temos $|{}^*f(c) - f(p)| < \epsilon'$. Observe que essa sentença seria obtida independentemente da escolha de $\epsilon'$, afinal, mesmo que o épsilon tenha sido considerado um número real constante para realizarmos a transferência, ele ainda é arbitrário, assim $|{}^*f(c) - f(p)| < \epsilon$, onde $\epsilon$ é qualquer real positivo.

Para a inversa, suponha que temos um hiper-real no $Halo$ de $p$. Assim, a imagem desse hiper-real pela função $f$ estará no $Halo$ de $f(p)$. Se tomamos um infinitesimal positivo $d$, dado qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, temos a seguinte sentença,

$$(\forall x \in {}^*D)|x - p| < d \Rightarrow |{}^*f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Esta última sentença é verdadeira porque de $|x - p| < d = infinitesimal$, então $x$ está no $Halo$ de $p$, assim ${}^*f(x)$ está no $Halo$ de $f(p)$. Podemos eliminar o $d$ da sentença utilizando um quantificador existencial, assim temos,

$$(\exists \delta_\epsilon \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall x \in {}^*D)|x - p| < \delta_\epsilon \Rightarrow |{}^*f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Lembre-se que o épsilon da sentença representa neste momento uma constante. Estamos em condições de aplicar a transferência, obtendo o seguinte:

$$(\exists \delta_\epsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)|x - p| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Veja que a última sentença será obtida para qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}$, assim temos que $f$ é contínua em $p$. □

Com este último teorema, retomamos a discussão do início do capítulo, pois agora, nos hiper-reais, conseguimos considerar números muito próximos de $p$, que são os números do $Halo$ de $p$. As imagens desses números, caso $f$ seja contínua, estão muito próximas de $f(p)$, pois localizam-se no $Halo$ de $f(p)$.

## 8.1 Limite de funções.

Nesta seção, apresentaremos o conceito de limite de funções. Geralmente, a ideia de limite de funções precede o conceito de continuidade das funções; na verdade, suas definições formais são bastante similares.

**Definição 8.3.** *Sejam* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função, e* $p$ *um ponto de acumulação de* $D$. *Dizemos que* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ *se a seguinte condição for satisfeita:*
$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$.

Veja que a diferença entre as definições de continuidade e limite está nos pontos $f(p)$ e $L$, além do módulo ser maior que 0. Isso ocorre porque, em limites, não nos interessamos pelo que acontece no ponto $p$; estamos interessados no que acontece com os valores funcionais quando os valores do domínio se aproximam de $p$.

Podemos afirmar que uma função é contínua no ponto $p$ se $p$ estiver no domínio de $f$ e $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Dessa forma, apresentamos o seguinte teorema:

**Teorema 8.4.** *Seja a função* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dizemos que* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ *se, e somente se,* $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \in hal(p) \Rightarrow {}^*f(x) \in hal(L))$, *com* $x \neq p$.

*Demonstração.* A demonstração do teorema é análoga à do Teorema 8.2; entretanto, neste caso, não nos interessa o valor de $f(p)$. □

Agora, vamos falar sobre um resultado da análise clássica, conhecido como o Teorema do Valor Extremo ou Teorema de Weierstrass. Este teorema é um corolário do resultado mais geral de que funções contínuas levam conjuntos compactos em conjuntos compactos.

**Teorema 8.5.** *(Teorema do Valor Extremo) Seja a função,* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *contínua no intervalo fechado* $[a, b]$. *Assim, existem* $c, d \in [a, b]$ *tais que* $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$, *para todo* $x \in [a, b]$.

# 9 Diferenciação.

Neste capítulo, abordaremos a derivada e a diferenciação, e apresentaremos algumas regras do cálculo, agora sob a perspectiva dos infinitesimais.

Agora estamos em um momento muito importante; afinal, aqui os infinitesimais formais se encontram com a derivada, um objeto matemático que, em sua concepção, utiliza infinitesimais informais e os torna evidentes. Anos depois, esses infinitesimais foram rejeitados da matemática, que, com suas ideias modernas de sequências e limites, apresenta uma versão muito mais formal da ideia de derivada.

Neste capítulo, os domínios $\mathsf{D}$ das funções são todos intervalos abertos.

**Definição 9.1.** *Seja a função,* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dado um número real* $x \in D$*, a derivada de* $f$ *no ponto* $x$ *é:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

*desde que esse limite exista.*

Usamos o símbolo $f'(x)$ para denotar a derivada de $f$ no ponto $x$.

