UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE LADRILHAMENTO COM POLÍGONOS REGULARES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

ANTÔNIO CLÁUDIO GUMIERI

SÃO CARLOS SP
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE LADRILHAMENTO COM POLÍGONOS REGULARES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao programa de pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.
Orientador: Prof. Dr.José Antonio Salvador

SÃO CARLOS SP
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Antonio Claudio Gumieri, realizada em 28/02/2018:

Prof. Dr. Jose Antonio Salvador
UFSCar

Érica Filletti
Prof. Dr. Érica Regina Filletti Nascimento
UNESP

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

DEDICATÓRIA

Ao Todo Poderoso, construtor de todas as coisas, aos meus pais, a minha esposa, a meus filhos e a minha netinha por estarem sempre presentes em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Antônio Gumieri e Mercedes Maldonado Gumieri que sempre lutaram pelo desenvolvimento intelectual dos filhos. Ao meu irmão José Carlos (Calu), poeta e filósofo, que tão cedo nos deixou, pela visão do ali quando eu olhava tão longe. A minha esposa Eliana, aos meus filhos Claudinho (Call), Tathiana e André, tão importantes nos meus amanheceres e a minha netinha Mariah Clara, alegria das minhas alegrias (que só me atrapalhava).

Agradeço ainda ao Prof. Dr. José Antonio Salvador por sua dedicada orientação e amizade. Ao professor Pedro Luiz Aparecido Malagutti pela preocupação amiga com esse mestrando e aos professores do PROFMAT-PPGECE pelas brincadeiras matemáticas de somar em soluções.

“Não há educação, sem educação.”

(Guma)

“A gente aprende, para mais tarde errar sabendo.”

(Guma)

“Meia dor não dói só metade.”

(Guma)

“Se você tivesse acreditado nas minhas
brincadeiras de dizer verdades, teria ouvido
verdades que teimo em dizer brincando. Muitas
vezes falei como palhaço, mas jamais duvidei da
sinceridade da plateia que sorria”

(Charles Chaplin)

RESUMO

Esta pesquisa apresenta uma proposta de contextualização para o ensino da Geometria, para alunos do Ensino Fundamental II, explorando os conceitos de polígonos regulares. Em primeiro lugar, alguns conceitos teóricos sobre o assunto foram apresentados aos alunos, com o objetivo de estimular o interesse pela investigação nesse campo da Geometria. Para contextualizar esse conhecimento, foi desenvolvida a ideia de ladrilhamento do plano: os alunos receberam peças no formato de polígonos regulares usando-os para ladrilhar um plano. Observou-se que os alunos se interessaram por saber mais sobre a história do ladrilhamento, como também sobre as diferentes formas que as peças poderiam ser organizadas.

Palavras-chave: ladrilhamento do plano, polígonos regulares, Geometria.

ABSTRACT

This research presents a proposal of contextualizing Geometry teaching, for Elementary School (stage II) students, exploring the concepts of regular polygons. First of all, some theoretical concepts about the subject were presented to the students, with the aim of simulating their interest for investigation in this Geometry field. To contextualize this knowledge, it was developed the idea of tessellation: students were presented to several parts in the format of different regular polygons, to use them to tile a plane. It was observed the students were interested to know more about the history of tessellation, as well as how could the tiles be arranged in different formats.

Keywords: idea of tessellation, regular polygons, Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Objetivo principal deste trabalho é fazer com que os alunos manipulem os polígonos regulares (moldes distribuídos a eles). A aplicação das atividades foi para avaliar os alunos, se observaram as características comuns e diferentes nos polígonos e se identificaram os tipos de ladrilhamentos bem-comportados (regulares e semirregulares).

As mudanças que se configuram no sistema educativo brasileiro, convidam educadores a repensar suas práticas educativas, com a possibilidade de interação entre as diferentes ciências, através da interdisciplinaridade e contextualização no ensino. Nesse sentido vivenciamos na prática o encontro entre o ensino de Matemática e Artes, possibilitando transcender a barreira imposta pelas disciplinas, que limitam e tornam estanques os espaços em que atuamos. Nessa proposta foi possível agregar o uso de materiais de fácil manuseio, o que ajustou o ensino e o aprendizado ligando o cotidiano à arte, assumindo a mesma como interdisciplinaridade auxiliar (Japiassu, 1976) explorando as diferentes obras de pintores brasileiros e conceitos da geometria. Outro enfoque que nos faz repensar e vivenciar as práticas interdisciplinares é a responsabilidade que temos com os nossos educandos, os quais têm meios atrativos de busca pelas informações, sendo a internet e as redes sociais, concorrentes natos a demostrarem o quanto estanque se encontram os espaços educativos. Surge a necessidade de vivenciar outras formas de educação, como mostrar aos nossos estudantes a possibilidade de aproximação entre os diferentes saberes com atividades distintas, favorecendo ao uso de materiais concretos e novas abordagens, fugindo da normalidade do ensino tradicional, aproximando as referidas áreas.

Este trabalho apresenta os resultados das atividades aplicadas na Escola Estadual “Doutor João Gabriel Ribeiro” em São José do Rio Pardo, interior do estado de São Paulo, como parte dos requisitos para a conclusão do Mestrado Profissional, desenvolvido no Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos UFSCAR, São Carlos, SP.

A proposta do trabalho e aplicação das atividades diferenciadas em sala de aula auxiliaram no desenvolvimento das habilidades dos alunos, aumentando a motivação e a aprendizagem dos mesmos no estudo da Geometria.

Segundo ALMEIDA (2010):

> *A Geometria representa uma parte do conhecimento matemático de fundamental importância, com uma vasta aplicabilidade. No entanto, apresenta inúmeros problemas relacionados com seu ensino e sua aprendizagem, tanto nas metodologias utilizadas pelos professores de Matemática quanto na efetiva compreensão por parte dos alunos, criando assim lacunas no seu ensino.*

Os conceitos geométricos, aplicados de forma lúdica, questionaram as capacidades dos alunos, em buscar meios de resolver problemas práticos, desenvolvendo suas habilidades cognitivas.

MUNIZ (2004 p. 88) faz as seguintes indagações:

> *Tenho buscado no dia-a-dia explorar com meus alunos os conceitos geométricos? Não tenho evitado tratar deste assunto com eles, ficando quase todo tempo tratando apenas dos números e das suas operações? Tenho insegurança quanto aos conceitos geométricos e receio propor trabalhos implicando construções geométricas? O meu ensino de Geometria tem sido quase exclusivamente uma memorização de terminologia das figuras e entes geométricos? Busco ver a Geometria fora das formas e figuras?*

De acordo com o autor, o professor deve refletir sobre os conceitos aplicados quando for propor atividades de construções geométricas uma vez que a utilização de materiais como ferramentas lúdicas, trará benefícios ao educando.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais PCNs (BRASIL, 1997, p.39), temos as seguintes afirmações:

> *Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.*

Estabelecendo propriedades a partir do mundo real, foi oportunizada ao aluno uma melhor interação para analisar e interpretar os conceitos geométricos.

No presente trabalho, foi feita a exploração dos objetos do mundo físico, o ladrilhamento com polígonos regulares, permitindo ao aluno estabelecer conexões entre o mundo real e a Geometria.

A geometria está por toda parte, sendo possível observamos inúmeras formas geométricas regulares e irregulares. Esta área do conhecimento passou por grandes processos de transformação, desde a geometria clássica euclidiana até a geometria dos dias atuais.

Este trabalho está embasado no estudo dos polígonos regulares, notadamente no ladrilhamento do plano conhecido como ***Mosaico.***

Segundo SILVEIRA (2005 p.16), a palavra mosaico significa o estudo do preenchimento do plano com figuras geométricas ou informais e vem do Latim ***"musa"*** cuja origem se encontra entre as primeiras manifestações culturais do homem.

De acordo com a autora, o Mosaico ou tesselação ou recobrimento do plano, é um padrão de figuras planas que cobre inteiramente o plano sem superposições das figuras nem espaços vazios entre elas. Dizemos que as peças ou tesselas cobrem ou pavimentam o plano e que o padrão resultante é uma tesselação, mosaico, ladrilhamento ou pavimentação do plano.

Segundo Dias e Sampaio (2010. p. 11):

> *Os antigos egípcios, por exemplo, desde 4.000 a.C. usavam ladrilhos decorativos na construção de templos e nas grandes pirâmides. Mais recentemente, os árabes criaram belíssimos* ***ladrilhamentos*** *como os encontrados em Alhambra, um conjunto de palácios da Espanha, construído por mouros e cristãos nos séculos XIII, XIV e XV. Tipos diferentes de ladrilhamentos foram criados e recriados por diversas civilizações, e eventualmente introduzidos nas Américas pelos próprios espanhóis.*

A arte de ladrilhar é milenar, uma vez que os antigos povos utilizavam essas técnicas para decorar, pavimentar estradas e paredes, tornando os locais arquitetonicamente mais chamativos. (DIAS E SAMPAIO 2010, p.11).

FIGURA 1: ALHAMBRA É A MARCA DA PRESENÇA ÁRABE NA HISTÓRIA ESPANHOLA. LOCALIZADO EM GRANADA, NA PARTE SUL DO PAÍS, REÚNE A ARQUITETURA ISLÂMICA DO SÉCULO XIV E A ARQUITETURA CRISTÃ DO SÉCULO XVI.
FONTE: Adaptação Dias e Sampaio - 2010 p.11

Como vimos nas referências históricas, as habilidades de ladrilhar o plano com material concreto, no formato abstrato ou de figuras geométricas planas, podem ajudar a desenvolver estratégias adequadas em busca de soluções para problemas geométricos de maneira que o aluno possa utilizar formas e propriedades geométricas no dia a dia.

Segundo o site MAT.UNB[1] (Universidade Brasília 2017), o mosaico é aplicado na disciplina de Geometria, podendo abordar os seguintes conceitos:

- Identificação dos polígonos e de seus elementos.
- Comparação dos polígonos.
- Classificação dos polígonos pelos seus lados.
- Congruência e/ou paralelismo dos lados.
- Classificação dos polígonos pela sua convexidade.
- Propriedades dos polígonos.
- Estudo dos polígonos pela sua propriedade de gerar mosaicos.
- Associação de polígonos pelas suas propriedades.
- Construção de figuras planas.
- Comparação de figuras planas.
- Congruência de figuras planas.
- Equicomposição de polígonos.
- Estudo de polígonos gerados por peças de mosaicos.
- Estudo dos ângulos presentes nos mosaicos.
- Geração de novos mosaicos e estudo de suas propriedades.
- Estudo dos polígonos que não geram mosaicos unicelulares.
- Simetrias dos mosaicos.
- Geração de mosaicos com linhas formadas por um mesmo friso repetido.

Para nosso trabalho, levaremos em consideração alguns conceitos citados acima e, no decorrer do projeto, definiremos algumas propriedades para elaboração do ladrilhamento do plano com polígonos regulares.

[1] UNB. Site MAT.UNB. Mosaico. Laboratório de ensino a matemática. Disponível em <https://goo.gl/rCsUoA>, acesso 2017

CAPITULO 2 – O ENSINO DA GEOMETRIA

Geometria é uma palavra que resulta dos termos gregos "***geo***" (terra) e "***métron***" (medir), cujo significado em geral é designar propriedades relacionadas com a **posição e forma de objetos no espaço.**
A Geometria é a área da Matemática que se dedica a questões relacionadas com forma, tamanho, posição relativa entre figuras ou propriedades do espaço, dividindo-se em várias subáreas, dependendo dos métodos utilizados para estudar os seus problemas.

Este segmento da matemática aborda as leis das figuras e as relações das medidas das superfícies e sólidos geométricos. São utilizadas relações de medidas como as amplitudes de ângulos, volumes de sólidos, comprimentos de linhas e áreas das superfícies.

Existem vários tipos de geometria, como a **geometria descritiva**, que estuda a representação de objetos espaciais em um plano, e a **geometria plana**, uma geometria do âmbito bidimensional, pois é definida sobre um plano. A **geometria das figuras planas** é também conhecida como planimetria, enquanto a dos sólidos geométricos é conhecida como estereometria, denominadas geometria euclidiana e também as geometrias não euclidianas (hiperbólica e elíptica).

De acordo com a grade curricular do estado de São Paulo, a Geometria diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca (SÃO PAULO, 2011, p.39)**.**

2.1 PROPOSTA PEDAGÓGICA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO

As atividades foram elaboradas com o objetivo de atingir as habilidades propostas pelo Currículo do Estado de São Paulo para o 7º ano do Ensino Fundamental, são elas:

- Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas
- Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos
- Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia
- Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de *n* lados
- Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas
- Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista. (SÃO PAULO, 2012, P.59).

Nessa perspectiva, antes de aplicar as atividades. Fizemos um estudo preliminar de vários tópicos com os que apresentaremos a seguir

2.2 CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA

No estudo de Geometria utilizamos vários instrumentos de medida como: Régua, compasso, transferidor e etc...

2.2.1 COMPASSO

Definição 1: **O compasso é um instrumento composto de dois braços unidos por um eixo comum na parte superior, empregado para tomar medidas, traçar circunferências, etc.**

FIGURA 2: INSTRUMENTO DE MEDIDA PARA TRAÇAR CIRCUNFERÊNCIA.

2.2.2 SEMIRRETAS

Definição 2: Um ponto P da reta r a divide em duas semirretas de mesma origem P, porém, de sentidos opostos.

Desenhando uma reta *r* e sobre ela marcando um ponto *P*, notamos que a reta *r* fica dividida em duas partes: uma à direita do ponto P e uma à esquerda do citado ponto. Chamaremos cada uma das partes de semirretas e o ponto P de origem das semirretas.

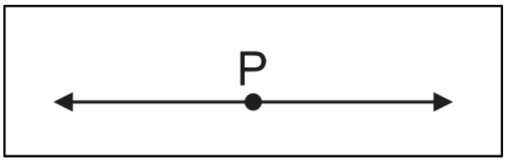


FIGURA 3: SEMIRRETA

Para que possamos melhor identificar as semirretas, podemos marcar, na reta *r*, à direita e à esquerda do ponto *P*, dois outros pontos:

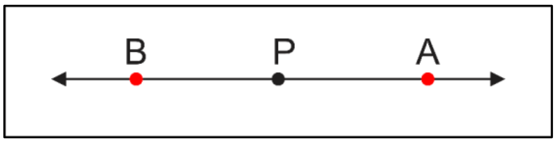


FIGURA 4: SEMIRRETA

E indicamos por semirreta *PA* por $(\overrightarrow{PA})$ à direita de *P* e semirreta *PB* por $(\overrightarrow{PB})$à esquerda de *P*. Podemos estender a noção de semirreta para os conceitos de ângulos, que serão estudados no decorrer deste trabalho.

2.2.3 SEGMENTOS DE RETA

Definição 3: A parte da reta r contida entre dois de seus pontos A e B, disjuntos, juntamente com os dois pontos, denomina-se segmento de reta.

Sejam *A* e *B* dois pontos distintos da reta r:

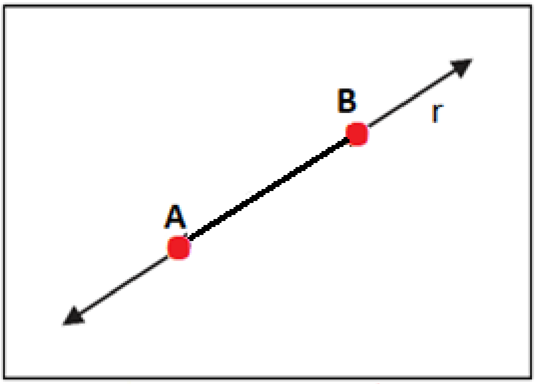


FIGURA 5: SEGMENTO DE RETA

O conjunto de pontos (pedaço da reta) formado pelos pontos *A* e *B* e por todos os pontos que estão entre A e B denomina-se segmento de reta, que se indica por $\overline{AB}$.

No segmento de reta $\overline{AB}$, os pontos *A* e *B* são denominados extremidades do segmento e a reta *r* que o contém denomina-se reta suporte.

Pode-se dizer então:

- O segmento tem começo e fim;
- O segmento é um subconjunto da reta; ($\overline{AB} \subset$ r)
- Há infinitos pontos entre as extremidades de um segmento.

2.2.4 SEGMENTOS CONSECUTIVOS

Definição 4: Se dois segmentos de reta têm uma extremidade comum, são denominados segmentos consecutivos.

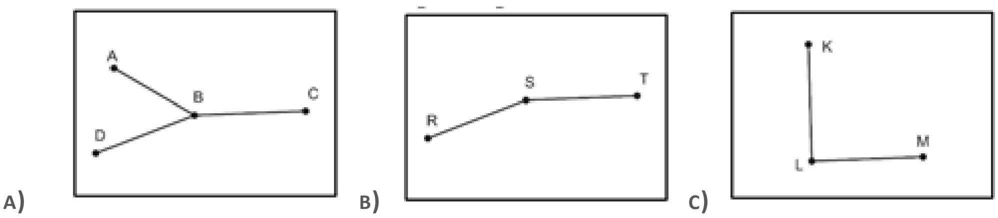


FIGURA 6: SEGMENTOS CONSECUTIVOS.

Os segmentos AB e BC, DB e BC, AB e BD (fig 6a), são consecutivos, assim como $\overline{RS}$ e $\overline{ST}$ $(6b)$ e KL e LM (6c).

2.2.5 SEGMENTOS COLINEARES

Definição 5: Dois ou mais segmentos de reta contidos uma mesma reta r, s determinam um conjunto de segmentos colineares.

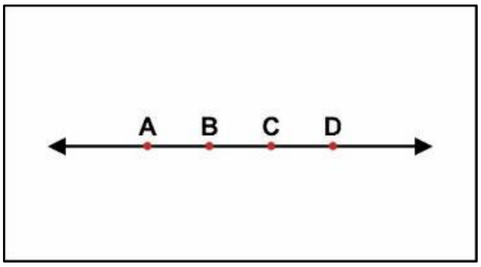


FIGURA 7: SEGMENTOS COLINEARES

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são segmentos colineares, pois estão contidos na mesma reta r.

2.2.6 SEGMENTOS ADJACENTES

Definição 6: Se dois ou mais segmentos de reta estão contidos numa mesma reta r (colineares) e são também consecutivos, eles determinam um conjunto de segmentos adjacentes.

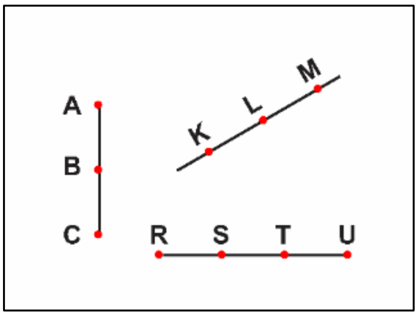


FIGURA 8: SEGMENTOS ADJACENTES.

Na figura anterior são segmentos adjacentes $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{KL}$ e $\overline{LM}$, $\overline{RS}$ e $\overline{ST}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SU}$.

2.2.7 SEGMENTOS CONGRUENTES

Definição 7: Dois segmentos que tenham a mesma medida, na mesma unidade, são denominados segmentos congruentes. (segmentos não são iguais, as medidas sim)

Tomando-se como unidade de medidas 

. Considere-se inicialmente os segmentos AB e CD. Com o compasso vamos verificar quantas vezes 

"cabe" em $\overline{AB}$ e quantas vezes "cabe" em CD.

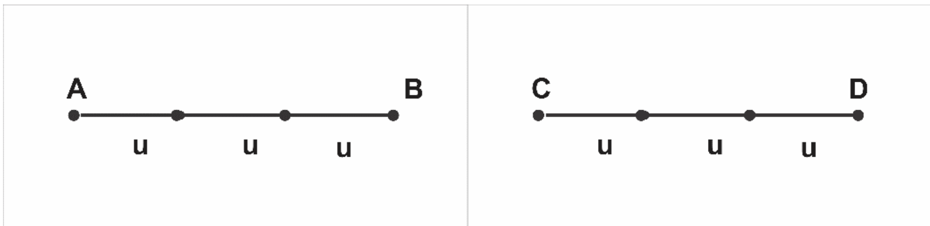


FIGURA 9: MEDIDA DE UM SEGMENTO

Conclui-se que AB = 3u e CD = 3u, isto é, os segmentos AB e CD têm a mesma medida. Diz-se então que AB e CD são segmentos congruentes e indicamos AB≡CD (AB é congruente com CD).

2.2.8 COMPARAÇÃO DE SEGMENTOS

Vamos comparar o comprimento (medida) de dois segmentos de reta, quaisquer.

Considere dois segmentos AB e CD. Firme as duas pontas do compasso nas extremidades do segmento AB. Leve o compasso, sem modificar a sua abertura sobre o outro segmento CD, fazendo uma ponta coincidir com o extremo C e a outra coloque sobre a semirreta CD. Seja P o ponto da semirreta CD determinado pela ponta do compasso, três casos podem acontecer:

a) P é interior ao segmento CD (P pertence ao segmento CD)

b) P coincide com o extremo D (P coincide com D)

c) P pertence ao prolongamento de CD (P pertence à semirreta CD)

Diz-se para cada caso, respectivamente, que:

- O segmento AB é menor do que o segmento CD (AB<CD).
- O segmento AB é congruente com o segmento CD (AB≡CD).
- O segmento AB é maior do que o segmento CD (AB>CD)

Obs. Para segmentos congruentes não se deve dizer que são iguais, pois segmentos são conjuntos de pontos, e para que fossem iguais precisariam ser constituídos dos mesmos pontos. Um segmento só é igual a si mesmo.

2.2.9 MEDIDA DE UM SEGMENTO

Definição 8: A medida de um segmento (não nulo) é um número real positivo, associado ao segmento, que é denominado, o seu comprimento.

Considere-se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ das figuras 9 e 10.

FIGURA 10: MEDIDA DO SEGMENTO AB

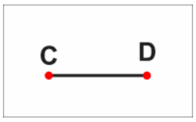


FIGURA 11: MEDIDA DO SEGMENTO CD

Usando um compasso, verifica-se que o segmento $\overline{CD}$ “cabe” quatro vezes no segmento $\overline{AB}$.

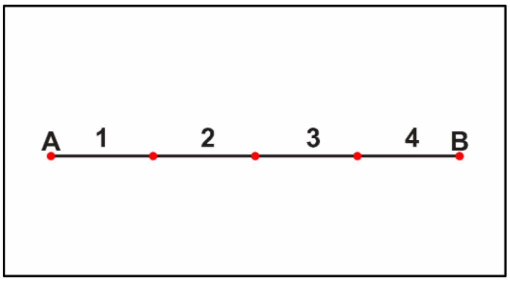


FIGURA 12: O SEGMENTO CD CABE 4 VEZES EM AB

Diz-se que:

- A medida do segmento AB é igual a 4. Tomando como unidade a medida do segmento CD, AB= 4 CD.
- Unidade: é o segmento usado na comparação com um segmento de reta dado, que se pretende medir.

