

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT**

LINA FLÁVIA MORETE DE QUEIRÓS MAIA

**MODELAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: O CONCEITO
DE FUNÇÃO EXPONENCIAL NUMA SEQUÊNCIA DE
ATIVIDADES PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO**

**SOROCABA
2017**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT**

LINA FLÁVIA MORETE DE QUEIRÓS MAIA

**MODELAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: O CONCEITO
DE FUNÇÃO EXPONENCIAL NUMA SEQUÊNCIA DE
ATIVIDADES PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO**

**Lina Flávia Morete de Queirós Maia
ORIENTADORA: Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto**

**SOROCABA
2017**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT**

LINA FLÁVIA MORETE DE QUEIRÓS MAIA

**MODELAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: O CONCEITO
DE FUNÇÃO EXPONENCIAL NUMA SEQUÊNCIA DE
ATIVIDADES PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientação: Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto

**SOROCABA
2017**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Lina Flavia Morete de Queirós Maia, realizada em 20/12/2017:

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

Renata Zotin

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
UNESP

Rogério Pires

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires
UFU

*Dedico este trabalho aos meus
filhos, Matheus e Mariana,
razão pela qual busco evoluir
não só como profissional, mas
como ser humano.*

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, pelas conquistas e força ao longo de toda jornada durante este curso.

Aos meus familiares pelo incentivo e carinho, sem os quais não teria chego até aqui. Expresso minha gratidão especialmente à minha mãe Elda Lorenzon Morete e à minha sogra Íris Paiva Queirós Maia que por diversas vezes cuidaram do meu filho para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

Ao meu marido Raimundo de Queirós Maia Júnior pelo apoio aos estudos e compreensão pelas minhas ausências.

À minha orientadora Professora Doutora Magda da Silva Peixoto pelas orientações e por prontamente partilhar seu conhecimento para o enriquecimento deste trabalho.

A todo corpo docente que contribuiu para o meu aperfeiçoamento profissional e aos colegas de turma que me incentivaram e me auxiliaram no estudo para o exame de qualificação, sobretudo ao colega Leandro Alex Linck pelas inúmeras tardes de estudo e ao Professor Doutor Rogério Fernando Pires por sempre acreditar no meu trabalho.

À CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior) pelo auxílio financeiro.

Aos colegas de trabalho pelo apoio e amizade, principalmente à Fabiana Matos e à Karina Oliveira, pessoas muito especiais, que sempre estiveram presentes em momentos importantes na minha vida.

A todos, o meu muitíssimo obrigada.

Há uma única ciência, a matemática, a qual ninguém se pode jactar de conhecer porque suas conquistas são, por natureza, infinitas; dela toda gente fala, sobretudo os que mais a ignoram.

Malba Tahan

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo apresentar uma sequência de atividades para o ensino da função exponencial de forma intuitiva e, posteriormente, apresentar sua definição na tentativa de formalizar as propriedades que serão descobertas pelos alunos. A pesquisa é iniciada trazendo uma análise de alguns trechos de documentos curriculares que tratam da função exponencial e, corroborando com tais documentos, apresentamos a Modelagem Matemática proposta por Bassanezi (2004) e os pressupostos da Modelação Matemática defendida por Biembengut e Hein (2016). A sequência de atividades é composta por oito atividades envolvendo situações cotidianas para que os alunos, em duplas ou trios, discutam sobre elas para obter os modelos matemáticos que solucionam essas situações e, em seguida, construam os gráficos das curvas que descrevem tais situações utilizando planilhas eletrônicas de cálculo. Com isso, esperamos também incentivar os professores a usar a Modelação Matemática como estratégia de ensino, vinculando a matemática com outras áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Função Exponencial. Modelagem Matemática. Sequência de Atividades.

ABSTRACT

This academic research is intended to present a sequence of activities in order to teach the exponential function in an instinctive way, and afterwards, present its definition in an attempt to formalize the properties that will be discovered by the students. The research starts with an analysis of some specific peaces of academic documents that also presents the exponential function. Aligned with such documents we present the Mathematic Modeling proposed by Bassanezi (2004) and the assumption of the Mathematical Modeling defined by Biembengut and Hein (2016). The sequence of activities is composed by eight activities involving social daily situations, the students will then have the opportunity to discuss around such scenarios in order to reach the mathematical models required to solve the scenarios under discussion, after that, the stundents will build the graphics of curves to describre the situations, with digital spreadsheets as the tool to design the solution. In the end, we expect to also motivate the professors to use the Mathematical Modeling with real examples as more tangible teaching strategy, linking mathematic with usual daily situations for the students.

Keywords: Exponential Function. Mathematic Modeling. Sequence of Activities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Aprendemos e Retemos.....	17
Figura 2: Interpretação dos blocos temáticos	18
Figura 3: Processo de Modelagem.....	21
Figura 4: Esquema de uma Modelagem.....	22
Figura 5: Tabela referente à situação 1 – “Acetilcisteína”.....	48
Figura 6: Gráfico referente à situação 1 – “Acetilcisteína”.....	49
Figura 7: Tabela referente à situação 2 – “Acidente Radioativo”.....	49
Figura 8: Gráfico referente à situação 2 – “Acidente Radioativo”.....	50
Figura 9: Tabela referente à situação 3 – “Bactérias <i>E. Coli</i> ”.....	51
Figura 10: Gráfico referente à situação 3 – “Bactérias <i>E. Coli</i> ”.....	51
Figura 11: Tabela referente à situação 4 – “Poupança”.....	52
Figura 12: Gráfico referente à situação 4 – “Poupança”.....	53
Figura 13: Tabela referente à situação 5 – “Cheque Especial”.....	53
Figura 14: Gráfico referente à situação 5 – “Cheque Especial”.....	54
Figura 15: Tabela referente à situação 6 – “Tabagismo”.....	55
Figura 16: Gráfico referente à situação 6 – “Tabagismo”.....	55
Figura 17: Tabela referente à situação 7 – “Piscina”.....	56
Figura 18: Gráfico referente à situação 7 – “Piscina”.....	56
Figura 19: Tabela referente à situação 8 – “População Brasileira”.....	57
Figura 20: Gráfico referente à situação 8 – “População Brasileira”.....	57
Figura 21: Propriedade para resolução de inequações exponenciais.....	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Quadro de conteúdos de Matemática da 1ª série do Ensino Médio referente ao 3º bimestre.....	19
Tabela 2: Quadro de conteúdos de Matemática da 3ª série do Ensino Médio referente ao 3º bimestre.....	19
Tabela 3: Quadro contendo propostas de organização dos temas e suas unidades	20
Tabela 4: Preenchimento da tabela “Acetilcisteína” – PARTE I.....	41
Tabela 5: Preenchimento da tabela “Acidente Radioativo” – PARTE I.....	42
Tabela 6: Preenchimento da tabela “Bactérias <i>E. Coli</i> ” – PARTE I.....	42
Tabela 7: Preenchimento da tabela “Poupança” – PARTE I.....	43
Tabela 8: Preenchimento da tabela “Cheque Especial” – PARTE I.....	44
Tabela 9: Preenchimento da tabela “Tabagismo” – PARTE I.....	45
Tabela 10: Preenchimento da tabela “Razão entre o número de habitantes brasileiros de dois anos consecutivos” – PARTE I.....	46
Tabela 11: Preenchimento da tabela “Generalizar expressão” referente ao item b da atividade 8 – PARTE I.....	47

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
CAPÍTULO 1.....	16
Documentos Curriculares e a Modelação Matemática	16
CAPÍTULO 2.....	26
2.1. A sequência de atividades	26
2.2. A Modelação Matemática na sequência de atividades.....	39
2.3. Apresentação da função exponencial	59
CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
ANEXO	64

INTRODUÇÃO

Ao iniciar um conteúdo na sala de aula, a indagação “onde vamos usar isso?” por parte dos alunos é bastante frequente. Muitas vezes não consegui mostrar uma aplicação imediata daquilo que estudávamos, o que acabava desanimando parte dos alunos. Sobre isso, Caraça afirma

Sem dúvida que a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro ramo qualquer da ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre (CARAÇA, 2010).

Pela experiência de 13 anos em sala de aula, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, tenho a certeza de que a aula é mais atrativa e desperta um maior interesse dos alunos quando mostramos aplicações das teorias e propriedades que estamos estudando. Por isso, o objetivo dessa pesquisa é apresentar situações reais que podem ser modeladas por uma função exponencial ou do tipo exponencial usando como método a Modelagem Matemática no ensino, ou seja, a Modelação Matemática e, dessa forma, contribuir para o ensino de tal assunto.

No capítulo 1 deste trabalho discutimos sobre alguns documentos curriculares e a Modelagem Matemática proposta por Bassanezi (2004) e a Modelação Matemática defendida por Biembengut e Hein (2016).

No capítulo 2 apresentamos uma sequência de atividades para o ensino da função exponencial de forma intuitiva e sua resolução seguindo as etapas da Modelação Matemática. Dividimos a sequência de atividades em duas partes: na Parte I são propostas oito situações modeladas pela função exponencial, na Parte II propomos a construção dos gráficos em planilhas eletrônicas de cálculo referentes às oito situações desenvolvidas na Parte I e alguns questionamentos sobre as propriedades das curvas traçadas. Para finalizar, apresentamos a definição de função exponencial.

Com isso, também pretendemos estimular alunos e professores a desenvolverem suas habilidades como modeladores para dar sentido à atividade matemática na sala de aula por meio das aplicações sociais da matemática.

CAPÍTULO 1

Documentos Curriculares e a Modelação Matemática

No meu trabalho como professora do Ensino Médio tenho acompanhado a dificuldade dos alunos em compreender o conceito de função exponencial, bem como identificar suas características e sua representação gráfica, fato que motivou a reflexão sobre o processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Por acreditar que a aprendizagem só ocorre efetivamente no processo de construção dos conceitos matemáticos caso seja apresentada de forma significativa ao aluno, recorremos à Modelagem Matemática e, esta, surge como uma solução na significação e na contextualização de conceitos matemáticos, uma vez que possibilita transformar situações reais em problemas matemáticos. Corroborando com essa afirmação, tem-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM):

[...] A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. O desenvolvimento dos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, contudo, não deve ser preocupação exclusiva do professor de Matemática, mas das quatro disciplinas científico-tecnológicas, preferencialmente de forma coordenada, permitindo-se que o aluno construa efetivamente as abstrações matemáticas, evitando-se a memorização indiscriminada de algoritmos, de forma prejudicial ao aprendizado. (BRASIL, 2000, p.9)

Quando o aluno tem a oportunidade de aplicar o conceito que foi discutido, a retenção da aprendizagem se torna parte do processo, valorizando assim a matemática ensinada. Fato que comprova tal afirmação é apresentado numa pesquisa realizada sobre Planejamento de Ensino e Avaliação (Vacuum Oil Co. Studies) e traz um comparativo entre aquilo que aprendemos e o que retemos de acordo com a Figura 1:

Figura 1: Aprendemos e Retemos

Aprendemos	Retemos
1% através do gosto	10% do que lemos
1.5% através do tato	20% do que escutamos
3.5% através do olfato	30% do que vemos
11% através do ouvido	50% do que vemos e escutamos
83% através da visão	70% do que ouvimos e logo discutimos
	90% do que ouvimos e logo realizamos

Fonte: BALZAN apud BASSANEZZI, 2002, p. 179.

Assim, é indiscutível que a oportunidade de execução daquilo que foi discutido em aula proporciona ao aluno um processo de aprendizagem significativo. Entretanto, não se deve forçar uma aplicação para tudo o que estudamos, o uso da Modelagem Matemática numa situação de pesquisa é benéfico se, de fato, contribui para o desenvolvimento e compreensão do que está sendo analisado.

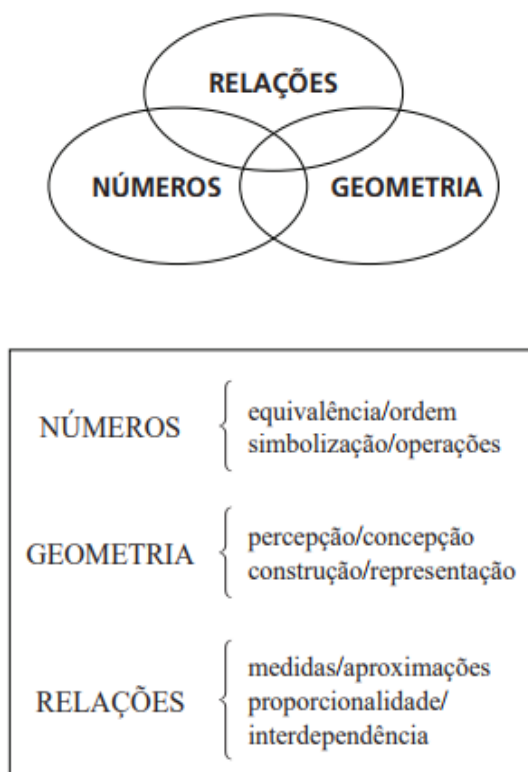
Além dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, outros documentos curriculares da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo norteiam os planejamentos das escolas públicas do estado como PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Orientações Curriculares para o Ensino Médio, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo e o Currículo do Estado de São Paulo.

Como o objetivo desse trabalho é apresentar uma sequência de atividades que trate de situações reais que possam ser modeladas pela função exponencial, uma análise de todos os documentos curriculares tornaria o trabalho enfadonho, por isso, nos ateremos em trechos que tratam desse conteúdo em alguns dos documentos.

O Currículo do Estado de São Paulo, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, traz os conteúdos curriculares de Matemática, organizados em três blocos temáticos: Números, Geometria e Relações. Embora seja praticamente impossível abordar um dos três blocos sem a participação quase

automática dos dois outros; as relações de interdependência, como as de proporcionalidade ou as associadas à ideia de função são tratadas no bloco Relações apresentado na Figura 2.

Figura 2: Interpretação dos blocos temáticos



Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p. 39).

