UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Múltiplas soluções em certas classes de problemas elípticos não homogêneos e não locais

Amanda Angélica Feltrin Nunes

São Carlos
Março/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Múltiplas soluções em certas classes de problemas elípticos não homogêneos e não locais

Amanda Angélica Feltrin Nunes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira**

São Carlos
Março/2018

Angélica Feltrin Nunes, Amanda

Múltiplas soluções em certas classes de problemas elípticos não homogêneos e não locais / Amanda Angélica Feltrin Nunes. -- 2018.
86 f. : 30 cm.

Tese (doutorado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Dr. Gustavo Ferron Madeira
Banca examinadora: Dr. Gustavo Ferron Madeira, Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva, Dr. Ederson Moreira dos Santos, Dr. Eugenio Tommaso Massa, Dr. Giovany Malcher Figueiredo
Bibliografia

1. Multiplicidade de soluções em problemas elípticos não lineares. 2. Problema de Kirchhoff elíptico. 3. Termo não linear côncavo-convexo. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

UFSCar

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Amanda Angélica Feltrin Nunes, realizada em 29/03/2018:

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira
UFSCar

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
UFSCar

Prof. Dr. Ederson Moreira dos Santos
USP

Prof. Dr. Eugenio Tommaso Massa
USP

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
UnB

Com todo o carinho aos meus pais
José Carlos e Clotilde
e aos meus irmãos Cássio e César

Agradecimentos

A Deus por ter me sustentado e dado forças para superar os obstáculos desta trajetória. Por colocar em minha vida pessoas ímpares, demonstrando, por meio delas, todo o Seu cuidado e amor por mim e fazendo com que a caminhada fosse mais leve.

Aos meus pais, José Carlos e Clotilde por serem minha base sólida, conselheiros sábios, fontes de inspiração, constantes intercessores, modelos a imitar. Sou grata por toda a estrutura que me ofereceram, por confiarem e sempre acreditarem em mim.

Aos meus irmãos Cássio e César pelo companheirismo, pelos momentos de riso, por acreditarem em mim e pela torcida de sempre!

Às minhas avós Maria e Odila por todos os mimos e constantes orações.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira por aceitar compartilhar seus conhecimentos comigo e fazê-lo de forma competente, acolhedora e amiga. Sou profundamente grata pela oportunidade de trabalharmos juntos e por tê-lo tido como exemplo de profissional.

Ao Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento por acreditar que esse trabalho fosse possível e pela ajuda no início do doutorado.

Aos meus companheiros de estudos, conversas, risadas, conselhos, angústia e desespero, que muito me ensinaram durante este período. Não podendo mencionar a todos, gostaria de destacar àqueles cuja presença foi mais constante: Mariane, Sandra, Alisson, Danilo, Chico e Igor.

A todos os professores que contribuíram cada um do seu modo para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, em especial, a Prof. Dra. Alessandra Aparecida Verri. Meus mais sinceros agradecimentos.

Aos meus amigos e familiares que tornaram essa caminha mais amena, os de perto, pelo bom convívio e pelos momentos compartilhados. Aos de longe, pela torcida, preocupação e compreensão nos momentos de ausência, bem como, pelos descontraídos e proveitosos momentos compartilhados.

A todos que torceram para que mais essa etapa fosse concluída. Meu muito obrigada!!

À CAPES pelo apoio financeiro.

"As coisas que são impossíveis aos homens são possíveis a Deus"

Lucas 18:27

Resumo

É estudado neste trabalho multiplicidade de soluções para certas classes de problemas elípticos não homogêneos e não locais. O termo não local no operador é de tipo Kirchhoff, podendo ser degenerado ou não degenerado, contínuo ou descontínuo na origem. O operador considerado inclui vários exemplos que surgem em aplicações como p-laplace, $p\&q$-laplace, p-curvatura média, entre outros. As funções não lineares tratadas incluem termos côncavos-convexos, termos sublineares ou superlineares locais ou não locais, perturbações destes, e funções superlineares satisfazendo condição de não quadraticidade no infinito. Os resultados obtidos são existência de uma infinidade de soluções com energia negativa, uma infinidade de soluções com energia positiva divergindo para $+\infty$ e, em alguns casos, multiplicidade de soluções positivas.