Quando temos um intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, ao considerarmos a extensão de uma função com esse domínio, precisamos utilizar os valores na extensão desse intervalo. Vamos realizar a transferência para identificarmos qual é esse intervalo. Começamos com a seguinte sentença, $(\forall x \in (a, b)(a < x < b)$, assim, da transferência, temos $(\forall x \in {}^*(a, b)(a < x < b)$. Isso nos indica que a extensão de um intervalo em $\mathbb{R}$ é o mesmo intervalo, mas agora seus elementos são considerados não apenas como números reais, mas sim como os reais acompanhados de seus $\mathsf{Halos}$.

**Teorema 9.2.** *Seja a função,* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dado um número real* $x \in D$*, a derivada de* $f$ *no ponto* $x$ *é* $L \in \mathbb{R}$ *se, e somente se, para todo infinitesimal* $\varepsilon$ *diferente de* $0$*, temos que* $f(x + \varepsilon)$ *está definido e*

$$\frac{{}^*f(x + \varepsilon) - {}^*f(x)}{\varepsilon} \in \mathrm{hal}(L).$$

*Demonstração.* Seja a função $g(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Se $f'(x) = L$, então temos $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = L$. Assim, do Teorema 8.4, temos $(\forall h \in {}^*\mathbb{R})(h \in \mathrm{hal}(0) \Rightarrow {}^*g(h) \in \mathrm{hal}(L)$ com $h \neq 0$.

Observe que ${}^*g(h)$ está definido pois, como ${}^*g(h) = \frac{{}^*f(x+h)-{}^*f(x)}{h}$, então quando tomamos $h$ infinitesimal, precisamos que ${}^*f(x+h)$ esteja bem definido, e está, pois o $\mathsf{Halo}$ de $x$ está no domínio da extensão da $f$.

A reciproca segue diretamente do Teorema 8.4. $\square$

Isso nos proporciona uma nova forma de definir a derivada.

**Definição 9.3.** *Seja a função* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*. A derivada de* $f$ *no ponto* $x$ *é* $L$ *se, e somente se,*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{I}\backslash\{0\})\mathrm{sh}\left(\frac{{}^*f(x+\varepsilon) - {}^*f(x)}{\varepsilon}\right) = L.$$

## 9.1 Diferenciais.

A partir de agora, em determinados momentos, abandonaremos o uso de asteriscos antes das extensões de funções. Como a extensão de uma função mantém os mesmos valores funcionais para os números reais, ficará claro que estamos utilizando a extensão quando aplicarmos números hiper-reais que não são reais.

Utilizaremos o símbolo $\Delta x$ para representar um incremento infinitesimal diferente de zero na variável $x$. O incremento correspondente da função será $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Esse incremento da função depende do ponto $x$ e do incremento $\Delta x$; portanto, poderíamos denotá-lo de maneira explícita como $\Delta f(x, \Delta x) = f(x+\Delta x)-f(x)$. No entanto, deixaremos essas informações implícitas por motivos de simplificação.

Caso $f$ tenha derivada no ponto $x$, então, independentemente da escolha do $\Delta x$, teremos $\frac{\Delta f}{\Delta x} \in \mathrm{hal}(f'(x))$.

**Teorema 9.4.** *Seja a função* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*. Se* $f$ *tem derivada no ponto* $x \in D$*, então* $f$ *é contínua em* $x$*.*

*Demonstração.* Primeiro temos que, $\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \simeq f'(x) \cdot \Delta x$, onde $f'(x)$ é um número real. Desta forma o produto $f'(x) \cdot \Delta x$ é um infinitesimal. Podemos escrever, $f(x+\Delta x) - f(x) < \frac{1}{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. A última informação nos diz que para qualquer valor $x + \Delta x$ no $\mathrm{Halo}$ de $x$, o valor funcional desta entrada está no $\mathrm{Halo}$ de $f(x)$. Assim, do Teorema 8.2, temos que $f$ é contínua no ponto $x$. □

**Definição 9.5.** *Caso a função* $f$ *possua derivada no ponto* $x$*, a diferencial* $df(x, \Delta x)$ *é definida como* $df = f'(x) \cdot \Delta x$*, onde* $\Delta x$ *é qualquer infinitesimal diferente de zero. Novamente, aqui deixaremos implícita a dependência de* $x$ *e* $\Delta x$*.*

É importante notar que $\Delta f$ é diferente de $df$. Enquanto o primeiro indica o incremento da ordenada no gráfico da função quando $x$ varia $\Delta x$, o segundo aponta o incremento na reta tangente ao gráfico no ponto $x$ ao se variar $\Delta x$.