O documento curricular ainda afirma que a ideia básica de proporcionalidade direta ou inversa, explorada inicialmente no Ensino Fundamental, deve ser estendida no Ensino Médio a outros tipos de relações de interdependência, como as que associam um número com seu cubo, uma potência com seu expoente, etc. A noção de taxa de variação, ou seja, a medida da rapidez com que uma das grandezas interdependentes varia em relação à outra, é destacada como um primeiro passo ao estudo do cálculo.

O Currículo do Estado de São Paulo também lista as habilidades a serem demonstradas pelos alunos em cada tema após trabalharem com os conteúdos curriculares. A função exponencial aparece em dois momentos: no 3º bimestre da 1ª série (1º ano) do Ensino Médio (ver Tabela 1) e aprofundada no 3º bimestre da 3ª série (3º ano) do Ensino Médio (ver Tabela 2).

Tabela 1: Quadro de conteúdos de Matemática da 1ª série do Ensino Médio referente ao 3º bimestre

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Funções exponencial e logarítmica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Crescimento exponencial • Função exponencial: equações e inequações • Logaritmos: definição e propriedades • Função logarítmica: equações e inequações 	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decréscimo • Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos • Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial • Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p. 66).

Tabela 2: Quadro de conteúdos de Matemática da 3ª série do Ensino Médio referente ao 3º bimestre

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Estudo das funções</p> <ul style="list-style-type: none"> • Qualidades das funções • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais • Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação • Composição: translações e reflexões • Inversão 	<ul style="list-style-type: none"> • Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1ª e de 2ª graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características • Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões) • Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de $f(x)$ por unidade a mais de x), utilizando-a para caracterizar o crescimento, o decréscimo e a concavidade de gráficos • Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decréscimo exponencial, incluindo-se os que se expressam por meio de funções de base e

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p. 70).

Nossa proposta é trabalhar com a ideia intuitiva de função exponencial e discutir suas propriedades relativas ao crescimento e decrescimento, além de sua representação gráfica, logo, se aplica na 1ª série do Ensino Médio.

O PCN+ Ensino Médio, documento que consta de orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, discute as competências em matemática e temas estruturadores do ensino de matemática. O documento defende que a matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza.

No mesmo documento, tem-se que os temas de estudo da primeira série deveriam tratar do entorno das informações que cercam os alunos, numa visão contextualizada, colocando-os em contato com as primeiras ideias e procedimentos básicos para ler e interpretar situações simples e somente nas séries seguintes ampliá-los e aprofundá-los. Uma sugestão que contempla essa visão é apresentada nesse documento (ver Tabela 3).

Tabela 3: Quadro contendo propostas de organização dos temas e suas unidades

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, 2002, p. 128.

Assim, a Modelagem Matemática aparece como uma estratégia de ensino que contempla os requisitos apresentados nos documentos curriculares, uma vez que vai além das simples resoluções de questões matemáticas.

De acordo com Pires,

A Matemática e a realidade podem se conectar por meio da modelagem, essa conexão pode ser feita pelo uso de processos matemáticos, com o objetivo de analisar, estudar, explicar situações da vida cotidiana que nos cercam. (2009, p. 44)

A seguir, discutimos sobre a Modelagem Matemática, bem como suas etapas e subetapas.

De acordo com Bassanezi, a Modelagem Matemática

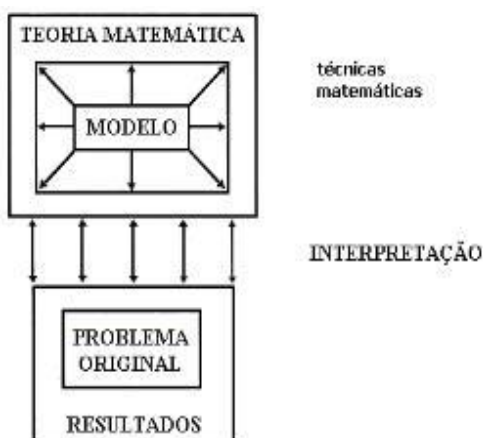
é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. Por sua vez, entende-se por modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. (2004, p. 24)

Outras definições de modelo matemático são encontradas, mas vamos nos ater a esta dada por Bassanezi.

Ao transpor a situação real para a matemática deve-se tratá-la por meio de teorias e técnicas da ciência envolvida, seja essa a Física, Química ou Biologia, pela mesma via de interpretação e, no sentido contrário, tem-se o resultado dos estudos na linguagem original do problema.

Bassanezi simplifica esse processo no diagrama da Figura 3:

Figura 3: Processo de Modelagem



Fonte: Bassanezi (2004, p. 25).

Uma sequência de etapas deve ser seguida ao tratar de uma situação real por meio da Modelagem Matemática. São elas: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

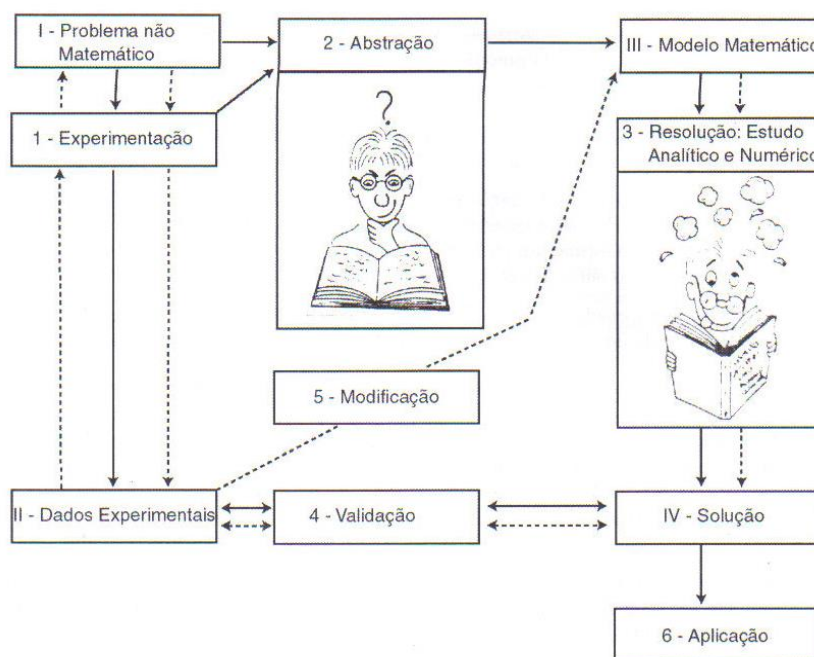
Na experimentação os dados obtidos serão processados e os métodos experimentais serão dados na maioria das vezes pela própria natureza do experimento. A abstração consiste no procedimento para se formular os modelos matemáticos e nesta fase procura-se estabelecer (i) a seleção das variáveis, (ii) a problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando, (iii) a formulação de hipóteses e (iv) a simplificação.

Na terceira etapa, resolução, tem-se que o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. Já na validação ocorre a aceitação ou não do modelo proposto a partir de testes e do confronto das hipóteses com os dados empíricos.

Por fim, tem-se a última etapa desse processo: a modificação. Nessa etapa alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos.

O esquema apresentado na Figura 4 sintetiza as atividades intelectuais da Modelagem Matemática:

Figura 4: Esquema de uma Modelagem



Fonte: Bassanezi (2004, p. 27).

Segundo Bassanezi,

[...] o uso da modelagem no processo ensino-aprendizagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade não somente em relação às aplicações das habilidades matemáticas, mas, principalmente, na formulação de problemas originais uma etapa tão estimulante quanto a da resolução. (2015, p. 12)

Visto que a nossa intenção é exatamente essa, mostrar uma matemática atrativa que permita aos alunos resolver problemas do dia-a-dia por meio da linguagem matemática para promover uma aprendizagem significativa, firmamos mais uma vez que a Modelagem Matemática vem ao encontro com os objetivos deste trabalho.

Sobre o termo “aprendizagem significativa”, nos apoiamos nas afirmações do psicólogo norte-americano David Ausubel:

[...] a aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma nova estratégia correspondente para assim proceder. A aprendizagem automática, por sua vez, ocorre se a tarefa consistir em associações puramente arbitrárias, como na associação de pares, quebra-cabeça, labirinto, ou aprendizagem em séries e quando falta ao aluno o conhecimento prévio relevante necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa, e também (independente do potencial significativo contido na tarefa) se o aluno adota uma estratégia apenas para internalizá-la de uma forma arbitrária, literal (por exemplo, como uma série arbitrária de palavras). (Ausubel *et al.*, 1980: 23 *apud* Almeida, 2016, p. 36).

Como já discutido anteriormente, a Modelagem Matemática consiste na transformação de situações da realidade em problemas matemáticos, na qual as soluções encontradas serão analisadas e interpretadas na linguagem usual. Nessa trajetória, o professor está suscetível a se deparar com modelos em que as ferramentas matemáticas requeridas não estejam ao alcance do aluno, sendo necessárias algumas adaptações. Com relação a essa adaptação, Biembengut e Hein (2000, p. 28) afirmam que:

[...] Existem também as dificuldades de adequação ao currículo estabelecido legalmente e a possibilidade do acompanhamento simultâneo, por parte do professor, dos temas escolhidos a priori pelos alunos.

Diante disso, devem ser feitas algumas adaptações que tornem possível a utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino-aprendizagem sem, contudo, perder a linha mestra que é o favorecimento à pesquisa e posterior criação de modelos pelos alunos, e sem desprezar as regras educacionais vigentes. É o que denominamos modelação matemática.

Assim, temos que a Modelagem no ensino é intitulada Modelação Matemática, a qual se difere da Modelagem por ter um currículo a ser cumprido em um determinado período de tempo. Sobre isso, Pires (2009, p. 50) afirma

[...] concluímos que na educação básica em que se tem um currículo para ser cumprido, uma lista de conteúdos a serem analisados em um determinado período de tempo, a modelação é uma importante ferramenta para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de maneira significativa, diferenciando-se da modelagem que no momento em que o tema é escolhido, não se sabe quais são os conteúdos matemáticos que serão explorados.

A Modelação Matemática desenvolve cada modelo seguindo as etapas da Modelagem: interação, matematização e modelo. Sobre isso, tem-se

Na modelação, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua recriação em sala, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão, além de obedecer ao currículo inicialmente proposto. É imperativo que se tenham vários modelos à disposição para que se possa optar “entre os modelos” e não “pelo modelo”. O período do uso deste ou daquele modelo, em classe, o seu aprimoramento ou adaptação cabem ao professor e ao seu bom senso. (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p. 29).

Sintetizadas as etapas da Modelagem Matemática em: interação – reconhecimento da situação-problema e familiarização; matematização – formulação e resolução do problema; e modelo matemático – interpretação e validação; Biembengut e Hein (2016) destacam também que na etapa de matematização, deve-se acrescentar ao processo o desenvolvimento do conteúdo matemático necessário para a formulação e resolução e a apresentação de exemplos e exercícios análogos para aprimorar a apreensão dos conceitos pelo aluno.

Biembengut e Hein (2016) afirmam que a condição necessária para o professor implementar Modelagem no ensino é ter audácia, vontade de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas. Restringir-se ao livro didático nas aulas é tolerar os raciocínios, ideias e argumentos dos alunos. É preciso que participem ativamente e efetivamente do processo ensino-aprendizagem para a construção concreta do conhecimento.

Ainda sobre esta metodologia, Pires (2009, p. 45) salienta que esta pode :

- estimular a criatividade do aluno ;
- desenvolver a habilidade na resolução de problemas ;

- melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos ;
- promover o interesse pela disciplina ;
- aproximar a Matemática de outras áreas do conhecimento ;
- ressaltar a importância da Matemática na formação do aluno.

A função exponencial é um objeto matemático explorado, muitas vezes, por meio de contextualizações inadequadas nos livros didáticos, que trazem problemas com dados fictícios que não traduzem situações reais. Logo, não devemos nos limitar ao uso único e exclusivo do livro didático nas aulas. Quanto à essa afirmação, tem-se nos PCN+:

Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática (BRASIL, 2002, p. 53)

Assim, vemos na Modelação Matemática uma estratégia para incentivar os professores, junto a seus alunos, a buscar em diferentes situações cotidianas e levar essa realidade para sala de aula para que possam obter e validar os modelos matemáticos que solucionem os problemas originais promovendo uma aprendizagem significativa.

CAPÍTULO 2

Neste capítulo, apresentaremos uma sequência de atividades para o ensino da função exponencial de forma intuitiva, bem como sua resolução seguindo as etapas da Modelação Matemática.

A sequência de atividades é composta por duas partes: na Parte I são propostas oito situações modeladas pela função exponencial, as quais deverão ser desenvolvidas em duplas ou trios para confrontar diferentes pontos de vista acerca de suas resoluções; na Parte II propomos a construção dos gráficos em planilhas eletrônicas de cálculo referentes às oito situações desenvolvidas na Parte I, bem como questionamentos sobre as propriedades das curvas traçadas. Por fim, concluídas as partes I e II, formalizaremos a definição de função exponencial.

2.1. A sequência de atividades

Função Exponencial

TURMA: 1º ano do Ensino Médio.

OBJETIVO: Identificar e analisar situações que possam ser modeladas por uma função exponencial, bem como identificar, construir e analisar o gráfico de uma função exponencial.

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES: Utilizar a matemática na interpretação de fenômenos. Aplicar os conhecimentos matemáticos em situações reais.

TEMPO ESTIMADO: 12 horas-aula de 50 minutos.¹

¹ A hora-aula é o padrão estabelecido pelo projeto pedagógico da escola, a fim de distribuir o conjunto dos componentes curriculares em um tempo didaticamente aproveitável pelos estudantes, dentro do respeito ao conjunto de horas determinado para a Educação Básica, para a Educação Profissional e para a Educação Superior (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, acesso em 13/01/2018, <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CEB08.pdf>)

PARTE I

ATIVIDADE 1: O acetilcisteína é um medicamento indicado nos processos congestivos e/ou obstrutivos das cavidades nasais e paranasais. Sua meia-vida é de 6,25 horas; ou seja, após ingerida, leva pouco mais de seis horas para que a quantidade ingerida inicialmente caia pela metade.