Considerado como medida. 

e observando a figura abaixo, tem-se:

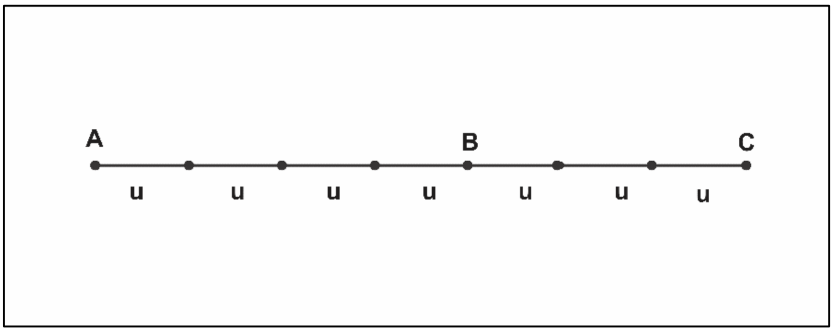


FIGURA 13: MEDIDA DE UM SEGMENTO

Temos

AB=4u

BC=3u

AC=AB+BC=4u+3u=7u

Em geral, associa-se um número (medida) a um segmento estabelecendo a razão (quociente) entre este segmento e outro segmento tomado como unidade.

2.2.10 PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Definição 9: O ponto que divide um segmento em dois segmentos congruentes é denominado ponto médio do segmento.

Na figura, o ponto M divide o segmento AB em dois segmentos congruentes, pois AM = 2u e MB= 2u

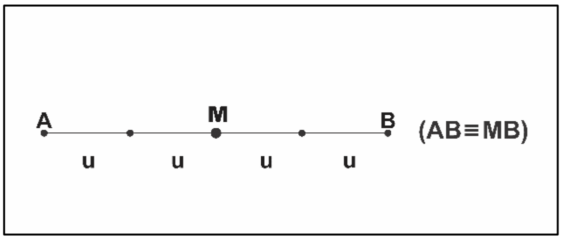


FIGURA 14: MEDIDA DE UM SEGMENTO

Diz-se que o ponto M é ponto médio de $\overline{AB}$.

CAPITULO 3 – ÂNGULOS

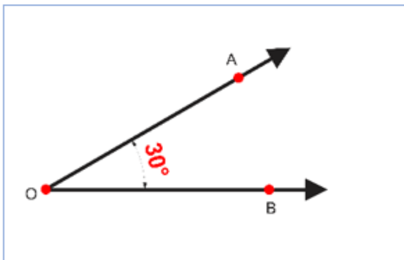
Neste capítulo, planejamos a sequência didática envolvendo noções e conceitos e as terminologias geométricas que serão utilizadas durante todo o trabalho, pertinentes ao conteúdo curricular proposto para o 7º ano do Ensino Fundamental.

> **Definição 1: Se duas semirretas tiverem a mesma origem mas não estiverem contidas na mesma reta, então a sua reunião é um ângulo. As duas semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem comum das semirretas é chamado vértice do ângulo. Se as semirretas forem AB e AC, o ângulo será representado por BÂC ou CÂB.**

Para David Hibert[2] (1862 -1943), ângulo é a figura ou região angular limitada por um par de semirretas com origem comum. Todas as esquinas do mundo são ângulos.

Ângulos geométricos ou simplesmente ângulo é a região entre duas semirretas de mesma origem.

Ainda, ângulo é a medida de abertura de duas semirretas que partem da mesma origem, conforme a figura 15. O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas OA e OB são os lados dos ângulos. Usa-se a notação AÔB para indicar o ângulo com vértice O e lados OA e OB.



$$m(A\hat{O}B) = 30°$$

FIGURA 15: ÂNGULO FORMADO POR DUAS SEMIRRETAS

Os ângulos estão sempre presentes em nossa vida e quase não nos damos conta. Encontram-se nos ponteiros das horas de um relógio e, conforme a hora que marcam os ponteiros, se afastando ou se aproximando, aumentando ou diminuindo a abertura entre si, isto é, o que varia é o ângulo (abertura) que se forma entre eles.

---

[2] David Hilbert (Königsberg, 23 de janeiro de 1862 — Göttingen, 14 de fevereiro de 1943) foi um matemático alemão. Foi membro estrangeiro da Royal Society.[2]. WIKIPEDIA Disponível: < https://goo.gl/PEqQOX> acesso: 08/03/2018.

A figura 16 mostra respectivamente os ângulos de $30°(\alpha)$ e $90°(\beta)$ indicados pelos ponteiros de um relógio.

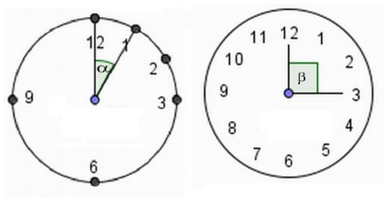


FIGURA 16: ÂNGULOS FORMADOS PELO PONTEIRO DE UM RELÓGIO

Os ângulos são observados nos cantos dos ladrilhos, das paredes, das folhas de papel, nas portas, lousa, etc.

Quando movimentamos uma tesoura, precisamos abri-la e fechá-la continuamente, aumentando ou diminuindo a abertura entre as lâminas, ou seja, variando os ângulos entre elas.

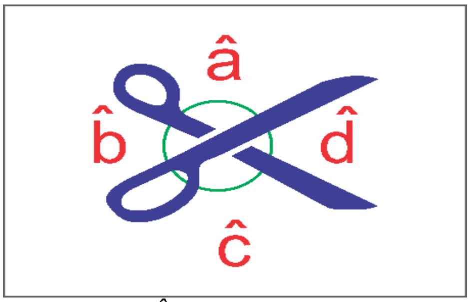


FIGURA 17: ÂNGULOS DE UMA TESOURA

Afinal, como construir um ângulo? Para compreender melhor o conceito de ângulos, usar-se-ão canudinhos de refrigerantes e desenhando os giros numa folha de papel, destacando os quatros elementos fundamentais do mesmo:

- O ponto de giro dobra do canudinho - Vértice do ângulo;
- O lado inicial do giro – Lado do ângulo;
- O tamanho da abertura do giro - Medida do ângulo;
- Lado final do giro – Lado do ângulo;

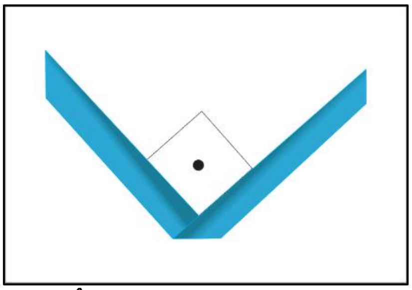


FIGURA 18: ÂNGULO DE 90° UTILIZANDO CANUDO

3.1 DETERMINAÇÃO DO ÂNGULO

Dados três pontos distintos, não colineares, X, Y, Z podemos determinar três ângulos distintos, bastando para isso, considerar para cada ângulo, um desses pontos como origem das duas semirretas possíveis.

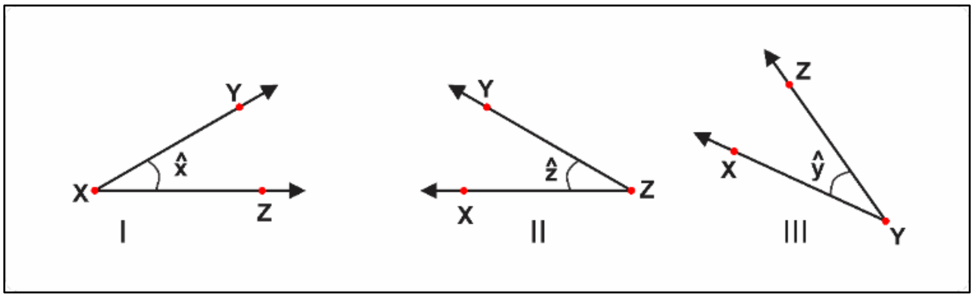


FIGURA 19: DETERMINAÇÃO DO ÂNGULO
(Notação: O Simbolo de ângulo é ∡)

De acordo com a figura 22, os ângulos determinados pelas semirretas são:

- Ângulo I – $Z\hat{X}Y$;
- Ângulo II – $X\hat{Z}Y$;
- Ângulo III – $X\hat{Y}Z$;

Para diferenciar qual abertura (ângulo) que se quer, coloca-se na região interna do ângulo um pequeno arco ou a letra correspondente ao vértice do ângulo, como nas figuras acima.

3.2 MEDIDA DE UM ÂNGULO

Conhecendo o grau de um ângulo.

Dada uma circunferência qualquer, desenha-se um ângulo cujo vértice seja o centro dela e os lados intersectando a mesma. Um ângulo que atenda a estas condições é chamado de ângulo central.

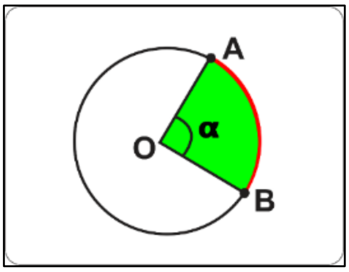


FIGURA 20: ÂNGULO CENTRAL

Construir-se-ão várias circunferências concêntricas (mesmo centro) traçando um ângulo central comum a todas.

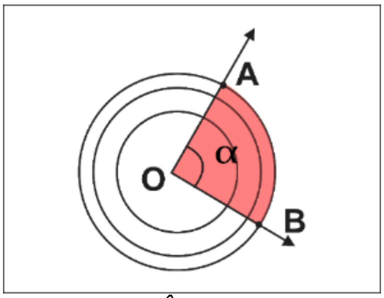


FIGURA 21: ÂNGULO CENTRAL

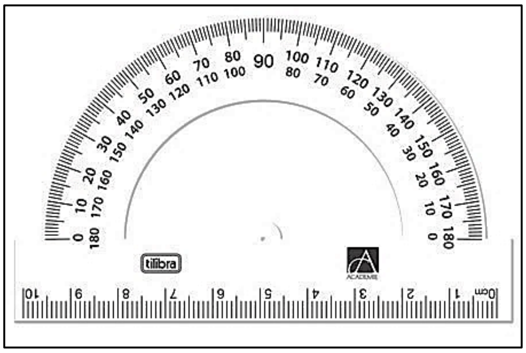
Limitando-se cada ângulo central à sua circunferência, ver-se-á que a abertura deles é a mesma, embora os lados dos ângulos (segmentos de reta) sejam diferentes, isto é, a medida de um ângulo depende exclusivamente da sua abertura.

Existem três unidades para se medir um ângulo: grau, grado e radiano. O foco deste estudo tomará como base a unidade GRAU, que é a mais usada na geometria.

3.3 TRANSFERIDOR

Um instrumento usado para fazer a medição do ângulo chama-se transferidor, feito geralmente de plástico ou acrílico em dois modelos básicos: um de 180º (semicircunferência) e outro de 360º (circunferência). Os elementos do transferidor são:

- Limbo: contorno da circunferência onde se localiza a graduação.
- Linha de fé: reta suporte do diâmetro da circunferência determinada pelo transferidor que passa por 0º e 180º.
- Centro: ponto de intersecção da linha de fé com o diâmetro da circunferência perpendicular a ela.



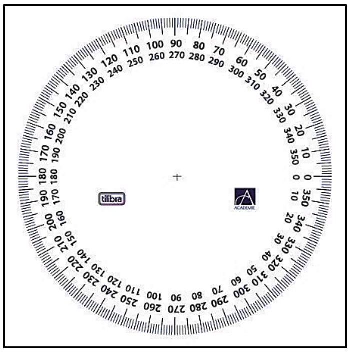


FIGURA 22: TRANSFERIDOR DE 180^0 E 360°
Fonte: Tilibra 2017

Quando duas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ se intersectam formando quatro ângulos de mesma medida (abertura), cada um deles é chamado de ângulo reto e sua medida é 90°. Uma volta completa em torno do vértice desses ângulos mede 360°.

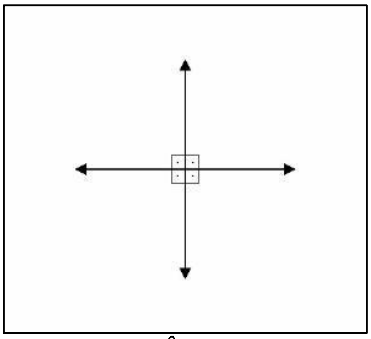


FIGURA 23: ÂNGULOS RETOS

Percebe-se então que um grau (1º) é o resultado da divisão do ângulo reto em 90 (noventa) partes congruentes, isto é, $1° = \frac{\hat{a}ngulo\ reto}{90} = \frac{90°}{90}$ ou seja, o grau é a nonagésima parte do ângulo reto.

As retas r e s que determinam os ângulos retos são chamadas de retas perpendiculares e denotamos por $r \perp s$.

3.4 CLASSIFICAÇÃO DE ÂNGULOS

a) Ângulo nulo: ângulo com medida igual a 0°

b) Ângulo reto: ângulo que mede exatamente 90º.

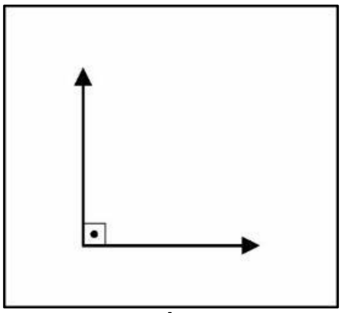


FIGURA 24: ÂNGULO RETO

O ângulo reto é um dos ângulos que mais se destaca no cotidiano. Ele aparece em todo canto como, por exemplo, em folhas de caderno, mesas retangulares, janelas, paredes etc.

c) Ângulo agudo: qualquer ângulo com medida menor do que 90º.

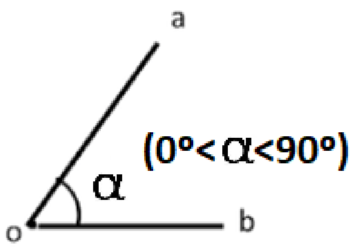


FIGURA 25: ÂNGULO AGUDO

d) Ângulo obtuso: todo ângulo de medida compreendida entre 90º e 180º.

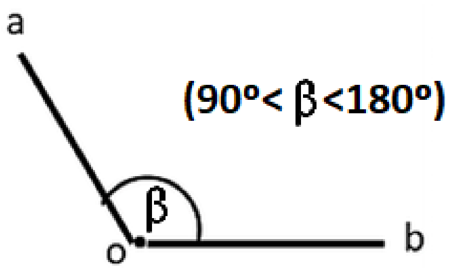


FIGURA 26: ÂNGULO OBTUSO

e) Ângulo raso ou de meia-volta: ângulo com medida igual a 180º. É formado por duas semirretas colineares de sentidos opostos.

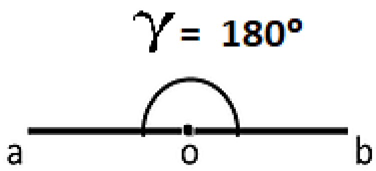


FIGURA 27: ÂNGULO RASO

f) Ângulo convexo: os ângulos reto, agudo e obtuso são chamados de ângulos convexos por serem menores ou iguais ao ângulo raso.

g) Ângulo côncavo: qualquer ângulo com medida compreendida entre 180° e 360°.

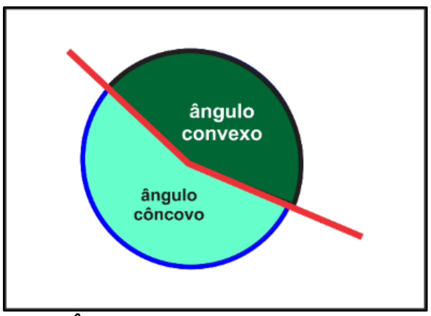


FIGURA 28: ÂNGULO CONVEXO E ÂNGULO CÔNCAVO

h) Ângulo de volta-inteira: ângulo com medida igual a 360º. Quando duas semirretas de mesma origem e mesmo sentido são coincidentes, elas podem ser consideradas lados de um ângulo de 360°.

i) Ângulos congruentes: dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida, ou seja, se forem sobrepostos, todos os seus pontos coincidirão. Para que dois ângulos sejam congruentes, basta que tenham a mesma medida (abertura); não há necessidade de estarem na mesma posição.

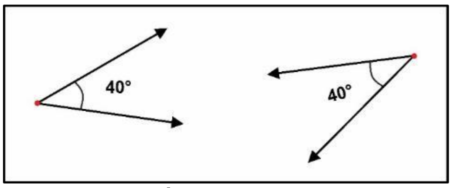


FIGURA 29: ÂNGULOS CONGRUENTES

3.5 POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE ÂNGULOS

- **Ângulos consecutivos:** dois ângulos são consecutivos quando possuem em comum o vértice e um dos lados.

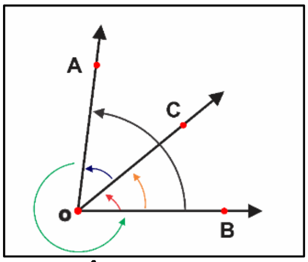


FIGURA 30: ÂNGULOS CONSECUTIVOS

São consecutivos os ângulos BÔC e CÔA; AÔB e BÔC. Obs.: Os ângulos BÔC e BÔA, além do vértice e do lado comum possuem pontos internos comuns.

3.6 ÂNGULOS CONSECUTIVOS ESPECIAIS

- **Ângulos consecutivos adjacentes:** são ângulos consecutivos que não têm pontos internos comuns.

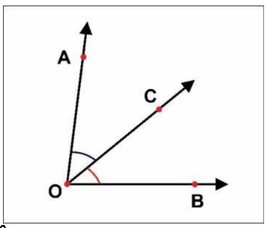


FIGURA 31: ÂNGULOS CONSECUTIVOS ADJACENTES
BÔC e CÔA não têm pontos internos comuns.

- **Ângulos adjacentes complementares:** Dois ângulos adjacentes são complementares quando os lados não comuns são perpendiculares entre si, ou seja, a soma de suas medidas é 90°. Assim o complemento de um ângulo é o ângulo que falta para que a soma das suas medidas seja 90°. O complemento de um ângulo de medida x (x<90º) é um ângulo de medida 90°– x.

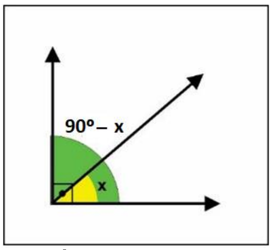


FIGURA 32: ÂNGULOS ADJACENTES COMPLEMENTARES

- **Ângulos adjacentes suplementares:** dois ângulos são adjacentes suplementares quando os lados não comuns têm a mesma reta suporte, ou seja, são semirretas de sentidos opostos. Logo a soma de suas medidas vale 180º. O suplemento de um ângulo de medida x (x<180º) é um ângulo de medida $180° - x$.

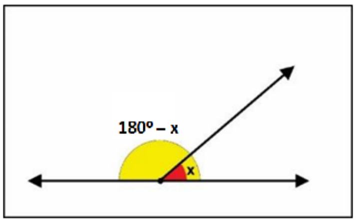


FIGURA 33: ÂNGULOS ADJACENTES SUPLEMENTARES

Suplemento de um ângulo é o ângulo que falta para que a soma de suas medidas seja 180°.

- **Ângulos adjacentes replementares:** dois ângulos são adjacentes replementares quando o vértice e os lados desses ângulos são coincidentes, isto é, a soma de suas medidas é 360°. O replemento de ângulo é o ângulo que falta para que a soma das medidas seja 360°.

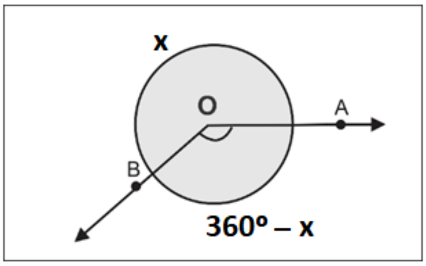


Figura 34: Os ângulos x e 360°-x são replementares.

AÔB e BÔA São ângulos replementares. O replemento de um ângulo de medida x é 360º- x.

Obs.: Alguns autores consideram ângulos consecutivos aqueles cujo lado comum está entre os lados não comuns (não possuem pontos comuns) e ângulos adjacentes, os ângulos consecutivos cujos lados não comuns estão na mesma reta (semirretas opostas).

3.7 ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

Dois ângulos são opostos pelo vértice (*O.P.V*), quando seus lados são semirretas colineares de sentidos opostos. Esses ângulos são congruentes.

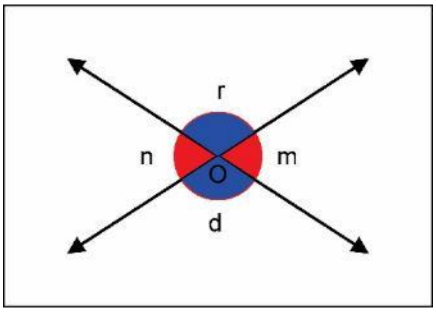


FIGURA 35: ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

Na figura 35, os ângulos $\hat{n}$ e $\hat{m}$, $\hat{r}$ e $\hat{d}$ são respectivamente congruentes

CAPITULO 4 – POLÍGONOS

O homem primitivo desenhava o que sentia e o que via. Eram as chamadas pinturas rupestres, desenhos naturais, livres, que ficaram registrados em muitas cavernas em diversas regiões do mundo. Assim nasce a arte pictórica.

O homem não sabia o que eram triângulos, quadrados ou hexágonos, pelo menos até sentir a necessidade de construí-los, quando passou a viver fora das cavernas. Com essa mudança, teve início uma nova e importante atividade: a de construir.

Inicialmente rústicas, as construções logo exigiram um aprimoramento nos traços e nas definições. O desenho tornou-se uma ferramenta básica nesse processo, aliada à valorização das formas como elemento de harmonia e beleza e foi na Grécia que se deu um importante passo na teorização da ciência das formas.

4.1 POLÍGONOS NA VIDA COTIDIANA

Andando pelas ruas pode-se ver uma grande quantidade de formas que lembram polígonos: uma placa de trânsito, uma faixa retangular de pedestres, um semáforo ou sinal internacional de "Pare" circundado por um octógono, etc. Também em casa observam-se numerosos objetos com formas poligonais: nos móveis, nos utensílios de cozinha, nos pisos, nos formatos de azulejos.

FIGURA 36: FAIXA DE PEDESTRE (RETÂNGULO)
Fonte: Google, < https://goo.gl/hosGxs>

FIGURA 37: SINAL DE TRÂNSITO (HEXÁGONO)

Segundo ALBINO (2011), A palavra polígonos vem do grego, em que ***poli*** significa muitos e ***gono*** significa ângulos.