Da Definição 9.5 podemos escrever $\frac{df}{\Delta x} = f'(x)$.

**Proposição 9.6.** *Temos* $dx = \Delta x$.

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} dx &= x' \cdot \Delta x \\ &= sh\left(\frac{x+\varepsilon-x}{\varepsilon}\right) \cdot \Delta x \\ &= sh(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}) \cdot \Delta x \\ &= \Delta x. \end{aligned}$$

□

**Proposição 9.7.** *Os valores* $df$ *e* $\Delta f$ *estão infinitamente próximos entre si.*

*Demonstração.* Como foi observado anteriormente $\Delta f \simeq f'(x) \cdot \Delta x$, e $f'(x) \cdot \Delta x$ é um infinitesimal.

E como temos $df = f'(x) \cdot \Delta x$, então $df$ também é um infinitesimal. □

Seja a diferença $\varepsilon = \frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{df}{dx}$. Podemos reescrever isso como $\varepsilon = \frac{\Delta f - df}{\Delta x}$. Além disso, como observamos que $\frac{\Delta f}{\Delta x} \in hal(\frac{df}{dx})$, por isso temos que $\varepsilon$ é um infinitesimal. Quando temos uma divisão cujo resultado é infinitesimal, podemos interpretar que o divisor é infinitamente menor que o dividendo. Esta nossa discussão nos leva ao seguinte teorema.

**Teorema 9.8.** *Seja a função* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*. Se* $f$ *possui derivada no ponto* $x \in D$*, então existe um* $\varepsilon$ *infinitesimal, que depende de* $x$ *e* $\Delta x$*, tal que* $\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x = df + \varepsilon \cdot dx$.

*Demonstração.* O $\varepsilon$ procurado é, exatamente, a diferença $\frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{df}{dx}$. □

Se escrevemos $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$, podemos reorganizá-lo como $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$.

## 9.2 Regras de derivação.

**Proposição 9.9.** *Sejam* $f$ *e* $g$ *funções deriváveis no ponto* $x$*. Assim, temos:*

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$, *desde que* $g(x) \neq 0$.

*Demonstração.* 1. Temos $\Delta(f + g) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)$.

Observamos que $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Somando $f(x)$ em ambos os lados temos, $\Delta f + f(x) = f(x + \Delta x)$. Analogamente $\Delta g = g(x) = g(x + \Delta x)$.

Substituímos para obter,

$$\Delta(f+g) = f(x) + \Delta f + g(x) + \Delta g - f(x) - g(x) = \Delta f + \Delta g,$$

e assim, dividimos por $\Delta x$ para auferir,

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \simeq f'(x) + g'(x),$$

para qualquer $\Delta x \in \mathbb{I}\backslash\{0\}$.

2. Temos
$$\Delta(f \cdot g) = f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x).$$
Observamos que $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, assim somando $f(x)$ em ambos os lados temos, $\Delta f + f(x) = f(x+\Delta x)$. Do mesmo modo temos $\Delta g + g(x) = g(x+\Delta x)$,

Substituímos para obter,

$$\Delta(f \cdot g) = (f(x) + \Delta f) \cdot (g(x) + \Delta g) - f(x) \cdot g(x).$$

Fazemos as distributivas e auferimos

$$\Delta(f \cdot g) = \Delta f \cdot g(x) + f(x) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g.$$

Neste momento dividimos a equação pelo infinitesimal $\Delta x$ para obter,

$$\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + \Delta f \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Agora usamos os fatos de que, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq f'(x)$, $\frac{\Delta g}{\Delta x} \simeq g'(x)$ e que $\Delta f \in \mathfrak{hal}(0)$. Por fim,

$$\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} \simeq f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) + 0 \cdot g'(x),$$

para qualquer $\Delta x \in \mathbb{I}\backslash\{0\}$.