Se uma pessoa tomou 8 ml de xarope de acetilcisteína, preencha a tabela e responda: após quanto tempo restará apenas 1 ml desse medicamento em seu organismo?

Tempo decorrido (h)	Quantidade de medicamento presente no organismo (ml)
0	8

Supondo que essa pessoa tenha ingerido uma única dose, após quanto tempo essa pessoa terá 0,125 ml desse xarope no organismo?²

ATIVIDADE 2: Em 1987, ocorreu o maior acidente radioativo do Brasil em Goiânia - GO, quando dois catadores de lixo levaram para casa um aparelho de radioterapia que encontraram enquanto vasculhavam as antigas instalações do Instituto Goiano de Radioterapia. O aparelho continha césio-137, um material radioativo com meia-vida de 30 anos. Sabendo que o local do acidente só poderá ser habitado de novo quando

² Atividade 1: Informações para elaboração da primeira atividade constam no bulário eletrônico da Agência Nacional de Vigilância Sanitária – ANVISA. Acesso em 08/10/2017, http://www.anvisa.gov.br/datavisa/fila_bula/frmVisualizarBula.asp?pNuTransacao=5915082017&pIdAnexo=5760942.

a quantidade de césio-137 se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{32}$ da quantidade inicialmente presente, em que ano o local poderá ser habitado novamente?

Tempo decorrido (em anos)	Fração da quantidade inicial restante
0	M_0
30	$\frac{1}{2}M_0$
60	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot M_0 = \frac{1}{4}M_0$
90	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot M_0 = \frac{1}{8}M_0$

Sabendo que a cápsula de chumbo que estava no aparelho de radioterapia abandonado continha por volta de 20 gramas de cloreto de césio-137, qual a quantidade desse material radioativo no ano em que o local poderá ser habitado novamente?³

ATIVIDADE 3: *Escherichia coli* (mais conhecida como coliforme fecal) é um tipo de bactéria presente no intestino e, na maioria dos casos,

³ Atividade 2: Baseada no texto “O maior acidente radioativo do mundo” (p. 254-255) da seção “A matemática e as práticas sociais” do livro didático Matemática – Contexto e Aplicações, Volume 1, extraído e adaptado de www.brasilecola.com/quimica/acidente-cesio137.htm.

responsável por infecções alimentares. Sabe-se também que a população de uma colônia da bactéria *E. coli* dobra a cada 20 minutos.

- a) Considere um processo iniciado com apenas uma bactéria e preencha a tabela a seguir:

Tempo decorrido (em períodos de 20 minutos)	Número de bactérias <i>E. coli</i>
0	1
1	2
2	
3	
4	
5	

- b) Quantas bactérias *E. Coli* existirão depois de 2 horas? E depois de 3 horas?
- c) Após t períodos de 20 minutos, quantas bactérias *E. Coli* existirão?
- d) Quanto tempo leva para que a população de bactérias *E. Coli* ultrapasse 15 mil bactérias? Sugestão: Construir uma tabela numa planilha eletrônica de cálculos, definindo a relação encontrada no item anterior para o cálculo do número de bactérias *E. Coli* em função do tempo em períodos de 20 minutos.⁴

ATIVIDADE 4: A poupança é um dos investimentos mais populares do Brasil, já que é um tipo de investimento financeiro de baixo risco e, conseqüentemente, rendimento baixo, mas garantido pelo governo até um determinado valor. A poupança é regulada pelo Banco Central e sua remuneração é de aproximadamente 0,5% ao mês.

- a) Supondo um investimento de R\$ 1500,00 na poupança, preencha a tabela a seguir:

⁴ Atividade 3: Baseada na questão de vestibular da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, 2004

Tempo de aplicação (em meses)	Capital acumulado (em R\$)
0	1500
1	$1500 + 0,005 \cdot 1500$
2	
3	

Use aproximações com duas casas decimais.

- b) Qual o valor do capital acumulado ao final de um ano? E em t meses?
 c) Após quanto tempo o capital acumulado terá superado R\$ 2000,00?⁵

ATIVIDADE 5: O cheque especial é destinado a clientes bancários com limite de crédito aprovado. Ele é utilizado pelo correntista quando não há saldo suficiente para pagamento de contas, cheques ou saques em dinheiro. Se houver utilização desse limite de crédito são cobrados encargos mensais que, segundo pesquisa da fundação Procon divulgada em fevereiro de 2017, ficaram por volta de 13,5% ao mês.

- a) Supondo a utilização de um crédito do cheque especial de R\$ 1500,00; preencha a tabela a seguir:

Tempo de utilização do cheque especial (em meses)	Valor da dívida a pagar (em R\$)
0	1500
1	$1500 + 0,135 \cdot 1500$
2	
3	

- b) Qual o valor da dívida a pagar ao final de um ano?
 c) Que relação podemos estabelecer entre o tempo de utilização do cheque especial (em meses) e o valor da dívida a pagar (em reais)?
 d) Após quanto tempo a dívida terá superado R\$ 2000,00?⁶

⁵ Atividade 4: Referência de dados obtidos em Banco Central do Brasil. Acesso em 08/10/2017, www4.bcb.gov.br/pec/poupanca/poupanca.asp.

⁶ Atividade 5: Baseada em dados divulgados pela fundação PROCON-SP. Acesso em 08/10/2017, www.procon.sp.gov.br/noticia.asp?id=5205.

ATIVIDADE 6: O tabagismo é reconhecido pela Organização Mundial da Saúde como doença epidêmica que causa dependência física, psicológica e comportamental. Trata-se de um problema de saúde pública global que mata milhares de pessoas em todo o mundo.

Ao fumar, a nicotina, presente nos cigarros, é rapidamente absorvida pelos pulmões, chegando em poucos segundos à circulação sanguínea e ao cérebro. Em média, a meia-vida da nicotina é de duas horas, ou seja, a quantidade de nicotina presente no corpo de uma pessoa reduz pela metade a cada duas horas.

Quando os neurônios sentem falta dessa substância, provocam agitação, nervosismo e falta de concentração, o que leva a pessoa a fumar novamente, repetindo assim o ciclo. Em cada cigarro há aproximadamente 2 mg de nicotina dos quais 20% são de fato absorvidos pelo organismo e lançados na corrente sanguínea.

Considerando o consumo de um cigarro:

a) Preencha a tabela:

Tempo (em horas)	Quantidade de nicotina no sangue (em mg)
0	0,4
2	$0,4 \cdot 0,5$
4	$0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot (0,5)^2$
6	$0,4 \cdot (0,5)^2 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot (0,5)^3$
8	
10	

- b) Que relação há entre a quantidade y de nicotina (em mg) presente no corpo de uma pessoa t horas após o consumo, desconsiderando uma quantidade inicial que porventura se tenha no organismo?
- c) Qual é a quantidade de nicotina presente no organismo, proveniente daquele cigarro, após 24h? Dado: $(0,5)^{12} = 0,00024$.
- d) Considere as expressões $y = 0,4 \cdot (0,5)^{\frac{t}{2}}$ e $y = 0,4 \cdot (0,7)^t$. Qual delas representa a relação entre a quantidade y de nicotina (em mg)

presente no corpo de uma pessoa e o tempo t após o consumo (em horas)?⁷

ATIVIDADE 7: Uma piscina tem capacidade para $100 m^3$ de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado 1kg de cloro na piscina. Água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado através de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam 900g de cloro na piscina.

- Que quantidade de cloro restará na piscina 2 horas após sua colocação? E após 10 horas?
- E após meia hora de aplicação?
- E após t horas?⁸

ATIVIDADE 8: De acordo com as informações do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), a população brasileira nos anos de 2013 a 2017 foram dados pelos números a seguir:

Ano	Número de habitantes (em milhões)
2013	201,03
2014	202,77
2015	204,45
2016	206,08
2017	207,66

⁷ Atividade 6: Dados obtidos no site do Instituto Nacional do Câncer José Alencar Gomes da Silva - INCA - a partir da leitura do texto “Cigarros eletrônicos: o que sabemos? Estudo sobre a composição do vapor e danos à saúde, o papel na redução de danos e no tratamento da dependência de nicotina”. Acesso em 08/10/2017, http://www1.inca.gov.br/inca/Arquivos/cigarros_eletronicos.pdf.

⁸ Atividade 7: Situação proposta no capítulo 3 – p. 43 do livro Temas e Problemas, SBM – Coleção do Professor de Matemática, resolvida e comentada pelo Professor Paulo Cezar Pinto Carvalho na vídeo-aula intitulada PAPMEM – Janeiro de 2016 – Função Exponencial. Acesso em 09/10/2017, <https://www.youtube.com/watch?v=wo6SUM1gwAk&t=88s>.

Com base nos dados apresentados na tabela, calcule a razão entre o número de habitantes brasileiros de dois anos consecutivos (faça aproximações usando duas casas decimais). Em seguida, utilize a tabela a seguir para organizar as razões.

n	Ano (t)	Número de habitantes (em milhões)	Razão entre o número de habitantes brasileiros de dois anos consecutivos
n = 1	2013	201,03	-----
n = 2	2014	202,77	$\frac{202,77}{201,03} = 1,00865542 \cong 1,01$
n = 3	2015	204,45	
n = 4	2016	206,08	
n = 5	2017	207,66	

Agora responda:

- A razão entre o número de habitantes de um determinado ano e do ano imediatamente anterior é constante, ou seja, o número de habitantes de um determinado ano é proporcional ao número de habitantes do ano imediatamente anterior?
- Seja H_n o número de habitantes num determinado ano, tem-se $\frac{H_{n+1}}{H_n} = k$, na qual $n \in \mathbb{N}$ e k é uma constante de proporcionalidade, ou ainda, $H_{n+1} = k \cdot H_n$. Atribua valores para n para generalizar uma expressão que represente a situação estudada.

Para $n = 0$	$H_1 = k \cdot H_0$
Para $n = 1$	$H_2 = k \cdot H_1 = k \cdot k \cdot H_0 = k^2 \cdot H_0$
Para $n = 2$	
Para $n = 3$	
Para $n = 4$	
:	:
Para n	

- c) Determine os valores de k e H_0 . Qual sentença matemática modela a situação apresentada?
- d) Usando a fórmula encontrada no item c, encontre a estimativa para a população brasileira no ano de 2017 e compare seu resultado com número apresentado na tabela. São valores próximos?
- e) Faça uma estimativa da população brasileira para o próximo ano.⁹

Ao concluir a PARTE I, espera-se que os alunos tenham constatado que em todas as situações propostas tem-se o produto de uma constante positiva por uma base real fixa e a variável no expoente, o que chamamos de “função do tipo exponencial”.

Sugere-se uma discussão com a turma sobre as conclusões obtidas a partir das análises e resoluções das oito situações propostas nessa primeira parte da sequência de atividades e, assim, prosseguir com a segunda parte.

PARTE II

1. Numa planilha eletrônica de cálculos, construa e complete as seguintes tabelas referentes às situações trabalhadas:

⁹ Atividade 8: Situação proposta no trabalho intitulado “Modelagem Matemática e o Efeito Estufa” e apresentado na VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (2009) de autores Ângela Maria L. Gerolômo e Rodolfo Eduardo Vertuan da Universidade de Londrina – UEL. Dados atualizados com base nas informações trazidas no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/populacao.html.

a) **ATIVIDADE 1:** Acetilcisteína

Tempo decorrido (h)	Quantidade de medicamento no organismo (ml)
0	8
6,25	4
12,5	
18,75	
25	
31,25	
37,5	
43,75	
50	
56,25	
62,5	

b) **ATIVIDADE 2:** Acidente Radioativo

Tempo decorrido (em anos)	Quantidade restante de céσιο-137 (g)
0	20
30	10
60	
90	
120	
150	
180	

c) **ATIVIDADE 3:** Bactérias *E. Coli*

Tempo decorrido (em períodos de 20 minutos)	Número de bactérias <i>E. Coli</i>
0	1
1	2
2	4
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

d) **ATIVIDADE 4:** Poupança

Tempo de aplicação (em meses)	Capital acumulado (em R\$)
0	$1500 \cdot (1,005^0) = 1500,00$
100	$1500 \cdot (1,005^{100}) = 2470,00$
200	
300	
400	
500	
600	
700	
800	
900	
1000	

e) **ATIVIDADE 5:** Cheque Especial

Tempo de utilização do cheque especial (em meses)	Valor da dívida a pagar (em R\$)
0	1500,00
3	
6	
9	
12	
15	
18	
21	
24	

f) **ATIVIDADE 6:** Tabagismo

Tempo (em horas)	Quantidade de nicotina no sangue (em mg)
0	0,4
2	0,2
4	0,1
6	
8	
10	

g) **ATIVIDADE 7:** Piscina

Tempo decorrido (em horas)	Quantidade de cloro presente na piscina (em g)
0	1000,0
1	900,0
2	810,0
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

h) **ATIVIDADE 8:** População Brasileira

n	Ano	Número de habitantes (em milhões)
1	$n = 1 \rightarrow 2013$	201,33
50	$n = 50 \rightarrow 2062$	202,77
100	$n = 100 \rightarrow 2112$	204,45
150	$n = 150 \rightarrow 2162$	206,08
200	$n = 200 \rightarrow 2212$	207,66
250	$n = 250 \rightarrow 2262$	
300	$n = 300 \rightarrow 2312$	

2. Selecione as duas colunas da primeira tabela e clique em “Inserir”, logo após, “Gráfico” e “Dispersão”. Na sequência, escolham por “pontos e linhas”, pois estamos tratando de valores contínuos, apesar de representarmos-os de forma discreta na tabela.
Nomeie os eixos, intitule o gráfico e repita o procedimento para cada uma das tabelas do item anterior.
3. Nos gráficos anteriormente construídos, quais curvas são crescentes? Existe alguma relação entre a base da potência em cada uma das fórmulas que descrevem as situações anteriores e o crescimento ou

decréscimo das curvas correspondentes? O que podemos concluir sobre isso?