4.2 LINHAS POLIGONAIS

As linhas poligonais são formadas por segmentos de retas, as que têm suas extremidades livres são linhas poligonais abertas (Figura 38), e as que não têm as extremidades livres são linhas poligonais fechadas (Figura 39).

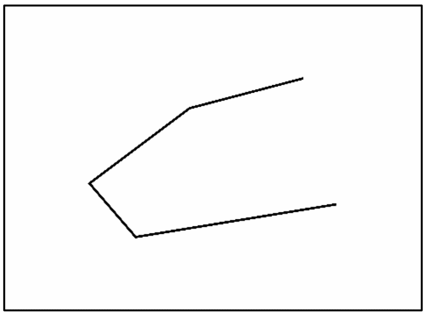


FIGURA 38: LINHA POLIGONAL ABERTA

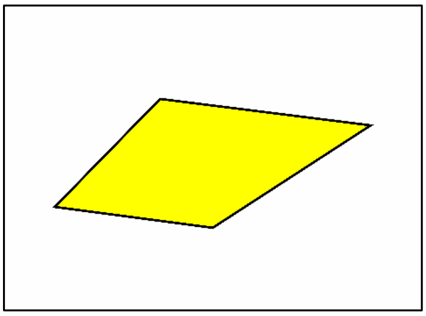


FIGURA 39: LINHA POLIGONAL FECHADA

4.3 O QUE SÃO POLÍGONOS?

Definição 1: Polígonos são figuras geométricas planas formadas pela reunião de uma linha poligonal fechada com a sua região interna.

Os polígonos podem ser classificados em convexos ou não convexos. Um polígono se diz convexo quando todos os seus ângulos internos são menores do que 180°.

Quando um polígono possuir pelo menos um ângulo interno maior do que 180° ele é denominado polígono não convexo (côncavo).

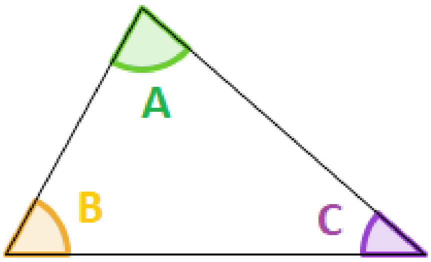


FIGURA 40: POLÍGONO CONVEXO
Ângulos internos menores do que 180º

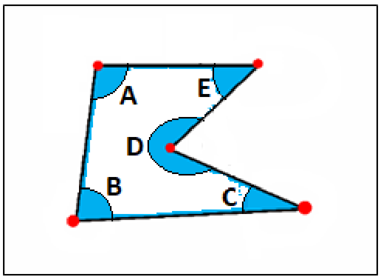


FIGURA 41: POLÍGONO NÃO CONVEXO
Ângulo Interno D maior do que 180º

4.4 ELEMENTOS DE UM POLÍGONO

a) Lados

Os lados são formados pelos segmentos de reta que formam a linha poligonal.

b) Vértice

O vértice é o ponto em que dois lados se unem.

c) Ângulos internos

Os ângulos internos são formados por dois lados consecutivos do polígono.

d) Diagonais

As diagonais de um polígono são os segmentos que unem dois vértices não consecutivos.

e) Ângulo externo

É o ângulo de "fora" do polígono, formado por um lado e pelo prolongamento do lado consecutivo a esse.

O gênero (n) de um polígono é dado pelo número de lados desse polígono, (o número de lados é igual ao número de vértices). Cada polígono recebe um nome que o identifica, de acordo com o número de lados (n) que possui.

N° de lados	Polígono	Nº de Lados	Polígono
n = 3	TRIÂNGULO OU TRILÁTERO	n=12	DODECÁGONO
n = 4	QUADRILÁTERO	n=13	TRIDECÁGANO
n = 5	PENTÁGONO	n=14	TETRADECÁGANO
n = 6	HEXÁGONO	n=15	PENTADECÁGONO
n = 7	HEPTÁGONO	n=16	HEXADECÁGANO
n = 8	OCTÓGONO	n=17	HEPTADECÁGANO
n = 9	ENEÁGONO	n=18	OCTODECÁGANO
n = 10	DECÁGONO	n=19	ENEADECÁGONO
n = 11	UNDECÁGONO	n=20	ICOSÁGONO

TABELA 1 : CLASSIFICAÇÃO DOS POLÍGONOS

4.5 POLÍGONOS REGULARES

Definição 2: Denomina-se polígono regular todo aquele que tem todos os lados com medidas iguais e todos os ângulos com medidas iguais.

- A maioria dos polígonos regulares tem em seu nome a palavra regular. Ex.: pentágono regular, octógono regular, icoságono regular, etc.
- As exceções são o triângulo regular que é chamado de triângulo equilátero e o quadrilátero regular que é chamado de quadrado.
- A quantidade de ângulos internos de um polígono é sempre igual à sua quantidade de lados.

4.6 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO

Segundo CEJA (2000 p. 51):

> *Será que não conseguiríamos ladrilhar, usando heptágonos regulares (7 lados), octógonos regulares (oito lados), eneágonos regulares (9 lados) etc? Para que possamos responder essa questão, precisamos saber qual a medida do ângulo interno de cada um desses polígonos. Vamos ver, passo a passo, uma estratégia para que possamos encontrar essas medidas.*

O intuito é mostrar empiricamente que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^0 (um ângulo raso) e generalizar para um polígono de *n* lados.

Depois de desenhar um triângulo qualquer e definir os seus ângulos internos de a, b e c. Recorte o triângulo em três partes, de modo que cada parte fique com um dos ângulos.

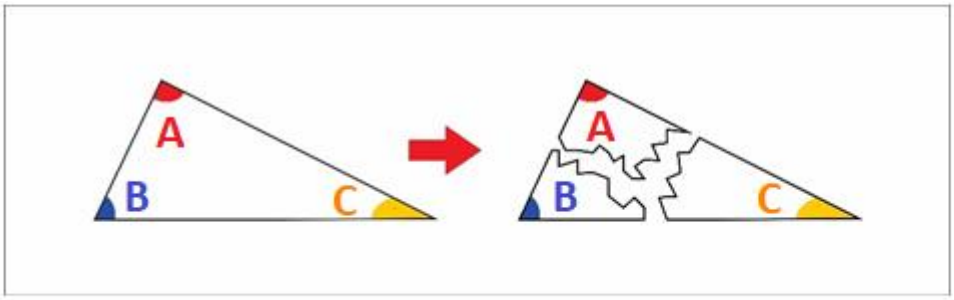


FIGURA 42: DEMONSTRAÇÃO TRIÂNGULO RECORTADO

Agora junte os ângulos em torno de um único ponto.

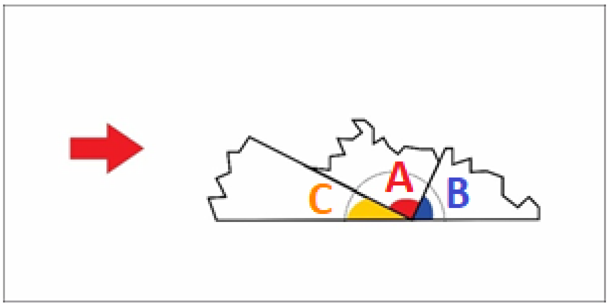


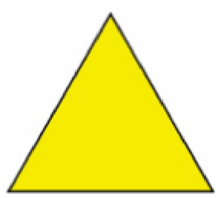
FIGURA 43: DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA

Nota-se que a união deles (a + b + c) forma um ângulo raso, igual a 180^0, o que leva a concluir que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^0. (A medida de um ângulo raso).

Vamos determinar a soma dos ângulos internos dos demais polígonos, decompondo-os em triângulos disjuntos, e em seguida, por dedução conjecturar uma fórmula.

Triângulo (três lados)

Soma dos ângulos internos $S_3 = (3 - 2) \cdot 180º = 1 \cdot 180° = 180°$



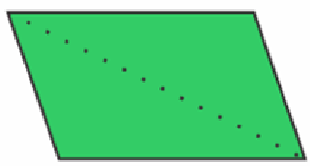
$$\mathbf{S_3 = (3-2) \cdot 180°}$$
$$\mathbf{S_3 = 1 \cdot 180°}$$
$$\mathbf{S_3 = 180°}$$

FIGURA 44: SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS PARA TRIÂNGULOS

Como todo polígono pode ser decomposto em vários triângulos, então se vê:

Quadrilátero (quatro lados)

Traçamos uma diagonal, a partir de um vértice qualquer, e o quadrilátero ficará dividido em dois triângulos, isto é:

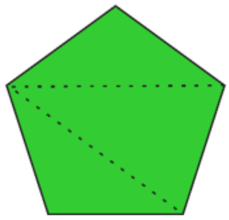


$$\mathbf{S_4 = (4-2) \cdot 180°}$$
$$\mathbf{S_4 = 2 \cdot 180°}$$
$$\mathbf{S_4 = 360°}$$

FIGURA 45: SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO QUADRILÁTERO

Pentágono (cinco lados)

Partindo do mesmo vértice, podemos traçar duas diagonais, que dividirão o pentágono em 3 triângulos, que resultará em:

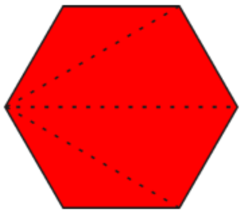


$$S_5 = (5-2) \cdot 180°$$
$$S_5 = 3 \cdot 180°$$
$$S_5 = 540°$$

FIGURA 46: DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DA FÓRMULA DA SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO PENTÁGONO

Hexágono (seis lados)

Usando o mesmo raciocínio, tem-se:



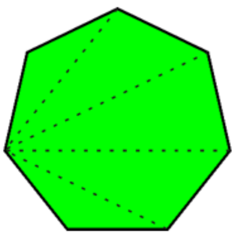
$$S_6 = (6-2) \cdot 180°$$
$$S_6 = 4 \cdot 180°$$
$$S_6 = 720°$$

FIGURA 47: DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DA SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO HEXÁGONO

Percebe-se, então, que o número que multiplica 180^0 é o número de lados do polígono menos dois, isto é, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada pelo esquema a seguir:

(Número de lados do polígono – 2) x 180°= (soma das medidas dos ângulos internos desse polígono).

O número de lados do heptágono é 7, então teremos: $S_7 = (7 - 2) \cdot 180° = 900°$ (soma das medidas dos ângulos internos do heptágono é 900º).



$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$
$$S_7 = (7-2) \cdot 180°$$
$$S_7 = 5 \cdot 180°$$
$$S_7 = 900°$$

FIGURA 48: SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO HEPTÁGONO

A soma das medidas dos ângulos internos no heptágono é 900°. Conclui-se que a soma interna de polígono de lados $\boldsymbol{n}$ é dada pela fórmula

$$\mathbf{Sn} = (\mathbf{n} - \mathbf{2}) \cdot \mathbf{180°}$$

onde $\boldsymbol{Sn}$ é a soma dos ângulos internos e $\boldsymbol{n}$ é o número de lados, do polígono.

Como se sabe, os ângulos internos de um polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados são congruentes e a soma deles é $\boldsymbol{S_n} = (\mathbf{n} - \mathbf{2}) \cdot \mathbf{180°}$.

Para obter a medida de cada um desses ângulos basta dividir a soma total dos ângulos internos pelo número de lados:

$$\boldsymbol{\alpha_n} = \frac{(\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \cdot \mathbf{180°}}{\boldsymbol{n}}$$

Obs.: A demonstração de que a soma dos ângulos internos de um polígono regular de lado $\boldsymbol{n}$ pode ser feita por indução, por exemplo no Ensino Médio.

CAPÍTULO 5 - LADRILHAMENTO

A origem do ladrilho como forma de expressão cultural, manifestação religiosa e registro de feitos históricos, remonta à época moura e bizantina.

Castelos, palácios e grandes feitos da arquitetura europeia do século XVII carregam em sua essência, a beleza transmitida pelos grandes ladrilhamentos.

Os mosaicos ou ladrilhos são uma tradição milenar que ainda nos dias de hoje são empregados nos espaços e ambientes.

A fabricação artesanal ficou clara, para nós no século IV d.C. (domínio Bizantino).

A arqueologia é perene e sempre pronta a descobrir e desvendar a nossa história.

Foram encontrados na civilização Etrusca, ruas com ladrinhamentos com desenhos, lembrando o domínio e a história deste povo.

Todo ladrilho precisa do encarte certo. E muitos deles são baseados nos polígonos geométricos. A presença da matemática coerente com cálculos de acerto dentro do recinto a ser ladrilhado.

Pavimentação ou ladrilhamento do plano consiste no preenchimento do mesmo com polígonos, sem sobreposições ou lacunas. A técnica é utilizada numa vasta variedade de aplicações, como: papéis de parede, pisos com cerâmicas ou pedras, forros de madeira, estamparia de tecidos, malharias, no empacotamento, etc...

Este trabalho mostra o levantamento de um estudo geométrico, de ladrilhamento com motivos semelhantes aos que aparecem em lugares distintos no tempo e espaço. Ainda que o mosaico (ladrilhamento) seja uma arte milenar e bem desenvolvida, nos dias atuais, ela continua sendo uma técnica que constribui para a aprendizagem dos alunos.

Segundo o Dicionário DICIO ONLINE (2018), o significado de mosaico:

> *Decoração que se faz pela reunião de pequenas peças coloridas de vidro, de pedra ou de outro material. As peças são assentadas com cimento para formar um desenho sobre alguma superfície, em geral um piso, parede ou teto. As peças coloridas denominam-se tesselas. O mármore é comumente empregado para pisos, e o vidro para paredes.*

As primeiras ladrilhagens foram feitas com ladrilhos quadrados.

Segundo a autora SALLUM (2014 p. 01):

> *A arte do ladrilhamento consiste no preenchimento do plano, por moldes, sem superposição ou buracos. Ela existe desde que o homem começou a usar pedras para cobrir o chão e as paredes de sua casa e continuou com a*

aplicação de cores, desenhos ou figuras para deixar os ladrilhos mais agradáveis.

As mais antigas peças de ladrilhos conhecidas foram encontradas no Egito. Romanos e outros povos mediterrâneos retratavam pessoas e cenas naturais; mouros e árabes usavam figuras geométricas complexas e entrelaçadas, como se constata na Alhambra, um complexo de palácios de Granada (Espanha) construído, por mouros e cristãos, entre os séculos XIII e XV e declarado, pela UNESCO, patrimônio da humanidade (SALLUM 2014, p.01)

Essa passagem histórica, mostra a importância do ladrilhamento como fator de estética das grandes edificações da época.

Segundo DIAS e SAMPAIO (2014, p.12)

"O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas."

Segundo DIAS e SAMPAIO (2014), aplicação na busca de soluções para problemas pode ser desenvolvida com um trabalho adequado de Geometria para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

5.1 PAVIMENTAÇÃO DO PLANO OU LADRILHAMENTO

Quando o mosaico é formado apenas por formas poligonais (polígonos) podemos chamá-lo também de ladrilhamento.

FIGURA 49: CERÂMICA QUADRICULAR

Se um conjunto de polígonos cobre sem cruzamentos um plano, dizemos que foi feito uma pavimentação do plano ou um ladrilhamento do mesmo.

- Cobrir significa que todo ponto do plano pertence a pelo menos um polígono do conjunto.
- Sem cruzamento significa que a intersecção de dois polígonos quaisquer tem área nula.
- Os vértices dos polígonos são chamados de nós da pavimentação.
- Os segmentos de retas que têm dois nós consecutivos de um mesmo lado do polígono são chamados de arestas.
- Os polígonos utilizados na pavimentação são chamados de ladrilhos.

De maneira geral, ladrilhar um plano é o mesmo que preenchê-lo com polígonos sem deixar espaços entre eles e sem sobrepô-los, isto é, dois polígonos de uma pavimentação têm em comum, no máximo, arestas ou nós.

5.2 LADRILHAMENTO BEM COMPORTADO

O ladrilhamento explorado é o denominado de bem-comportado (os ladrilhos terão sempre lados de mesma medida, independentemente do número de lados que formam cada polígono). As regras ou condições do bom comportamento são três:

1 – Os ladrilhos devem ser **polígonos regulares,** de um ou vários tipos;

2 – A intersecção de dois ladrilhos (polígonos), se existir, é sempre uma aresta (lados) ou nós (vértices);

3 – A distribuição de ladrilhos ao redor de cada um dos nós (vértices) do ladrilhamento é sempre a mesma, tanto no sentido horário ou anti-horário (e a sequência cíclica em que esses ladrilhos aparecem será sempre a mesma).

5.3 TIPOS DE LADRILHAMENTOS BEM COMPORTADOS DO PLANO

Existem dois tipos de ladrilhamentos formados por polígonos regulares:

- **REGULARES** – todos os ladrilhos são congruentes (único tipo)
- **SEMIRREGULARES** – dois ou mais tipos de polígonos.

No presente estudo, a opção feita foi pelo ladrilhamento regular.

É possível cobrir o plano (ladrilhar) com triângulos equiláteros, pois cada um dos seus ângulos internos mede 60º, portanto o ângulo de 60° cabe exatamente seis vezes ao redor do nó (vértice), perfazendo 360° (60° graus é divisor de 360°).

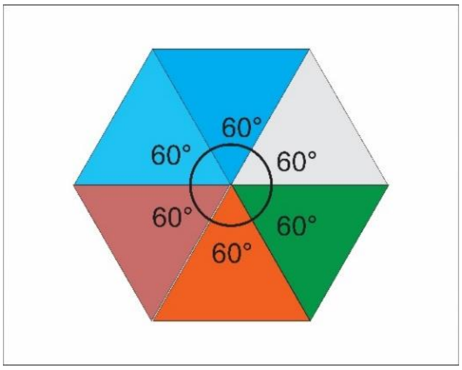


FIGURA 50: LADRILHAMENTO COM TRIÂNGULOS

Do mesmo modo, se pode cobrir o plano com quadrados, uma vez que seus ângulos internos medem 90° que é outro divisor de 360°.

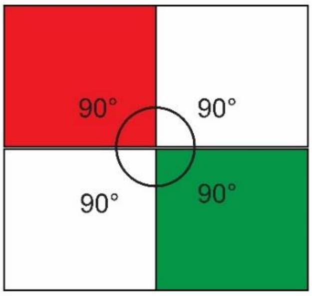


FIGURA 51: LADRILHAMENTO COM QUADRADOS

Finalmente, os ladrilhos em forma de hexágono regular também cobrem exatamente o plano, pois seus ângulos internos medem 120°, que é mais um divisor de 360°.

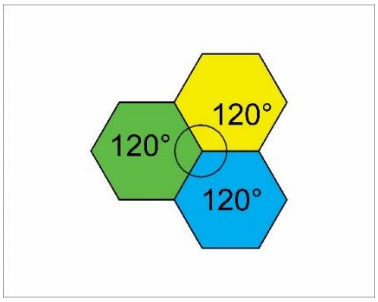


FIGURA 52: LADRILHAMENTO COM HEXÁGONOS

Será que é possível cobrir o plano com um pentágono regular? Não, pois, reunindo três ângulos de 108°, que é a medida de um ângulo interno do pentágono regular, obtemos 324°, faltando 36° para completar a volta. Não seria possível acrescentar outro pentágono regular, pois teríamos um polígono sobreposto a outro.

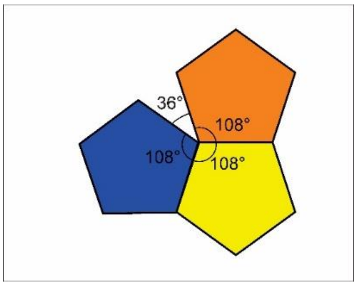


FIGURA 53: COM PENTÁGONO NÃO É POSSÍVEL LADRILHAR

Mas será que é sempre possível fazer pavimentações com um só tipo de polígono regular?

Como vimos, não foi possível ladrilhar o plano apenas com pentágonos regulares.

Na verdade, as pavimentações com um único tipo de polígonos regulares (ladrilhamento regular) somente podem ser feitas em três casos: com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, Fig. 54

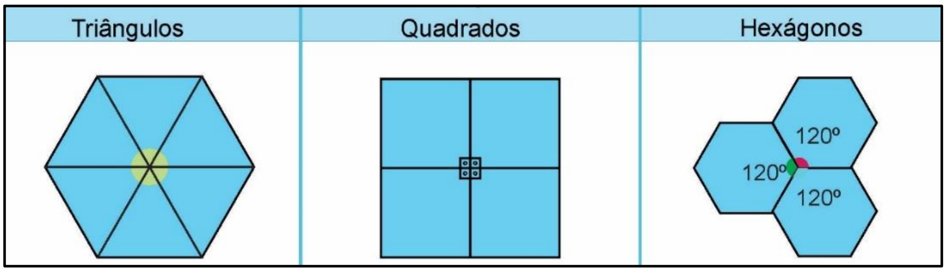


FIGURA 54: LADRILHAMENTOS REGULARES POSSÍVEIS COM POLÍGONOS REGULARES

Não é possível formar um ladrilhamento regular com polígonos com mais de seis lados. Observe, na Figura 55, como a medida do ângulo interno dos polígonos regulares cresce, de acordo com o número de lados.

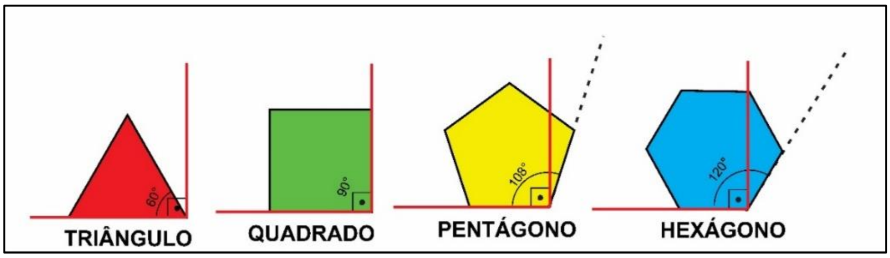


FIGURA 55: POLÍGONOS REGULARES: ABERTURA DOS ÂNGULOS.
Fonte: Adaptação IMENES 2000 p. 19

Nas figuras apresentadas, um dos lados do ângulo interno assinalado está sempre na horizontal. O outro lado afasta-se da vertical, abrindo o ângulo à medida que o número de lados aumenta.

Os ângulos vão aumentando, mas são sempre menores do que 180° e nenhum polígono pode ter um ângulo de 180° entre dois de seus lados (teríamos duas semirretas opostas), Fig.56.