Abstract

This work concerns multiplicity of solutions to some nonhomogeneous and nonlocal elliptic problems. The nonlocal term on the operator is of Kirchhoff type and it may be degenerated or not, continuous or discontinouos at the origin. The operator herein includes several examples appearing in the applications like p-laplace, $p\&q$-Laplace, generalized p-mean curvature among others. The source terms include concave-convex terms, sublinear or superlinear term which can be local or nonlocal, pertubation of those, and functions satisfying a nonquadraticity condition at infinity. The results proved in this work assure the existence of infinitely many negative energy solutions, infinitely many positive energy solutions whose energy divergs to $+\infty$ and, in some cases, multiplicity of positive solutions.

Introdução

Neste trabalho estudamos multiplicidade de soluções para certas classes de problemas não homogêneos e não locais. Mais precisamente, o enfoque principal reside na existência de infnitas soluções para tais problemas. No início da década de 1990, Garcia Azorero e Peral Alonso [30] consideraram o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{s^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Dentre os resultados provados foi estabelecido para $1 < q < p$ a existência de infinitas soluções quando $\lambda > 0$ é pequeno.

Mais tarde, no célebre trabalho de Ambrosetti, Brézis e Cerami [3] foi tratado o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

sendo $1 < q < 2 < s \leq 2^*$. Dentre os resultados obtidos em [3] foi estabelecido o que se pode denominar estrutura côncava-convexa: existência de infinitas soluções de energia negativa, existência de infinitas soluções de energia positiva e existência de duas soluções positivas (em todos os casos para $\lambda > 0$ pequeno em [3].)

Desde então muitos trabalhos têm surgido nessa direção e podemos citar: Bartsch-Willem [5], Tang [53], Garcia-Peral [30, 31], De Figueiredo, Gossez e Ubilla [27], Komiya e Kajikiya [37] e as referências lá citadas.

Ao longo deste trabalho consideramos problemas envolvendo o operador não-homogêneo $L(u) = -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, sendo a função $a : [0, \infty) \to (0, \infty)$ de classe C^1 satisfazendo

(a_1) Existem $k_0, k_1, k_2 > 0$, $k_3 \geq 0$, $q > p$ tais que

$$k_0 + H(k_3)k_2 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq k_1 + k_3 t^{\frac{q-p}{p}},$$

com $H(\xi) = 1$ se $\xi > 0$ e $H(\xi) = 0$, se $\xi = 0$.

(a_2) (i) $a(t^p)t^{p-2}$ é não decrescente para $p \geq 2$.

(ii) $a(t)$ é não decrescente para $1 < p < 2$,

Deve-se enfatizar a ampla classe que tais operadores compreendem. Por exemplo,

(i) Se $a(t) = 1$ temos que as hipóteses (a_1) e (a_2) são satisfeitas com $k_0 = k_1 = 1$, $k_2 > 0$ e $k_3 = 0$ sendo o operador obtido o p-Laplace com $1 < p < +\infty$, isto é,

$$-\Delta_p u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

(ii) Se $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$ temos que são satisfeitas as hipóteses (a_1) e (a_2) com $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 1$ e o operador que resulta é o $p\,\&\,q$-Laplace com $1 < p < q < +\infty$, isto é,

$$-(\Delta_p + \Delta_q)u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{q-2}\nabla u).$$

(iii) Se $a(t) = 1 + \dfrac{t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}$, as hipóteses a cerca de a são satisfeitas e o operador obtido é o p-Laplace like com $1 < p < +\infty$, isto é,

$$-\text{div}\left(\left(1 + \frac{|\nabla u|^p}{(1+|\nabla u|^{2p})^{\frac{1}{2}}}\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).$$

(iv) Se $a(t) = \left(1 + \dfrac{1}{t^{\frac{2}{p}}}\right)^{\frac{p-2}{2}}$ temos que as hipóteses a cerca da função a são satisfeitas e o operador obtido é a generalização da p-curtatura média para $1 < p < 2$, isto é,

$$-\text{div}\left(\left(1 + \frac{1}{|\nabla u|^2}\right)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).$$

(v) Se $a(t) = 1 + \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$ temos que as hipóteses (a_1) e (a_2) são satisfeitas com $k_0 = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 > 0$ e $k_3 = 0$ para $1 < p < +\infty$ o operador obtido é uma pertubação do operador p-Laplace, isto é,

$$-\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right).$$

Operadores não-homogêneos da forma $L(u) = -\text{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ foram estudados nos trabalhos de Barile e Figueiredo [8], Corrêa, Corrêa e Figueiredo [16], Figueiredo [22, 24], Hurtado, Miyagaki e Rodrigues [34]. Também no contexto de operador não homogêneo podemos citar o trabalho de Filippakis, O'Regan e Papageorgiou [28] que inclui o caso $p\&q$-Laplace para $2 \leq q < p$.

Mais especificamente, consideraremos ao longo deste trabalho problemas da forma

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))L(u) = g_\lambda(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

sendo o operador $\mathcal{A}$ definido por $\mathcal{A}(u) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx$, com $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(\xi)d\xi$, e $g_\lambda(x,u)$ uma não linearidade apresentando termo local ou não local.

O problema (3) é chamado não local devido a presença do termo $M(\mathcal{A}(u))$, uma vez que o mesmo implica que a equação não é mais uma identidade pontual. Problemas não locais foram motivados pela versão estacionária da equação de Kirchhoff, a saber,

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u(x) \end{cases} \tag{4}$$

em que $M(t) = a + bt$ com $a, b > 0$. Esta equação é uma versão mais geral do modelo proposto por Kirchhoff [35]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sendo ρ, ρ_0, h, E e L constantes, o qual estende a clássica equação da onda de D'Alembert por considerar o efeito da mudança no comprimento de uma corda duração uma vibração.

Os primeiros estudos envolvendo a equação do tipo Kirchhoff dizem respeito à Bernstein [9] e Pohozaev [46]. No entanto, o problema (4) teve mais destaque após o trabalho de J. L. Lions [41], na qual uma estrutura abstrata para o problema foi proposta. Dentre os vários trabalhos envolvendo o termo de Kirchhoff podemos citar Alves, Corrêa e Ma [1], Corrêa e dos Reis Costa [17, 18, 19], de Paiva [44], Figueiredo e Santos Júnior [23], Figueiredo, Bisce e Servadei [26] e Fiscella [29] (os dois últimos trabalhos são referentes ao problema de Kirchhoff fracionário), Ambrosetti e Arcoya [4], Figueiredo, Ikoma e Santos Júnior [25] e as referências lá citadas.

Os problemas não locais modelam vários sistemas físicos e biológicos sendo u descrito por processo que depende de sua média, por exemplo densidade populacional, como em [12] e [13].

Os resultados que estudamos neste trabalho foram obtidos via método variacional e como praxe alguma compacidade é necessária como, por exemplo, a condição de Palais-Smale ou a condição de Cerami. Com o objetivo de verificar tais condições foi necessário e fundamental a utilização do Lema 1.2 (Ver Capítulo 1), em que estimativas de monotonicidade para o campo vetorial envolvido em $L(u)$ foram estabelecidos. Estas, além de recuperarem casos já conhecidos na literatura com $p, q \geq 2$, trataram os casos $1 < p < q < 2$ e $1 < p < 2$, $q > 2$ até então não abordados na generalidade aqui considerada (para mais detalhes nessa direção consultar Observação 1.2).

Vale ressaltar que em nosso contexto o problema pode ser degenerado. Na literatura, um problema com termo tipo Kirchhoff é dito ser degenerado se $M(0) = 0$. Este caso apresenta dificuldades adicionais e não é muito abordado na literatura, podemos citar

[14] e [17] cujo o operador principal é o p-Laplace e $p(x)$-Laplace, respectivamente, e no contexto de operador fracionário podemos citar [26] e as referências lá indicadas. Outro caso bastante interessante e ao mesmo tempo pouco abordado é o caso em que M pode ser singular na origem. Uma tentativa nessa direção é esboçada em [17]. Outro fato que vale ressaltar é que não impusemos a hipótese da função M ser monótona como é comum em alguns trabalhos envolvendo o termo de Kirchhoff, como por exemplo, [11], [25] e [34].

Os resultados que trataremos neste trabalho são válidos para $1 < p < q < N$, em constraste com várias outras referências em que se consideram $q, p \geq 2$, como em, [16] e [22] cujo operador em questão é o mesmo que estamos tratando aqui, porém sem ação de termo não local.

No Capítulo 1 deste trabalho consideramos $g_\lambda(x,u) = \lambda f(x,u) + |u|^{s-2}u$ em (3), basicamente do tipo côncava convexa. Dessa forma o problema (3) se torna

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ domínio limitado, $1 < p < N$, $\lambda > 0$ um parâmetro e a função $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ímpar na segunda variável e entre potências $|u|^{r-1}$, com $r \in (1, \gamma)$. Assumiremos também que $1 < r < p < q < N$ e $1 < r < \gamma < s < \gamma^*$, sendo $\gamma^* = \dfrac{\gamma N}{N - \gamma}$ para $N > \gamma$ e $\gamma^* = \infty$ para $N \leq \gamma$. A função $M : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ do tipo Kirchhoff pode ser degenerada, isto é, quando $M(0) = 0$, ou não degenerada, sendo neste último caso podendo a função possuir descontinuidade na origem (para mais detalhes sobre tais hipóteses consultar o Capítulo 1).

Quando $M \equiv 1$ o problema (5) deixa de ser não local e recupera o Teorema 2.5 (caso subcrítico) do trabalho de Ambrosetti, Brezis e Cerami [3]. O resultado que apresentaremos referente à sequência de soluções com energia negativa é mais geral do que o citado anteriormente, já que é válido para todo $\lambda > 0$. Bartsch e Willem [5] removeram a restrição sobre $\lambda > 0$ pequeno e obtiveram infinitas soluções para o caso Laplace quando $f(x,u) = \mu|u|^{p-1}u$ com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $\mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$. Dessa forma, os resultados que apresentaremos no presente trabalho sobre infinitas soluções generalizam o Teorema 1 item b de [5] para o operador $-\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ considerando $\mu = 1$.

O resultado de infinitas soluções que apresentaremos aqui também generaliza o Teorema 1.2 de Figueiredo e Júnior [23] (no caso subcrítico)

$$\begin{cases} -\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right]\Delta u = \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

quando $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, $4 < p < 6$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, bem como dá informações sobre a existência de uma segunda sequência de soluções não triviais. Além disso, nossos resultados são válidos para domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$.

Em relação à problemas com não linearidades do tipo "côncava-convexa"envolvendo função peso, podemos citar [27], [33], [37]. Quando os pesos são iguais a um, em [33] tem-se o seguinte problema

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^p\right)\Delta_p u = \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{r-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

com $M(s) = a + bs^k$ tais que $a, b > 0$, $1 < q < p < r < p^*$ e $p(k+1) < r$ e os autores mostraram que o problema em questão possui uma sequência de soluções de energia positiva. Logo (7) é um caso particular do operador do problema (5), de modo que o Teorema 1.2 aqui apresentado pode ser aplicado a (7).

Considerando a função peso constante igual a um o problema de Komiya e Kajikiya [37] torna-se

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = |u|^{r-2}u + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

e quando $s < q < p < r < p^*$ foi provado, dentre outros resultados, a existência de duas sequências de soluções não triviais para o problema (8). Dessa forma, tem-se um caso particular dos Teoremas 1.1 e 1.2 aqui apresentados.

No Capítulo 2 estudamos infinitas soluções para o problema (3) subcrítico com a não linearidade sendo $g_\lambda(x,u) = f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r$, isto é, a não linearidade também possui termo não local. Dessa forma, (3) torna-se

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Para este problema consideramos a não linearidade dividida em dois casos: sublinear e superlinear. A função M pode ser degenerada, não degenerada ou não degenerada possuindo descontinuidade na origem (para ver detalhes sobre as hipóteses consultar Capítulo 2). No caso sublinear em (9) o resultado obtido neste trabalho estabelece a existência de uma infinidade de soluções de energia negativa e que convergem para zero na norma ambiente. Ele completa o resultado de Corrêa e dos Reis Costa [14] quando $p(x) = p$, já que o operador tratado aqui é mais geral, bem como nos permite considerar funções que são singulares na origem, isto é, M possuindo descontinuidade na origem. Além disso, é possível tratar a classe de funções degeneradas para uma quantidade maior de funções, uma vez que no artigo as potências tratadas são maiores que um, enquanto no presente trabalho as potências para o caso degenerado são maiores que zero. Já no caso superlinear em (9) o resultado aqui obtido prova a existência de uma infinidade de soluções com energia positiva divergindo para $+\infty$. Tal resultado, segundo nosso conhecimento, é novo mesmo no contexto do operador p-Laplace, pois em [14] aborda-se apenas o caso sublinear.

Quando $M \equiv 1, a \equiv 1$ e $p = 2$ o problema (9) torna-se

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

que ocorre em dinâmica populacional, problemas envolvendo transferência de calor em certos meios, dentre outras aplicações. Ver Côrrea, Delgado e Suárez [15] e Gomes e Sanchez [32], bem como as referência lá citadas para detalhes sobre esse tipo de problema.

O interesse em estudar problemas não locais surge não somente por propósitos matemáticos, mas também devido a suas significativas aplicações. Outra interessante aplicação é o chamado modelo de movimento de certos fluídos chamados "electrorheological fluids" que são caracterizados por sua capacidade de mudar de forma drástica suas propriedades mecânicas quando influenciados por campo eletromagnético externo. Tais fluídos têm sido usados em robótica e tecnologia espacial. A pesquisa experimental tem sido realizada, principalmente, nos EUA com a participação da NASA. Para conhecer mais sobre o assunto ver [42].

No Capítulo 3 consideramos também uma não linearidade envolvendo termo não-local sob perturbação, a saber, $g_\lambda(x,u) = \lambda f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r + |u|^{s-2}u$. Dessa forma, o problema (3) torna-se

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

e obtivemos para esse problema três resultados: Existência de infinitas soluções com energia negativa convergindo para zero para todo $\lambda > 0$, existência de infinitas soluções com energia positiva divergindo para $+\infty$ e existência de, pelo menos, duas soluções positivas para $\lambda > 0$ pequeno. Este capítulo estende [19] para o caso subcrítico e com $p(x) = p$, uma vez que estamos com um operador mais geral. Os resultados para o caso sublinear são recuperados para todo $\lambda > 0$, enquanto no citado artigo os resultados são válidos para $\lambda > 0$ pequeno. Além disso, obtemos resultados de existência de uma infinidade de soluções com energia positiva, bem como a existência de, pelo menos, duas soluções positivas para $\lambda > 0$ pequeno.

No Capítulo 4 nosso objetivo foi estudar o problema (9) considerando uma não linearidade com crescimento superlinear sem que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz seja imposta. Estudamos não linearidades superlineares satisfazendo a condição de não quadraticidade no infinito introduzida por Costa-Magalhães em [20]. O principal resultado provado no Capítulo 4 garante a existência de infinitas soluções com energia positiva divergindo para $+\infty$ e inclui uma classe de funções Kirchhoff degeneradas ($M(0) = 0$) que podem ser contínuas ou descontínuas na origem. A principal ferramenta utilizada é o teorema do passo da montanha simétrico com a condição de Cerami.

Ao final do trabalho incluímos Apêndice contendo alguns resultados que foram utilizados ao longo do texto.

Referências Bibliográficas

[1] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa e T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 85-93.

[2] A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications* J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

[3] A. Ambrosetti, H. Brezis e G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.

[4] A. Ambrosetti e D. Arcoya, *Positive Solutions of Elliptic Kirchhoff Equations,* Adv. Nonlin. Stud. 17 (2016) 3-15.

[5] T. Bartsch e M. Willem, *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 3555-3561.

[6] P. Bartolo, V. Benci e D. Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity.* Nonlin. Analysis 7 (1983) 981-1012.

[7] M. Badiale e E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence results via the variational approach*, Springer (2011).

[8] S. Barile e G. M. Figueiredo, *Existence of least energy positive, negative and nodal solutions for a class of p&q-problems with potentials vanishing at infinity*, J. Math. Anal. Appl. 427 (2015) 1205-1233.

[9] S. Bernstein, *Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivés partilles,* Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math (Izvestia Akad. Nauk SSSP) 4 (1940) 17-26.

[10] H. Brezis, *Funcional Analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[11] C. Chen, J. Huang e L. Liu, *Multiple solutions to the nonhomegeneous p-Kirchhoff elliptic equation with concave-convex nonlinearities*, Appl. Math. Lett. 26 (2013) 754-759.

[12] M. Chipot e J. F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems*, RAIRO Model. Math. Anal. Número. 26 (1992) 447-467.

[13] M. Chipot e B. Lovat, *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal. 30 (1997) 4619-4627.

[14] F. J. S. A. Corrêa e A. C. dos Reis Costa, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods,* Bull. Aust. Math. Soc. 74 (2006) 263-277.

[15] F. J. S. A. Corrêa, M. Delgado e A. Suárez, *A variational approach to a nonlocal elliptic problem with sign-changing nonlinearity*, Advanced Nonlinear Studies 11 (2011), 361-375.

[16] F. J. S. A. Corrêa, A. S. S. Corrêa e G.M. Figueiredo, *Positive solutions for a class of p&q-singular elliptic equation*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 16 (2014) 163-169.

[17] F. J. S. A. Corrêa e A. C. dos Reis Costa, *A Variational approach for a Bi-nonlocal elliptic problem involving the $p(x)$-Laplacian e non-linearity with non-standard Growth*, Glasgow Math. J. 56 (2014) 317-333.

[18] F. J. S. A. Corrêa e A. C. dos Reis Costa, *On a bi-nonlocal p(x)-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Math. Meth. Appl. Sci. 38 (2014) 87-93.

[19] F. J. S. A. Corrêa e A. C. dos Reis Costa, *On a $p(x)$-Kirchhoff equation with critical exponent and an additional term via truncation argument,* Math. Nachr. 288 (2015) 1226-1240.

[20] D. G. Costa e C. A. Magalhães, *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity,* Nonlinear Analys. Theory Methods & Application, 23 (1994) 1401-1412.

[21] I. Ekeland, *Nonconvex minimazation problems,* Bull. Amer. Math. Soc. 1 (1979) 443-473.

[22] G. M. Figueiredo, *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problems with critical growth in $\mathbb{R}^N$*, Math. Anl. Appl. 378 (2011) 507-518.

[23] G. M. Figueiredo e J. R. Santos Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, Differential Integral Equations 25 (2012) 853-868.

[24] G. M. Figueiredo, *Existence e multiplicity of solutions for a class of p&q elliptic problems with critical exponent*, Math. Nachr. 286 (2013) 1129-1141.

[25] G. M. Figueiredo, N. Ikoma e J. R. Santos Júnior, *Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities,* Arch. Ration. Mech. Anal. 3 (2014) 931-979.

[26] G. M. Figueiredo, G.M. Bisci e R. Servadei, *On a fractional Kirchhoff-type equation via krasnoselskii's genus*, Asymptotic Analysis 94 (2015) 347-361.

[27] D. G. de Figueiredo, J.P. Gossez e P. Ubilla, *Local "superlinearity"and "sublinearity"for the p-Laplacian*, Journal of Functional Analysis 257 (2009) 721-752.

[28] M. E. Filippakis, D. O'Regan e N.S. Papageorgiou, *Multiple and nodal solutions of nonlinear equations with a nonhomogeneous differential operator and concave-convex terms*, Tohoku Math. J. 66 (2014), 583-608.

[29] A. Fiscella, *Infinitely many soltuion for a critical Kirchhoff type problem involving a fractional operator*, Differential and Integral Equations 29 (2016) 513-530.

[30] J. Garcia Azorero e I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymetric term*, Trans. Am. Math. Soc. 323 (1991) 877-895.

[31] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso e J. J. Manfredi, *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations.* Communicatioons in contemporary Mathematics, 2 (2000) 385-404.

[32] J. M. Gomes e L. Sanchez, *On a variational approach to some non-local boundary value problems*, Appl. Anal., 84 (2005), 909-925.

[33] J. Huang, C. Chen e Z. Xiu, *Existence and multiplicity results for a p-Kirchhoff equation with a concave-convex term*, Appl. Math. Lett. 26 (2013) 1070-1075.

[34] E. J. Hurtado, O. H. Miyagaki e R. S. Rodrigues, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, Milan J. Math. 85 (2017) 71-102.

[35] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[36] I. H. Kim e Y. Kim, *Mountain pass type solutions and positivity of the infimum eigenvalue for quasilinear elliptic equations with variable exponents*, Manuscripta Math. 147 (2015) 169-191.

[37] Y. Komiya e R. Kajikiya, *Existence of infinitely many solutions for the (p, q)-Laplace equation*, NoDEA 23 (2016) .

[38] Z. Liu, Zhi-Qiang Wang, *On Clark's theorem and its applications to partially sublinear problems*, Ann. I. H. Poincaré- AN 32 (2015) 1015-1037.

[39] G. M. Lieberman, *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations*, Comm. Partial Diff. Equ. 16 (1991) 311-361.

[40] O. A. Ladyzhenskaya e N. Uraltseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Vol.46 of Mathematics in Science and Engineerin, Academic Press, New York, 1968.

[41] J. L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics, In Proceeding of International Symposium on Continuum mechanics and Partial Differential Equations,* Rio de Janeiro 1977, Math. Stud (Edited by de laPenha and Medeiros) 284-346, vol. 30, North-Holland (1978).

[42] M. Milailescu and V. Radulescu, *A multiplicity results for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of eletrorheological fluids,* Proc. R. Soc. A, 462(2006), 2625-2641.

[43] O. H. Miyagaki e M. A. S. Souto, *Superlinear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition,* J. Differential Equations 245 (2008), 3628-3638.

[44] F. O. de Paiva, *Nonnegative solutions of elliptic problems with sublinear indefinite nonlinearity,* J. Funct. Anal. 261 (2011) 2569-2586.

[45] P. Pucci e J. Serrin, *The Maximum Principle*, Basel: Birkhuser 2007.

[46] S. Pohozaev, *On a class of quasilinear hyberbolic equations,* Math. Sbornick 96 (1975) 152-166 .

[47] P. H. Rabinowitz, The Mountain Pass Theorem: Theme and variations, Differential Equation (D.G. de Figueiredo and C.S. Honig, eds), Lecture Notes in Math., vol. 957, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.

[48] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol 65 (Providence, RI: American Mathematical Society, 1986).

[49] D. Repovs, Stationary waves of Schrödinger-type equations with variable exponent, Analysis and Applications 13 (2015) 645-661.

[50] M. Struwe, Variational Methods, Springer-Velag, 3 Ed., Berlin, 2000.

[51] M. Schechter e W. Zou, Superlinear problems. Pacific Journal of Mathematics, 214 (2004).

[52] J. Simon, Régulatité de la solution d'une équation non linéarie dans R^n, Journíes d'Analyse non Linéaire, eds. P. Benilan and J. Robert, Lecture notes in mathematics, 665. Springer, Berlin, (1978), 205-227.

[53] M. Tang, Exact multiplicity for semilinear elliptic Dirichlet problems involving concave and convex nonlinearities. Proccedings of the Royal Society of Edinburgh 133 (2003) 705-717.

[54] Z. Q. Wang, *Nonlinear Boundary value problems with concave nonlinearities near the origin,* Nonlinear differ. equ. appl. 8 (2001) 15-33.