4. Determinada a fórmula que descreve cada situação, o que podemos afirmar sobre o ponto de intersecção da curva com o eixo y no gráfico?

Na confecção dos gráficos, optamos por unir os pontos – solicitamos que os alunos escolham “pontos e linhas”. Ainda que não tenhamos uma suavidade no traço dos gráficos - os pontos que representam as variáveis discretas serão unidos por segmentos de reta, fizemos essa escolha tendo em vista que a função exponencial será definida para $x \in \mathbb{R}$.

Após o término do desenvolvimento da PARTE II, acredita-se que os alunos sejam capazes de identificar a curva que descreve uma função do tipo exponencial, analisar o crescimento ou decréscimo dessa curva, bem como notar quão rápido cresce a função exponencial (de base maior do que 1) quando a variável independente aumenta, ou ainda, quão rápido decresce.

Na sequência, discutiremos a resolução das situações propostas na sequência de atividades por meio da Modelação Matemática.

2.2. A Modelação Matemática na sequência de atividades

As atividades propostas na seção anterior, ou seja, a 1ª parte, explora a ideia intuitiva de função exponencial por meio de oito situações elaboradas a partir de dados reais. Neste momento, a definição formal não é tratada. Tais situações devem ser apresentadas aos alunos, organizados em duplas, para que possam discutir e chegar às soluções.

O uso de uma calculadora é sugerido para resolução de algumas situações, como por exemplo, a situação 4 – Poupança. O cálculo manual é desnecessário, pois iria despende muito tempo e assim, corre-se o risco de que o foco da situação de ensino não seja compreendido pelos alunos. Portanto, os alunos poderão usar a calculadora sempre que julgarem necessário.

A segunda parte traz a construção de gráficos relacionados às situações propostas na PARTE I. Para o desenvolvimento de todas as atividades dessa seção, os alunos deverão utilizar o laboratório de informática.

Além disso, na PARTE II, o objetivo é que, tendo um intervalo maior de valores na tabela, os alunos analisem as curvas relacionadas às formulas que descrevem cada situação para comparar e conhecer suas características. Levaríamos muito tempo, caso não utilizássemos as planilhas eletrônicas e os alunos as construíssem manualmente, mesmo usando uma calculadora.

Dessa forma, sugere-se o uso do “Calc”, a planilha eletrônica de cálculos do BrOffice, software livre e gratuito.

Na sequência de atividades apresentada, há mais de um tema que permeia as situações propostas. Para iniciar a primeira etapa da Modelação Matemática, a Interação, deve-se fazer uma breve exposição sobre os temas das situações e levantar questões com o intuito de instigar os alunos a participarem. Por exemplo: O que significa o termo “bipartição”? Como as bactérias se reproduzem? Já analisaram a bula de um medicamento? O que significa o termo meia-vida? Conhecem o material radioativo cézio-137? Já ouviram falar no maior acidente radioativo do Brasil em Goiânia? Sabem qual a taxa atual de juros do cheque especial? E da poupança? Que quantidade de nicotina existe em um cigarro? Em quanto tempo a nicotina de um cigarro é eliminada do organismo? É possível eliminá-la totalmente? Qual o número de habitantes no Brasil? É possível fazer uma projeção para os próximos anos?.

Delineadas as situações que pretendemos estudar, os alunos deverão pesquisar a respeito das questões levantadas para o reconhecimento e familiarização com as situações. Estima-se que seja necessário duas aulas-hora para o desenvolvimento dessa etapa.

Na aula seguinte, damos início à matematização, na qual os alunos receberão a “PARTE I” da sequência de atividades. Sugere-se o trabalho em duplas – ou trios – objetivando incentivar a discussão entre os alunos para que exponham suas intuições, criatividade e experiência.

A matematização, subdividida em formulação e resolução, será desenvolvida em seis horas-aula (o tempo de desenvolvimento é uma estimativa, uma vez que o perfil da cada sala é peculiar, podendo ser estendido ou reduzido). O preenchimento das tabelas permite que os alunos analisem as características presentes nas situações propostas.

Na ATIVIDADE 1, uma vez discutido e compreendido o termo “meia-vida”, acredita-se que os alunos concluam com facilidade que na situação 1 restará 1

ml do medicamento no organismo após 18,75 horas, ou ainda, após 18 horas e 45 minutos e, 0,125 ml após 1 dia 13 horas 30 minutos. Basta seguir a tabela algumas linhas (ver Tabela 4).

Tabela 4: Preenchimento da tabela “Acetilcisteína” – PARTE I

Tempo decorrido (h)	Quantidade de medicamento presente no organismo (ml)
0	8
6,25	4
12,5	2
18,75	1
25	0,5
31,25	0,25
37,5	0,125

A mesma ideia se mantém na situação 2, os exemplos análogos darão uma visão mais clara sobre o assunto, suprimindo deficiências, preenchendo possíveis lacunas quanto ao entendimento do conteúdo (Biembengut e Hein, 2016). Além de tratar novamente da “meia-vida”, a situação 2 mostra que não é necessário conhecer a quantidade inicial de césio-137 que foi disseminada para responder a primeira questão, ou seja, para saber que o local poderá ser habitado novamente decorridos 150 anos do acidente em 1987 (ver Tabela 5).

Tabela 5: Preenchimento da tabela “Acidente Radioativo” – PARTE I

Tempo decorrido (em anos)	Fração da quantidade inicial restante
0	M_0
30	$\frac{1}{2}M_0$
60	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot M_0 = \frac{1}{4}M_0$
90	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot M_0 = \frac{1}{8}M_0$
120	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot M_0 = \frac{1}{16}M_0$
150	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot M_0 = \frac{1}{32}M_0$

Para responder à segunda questão, ou seja, a quantidade de material radioativo ainda existente no local do acidente em 2137 dado que a cápsula de chumbo que estava no aparelho de radioterapia abandonado continha por volta de 20 gramas de cloreto de cézio-137, basta que o aluno substitua M_0 por 20 na expressão $\frac{1}{32}M_0$, obtendo assim 0,625 g; ou ainda, 625 mg.

Na situação 3, deve-se inicialmente preencher a tabela no item a (Tabela 6).

Tabela 6: Preenchimento da tabela “Bactérias *E. Coli*” – PARTE I

Tempo decorrido (em períodos de 20 minutos)	Número de bactérias <i>E. Coli</i>
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

No item b, constatado que a quantidade de bactérias é sempre o dobro da quantidade anterior, o número de bactérias *E. Coli* depois de 2 horas será dobrado de acordo com o número de períodos de 20 minutos que compõem 2 horas, logo, 2 horas correspondem a 6 períodos de 20 minutos. Então, $2^6 = 64$, ou seja, existem 64 bactérias decorridas 2 horas. Para 3 horas, tem-se que 3 horas correspondem a 9 períodos de 20 minutos e $2^9 = 512$, portanto, 512 bactérias decorridas 3 horas.

Com isso, nota-se que a relação entre o tempo decorrido e o número de bactérias é dado por 2^t , respondendo assim ao item c.

No último item, uma vez deduzida a fórmula que modela a situação, 2^t para t períodos de 20 minutos, os alunos deverão resolver a desigualdade $2^t > 15000$. Supondo valores arbitrários para t , conclui-se que o número de bactérias supera 15 mil após 14 períodos de 20 minutos, ou seja, 4 horas e 40 minutos, já que $2^{13} = 8192$ e $2^{14} = 16384$.

A resolução da atividade 4 inicia-se também com o preenchimento de uma tabela (Tabela 7).

Tabela 7: Preenchimento da tabela “Poupança” – PARTE I

Tempo de aplicação (em meses)	Capital acumulado (em R\$)
0	1500
1	$1500 + 0,005 \cdot 1500 = 1500 \cdot 1,005 = 1507,50$
2	$1500 \cdot 1,005 + 0,005 \cdot (1500 \cdot 1,005)$ $= 1500 \cdot (1,005)^2 = 1515,04$
3	$1500 \cdot 1,005^2 + 0,005 \cdot (1500 \cdot 1,005^2)$ $= 1500 \cdot (1,005)^3 = 1522,61$

No item b, a expressão “ $1500 \cdot (1,005)^t$, para t meses” descreve a relação entre o tempo de aplicação na poupança de um capital de R\$ 1500,00 e o tempo decorrido da aplicação. Logo, ao final de um ano, tem-se $1500 \cdot (1,005)^{12}$ como montante, ou seja, R\$ 1592,51.

Para responder o item c, busca-se a solução da inequação $1500 \cdot (1,005)^t > 2000$. Como não tratamos dos logaritmos, supõe-se valores arbitrários para t até que $1500 \cdot (1,005)^t$ supere 2000. Tem-se $1500 \cdot (1,005)^{57} =$

1993,22 e $1500 \cdot (1,005)^{58} = 2003,19$, portanto, o montante terá superado R\$ 2000,00 após 58 meses, ou seja, 4 anos e 10 meses.

A atividade 5 foi proposta com o intuito de fazermos uma comparação entre os juros pagos pelo banco ao corrigir o valor depositado em poupança (atividade 4) e os juros pagos ao banco quando feito o uso do cheque especial.

Iniciamos a resolução com o preenchimento da tabela apresentada no item a (Tabela 8).

Tabela 8: Preenchimento da tabela “Cheque Especial” – PARTE I

Tempo de utilização do cheque especial (em meses)	Valor da dívida a pagar (em R\$)
0	1500
1	$1500 + 0,135 \cdot 1500 = 1500 \cdot (1 + 0,135)$ $= 1500 \cdot 1,135 = 1702,50$
2	$1500 \cdot 1,135 + 0,135 \cdot (1500 \cdot 1,135)$ $= 1500 \cdot (1,135)^2 = 1932,33$
3	$1500 \cdot 1,135^2 + 0,135 \cdot (1500 \cdot 1,135^2)$ $= 1500 \cdot (1,135)^3 = 2193,20$

No item seguinte, o valor da dívida a pagar ao final de um ano é dado pela expressão $1500 \cdot (1,135)^{12}$. Portanto, o valor a ser pago é de R\$ 6855,53.

A fórmula “ $1500 \cdot (1,135)^t$, para t meses” relaciona o valor a ser pago ao banco por t meses da utilização de um crédito de R\$ 1500,00 no cheque especial, o que responde o item c da atividade 5.

O último item é respondido só com a análise dos valores da tabela preenchida no item a, pois em 3 meses a dívida já terá superado R\$ 2000,00.

Concluídas as atividades 4 e 5, ressalta-se aos alunos a grande discrepância entre os valores produzidos num curto espaço de tempo entre as duas correções; a intenção com a proposta dessas situações também é alertá-los sobre o risco da utilização de créditos bancários.

Na atividade 6, retoma-se o conceito de meia-vida e também iniciamos o item a com o preenchimento de uma tabela (Tabela 9).

Tabela 9: Preenchimento da tabela “Tabagismo” – PARTE I

Tempo (em horas)	Quantidade de nicotina no sangue (em mg)
0	0,4
2	$0,4 \cdot 0,5 = 0,2$
4	$0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot (0,5)^2 = 0,1$
6	$0,4 \cdot (0,5)^2 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot (0,5)^3 = 0,05$
8	$0,4 \cdot (0,5)^3 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot (0,5)^4 = 0,025$
10	$0,4 \cdot (0,5)^4 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot (0,5)^5 = 0,0125$

Como a meia-vida da nicotina é, em média, 2 horas, nota-se que o expoente da base 0,5 é metade do tempo decorrido do consumo dessa substância. Espera-se que essa relação se torne evidente ao aluno após ter a tabela preenchida. Assim, no item b, a expressão que relaciona a quantidade y de nicotina (em mg) presente no organismo de uma pessoa, t horas após o consumo, é dada por $y = 0,4 \cdot (0,5)^{\frac{t}{2}}$.

Após 24 horas, tem-se $t = 24$ na expressão $y = 0,4 \cdot (0,5)^{\frac{t}{2}}$, ou seja, 0,000096 mg de nicotina restam no organismo de uma pessoa após 1 dia do seu consumo, o que responde o item c da atividade 6.

No item d, espera-se que os alunos notem que $0,4 \cdot (0,5)^{\frac{t}{2}} = 0,4 \cdot \left[(0,5)^{\frac{1}{2}}\right]^t = 0,4 \cdot \sqrt{0,5}^t$ e, usando a aproximação $\sqrt{0,5} \cong 0,7$, cheguem à conclusão de que a manipulação da expressão $y = 0,4 \cdot (0,5)^{\frac{t}{2}}$ resulta em $y = 0,4 \cdot (0,7)^t$, ou seja, representam o mesmo comportamento.

Na situação 7, espera-se que os alunos, mesmo sem preencher uma tabela, consigam perceber que a perda de cloro nos períodos consecutivos de 1 hora não é a mesma, já que ao entrar água pura na piscina, a quantidade de cloro que sai da piscina é cada vez menor. É conveniente uma discussão com a turma acerca dessa conjectura – caso a turma não a faça, questione-os sobre tal fato, saliente que o que é constante, em cada um destes períodos, é a variação relativa: se 10% do cloro foi eliminado na primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora seguinte. Logo, após 2 horas da colocação de cloro na piscina haverá uma perda de mais 90g, ou seja, restará 810g de cloro na piscina.