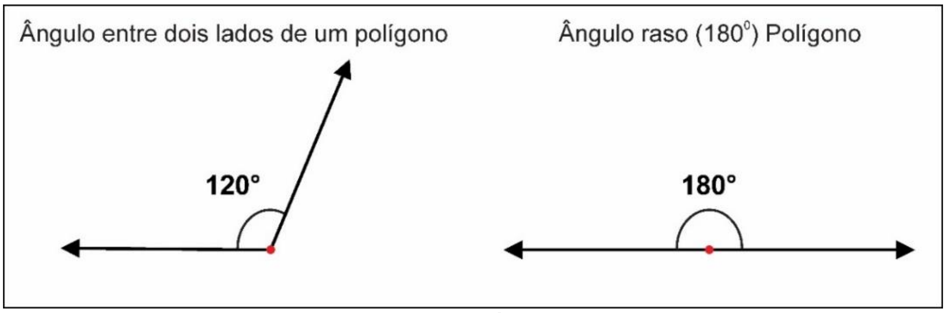


FIGURA 56: ÂNGULOS

Conclui-se que os polígonos regulares, com mais de seis lados têm ângulos maiores do que 120° e menores do que 180°. Como juntar esses ângulos para formar um ângulo de 360°? Se usarmos três ângulos, a soma ultrapassará 360°, porque três vezes um número maior do que 120° supera 360° e, usando apenas dois desses ângulos, a soma não chegará a 360°, porque duas vezes um número menor do que 180° tem-se menos do que 360°.

Então, para se ter ladrilhamento regular (um só tipo de ladrilho), há apenas três possibilidades: uma com triângulo equilátero, outra com quadrado e uma terceira com o hexágono regular. O mais surpreendente é que esses três casos, na verdade, resumem-se a apenas dois, porque o ladrilhamento com hexágonos regulares pode ser substituído por triângulos regulares (equiláteros), conforme figuras 50 e 52.

CAPÍTULO 6 – ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA

A Geometria possui várias aplicações em situações do dia a dia e os conceitos geométricos podem ser desenvolvidos por meio de representações encontradas no ambiente em que se vive. Nas interpretações dos conceitos, muitos educadores buscam aprofundar seus conhecimentos com o objetivo de utilizar novas abordagens em sua prática docente, como a aplicação de materiais concretos.

6.1 PLANEJAMENTO DA AULA

No planejamento das atividades de ladrilhamento, deve-se priorizar as definições, objetivos de ensino e os procedimentos a serem utilizados, definindo regras de ladrilhamentos e as atitudes do grupo de alunos. Também é importante planejar formas de registros como: conversa; aplicação de textos; questionários entre outras.

O planejamento da aula deve priorizar a aprendizagem do aluno, o desenvolvimento de habilidades e competências sobre os conteúdos ligados às aplicações da geometria de maneira a permitir uma justa compreensão das diversas concepções acerca da disciplina.

Para a aplicação das atividades, os alunos foram divididos em grupos de 4 a 5 pessoas de maneira a analisar os seguintes aspectos:

- O número de alunos participantes;
- Os conteúdos vistos anteriormente e como foram assimilados;
- Organização das aulas;
- Interação dos alunos com as atividades;
- Métodos da aplicação das atividades práticas.

Foram aplicadas as atividades teóricas (ANEXO I) e, em seguida, a aplicação dos moldes dos polígonos regulares para a exploração dos ladrilhamentos bem-comportados (ANEXO I).

No presente trabalho utilizamos o método de avaliação subjetiva, diagnosticando e explorando o ladrilhamento, visando ao estudo de casos. Participaram das atividades os alunos do 7° ano do Ensino Fundamental, da escola pública “Dr. João Gabriel Ribeiro” da cidade de São José do Rio Pardo, estado de São Paulo.

As metas pretendidas foram: analisar e interpretar conceitos geométricos; abordar conceitos sobre ângulos, polígonos e suas propriedades; aplicar os moldes para cobrir o plano (ladrilhamento) utilizando peças de polígonos regulares; realizar atividades teóricas e análise de dados quantitativos.

6.2 ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS

Desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes no ensino da matemática no contexto da Geometria, atualmente é um dos maiores desafios enfrentados pelos profissionais que trabalham esse conteúdo curricular junto aos alunos.

As atividades apresentadas nesse trabalho são uma proposta que deve ser vista como ponto de partida ao ensino da Geometria.

Segundo AMÂNCIO (2013. p.02):

> Matemática é geralmente considerada como um campo de grande precisão, no qual os conceitos são definidos rigorosamente, com demonstrações de natureza lógica. No entanto, ao analisar o desenvolvimento da Geometria, constatamos que este se deu através de observações, comparações e de generalizações. [...]

Segundo o autor, há quatro elementos fundamentais que influenciam no processo de ensino e aprendizagem da Geometria: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental.

A utilização de materiais concretos é uma das estratégias pedagógicas que propicia aos alunos a oportunidade de manipular e adquirir os conceitos sobre os polígonos regulares, associando a atividade intelectual e estabelecendo uma relação entre a prática e a teoria.

Segundo AMÂNCIO (2013. p.04):

> ... os alunos devem ter ricas experiências envolvendo a manipulação de objetos e desenhos diversificados que permitam formar imagens mentais com qualidade e variedade, isto é, imagens que envolvam todos os aspectos abrangidos pela definição.

A manipulação dos polígonos regulares (moldes) e a formação das imagens ajudarão os alunos na aprendizagem.

O número de aulas para as aplicações das atividades propostas nesse trabalho deve estar de acordo com necessidade de cada sala, sendo o tempo estipulado pelo professor. Os alunos deverão estar dispostos em grupos para haver interação no decorrer das aplicações.

6.3 MATERIAL PARA CONFECÇÃO DAS PEÇAS

Para realizar os experimentos com ladrilhamento, primeiro precisa-se construir os polígonos regulares utilizando o molde (ANEXO I), que serão os ladrilhos do nosso ladrilhamento.

O material utilizado para confecção foi o papel cartão, podendo também ser confeccionados com E.V.A, de cores variadas ou similares, a partir de moldes.

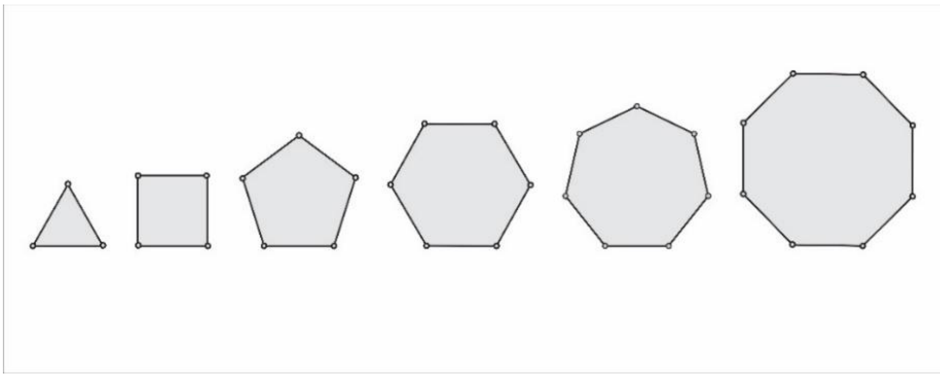


FIGURA 57: EXEMPLO DE MOLDES DOS POLÍGONOS

Após feitas as impressões dos moldes, deverão ser riscados e, em seguida, recortados em diversos materiais, no nosso caso, o papel cartão. A construção dos moldes pode ser feita pelo professor ou pelos alunos.

6.4 POLÍGONOS REGULARES PARA LADRILHAMENTO

Para os polígonos congruentes, foram utilizadas as mesmas cores. Construímos um molde com a forma de cada um dos seguintes polígonos regulares: triângulo equilátero; quadrado; pentágono; hexágono; heptágono; octógono, para os ladrilhamentos no plano de forma que os polígonos tenham lados com um mesmo comprimento.

FIGURA 58: POLÍGONOS DE LADO DE MESMO COMPRIMENTO

Note que os polígonos regulares presentes na figura 58 têm lados de mesmo comprimento, que é o padrão para a confecção dos moldes que permitirá a construção do ladrilhamento, conforme sugere Sampaio [2010].

6.5 ETAPAS DA CONFECÇÃO DAS PEÇAS

Após a impressão dos moldes (ANEXO I), deve-se reproduzir em papel cartão, cartolina, color set, E.V.A ou similares de modo a confeccionar os diferentes tipos de polígonos. É importante recortar o maior número possível de peças de ladrilhos de cada tipo. Os moldes podem ser elaborados com o software livre GeoGebra.

O início da construção das peças se dá com o triângulo regular (molde), transcrevendo-o no material desejado, em nosso caso utilizar-se-á o lápis e o papel cartão, de forma que o resultado obtido seja uma malha de triângulos em que todos lados possuam a mesma medida (1) e em seguida recortam-se as peças (2-3). Fig.59

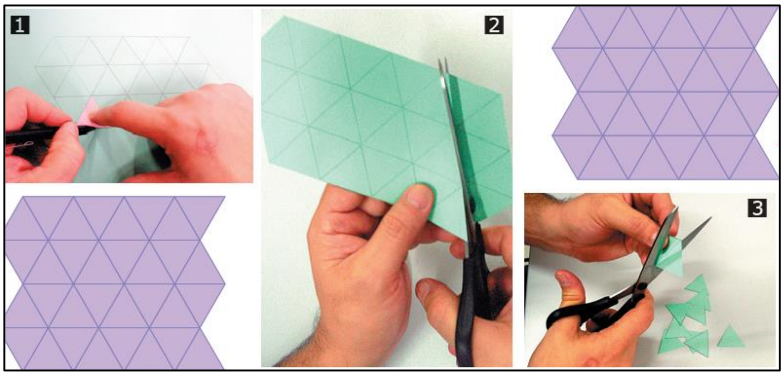


FIGURA 59: ETAPA 01
Fonte: DIAS e SAMPAIO

De modo análogo, em outro papel cartão, de cores diferentes, deverão ser recortados os demais moldes (ANEXO I). Veja a sequência:

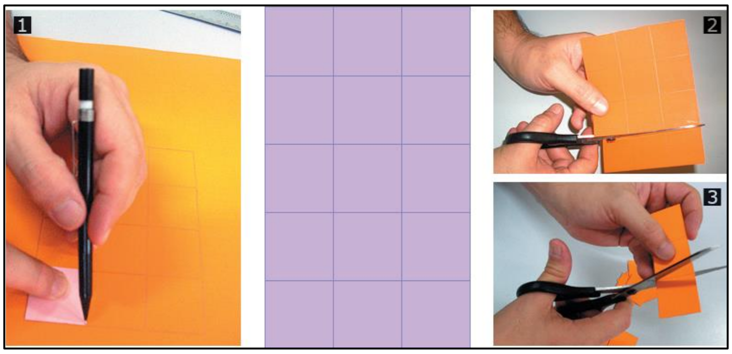


FIGURA 60: ETAPA 02
Fonte: DIAS e SAMPAIO

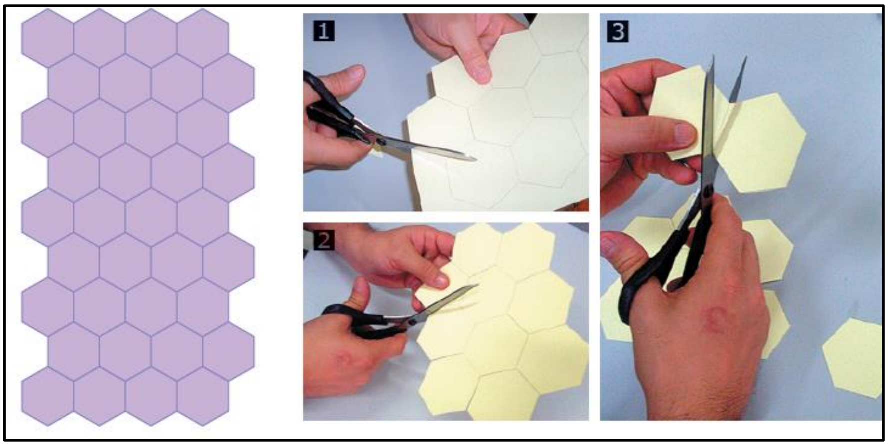


FIGURA 61: ETAPA 03
Fonte: DIAS e SAMPAIO

Após a confecção de todas as peças (ANEXO I), tem-se o material necessário para as experiências com ladrilhamentos regulares.

O ladrilhamento proporciona no aluno a capacidade de produzir a criatividade, analisar diversas possibilidades, desenvolver habilidades mentais e cognitivas, ter estratégias para as próximas jogadas, assim como socialização com o grupo em que vive. SOUZA (2009).

O ladrilhamento como recreação lúdica nas atividades escolares estabelece uma relação entre brincar e aprender. Além dessas atividades práticas, foram aplicadas atividades teóricas, com a participação de todos os alunos.

As atividades propostas foram: pontos, segmentos, retas e semirretas, ângulos; polígonos regulares e o ladrilhamentos com utilização de peças de polígonos regulares. Foi explorada a parte teórica através de testes impressos, e a parte lúdica do ladrilhamento utilizando peças moldadas.

6.6 PREVISÃO DE DIFICULDADES

Utilizando conceitos matemáticos articulados aos conceitos geométricos, observando os desafios do ladrilhamento do plano, requer-se, primeiro, o conhecimento da origem dos polígonos regulares e seus ângulos internos, fato importante nesta abordagem de estudos.

Algumas dificuldades previstas:

- Não perceber que os ângulos internos do polígono têm que ser divisores de 360º para que ocorra o ladrilhamento bem-comportado, sem transpor as peças.

- Determinar quais são os polígonos regulares possíveis para o ladrilhamento regular;
- Dificuldades no conceito teórico como reconhecimento de polígonos congruentes para o ladrilhamento regular.

6.7 PRODUTO DA AULA

As análises preliminares foram as atividades práticas e teóricas com as dificuldades previamente esperadas.

A aplicação das atividades foi realizada da seguinte forma:

- As atividades teóricas foram apresentadas em sala de aula;
- As atividades práticas foram aplicadas no pátio da escola, onde está localizado o refeitório da escola, onde os alunos sentiram prazer em executá-las;
- Os alunos foram organizados em grupos, utilizando o mesmo material e recursos didáticos, tais como lápis, borracha, caderno, questionário, peças dos polígonos regulares;
- Aplicação dos conceitos matemáticos no reconhecimento das propriedades de ângulos, ponto, segmento reta, retas, semirretas polígonos regulares.

Após aplicação das atividades prática e teórica, os alunos foram submetidos a um questionário de satisfação, com objetivo de verificar a qualidade da aprendizagem sobre ladrilhamento e análise por gráficos de desempenho.

6.8 FORMA DE AVALIAÇÃO

Os alunos foram avaliados por questionários e pela aplicação do ladrilhamento utilizando as peças confeccionadas.

Segundo DIAS e SAMPAIO (2010, p.84) listamos os itens de conteúdos e habilidades que fazem parte da avaliação após de realizar o desafio do ladrilhamento e que foram seguidos:

- Analisar e entender porque a experimentação resolve o problema do ladrilhamento e por que são feitas hipóteses simplificadoras na busca da solução;

- Construir o material didático necessário para investigar o problema proposto;
- Compreender as técnicas geométricas utilizadas para construir e classificar os ladrilhamentos;
- Adaptar as atividades propostas para a realidade escolar e propor estratégias criativas para essa transposição.

6.9 FORMAS DE REGISTRO DA AULA

Um aspecto que deve ser observado pelo professor em relação à ação dos alunos é se eles conseguem avaliar o seu próprio desempenho e, para que isso ocorra, o professor deve deixar bem explícito o que é considerado como meta da atividade.

O professor deve registrar os fatos durante a aplicação como: dúvidas, questionamentos, erros, comportamento, estratégias, raciocínios, criatividade, organização, recursos utilizados, trabalho em grupo e até a própria avaliação pessoal do professor.

6.10 COLETA DE OPINIÕES

A coleta foi feita por meio de questionários para medir opiniões e atitudes dos alunos e analisada através de indicadores que sejam capazes de, quantitativamente, mensurar as dificuldades encontradas na aplicação do ladrilhamento, de forma a expressar tais opiniões e atitudes dos alunos.

Para avaliar as opiniões e a satisfação dos alunos na realização das tarefas, foi elaborado um modelo de coleta de dados como se vê na tabela 2 que foi entregue no final das atividades.

FÁCIL	DIFÍCIL	AGRADÁVEL	INTERESSANTE	DIVERTIDO	CONTRIBUI NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

TABELA 2: QUESTIONÁRIO PARA AVALIAR A OPINIÃO DOS ALUNOS

Com as informações obtidas pelos alunos, foi possível verificar se a aplicação teve valor significativo e se a atividade contribuiu na aprendizagem da Geometria.

CAPITULO 7 – APLICAÇÃO E RESULTADOS

Nesse capítulo são apresentadas as aplicações das atividades lúdicas, utilizando procedimentos metodológicos que abordam o conceito geométrico. O capítulo é composto pela descrição das aplicações, coleta de dados e resultados como instrumento significativo para avaliação do trabalho proposto.

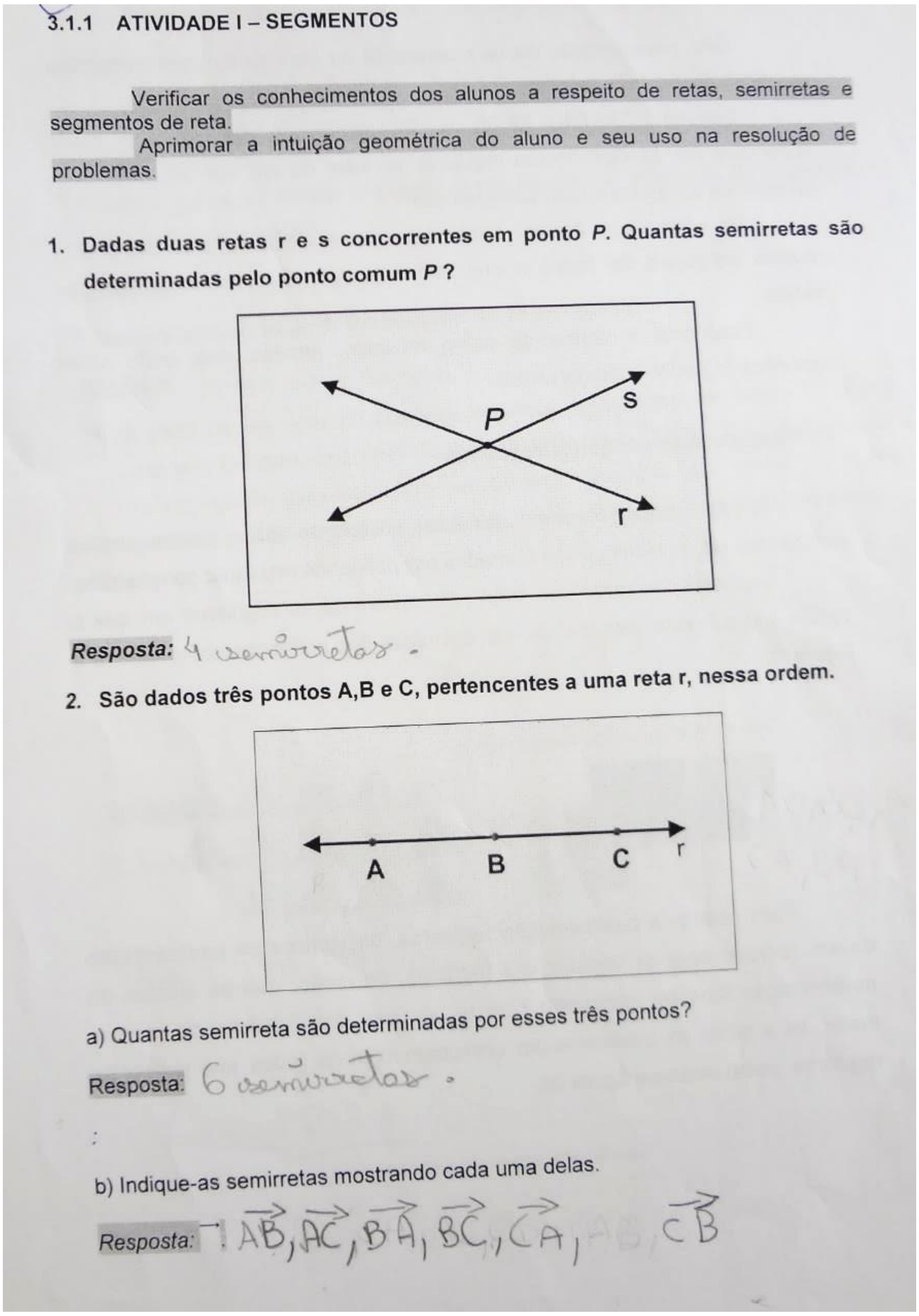
De forma organizada, foram consideradas as análises de resultados, assim como o detalhamento de todo o processo das atividades aplicadas, de maneira a destacar os principais pontos positivos e negativos, analisando as dificuldades enfrentadas pelos alunos e episódios relevantes ocorridos durante a aplicação.

7.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE TEÓRICA

Para realização da atividade compareceram 27 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual "Doutor João Gabriel Ribeiro", da cidade de São José do Rio Pardo, SP.

FIGURA 62: APLICAÇÃO TEÓRICA

As atividades teóricas I, II, III, IV foram desenvolvidas anteriormente às atividades práticas através de aulas expositivas na sala de aula e em espaço que permitiram uma efetiva participação dos alunos.



3.1.1 ATIVIDADE I – SEGMENTOS

Verificar os conhecimentos dos alunos a respeito de retas, semirretas e segmentos de reta.

Aprimorar a intuição geométrica do aluno e seu uso na resolução de problemas.

1. **Dadas duas retas r e s concorrentes em ponto *P*. Quantas semirretas são determinadas pelo ponto comum *P* ?**

Resposta: 4 semirretas.

2. **São dados três pontos A,B e C, pertencentes a uma reta r, nessa ordem.**

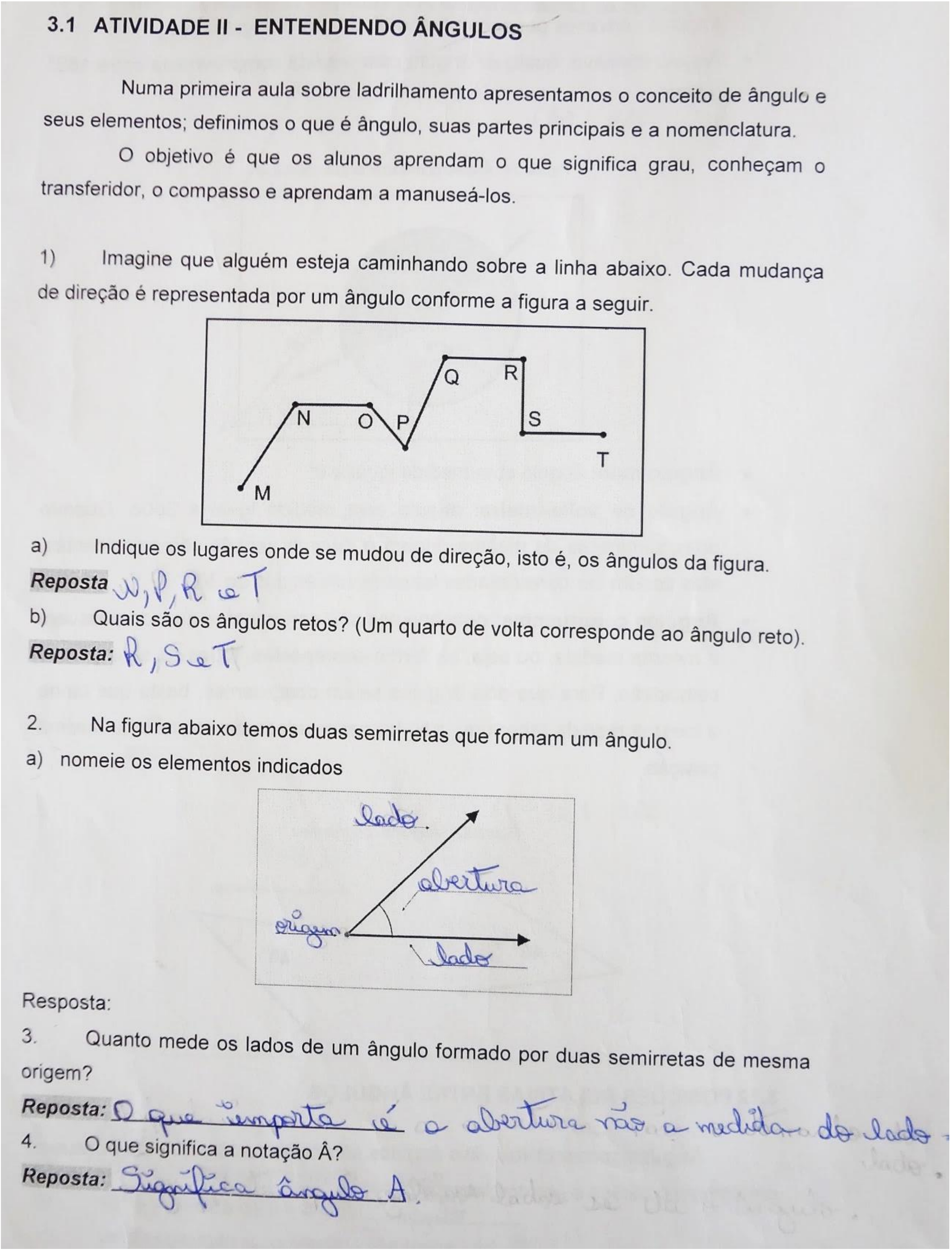
a) Quantas semirreta são determinadas por esses três pontos?

Resposta: 6 semirretas.

b) Indique-as semirretas mostrando cada uma delas.

Resposta: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$

FIGURA 63: ATIVIDADE 01 - REALIZADA PELOS ALUNOS.



3.1 ATIVIDADE II - ENTENDENDO ÂNGULOS

Numa primeira aula sobre ladrilhamento apresentamos o conceito de ângulo e seus elementos; definimos o que é ângulo, suas partes principais e a nomenclatura.

O objetivo é que os alunos aprendam o que significa grau, conheçam o transferidor, o compasso e aprendam a manuseá-los.

1) Imagine que alguém esteja caminhando sobre a linha abaixo. Cada mudança de direção é representada por um ângulo conforme a figura a seguir.

a) Indique os lugares onde se mudou de direção, isto é, os ângulos da figura.

Reposta N, P, R e T

b) Quais são os ângulos retos? (Um quarto de volta corresponde ao ângulo reto).

Reposta: R, S e T

2. Na figura abaixo temos duas semirretas que formam um ângulo.

a) nomeie os elementos indicados

Resposta:

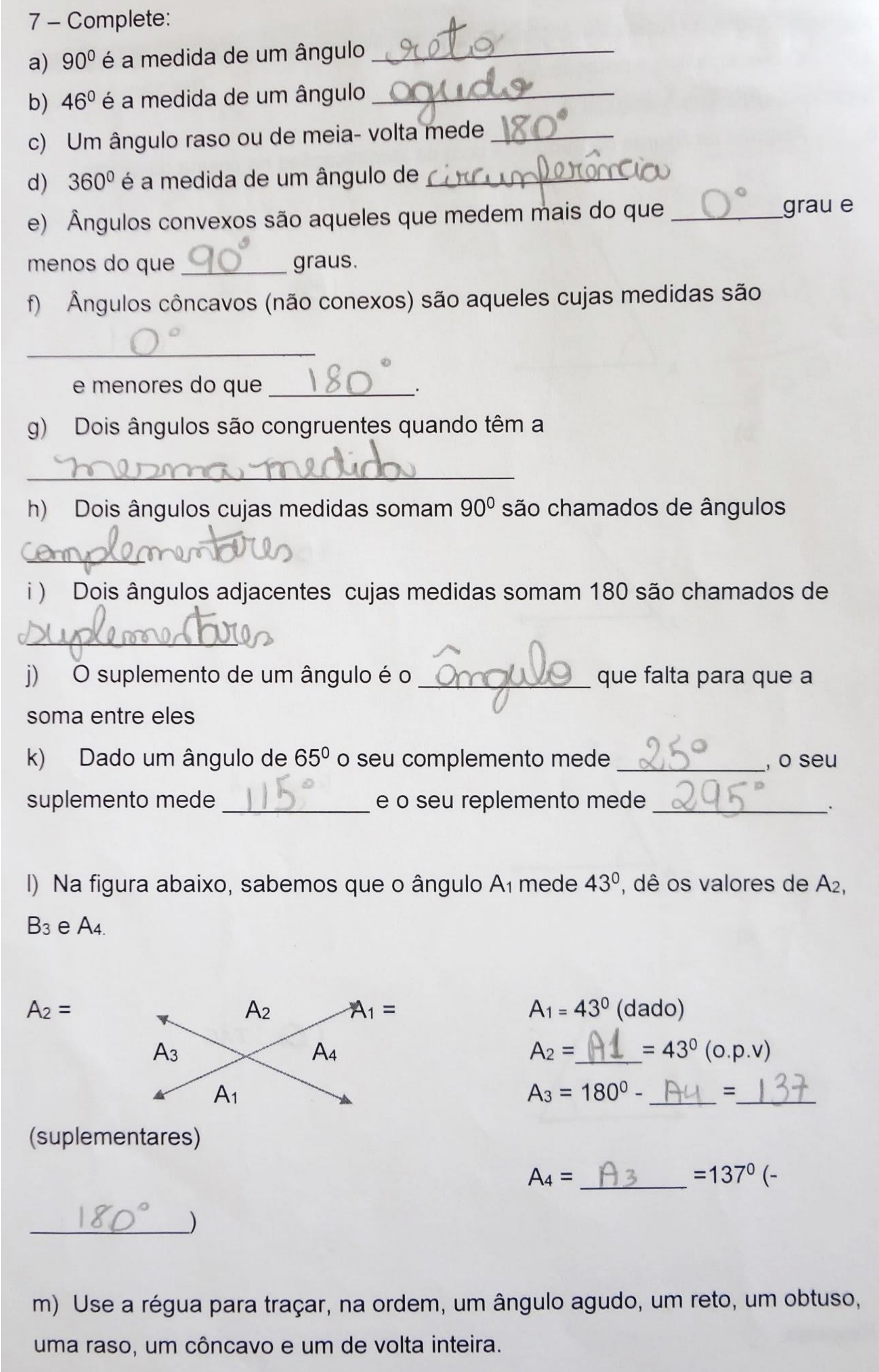
3. Quanto mede os lados de um ângulo formado por duas semirretas de mesma origem?

Reposta: O que importa é a abertura não a medida do lado.

4. O que significa a notação Â?

Reposta: Significa ângulo A.

FIGURA 64: ATIVIDADE 02 - REALIZADA PELOS ALUNOS.



7 – Complete:

a) 90^0 é a medida de um ângulo reto

b) 46^0 é a medida de um ângulo agudo

c) Um ângulo raso ou de meia- volta mede 180°

d) 360^0 é a medida de um ângulo de circunferência

e) Ângulos convexos são aqueles que medem mais do que 0° grau e menos do que 90° graus.

f) Ângulos côncavos (não conexos) são aqueles cujas medidas são 0°

e menores do que 180°.

g) Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida

h) Dois ângulos cujas medidas somam 90^0 são chamados de ângulos complementares

i) Dois ângulos adjacentes cujas medidas somam 180 são chamados de suplementares

j) O suplemento de um ângulo é o ângulo que falta para que a soma entre eles

k) Dado um ângulo de 65^0 o seu complemento mede 25°, o seu suplemento mede 115° e o seu replemento mede 295°.

l) Na figura abaixo, sabemos que o ângulo A_1 mede 43^0, dê os valores de A_2, B_3 e A_4.

A_2 =

$A_1 = 43^0$ (dado)

A_2 = A1 = 43^0 (o.p.v)

$A_3 = 180^0$ - A4 = 137

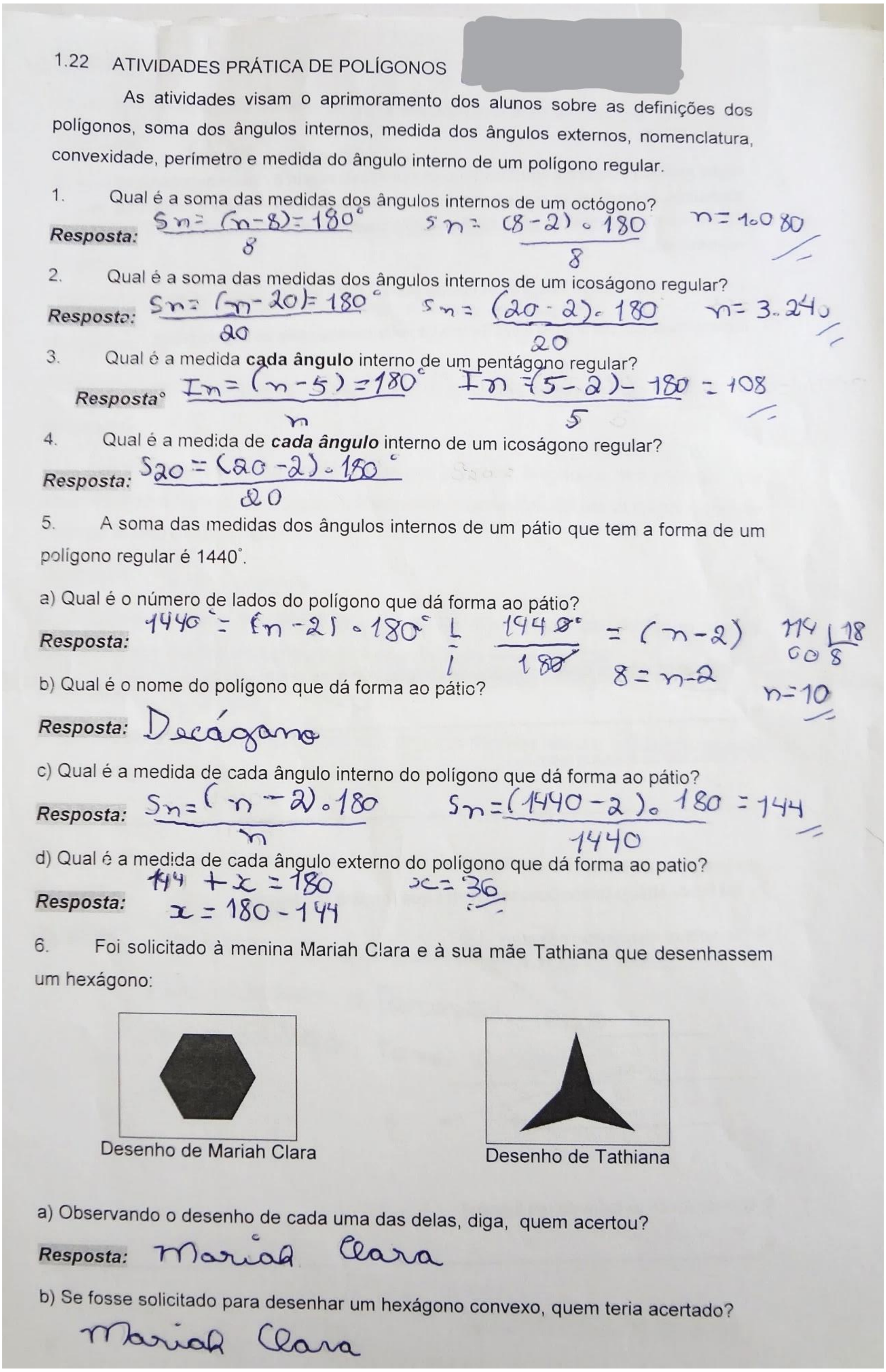
(suplementares)

A_4 = A3 =137^0 (-

180°)

m) Use a régua para traçar, na ordem, um ângulo agudo, um reto, um obtuso, uma raso, um côncavo e um de volta inteira.

FIGURA 65: ATIVIDADE 02 - REALIZADA PELOS ALUNOS.



1.22 ATIVIDADES PRÁTICA DE POLÍGONOS [redacted]

As atividades visam o aprimoramento dos alunos sobre as definições dos polígonos, soma dos ângulos internos, medida dos ângulos externos, nomenclatura, convexidade, perímetro e medida do ângulo interno de um polígono regular.

1. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono?

Resposta: $Sn = \frac{(n-8) = 180°}{8}$ $\quad Sn = \frac{(8-2) \cdot 180}{8}$ $\quad n = 1.080$

2. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um icoságono regular?

Resposta: $Sn = \frac{(n-20) = 180°}{20}$ $\quad Sn = \frac{(20-2) \cdot 180}{20}$ $\quad n = 3.240$

3. Qual é a medida **cada ângulo** interno de um pentágono regular?

Resposta° $In = \frac{(n-5) = 180°}{n}$ $\quad In = \frac{(5-2) - 180}{5} = 108$

4. Qual é a medida de ***cada ângulo*** interno de um icoságono regular?

Resposta: $S_{20} = \frac{(20-2) \cdot 180°}{20}$

5. A soma das medidas dos ângulos internos de um pátio que tem a forma de um polígono regular é 1440°.

a) Qual é o número de lados do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: $1440° = (n-2) \cdot 180°$ $\quad \frac{1440°}{180} = (n-2)$ $\quad 8 = n-2$ $\quad 144 \div 18 = 8$ $\quad n = 10$

b) Qual é o nome do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: Decágono

c) Qual é a medida de cada ângulo interno do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: $Sn = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}$ $\quad Sn = \frac{(1440-2) \cdot 180}{1440} = 144$

d) Qual é a medida de cada ângulo externo do polígono que dá forma ao patio?

Resposta: $144 + x = 180$ $\quad x = 180 - 144$ $\quad x = 36$

6. Foi solicitado à menina Mariah Clara e à sua mãe Tathiana que desenhassem um hexágono:

Desenho de Mariah Clara

Desenho de Tathiana

a) Observando o desenho de cada uma das delas, diga, quem acertou?

Resposta: Mariah Clara

b) Se fosse solicitado para desenhar um hexágono convexo, quem teria acertado?

Mariah Clara

FIGURA 66: ATIVIDADE 03 - REALIZADA PELOS ALUNOS.

7. **Responda:**

a) Quantos ângulos internos tem um polígono de 5 lados?

Resposta: 5

b) Quantos ângulos internos tem um polígono regular de 8 lados?

Resposta: 8

c) Quantos lados tem um polígono regular de 15 ângulos externos?

Resposta: 15

8. a) sabendo-se que o perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados (o contorno do polígono), determine o perímetro de um icoságono regular onde cada lado mede 37 cm.

Resposta: 740 cm

8. b) Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono regular, sabendo que a medida de cada um dos seus ângulos internos é 135°.

Resposta: 1.080 graus

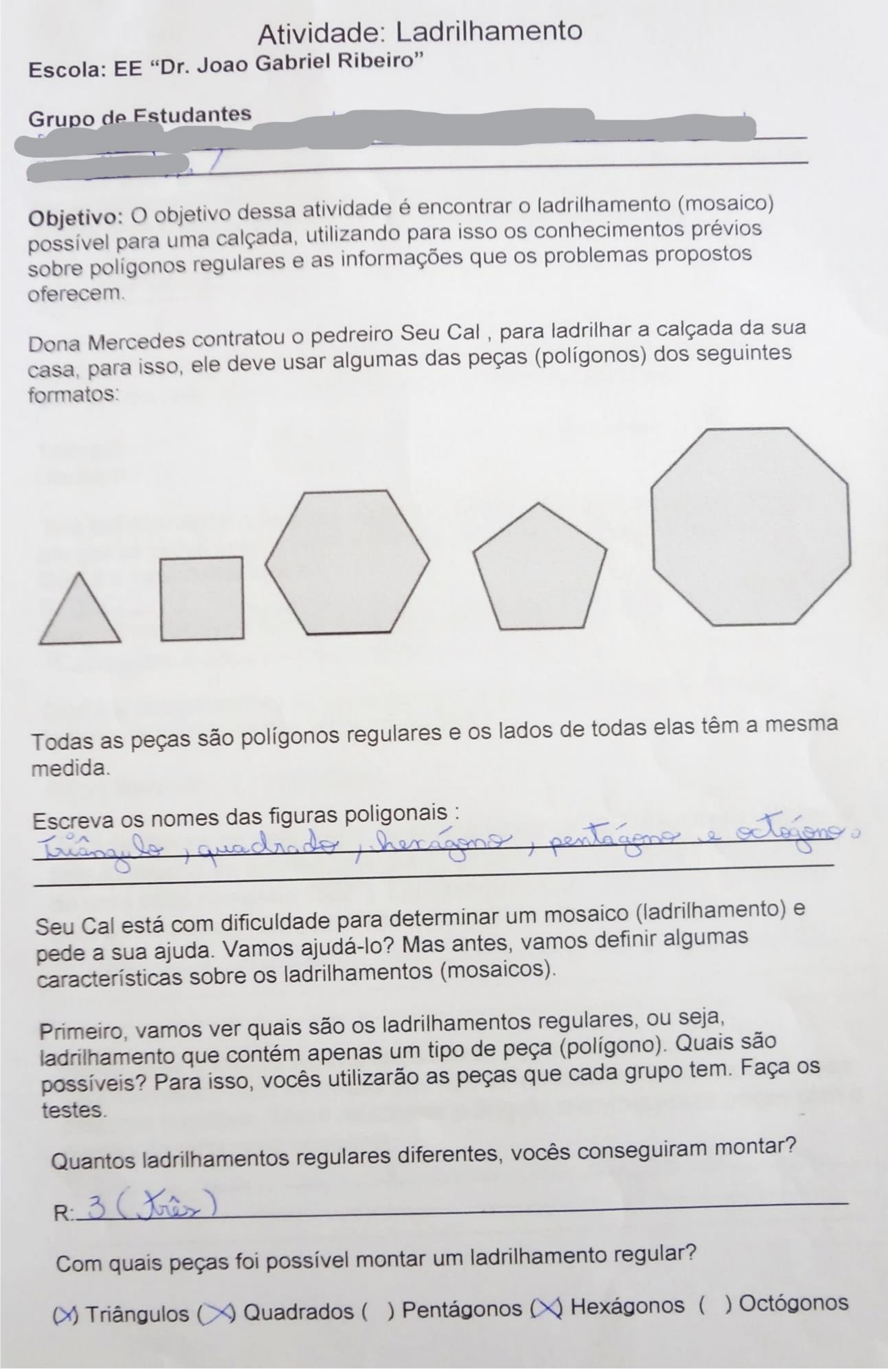
8. c) Calcule a medida de cada um dos ângulos internos de um eneágono regular, sabendo que a soma das suas medidas é igual a 1260°.

Resposta: 140 cm

9. Todo quadrado é um quadrilátero, mas, nem todo quadrilátero é um quadrado. Por quê?

Resposta: . Porque o quadrilatero pode ter lados diferentes e o quadrado tem lados iguais

FIGURA 67: ATIVIDADE 03 - REALIZADA PELOS ALUNOS.



Atividade: Ladrilhamento

Escola: EE "Dr. Joao Gabriel Ribeiro"

Grupo de Estudantes [redacted]

Objetivo: O objetivo dessa atividade é encontrar o ladrilhamento (mosaico) possível para uma calçada, utilizando para isso os conhecimentos prévios sobre polígonos regulares e as informações que os problemas propostos oferecem.

Dona Mercedes contratou o pedreiro Seu Cal , para ladrilhar a calçada da sua casa, para isso, ele deve usar algumas das peças (polígonos) dos seguintes formatos:

Todas as peças são polígonos regulares e os lados de todas elas têm a mesma medida.

Escreva os nomes das figuras poligonais :
Triângulo, quadrado, hexágono, pentágono e octógono.

Seu Cal está com dificuldade para determinar um mosaico (ladrilhamento) e pede a sua ajuda. Vamos ajudá-lo? Mas antes, vamos definir algumas características sobre os ladrilhamentos (mosaicos).

Primeiro, vamos ver quais são os ladrilhamentos regulares, ou seja, ladrilhamento que contém apenas um tipo de peça (polígono). Quais são possíveis? Para isso, vocês utilizarão as peças que cada grupo tem. Faça os testes.

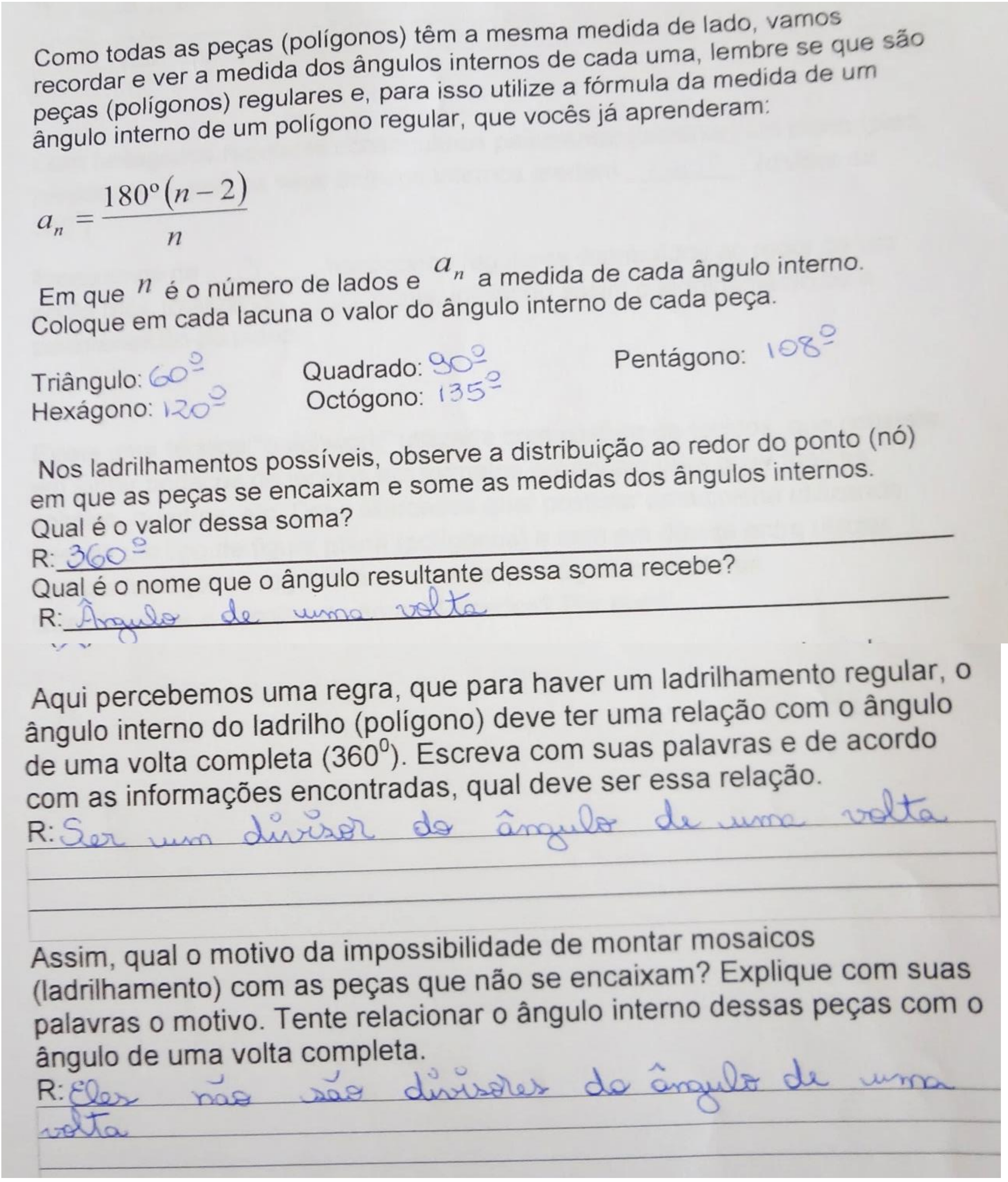
Quantos ladrilhamentos regulares diferentes, vocês conseguiram montar?

R: 3 (Três)

Com quais peças foi possível montar um ladrilhamento regular?

(X) Triângulos (X) Quadrados ( ) Pentágonos (X) Hexágonos ( ) Octógonos

FIGURA 68: ATIVIDADE 04 - REALIZADA PELOS ALUNOS.



Como todas as peças (polígonos) têm a mesma medida de lado, vamos recordar e ver a medida dos ângulos internos de cada uma, lembre se que são peças (polígonos) regulares e, para isso utilize a fórmula da medida de um ângulo interno de um polígono regular, que vocês já aprenderam:

$$a_n = \frac{180^o(n-2)}{n}$$

Em que n é o número de lados e a_n a medida de cada ângulo interno. Coloque em cada lacuna o valor do ângulo interno de cada peça.

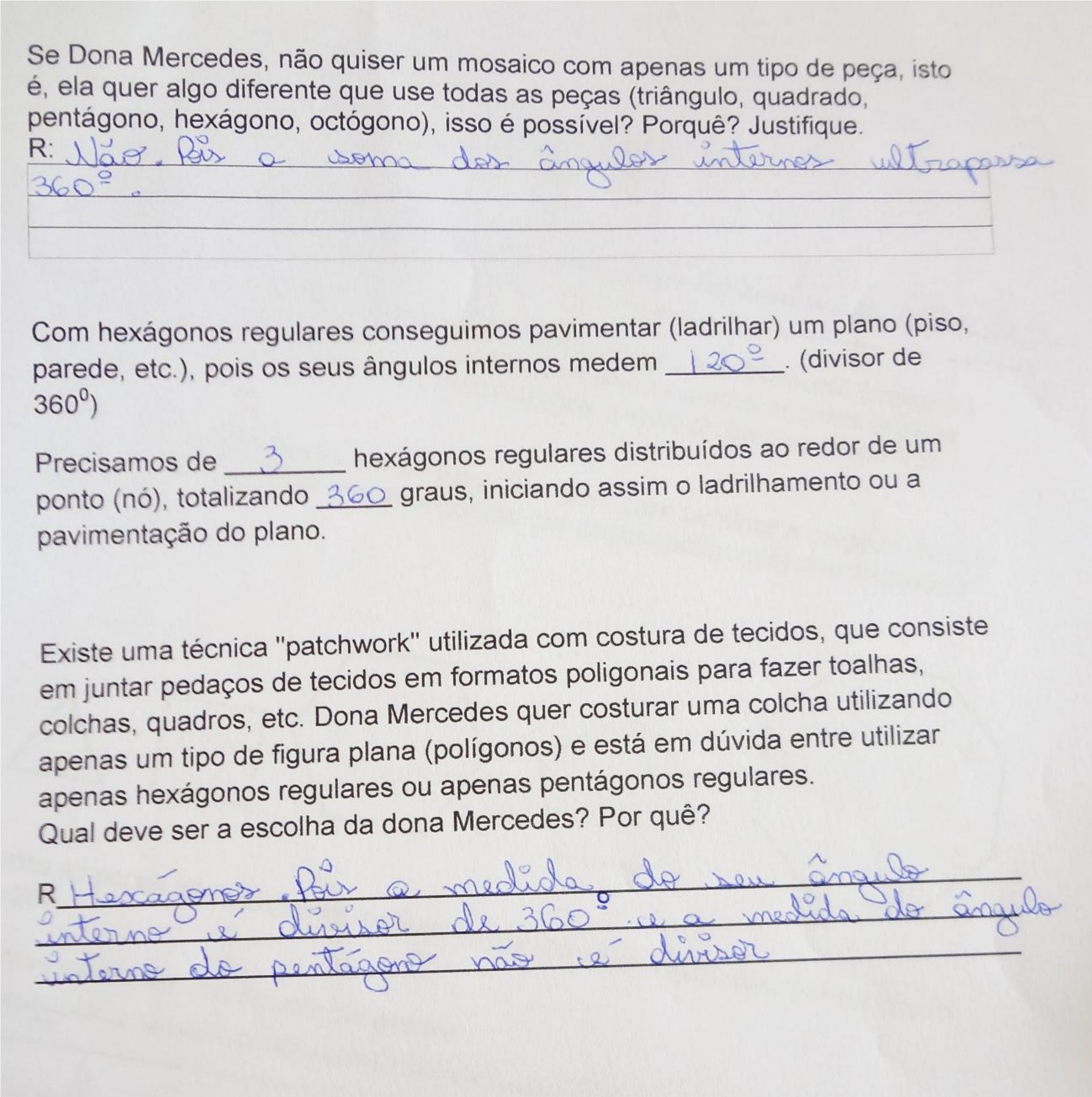
Triângulo: 60º Quadrado: 90º Pentágono: 108º
Hexágono: 120º Octógono: 135º

Nos ladrilhamentos possíveis, observe a distribuição ao redor do ponto (nó) em que as peças se encaixam e some as medidas dos ângulos internos.
Qual é o valor dessa soma?
R: 360º
Qual é o nome que o ângulo resultante dessa soma recebe?
R: Ângulo de uma volta

Aqui percebemos uma regra, que para haver um ladrilhamento regular, o ângulo interno do ladrilho (polígono) deve ter uma relação com o ângulo de uma volta completa (360^0). Escreva com suas palavras e de acordo com as informações encontradas, qual deve ser essa relação.
R: Ser um divisor do ângulo de uma volta

Assim, qual o motivo da impossibilidade de montar mosaicos (ladrilhamento) com as peças que não se encaixam? Explique com suas palavras o motivo. Tente relacionar o ângulo interno dessas peças com o ângulo de uma volta completa.
R: Eles não são divisores do ângulo de uma volta

FIGURA 69: ATIVIDADE 04 - REALIZADA PELOS ALUNOS.



Se Dona Mercedes, não quiser um mosaico com apenas um tipo de peça, isto é, ela quer algo diferente que use todas as peças (triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, octógono), isso é possível? Porquê? Justifique.

R: Não. Pois a soma dos ângulos internos ultrapassa 360º.

Com hexágonos regulares conseguimos pavimentar (ladrilhar) um plano (piso, parede, etc.), pois os seus ângulos internos medem 120º. (divisor de 360^0)

Precisamos de 3 hexágonos regulares distribuídos ao redor de um ponto (nó), totalizando 360 graus, iniciando assim o ladrilhamento ou a pavimentação do plano.

Existe uma técnica "patchwork" utilizada com costura de tecidos, que consiste em juntar pedaços de tecidos em formatos poligonais para fazer toalhas, colchas, quadros, etc. Dona Mercedes quer costurar uma colcha utilizando apenas um tipo de figura plana (polígonos) e está em dúvida entre utilizar apenas hexágonos regulares ou apenas pentágonos regulares.
Qual deve ser a escolha da dona Mercedes? Por quê?

R Hexágonos. Pois a medida do seu ângulo interno é divisor de 360º e a medida do ângulo interno do pentágono não é divisor

FIGURA 70: ATIVIDADE 04 - REALIZADA PELOS ALUNOS.

7.2 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE DO LADRILHAMENTO

Após a confecção das peças, foi realizada a aplicação do ladrilhamento regular dispostos em grupos de alunos um de frente com outro, para melhor manejo das peças.

Todas as etapas das atividades foram expostas oralmente, sem nenhum recurso audiovisual e as anotações pertinentes foram escritas manualmente no quadro branco e explicada pelo professor.

FIGURA 71: ALUNOS EM GRUPOS PARA REALIZAR O LADRILHAMENTO

No início, as atividades foram explicadas aos alunos bem como as técnicas para determinar a soma dos ângulos internos e seus respectivos ângulos de cada vértice.

FIGURA 72: DEMONSTRAÇÃO PARA DETERMINAR A SOMA DO ÂNGULO INTERNO DE UM POLÍGONO

A soma dos ângulos internos de um polígono de lado $\boldsymbol{n}$ é dada pela expressão: $\boldsymbol{Sn = (n - 2) \cdot 180^\circ}$, onde $\boldsymbol{n}$ = número de lados. Para calcular o valor de cada ângulo $\boldsymbol{a_n}$ interno de um polígono de lado $\boldsymbol{n}$ é preciso dividir a soma dos ângulos internos pelo número de lados do polígono, obtendo a expressão: $\boldsymbol{a_n = \frac{S_n}{n}}$.

FIGURA 73: LADRILHAMENTO COM POLÍGONOS: HEXÁGONO, TRIANGULO E QUADRADO

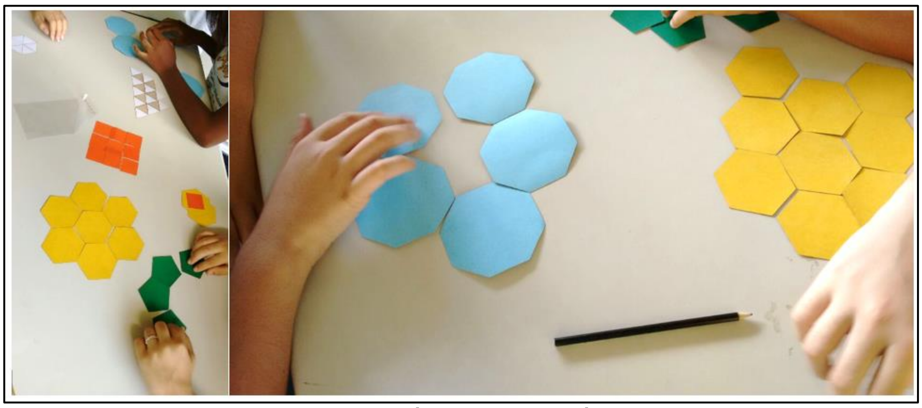


FIGURA 74: LADRILHAMENTO COM POLÍGONOS: HEXÁGONO, TRIANGULO E QUADRADO

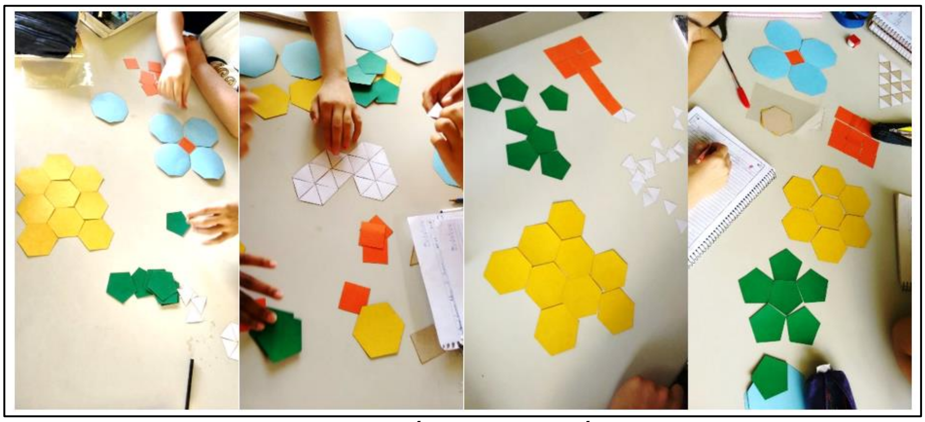


FIGURA 75: LADRILHAMENTO COM POLÍGONOS: HEXÁGONO, TRIANGULO E QUADRADO

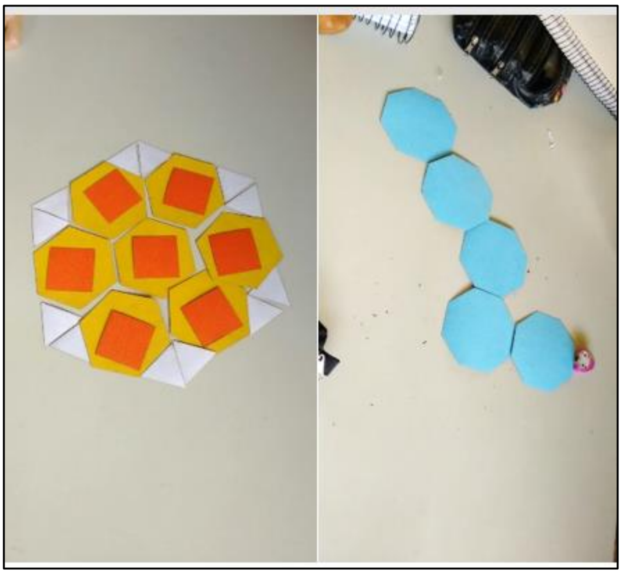


FIGURA 76: TENTATIVAS COM MAIS DE UM TIPO DE POLÍGONO

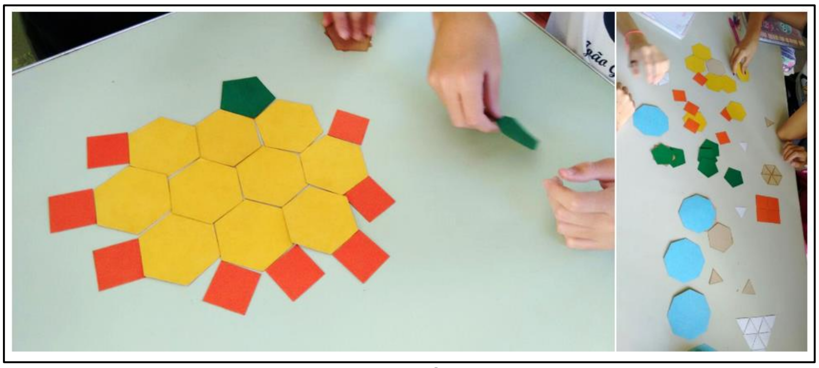


FIGURA 77: TENTATIVAS POSSÍVEIS DE LADRILHAMENTO

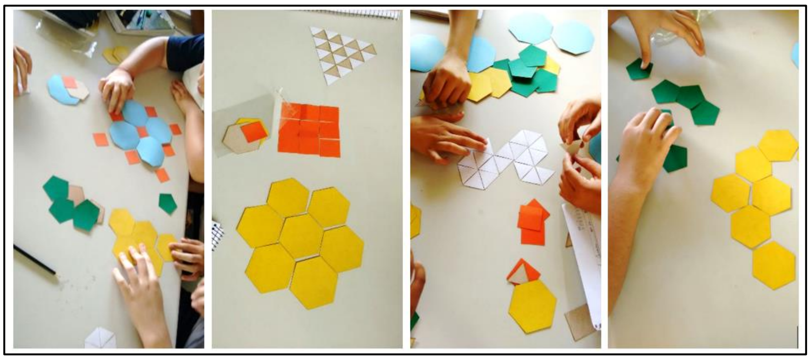


FIGURA 78: LADRILHAMENTO BEM-COMPORTADO

Nesse tópico, estão descritos os resultados das análises das atividades realizadas com ladrilhamento regulares. Os alunos perceberam que foi possível ladrilhar o plano com apenas três tipos de polígonos regulares, hexágono, triângulo e quadrado.

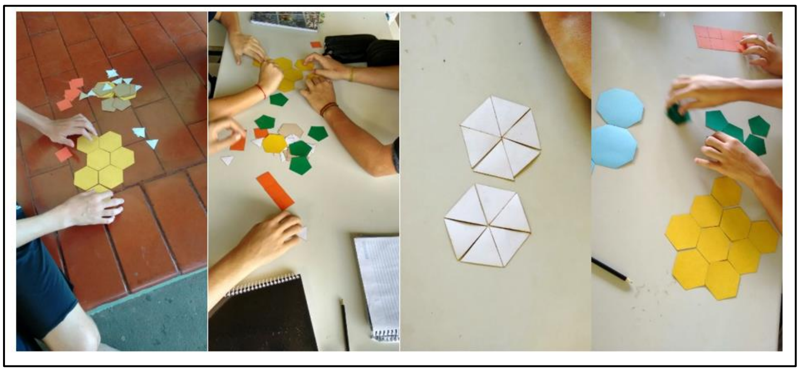


FIGURA 79: LADRILHAMENTO BEM-COMPORTADO.

Como ponto negativo, ressalta-se a impaciência de alguns alunos em aguardar sua vez para os esclarecimentos individuais sobre suas dúvidas.

Destacam-se os pontos positivos pela satisfação em manusear as peças e alegria em encontrar as soluções (ladrilhamento). Notou-se que aprendizagem foi significativa, devido ao elo entre conceito teórico e a prática de maneira que se pôde observar a concentração dos alunos e o interesse na realização das atividades

Ao propor a aplicação aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, percebeu-se a grande aceitação e interesse na participação da atividade. Os vinte e sete participantes foram submetidos ao questionário da atividade prática (ladrilhamento).

Questionário						
I			**II**		**III**	
Fácil	Médio	Difícil	Interessante	Divertido	Não contribui na aprendizagem de Geometria.	Contribui na aprendizagem de Geometria.
16	8	3	12	15	2	25
59%	30%	11%	44%	56%	7%	93%

TABELA 3: QUESTIONÁRIO OPINIÕES

De acordo com a tabela 03, temos os seguintes gráficos.

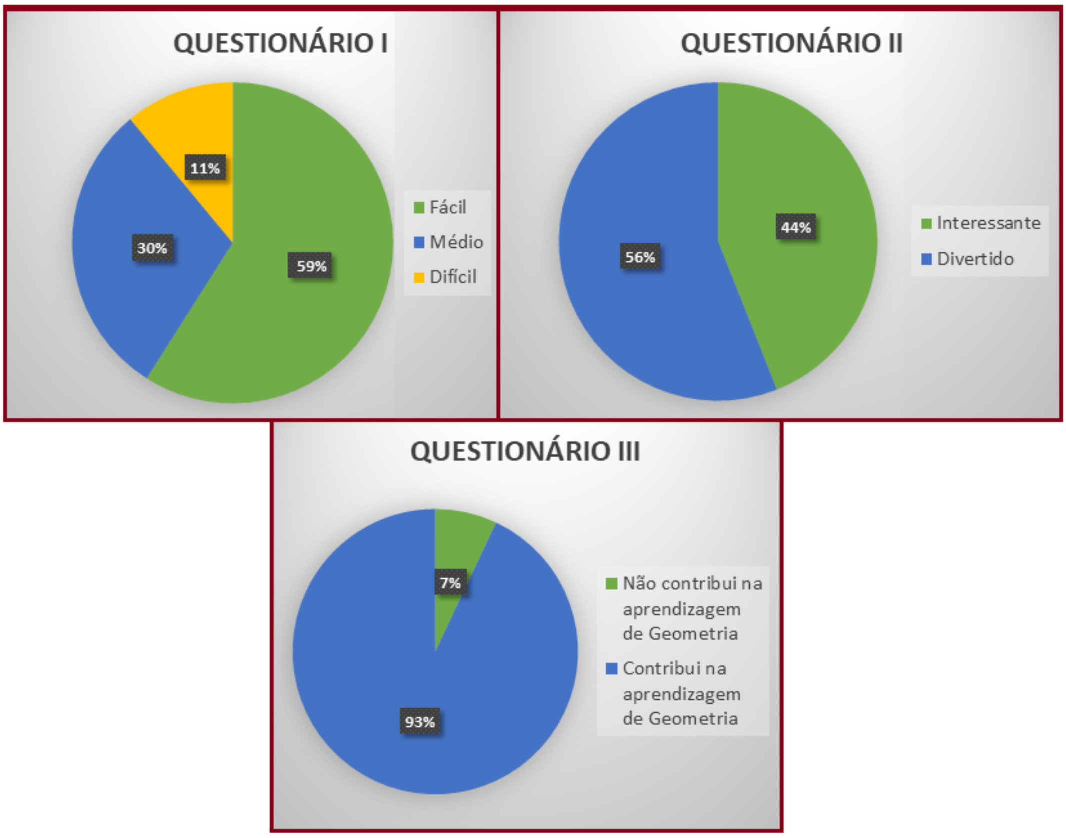


FIGURA 80: GRÁFICOS.

Comparando os resultados obtidos no gráfico, percebe-se grande aceitação na aplicação, sendo que 59 % dos alunos achou fácil; 30% consideraram médio e 11% difícil; no quesito interessante, 44%, já para 56%, foi divertido.

Portanto, os objetivos foram alcançados, devido a 93% dos alunos afirmarem que atividade contribuiu na aprendizagem de Geometria.

Ressaltamos que as atividades manuais possibilitaram uma interação entre os alunos, principalmente na execução da atividade que contribui para a construção do conhecimento geométrico, em que o trabalho em equipe e a colaboração do professor foram fundamentais para que todos os estudantes conseguissem fazer o ladrilhamento já que muitos não conheciam ou não sabiam como utilizar o material.

A dinâmica que o projeto proporcionou e exposição dos ladrilhamentos foram pontos positivos para autoestima dos alunos, uma vez que o conhecimento atingido foi significativo se comparado ao restrito trabalho teórico anteriormente ministrado com aulas tradicionais em sala.

Percebeu-se um grande desenvolvimento em resolução de problemas e questões propostas que, cheias de particularidades, serão apresentadas em seguida nas considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como propósito a investigação dos conceitos geométricos sobre ângulos internos e externos de polígonos regulares e aplicação prática do ladrilhamento dos polígonos regulares no ensino fundamental (7° ano), bem como a manipulação das peças formando os ladrilhamentos, de maneira que se permitisse contextualizar o conteúdo teórico, consolidando-o sob o ponto de vista prático através da construção de um ladrilhamento perfeito (bem-comportado) com a finalidade de motivar os alunos a participarem ativamente da aula.

Durante a aplicação das atividades, o ambiente agradável foi de fundamental importância. Notou-se que os alunos ajudavam uns aos outros no ladrilhamento. Através dessas atividades em que o aluno se sente à vontade, o simples fato de brincar com as peças faz com que ele esteja aprendendo a conviver em grupo de forma a desenvolver o aspecto efetivo e social, motivando e conduzindo a uma aprendizagem dinâmica e significativa.

Ficou evidente, durante a aplicação da proposta, que os alunos não possuíam um conhecimento prévio relevante sobre os conceitos de Geometria como um todo. Desta maneira, acredita-se que o trabalho contribuiu significativamente para a apresentação da Geometria de forma contextualizada, interessante e integrada à realidade.

A observação dos ângulos dos polígonos e a questão de quanto valeria a medida do ângulo interno de cada peça, surgiram de forma natural pelos alunos, destacando-se as classificações dos polígonos como um importante fator motivador para aprendizagem de cada educando.

O ladrilhamento possibilita uma visão de conservação de área de figuras muito interessante, facilitando a visualização de como são feitas as transformações de figuras no plano, tornando a atividade rica para o desenvolvimento de estratégias para o ensino em matemática.

Com a aplicação de materiais lúdicos, o professor promove uma significativa interação da turma como grupo para que se desenvolva a iniciativa na composição de novas ideias interessantes, criativas e curiosas, bem como a capacidade de analisar e refletir sobre os conceitos geométricos. As atividades lúdicas aumentam a motivação dos alunos para aprendizagem.

O professor, mediador no processo de aprendizagem, deve procurar alternativas para manter a motivação de seus alunos de forma que a aprendizagem se desenvolva através de sólidas bases na confiança, organização, concentração, respeito e criatividade com o intuito de reinventar procedimentos tradicionais com vistas à interação do aluno com o mundo objetivo e as pessoas ao redor, tornando o aprendizado da Geometria interessante e cheio de significados.

O ensino a Geometria se tornará prazeroso com as aplicações práticas como de jogos, desafios, músicas e peças de ladrilhamento, dentre outros. A relação do conteúdo com o ladrilhamento é muito importante, já que o trabalho realizado deve ser interessante e desafiador, sempre levando em consideração o nível que o aluno consegue atingir. Através dos ladrilhamento, é possível, além de estimular a criatividade dos alunos, desenvolver conceitos da Geometria plana tais como a soma dos ângulos, simetria, rotação, polígonos e a comparação de figuras.

Esta pesquisa aprofundou a situação do ensino/aprendizagem da geometria, focando-se em atividades lúdicas que auxiliem na superação das dificuldades encontradas nos anos finais do ensino fundamental. Buscou-se, também, envolver de forma significativa a motivação do aluno tanto como afetiva e cognitivamente. Assim, acredita-se que tal trabalho possa colaborar para que o ensino de Geometria de forma prazerosa, desenvolvendo e consolidando no aluno a habilidade de resolver problemas, favorecendo seu pensamento crítico e autônomo.

A concretização de todas as fases do presente trabalho se consistiu em uma etapa muito importante de minha vida profissional uma vez que proporcionou o contato com muitos materiais, livros, artigos e dissertações que contribuíram muito para minha formação acadêmica. Também em relação à prática docente junto aos alunos, as situações desafiadoras, as hipóteses que desejávamos validar e os obstáculos enfrentados convergiram para a concretização dos objetivos propostos.

Conclui-se que a proposta realizada teve índice satisfatório, segundo o questionário de opiniões respondido pelos alunos. A proposta é realmente um bom instrumento para o ensino da Geometria.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Deise Cíntia Camilo de; COSTACURTA, Mirtes Simone. **Atividades lúdicas para o ensino e aprendizagem da geometria nos anos finais do ensino fundamental**. Universidade Comunitária da Região de Chapecó curso de licenciatura de graduação plena em matemática. 2010. < https://goo.gl/VPKdP7 > Acesso 02/01/2017

ALVES, Sérgio; DALCIN, Mario**. Resista do professor de Matemática**. Número 40. Editora SBM, 1999

AMÂNCIO, Roselene Alves. **O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: ressignificando conceitos de polígonos, especialmente, dos quadriláteros.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. PUC MINAS. 2013.
< https://goo.gl/aT8zHs > Acesso em 02/03/2017

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** V. 2. Brasília: MEC / SEF, 1997. 92p.

CASTRO, Rosiene de; RUIZ, Fátima Corrêa. **Pavimentações no Plano Euclidiano.** Tese pós graduação. Universidade Federal de Minas. Gerais. 2008.
Disponível em: <https://goo.gl/p9YejU> Acesso em 02/03/2017

DIAS, Cláudio Carlos; SAMPAIO, João Carlos Vieira. **Desafio Geométrico: módulo I**.. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010. Curso de especialização para professores do ensino de matemática.

DOLCE, Oswaldo; POMPEO, José Nicolau. **Matemática Elementar: Geometria Plana**, Vol.: 9. Editora Atual, 1980.

DOWNS, Moise. **Geometria Moderna**. Editora Edgard Blucher LTDA. 1971

IMENES, L. M. **Geometria dos mosaicos.** Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 2000.

MACHADO, N. J. **Polígonos, Centopéias e outros Bichos.** Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1988.

MATEMÁTICA. **Ensino Fundamental II.** 6º Ano. Sistema de Ensino Poliedro, 2010.

MUNIZ, Cristiano A. **Explorando a geometria da orientação e do deslocamento.** Origami na Escola. Gestar II, tp6, p. 80-102, 2004. Disponível em
< https://goo.gl/mxwmY6 > Acesso em junho de 2016.

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Geometria Euclidiana Plana.** Vol.:2. Editora SBM.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. **Segmentos de Retas**. *Brasil Escola*.
Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/segmentos-retas.htm>. Acesso em 01 de junho de 2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Ensino Fundamental – 6º Série/7º ano. Vol.: 1. Nova Edição. 2014

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias. 1. ed. atual. - São Paulo: SE, 2012. 59p.

SHAUM, Coleção. **Geometria Plana.** Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1972

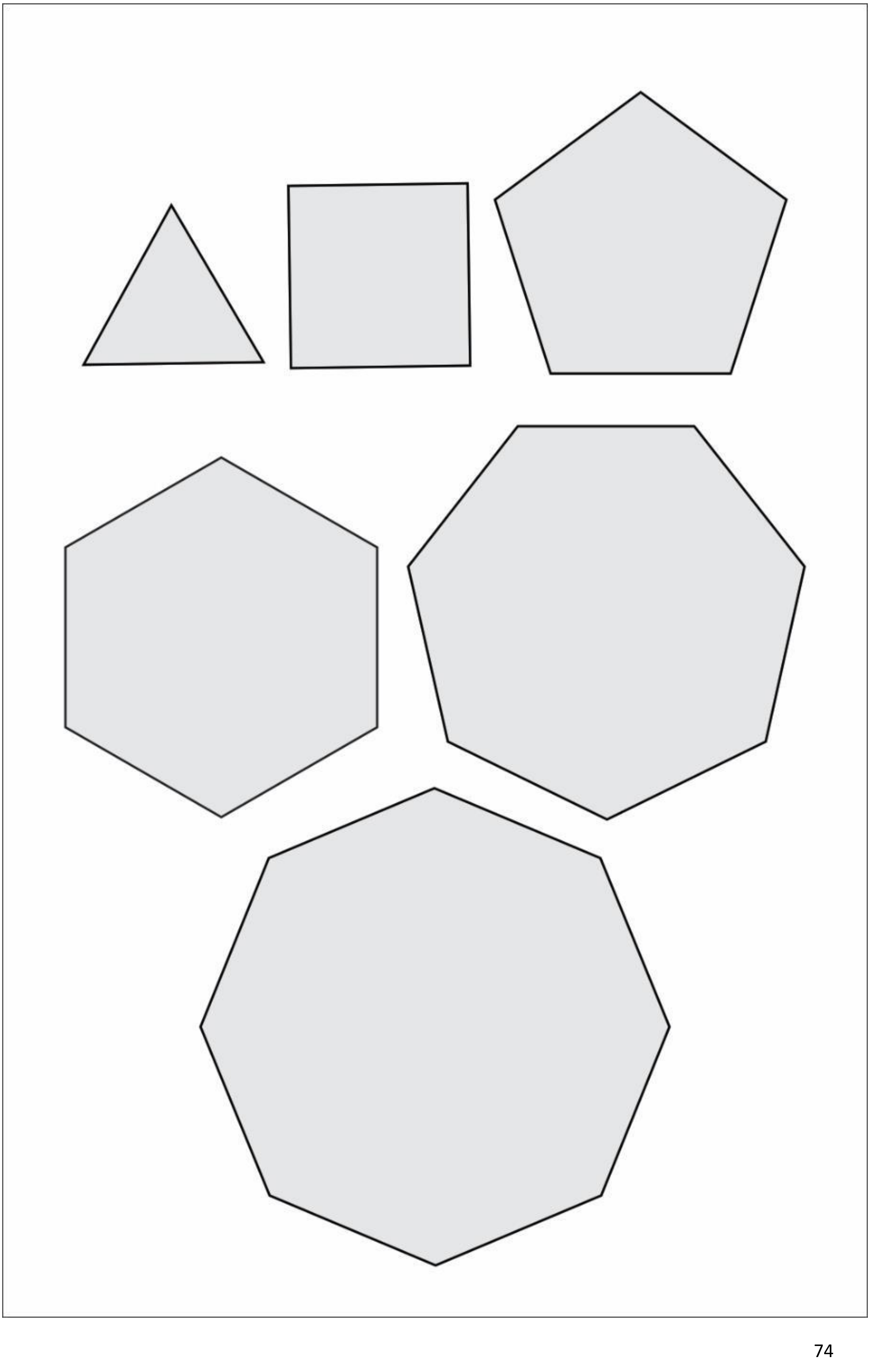
SILVEIRA, Flávia Lopes da; BISOGNIN, Edir Lucia. **Resgate histórico–cultural das origens do mosaico: sua aplicação ao design cultural- historical remembrance of the origins of mosaic: its application to design.** Trabalho Final de Graduação - TFG. 2 Acadêmica do Curso de Design – UNIFRA. 2005.
Disponível < https://goo.gl/krz0KD> acesso 03/05/2017.

UNB. Site MAT.UNB. **Mosaico. Laboratório de ensino a matemática.** Disponível em <https://goo.gl/rCsUoA>, acesso 2017.

SOUZA, J. C. de M. **Matemática divertida e curiosa.** Rio de Janeiro/São Paulo, Editora Record, 2001.

ANEXO I

I - MOLDES DE POLÍGONOS REGULARES



ANEXO II

ATIVIDADES – TEÓRICAS

ATIVIDADE I – SEGMENTOS

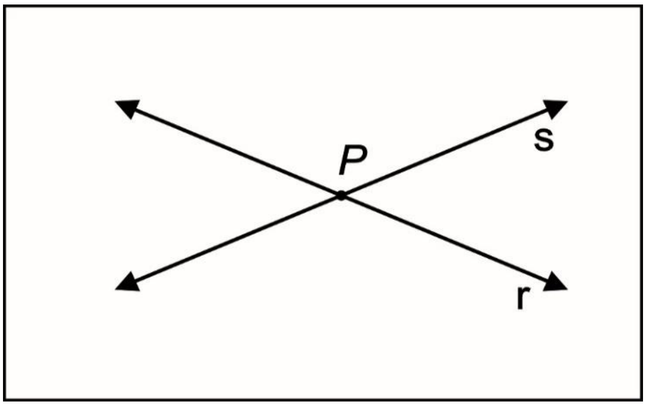
Grupo de Estudantes

____

____

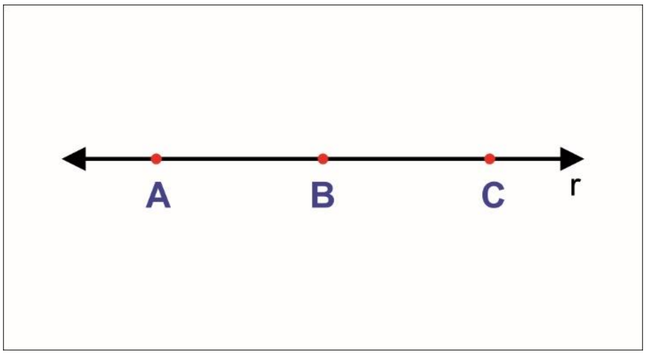
Objetivo: Verificar os conhecimentos dos alunos a respeito de retas, semirretas e segmentos de reta. Aprimorar a intuição geométrica do aluno e seu uso na resolução de problemas. Nesta etapa foram utilizadas as fichas com questões distribuídas aos grupos de alunos.

1) Dadas duas retas r e s concorrentes em ponto *P*. Quantas semirretas são determinadas pelo ponto comum *P*?



Resposta: ____

2) São dados três pontos A, B e C, pertencentes a uma reta r, nessa ordem.



a) Quantas semirreta são determinadas por esses três pontos?

Resposta:____

b) Indique-as semirretas mostrando cada uma delas.

Resposta:____

c) Quantos segmentos são determinados por esses três pontos?

Resposta:____

d) Indique-os segmentos cada deles

Resposta:____

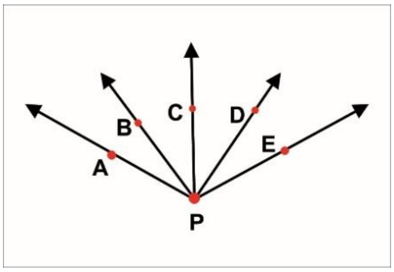
e) Qual é a posição relativa do ponto ***C*** em relação ao segmento ***AB*** (interno ou externo)? E a do ponto ***A***?

Resposta: ____

f) Qual é a posição do ponto B em relação ao segmento AC?

Resposta: ____

3) A partir de um ponto *P* qualquer, construa 5 semirretas de origem P (nunca opostas). Em cada uma delas marque um ponto (A, B, C, D e E). Considerando-se os segmentos contidos nessas semirretas, determine sem contar na figura, quantos pares de segmentos consecutivos são formados? Explique o raciocínio.



Resposta:____

____

____

____

____

ATIVIDADE II – ENTENDENDO ÂNGULOS

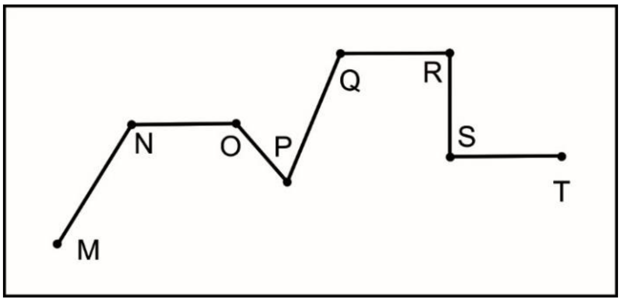
Grupo de Estudantes

____

____

O objetivo é verificar os conhecimentos dos alunos a respeito de ângulos e o que significa grau, conheçam o transferidor, o compasso e aprendam a manuseá-los. Nesta etapa, o material usado foram as fichas com questões, distribuídas aos grupos de alunos.

1) Imagine que alguém esteja caminhando sobre a linha abaixo. Cada mudança de direção é representada por um ângulo conforme a figura a seguir.



a) Indique os lugares onde se mudou de direção, isto é, os ângulos da figura.

Reposta: ____

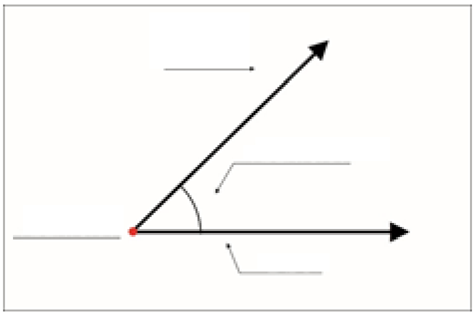
b) Quais são os ângulos retos? (Um quarto de volta corresponde ao ângulo reto).

Reposta: ____

2) Na figura abaixo temos duas semirretas que formam um ângulo.

a) nomeie os elementos indicados

Resposta: ____



3) Quanto mede os lados de um ângulo formado por duas semirretas de mesma origem?

Reposta: ____

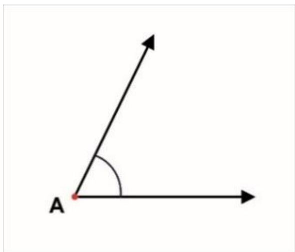
4) O que significa a notação Â?

Reposta: ____

5) Associe as figuras da esquerda com as identificações na coluna da direita.

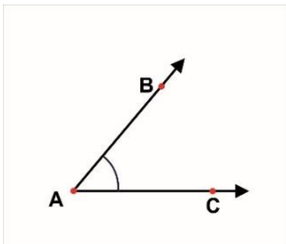
Resposta:

a)



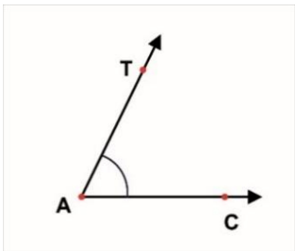
( ) $B\hat{A}C$

b)



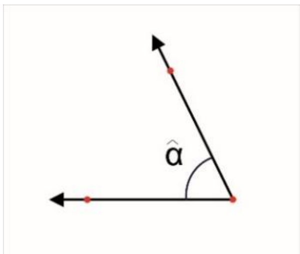
( ) $\hat{\alpha}$

c)



( ) $\hat{A}$

d)



( ) $T\hat{A}C$

6) Complete:

a) 90° é a medida de um ângulo ________________________________

b) 46° é a medida de um ângulo ________________________________

c) um ângulo raso ou de meia- volta mede ________________________

d) 360° é a medida de um ângulo de ____

e) Ângulos convexos são aqueles que medem mais do que _____ grau e menos do que _____ graus.

f) Ângulos côncavos (não convexos) são aqueles cujas medidas são ________ do que ____ e menores do que _________.

g) Dois ângulos são congruentes quando têm a ________________.

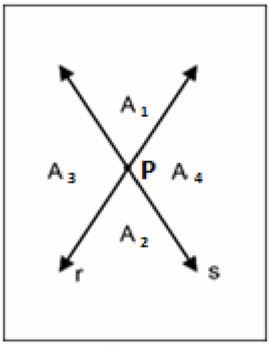
h) Dois ângulos cujas medidas somam 90^{0} são chamados de ângulos ___________.

i) Dois ângulos adjacentes cujas medidas somam 180 são chamados de _________________.

j) O suplemento de um ângulo é o ____________ que falta para que a soma entre as suas medidas é 180°.

k) Dado um ângulo de 65° o seu complemento mede ______, o seu suplemento mede e o seu replemento mede ______________.

l) Na figura abaixo, sabemos que o ângulo A_1 mede 43°, dê os valores de A_2, A_3 e A_4.



Resposta:

A_2 = ______ = ______ (O.P.V - Opostos pelo vértice).

$A_3 = 180° -$ _____ $= 180° - 43° = 137°$ (Suplementares)

A_4 = ______ $= 137°$ (O.P.V)

ATIVIDADES III – EXPLORANDO POLÍGONOS

Grupo de Estudantes

____

____

Objetivo: as atividades visam ao aprimoramento dos alunos sobre as definições dos polígonos, soma dos ângulos internos, medida dos ângulos externos, nomenclatura, convexidade, perímetro e medida do ângulo interno de um polígono regular. Nesta etapa, o material usado foram as fichas com questões, distribuídas aos grupos de alunos..

1) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono?

Resposta: __________

2) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um icoságono regular?

Resposta: __________

3) Qual é a medida **cada ângulo** interno de um pentágono regular?

Resposta: __________

4) Qual é a medida de ***cada ângulo*** interno de um icoságono regular?

Resposta: ___________

5) A soma das medidas dos ângulos internos de um pátio que tem a forma de um polígono regular é 1440°.

a) Qual é o número de lados do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: ___________

b) Qual é o nome do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: ___________

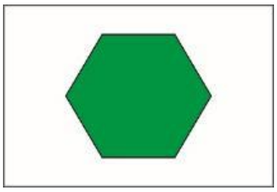
c) Qual é a medida de cada ângulo interno do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: ___________

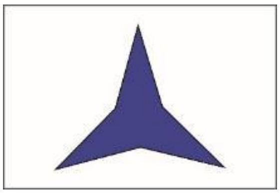
d) Qual é a medida de cada ângulo externo do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: ___________

6) Foi solicitado à menina Mariah Clara e à sua mãe Tathiana que desenhassem um hexágono:



Desenho de Mariah Clara



Desenho de Tathiana

a) Observando o desenho de cada uma delas, diga, quem acertou?

Resposta: ________________________

b) Se fosse solicitado para desenhar um hexágono convexo, quem teria acertado?

Resposta: _______________________

c) Que tipo de hexágono deveria ser solicitado para que apenas Tathiana acertasse?

Resposta: ________________________

7) Responda:

a) Quantos ângulos internos tem um polígono de 5 lados?

Resposta: _______________________

b) Quantos ângulos internos tem um polígono regular de 8 lados?

Resposta: _______________________

c) Quantos lados tem um polígono regular de 15 ângulos externos?

Resposta: _______________________

8) Responda:

a) sabendo-se que o perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados (o contorno do polígono), determine o perímetro de um icoságono regular onde cada lado mede 37 cm.

Resposta: _____________________

b) Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono regular, sabendo que a medida de cada um dos seus ângulos internos é 135°.

Resposta: ____________________

c) Calcule a medida de cada um dos ângulos internos de um eneágono regular, sabendo que a soma das suas medidas é igual a 1260°.

Resposta: ______________________

9) Todo quadrado é um quadrilátero, mas, nem todo quadrilátero é um quadrado. Por quê?

Resposta:____

____

ATIVIDADE IV – EXPLORANDO O LADRILHAMENTO

Grupo de Estudantes

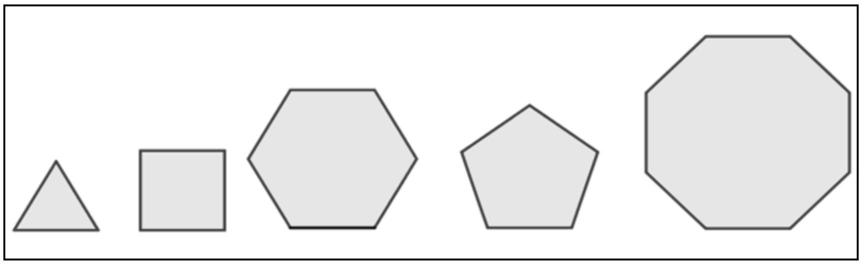
____

____

Objetivo: O objetivo dessa atividade é encontrar o ladrilhamento (mosaico) possível para uma calçada, utilizando para isso os conhecimentos prévios sobre polígonos regulares e as informações que os problemas propostos oferecem.

Apresentamos aqui as questões propostas aos alunos após a distribuição das peças feitas em papel cartão.

1) Dona Mercedes contratou o pedreiro Seu Cal, para ladrilhar a calçada da sua casa. Para isso, ele deve usar algumas das peças (poligonais) dos seguintes formatos:



Todas as peças são polígonos regulares e os lados de todas elas têm a mesma medida. Escreva os respectivos nomes das figuras poligonais apresentadas na figura acima:

Resposta: ____

2) Seu Cal está com dificuldade para determinar um mosaico (ladrilhamento) e pede a sua ajuda. Podem ajudá-lo? Mas antes, é necessário definir algumas características sobre os ladrilhamentos (mosaicos).

Primeiro, quais são os ladrilhamentos regulares, ou seja, ladrilhamento que contém apenas um tipo de peça (polígono). Quais são possíveis? Para isso, vocês utilizarão as peças que cada grupo tem. Façam os testes.

a) Quantos ladrilhamentos regulares diferentes, vocês conseguiram montar?

Resposta: ____

b) Com quais peças foi possível montar um ladrilhamento regular?

( ) Triângulos ( ) Quadrados ( ) Pentágonos ( ) Hexágonos ( ) Octógonos

3) Como todas as peças (polígonos) têm a mesma medida de lado, é necessário recordar e ver a medida dos ângulos internos de cada uma, lembrem-se de que são peças (polígonos) regulares e, para isso, utilizem a fórmula da medida de um ângulo interno de um polígono regular, que vocês já aprenderam:

$$a_n = \frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$$

Em que n é o número de lados e a_n representa a medida de cada ângulo interno. Coloque em cada lacuna o valor do ângulo interno de cada peça.

Triângulo: (   ) ***Quadrado: (   )*** ***Pentágono: ( )***
Hexágono: (   ) ***Octógono: (   )***

4) Nos ladrilhamentos possíveis, observe a distribuição ao redor do ponto (nó) em que as peças se encaixam e some as medidas dos ângulos internos. Qual é o valor dessa soma?
Resposta: ____

5) Qual é o nome que o ângulo resultante dessa soma recebe?
Resposta: ____

6) Para haver um ladrilhamento regular, o ângulo interno do ladrilho (polígono) deve ter uma relação com o ângulo de uma volta completa (360^0). Escreva com suas palavras e, de acordo com as informações encontradas, qual deve ser essa relação?
Resposta: ____

7) Assim, qual o motivo da impossibilidade de montar mosaicos (ladrilhamento) com as peças que não se encaixam? Explique com suas palavras o motivo. Tente relacionar o ângulo interno dessas peças com o ângulo de uma volta completa.
Resposta: ____

8) Com hexágonos regulares, consegue-se pavimentar (ladrilhar) um plano (piso, parede, etc.), pois seus ângulos internos medem _____ (divisor de 360^0).

9) Precisamos de ______ hexágonos regulares distribuídos ao redor de um ponto (nó), totalizando _______ graus, iniciando assim o ladrilhamento ou a pavimentação do plano.

10) Existe uma técnica "patchwork" utilizada com costura de tecidos, que consiste em juntar pedaços de tecidos em formatos poligonais para fazer toalhas, colchas, quadros, etc. Dona Mercedes quer costurar uma colcha utilizando apenas um tipo de figura plana (polígonos) e está em dúvida entre utilizar apenas hexágonos regulares ou apenas pentágonos regulares. Qual deve ser a escolha da dona Mercedes? Por quê?

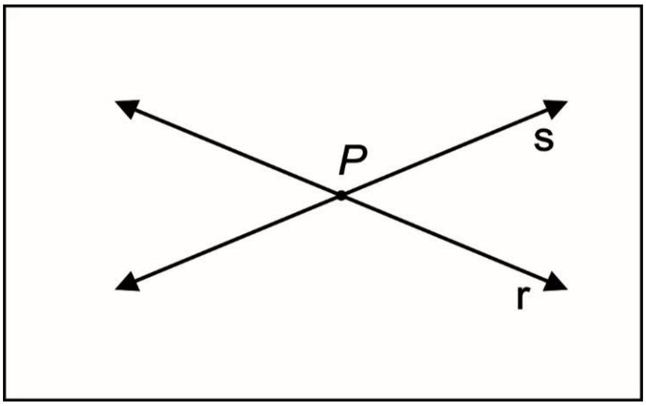
Resposta: ____

ATIVIDADES – TEÓRICAS (RESPOSTAS ESPERADAS)

ATIVIDADE I – SEGMENTOS

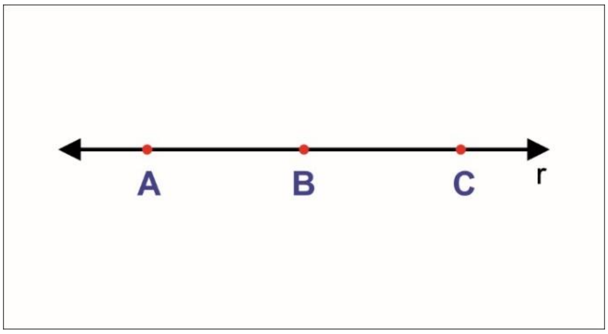
Objetivo: Verificar os conhecimentos dos alunos a respeito de retas, semirretas e segmentos de reta. Aprimorar a intuição geométrica do aluno e seu uso na resolução de problemas. Nesta etapa, o material usado foram as fichas com questões distribuídas aos grupos de alunos.

1) Dadas duas retas r e s concorrentes em ponto P. Quantas semirretas são determinadas pelo ponto comum P ?



Resposta: é possível determinar 4 semirretas

2) São dados três pontos A,B e C, pertencentes a uma reta r, nessa ordem.



a) Quantas semirreta são determinadas por esses três pontos?

Resposta: 6 semirretas

b) Indique-as semirretas mostrando cada uma delas.

Resposta: $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$, $\overrightarrow{\mathbf{CB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$, uma semirreta de origem A sentido à $\boldsymbol{esquerda}$ **e uma semirreta de origem C sentido** à $\boldsymbol{direita}$**.**

c) Quantos segmentos são determinados por esses três pontos?

Resposta: São três segmentos

d) Indique cada um deles.

Resposta: $\overline{\mathbf{AB}}$**,** $\overline{\mathbf{AC}}$**,** $\overline{\mathbf{BC}}$**.**

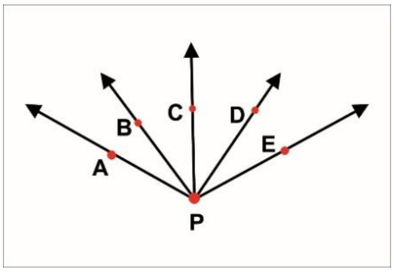
e) Qual é a posição relativa do ponto ***C*** em relação ao segmento ***AB*** (interno ou externo)? E a do ponto ***A***?

Resposta: Ponto C é Externo, o ponto A (origem) é interno.

f) Qual é a posição do ponto B em relação ao segmento AC?

Resposta: Interno

3) A partir de um ponto *P* qualquer, construa 5 semirretas de origem P (nunca opostas). Em cada uma delas marque um ponto (A, B, C, D e E). Considerando-se os segmentos contidos nessas semirretas, determine sem contar na figura, quantos pares de segmentos consecutivos são formados? Explique o raciocínio.



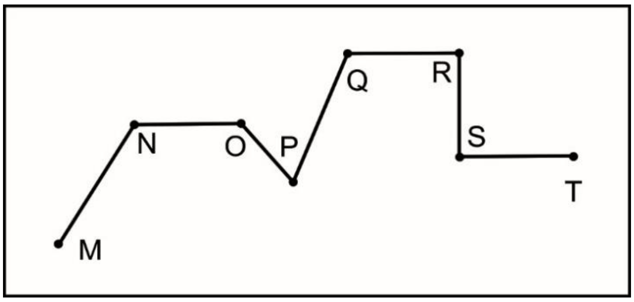
Resposta:10 segmentos consecutivos.

Comentário: Esperava-se que os alunos considerassem a possibilidade de cada segmento ser consecutivo com outro, desprezando-se as repetições, como por exemplo, (AP e PB e PB e PA) - O segmento AP é consecutivo de 4 outros segmentos (determinados pelos quatro pontos restantes. O segmento BP é consecutivo de 3 outros, e assim sucessivamente. (4+3+2+ 1 = 10).

ATIVIDADE II – ENTENDENDO ÂNGULOS

O objetivo é verificar os conhecimentos dos alunos a respeito de ângulos e o que significa grau, conheçam o transferidor, o compasso e aprendam a manuseá-los. Nesta etapa, o material usado foram as fichas com questões, distribuídas aos grupos de alunos.

1) Imagine que alguém esteja caminhando sobre a linha abaixo. Cada mudança de direção é representada por um ângulo conforme a figura a seguir.



a) Indique os lugares onde se mudou de direção, isto é, os ângulos da figura.

Reposta: N, O, P, Q, R e S.

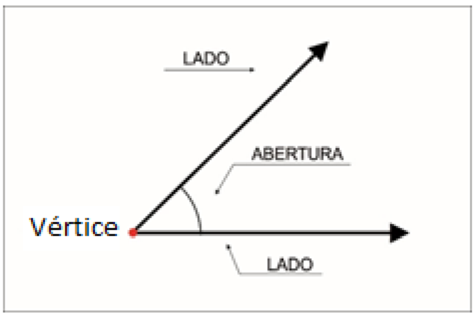
c) Quais são os ângulos retos? (Um quarto de volta corresponde ao ângulo reto).

Reposta: $\widehat{R}$ e $\hat{S}$

2) Na figura abaixo temos duas semirretas que formam um ângulo.

a) nomeie os elementos indicados

Resposta:



c) Quanto mede os lados de um ângulo formado por duas semirretas de mesma origem?

Reposta: como os lados do ângulo são semirretas suas medidas são indefinidas

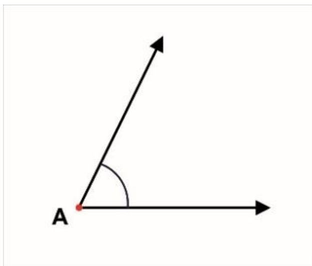
d) O que significa a notação Â?

Reposta: significa ângulo de vértice A.

e) Associe as figuras da esquerda com as identificações na coluna da direita.

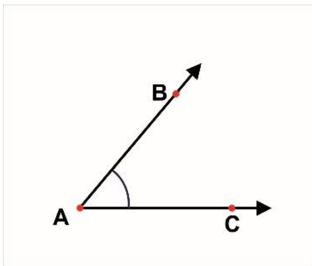
Resposta:

e)



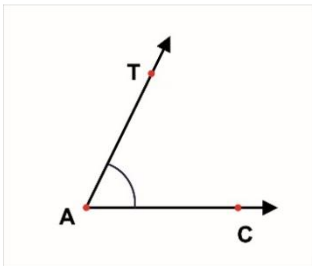
(**b**) $B\hat{A}C$

f)



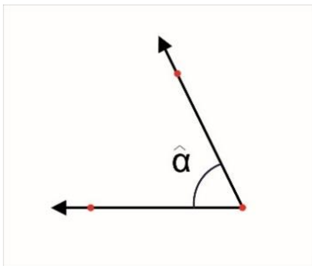
(**d**) $\hat{\alpha}$

g)



(**a**) $\hat{A}$

h)



(**c**) $T\hat{A}C$

f) Complete:

9) 90° é a medida de um ângulo **<u>reto</u>**

10) 46° é a medida de um ângulo **<u>agudo (menor do que o ângulo reto)</u>**

11) um ângulo raso ou de meia- volta mede **<u>180°</u>**

12) 360° é a medida de um ângulo de **<u>uma volta (uma circunferência)</u>**

13) Ângulos convexos são aqueles que medem mais do que *<u>0°</u>* grau e menos do que **<u>90°</u>** graus.

14) Ângulos côncavos (não convexos) são aqueles cujas medidas são **<u>maiores que 0°</u>** e menores do que **<u>180°.</u>**

15) Dois ângulos são congruentes quando têm a **<u>mesma medida</u>**

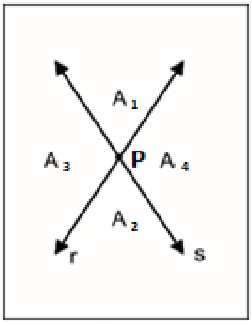
16) Dois ângulos cujas medidas somam 90^0 são chamados de ângulos **<u>complementares</u>**

17) Dois ângulos adjacentes cujas medidas somam 180 são chamados de **<u>suplementares.</u>**

18) O suplemento de um ângulo é o ***<u>ângulo</u>*** que falta para que a soma entre as suas medidas é 180°.

19) Dado um ângulo de 65° o seu complemento mede **<u>25°</u>**, o seu suplemento mede **<u>115°</u>** e o seu replemento mede **<u>295°</u>.**

20) Na figura abaixo, sabemos que o ângulo A_1 mede 43°, dê os valores de A_2, A_3 e A_4.



Resposta:

$A_2 = A_1 = 43°$ (O.P.V)

$A_3 = 180° - A_1 = 180° - 43° = 137°$ (Suplementares)

$A_4 = A_3 = 137°$ (O.P.V)

21) Quanto mede o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marcam:

a) 15 horas?

b) 18 horas?

c) 12 horas?

Repostas:

- **15 horas - Resposta: 90º**
- **18 horas - Resposta: 180°**
- **12 horas - Resposta: 360° ou 0°**

ATIVIDADES III – EXPLORANDO POLÍGONOS

Objetivo: as atividades visam ao aprimoramento dos alunos sobre as definições dos polígonos, soma dos ângulos internos, medida dos ângulos externos, nomenclatura, convexidade, perímetro e medida do ângulo interno de um polígono regular. Nesta etapa, o material usado foram as fichas com questões, distribuídas aos grupos de alunos. Apresentamos aqui as questões e as respostas desejadas.

1) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono?

Resposta: 1080°

2) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um icoságono regular?

Resposta: 3240°

3) Qual é a medida **cada ângulo** interno de um pentágono regular?

Resposta: 108°

4) Qual é a medida de **cada ângulo** interno de um icoságono regular?

Resposta: 162º

5) A soma das medidas dos ângulos internos de um pátio que tem a forma de um polígono regular é 1440°.

a) Qual é o número de lados do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: 10 lados

b) Qual é o nome do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: decágono

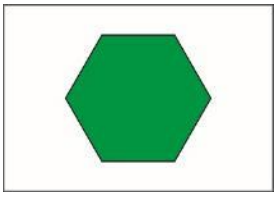
c) Qual é a medida de cada ângulo interno do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: 144°

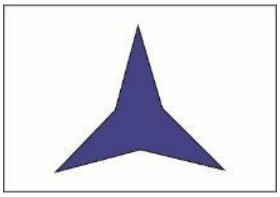
d) Qual é a medida de cada ângulo externo do polígono que dá forma ao pátio?

Resposta: 36°

6) Foi solicitado à menina Mariah Clara e à sua mãe Tathiana que desenhassem um hexágono:



Desenho de Mariah Clara



Desenho de Tathiana

a) Observando o desenho de cada uma delas, diga, quem acertou?

Resposta: Mariah Clara e Tathiana

b) Se fosse solicitado para desenhar um hexágono convexo, quem teria acertado?

Resposta: Mariah Clara

c) Que tipo de hexágono deveria ser solicitado para que apenas Tathiana acertasse?

Resposta: côncavo ou não convexo

7) Responda:

a) Quantos ângulos internos tem um polígono de 5 lados?

Resposta: 5 (cinco ângulos)

b) Quantos ângulos internos tem um polígono regular de 8 lados?

Resposta: 8 (oito ângulos)

c) Quantos lados tem um polígono regular de 15 ângulos externos?

Resposta: 15 (quinze lados)

8) Responda:

a) Sabendo-se que o perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados (o contorno do polígono), determine o perímetro de um icoságono regular onde cada lado mede 37 cm.

Resposta: $\mathbf{740\ cm}$ $(\mathbf{37cm \cdot 20})$

b) Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono regular, sabendo que a medida de cada um dos seus ângulos internos é 135°.

Resposta: 1080°

c) Calcule a medida de cada um dos ângulos internos de um eneágono regular, sabendo que a soma das suas medidas é igual a 1260°.

Resposta: 140°

9) Todo quadrado é um quadrilátero, mas, nem todo quadrilátero é um quadrado. Por quê?

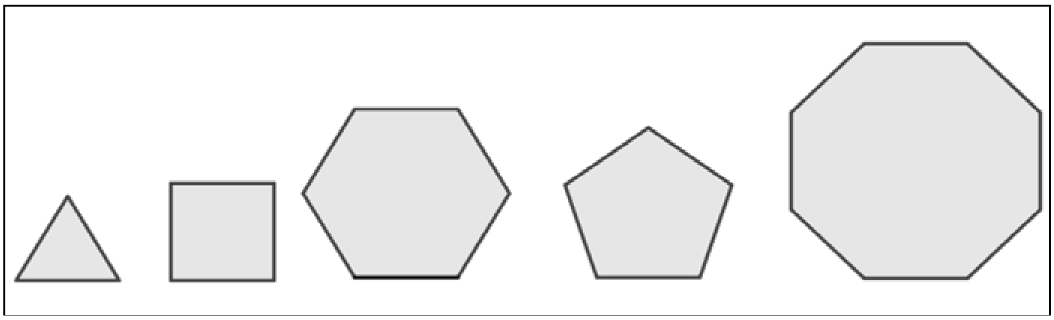
Resposta: Todo quadrado possui 4 lados, isto é, é um quadrilátero, mas nem todo quadrilátero possui os lados congruentes e os 4 ângulos retos como o quadrado.

ATIVIDADE IV – EXPLORANDO O LADRILHAMENTO

Objetivo: O objetivo dessa atividade é encontrar o ladrilhamento (mosaico) possível para uma calçada, utilizando para isso os conhecimentos prévios sobre polígonos regulares e as informações que os problemas propostos oferecem.

Apresentamos aqui as questões propostas aos alunos após a distribuição das peças feitas em papel cartão e as respostas desejadas.

1) Dona Mercedes contratou o pedreiro Seu Cal, para ladrilhar a calçada da sua casa. Para isso, ele deve usar algumas das peças (poligonais) dos seguintes formatos:



Todas as peças são polígonos regulares e os lados de todas elas têm a mesma medida. Escreva os respectivos nomes das figuras poligonais apresentadas na figura acima:

Resposta: Triangulo, quadrado, hexágono, pentágono e octógono.

2) Seu Cal está com dificuldade para determinar um mosaico (ladrilhamento) e pede a sua ajuda. Podem ajudá-lo? Mas antes, é necessário definir algumas características sobre os ladrilhamentos (mosaicos).

Primeiro, quais são os ladrilhamentos regulares, ou seja, ladrilhamento que contém apenas um tipo de peça (polígono). Quais são possíveis? Para isso, vocês utilizarão as peças que cada grupo tem. Façam os testes.

a) Quantos ladrilhamentos regulares diferentes, vocês conseguiram montar?

Resposta: 3 (três)

b) Com quais peças foi possível montar um ladrilhamento regular?

(X) Triângulos (X) Quadrados ( ) Pentágonos (X) Hexágonos ( ) Octógonos

3) Como todas as peças (polígonos) têm a mesma medida de lado, é necessário recordar e ver a medida dos ângulos internos de cada uma, lembrem-se de que são peças (polígonos) regulares e, para isso, utilizem a fórmula da medida de um ângulo interno de um polígono regular, que vocês já aprenderam:

$$a_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

Em que *n* é o número de lados e a_n representa a medida de cada ângulo interno. Coloque em cada lacuna o valor do ângulo interno de cada peça.

Triângulo:(60º) ***Quadrado: (90º)*** ***Pentágono: (108º)***
Hexágono: (120º) ***Octógono: (135º)***

4) Nos ladrilhamentos possíveis, observe a distribuição ao redor do ponto (nó) em que as peças se encaixam e some as medidas dos ângulos internos. Qual é o valor dessa soma?
Resposta: 360º

5) Qual é o nome que o ângulo resultante dessa soma recebe?
Resposta: Ângulo de uma volta

6) Para haver um ladrilhamento regular, o ângulo interno do ladrilho (polígono) deve ter uma relação com o ângulo de uma volta completa (360^0). Escreva com suas palavras e, de acordo com as informações encontradas, qual deve ser essa relação?
Resposta: O ângulo interno deve ser divisor de 360º

7) Assim, qual o motivo da impossibilidade de montar mosaicos (ladrilhamento) com as peças que não se encaixam? Explique com suas palavras o motivo. Tente relacionar o ângulo interno dessas peças com o ângulo de uma volta completa.
Resposta: Ficará um vão entre os ladrilhos ou uma sobreposição entre eles.

8) Com hexágonos regulares, consegue-se pavimentar (ladrilhar) um plano (piso, parede, etc.), pois seus ângulos internos medem **120º** (divisor de 360^0).

9) Precisamos de **03** hexágonos regulares distribuídos ao redor de um ponto (nó), totalizando **360º** graus, iniciando assim o ladrilhamento ou a pavimentação do plano.

10) Existe uma técnica "patchwork" utilizada com costura de tecidos, que consiste em juntar pedaços de tecidos em formatos poligonais para fazer toalhas, colchas, quadros, etc. Dona Mercedes quer costurar uma colcha utilizando apenas um tipo de figura plana (polígonos) e está em dúvida entre utilizar apenas hexágonos regulares ou apenas pentágonos regulares. Qual deve ser a escolha da dona Mercedes? Por quê?

Resposta: Ela deve usar hexágonos, pois a soma dos ângulos internos de três deles totaliza 360º.