3. Temos $\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$.

Fazemos a substituição assim como nos itens anteriores e obtemos,

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot \Delta f - g(x) \cdot f(x) - \Delta g \cdot f(x)}{g(x)^2 + \Delta g \cdot g(x)}.$$

Reescrevemos como

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x) \cdot \Delta f}{g(x)^2 + \Delta g \cdot g(x)} - \frac{\Delta g \cdot f(x)}{g(x)^2 + \Delta g \cdot g(x)},$$

agora dividimos por $\Delta x$ e obtemos,

$$\frac{\Delta f/g}{\Delta x} = \frac{g(x)}{g(x)^2 + \Delta g \cdot g(x)} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)^2 + \Delta g \cdot g(x)} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Por fim, temos

$$\frac{\Delta f/g}{\Delta x} \simeq \frac{g(x) \cdot f'(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2},$$

para qualquer $\Delta x \in \mathbb{I}\backslash\{0\}$.

□

**Proposição 9.10.** *Sejam as funções* $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ *e* $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$*. Se* $f$ *possui derivada em* $x$ *e* $g$ *possui derivada em* $f(x)$*, então a função composta* $g \circ f$ *tem derivada em* $x$ *e a derivada é dada por* $g'(f(x)) \cdot f(x)$*.*

*Demonstração.* Temos $\Delta(g \circ f) = (g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)$. Assim, reescrevemos como $\Delta(g \circ f) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))$ e fazemos uma substituição para obter $\Delta(g \circ f) = g(f(x) + \Delta f) - g(f(x))$. Lembramos que $\Delta f$ é um infinitesimal e, como sabemos, $g$ possui derivada no ponto $f(x)$. Podemos reescrever a última expressão como $\Delta(g \circ f)(x, \Delta x) = g(f(x)) + \Delta g - g(f(x)) = \Delta g(f(x), \Delta f)$. Na última equação, explicitamos a dependência dos incrementos para utilizar o Teorema 9.8 com mais clareza. Assim podemos reescrever como $\Delta(g \circ f)(x, \Delta x) = g'(f(x)) \cdot \Delta f + \varepsilon \Delta f$.

Por fim, dividimos por $\Delta x$ e obtemos $\frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta x} = g'(fx)) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} + \varepsilon \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq g'(f(x))f'(x)$, para qualquer $\Delta x$ infinitesimal diferente de zero.

□

# 10 Integração.

Neste capítulo, abordaremos integrais. Assim como fizemos com derivadas, definiremos uma versão utilizando métodos não standard, e o mesmo faremos para integrais. Na nova definição, como agora dispomos de infinitesimais, poderemos considerar retângulos com bases muito pequenas.

A partir de agora, em determinados momentos, omitiremos o símbolo de multiplicação. Neste capítulo, estamos considerando apenas funções limitadas nos intervalos fechados das somas. Antes de discutirmos as somas de Riemann, precisamos de algumas definições.

**Definição 10.1.** *Seja* $(P, \leqslant)$ *um conjunto ordenado. O subconjunto* $S \subset P$ *é considerado limitado inferiormente se existir* $b \in P$ *tal que* $(\forall s \in S)s \geqslant b$, *ou seja, é considerado limitado inferiormente se possui uma cota inferior.*

**Definição 10.2.** *Seja* $(P, \leqslant)$ *um conjunto ordenado e* $S$ *um subconjunto de* $P$. *Um elemento* $c \in P$ *é denominado ínfimo de* $S$ *se* $(\forall x \in S)x \geqslant c$ *e se temos* $c' \in P$ *onde* $(\forall x \in S)x \geqslant c'$, *então* $c \geqslant c'$.

Veja que essas definições são semelhantes às de supremo, porém com as ordens invertidas.

**Definição 10.3.** *Seja o intervalo fechado* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Uma partição desse intervalo é um conjunto finito de pontos* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, *onde* $a = x_0 < \cdots < x_n = b$.

**Definição 10.4.** *Seja* $f$ *uma função definida em um intervalo fechado* $[a, b]$.
*Sejam* $P$ *uma partição de* $[a, b]$ *e* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
*Sejam* $M_i$ *e* $m_i$ *o supremo e o ínfimo do conjunto* $f([x_{i-1}, x_i])$.
*Assim definimos:*

- *Soma de Riemann superior:* $U_a^b(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i$,
- *Soma de Riemann inferior:* $L_a^b(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i$,
- *Soma de Riemann ordinária:* $S_a^b(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i$.