Como os alunos ainda não tem a definição de função exponencial formalizada, para responder ao item 7c – quantidade de cloro na piscina após t horas da aplicação, os alunos podem relacionar a situação com a progressão geométrica ($1000g, 900g, 810g, \dots$). Assim, sendo o primeiro termo dessa sequência $a_0 = 1000$ e razão $q = 0,9$, tem-se $a_t = 1000 \cdot (0,9)^t$, na qual t representa o número de horas decorridas da aplicação do cloro e, portanto, $t \in \mathbb{Z}_+$. Uma vez que os alunos cheguem na fórmula $a_t = 1000 \cdot 0,9^t$, retoma-se os itens a e b, caso ainda não os tenham feito, para responder “após 10 horas de aplicação” e “após meia hora de aplicação”. Após 10 horas, tem-se $1000 \cdot (0,9)^{10} = 348,68$ e após meia hora $1000 \cdot (0,9)^{0,5} = 948,68$, ou seja, $348,68 g$ e $948,68 g$ de cloro, respectivamente

A oitava e última situação trata de uma estimativa para o número de habitantes brasileiros nos próximos anos. Para isso, a situação é iniciada propondo aos alunos que encontrem a razão entre o número de habitantes brasileiros de dois anos consecutivos (Tabela 10).

Tabela 10: Preenchimento da tabela “Razão entre o número de habitantes brasileiros de dois anos consecutivos” – PARTE I

Ano (t)	Número de habitantes (em milhões)	Razão entre o número de habitantes brasileiros de dois anos consecutivos
$n = 1 \rightarrow 2013$	201,03	
$n = 2 \rightarrow 2014$	202,77	$\frac{202,77}{201,03} = 1,00865542 \cong 1,01$
$n = 3 \rightarrow 2015$	204,45	$\frac{204,45}{202,77} = 1,00828525 \cong 1,01$
$n = 4 \rightarrow 2016$	206,08	$\frac{206,08}{204,45} = 1,00797261 \cong 1,01$
$n = 5 \rightarrow 2017$	207,66	$\frac{207,66}{206,08} = 1,00766693 \cong 1,01$

Constatado que a razão k entre o número de habitantes H_{n+1} de um determinado ano e H_n do ano imediatamente anterior é constante, uma nova tabela é proposta a fim de reforçar aos alunos a relação da progressão geométrica com as situações apresentadas (Tabela 11).

Tabela 11: Preenchimento da tabela “Generalizar expressão” referente ao item b da atividade 8 – PARTE I

Para $n = 0$	$H_1 = k \cdot H_0$
Para $n = 1$	$H_2 = k \cdot H_1 = k \cdot k \cdot H_0 = k^2 \cdot H_0$
Para $n = 2$	$H_3 = k \cdot H_2 = k \cdot k^2 \cdot H_0 = k^3 \cdot H_0$
Para $n = 3$	$H_4 = k \cdot H_3 = k \cdot k^3 \cdot H_0 = k^4 \cdot H_0$
Para $n = 4$	$H_5 = k \cdot H_4 = k \cdot k^4 \cdot H_0 = k^5 \cdot H_0$
:	:
Para n	$H_{n+1} = k \cdot H_n = k \cdot k^n \cdot H_0 = k^{n+1} \cdot H_0$

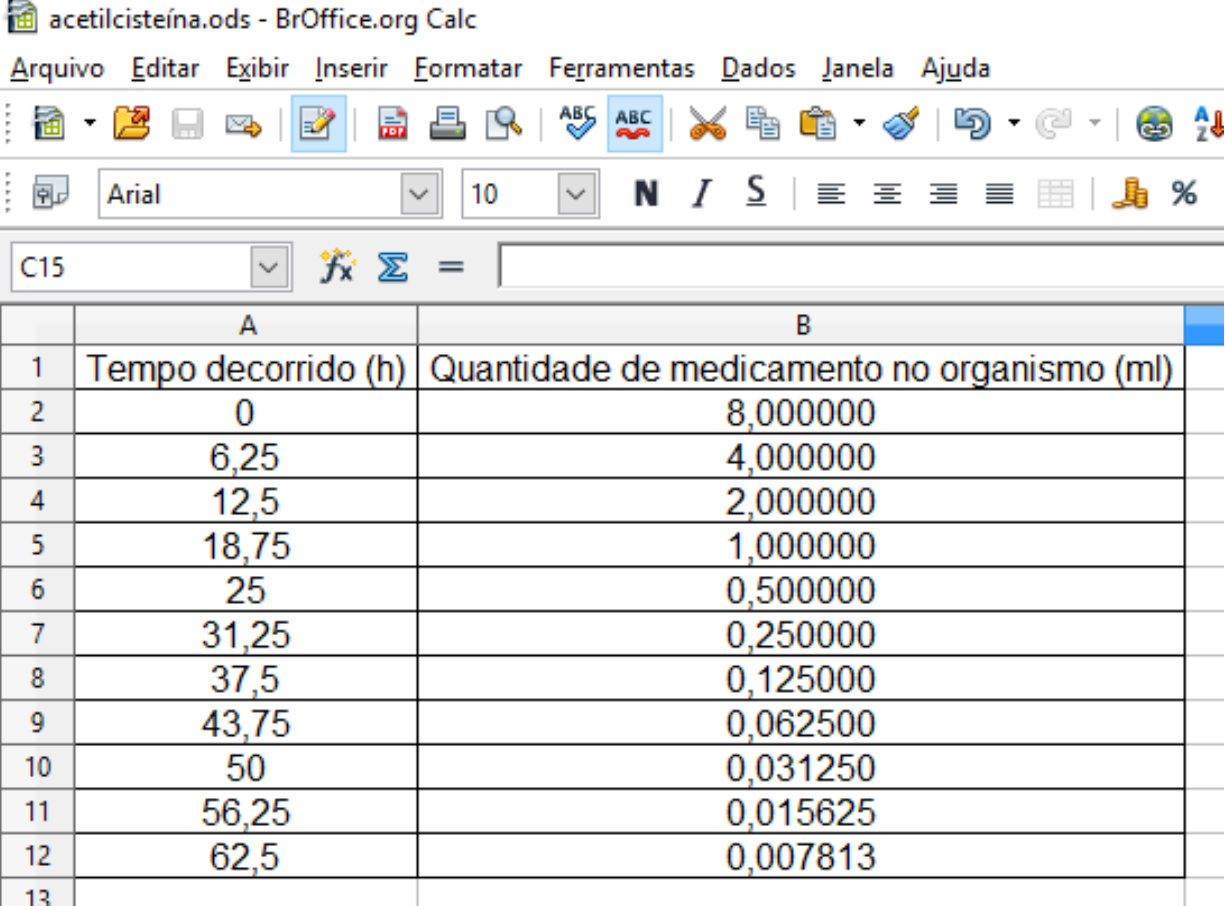
Para responder ao item 8c – a sentença matemática que modela a situação, os alunos deverão escolher pares ordenados do tipo $(n; \text{número de habitantes})$, no qual $n \in \mathbb{N}$ e $n = t - 2012$, sendo t o ano. Essa atribuição de valores deve ser discutida com os alunos também. Qualquer que sejam suas escolhas, o modelo obtido pelos alunos será $H_n = (1,008)^n \cdot 199,435$. Ao determinar o número de habitantes em 2017, os alunos encontrarão $H_5 = (1,008)^5 \cdot 199,435 = 207,54$ (em milhões de habitantes), um número bem próximo do real.

Em seguida, pretende-se estudar os gráficos de uma função exponencial, mesmo sem defini-la. Para isso, os alunos deverão preencher as tabelas acerca das oito situações já trabalhadas e construir os gráficos correspondentes a cada uma delas. O uso das planilhas eletrônicas de cálculo nesse momento é essencial para obtermos um intervalo maior de valores nas tabelas preenchidas anteriormente, sem que se torne um trabalho cansativo, já que uma vez definida numa célula da planilha a expressão que descreve a situação, podemos estendê-la para as demais células. Além disso, objetivamos analisar as características e propriedades que envolvem tais gráficos. Nesse momento, iniciamos a última etapa da modelação matemática: modelo matemático, na qual os alunos irão

interpretar e validar o modelo que solucionou cada uma das situações apresentadas.

Para a construção do gráfico referente à atividade 1, deve-se construir e preencher a tabela apresentada. Como na PARTE I não generalizamos uma expressão que descreve a situação 1, é provável que os alunos preencham a tabela simplesmente dividindo pela metade o valor da célula “quantidade de medicamento no organismo (ml)” como na Figura 5.

Figura 5: Tabela referente à situação 1 – “Acetilcisteína”.



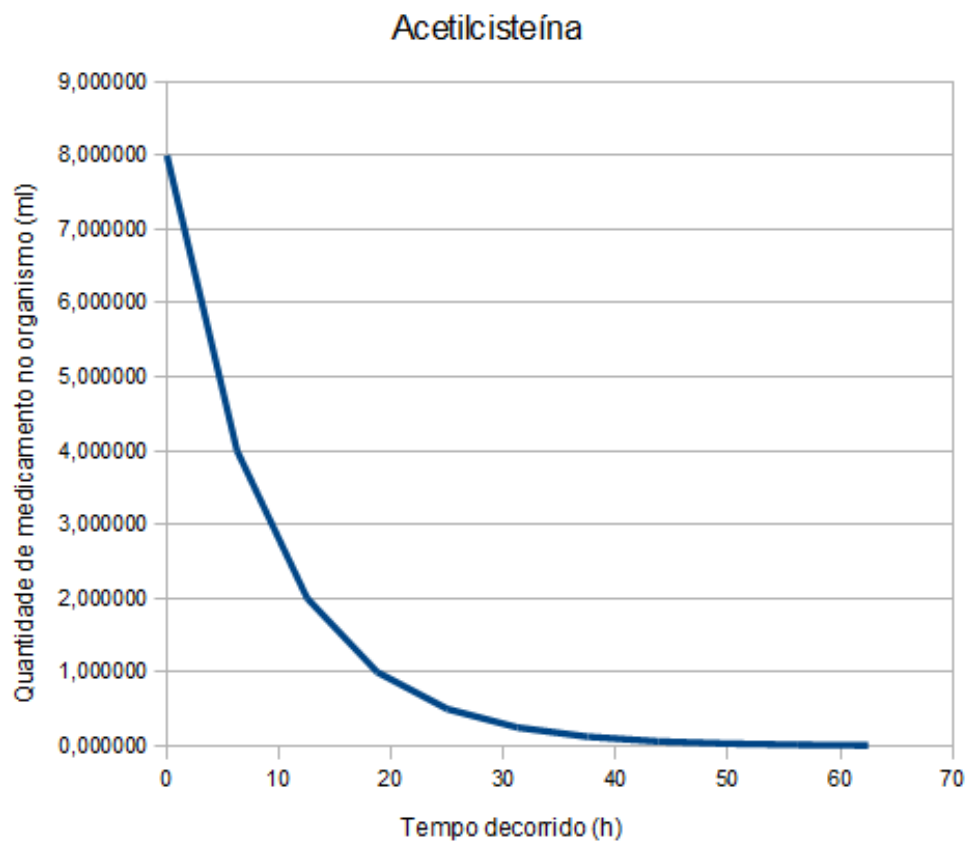
acetilcisteína.ods - BrOffice.org Calc

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

	A	B
1	Tempo decorrido (h)	Quantidade de medicamento no organismo (ml)
2	0	8,000000
3	6,25	4,000000
4	12,5	2,000000
5	18,75	1,000000
6	25	0,500000
7	31,25	0,250000
8	37,5	0,125000
9	43,75	0,062500
10	50	0,031250
11	56,25	0,015625
12	62,5	0,007813
13		

Para construção do gráfico, todos os passos estão descritos na tarefa 2 da PARTE II. Neste caso, tem-se uma curva exponencial decrescente, já que a quantidade do medicamento no organismo é cada vez menor (Figura 6).

Figura 6: Gráfico referente à situação 1 – “Acetilcisteína”.



Como a segunda situação também trata da meia-vida de uma substância, a coluna “quantidade restante de césio-137” poderá ser preenchida dividindo-se pela metade a quantidade anterior, pois o tempo decorrido (em anos) aumenta de 30 em 30 anos (Figura 7).

Figura 7: Tabela referente à situação 2 – “Acidente Radioativo”.

Acidente Radioativo.ods - BrOffice.org Calc

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

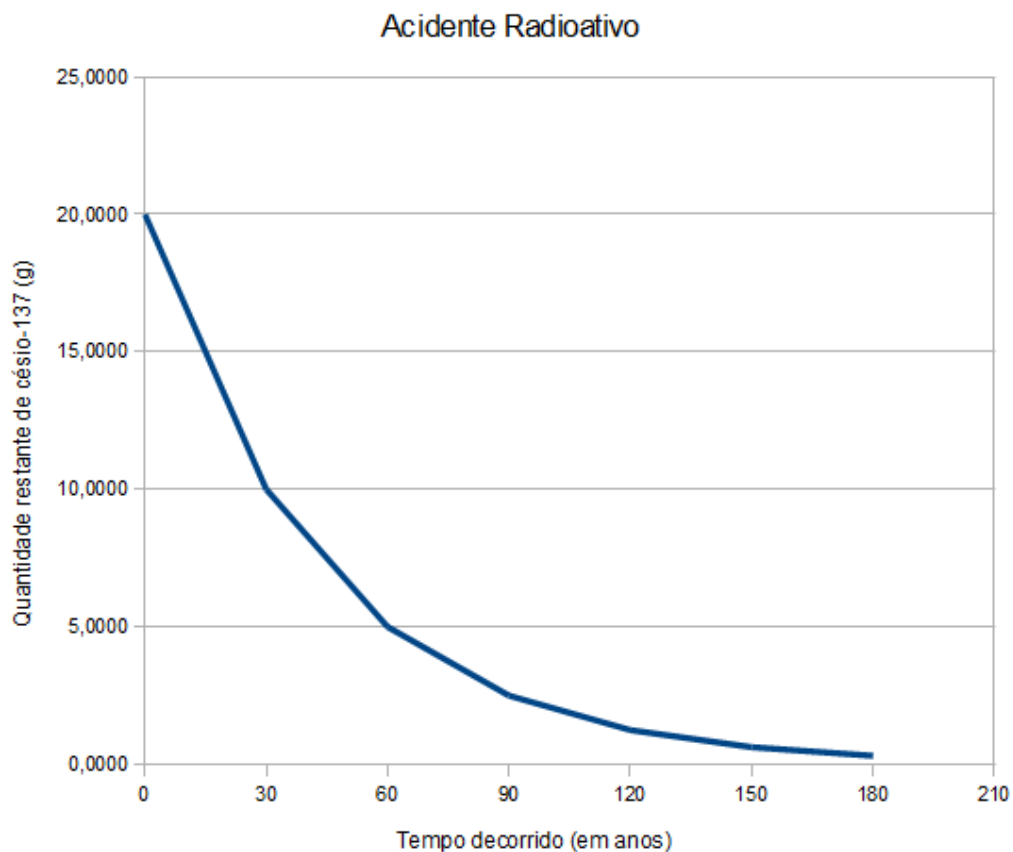
Arial 10 N I S

B12

	A	B
1	Tempo decorrido (em anos)	Quantidade restante de césio-137 (g)
2	0	20,0000
3	30	10,0000
4	60	5,0000
5	90	2,5000
6	120	1,2500
7	150	0,6250
8	180	0,3125
9		

O gráfico que representa a situação 2 também é uma curva exponencial que decresce (Figura 8). Acreditamos que os alunos já comecem a identificar o traço de uma curva exponencial decrescente.

Figura 8: Gráfico referente à situação 2 – “Acidente Radioativo”.



Na PARTE I da sequência de atividades, generaliza-se a expressão que descreve a reprodução de bactérias *E. Coli* no item c da atividade 3. Assim, para preencher a tabela apresentada na PARTE II, os alunos têm a opção de digitar na célula B2, a expressão 2^A2 ; na célula B3, a expressão 2^A3 (ver Figura 9) e estender a fórmula para as demais células. Caso seja necessário, liste os símbolos usados nas planilhas eletrônicas para as operações matemáticas.

Figura 9: Tabela referente à situação 3 – “Bactérias *E. Coli*”.

Bactérias E. Coli.ods - BrOffice.org Calc

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

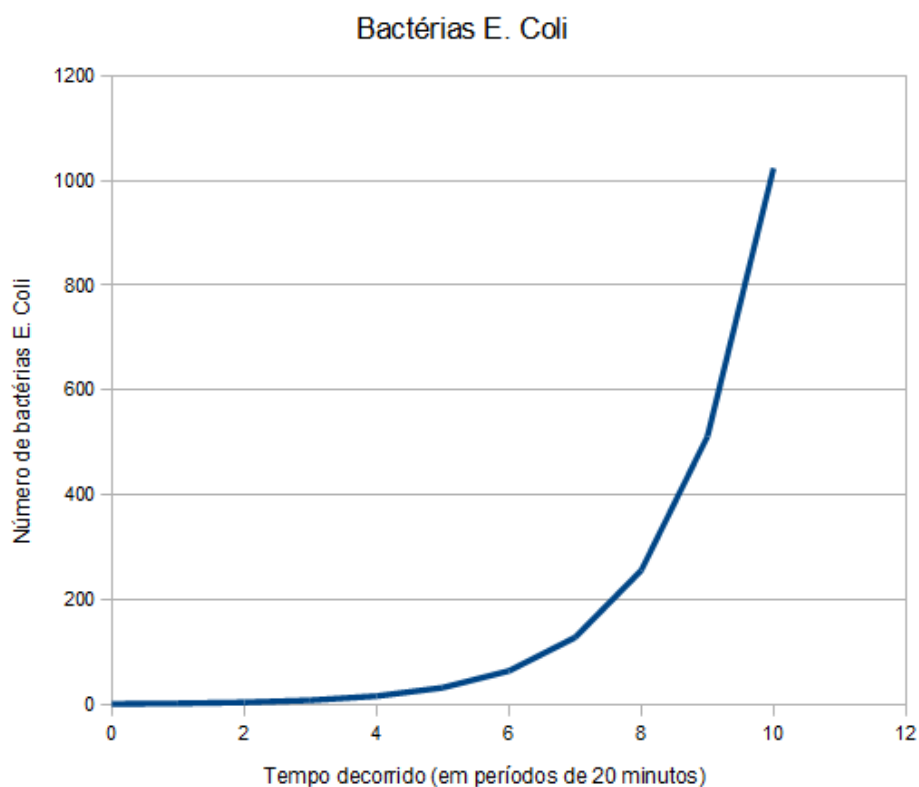
Arial 10 N I S

L21

	A	B
1	Tempo decorrido (em períodos de 20 minutos)	Número de bactérias <i>E. Coli</i>
2	0	1
3	1	2
4	2	4
5	3	8
6	4	16
7	5	32
8	6	64
9	7	128
10	8	256
11	9	512
12	10	1024
13		

Agora, a representação gráfica correspondente à situação trata-se de uma curva exponencial crescente, pois o número de bactérias aumenta com o decorrer do tempo (ver Figura 10).

Figura 10: Gráfico referente à situação 3 – “Bactérias *E. Coli*”.



A situação 4 traz o rendimento de um capital aplicado em poupança. É importante discutir com os alunos que o rendimento da poupança é mensal e não diário como as demais aplicações, ou seja, cada aplicação só rende uma vez por mês, sempre no dia em que o dinheiro foi aplicado, conhecido como “aniversário” da aplicação. Com isso, se o dinheiro for resgatado antes do aniversário, o juro referente àquele mês não será pago pelo banco.

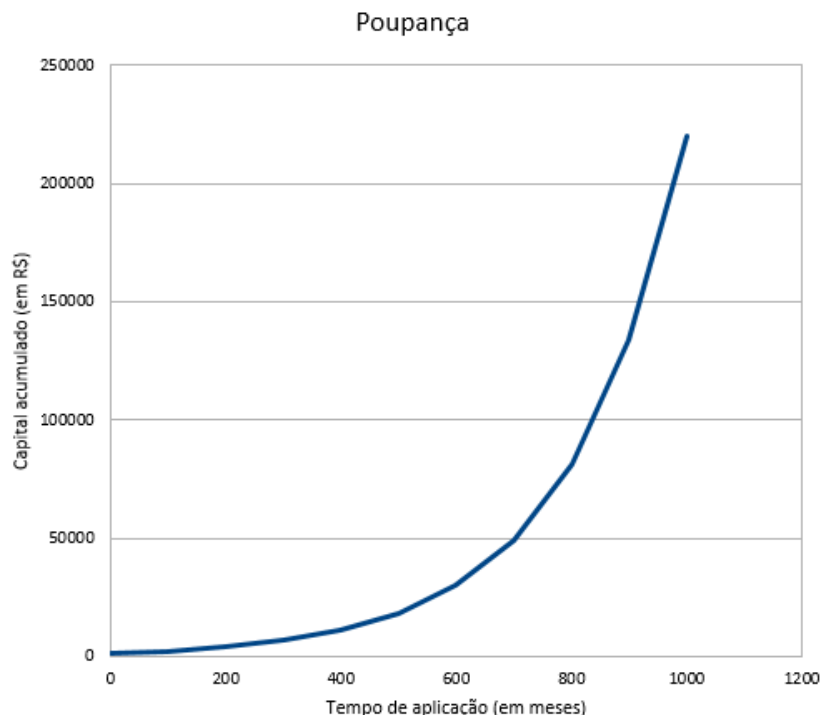
Para completar a tabela apresentada nessa situação, sugere-se mais uma vez que os alunos definam a fórmula que descreve essa situação e estendam a generalização para as outras células (Figura 11), pois o foco agora é a análise da curva (Figura 12) e não a realização dos cálculos.

Figura 11: Tabela referente à situação 4 – “Poupança”.

The image shows a screenshot of the BrOffice.org Calc spreadsheet interface. The title bar reads "Poupança.ods - BrOffice.org Calc". The menu bar includes "Arquivo", "Editar", "Exibir", "Inserir", "Formatar", "Ferramentas", "Dados", "Janela", and "Ajuda". The toolbar contains various icons for file operations and editing. The spreadsheet has two columns: "A" (Tempo de Aplicação (em meses)) and "B" (Capital Acumulado (em R\$)). The data is as follows:

	A	B
1	Tempo de Aplicação (em meses)	Capital Acumulado (em R\$)
2	0	1500
3	100	=1500*(1,005^A3)
4	200	4067,28
5	300	6697,45
6	400	11028,49
7	500	18160,26
8	600	29903,93
9	700	49241,86
10	800	81085,03
11	900	133520,16
12	1000	219863,44
13		

Figura 12: Gráfico referente à situação 4 – “Poupança”.



A situação 5 traz a cobrança de juros no cheque especial em função do tempo de utilização do dinheiro. Tais juros são cobrados mensalmente, embora seu cálculo seja diário. Para o preenchimento da tabela “Cheque Especial” tem-se a expressão $=1500*(1,135^A2)$ definida na célula B2; $=1500*(1,135^A3)$ definida na célula B3 e analogamente nas demais (Figura 13). Tal expressão já fora determinada na atividade 5, item c da PARTE I.

Figura 13: Tabela referente à situação 5 – “Cheque Especial”.

Cheque Especial.ods - BrOffice.org Calc

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

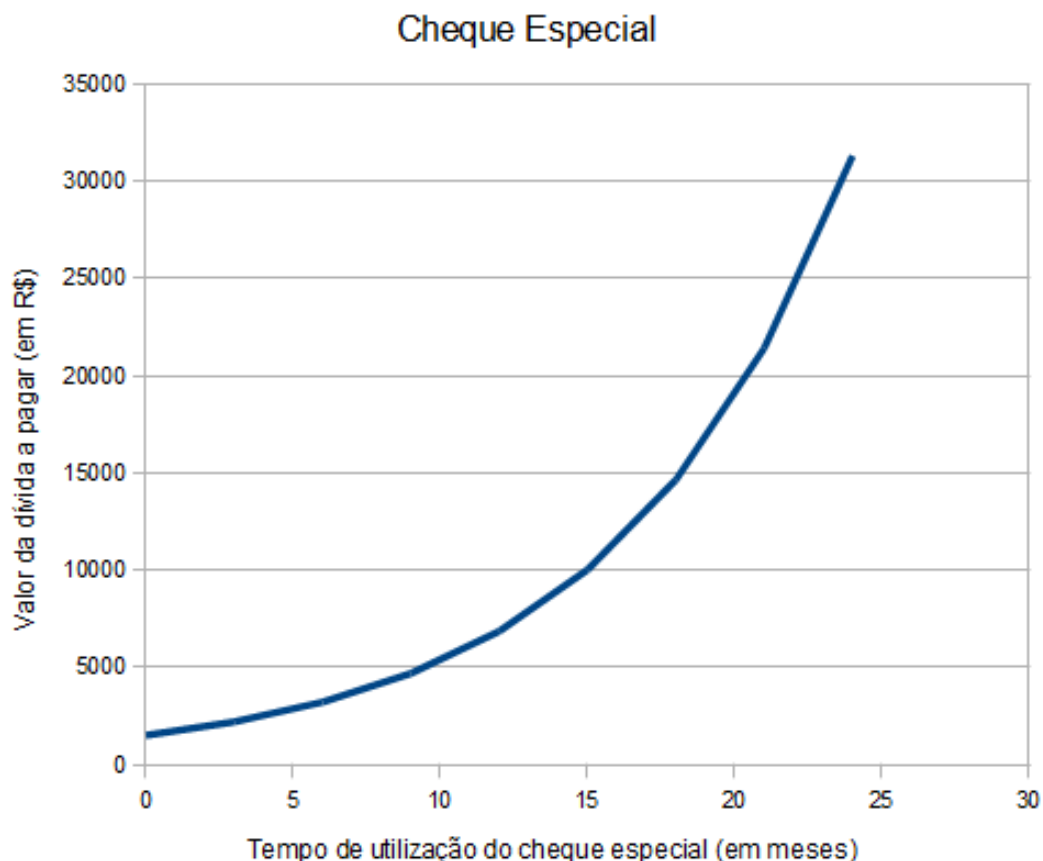
Arial 12 N I S

B2 = $=1500*1,135^A2$

	A	B
1	Tempo de utilização do cheque especial (em meses)	Valor da dívida a pagar (em R\$)
2	0	1500
3	3	2193,2
4	6	3206,76
5	9	4688,72
6	12	6855,54
7	15	10023,73
8	18	14656,04
9	21	21429,12
10	24	31332,28
11		

O gráfico que corresponde a essa situação também é uma curva exponencial crescente (ver Figura 14).

Figura 14: Gráfico referente à situação 5 – “Cheque Especial”.



A situação seguinte, sobre o tabagismo e a ação da nicotina no sangue, se assemelha à situação 1. A ação da nicotina é constante no organismo da pessoa que a consumiu, ou seja, em qualquer fração do tempo tem-se a nicotina agindo no organismo, cada vez em quantidade menor, mas sempre presente. Não falaremos sobre limite nesse trabalho, mas podemos deixar a questão para uma reflexão: a nicotina vai desaparecer no organismo da pessoa que a consumiu?

Ao preencher a sexta tabela (Figura 15), é provável que os alunos dividam o valor da quantidade de nicotina (em mg) pela metade para encontrar a quantidade seguinte, o que não é problema. Sugere-se definir a fórmula numa célula para estendê-la para as demais quando for facilitar o trabalho do aluno.

Figura 15: Tabela referente à situação 6 – “Tabagismo”.