**Proposição 10.5.** *Sejam* $M$ *e* $m$ *o supremo e o ínfimo de* $f([a, b])$. *Então temos a seguinte desigualdade:*

$$m(b - a) \leqslant L_a^b(f, P) \leqslant S_a^b(f, P) \leqslant U_a^b(f, P) \leqslant M(b - a).$$

**Proposição 10.6.** *Sejam* $P_1$ *e* $P_2$ *duas partições de* $[a, b]$.

*Sempre temos* $L_a^b(f, P_1) \leqslant U_a^b(f, P_2)$.

**Definição 10.7.** *Dizemos que uma função,* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*, é Riemann integrável no intervalo fechado* $[a, b] \subseteq D$ *com integral* $\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ *se,*

1. *Para qualquer partição temos* $L_a^b(f, P_1) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant U_a^b(f, P_2)$*,*

2. *Para qualquer* $\epsilon \in R^+$ *temos uma partição* $P_\epsilon$ *onde* $U_a^b(f, P_\epsilon) - L_a^b(f, P_\epsilon) < \epsilon$*.*

**Definição 10.8.** *Para qualquer número real positivo* $\Delta x$*, temos a partição* $P_{\Delta x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *na qual os intervalos* $[a, x_1], \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1}]$ *possuem o mesmo tamanho, exceto pelo último intervalo* $[x_{n-1}, b]$*, que pode ter um tamanho menor.*

Para facilitar a leitura, usaremos $\Delta x$ ao invés de $P_{\Delta x}$. Podemos agora considerar as somas de Riemann como $U_a^b(f, \Delta x)$, $S_a^b(f, \Delta x)$ e $L_a^b(f, \Delta x)$. Assim, cada soma se transforma em uma função unicamente determinada pelo número real positivo $\Delta x$. Podemos pensar, então, nas extensões dessas funções, nas quais os infinitesimais serão permitidos. Dessa forma, intuitivamente, estaremos realizando uma soma de retângulos com base infinitesimal, que é a ideia originária de integração antes de ser formalizada por Riemann por meio de supremos e ínfimos.

Como, pela Proposição 10.5, temos a sentença $(\forall \Delta x \in \mathbb{R})(m(b - a) \leqslant L_a^b(f, \Delta x) \leqslant S_a^b(f, \Delta x) \leqslant U_a^b(f, \Delta x) \leqslant M(b - a))$, então, pela transferência, essa desigualdade se mantém para os infinitesimais .

Isso também se aplica à sentença da Proposição 10.6, $(\forall \Delta x_1, \Delta x_2 \in \mathbb{R})(L_a^b(f, \Delta x_1) \leqslant U_a^b(f, \Delta x_2))$, que, pela transferência, verificamos que se mantém para os infinitesimais.

**Proposição 10.9.** *Se* $f$ *é uma função contínua no intervalo real* $[a, b]$*, então, para qualquer infinitésimo positivo* $\Delta x$*, temos que* $L_a^b(f, \Delta x) \simeq U_a^b(f, \Delta x)$*.*

*Demonstração.* Primeiro tome a partição $P_{\Delta x}$, e seja $\mu(\Delta x) \doteq max\{M_i - m_i, i = 1, \ldots n\}$, onde os $i$ representam os intervalos da partição, e os $M_i$ e $m_i$ são os supremos e ínfimos. Os $M_i - m_i$ são chamados de oscilações dos intervalos, $\mu(\Delta x)$ é a maior oscilação.

Se $\mu(\Delta x) = M_j - m_j$ então a maior oscilação é no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$. Sabemos, pelo teorema do valor extremo, que existem $c(\Delta x)$ e $d(\Delta x)$ no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ onde $f(c(\Delta x)) = M_j$ e $f(d(\Delta x)) = m_j$. Concluímos que, $\mu(\Delta x) = f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))$ e que $|c(\Delta x) - d(\Delta x)| \leqslant \Delta x$.

Assim

$$U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(\Delta x)\Delta x_i = \mu(\Delta x) \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \mu(\Delta x)(b - a).$$

Concluímos que, dado o número real $\Delta x$, temos uma partição associada a este número, onde temos $c(\Delta x)$ e $d(\Delta x)$ no intervalo $[a, b]$ e as seguintes inequações acontecem, $|c(\Delta x) - d(\Delta x)| \leqslant \Delta x$ e $U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x) \leqslant [f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))](b - a)$.

Vamos reescrever isto de maneira formal. Para a primeira sentença temos,

$$(\forall \Delta x \in \mathbb{R})(\exists c(\Delta x)), d(\Delta x) \in [a, b])(|c(\Delta x) - d(\Delta x)| \leqslant \Delta x).$$

Para a segunda sentença, temos

$$(\forall \Delta x \in \mathbb{R})(\exists c(\Delta x)), d(\Delta x) \in [a, b])(U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x) \leqslant [f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))](b - a)).$$

No caso em que $\Delta x$ é infinitesimal, transferindo a primeira sentença, temos que $|c(\Delta x) - d(\Delta x)| \leqslant \Delta x$ , assim $c(\Delta x) \simeq d(\Delta x)$ para este $\Delta x$ infinitesimal. Como $f$ é contínua, temos $f(c(\Delta x)) \simeq f(d(\Delta x))$, que nos diz que $f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))$ é infinitesimal.

Agora, analisando a segunda sentença, temos que, para este infinitesimal $\Delta x$,

$$U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x) \leqslant [f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))](b - a),$$

e como $(b - a)$ é um número limitado, temos que $U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x)$ é menor que um número infinitesimal, afinal $[f(c(\Delta x)) - f(d(\Delta x))]$ é infinitesimal.

□

Basicamente, este nosso último resultado abrange a segunda exigência para que a função seja Riemann integrável, pois mantivemos as somas superiores e inferiores muito próximas. No entanto, não foi provado que, ao selecionarmos dois infinitesimais $\Delta x_1$ e $\Delta x_2$ diferentes, as somas $U_a^b(f, \Delta x_1)$ e $U_a^b(f, \Delta x_2)$ estarão no mesmo $\mathsf{Halo}$. Se essas somas apresentarem $\mathsf{Shadows}$ diferentes, isso representaria um problema.

Vamos verificar isso no próximo teorema.

**Teorema 10.10.** *Funções contínuas em um intervalo* $[a, b]$ *são Riemann integráveis nesse intervalo.*

*Demonstração.* Sejam $\Delta x_1$ e $\Delta x_2$ dois infinitesimais.

Pela Proposição 10.9, temos:

$$L_a^b(f, \Delta x_1) \simeq U_a^b(f, \Delta x_1) \text{ e } L_a^b(f, \Delta x_2) \simeq U_a^b(f, \Delta x_2).$$

Pela Proposição 10.6, temos:

$$L_a^b(f, \Delta x_1) \leqslant U_a^b(f, \Delta x_2) \text{ e } L_a^b(f, \Delta x_2) \leqslant U_a^b(f, \Delta x_1).$$

Assim,

$$U_a^b(f, \Delta x_1) \simeq L_a^b(f, \Delta x_1) \leqslant U_a^b(f, \Delta x_2) \simeq L_a^b(f, \Delta x_2) \leqslant U_a^b(f, \Delta x_1).$$

Agora somamos $-U_a^b(f, \Delta x_1)$ para obter,

$$0 \simeq L_a^b(f, \Delta x_1) - U_a^b(f, \Delta x_1) \leqslant U_a^b(f, \Delta x_2) - U_a^b(f, \Delta x_1) \simeq L_a^b(f, \Delta x_2) - U_a^b(f, \Delta x_1) \leqslant 0.$$

Por $f$ ser contínua, $m$ e $M$ são atingidos devido ao teorema do valor extremo. Para qualquer $\Delta x \in \mathbb{I}$, as somas de Riemann ficam limitadas entre $m(b-a)$ e $M(b-a)$; portanto, podemos considerar os shadows das somas de Riemann.

Tomando o shadow de cada parte

$$0 = sh(L_a^b(\Delta x_1) - U_a^b(\Delta x_1)) \leqslant sh(U_a^b(\Delta x_2) - U_a^b(\Delta x_1)) = sh(L_a^b(\Delta x_2) - U_a^b(\Delta x_1)) \leqslant 0.$$

Assim, concluímos que

$$0 \leqslant sh(L_a^b(f, \Delta x_2) - U_a^b(f, \Delta x_1)) \leqslant 0.$$

Então, da última inequação e pela Proposição 10.9, temos

$$L_a^b(f, \Delta x_1) \simeq U_a^b(f, \Delta x_1) \simeq L_a^b(f, \Delta x_2) \simeq U_a^b(f, \Delta x_2).$$

Como temos $L_a^b(f, P) \leqslant S_a^b(f, P) \leqslant U_a^b(f, P)$ então $S_a^b(f, \Delta x_1) \simeq S_a^b(f, \Delta x_2)$.

Definimos, então, $\int_a^b f(x)dx \doteq sh\left(S_a^b(f, \Delta x)\right)$.

Vamos mostrar que esta definição satisfaz a primeira exigência da integral de Riemann.

Primeiro seja $\Delta x \in \mathbb{I}$ e seja $P$ qualquer partição real de $[a, b]$. Então temos a seguinte relação,

$$L_a^b(f, P) \leqslant U_a^b(f, \Delta x) \simeq \int_a^b f(x)dx \simeq L_a^b(f, \Delta x) \leqslant U_a^b(f, P).$$

Agora vamos verificar a segunda exigência da integral de Riemann.

Pelo Teorema 10.9, dado qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, temos um hiper-real positivo $\Delta x$, onde

$$U_a^b(f, \Delta x) - L_a^b(f, \Delta x) < \epsilon.$$

Podemos eliminar a constante infinitesimal usando um quantificador e obter,

$$(\exists P_\epsilon \in {}^*\mathbb{R}) U_a^b(f, P_\epsilon) - L_a^b(f, p_\epsilon) < \epsilon.$$

Por transferência, concluímos a segunda exigência.

Isso prova que, para qualquer partição, temos $L_a^b(f, P_1) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant U_a^b(f, P_2)$. $\square$

Como para qualquer $\Delta x \in \mathbb{I}$ temos $L_a^b(f, P) \simeq S_a^b(f, P) \simeq U_a^b(f, P)$. Devido ao resultado anterior, podemos ter a seguinte definição.

**Definição 10.11.** *Se* $\mathsf{f}$ *é uma função contínua no intervalo, então sua integral de Riemann é* $\mathsf{sh}(S_a^b(f, \Delta x)) = \int_a^b f(x)dx$ *e* $\Delta x \in \mathbb{I}\backslash\{0\}$.

Agora temos uma definição de derivada e integral utilizando infinitesimais. Perceba que ambas fazem uso do Shadow.

Vamos agora prosseguir para a demonstração do teorema fundamental do cálculo. Antes, precisamos de um resultado clássico sobre integrais.

**Lema 10.12.** *Se a* $f$ *é integrável em* $[a, b]$ *e* $c \in [a, b]$, *então,*

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

**Teorema 10.13.** *Seja a função* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua em* $[a, b] \subseteq D$. *A função* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *é diferenciável em* $[a, b]$ *e sua derivada é* $f$.

*Demonstração.* Tome o incremento $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$. Este incremento pode ser escrito como $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Como $f$ é contínua, ela tem máximo e mínimo no intervalo $[x, x + \Delta x]$ em alguns pontos $x_1$ e $x_2$.

Assim, temos a inequação

$$
\begin{aligned}
f(x_2)\Delta x \leqslant \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leqslant f(x_1)\Delta x \\
\Rightarrow f(x_2) \leqslant \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \leqslant f(x_1) \\
\Rightarrow f(x_2) \leqslant \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leqslant f(x_1)
\end{aligned}
$$

Porém, como $f$ é contínua e $x, x_1, x_2 \in \mathsf{hal}(x)$, tomando o shadow temos:

$$f(x) = \mathsf{sh}(f(x_2)) \leqslant \mathsf{sh}\left(\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}\right) \leqslant \mathsf{sh}(f(x_1)) = f(x).$$

Segundo nossa definição de derivada temos então $F'(x) = f(x)$. □

**Teorema 10.14.** *Se a função* $G : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *possui uma derivada contínua* $f : [a, b] \subseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$, *então* $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

*Demonstração.* Se $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, então, em $[a, b]$, temos,

$$(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0.$$

Então $G(x) - F(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Isso implica

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

# Referências

GOLDBLATT, R. *Lectures on the Hyperreals An Introduction to Nonstandard Analysis*. 1. ed. Nova York: Springer-Verlag, 1998. (Graduete texts in mathematics). Citado na página 10.

HURD, A.; LOEB, P. *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*. 1. ed. Florida: Academic Press, 1985. Citado na página 10.

LIMA, E. L. *Curso de Análise - Volume 1*. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976. (Projeto Euclides). Citado na página 10.

MENDELSON, E. *Introduction To Mathematical Logic*. 6. ed. Nova York: CRC press, 2015. Citado na página 10.

MORTARI, C. A. *Introdução a Logica*. 3. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2001. Citado na página 10.