Tabagismo.ods - BrOffice.org Calc

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

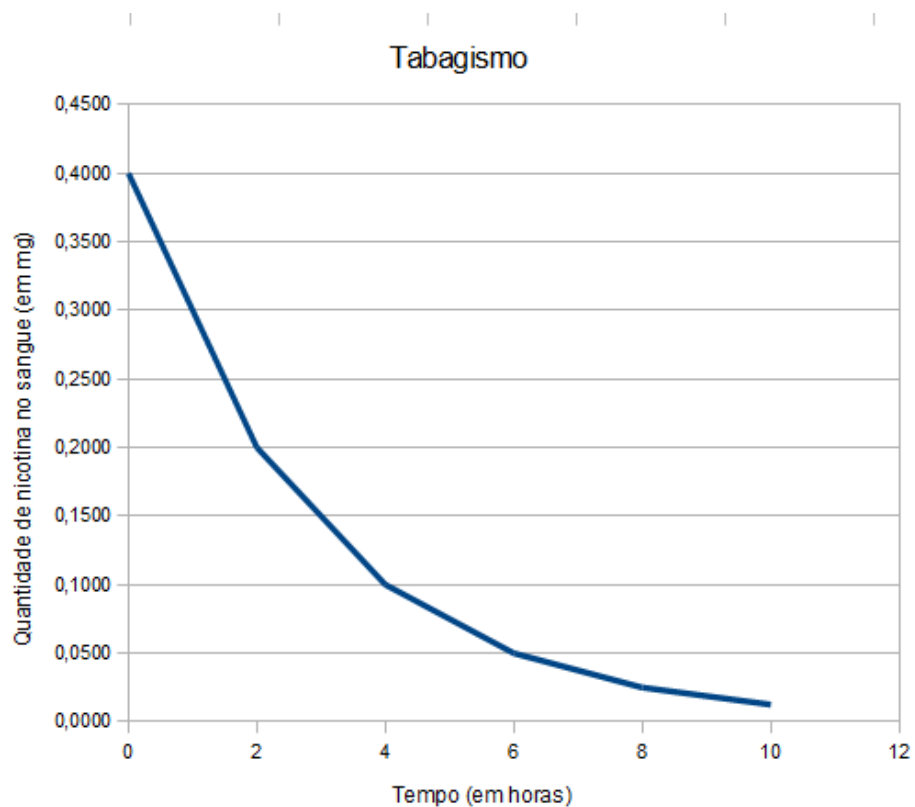
Arial 10 N I S

E17

	A	B
1	Tempo (em horas)	Quantidade de nicotina no sangue (em mg)
2	0	0,4000
3	2	0,2000
4	4	0,1000
5	6	0,0500
6	8	0,0250
7	10	0,0125
8		

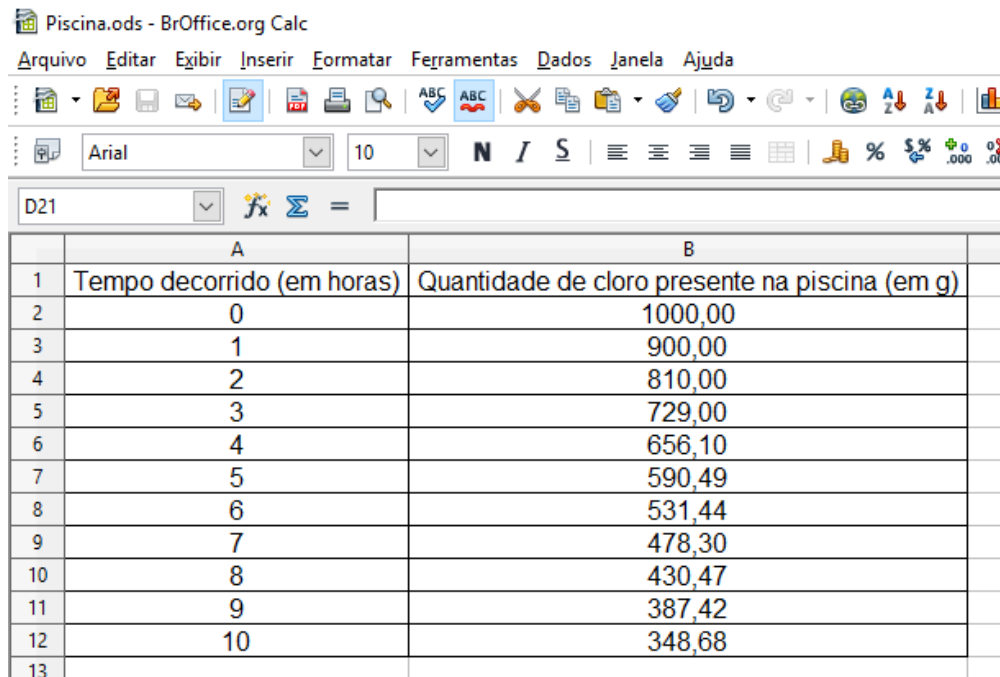
A representação gráfica da situação 6 é uma curva exponencial decrescente como as anteriores que tratavam da meia-vida de uma substância (Figura 16).

Figura 16: Gráfico referente à situação 6 – “Tabagismo”.



Para a tabela referente à situação 7 (Figura 17), acreditamos que a definição da fórmula facilite o preenchimento da tabela. Tal situação fora generalizada no item c da atividade 7 – PARTE I.

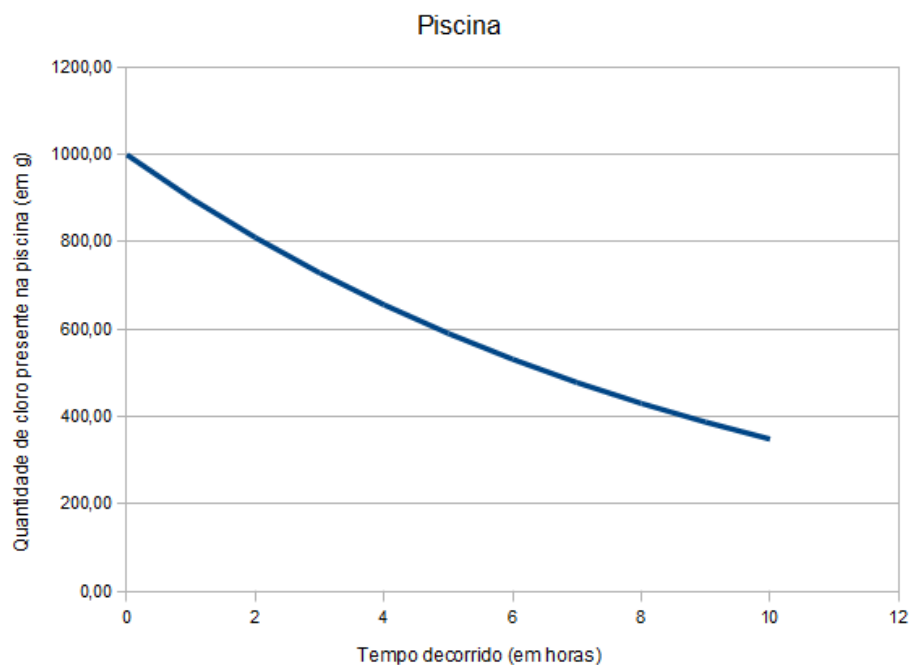
Figura 17: Tabela referente à situação 7 – “Piscina”.



	A	B
1	Tempo decorrido (em horas)	Quantidade de cloro presente na piscina (em g)
2	0	1000,00
3	1	900,00
4	2	810,00
5	3	729,00
6	4	656,10
7	5	590,49
8	6	531,44
9	7	478,30
10	8	430,47
11	9	387,42
12	10	348,68
13		

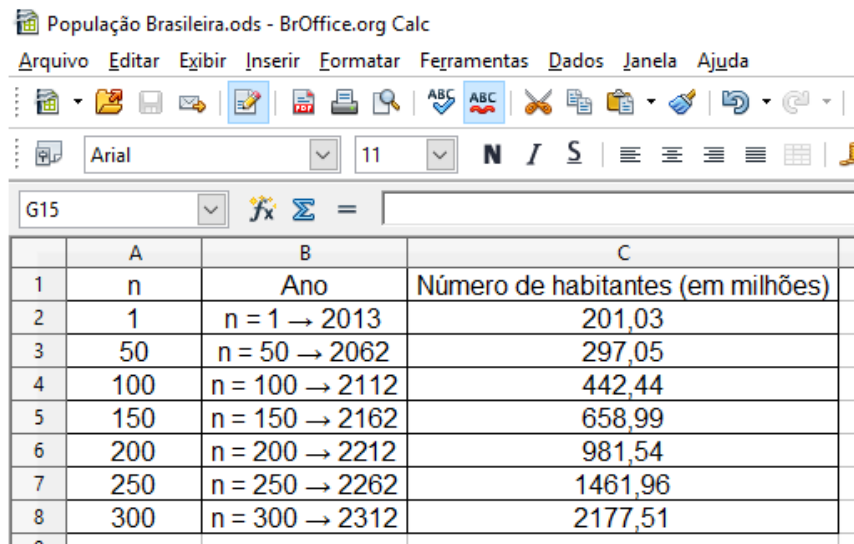
A quantidade de cloro na piscina diminui 10% da quantidade restante com o decorrer do tempo, pois água pura continua sendo colocada na piscina e o excesso eliminado. Assim, a curva exponencial é decrescente (Figura 18).

Figura 18: Gráfico referente à situação 7 – “Piscina”.



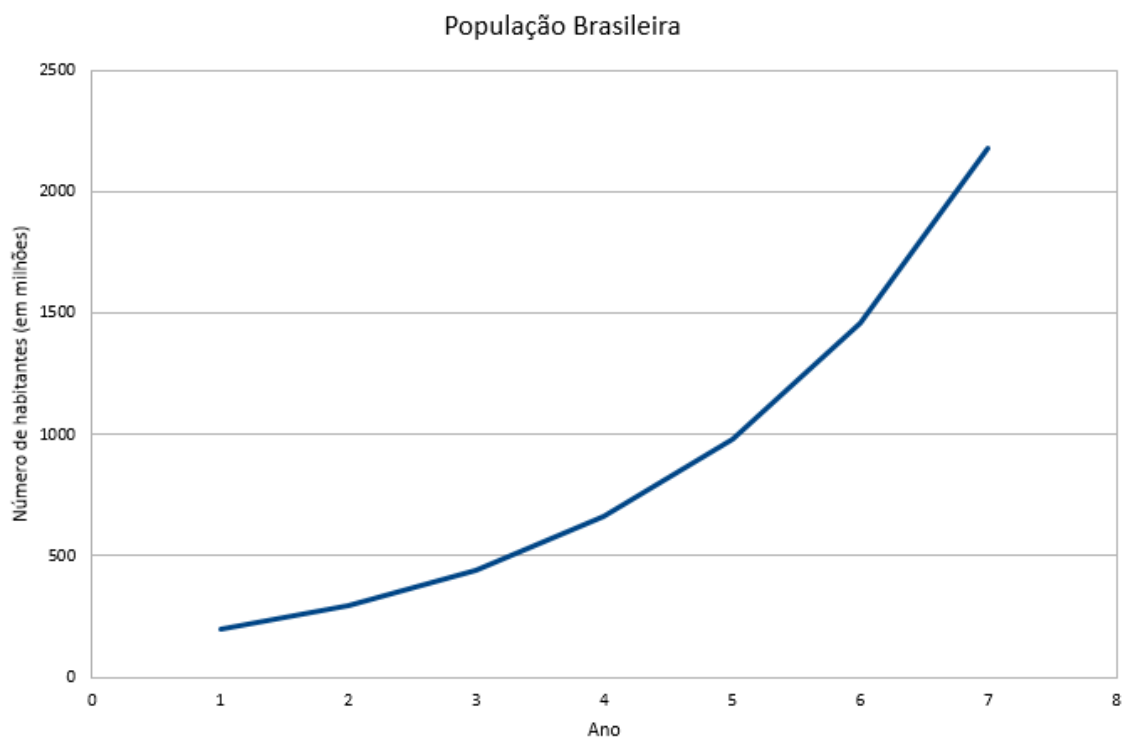
Para a última tabela, “população brasileira”, deve-se inserir uma coluna “n = 1, 2, 3, ...” para representar os anos 2013, 2014, 2015, ... (ver Figura 19) para que possamos construir sua representação gráfica (ver Figura 20). Assim como na situação da “poupança”, deve-se aumentar o tempo no eixo x para que se evidencie a curva exponencial.

Figura 19: Tabela referente à situação 8 – “População Brasileira”.



	A	B	C
1	n	Ano	Número de habitantes (em milhões)
2	1	n = 1 → 2013	201,03
3	50	n = 50 → 2062	297,05
4	100	n = 100 → 2112	442,44
5	150	n = 150 → 2162	658,99
6	200	n = 200 → 2212	981,54
7	250	n = 250 → 2262	1461,96
8	300	n = 300 → 2312	2177,51

Figura 20: Gráfico referente à situação 8 – “População Brasileira”.



Construídos todos os gráficos solicitados, ainda restam duas questões a serem respondidas: sobre o crescimento e decrescimento de cada gráfico e a relação entre a base da potência em cada uma das fórmulas que descrevem as situações, bem como o ponto de intersecção da curva com o eixo y no gráfico.

Sugere-se uma retomada sobre curvas crescentes e decrescentes, caso seja necessário. É importante que os alunos saibam analisar e diferenciar as curvas crescentes nas situações “Bactérias *E. Coli*”, “Poupança”, “Cheque Especial”, “População Brasileira” das decrescentes: “Acetilcisteína”, “Acidente Radioativo”, “Tabagismo”, “Piscina”. Além disso, acreditamos que com a retomada das fórmulas 2^t – Bactérias; $1500 \cdot (1,005)^t$ – Poupança; $1500 \cdot (1,135)^t$ – Cheque Especial e $0,4 \cdot (0,7)^t$ – Tabagismo; $1000 \cdot (0,9)^t$ – Piscina – (não solicitamos fórmula para as situações “Acetilcisteína” e “Acidente Radioativo”), os alunos possam identificar que o crescimento ou decrescimento está relacionado com as bases das potências das fórmulas encontradas, mais especificamente, se a base real da potência estiver entre 0 e 1, então teremos uma curva decrescente, ao passo que se a base for maior do que 1, a curva será crescente. Caso essa relação não seja estabelecida pelos alunos, sugere-se questionamentos até que evidenciem tal propriedade.

Na última questão, basta que o aluno perceba que ao atribuir o valor 0 (zero) para a variável t (representado no eixo das abscissas) - já que estamos discutindo a intersecção com o eixo y - a variável dependente será sempre a constante que multiplica a potência, uma vez que qualquer potência diferente de zero elevada a zero é 1 e 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Concluída a PARTE II da sequência de atividades, além das propriedades descritas nos parágrafos anteriores – crescimento e decrescimento e sua relação com a base a , intersecção da curva com o eixo das ordenadas; espera-se também que os alunos saibam identificar a imagem de uma função exponencial. Como o domínio é o conjunto dos números reais, a imagem é dada por $]0, +\infty[$.

2.3. Apresentação da função exponencial

Desenvolvidas as partes I e II da sequência de atividades proposta, é esperado que os alunos conheçam as principais características da função exponencial e seu comportamento. Nesse momento, daremos nome ao conteúdo trabalhado.

Na verdade, fizemos um trabalho numa ordem inversa aos apresentados pelos livros didáticos que costumam definir a função e depois propor exercícios de aplicação, trazendo muitas vezes dados fictícios não condizem com os dados reais.

Apresentar a definição de um conteúdo que os alunos já conhecem se torna muito mais fácil e significativo, pois ao definir a função exponencial, por exemplo, os alunos já associarão cada variável com o papel que cada uma assume numa situação. A familiarização com as expressões dá sentido à definição.

Segue a definição de função exponencial dada por lezzi e Dolce (2010):

Chama-se função exponencial qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.*

Da definição acima, há restrições em relação à base a . De fato:

- Se $a < 0$, nem sempre o número a^x é real, como, por exemplo, $(-3)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$;

- Se $a = 0$, tem-se

$$\begin{cases} \text{quando } x > 0, y = 0^x = 0 \text{ (função constante)} \\ \text{quando } x < 0, \text{ não se define } 0^x \text{ (por exemplo, } 0^{-3}) \\ \text{quando } x = 0, \text{ não se define } 0^0 \end{cases}$$

- Se $a = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é constante.

Com isso, da definição de função exponencial decorrem as propriedades:

- Na função exponencial cuja lei é $y = a^x$, tem-se que para $x = 0, y = a^0 = 1$, ou seja, o par ordenado $(0,1)$ satisfaz a lei $y = a^x$ para todo a ($a > 0$ e $a \neq 1$). Isso que dizer que o gráfico da função $y = a^x$ intersecta o eixo dos y no ponto de ordenada 1.

- Se $a > 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é crescente.

- Se $0 < a < 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é decrescente.

- Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se

$$a^{x_1} = a^{x_2} \leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ quaisquer que sejam os números reais } x_1 \text{ e } x_2.$$

- Como já visto, para todo $a > 0$ e todo x real, tem-se $a^x > 0$; portanto o gráfico da função definida por $y = a^x$ está sempre acima do eixo das abscissas.

Se $a > 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores negativos cada vez menores.

Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores.

Logo, pode-se afirmar que o conjunto imagem da função exponencial dada por $y = a^x$ é $Im = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

Convém nesse momento destacar que as funções exponenciais multiplicadas por uma constante positiva, $f(x) = b \cdot a^x$, são chamadas de “função do tipo exponencial”.

Reservamos mais 4 horas-aula para discussão com os alunos sobre as restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ e o comportamento das curvas para valores à esquerda do zero no eixo x .

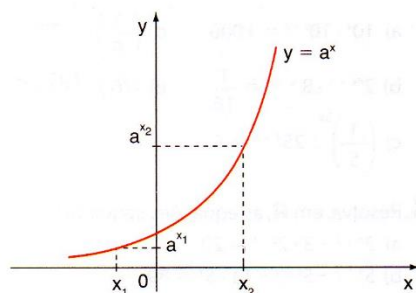
Note que a definição e as propriedades agora apresentadas, provavelmente já haviam sido identificadas pelos alunos, por meio do desenvolvimento da sequência de atividades proposta. Além disso, esse estudo pode ser útil para o estudo de equação e inequação envolvendo funções exponenciais.

A confecção e análise dos gráficos realizadas na segunda parte da sequência de atividades proposta permite um estudo mais detalhado da equação e inequação exponencial, assuntos que são tratados logo em seguida ao ensino da função exponencial, segundo o Currículo do Estado de São Paulo (ver Tabela 1).

Por muitas vezes, na resolução de inequações, acabamos decorando regras como “sentido da desigualdade se mantém para $a > 1$ e se inverte para $0 < a < 1$ ”. Mas o importante é esclarecermos a veracidade dessa afirmação, podemos adotá-la, desde que seja compreendida (Figura 21).

Figura 21: Propriedade para resolução de inequações exponenciais

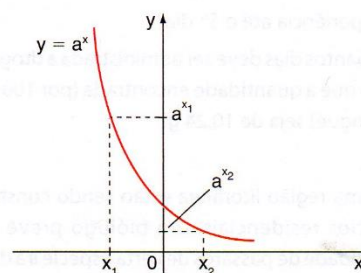
■ Se $a > 1$ (função crescente)



$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

O sentido da desigualdade se mantém.

■ Se $0 < a < 1$ (função decrescente)



$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

O sentido da desigualdade se inverte.

Assim, por exemplo, para resolver em \mathbb{R} a inequação $2^x > 64$, reduzimos os dois membros à mesma base:

$$2^x > 2^6$$

e, como a base é maior que 1, temos:

$$x > 6$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$$

Já para resolver, em \mathbb{R} , a inequação $0,3^{2x+3} > 1$, fazemos: $0,3^{2x+3} > 0,3^0$ e, como a base está entre 0 e 1, temos:

$$2x + 3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{3}{2}\}$$

Fonte: lezzi (2010, p. 148).

Acreditamos que após o desenvolvimento da sequência de atividades proposta neste trabalho, fique evidente que a inversão do sinal da desigualdade na resolução de inequações exponenciais, com $0 < a < 1$, ocorre por envolver uma expressão que trata de uma função exponencial decrescente, ou seja, para $x_1 < x_2$, tem-se $a^{x_1} > a^{x_2}$. Tal fato não ocorre quando tratamos de uma função exponencial crescente, na qual, para $x_1 < x_2$, tem-se $a^{x_1} < a^{x_2}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho abordamos situações reais que podem ser modeladas pela função exponencial para compor uma sequência de atividades.

Propusemos situações que trazem dados e informações atuais e utilizamos a Modelação Matemática como metodologia de ensino-aprendizagem, mostrando que elas atendem às etapas dessa estratégia de ensino - interação, matematização e modelo.

Ao discutir as soluções das situações relacionando-as com as três etapas acima citadas, exemplificamos o desenvolvimento da Modelação Matemática e, dessa forma, incentivamos o professor a identificar as oportunidades e as possibilidades de adotar a Modelação em suas práticas pedagógicas.

Destacamos a importância de selecionar outras fontes de consulta para a preparação das aulas para que o professor não se atenha somente aos livros didáticos que muitas vezes trazem dados desatualizados ou até fictícios, sem nenhuma conexão com a realidade, o que pode causar desinteresse por parte dos alunos.

A apresentação de um conceito, tratado inicialmente de forma intuitiva, se torna mais clara e compreensível. Ao apresentar o conceito, os alunos poderão estabelecer a relação entre as variáveis envolvidas identificando o modelo matemático que descreve tal relação.

Por fim, esperamos que este trabalho possa contribuir com a prática do professor em sala de aula, promovendo ao aluno o estímulo à discussão, argumentação, reflexão, compreensão e ao desenvolvimento de sua criatividade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. W., SILVA, K. P., VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática – uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M. S., HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2016.

BRASIL. **Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. PCN: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação. 2000.

BRASIL. **Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica**. PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2010.

CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C. O. **Matemática discreta: coleção PROFMAT**, Rio de Janeiro: SBM, 2014.

DANTE, L.R. **Matemática Contexto & Aplicações**. Vol.1. São Paulo: Ática, 2011.

GEROLÔMO, A. M. L., VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática e o Efeito Estufa**. IV Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. UEL, 2009.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. **Matemática Ciência e Aplicações**. Vol. 1. São Paulo: Saraiva, 2010.

LIMA, E., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

PIRES, R. F. **O uso da Modelação Matemática na construção do conceito de função**, Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 2009.

ANEXO

Função Exponencial para professores

Este anexo trata de alguns conhecimentos importantes que o professor necessita para aplicação dessa proposta.

Tratamos do Princípio da Indução Finita e, em seguida, da definição e caracterização da função exponencial.

Como garantir que as expressões encontradas em cada atividade proposta realmente modelam a situação para infinitos valores, visto que nos baseamos nos valores limitados àqueles contidos nas tabelas para encontrá-las? Por exemplo, na atividade 3 – Bactérias *E. Coli*, a expressão 2^t descreve o número de bactérias para quaisquer períodos de 20 minutos? Como provar isso? Usando o Princípio da Indução Finita!

Tomemos a definição dada por Morgado e Carvalho (2014, p. 3-4):

Suponhamos que desejemos provar uma propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n seja válida para todos os valores naturais de \mathbb{N} . Ou seja, desejamos provar que o conjunto $X = \{n | P(n)\}$, que é um subconjunto de \mathbb{N} é, na verdade, igual ao próprio \mathbb{N} . Pelo axioma da Indução¹⁰ basta mostrar que $1 \in X$ e que o sucessor de cada elemento de X também está em X . Em termos da propriedade $P(n)$, isto equivale a mostrar que:

- i. $P(1)$ é válida;*
- ii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n + 1)$. Verificados estes dois fatos, conclui-se a validade de $P(n)$ para todos os valores de n .*

O axioma da Indução pode ser reescrito como abaixo, usando a linguagem de propriedades (nesta forma, ele costuma ser chamado de Princípio da Indução Finita ou da Indução Matemática):

¹⁰ Axioma da Indução: Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, $n + 1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Suponhamos que

- i. $P(1)$ é válida.
- ii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n + 1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Morgado e Carvalho (2014, p. 4-5) ainda trazem que:

A verificação de que $P(1)$ é válida costuma ser chamada de caso base de uma demonstração por indução, enquanto a demonstração de que a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n + 1)$ é chamada de passo de indução. O passo de indução costuma gerar confusão no primeiro contato com as demonstrações por indução. Pode parecer, à primeira vista, que estamos usando, na demonstração, exatamente aquilo que desejamos provar (ou seja, $P(n)$). Na verdade, o segundo passo requer a prova da implicação $P(n) \rightarrow P(n + 1)$. Como ocorre na prova de qualquer implicação, isto é feito admitindo a validade do antecedente, ou hipótese (neste caso chamada de hipótese de indução) $P(n)$ e mostrando que, daí, decorre a validade do consequente, ou tese $P(n + 1)$.

No caso das bactérias *E. Coli*, tem-se:

- i. $P(1)$ significa que após um período de 20 minutos existem duas bactérias, $2^1 = 2$. O que pode ser confirmado pelo gráfico.
- ii. Suponha que para algum $t \in \mathbb{N}$, $P(t)$ é verdadeira, isto é, para t — ésimos períodos de 20 minutos, tem-se 2^t bactérias formadas. Como, por hipótese, cada bactéria se biparte a cada 20 minutos, então o número de bactérias formadas será sempre o dobro das bactérias há 20 minutos. Logo, após $(t + 1)$ períodos de 20 minutos, teremos $2 \cdot 2^t = 2^{t+1}$, ou seja, 2^{t+1} bactérias formadas.

Conclui-se, portanto, que $P(t + 1)$ é verdadeira e assim, por indução, a proposição vale para qualquer $t \in \mathbb{N}$, o que significa que após t períodos de 20 minutos, tem-se 2^t bactérias formadas.

Para apresentação da definição, tomemos o conceito dado por Lima (2012, p. 201-202):

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$,

deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- 2) $a^1 = a$;
- 3) $x < y \rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$;
- 4) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente;
- 5) A função exponencial é contínua;
- 6) A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

E como ter certeza que o modelo adequado para um determinado problema é uma função exponencial? Para isso devemos analisar se o crescimento (ou decrescimento) da função se dá de modo geométrico, é preciso saber quais são as propriedades características dessa função. Vejamos então a caracterização da função exponencial mais uma vez dada por Lima (2012, p.207-208):

Teorema: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
- (2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- (3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos as implicações $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$. A fim de mostrar que $(1) \rightarrow (2)$ observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nr x) = f(mx) = f(x)^m, \text{ logo } f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r.$$

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que $(1) \rightarrow (2)$ suponhamos, a fim de fixar ideias, que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente). Então, pelo Lema I,

existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $r < x$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que (1) \rightarrow (2). As implicações restantes, (2) \rightarrow (3) e (3) \rightarrow (1) são óbvias.

Dessa forma, temos que $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $h(x) = (1,5)^x$, com $x \in \mathbb{R}$ são exemplos de função exponencial. Mas e as funções $f(x) = 2 \cdot 3^x$, $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$, com $x \in \mathbb{R}$; é uma função exponencial? Na verdade não há um nome específico para uma função exponencial multiplicada por uma constante positiva, mas o termo “função do tipo exponencial” para referir-se à função $g(x) = b \cdot a^x$ - definida logo a seguir - é adotado pelo IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) e, por isso, também adotaremos-lo nessa pesquisa.

Vejamos a definição e a caracterização de uma função do tipo exponencial dada por Lima (2012, p. 208-209):

Dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \text{ e } \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h , mas não de x . Mostraremos agora que vale a recíproca.

Lema 1: Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de \mathbb{R}^+ existe alguma potência a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.

Teorema (Caracterização das funções do tipo exponencial): *Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h , mas não de x . Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: *Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x . Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, obtemos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, com $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independente*

de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar.