

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *EM ESTRUTURAS E***  
***CONSTRUÇÃO CIVIL***

**IMPLEMENTAÇÃO DAS AÇÕES DE PROTENSÃO EM PROGRAMA  
DE GRELHA EQUIVALENTE**

**ELKER LUCAS GARRONI**

São Carlos

2018

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *EM ESTRUTURAS E***  
***CONSTRUÇÃO CIVIL***

**IMPLEMENTAÇÃO DAS AÇÕES DE PROTENSÃO EM PROGRAMA  
DE GRELHA EQUIVALENTE**

**ELKER LUCAS GARRONI**

Projeto de Pesquisa apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Construção Civil

**Área de Concentração:** Sistemas Construtivos

**Orientador:** Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho

São Carlos

2018



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

---

**Folha de Aprovação**

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Eiker Lucas Garroni, realizada em 24/04/2018:

Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho  
UFSCar

Prof. Dr. Marcelo de Araujo Ferreira  
UFSCar

Profa. Dra. Maria Cristina Vidigal de Lima  
UFU

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Maria Cristina Vidigal de Lima e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ão) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho

## **AGRADECIMENTOS**

Todo meu agradecimento ao Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho pela oportunidade, dedicação nas correções, orientações, confiança neste período de aprendizado permitindo-me atingir os objetivos necessários e principalmente pela amizade construída.

Aos professores M. Sc. Andrew John Richter Cass e M. Sc. Antonio de Faria pela transferência de conhecimentos, contribuindo extensamente na minha formação profissional e na conclusão deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de São Carlos que me ajudaram e dedicaram seu tempo neste período.

Aos meus colegas de pós-graduação que tornaram um período de longa dedicação em algo divertido.

À minha esposa, meus pais e minha irmã pelo apoio, compreensão, amor e honra de tê-los como minha família.

## RESUMO

GARRONI, Elker Lucas. **Implementação das ações de protensão em programa de grelha equivalente.** 2017. Dissertação de mestrado (Mestrado em Estudo e Desenvolvimento de Sistemas Estruturais) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil, 2017.

Este trabalho estuda o efeito da protensão em estruturas de lajes lisas e vigas de concreto. O trabalho consistiu em acoplar uma sub-rotina computacional na plataforma já existente, o CALCO. Atualmente o sistema permite a análise, cálculo de esforços e deslocamentos, de pavimentos de concreto por meio da grelha equivalente e foi desenvolvido por (CASS, 2015). Procurou-se inicialmente montar um módulo que permite o uso de cabos de protensão curvos com geometria pré-definida. Para facilitar a introdução dos esforços de protensão, os cabos apenas podem ser aplicados nas barras da grelha, podendo o usuário criar faixas de protensão. Em seguida, o módulo em questão transformará a ação de protensão em esforços nodais equivalentes. Desta forma podem ser calculados todos os esforços isostáticos e hiperestáticos da estrutura. São elaborados exemplos e comparados com programa já existentes.

**Palavras-chave:** Concreto Protendido, CALCO, Grelha Equivalente, Estruturas, Análise Estrutural, Programa Livre, Pascal.

## ABSTRACT

GARRONI, Elker Lucas. **Implementation of the prestress action in equivalent grid program.** 2017. Master dissertation (Master in Study and Structural Systems Development) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brazil, 2017.

This research studies the prestress effect on structures of flat plate and beams of concrete. The work consisted of coupling a computational subroutine in the already existing platform, the CALCO. Currently the system allows the analysis, calculation of stresses and displacements, of concrete floors through the equivalent grid and was developed by (CASS, 2015). Initially a module was designed that allows the use of curved pretension cables with predefined geometry. To facilitate the introduction of the pre-tensioning efforts the cables can only be applied to the bars of the grid, and the user can create pretension bands. Then the module in question will transform the pretension action into equivalent nodal stresses. In this way, all the isostatic and hyperstatic stresses of the structure can be calculated. Examples are made and compared with existing programs.

**Key-words:** Prestressed Concrete, CALCO, Grid Equivalent, Structures, Structural Analysis, Free Program, Pascal.

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1: Sistema de protensão com aderência inicial de uma laje alveolar .....	18
Figura 2: Cordoalha engraxada .....	19
Figura 3: Consideração do carregamento equivalente $u_p$ que traduz o efeito da flexão da protensão.....	22
Figura 4: Pavimento representado como grelha equivalente.....	29
Figura 5: Grelha plana.....	34
Figura 6: Deslocamentos nodais nas extremidades de uma barra de grelha .....	35
Figura 7: Momentos fletores e reações na barra devidos a um deslocamento vertical em uma das extremidades .....	36
Figura 8: Momentos de torção na barra devidos a uma rotação em uma das extremidades	36
Figura 9: Momentos fletores e reações na barra devidos a uma rotação em uma das extremidades .....	36
Figura 10: Rotação de eixos .....	38
Figura 11: Cargas nodais para uma grelha plana .....	40
Figura 12: Cargas nodais em uma barra de grelha .....	40
Figura 13: Esforços nodais nas extremidades de uma barra de grelha .....	41
Figura 14: Fluxograma do módulo de cálculo de grelhas .....	43
Figura 15: Ação uniformemente distribuída em um elemento e as ações nas extremidades do elemento e nos nós equivalentes .....	45
Figura 16: Conformação geral do arquivo de dados .....	46
Figura 17: Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras ativas.....	49
Figura 18: Traçado vertical dos cabos.....	51
Figura 19: Traçado vertical dos cabos.....	52
Figura 20: Perfil do cabo em balanço e carregamento introduzido pela protensão .....	53
Figura 21: Traçado vertical do cabo em balanço.....	54
Figura 22: Cálculo da acomodação da ancoragem.....	55
Figura 23: Carregamento equivalente do cabo de protensão .....	60
Figura 24: Área de influência do nó da grelha.....	61
Figura 25: Esquemas de forças na viga para a seção S.....	62
Figura 26: Efeito hiperestático de protensão .....	63
Figura 27: Efeito de forças na viga para a seção S devido ao efeito hiperestático .....	63
Figura 28: Seção transversal da viga faixa protendida. ....	65
Figura 29: Trajetória do cabo .....	67
Figura 30: Perda por atrito cabo/bainha .....	69

Figura 31: Perda por atrito cabo/bainha e acomodação da ancoragem .....	71
Figura 32: Ações em uma faixa de 1 m da solução para cabos a cada 50,0 cm .....	72
Figura 33: Carregamento equivalente do cabo de protensão usado no FTOOL.....	73
Figura 34: Diagrama de momento fletor do cabo de protensão no FTOOL .....	73
Figura 35: Representação da viga no GRELHA.....	76
Figura 36: Diagrama de momento fletor da viga no GRELHA .....	77
Figura 37: Desenho esquemático da forma de laje .....	79
Figura 38: Trajetória do cabo representante .....	81
Figura 39: Perda por atrito cabo/bainha .....	83
Figura 40: Perda por atrito cabo/bainha e acomodação da ancoragem .....	85
Figura 41: Ações em uma faixa de 1 m da solução para cabos a cada 50,0 cm .....	86
Figura 42: Aplicação das forças equivalentes de protensão no GRELHA.....	87
Figura 43: Diagrama de momento fletor da linha de barras do pilar central para ação de protensão no tempo zero .....	90
Figura 44: Momento atuante na seção transversal .....	92
Figura 45: Aba de protensão no GRELHA.....	96
Figura 46: Formulário do cabo de protensão.....	97
Figura 47: Ambiente gráfico do efeito de protensão no GRELHA .....	98
Figura 48: Viga com o cabo de protensão na versão atual do GRELHA.....	100
Figura 49: Diagrama de momento fletor da viga na versão atual do GRELHA .....	100
Figura 50: Planta de forma da laje lisa .....	102
Figura 51: Estrutura deformada sem as ações de protensão. ....	102
Figura 52: Grelha equivalente com os nós numerados.....	103
Figura 53: Inserção dos cabos de protensão na laje.....	104
Figura 54: Inserção dos cabos de protensão na laje.....	105
Figura 55: Estrutura deformada da laje com as ações de protensão .....	105
Figura 56: Distribuição dos cabos em planta.....	107
Figura 57: Ações das forças verticais no concreto para a distribuição uniforme dos cabos	107
Figura 58: Perfis de cabos parabólicos em lajes protendidas.....	108
Figura 59: Largura para distribuição de cabos nas faixas dos pilares .....	109
Figura 60: Cabos uniformemente distribuídos na direção horizontal e concentrados nas faixas dos pilares na direção vertical .....	110
Figura 61: Cabos concentrados nas faixas dos pilares na direção horizontal e vertical .....	111

## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 1: Níveis de protensão segundo a ABNT NBR 6118:2014 .....	20
Tabela 2: Níveis de protensão segundo a ABNT NBR 6118:2014 .....	42
Tabela 3: Amostra do arquivo de saída do processador de cálculo (unidades em m, kN e kN.m) .....	47
Tabela 4: Características das cordoalhas engraxadas .....	48
Tabela 5: Classe de agressividade ambiental .....	50
Tabela 6: Cobrimento nominal de acordo com a classe de agressividade ambiental.....	50
Tabela 7: Relação entre a classe de agressividade e a qualidade do concreto.....	51
Tabela 8: Valores característicos superiores da deformação específica de retração e do coeficiente de fluência .....	57
Tabela 9: Valores de $\psi_{1000}$ , em porcentagem .....	59
Tabela 10: Valores do desvio angular e da flecha para cada trecho do cabo .....	68
Tabela 11: Tensão ao longo do cabo representante após as perdas por atrito .....	69
Tabela 12: Perda por acomodação da ancoragem .....	70
Tabela 13: Tensão após as perdas imediatas.....	70
Tabela 14: Carregamento equivalente do cabo de protensão .....	72
Tabela 15: Momento de engastamento perfeito em cada barra do cabo de protensão .....	73
Tabela 16: Vetor deslocamento devido ao cabo de protensão .....	74
Tabela 17: Reação de apoio devido ao cabo de protensão.....	75
Tabela 18: Esforços internos das barras 1, 2 e 3 .....	75
Tabela 19: Esforços internos das barras 4 e 5. ....	76
Tabela 20: Resumo dos resultados dos modos de resolução do carregamento equivalente do cabo de protensão da viga .....	77
Tabela 21: Valores do desvio angular e da flecha para cada trecho do cabo representante	82
Tabela 22: Tensão ao longo do cabo representante após as perdas por atrito .....	83
Tabela 23: Perda por acomodação da ancoragem .....	84
Tabela 24: Tensão após as perdas imediatas.....	84
Tabela 25: Carregamento equivalente do cabo de protensão .....	86
Tabela 26: Valores das tensões no tempo $t_0$ e no $t_\infty$ .....	89
Tabela 27: Valores dos momentos junto ao pilar central e no meio do vão .....	91
Tabela 28: Verificação das tensões junto ao pilar central e no meio do vão.....	91
Tabela 29: Valores de $A_s$ com e sem protensão .....	94
Tabela 30: Resumo dos resultados dos modos de resolução do carregamento equivalente do cabo de protensão da viga.....	101

Tabela 31: Momento fletor na barra do pilar central para a grelha a cada 1m.....	104
Tabela 32: Comparativo entre deformação e momento fletor das diferentes análises .....	106
Tabela 33: Espaçamentos mínimos – Caso de pós-tração.....	109
Tabela 34: Comparativo entre deslocamento e momento fletor das diferentes análises.....	112

.

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>1.1 OBJETIVOS .....</b>	<b>14</b>
1.1.1 GERAL.....	14
1.1.2 ESPECÍFICOS.....	14
<b>1.2 JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>14</b>
<b>1.3 METODOLOGIA .....</b>	<b>15</b>
<b>1.4 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA .....</b>	<b>15</b>
<b>1.5 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS .....</b>	<b>15</b>
<b>2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE LAJE LISA PROTENDIDA .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1 TIPOS DE PROTENSÃO QUANTO A ADERÊNCIA E INTENSIDADE .....</b>	<b>17</b>
2.1.1 TIPOS DE PROTENSÃO QUANTO A ADERÊNCIA .....	17
2.1.1.1 PROTENSÃO COM ADERÊNCIA INICIAL .....	17
2.1.1.2 PROTENSÃO COM ADERÊNCIA POSTERIOR.....	18
2.1.1.3 PROTENSÃO SEM ADERÊNCIA.....	18
2.1.2 TIPOS DE PROTENSÃO QUANTO A INTENSIDADE .....	19
2.1.2.1 PROTENSÃO COMPLETA.....	20
2.1.2.2 PROTENSÃO LIMITADA .....	21
2.1.2.3 PROTENSÃO PARCIAL .....	21
<b>2.2 CONSIDERAÇÃO DO EFEITO DA PROTENSÃO ATRAVÉS DE UMA AÇÃO EQUIVALENTE .....</b>	<b>22</b>
<b>2.3 LAJES LISAS PROTENDIDAS .....</b>	<b>23</b>
<b>3. PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETO E O PROGRAMA CALCO.....</b>	<b>26</b>
<b>3.1 RESOLUÇÃO DE PAVIMENTO DE CONCRETO E O USO DE GRELHA EQUIVALENTE .....</b>	<b>27</b>
3.1.1 DISCRETIZAÇÃO DO PAVIMENTO COM GRELHA.....	28
<b>3.2 RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS USANDO O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS.....</b>	<b>31</b>
3.2.1 MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS.....	31
3.2.2 MÉTODO DA RIGIDEZ .....	32
3.2.3 GRELHAS.....	34
3.2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DAS BARRAS DE GRELHA.....	35

3.2.5	SISTEMAS DE COORDENADAS.....	37
3.2.6	TRANSFORMAÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS.....	37
3.2.7	ESFORÇOS NODAIS APLICADOS.....	39
3.2.8	CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS NAS BARRAS.....	40
3.2.9	INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ A TORÇÃO.....	41
<b>3.3</b>	<b>FLUXOGRAMAS E PROCESSO DO PROGRAMA DE GRELHA.....</b>	<b>43</b>
3.3.1	DEFINIÇÃO DE CARGAS EXTRAS.....	44
3.3.2	DETERMINAÇÃO DE AÇÕES NO ELEMENTO.....	44
<b>3.4</b>	<b>ENTRADA DE DADOS.....</b>	<b>46</b>
<b>3.5</b>	<b>SAÍDA DE DADOS.....</b>	<b>47</b>
<b>4.</b>	<b>ESTUDOS DE LAJES LISAS PROTENDIDAS.....</b>	<b>48</b>
4.1	DADOS DA CORDOALHA.....	48
4.2	TRAJETÓRIA DO CABO REPRESENTANTE.....	49
<b>4.3</b>	<b>PERDAS DE PROTENSÃO.....</b>	<b>53</b>
4.3.1	PERDAS IMEDIATAS.....	54
4.3.1.1	PERDAS POR ATRITO.....	54
4.3.1.2	PERDA POR DEFORMAÇÃO DA ANCORAGEM.....	55
4.3.1.3	PERDA POR DEFORMAÇÃO IMEDIATA DO CONCRETO.....	56
4.3.2	PERDAS PROGRESSIVAS.....	56
4.3.2.1	PERDAS POR RETRAÇÃO DO CONCRETO.....	57
4.3.2.2	PERDA POR FLUÊNCIA DO CONCRETO.....	58
4.3.2.3	PERDA POR RELAXAÇÃO DO AÇO.....	58
<b>4.4</b>	<b>APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO EQUIVALENTE NA GRELHA.....</b>	<b>60</b>
<b>4.5</b>	<b>MOMENTO DE PROTENSÃO TOTAL.....</b>	<b>61</b>
4.5.1	MOMENTO ISOSTÁTICO DE PROTENSÃO.....	61
4.5.2	MOMENTO HIPERESTÁTICO DE PROTENSÃO.....	62
<b>5.</b>	<b>EXEMPLO NUMÉRICO – VIGA CONTÍNUA.....</b>	<b>65</b>
5.1	DADOS DA CORDOALHA ESCOLHIDA.....	66
5.2	TRAJETÓRIA DO CABO.....	66
5.3	CÁLCULO DAS PERDAS IMEDIATAS.....	68
5.4	CARREGAMENTO EQUIVALENTE DO CABO DE PROTENSÃO.....	71
<b>6.</b>	<b>EXEMPLO NUMÉRICO – LAJE LISA PROTENDIDA.....</b>	<b>78</b>

6.1	DADOS DA CORDOALHA ESCOLHIDA .....	80
6.2	TRAJETÓRIA DO CABO REPRESENTANTE .....	80
6.3	CÁLCULO DAS PERDAS IMEDIATAS .....	82
6.4	CARREGAMENTO EQUIVALENTE DO CABO DE PROTENSÃO REPRESENTANTE.....	85
6.5	CÁLCULO DAS PERDAS AO LONGO DO TEMPO.....	87
6.5.1	PERDA POR RETRAÇÃO DO CONCRETO.....	87
6.5.2	PERDA POR FLUÊNCIA DO CONCRETO .....	88
6.5.3	PERDA POR RELAXAÇÃO DA ARMADURA .....	88
6.5.4	PERDAS TOTAIS.....	89
6.6	VERIFICAÇÃO DA FISSURAÇÃO NO ELS.....	90
6.7	VERIFICAÇÃO DA RUPTURA NO ESTADO LIMITE ULTIMO .....	92
7.	<i>IMPLEMENTAÇÃO DA AÇÃO DE PROTENSÃO NO GRELHA .....</i>	<i>95</i>
7.1	ABA DO EFEITO DE PROTENSÃO DO GRELHA .....	95
7.2	FORMULÁRIO DO CABO DE PROTENSÃO.....	96
7.3	UNIDADE GRÁFICA DE PROTENSÃO .....	97
8.	<i>EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....</i>	<i>99</i>
8.1	VIGA CONTÍNUA.....	99
8.2	LAJE LISA PROTENDIDA COM CABOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS NA DIREÇÃO VERTICAL E HORIZONTAL .....	101
9.	<i>CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</i>	<i>113</i>
10.	<i>REFERÊNCIAS.....</i>	<i>116</i>

# 1. INTRODUÇÃO

O projeto, cálculo e detalhamento de estruturas de concreto protendidas, requerem, para atender as condições de segurança, economia, durabilidade e funcionalidade um número extenso de verificações numéricas e modelos de cálculo relativamente complexos. Os esforços de protensão dependem fundamentalmente da trajetória, intensidade, ao longo do tempo do esforço aplicado na armadura ativa. Faz parte do escopo do trabalho que na maioria das situações a própria programação, o projetista possa tomar decisões de detalhamento, mas também, que em qualquer instante o projetista possa interferir no processamento. Isto poderá ser alcançado ao se trabalhar com plataforma orientada a objeto e multiprocessamento, ou seja, há possibilidade de se realizar diversas tarefas de forma independente, simultâneas ou não.

A utilização de estruturas de concreto protendido tem crescido ao longo dos anos justificada pela demanda de se executar construções cada vez mais eficientes, duráveis e esteticamente agradáveis (BORTONE, 2014).

De acordo com Cubas (2012) a utilização de lajes lisas protendida tem sido empregada com frequência nas edificações devido a um número considerável de experiências feitas pelo mundo e também a novas concepções estruturais. Além disso, as lajes de concreto protendido oferecem vantagens técnicas sobre a solução tradicional em concreto armado, principalmente no controle de fissuras e grandes deformações para as cargas de serviço, e pela facilidade para vencer vãos maiores com seções mais esbeltas.

De acordo com Carvalho (2012) a protensão pode ser dos seguintes tipos: com aderência inicial (também chamada de pré-tração), com aderência posterior (também chamado de pós-tração com aderência) e sem aderência (também chamado de pós-tração sem aderência e cordoalha engraxada).

Na atualidade pode-se verificar que há diversas plataformas sofisticadas de análise de estruturas de concreto seja usando barras prismáticas, elementos finitos e elementos de contorno. Junto destas plataformas há aquelas mais comerciais, que se dedicam principalmente ao detalhamento, fornecendo a pranchas finais do projeto detalhado. Estas em menor número que as anteriores e relativamente regionalizadas em países, em função das normas técnicas vigentes em cada território ou região. Exemplos clássicos das primeiras são o SAP, ANSYS e do outro grupo TQS, ALTOQI EBERICK. Nota-se que o segundo grupo privilegia as construções do tipo edificações de múltiplos andares.

## **1.1 OBJETIVOS**

### **1.1.1 GERAL**

Este trabalho tem por objetivo implementar as ações de protensão em um programa de análise (cálculo de esforços e deslocamentos) de lajes de concreto pelo modelo de grelha equivalente. Dentro desse objetivo geral incluem-se:

- Automação da aplicação das ações de protensão na grelha equivalente;
- Elaboração das faixas de protensão;
- Distribuição dos cabos de protensão em planta;
- Geração dos diagramas dos esforços solicitantes e deslocamentos.

### **1.1.2 ESPECÍFICOS**

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Elaborar o roteiro de cálculo e conseqüentemente o algoritmo deste;
- Desenvolver um algoritmo para aplicação das ações de protensão na grelha equivalente;
- Elaborar exemplos de uso do programa, para demonstrar seu funcionamento.

## **1.2 JUSTIFICATIVA**

Para todo e qualquer projeto de estruturas é necessário atender os critérios de dimensionamento tanto dos estados limites últimos, que determinam à segurança a ruptura da peça, quanto dos estados limites de serviço que garantem seu adequado funcionamento para as cargas correntemente aplicadas sobre ela. Para as estruturas de concreto protendido são necessários inúmeros cálculos, que podem ser iterativos e despendem muito tempo se executados manualmente. No caso das lajes lisas, por exemplo, o cálculo com boa precisão e para qualquer pavimento só é obtido com analogia de grelha, ou elementos finitos e executando traçados de armadura de protensão automático com o cálculo dos respectivos esforços.

Com o desenvolvimento de sistemas computacionais é possível elaborar programas computacionais para realizar os cálculos complexos e laboriosos em relativamente pouco tempo de processamento.

Atualmente há uma carência em softwares livres para análise, cálculo e detalhamento de estruturas em concreto protendido. Os programas livres podem ser de grande importância por serem gratuitos e não possuir limitações financeiras de acesso,

permitem a atualização constante e implementação de melhorias ou serem aplicados a outros programas como sub-rotina por terem códigos abertos e informações fornecidas.

As estruturas de laje lisa protendida são muito utilizadas no nordeste brasileiro e nos Estados Unidos e ainda possui potencial de crescimento.

### **1.3 METODOLOGIA**

A pesquisa será efetuada a partir de uma plataforma já existente CALCO ([www.deciv.ufscar.br/calco/](http://www.deciv.ufscar.br/calco/)) usando análise matricial, programação orientada ao objeto e estruturas compostas por barra e a protensão através de um carregamento cuja introdução é automática.

A pesquisa bibliográfica será feita em livros, artigos, normas, dissertações e teses. Serão resolvidos exemplos numéricos, buscando desenvolver um memorial de cálculo para elaborar um algoritmo e implantar na plataforma CALCO.

Serão estudadas as possibilidades de traçado do cabo de protensão para implementação de um algoritmo para o lançamento automático diretamente no ambiente gráfico do CALCO para, posteriormente, calcular as ações e, por consequência, fazer os cálculos necessários e o detalhamento final.

Portanto, o estudo será do tipo teórico e analítico, usando-se revisão bibliográfica e raciocínio dedutivo.

### **1.4 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA**

- Estudo dos esforços devido a força de protensão.
- Será utilizada a plataforma CALCO para a implantação do algoritmo.
- A representação do efeito da protensão será por meio de carregamento equivalente.
- Os cálculos das deformações serão por meio de grelha equivalente.
- Linguagem de programação orientada a objeto.

### **1.5 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS**

O trabalho desenvolvido está organizado em capítulos. O trabalho é dividido em onze capítulos.

O capítulo 1 apresenta a introdução ao assunto, contendo os objetivos, a justificativa e a metodologia de pesquisa, descrevendo quais variáveis influenciam no resultado, assim

como as variáveis serão avaliadas na pesquisa. Também é apresentado as delimitações da pesquisa.

O capítulo 2 e 3 apresenta a revisão bibliográfica, sendo o capítulo 2 a cerca de laje lisa protendida e o capítulo 3 sobre a linguagem de programação utilizada neste trabalho e uma descrição do programa GRELHA.

O capítulo 4 apresenta as considerações de lajes lisas protendidas assim como os critérios normativos acerca do tema e também os cálculos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

O capítulo 5 e 6 são resolvidos exemplos numéricos para efeito de comparação e verificação dos passos para implementar no programa GRELHA. Sendo o capítulo 6 a resolução de uma laje lisa protendida e o capítulo 5 a resolução de uma viga protendida.

No capítulo 7 é apresentado como foi elaborado o algoritmo para a consideração das ações de protensão e como deve ser utilizado a versão atual do programa.

No capítulo 8 é resolvido exemplos de aplicações para apresentar o potencial de utilização do programa e verificar a validade das alterações no algoritmo.

O capítulo 9 apresenta as conclusões e considerações finais como também as sugestões para continuação deste trabalho e os aspectos a serem melhorados no programa.

O capítulo 10 apresenta as referências bibliográficas utilizadas no corpo do texto.

## **2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE LAJE LISA PROTENDIDA**

Ao longo deste capítulo são apresentadas revisões bibliográficas relativas aos temas abordados neste documento. Inicia-se tal revisão literária com a exposição dos conceitos, utilizados em estruturas de concreto protendido. Em seguida, são apresentadas as aplicações do concreto protendido, vantagens do concreto protendido, as considerações do efeito da protensão.

### **2.1 TIPOS DE PROTENSÃO QUANTO A ADERÊNCIA E INTENSIDADE**

De acordo com Carvalho (2012), uma primeira classificação de elementos protendidos leva em consideração o mecanismo de aderência entre a armadura de protensão e o concreto. Essa classificação é importante, pois dependendo do tipo de escolha da aderência, os cálculos se fazem de maneiras diferentes. O ambiente também pode influenciar na intensidade de aplicação da protensão de acordo com a classe de agressividade ambiental em que a estrutura vai ser executada.

#### **2.1.1 TIPOS DE PROTENSÃO QUANTO A ADERÊNCIA**

Conforme as seções 3.1.7 a 3.1.9 da ABNT NBR 6118:2014, o concreto protendido é classificado conforme seu mecanismo de aderência entre a armadura de protensão e o concreto, como apresentado a seguir:

##### **2.1.1.1 PROTENSÃO COM ADERÊNCIA INICIAL**

A estrutura protendida com aderência inicial ocorre quando a aderência entre a armadura e o concreto é iniciada quando se inicia o lançamento do concreto (CARVALHO, 2012).

De acordo com a seção 3.1.7 da ABNT NBR 6118:2014 o pré-alongamento da armadura ativa é realizado utilizando apoios independentes do elemento estrutural, antes do lançamento do concreto, sendo a ligação da armadura de protensão com os referidos apoios desfeita após o endurecimento do concreto sendo que a ancoragem no concreto se realiza apenas por aderência.

A Figura 1 apresenta como exemplo uma laje alveolar que utiliza a protensão com aderência inicial.

**Figura 1: Sistema de protensão com aderência inicial de uma laje alveolar**



Fonte: (MIZUMOTO, MARIN e SILVA, 2013).

Este processo de protensão pode ser dividido em três fases, sendo a primeira referente a distensão da armadura independente da peça de concreto, onde os apoios de ancoragem da armadura estão dispostos fora da peça. Em sequência, após as armaduras serem distendidas com o valor real de cálculo, já somadas todas as perdas, é concretada a peça. Por último, após o concreto atingir a resistência de cálculo a armadura é cortada com a manifestação da aderência entre a armadura e o concreto, ambos passam a trabalhar como peça única (TEIXEIRA, 1998).

#### **2.1.1.2 PROTENSÃO COM ADERÊNCIA POSTERIOR**

A protensão com aderência posterior ou armadura de protensão pós-tracionada é aquela em que o estiramento da armadura de protensão é realizado após o endurecimento do concreto utilizando-se como apoios, partes da própria peça. A aderência do concreto com a armadura é feita injetando nata de cimento na bainha que isola a armadura de protensão e o concreto (TEIXEIRA, 1998).

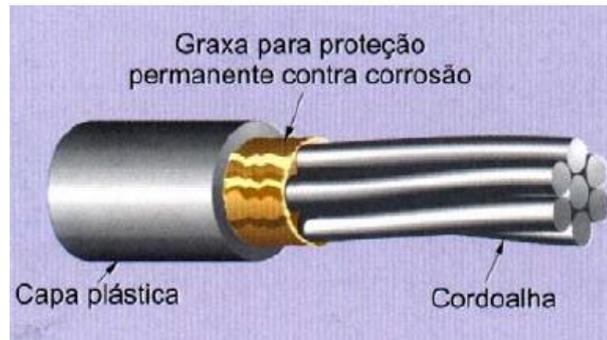
Segundo Mello (2005) a pós-tração com aderência era o mais empregado em lajes até o surgimento das cordoalhas engraxadas. Embora sejam menos usados, alguns exemplos deste tipo de protensão foram feitos devido a experiência já existente no país.

#### **2.1.1.3 PROTENSÃO SEM ADERÊNCIA**

A seção 3.1.9 da ABNT NBR 6118:2014 define protensão sem aderência o concreto protendido em que o pré-alongamento da armadura ativa é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas, como apoios, partes do próprio elemento estrutural, mas não sendo criada aderência com o concreto, ficando a armadura ligada ao concreto apenas em pontos localizados. A armadura só estará solidária ao concreto na região da ancoragem e através da mesma (CARVALHO, 2012).

A Figura 2 apresenta a cordoalha engraxada utilizada para a protensão sem aderência.

**Figura 2: Cordoalha engraxada**



Fonte: (ALMEIDA FILHO, 2002).

Os cabos sem aderência são protegidos por graxa protetora contra corrosão e bainha plástica individual extrudada diretamente sobre a cordoalha engraxada. Este tipo de protensão é muito utilizado para lajes lisas no país (MELLO, 2005).

### **2.1.2 TIPOS DE PROTENSÃO QUANTO A INTENSIDADE**

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, os tipos de protensão quanto a sua intensidade relacionam-se com a durabilidade das peças e a maneira de se evitar a corrosão da armadura, portanto estão ligados os estados limites referentes à fissuração.

De acordo com a seção 9.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, os níveis de protensão estão relacionados com os níveis de intensidade de força de protensão que, por sua vez, são função da proporção de armadura ativa utilizada em relação à passiva.

Os tipos de protensão definidos são: protensão completa, protensão limitada e protensão parcial. A escolha do tipo de protensão a ser empregada em um projeto é estabelecida de acordo com a Tabela 1 (Tabela 13.4 da seção 13.4.2 da norma ABNT NBR 6118:2014)

Tabela 1: Níveis de protensão segundo a ABNT NBR 6118:2014

Tipo de concreto estrutural	Classe de agressividade ambiental (CAA) e tipo de protensão	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar
Concreto simples	CAA I a CAA IV	Não há	–
Concreto armado	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,4$ mm	Combinação frequente
	CAA II e CAA III	ELS-W $w_k \leq 0,3$ mm	
	CAA IV	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	
Concreto protendido nível 1 (protensão parcial)	Pré-tração com CAA I ou Pós-tração com CAA I e II	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	Combinação frequente
Concreto protendido nível 2 (protensão limitada)	Pré-tração com CAA II ou Pós-tração com CAA III e IV	Verificar as duas condições abaixo	
		ELS-F	Combinação frequente
		ELS-D <sup>a</sup>	Combinação quase permanente
Concreto protendido nível 3 (protensão completa)	Pré-tração com CAA III e IV	Verificar as duas condições abaixo	
		ELS-F	Combinação rara
		ELS-D <sup>a</sup>	Combinação frequente

<sup>a</sup> A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com  $a_p = 50$  mm (Figura 3.1).

NOTAS

1 As definições de ELS-W, ELS-F e ELS-D encontram-se em 3.2.

2 Para as classes de agressividade ambiental CAA-III e IV, exige-se que as cordoalhas não aderentes tenham proteção especial na região de suas ancoragens.

3 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental.

A escolha do tipo de protensão a ser empregada em um projeto é feita em função do tipo de construção ou da agressividade do meio ambiente. De uma maneira geral, para elementos com aderência posterior, recomenda-se para ambientes com fraca e moderada agressividade o uso de protensão parcial e para ambientes com agressividade forte e muito forte, recomenda-se a protensão limitada. Para a protensão com aderência inicial em ambientes com fraca agressividade, recomenda-se a protensão parcial, para ambiente com agressividade moderada, a protensão limitada. E, finalmente, protensão completa para ambientes com agressividade forte e muito forte (CARVALHO, 2012).

### 2.1.2.1 PROTENSÃO COMPLETA

A armadura de protensão é dimensionada objetivando o não aparecimento de tensões de tração no concreto. Pode utilizar armadura passiva apenas como armadura mínima ou construtiva. A protensão pode ser considerada completa quando se verificar as seguintes condições (MILANI, 2006):

- Para as combinações frequentes de ações, é respeitado o limite de descompressão, ou seja, quando atuarem a carga permanente e as sobrecargas frequentes não se admite tração no concreto.
- Para as combinações raras de ações, é respeitado o estado limite de formação de fissuras.

A protensão completa proporciona melhores condições de proteção das armaduras contra a corrosão, e se aplica nos casos de obras em ambientes agressivos e muito agressivos ou situações de excesso de fissuração, tais como tirantes de concreto protendido, reservatórios protendidos para garantia de estanqueidade, vigas formadas por peças pré-moldadas justapostas sem armaduras suplementares, etc. Não existe limitação técnica no uso da protensão completa, apenas restrições de ordem econômica (PEDROZO, 2008).

#### **2.1.2.2 PROTENSÃO LIMITADA**

A armadura ativa é predominante e normalmente é necessária armadura passiva para atender a verificação a ruptura. Não são permitidas fissuras em serviço. Normalmente são usadas para lajes de edifícios. A protensão pode ser considerada como limitada quando se verificam as seguintes condições (MILANI, 2006):

- Para as combinações quase permanentes de ações, é respeitado o limite de descompressão, ou seja, quando atuarem a carga permanente e parte das sobrecargas não se admite tração no concreto;
- Para as combinações frequentes de ações, é respeitado o estado limite de formação de fissuras, ou seja, quando atuarem a carga permanente e as sobrecargas frequentes.

A protensão limitada admite no estado de serviço tensões moderadas de tração, com isso é necessário a colocação de armadura passiva adicional no dimensionamento à ruptura e no controle da fissuração. Esta combinação de armadura ativa e passiva permite soluções equilibradas e mais econômicas, já que o aço de protensão é mais caro que o aço convencional (PEDROZO, 2008).

#### **2.1.2.3 PROTENSÃO PARCIAL**

Caracterizado pela combinação de armaduras ativas e passivas. No estado limite de serviço, as fissuras são permitidas e controladas. A protensão pode ser considerada como parcial quando atenderem as seguintes condições (MILANI, 2006):

- Para as combinações quase permanentes é respeitado o estado limite de formação de fissuras e o de descompressão no eixo do cabo mais excêntrico.

- Para as combinações frequentes é respeitado o estado limite de abertura de fissuras:  $w_k < w_{lim} = 0,2 \text{ mm}$ , ou seja, quando atuarem a carga permanente e as sobrecargas frequentes.

A protensão parcial é similar a protensão limitada, porém admite tensões maiores de tração em serviço e formação de fissuras de maior abertura (não maiores que 0,2 mm). É necessária armadura passiva complementar por admitir fissuração, porém, nesta situação, consome menos aço de protensão (PEDROZO, 2008).

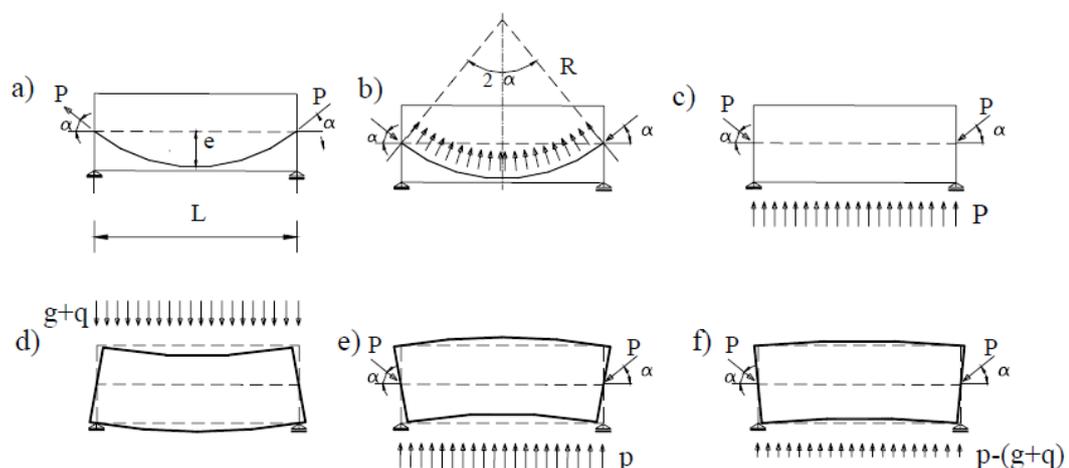
## 2.2 CONSIDERAÇÃO DO EFEITO DA PROTENSÃO ATRAVÉS DE UMA AÇÃO EQUIVALENTE

Uma forma de considerar o efeito da protensão é separar a viga de concreto do cabo de protensão e representar a ação da protensão através de cargas externas equivalentes que os cabos exercem sobre o concreto (KOERICH, 2004).

O conceito de carregamento equivalente foi introduzido por Lin (1963) que devido a sua simplicidade é o método de análise de elemento protendidos mais utilizado atualmente nos cálculos estruturais (MELLO, 2005).

Segundo Carvalho (2012) considerando a ação de um cabo curvo com uma força de protensão  $P$  aplicada nas extremidades (neste caso no cg da peça) da viga e que provocará quando for estirado uma ação  $u$  (contato cabo-concreto) que pode ser substituída por uma ação atuando ao longo de  $L$  e com direção vertical, ou seja, com intensidade constante (perdas são desprezadas) de,  $u_p$ . Assim é possível criar um carregamento equivalente que equilibre uma determinada parcela do carregamento externo atuante. A Figura 3 a seguir exemplifica este conceito.

**Figura 3: Consideração do carregamento equivalente  $u_p$  que traduz o efeito da flexão da protensão**



Fonte: (CARVALHO, 2012).

Fazendo o equilíbrio na vertical obtém-se:

$$2P \cdot \text{sen} \alpha = u_p \cdot L \quad (1)$$

Considerando que a curva do cabo em questão seja uma parábola do segundo grau, o valor de  $\text{sen} \alpha$  é dado por:

$$\text{sen} \alpha = \frac{2 \cdot e}{\sqrt{(2 \cdot e)^2 + (L/2)^2}} \quad (2)$$

Considerando que o valor de “e” na presença de L seja pequeno a expressão (2) fica:

$$\text{sen} \alpha = \frac{2 \cdot e}{L/2} \quad (3)$$

Substituindo em (3) em (1) tem-se:

$$u_p = \frac{8 \cdot P \cdot e}{L^2} \quad (4)$$

Onde:

P - é a força de protensão aplicada na seção transversal da peça;

e - é a distancia do cabo em relação a linha média da seção transversal da peça;

L – é o vão da peça;

$u_p$  – é o carregamento aplicado a estrutura devido a força de protensão.

### 2.3 LAJES LISAS PROTENDIDAS

As lajes planas não são necessariamente lajes sem vigas, podendo existir vigas, capitéis e nervuras, conhecida no idioma inglês de “flat slab”. As lajes lisas ou “flat plate”, nas quais não são admitidos capitéis, vigas nem mesmo engrossamentos da laje (RUDLOFF, 2011).

Segundo Emerick (2005) as lajes lisas protendidas apresentam as seguintes vantagens em relação às lajes lisas em concreto armado:

- Maior liberdade arquitetônica devido à possibilidade de vencer grandes vãos, ou vãos fortemente carregados, mantendo uma grande esbeltez na laje;
- Maior área útil do pavimento devido à menor quantidade de pilares;

- Economia em relação às estruturas em concreto armado para vãos superiores a 7,0 m;
- Redução nas espessuras da laje acarretando uma significativa diminuição na altura total do prédio e, conseqüentemente, um menor peso total da estrutura minimizando os custos nas fundações;
- Maior velocidade na desforma e retirada de escoramentos;
- Redução e até eliminação de flechas e fissuração nas lajes;
- Colocação adequada dos cabos de protensão nas regiões próximas aos pilares provoca maior resistência à punção.

Em comparação ao sistema convencional em concreto armado de lajes apoiadas em vigas, as lajes lisas protendidas proporcionam (MELLO, 2005):

- Agilidade e simplificação na execução;
- Maior pé-direito disponível do pavimento;
- Maior liberdade arquitetônica devido à presença de tetos lisos;
- Maior esbeltez e melhores condições de ventilação ou iluminação.

Para a execução deste tipo de laje a ABNT NBR 6118:2014 determina algumas prescrições:

- O espaçamento entre cordoalhas, cabos ou feixes de cabos deve ser no máximo de 6.h, não excedendo 120 cm;
- Na seção da laje correspondente ao cabo ou feixe de cabos, o espaçamento entre eles deve resultar em uma tensão de compressão média igual ou superior a 1 MPa, considerando-se todas as perdas;
- Cabos dispostos em faixa externa de apoio devem estar contidos em uma porção de laje, de tal forma que a largura desta não ultrapasse a dimensão em planta do pilar de apoio, tomada transversalmente à direção longitudinal da faixa, acrescida de 3,5 vezes a espessura da laje para cada um dos lados do pilar;
- Entre cabos ou feixes de cabos, ou entre cabos e armaduras passivas, deve ser mantido um espaçamento mínimo de 5 cm;
- O cobrimento mínimo de cabos em relação à face de aberturas nas lajes deve ser de 7,5 cm;

- O desvio no plano da laje de um cabo ou feixe de cabos deve produzir uma inclinação máxima de  $1/10$ , na corda imaginária que une o início ao fim desse trecho, mantendo o seu desenvolvimento de acordo com uma curva parabólica em planta. Ao longo do desvio, o conjunto de cabos ou feixes deve estar disposto de tal forma a manter uma distância mínima de 5 cm entre cabos na região central da curva;
- Pode-se prescindir da armadura passiva contra o colapso progressivo, se pelo menos um cabo, em cada direção ortogonal, passar pelo interior da armadura longitudinal contida na seção transversal dos pilares ou elementos de apoio das lajes lisas;
- Sobre os apoios das lajes lisas ou cogumelo protendidas, devem ser dispostas no mínimo quatro barras na face tracionada em uma faixa que não exceda a largura do apoio acrescida de 1,5 vez a altura total da laje para cada lado. As barras devem ser espaçadas em no máximo 30 cm e estendidas até uma distância mínima de  $1/6$  do vão livre na direção da armadura considerada, a partir da face do apoio;
- Nas lajes protendidas por monocordoalhas não aderentes, no máximo quatro cabos podem ser dispostos em feixe;

# 3. PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETO E O PROGRAMA CALCO

A programação orientada a objeto surgiu para tentar suprir as deficiências do paradigma procedimental, com o objetivo de desenvolver um mecanismo para isolar os dados da forma como são manipulados. A ideia da orientação a objetos é compilar em uma entidade (chamada de classe), os dados (chamado de atributos) e as funções (chamada de métodos) que realizam operações sobre os dados. Dessa forma, os dados podem permanecer isolados (encapsulados na classe) e o acesso a eles pode ser feito apenas por meio dos métodos definidos na classe (BINDER, 1999 apud LEVIN, 2014).

Na programação orientada a objetos, implementa-se um conjunto de classes que definem os objetos com características afins. O comportamento dos objetos é definido pelos métodos e suas características pelos atributos. Neste paradigma de programação também se tem o conceito de herança, o que permite a uma classe herdar comportamentos (métodos) e características (atributos) de outra classe (OLIVEIRA, 2016).

A programação orientada a objetos é fundamental para este projeto, pois permite que sejam criadas as classes de objetos que seguem os princípios de herança e poliformismo. Sendo estas características, que permitem trabalhar de uma forma mais estruturada e organizada os objetos visuais, como as primitivas gráficas (CASS,2015).

Para o desenvolvimento deste trabalho optou-se por um compilador compatível com a linguagem PASCAL, seguindo a linguagem de programação já utilizada na plataforma CALCO, utilizada aqui neste trabalho para a implementação da consideração da protensão que será detalhado melhor no capítulo 4.

De acordo com Cass (2015) a escolha do PASCAL como linguagem de desenvolvimento da plataforma CALCO deve-se aos seguintes fatores:

a) Capacidade de programação: O PASCAL é uma linguagem estruturada, orientada a objetos e eventos. Estas condições são mínimas para a se criar um programa moderno.

b) Heranças: Algumas bibliotecas de análise estrutural disponíveis no departamento já foram feitas em linguagem PASCAL. Evita-se dessa forma a tradução dessas bibliotecas para outra linguagem, o que nem sempre é uma tarefa trivial.

c) Aprendizado: O PASCAL é uma linguagem relativamente fácil de aprender que tem uma curva de aprendizado bastante acentuada. A linguagem foi desenvolvida com o intuito de ser acadêmica e com um controle extremamente rígido de tipos, o que faz com que um programa em PASCAL não possa ser executado se contiver erros.

d) Modernidade: Existem várias IDE's disponíveis baseadas nessa linguagem, notadamente o "Lazarus", que utiliza o compilador Free Pascal, é uma IDE gratuita e mantida por uma comunidade universitária extensa pelo mundo.

e) Rapidez: Programas compilados em PASCAL geram um código executável nativo bem compacto e que não necessita de bibliotecas adicionais para serem executados. Essa condição lança uma enorme vantagem com relação aos programas baseados em BASIC ou similares. Esses programas são compilados em "Pseudo-Code", endereços que devem ser associados às rotinas presentes nas bibliotecas do núcleo do compilador. Neste caso, os programas resultantes são muito maiores e mais lentos. Tendo em mente que neste trabalho tratam-se matrizes de grandes dimensões e de tamanho variável, o PASCAL certamente é a escolha adequada.

f) Multiplataforma: No caso do "Lazarus" os programas podem ser compilados tanto para Windows, como, Linux, OS, IOS e Android.

g) Acesso a "Heap": O PASCAL como as linguagens de alto desempenho tem acesso a "Heap" (bloco de memória principal) e não se limita ao "Stack" (pilha de dados que geralmente tem 64k). Isso permite a manipulação de grandes quantidades de dados na forma de vetores e matrizes dinâmicos.

h) Comunidade acadêmica: A linguagem PASCAL é muito difundida no meio acadêmico, uma grande quantidade de bibliotecas está disponível na internet, bibliotecas numéricas, estatísticas, de controle de produção, bancos de dados, controles gráficos e etc.

### **3.1 RESOLUÇÃO DE PAVIMENTO DE CONCRETO E O USO DE GRELHA EQUIVALENTE**

Simular uma placa através de elementos de barras formando uma grelha, é um procedimento conhecido desde os primórdios da engenharia estrutural. A Analogia de Grelha foi usada por Euler em 1766 para a solução de problemas de membranas elásticas e por Hrennikoff em 1941 para a análise de placas através de uma formulação denominada "Lattice Analogy" (COELHO, 2013).

A análise de estruturas de edifícios em concreto é a possibilidade de interpretar o funcionamento deste tipo de estrutura através do conhecimento dos seus esforços solicitantes, seu estado de deformações e deslocamentos dos pontos mais importantes. Os esforços solicitantes são apresentados, de uma maneira geral, através dos diagramas de momento fletor, cortante e etc. Conhecido os esforços solicitantes nas diversas seções transversais da estrutura é possível, com a geometria das mesmas definida, determinar a quantidade de armadura assim como proceder ao detalhamento da mesma (CARVALHO et al., 2017).

### 3.1.1 DISCRETIZAÇÃO DO PAVIMENTO COM GRELHA

Conforme HAMBLY (1991), um painel de laje é estruturalmente contínuo nas duas dimensões do plano da laje de tal modo que as cargas aplicadas são equilibradas por uma distribuição bidimensional de esforços cortantes, momentos fletores e momentos de torção. Como a solução rigorosa das equações diferenciais raramente é possível, um procedimento aproximado pode ser usado, a Analogia de Grelha, na qual o painel de lajes é representado para fins de análise por uma grelha bidimensional de vigas. Os avanços significativos feitos nos programas de Analogia de Grelha nos últimos anos tornam esse procedimento mais versátil, mais rápido, e mais simples de compreender do que os demais.

Conforme PARK & GAMBLE (1980), a analogia de grelha para o cálculo de lajes é um método de análise e como tal possui fundamento formal nos teoremas de equilíbrio da teoria da plasticidade. A substituição de uma laje por uma série de vigas ortogonais que se cruzam, é provavelmente o mais antigo dos procedimentos. Com a utilização dos modernos computadores, é possível considerar a rigidez a torção das faixas e obter resultados que se aproximam muito da solução elástica, que utiliza a seguinte equação diferencial de equilíbrio das lajes.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q \quad (5)$$

Onde:

$m_x$  – momento na faixa unitária da placa na direção  $x$ .

$m_y$  – momento na faixa unitária da placa na direção  $y$ .

$m_{xy}$  – momento volvente na faixa unitária da placa.

$q$  – ação atuante na placa.

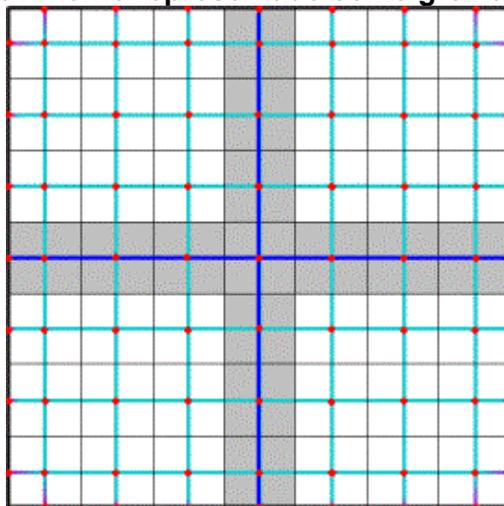
Este procedimento é, de fato, um método de projeto baseado na teoria de análise limite inferior. Como a solução de lajes por analogia de grelha é através da análise limite, os resultados possíveis para uma laje são inúmeros, em função da variação dos parâmetros de rigidez das barras da grelha (COELHO, 2013).

A analogia de grelha é um procedimento bastante utilizado pelos programas computacionais para a análise das lajes protendidas, pois obtém resultados em um tempo computacional relativamente baixo (CUBAS, 2012).

Este procedimento tem como base a substituição de um pavimento qualquer por uma grelha equivalente onde as barras da grelha representam os diferentes elementos estruturais do pavimento (lajes e vigas). Esta metodologia permite calcular um pavimento de lajes, com vigas ou não, considerando-o como um todo. Para isto, deve-se dividir a laje em um número adequado de faixas, sendo as dimensões dependentes da geometria do

pavimento. Essas faixas são então substituídas por elementos de barras, que formam uma grelha equivalente representando o pavimento. As grelhas podem ser consideradas como um conjunto de vigas individuais, interconectadas nos seus nós ou pontos nodais, como pode ser observado na Figura 4 (CASS, 2015).

**Figura 4: Pavimento representado como grelha equivalente**



Fonte: (COELHO, 2013).

De acordo com Carvalho (1994), as cargas distribuídas podem se dividir entre os elementos da grelha equivalente, de acordo com a área de influência de cada elemento ou, podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo dos elementos, ou mesmo, dentro de certa aproximação, concentradas nos nós. As cargas concentradas atuantes na estrutura devem ser aplicadas nos nós da malha. A malha deve se adequar, de forma que as cargas coincidam com os nós. Para situações quando isto não é possível, deve-se adotar valores equivalentes da carga nos nós mais próximos.

As barras são divididas em dois tipos segundo suas características: as de elemento de placa (laje) e as da união viga-placa (viga-laje). O cálculo da inércia à flexão dos elementos é feito considerando-se uma faixa de largura ( $b$ ), a qual é dada pela soma da metade dos espaços entre elementos vizinhos, e altura ( $h$ ) (espessura da placa). A rigidez à torção ( $I_t$ ), no estágio I é o dobro da rigidez à flexão ( $I_f$ ) (HAMBLY, 1991).

Deste modo, obtém-se as seguintes equações para os elementos do tipo laje:

$$I_f = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (6)$$

$$I_t = \frac{b \cdot h^3}{6} \quad (7)$$

A determinação da inércia à flexão e à torção do elemento viga, no estágio I pode ser obtida através da Resistência dos Materiais, considerando a viga retangular e desprezando a contribuição da laje adjacente. Assim a inércia à flexão fica similar ao do elemento placa e o da inércia à torção é dado por: (MELLO, 2005):

$$I_f = \frac{h.b^3}{3} \quad (8)$$

De acordo com Carvalho (1994), pode-se considerar a inércia à torção do elemento viga no estágio II, como sendo igual a 10% do estágio I, apresentado anteriormente.

$$I_t = \frac{h.b^3}{30} \quad (9)$$

Esta união da analogia de grelha e programa de computador permite a resolução de pavimentos de edifícios com grandes dimensões em planta, contornos não regulares, vazios internos e lajes com e sem vigas (MELLO, 2005).

Os valores do módulo de deformação longitudinal à compressão do concreto ( $E_c$ ), do módulo de deformação transversal do concreto ( $G_c$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) relativo às deformações elásticas, podem ser determinados a partir das recomendações da ABNT NBR 6118:2014.

O programa Grelha realiza por meio de análise matricial o cálculo dos deslocamentos, reações de vínculos e esforços internos solicitantes das estruturas de grelhas. Após a realização dessa análise, chamada de análise linear, é possível executar a análise não linear da estrutura. Essa segunda análise consiste na verificação da não linearidade física, através da comparação do momento limite de fissuração, calculado para um determinado elemento da estrutura, com o momento atuante no elemento. Para tanto, a técnica utilizada é a de carregamentos incrementais onde a referida comparação é feita para cada soma de parcela de carregamento. Se em algum instante o momento de fissuração for superado pelo momento atuante, o valor do momento de inércia é substituído pela inércia proposta pela expressão de Branson (CASS, 2015).

$$I_e = \left( \frac{M_r}{M_{\max}} \right)^3 \cdot I_0 + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_{\max}} \right)^3 \right] \cdot I_n \leq I_0 \quad (10)$$

Para determinar a relação entre força e deslocamento, nos métodos clássicos de análise estrutural, utiliza-se o método das forças ou o método dos deslocamentos. No método dos deslocamentos, os deslocamentos são as incógnitas.

### **3.2 RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS USANDO O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS**

Neste capítulo procura-se, de forma sucinta e simplificada, introduzir alguns conceitos de forma a encaminhar o leitor para a compreensão mais rápida do restante do processo considerado. Também é ressaltado e focado o método matricial de se resolver as estruturas, sempre considerando o processo dos deslocamentos. Para mais detalhes e fundamentação teórica, aconselha-se aos leitores, entre outras obras, as citadas anteriormente.

A análise estrutural é a primeira etapa de um projeto, e para iniciá-la é preciso definir o sistema construtivo, o sistema estrutural, o material a ser utilizado, as características geométricas do projeto e as solicitações de serviço.

O objetivo é de, a partir de uma determinada estrutura com características geométricas e mecânicas conhecidas e submetidas a ações (forças ou deslocamentos impostas), ser possível a determinação dos deslocamentos (translações e/ou rotações) de todos os nós, os esforços internos às barras e as reações de apoio.

Classifica-se a análise estrutural como sendo linear (quando a estrutura tem comportamento linear, ou seja, tem uma relação ação-deslocamento linear, lei de Hooke) ou não linear (quando a estrutura tem um comportamento não linear, geralmente devido a uma conformação geométrica ou de material).

O comportamento linear é típico de estruturas que sofrem deformações ou deslocamentos pequenos e cujo material deve ser elástico e linear, o que permite inclusive a aplicação do “princípio da superposição de efeitos”.

#### **3.2.1 MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS**

O método dos deslocamentos, também conhecido como método da rigidez, é um método de análise de estruturas reticuladas que usa a rigidez dos elementos para formar um sistema de equações, relacionando os deslocamentos com as forças que atuam na estrutura.

Neste método determinam-se inicialmente os deslocamentos (de forma direta) e por meio destes (indiretamente) tirar os esforços solicitantes.

Esse método pode ser usado para qualquer tipo de estrutura hiperestática ou isostática.

### 3.2.2 MÉTODO DA RIGIDEZ

O método da rigidez é um método aplicado em estruturas hiperestáticas compostas por barras que têm um comportamento elástico e linear. O método foi criado para ser adaptado na análise computacional de qualquer estrutura. O método consiste em associar a estrutura de barras à uma matriz de rigidez, que relaciona os deslocamentos nodais da estrutura com as forças externas aplicadas. Essa relação é expressa pela seguinte equação:

$$\{F\} = [K] \cdot \{\delta\} \quad (11)$$

Onde:

$\{F\}$  é uma matriz coluna (um vetor) das cargas externas;

$[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura;

$\{\delta\}$  é a matriz coluna dos deslocamentos (valores a serem encontrados).

Ampliando a expressão tem-se

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \Rightarrow \{F\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (12)$$

Onde:

$\{F\}$  é o vetor de forças externas na estrutura;

$[k]$  é a matriz de rigidez;

$\{\delta\}$  é o vetor de deslocamentos.

A matriz de rigidez é composta pelos coeficientes  $k_{nn}$  de rigidez das barras que compõem a estrutura.

O método da rigidez é um método muito geral que pode ser aplicado à resolução de qualquer tipo de estrutura reticulada. A análise de uma estrutura pelo método da rigidez pode ser descrita pelas seguintes etapas, conforme GERE e WEAVER (1980):

1 - A descrição da estrutura inclui o tipo de estrutura, a localização dos nós, posições das barras bem como a localização e tipos de apoios.

2 - Especificação dos tipos de deformação a serem consideradas na análise, tais como deformações por flexão e deformações axiais. Dependendo dos tipos de deformações a serem consideradas, deve ser dado às barras a rigidez apropriada.

3 - Determinação do número de deslocamentos de nós desconhecidos ou graus de liberdade na estrutura. Há que se proporcionar um número correspondente de vínculos artificiais para produzir a estrutura restringida, na qual todos os deslocamentos de nós são nulos.

4 - Análise da estrutura restringida submetida às forças. Todas as forças, exceto aquelas correspondentes a um deslocamento de nó desconhecido, são consideradas como aplicadas à estrutura fixa, sendo avaliadas as várias ações na estrutura. As ações mais importantes a serem determinadas são as ações que correspondem aos deslocamentos desconhecidos. Outras ações de interesse são as ações de extremidade para os membros e as reações nos apoios.

5 - Análise da estrutura restringida por outras causas.

6 - Análise da estrutura restringida para valores unitários dos deslocamentos.

7 - Determinação dos deslocamentos.

A equação de superposição para as ações correspondentes aos deslocamentos na estrutura real é:

$$\{F\} - \{F_0\} = [K]. \{\delta\} \quad (13)$$

Onde:

$\{F\}$  = esforços nos nós;

$\{F_0\}$  = esforços de imobilização dos nós, devidos aos carregamentos aplicados nas barras.

Nesta equação, o vetor  $\{F_0\}$  inclui os efeitos de forças, variações de temperatura, deformações iniciais e recalques de apoio. Neste trabalho este vetor conterà os efeitos da protensão. Quando se resolve a equação de superposição em função dos deslocamentos, o resultado é:

$$\{\delta\} = [K]^{-1} . (\{F\} - \{F_0\}) \quad (14)$$

8 - Determinação de ações de extremidade e reações.

Os vetores para as ações de extremidade de membro e reações, respectivamente, na estrutura real são obtidos das seguintes equações de superposição:

$$\{S\} - \{S_0\} = [K].\{d\} \quad (15) \text{ – para a estrutura}$$

E para o elemento

$$\{E\} - \{S_0\} = [k].\{u\} \quad (15a) \text{ – para os elementos}$$

Onde

$\{E\}$  – esforços solicitantes nas extremidades do elemento considerado

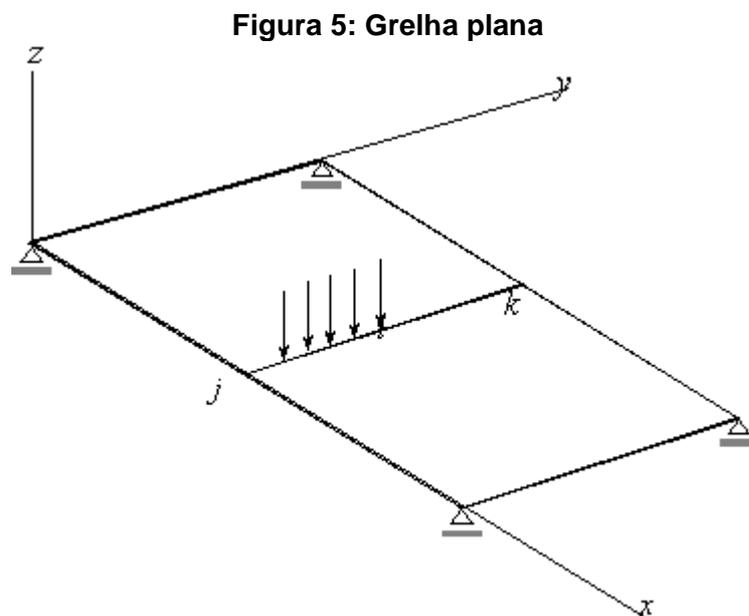
$[k]$  – matriz de rigidez do elemento considerado

$\{d\}$  – vetor dos deslocamentos nodais dos nós do elemento considerado

### 3.2.3 GRELHAS

Uma estrutura de grelha assemelha-se, em vários aspectos, a um pórtico plano. Todas as barras e nós existem no mesmo plano, supondo-se que as barras estão rigidamente ligadas nos nós (no caso de estrutura de nós rígidos). Os efeitos de flexão tendem a predominar na análise, sendo os efeitos de torção secundários na análise de grelhas, porém importantes.

Na análise de uma de grelha, a estrutura existe no plano X-Y com todas as forças aplicadas atuando no eixo Z, como pode ser observado na Figura 5.



Fonte: (COELHO, 2013).

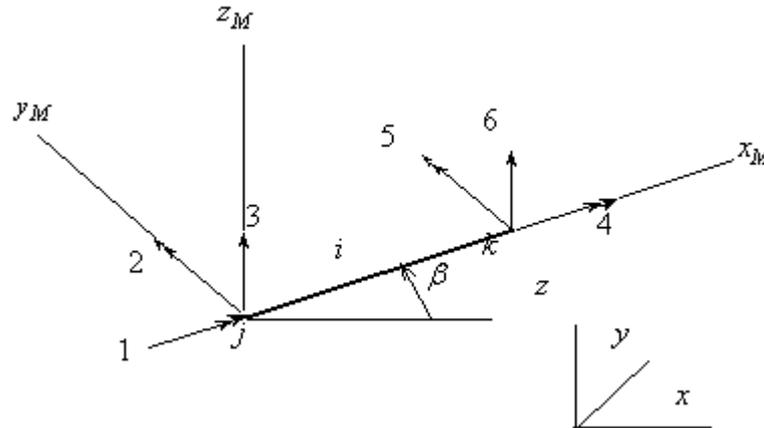
Como cada elemento de uma grelha pode estar orientado em qualquer direção no plano X-Y, é conveniente que cada barra possua um sistema de eixos cartesianos ortogonais conhecido como eixo de coordenadas locais. Para o sistema local, os eixos denominados de  $x_M$ ,  $y_M$  e  $z_M$  estão dispostos da seguinte maneira:

- A direção do eixo  $x_M$  coincide com o eixo da barra e com o sentido orientado do nó inicial  $j$  para o nó final  $k$ ;
- O eixo  $z_M$  é perpendicular ao plano da grelha, dirigido para cima;
- O eixo  $y_M$  é orientado perpendicular ao plano formado pelos eixos  $x_M$  e  $z_M$ .

Os deslocamentos que podem ocorrer nos nós de uma estrutura são, basicamente três translações e três rotações. Estes deslocamentos possíveis são chamados de graus de liberdade, ou seja, cada deslocamento possível de um nó é um grau de liberdade.

Os deslocamentos possíveis nas extremidades de uma barra de grelha são mostrados na Figura 6 a seguir e consistem em quatro rotações nas direções X e Y e duas translações na direção Z.

**Figura 6: Deslocamentos nodais nas extremidades de uma barra de grelha**



Fonte: (COELHO, 2013).

### 3.2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DAS BARRAS DE GRELHA

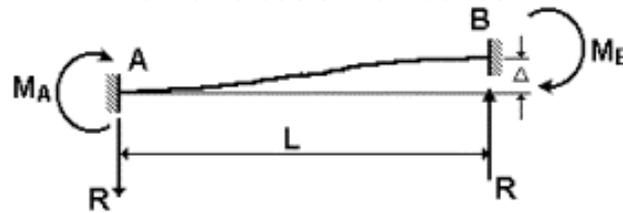
Os deslocamentos unitários nas extremidades da barra podem ser provocados um de cada vez, com o objetivo de formar a matriz de rigidez da barra de grelha, relativa ao eixo local da barra. A matriz K é a matriz de rigidez da grelha. O significado físico de K pode ser descrito como: Cada coluna (j) da matriz K é um vetor de cargas que deve ser aplicado ao grau de liberdade de modo a manter o estado de deformação associado com um valor unitário do grau de liberdade j enquanto todos os demais graus de liberdade são zero.

A seguir, são apresentadas as fórmulas para o cálculo das ações nas extremidades das barras de grelha para os diversos deslocamentos impostos.

Uma barra é restringida quando uma das suas extremidades é impedida de se deslocar, seja por translação ou rotação. As ações de extremidade para uma barra restringida são ações de reação, forças ou momentos, que aparecem nas extremidades quando a barra é submetida a esforços, variação de temperatura, deslocamentos impostos ou outros efeitos.

Na Figura 7, tem-se o caso de uma barra com as duas extremidades engastadas, submetida a um deslocamento vertical D em uma das extremidades. Devido a este deslocamento, a barra fica submetida a esforços de reação nas extremidades. Se este deslocamento for unitário, estes esforços correspondem à rigidez da barra em relação a esse grau de liberdade.

**Figura 7: Momentos fletores e reações na barra devidos a um deslocamento vertical em uma das extremidades**



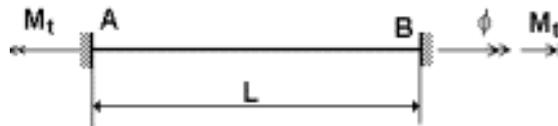
Fonte: (COELHO, 2013).

$$M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (16)$$

$$R = \frac{12EI\Delta}{L^3} \quad (17)$$

Na Figura 8, tem-se o caso de uma barra com as duas extremidades engastadas, submetida a uma rotação  $\phi$  ao redor do seu próprio eixo, em uma das extremidades. Devido a esta rotação, a barra reage com os momentos de torção  $M_t$  nas duas extremidades.

**Figura 8: Momentos de torção na barra devidos a uma rotação em uma das extremidades**

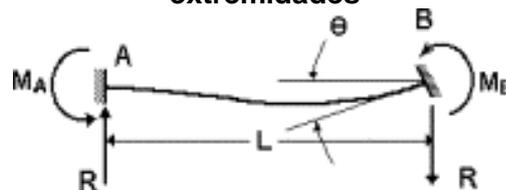


Fonte: (COELHO, 2013).

$$M_t = \frac{GJ_p\phi}{L} \quad (18)$$

Na Figura 9, tem-se o caso de uma barra com as duas extremidades engastadas, submetida a uma rotação  $\theta$  em uma das extremidades. Devido a esta rotação, a barra reage com os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$  nas duas extremidades e com as duas reações  $R$ .

**Figura 9: Momentos fletores e reações na barra devidos a uma rotação em uma das extremidades**



Fonte: (COELHO, 2013).

$$M_A = \frac{2EI\theta}{L} \quad (19)$$

$$M_B = \frac{4EI\theta}{L} \quad (20)$$

Estas ações de extremidade são suficientes para a construção da matriz de rigidez de uma barra de grelha plana utilizada neste estudo. Outras análises mais sofisticadas poderiam incluir outros termos na matriz de rigidez a partir de efeitos específicos.

A matriz de rigidez de um elemento de grelha plana é dada por:

$$K_M = \begin{bmatrix} \frac{GJ_p}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4Ey}{L} & -\frac{6Ey}{L^2} & 0 & \frac{2Ey}{L} & \frac{6Ey}{L^2} \\ 0 & -\frac{6Ey}{L^2} & \frac{12Ey}{L^3} & 0 & -\frac{6Ey}{L^2} & -\frac{12Ey}{L^3} \\ -\frac{GJ_p}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2Ey}{L} & -\frac{6Ey}{L^2} & 0 & \frac{4Ey}{L} & \frac{6Ey}{L^2} \\ 0 & \frac{6Ey}{L^2} & -\frac{12Ey}{L^3} & 0 & \frac{6Ey}{L^2} & \frac{12Ey}{L^3} \end{bmatrix}$$

Os termos com  $GJ_p$  são os termos que representam a rigidez à torção das barras de grelha. Os demais termos referem-se à rigidez à flexão da barra.

### 3.2.5 SISTEMAS DE COORDENADAS

Com a finalidade de se criar um sistema de identificação dos nós e barras e ordenar matricialmente as ações solicitantes (forças e momentos) e os deslocamentos (lineares ou angulares) existentes nos elementos de nós, torna-se imprescindível a criação de um sistema de coordenadas.

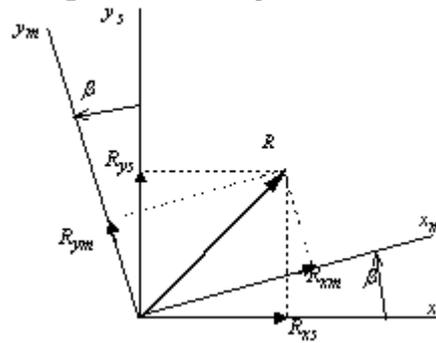
Na verdade, são necessários dois sistemas de coordenadas interdependentes, o primeiro chamado de **Sistema de Coordenadas Globais** e o segundo de **Sistema de Coordenadas Locais**.

O sistema de coordenadas global se refere aos graus de liberdade da estrutura como um todo, já o sistema de coordenadas locais se refere aos graus de liberdade dos elementos discretizados da estrutura.

### 3.2.6 TRANSFORMAÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

A rotação de eixos para vetores no plano pode ser formulada em uma base geométrica através de dois sistemas de eixos coincidentes na origem rotacionados de um ângulo  $\beta$ , como mostra a Figura 10.

**Figura 10: Rotação de eixos**



Fonte: (COELHO, 2013).

Com a rotação dos eixos obtém-se:

$$R_{xm} = \cos \beta \cdot R_{xs} + \sin \beta \cdot R_{ys} \quad (21)$$

$$R_{ym} = -\sin \beta \cdot R_{xs} + \cos \beta \cdot R_{ys} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} R_{xm} \\ R_{ym} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{xs} \\ R_{ys} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (24)$$

Onde:

R é uma matriz de senos e cossenos que é denominada matriz de rotação.

$$C_x = \frac{x_k - x_j}{L} \quad (25)$$

$$C_y = \frac{y_k - y_j}{L} \quad (26)$$

Onde o comprimento da barra L pode ser calculado a partir das coordenadas dos nós extremos:

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (27)$$

Denominando  $C_x = \cos \beta$  e  $C_y = \sin \beta$ , a matriz de rigidez de barra de grelha, em relação aos eixos globais é:

$$[K_G] = [R]^t [K_L] [R] \quad (28)$$

Onde

[K<sub>G</sub>]- matriz de rigidez do elemento referida aos eixos globais

[R] - matriz de rotação

[R]<sup>t</sup> – matriz de rotação transposta

[K<sub>L</sub>] -- matriz de rigidez do elemento referida aos eixos locais

$$\begin{matrix}
 \times \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 \frac{GJ_p}{L} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_y^2 & \left( \frac{GJ_p}{L} + \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{GJ_p}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2 & -\left( \frac{GJ_p}{L} + \frac{2EI_y}{L} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y \\
 \left( \frac{GJ_p}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{GJ_p}{L} C_y^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2 & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & -\left( \frac{GJ_p}{L} + \frac{2EI_y}{L} \right) C_x C_y & -\frac{GJ_p}{L} C_y^2 + \frac{2EI_y}{L} C_x^2 & \frac{6EI_y}{L^2} C_x \\
 \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & -\frac{12EI_y}{L^3} \\
 \frac{GJ_p}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2 & -\left( \frac{GJ_p}{L} + \frac{2EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_y & \frac{GJ_p}{L} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_y^2 & \left( \frac{GJ_p}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y \\
 -\left( \frac{GJ_p}{L} + \frac{2EI_y}{L} \right) C_x C_y & -\frac{GJ_p}{L} C_y^2 + \frac{2EI_y}{L} C_x^2 & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \left( \frac{GJ_p}{L} - \frac{4EI_y}{L} \right) C_x C_y & \frac{GJ_p}{L} C_y^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2 & \frac{6EI_y}{L^2} C_x \\
 -\frac{6EI_y}{L^2} C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_x & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{12EI_y}{L^3}
 \end{array} \right]
 \end{matrix}$$

Após gerada a matriz de rigidez K<sub>i</sub> de cada barra na forma expandida, os elementos desta matriz são transferidos para a matriz de rigidez de nós K da estrutura.

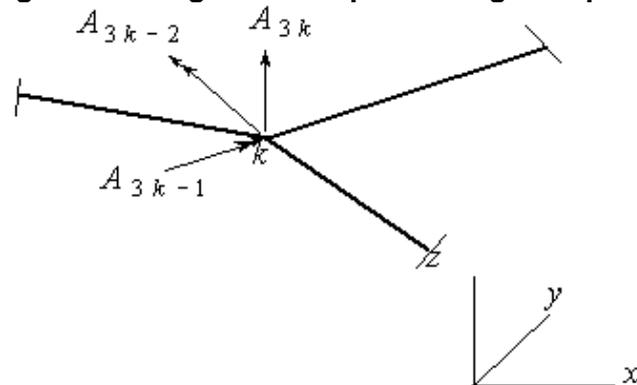
$$K_{ij} = \sum_{i=1}^{n^{\circ} \text{ barras}} K_i \quad (29)$$

Este procedimento de somar diretamente as matrizes de rigidez dos elementos para formar a matriz de rigidez da estrutura é frequentemente chamado de método direto da rigidez (direct stiffness method). O fato de se usar a ferramenta matemática de matrizes é o que leva muitas vezes o método de análise ser designado de análise matricial.

### 3.2.7 ESFORÇOS NODAIS APLICADOS

Na fase seguinte da análise, formam-se os vetores associados às cargas sobre a grelha. As ações externas aplicadas nos nós constituem o vetor A, como pode ser visto na Figura 11.

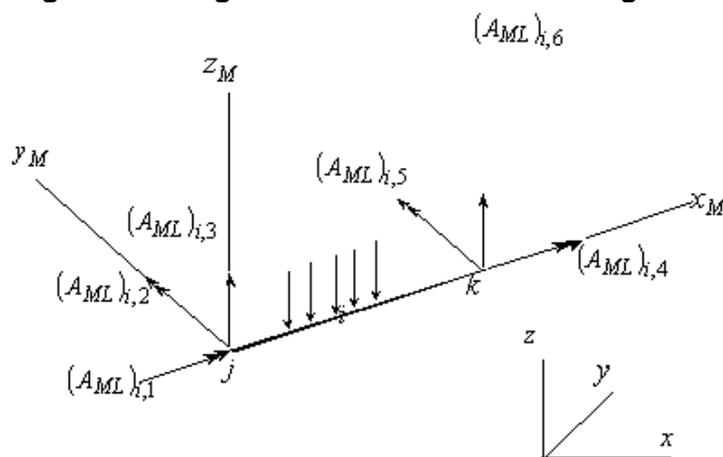
**Figura 11: Cargas nodais para uma grelha plana**



Fonte: (COELHO, 2013).

Com as ações  $A_{ML}$  nas extremidades de uma barra restringida da grelha (devidas às cargas) constrói-se o vetor de cargas equivalentes  $A_E$ . A Figura 12 apresenta as cargas nodais em uma barra de grelha.

**Figura 12: Cargas nodais em uma barra de grelha**



Fonte: (COELHO, 2013).

Às cargas nodais reais, vetor  $A$ , somam-se com as cargas nodais equivalentes, vetor  $A_E$ , para produzir o vetor de cargas combinadas  $A_C$ .

$$A_C = A + A_E \quad (30)$$

### 3.2.8 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS NAS BARRAS

Na fase final da análise, as matrizes geradas na etapa anterior são substituídas nas equações apropriadas, com o propósito de calcular os deslocamentos nodais desconhecidos  $D$ , as reações  $AR$  e as ações de extremidade de barra  $AM$ . Os deslocamentos nodais desconhecidos são calculados com a equação:

$$\vec{D} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \vec{A}_D \quad (31)$$

Existem diversas técnicas para solucionar sistemas de equações lineares simultâneas entre as quais citamos o método de Cholesky. O objetivo desta solução é obter o vetor de deslocamentos nodais  $D$  da estrutura da grelha.

Como estes deslocamentos estão referidos ao sistema de coordenadas globais, através da matriz de transformação de cada barra da grelha podemos calcular os deslocamentos nodais referidos ao sistema local e, com eles, obter os esforços nas extremidades da barra.

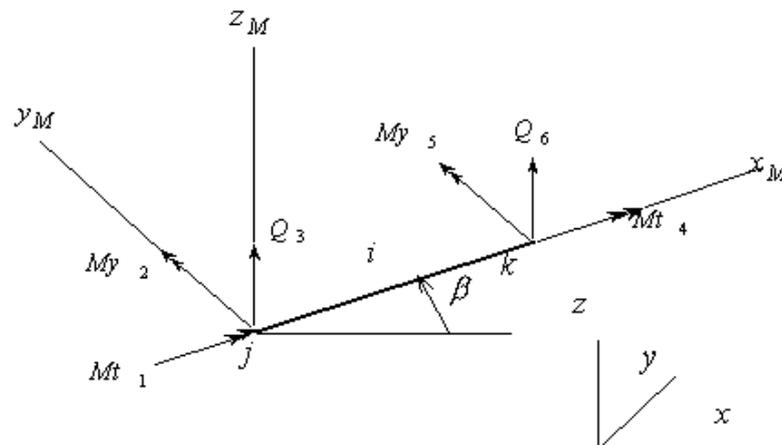
As ações nas extremidades das barras  $AM$  podem ser obtidas com a equação:

$$\vec{A}_M = \vec{A}_{ML} + \vec{A}_{MD} \cdot \vec{D} \quad (32)$$

$$\vec{A}_R = \vec{A}_{RL} + \vec{A}_{RD} \cdot \vec{D} \quad (33)$$

Na Figura 13 é apresentado os esforços nodais nas extremidades da barra da grelha.

**Figura 13: Esforços nodais nas extremidades de uma barra de grelha**



Fonte: (COELHO, 2013).

Sendo estes esforços, onde,  $Mt$  são momentos de torção,  $My$  momentos fletores no plano  $x_Mz_M$  e  $Q$  os esforços cortantes no plano  $x_Mz_M$ .

### 3.2.9 INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ A TORÇÃO

A aplicação da Analogia de Grelha para o cálculo de lajes em princípio parece tratar-se da simples aplicação do programa de análise de grelhas planas com o painel discretizado. Os resultados dos esforços e deslocamentos obtidos seriam então usados para

o dimensionamento. No entanto é necessário analisar a influência dos diversos parâmetros nos resultados, tais como número de faixas, rigidez a flexão e a torção entre outras.

No modelo de grelhas planas os esforços nas extremidades das barras que correspondem aos graus de liberdade estão apresentados na Tabela 2 e exemplificado na Figura 13.

**Tabela 2: Níveis de protensão segundo a ABNT NBR 6118:2014**

Grau de Liberdade	Esforço da Barra
Deslocamento Z	Força Cortante
Rotação em Y	Momento Fletor
Rotação em X	Momento de Torção

Fonte: (COELHO, 2013).

Estes esforços são proporcionais à rigidez correspondentes das barras, que nas matrizes das barras são os parâmetros de rigidez à torção  $GJ_p$  e de rigidez a flexão  $EI_y$ .

O parâmetro de rigidez a torção  $GJ_p$  é composto do módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) do material, que pode ser medido ou calculado em função do módulo de elasticidade transversal ( $E_c$ ) ou módulo de Young e do momento de inércia polar ( $J_p$ ) da seção transversal da barra.

Para materiais isotrópicos homogêneos, a lei de Hooke generalizada possui apenas três constantes elásticas  $E$ ,  $\nu$  e  $G$ . A equação de conexão é:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (34)$$

Para aplicações em concreto armado a ABNT NBR 6118:2014 na seção 8.2.9, fixa o valor do coeficiente de Poisson em 0.2, adotando-se a seguinte relação aproximada:

$$G_c = \frac{E_{cs}}{2,4} \quad (35)$$

O outro parâmetro é o momento de inércia a torção da seção transversal da barra ( $J_p$ ). As barras da grelha possuem seção retangular com largura igual à largura das faixas e altura igual a espessura da placa. O momento de inércia pode então ser calculado conforme GERE e WEAVER (1980) pela fórmula:

$$J_p = \beta \cdot h \cdot b^3 \quad (36)$$

Onde:

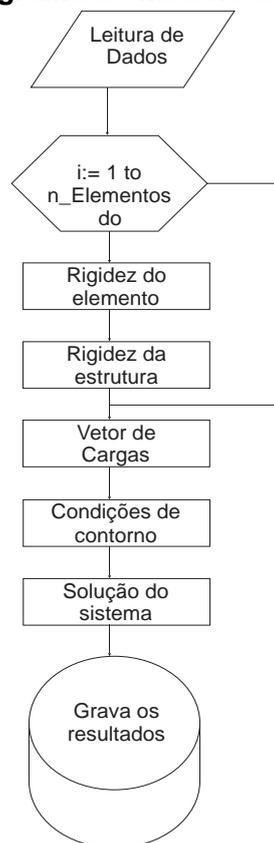
$$\beta = \frac{1}{3} - \left( 0,21 \frac{b}{h} \right) \left( 1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \quad (37)$$

Nessas fórmulas  $b$  é sempre a menor dimensão. Portanto, quando as faixas possuírem largura maior que a altura, o valor  $b$  é igual a espessura da faixa e  $h$  igual à largura da faixa. Quando as faixas passam a ter uma largura menor que a espessura da placa esta situação inverte-se.

### 3.3 FLUXOGRAMAS E PROCESSO DO PROGRAMA DE GRELHA

Pode-se dizer que basicamente qualquer programa de resolução de estruturas tem o fluxograma parecido com o da Figura 14, cujas etapas são descritas na sequência.

**Figura 14: Fluxograma do módulo de cálculo de grelhas**



Fonte: (CASS, 2015).

1. A leitura de dados consiste na caracterização da geometria da estrutura, dos seus elementos constituintes, restrições impostas pelos apoios existentes e da definição dos materiais utilizados. Esses dados são fornecidos pelo sistema gráfico de parametrização da estrutura.

2. Geração e inversão da matriz de rigidez. A matriz de rigidez é uma propriedade intrínseca à estrutura e está relacionada exclusivamente com as propriedades dos materiais e as características da seção transversal, independentemente das ações que a estão solicitando. A matriz de rigidez é obtida introduzindo-se vínculos fictícios à estrutura, impondo-se deslocamentos unitários correspondentes a esses vínculos. Uma vez que o usuário tenha informado os dados relacionados a estrutura, o programa é capaz de construir a matriz de rigidez.
3. Reunião dos dados de carregamento. Nesta fase, são informadas todas as cargas que estão solicitando a estrutura, sejam elas concentradas, distribuídas ou sob a forma de momentos. Uma vez lidos os carregamentos pelo programa, estes devem ser convertidos em ações nodais equivalentes.
4. Resolução dos sistemas de equações e consequente determinação dos deslocamentos.
5. A partir dos deslocamentos são determinados os esforços internos da estrutura (usando-se o método de Gauss-Jordan), bem como as reações de apoio.

### 3.3.1 DEFINIÇÃO DE CARGAS EXTRAS

A aplicação das cargas nos nós ocorre após a definição da malha. Por hora o programa permite a inserção de cargas nodais locais. Para a inserção de cargas distribuídas deve-se proceder de forma manual, dividindo-se a carga distribuída total pelo número de nós menos um, como mostrado na equação (38).

$$C_l = \frac{C_d}{n-1} \quad (38)$$

Onde:

$C_l$ : carga local equivalente;

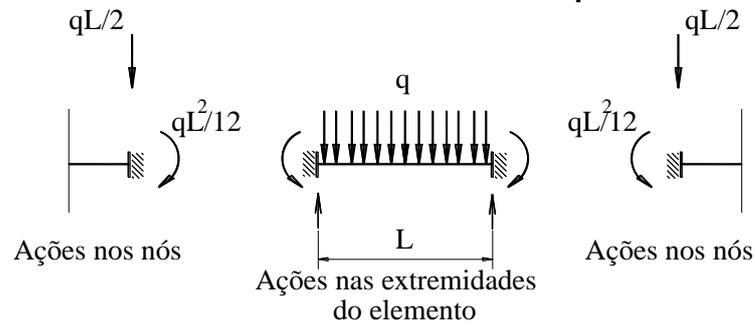
$C_d$ : Carga distribuída total;

$n$ : número de nós selecionados.

### 3.3.2 DETERMINAÇÃO DE AÇÕES NO ELEMENTO

De acordo com Carvalho et al. (2017) quando as ações atuam em um elemento é necessário transformar estas ações em nodais equivalentes. Considerando um elemento com ação uniforme distribuída  $q$ , obtém-se as seguintes ações nodais, como apresentado na Figura 15.

**Figura 15: Ação uniformemente distribuída em um elemento e as ações nas extremidades do elemento e nos nós equivalentes**



Fonte: (CARVALHO et al., 2017).

O vetor de ações, apenas com forças nodais passa a ser escrito:

$$\{P_{\text{elemento}}\} = \{P_{\text{local,egp}}\} + [k_{\text{elemento}}] \cdot \{u_{\text{elemento}}\} \quad (39)$$

Com:

$\{P_{\text{elemento}}\}$ : Vetor de ações no elemento;

$\{P_{\text{local,egp}}\}$ : Vetor de ações de engastamento perfeito;

$[k_{\text{elemento}}]$ : Matriz de rigidez do elemento;

$\{u_{\text{elemento}}\}$ : Deslocamentos do elemento

Assim a expressão 39 fica:

$$\{P_{\text{elemento}}\} - \{P_{\text{local,egp}}\} = [K_{\text{elemento}}] \cdot \{u_{\text{elemento}}\} \quad (40)$$

Desta maneira a expressão do vetor de carga dada por:

$$\{P_{\text{es}}\} = \sum_{i=1}^n [R_T] \{P\}_i \quad (41)$$

Com

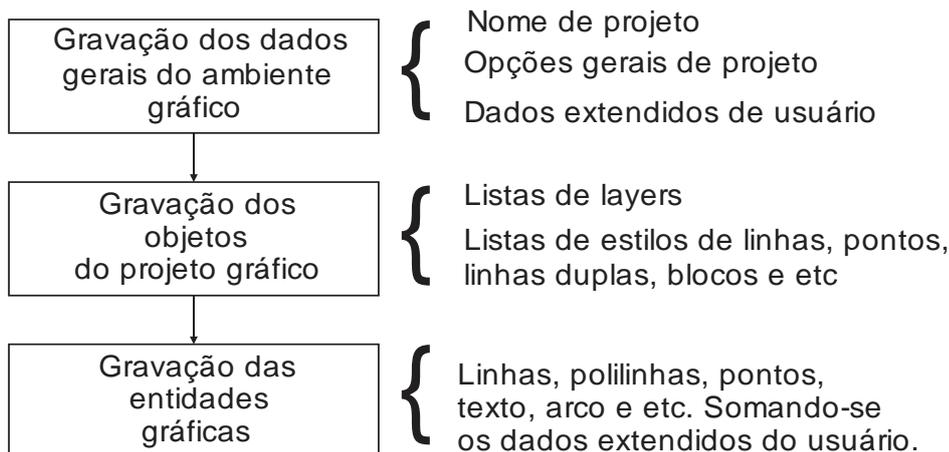
$\{P_{\text{es}}\}$ : Vetor de ações na estrutura;

$\{p\}_i = \{P_{\text{elemento}}\} - \{P_{\text{local,egp}}\}$

### 3.4 ENTRADA DE DADOS

Os arquivos do sistema gráfico de dados são muito semelhantes ao de um banco de dados tradicional. O arquivo de projeto tem o formato binário onde são guardadas as informações de projeto com sequência descrita na Figura 16.

**Figura 16: Conformação geral do arquivo de dados**



Fonte: (CASS, 2015).

O arquivo de entrada do módulo de cálculo é bem mais simples e optou-se pelo formato de texto. Esse formato não é muito eficiente, mas como a quantidade de dados é relativamente pequena, a velocidade de processamento não é prejudicada. A grande vantagem desse formato é a possibilidade de permitir que o usuário, eventualmente, possa apontar alterações aos dados de entrada antes do processamento. É um ponto muito interessante principalmente quando se quer utilizar o sistema para o ensino, já que dessa forma podem-se alterar alguns dados e ver o resultado dessas mudanças na tela gráfica. Os dados são colocados no arquivo na forma de seções de dados, que são descritos a seguir:

1. Número de características de barras (número de tipos de barras diferentes);
2. Lista das características de barras;
3. Número de nós e de barras;
4. Coordenadas X e Y de casa nó;
5. Lista das barras com o número do nó inicial, número do nó final e tipo de característica de barra;
6. Lista das solicitações em cada nó, momento fletor, torção e força vertical;
7. Lista das restrições nodais à flexão, torção e cortante.

### 3.5 SAÍDA DE DADOS

O arquivo do sistema de prototipagem gráfica é mantido em tempo real, refletindo aquilo que se vê na tela, sendo alterado à medida que o projeto se desenvolve.

A plataforma de cálculo produz um arquivo de saída também no formato de texto, que é dividido em duas seções, como mostrado na Tabela 3, a primeira com os deslocamentos nodais (rotação em X, rotação em Y e deslocamento em Z), e a segunda com as solicitações nas barras (Força cortante, momento fletor e momento torçor). As solicitações são apresentadas aos pares, pois em cada barra existem dois nós e as ações são impostas em cada nó. Por isso, referem-se às solicitações nodais pelas ações à direita ou à esquerda do nó.

**Tabela 3: Amostra do arquivo de saída do processador de cálculo (unidades em m, kN e kN.m)**

*****				
Deslocamento nodal				
Nó	Rotação em torno do eixo X	Rotação em torno do eixo Y	Deslocamentos na direção do eixo Z	
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	
2	-0.0000015	0.0000285	-0.0000033	
3	0.0000004	0.0000361	-0.0000100	
4	0.0000036	0.0000305	-0.0000169	
5	0.0000063	0.0000170	-0.0000217	
*****				
Reações de extremidade				
Barra	Nó	Momento torçor (x)	Momento fletor (y)	Esforço cortante (z)
1	1	0.0219	-0.6577	2.0198
	2	-0.0219	0.2537	-2.0198
2	2	-0.0274	-0.2634	1.4133
	3	0.0274	-0.0192	-1.4133
3	3	-0.0465	-0.0016	0.9217
	4	0.0465	-0.1827	-0.9217
4	4	-0.0380	0.1629	0.5155
	5	0.0380	-0.2660	-0.5155
5	5	-0.0111	0.2547	0.1605
	6	0.0111	-0.2868	-0.1605
6	6	0.0230	0.2879	-0.1747

Fonte: (CASS, 2015).

A partir dos dados apresentados na Tabela 3 podem-se associar esses resultados às entidades gráficas da malha equivalente. Desse momento em diante pode-se gerar a malha equivalente deformada e os demais gráficos de solicitações.

# 4. ESTUDOS DE LAJES LISAS PROTENDIDAS

Procura-se neste capítulo, oferecer para conhecimento do leitor as etapas e os conceitos necessários para o estudo das lajes lisas protendidas como também as prescrições normativas que devem ser atendidas.

## 4.1 DADOS DA CORDOALHA

A escolha da cordoalha depende da disponibilidade de mercado dos modelos produzidos pelos fabricantes. A Tabela 4 a seguir apresenta as opções de cordoalhas engraxadas disponíveis atualmente, assim como as características de cada cordoalha.

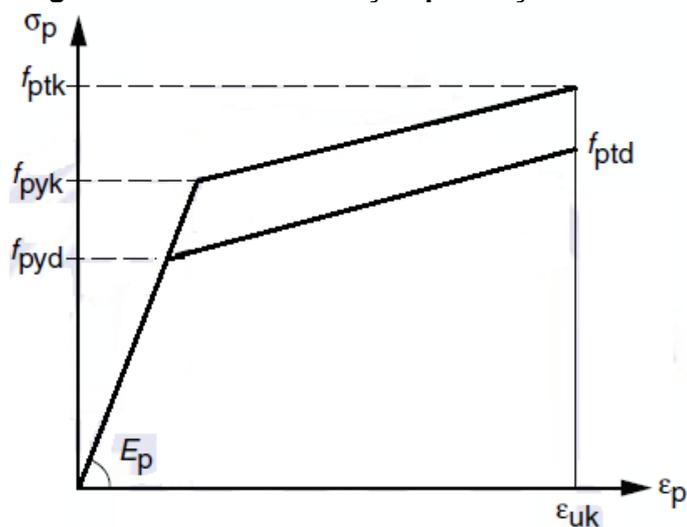
**Tabela 4: Características das cordoalhas engraxadas**

Produto	Diâmetro nominal (mm)	Área aprox. (mm <sup>2</sup> )	Área mínima (mm <sup>2</sup> )	Massa aprox. (kg/1000 m)	Carga mínima de ruptura (kN)	Carga mínima a 1% de deformação (kN)	Alongamento após ruptura (%)
<b>Cordoalhas de 7 fios CP 190, cor azul</b>							
Cord. CP 190 RB 12,70	12,7	101	99	792	187	169	
Cord. CP 190 RB 15,20	15,2	143	140	1126	265	239	3,5
<b>Cordoalhas de 7 fios CP 210, cor laranja</b>							
Cord. CP 210 RB 12,70	12,7	101	99	792	203	183	
Cord. CP 210 RB 15,20	15,2	143	140	1126	288	259	3,5

Fonte: (ARCELORMITTAL, 2015).

De acordo com a seção 9.6.1.2.1 da ABNT NBR 6118:2014 os valores limites da operação de protensão para as armaduras pós-tracionadas, de cordoalhas engraxadas, com aços da classe de relaxação baixa, a tensão inicial de protensão deve respeitar os limites de  $0,8 f_{ptk}$  e  $0,88 f_{pyk}$ , onde  $f_{pyk}$  é o valor característico da resistência ao escoamento convencional, representado na tabela pela carga mínima a 1% de deformação e  $f_{ptk}$  o valor característico da resistência a tração, na tabela apresentado como carga mínima de ruptura, demonstrado no diagrama a seguir que está contido na seção 8.4.5 da referida norma, como pode ser visto na Figura 17.

**Figura 17: Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras ativas**



Fonte: (ABNT NBR6118, 2014).

Os valores de  $f_{ptk}$  e  $f_{pyk}$  devem atender o que é especificado na ABNT NBR 7482:2008, sendo  $f_{pyk} = 0,9 f_{ptk}$ . Determinado a tensão inicial de protensão é necessário obter a trajetória ideal do cabo representante.

## 4.2 TRAJETÓRIA DO CABO REPRESENTANTE

A seção 18.6.1.1 da ABNT NBR 6118:2014 estabelece que a armadura de protensão pode ser retilínea, curvilínea, poligonal ou de traçado misto. Em geral, é adotado o perfil parabólico para as cordoalhas engraxadas em lajes lisas.

Segundo Cubas (2012), o ideal é que os esforços provocados pela protensão variem proporcionalmente aos esforços externos, para conseguir este efeito o traçado do cabo deve acompanhar o diagrama de momento fletor produzido pelo carregamento externo.

A seção 18.6.1.5 da ABNT NBR 6118:2014 determina que nas extremidades deve manter um trecho retilíneo não inferior a 100 cm e no caso de cordoalhas engraxadas este valor mínimo pode ser de 50 cm. Outro cuidado é ancorar os cabos na metade da espessura da laje. Desse modo, não surgem momentos fletores devido a protensão nas regiões de ancoragem. Após o trecho reto, por condições econômicas e executivas, é adotado perfil parabólico onde as flechas assumem os maiores valores possíveis, atendendo os cobrimentos mínimos (CARNEIRO, 2015).

Para determinar o cobrimento mínimo é necessário verificar a classe de agressividade ambiental em que está inserida a estrutura. A estrutura pode ser classificada pela agressividade ambiental, de acordo com a seção 6.4.2 da ABNT NBR 6118:2014, como apresentado na Tabela 5:

**Tabela 5: Classe de agressividade ambiental**

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana <sup>a, b</sup>	Pequeno
III	Forte	Marinha <sup>a</sup>	Grande
		Industrial <sup>a, b</sup>	
IV	Muito forte	Industrial <sup>a, c</sup>	Elevado
		Respingos de maré	

Fonte: (ABNT NBR6118, 2014).

O cobrimento mínimo aceitável pela norma é em função do tipo de estrutura, componente ou elemento estrutural e a classe de agressividade ambiental, como pode ser visto na tabela 7.2 da referida norma e apresentado na Tabela 6.

**Tabela 6: Cobrimento nominal de acordo com a classe de agressividade ambiental**

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV <sup>c</sup>
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje <sup>b</sup>	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo <sup>d</sup>	30		40	50
Concreto protendido <sup>a</sup>	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

Fonte: (ABNT NBR6118, 2014).

A norma menciona que para a face superior de lajes e vigas que possui proteção adicional adequada pode utilizar como cobrimento mínimo 15 mm. A norma ainda permite para concretos de classe de resistência superior ao mínimo exigido ou quando houver um controle de qualidade adequado, sendo que a exigência de controle rigoroso deve ser explicitada nos desenhos de projetos, reduzir o cobrimento definido na Figura 21 em até 5 mm.

Na Tabela 7 é apresentada a seção 7.4.2 da norma que indica a correspondência entre a classe de agressividade ambiental e a classe de concreto mínimo, de acordo com o tipo de elemento estrutural.

**Tabela 7: Relação entre a classe de agressividade e a qualidade do concreto**

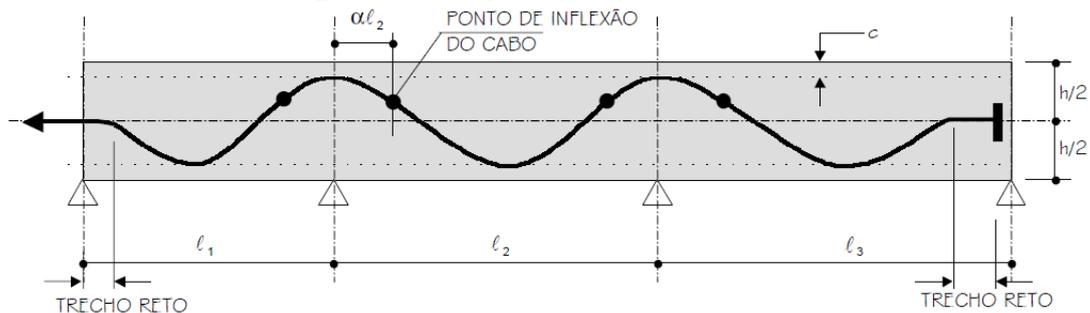
Concreto <sup>a</sup>	Tipo <sup>b, c</sup>	Classe de agressividade (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	CA	≤ 0,65	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,45
	CP	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,50	≤ 0,45
Classe de concreto (ABNT NBR 8953)	CA	≥ C20	≥ C25	≥ C30	≥ C40
	CP	≥ C25	≥ C30	≥ C35	≥ C40

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

Com relação a curvatura dos cabos deve-se respeitar o raio de curvatura mínimo permitido pela ABNT NBR 6118:2014 na seção 18.6.1.2 que é de 4 m, 8 m e 12 m, respectivamente, nos casos de fios, barras e cordoalhas.

Segundo Emerick (2005), o ponto de mudança de curvatura, ponto de inflexão, é assumido como uma porcentagem do vão ( $\alpha l$ ), sendo que o valor de  $\alpha$  é em geral adotado variando entre 5% a 15%. Na Figura 18 é apresentado como deve ser o traçado vertical dos cabos.

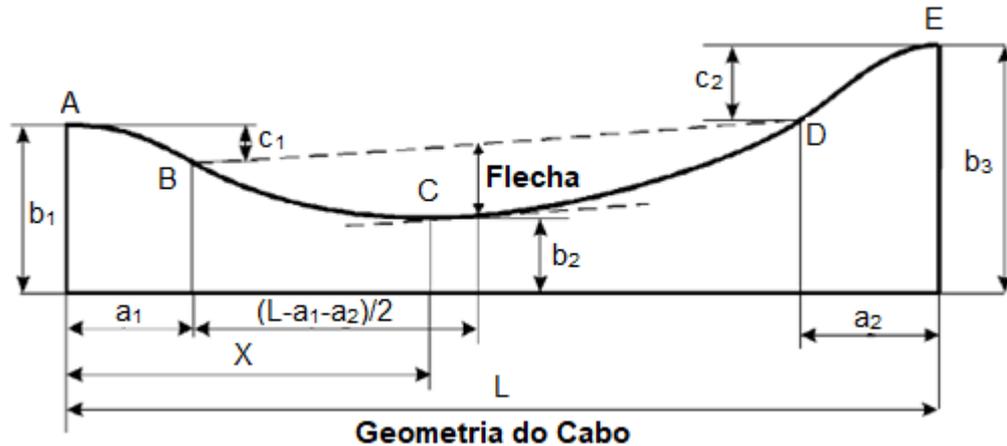
**Figura 18: Traçado vertical dos cabos**



Fonte: (EMERICK, 2005).

Definido o ponto de inflexão, deve-se determinar as excentricidades nos pontos em questão. A Figura 19 detalha as excentricidades existentes.

**Figura 19: Traçado vertical dos cabos**



Fonte: (GOLDSTEIN et al., 1991).

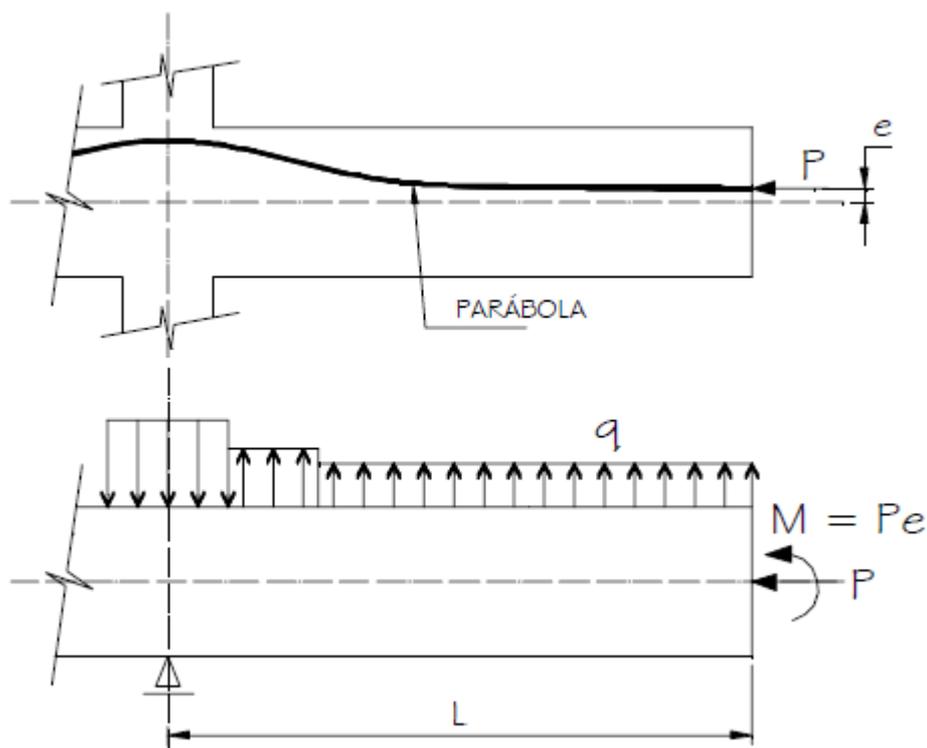
De acordo com Goldstein et al. (1991) a excentricidade  $c_1$  e  $c_2$  pode ser determinada em função da altura  $b_1$ , que neste caso é a metade da altura da laje, da altura  $b_2$ , que é a máxima excentricidade inferior possível respeitando o cobrimento mínimo, da altura  $b_3$  que é a máxima excentricidade superior respeitando o cobrimento mínimo e também em função da distância do ponto de inflexão e a distância do ponto de máxima excentricidade inferior, como pode ser visto nas equações 42 e 43. Sendo  $a_1$  e  $a_2$  a distância do ponto de inflexão já determinada anteriormente como sendo de 5 a 15% de  $L$ .

$$c_1 = \frac{(b_1 - b_2) \cdot a_1}{X} \quad (42)$$

$$c_2 = \frac{(b_3 - b_2) \cdot a_2}{(L - X)} \quad (43)$$

Para o caso de lajes em balanço, usa-se uma excentricidade nas ancoragens, a qual gera um momento fletor no sentido contrário ao deslocamento, como apresentado na Figura 20, juntamente com o carregamento equivalente da força de protensão.

**Figura 20: Perfil do cabo em balanço e carregamento introduzido pela protensão**



Fonte: (MELLO, 2005).

Segundo Emerick (2002) os balanços são elementos críticos que deve receber atenção especial tanto no projeto como na execução. Um problema associado a estruturas em balanço é o deslocamento excessivo, ou seja, elevada flecha. Uma forma de combater essa flecha é com o traçado adequado do cabo de protensão como apresentado na Figura 20.

O perfil dos cabos deve ser garantido na execução com o uso de suportes plásticos ou metálicos, sendo que o espaçamento desses suportes para o caso de lajes é recomendável que seja inferior a 1 metro (EMERICK, 2002).

Após a determinação da trajetória do cabo e da tensão inicial de protensão, calcula-se as perdas imediatas, que são divididas em perdas por atrito, perda por deformação da ancoragem e perda por deformação imediata do concreto durante a protensão.

### 4.3 PERDAS DE PROTENSÃO

De acordo com Carvalho (2012) ao efetuar a protensão da armadura não se obtém um esforço constante ao longo da mesma. A redução do esforço de protensão devido a algum fator influenciador que ocorre ao longo dos cabos são normalmente chamadas de perdas. Essas perdas podem ocorrer no ato da protensão (perdas imediatas), ou podem se dar ao longo do tempo (perdas progressivas).

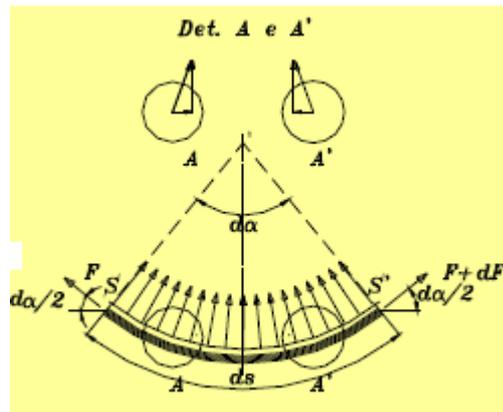
### 4.3.1 PERDAS IMEDIATAS

As perdas no ato da protensão são devidas principalmente a forma como se procede a protensão e as propriedades elásticas do aço e do concreto, podendo ocorrer devido ao atrito, acomodação da ancoragem ou pela deformação imediata do concreto (CARVALHO, 2012).

#### 4.3.1.1 PERDAS POR ATRITO

Segundo Carvalho (2012) em um trecho curvilíneo do cabo protendido, como há a tendência de o cabo se retificar, haverá no trecho uma ação deste no concreto, com direção radial. Estas ações normais provocarão atrito na direção normal. A Figura 21 exemplifica estas ações.

Figura 21: Traçado vertical do cabo em balanço



Fonte: (CARVALHO, 2012).

Em função das forças de inflexão e do coeficiente de atrito " $\mu$ ", a perda da força de protensão devida ao atrito pode ser quantificada ao longo do cabo através da equação indicada na ABNT NBR 6118:2014.

$$\Delta P_{(x)} = P_i \left[ 1 - e^{-(\mu \sum \alpha + kx)} \right] \quad (44)$$

Onde:

$P_i$ : é a força de protensão inicial;

$x$ : é a abscissa do ponto onde se calcula  $\Delta P$ , medida a partir da ancoragem, expressa em metros (m);

$\sum \alpha$ : é a soma dos ângulos de desvio entre a ancoragem e o ponto de abscissa  $x$ , expressa em radianos (rad);

$\mu$ : é o coeficiente de atrito aparente entre o cabo e a bainha. Na falta de dados experimentais, pode ser estimado como a seguir (valores em 1/radianos):

$\mu = 0,50$  entre cabo e concreto (sem bainha);

$\mu = 0,30$  entre barras ou fios com mossas ou saliências e bainha metálica;

$\mu = 0,20$  entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica;

$\mu = 0,10$  entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica lubrificada;

$\mu = 0,05$  entre cordoalha e bainha de polipropileno lubrificada;

$k$  é o coeficiente de perda por metro provocada por curvaturas não intencionais do cabo. Na falta de dados experimentais, pode ser adotado o valor  $0,01 \mu$  (1/m).

#### 4.3.1.2 PERDA POR DEFORMAÇÃO DA ANCORAGEM

Quando a ancoragem de um cabo é efetivada há sempre um pequeno retrocesso no cabo que estava esticado, provocando uma queda de tensão no mesmo (CARVALHO 2012).

Segundo Emerick (2002) a região de influência devido à perda por acomodação da ancoragem pode ser avaliada através de um cálculo iterativo, seguindo as seguintes etapas:

1º passo: arbitra-se um valor para  $x$  (onde  $x$  é a região de influência da ancoragem).

2º passo: calcula-se o valor de  $\sigma_{(x)} = \sigma_0 \cdot e^{-(\mu\Sigma\alpha+kx)}$ .

3º passo: calcula-se o valor de  $\Delta\sigma = 2(\sigma_0 - \sigma_{(x)})$ .

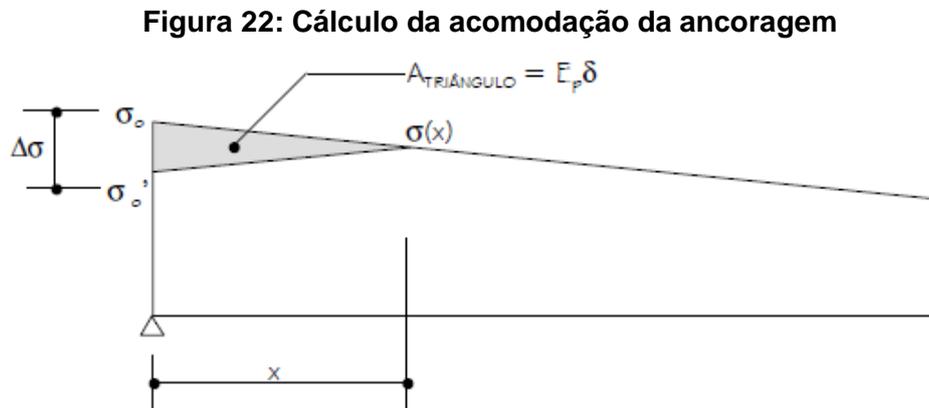
4º passo: verifica-se  $\delta E_p = A_{\text{TRIÂNGULO}} = \frac{\Delta\sigma \cdot x}{2}$ .

Onde:  $\delta$  – encurtamento total sofrido pelo cabo durante a ancoragem, devendo ser fornecido pelos fabricantes das ancoragens ou sistema de protensão e podem ser obtidos experimentalmente.

$E_p$  – módulo de elasticidade do aço de protensão em MPa.

5º passo: caso não seja verificada a igualdade, arbitra-se outro valor de  $x$  até que seja satisfeito o 4º passo.

A Figura 22 apresenta a sequência de como deve ser realizada as etapas descritas anteriormente.



Fonte: (EMERICK, 2002).

Estas perdas, no entanto, mudam de acordo com o dispositivo de ancoragem e do procedimento de protensão. Quanto mais eficiente é o sistema de ancoragem, menor será a perda gerada pela acomodação (SOUZA; MACEDO, 2016).

#### 4.3.1.3 PERDA POR DEFORMAÇÃO IMEDIATA DO CONCRETO

Quando se executa a protensão de uma peça com aderência posterior, normalmente se faz por etapas que ocasionam perdas decorrentes do progressivo aumento no encurtamento da peça quando do estiramento individual e sucessivo de cada cabo. Quando existe mais de um cabo, é comum protender e ancorar um de cada vez, fazendo com que a deformação no concreto provocada pelo cabo que está sendo tracionado acarreta perda de tensão nos cabos já ancorados. Nota-se que o primeiro cabo a ser tracionado sofrerá com a maior parcela e o último, por sua vez, não sofre nenhuma perda por encurtamento. (SOARES, 2008).

Devido à dificuldade de determinar a perda de tensão em cada cabo, a ABNT NBR 6118:2014 estabelece uma expressão para a estimativa da perda média por encurtamento elástico:

$$\Delta\sigma_p = \frac{\alpha_p (\sigma_{cp} + \sigma_{cg})(n-1)}{2n} \quad (45)$$

$\sigma_{cp}$ : tensão inicial no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devida à protensão simultânea de  $n$  cabos;

$\sigma_{cg}$ : tensão no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devida à carga permanente mobilizada pela protensão ou simultaneamente aplicada com a protensão;

$\alpha_p$ : relação entre o módulo de elasticidade do aço e o do concreto na idade da protensão;

$n$ : número de grupos de cabos protendidos simultaneamente, no caso de monocordoalhas é igual ao número de cabos;

Segundo Carvalho (2012), de um modo geral, as perdas devido a deformação imediata do concreto são pequenas, podendo até mesmo ser desprezadas.

#### 4.3.2 PERDAS PROGRESSIVAS

As perdas ao longo do tempo ocorrem devido aos fenômenos reológicos que estão sujeitos tanto o concreto como o aço. As características mecânicas e elásticas do concreto e do aço variam ao longo do tempo quando solicitadas seja por esforço, seja por deformação. Os principais fenômenos reológicos do concreto endurecido são a retração e fluência que se somam a relaxação da armadura (CARVALHO, 2012).

#### 4.3.2.1 PERDAS POR RETRAÇÃO DO CONCRETO

A retração do concreto é caracterizada por uma redução do volume do concreto devido à evaporação da água desnecessária à hidratação do cimento. A retração depende da umidade relativa do ambiente, da consistência do concreto no lançamento e da espessura fictícia da peça (RUDLOFF, 1998).

O valor da retração entre os instantes  $t_0$  e  $t$  é dado na seção 9.6.3.4.2 da ABNT NBR 6118:2014 pela expressão:

$$\Delta\sigma_{ps}(t, t_0) = \varepsilon_{CS}(t, t_0) \cdot E_p \quad (46)$$

Onde:

$\varepsilon_{CS}(t, t_0)$ : é a retração no instante  $t$ , descontada a retração ocorrida até o instante  $t_0$ , conforme a Tabela 8;

$E_p$ : módulo de elasticidade do aço de protensão.

A Tabela 8, contida na seção 8.2.11 da ABNT NBR 6118:2014 fornece o valor do coeficiente de fluência e da deformação específica de retração em função da umidade média ambiente e da espessura fictícia ( $2A_c/u$ ), onde  $A_c$  é a área da seção transversal e  $u$  é o perímetro da seção em contato com a atmosfera.

**Tabela 8: Valores característicos superiores da deformação específica de retração e do coeficiente de fluência**

Umidade média ambiente %		40		55		75		90	
Espessura fictícia $2A_c/u$ cm		20	60	20	60	20	60	20	60
$\varphi(t_\infty, t_0)$ Concreto das classes C20 a C45	$t_0$ dias	5	4,6 3,8	3,9 3,3	2,8 2,4	2,0 1,9			
		30	3,4 3,0	2,9 2,6	2,2 2,0	1,6 1,5			
		60	2,9 2,7	2,5 2,3	1,9 1,8	1,4 1,4			
$\varphi(t_\infty, t_0)$ Concreto das classes C50 a C90	$t_0$ dias	5	2,7 2,4	2,4 2,1	1,9 1,8	1,6 1,5			
		30	2,0 1,8	1,7 1,6	1,4 1,3	1,1 1,1			
		60	1,7 1,6	1,5 1,4	1,2 1,2	1,0 1,0			
$\varepsilon_{CS}(t_\infty, t_0)$ %	$t_0$ dias	5	-0,53 -0,47	-0,48 -0,43	-0,36 -0,32	-0,18 -0,15			
		30	-0,44 -0,45	-0,41 -0,41	-0,33 -0,31	-0,17 -0,15			
		60	-0,39 -0,43	-0,36 -0,40	-0,30 -0,31	-0,17 -0,15			

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

Para valores finais do coeficiente de fluência e da deformação específica de retração do concreto, com diferentes valores de espessura fictícia podem ser obtidos por interpolação linear.

#### 4.3.2.2 PERDA POR FLUÊNCIA DO CONCRETO

A fluência ou deformação lenta do concreto é o encurtamento do mesmo devido à ação de forças permanentemente aplicadas. A fluência varia linearmente com a tensão aplicada e compõe-se de uma parte rápida e uma parte lenta. A parte rápida é irreversível. A lenta é composta pela deformação reversível e irreversível (RUDLOFF, 1998).

Supondo inicialmente que a fluência que ocorra seja pura, assim, a ação causadora da deformação se mantém constante. Considerando que as ações de caráter permanente provoquem compressão, desta forma o encurtamento, em uma fibra do concreto, no nível do centro de gravidade da armadura, devido ao efeito da fluência, tem-se no tempo infinito, a deformação específica de  $\varepsilon_{c,c}(t, t_0)$ . Assim, considerando a aderência entre o concreto e a armadura, há um encurtamento correspondente na armadura de protensão e, portanto, uma perda de tensão dada por (CARVALHO, 2012):

$$\Delta\sigma_{pc}(t, t_0) = \varphi(t_\infty, t_0) \cdot \alpha_p \cdot \sigma_{cgp} \quad (47)$$

Onde:

$\varphi(t_\infty, t_0)$ : é o coeficiente de fluência, que pode ser obtido pela Tabela 8 já citada.

$\sigma_{cgp}$ : é a tensão que ocorre no concreto no nível do centro de gravidade da armadura de protensão e devido a ação das cargas permanentes, inclusive a protensão sendo dada pela expressão:

$$\sigma_{cgp} = \frac{N_p}{A_c} + \frac{N_p \cdot e^2}{I} - \frac{\sum_i M_{gi}}{I} e \quad (48)$$

Onde:

$N_p$  – força de protensão total;

$I$  – Inércia da seção transversal;

$e$  – Excentricidade dos cabos;

$M_{gi}$  – somatório de momento fletor devido a carga permanente e sobrecarga permanente.

É importante salientar que a parcela da carga acidental  $q$  (correspondente a  $\psi_2$ ) também tem caráter permanente e assim deve ser considerada na expressão 15.

#### 4.3.2.3 PERDA POR RELAXAÇÃO DO AÇO

A relaxação do aço é um alívio de tensão que a armadura de protensão sofre ao longo do tempo. Como a taxa de relaxação é proporcional à tensão de tração no cabo e, em consequência as outras perdas de protensão, a tensão inicial do cabo sofre uma redução contínua. Com isso, a taxa de relaxação também diminui (SOUZA E MACEDO, 2016).

A intensidade da relaxação pura do aço, deformação constante, é determinada pelo coeficiente  $\psi(t, t_0)$ , definido por:

$$\psi(t, t_0) = \frac{\Delta\sigma_{pr}(t_\infty, t_0)}{\sigma_{pi}} \quad (49)$$

Onde:

$\Delta\sigma_{pr}(t_\infty, t_0)$ : perda de tensão por relaxação pura, com comprimento constante, desde o instante do estiramento da armadura até o instante  $t$  considerado.

$\sigma_{pi}$ : tensão na armadura de protensão no instante de seu estiramento.

Os valores médios da relaxação de fios e cordoalhas, medidos após 1000 h, à temperatura constante de 20 °C e para tensões variando de 50% a 80% de  $f_{ptk}$  ( $\Psi_{1000}$ ) são definidos em 8.4.8 da ABNT NBR 6118:2014, que está contido na Tabela 9:

**Tabela 9: Valores de  $\psi_{1000}$ , em porcentagem**

$\sigma_{po}$	Cordoalhas		Fios		Barras
	RN	RB	RN	RB	
0,5 $f_{ptk}$	0	0	0	0	0
0,6 $f_{ptk}$	3,5	1,3	2,5	1,0	1,5
0,7 $f_{ptk}$	7,0	2,5	5,0	2,0	4,0
0,8 $f_{ptk}$	12,0	3,5	8,5	3,0	7,0

Onde  
RN é a relaxação normal;  
RB é a relaxação baixa.

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

Os valores correspondentes a tempos diferentes de 1000 h, sempre a 20 °C, podem ser determinados a partir da seguinte expressão, devendo o tempo ser expresso em dias:

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left( \frac{t - t_0}{41,67} \right)^{0,15} \quad (50)$$

Para tensões inferiores a 0,5  $f_{ptk}$ , admite-se que não haja perda de tensão por relaxação. Para tensões intermediárias entre os valores fixados na Tabela 8, pode ser feita

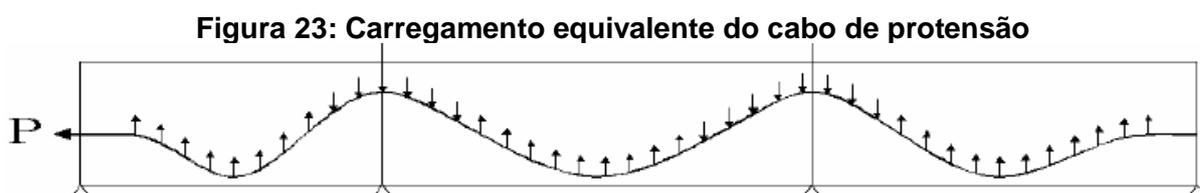
interpolação linear. Pode-se considerar que, para o tempo infinito, o valor de  $\psi(t, t_0)$  é dado por  $\psi(t_\infty, t_0) \cong 2,5 \cdot \psi_{1000}$ .

#### 4.4 APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO EQUIVALENTE NA GRELHA

A analogia de grelha para análise de lajes protendidas é um procedimento bastante utilizado pelos programas computacionais, pois atinge resultados com um baixo de processamento de dados e em um curto espaço de tempo (PEDROZO, 2008).

Segundo Carvalho e Pinheiro (2013), no caso particular de lajes lisas, a analogia de grelha tem apresentado resultados coerentes com os demais métodos, por vezes até melhores. Dado que cada elemento de barra da grelha equivalente representa uma faixa determinada da laje de acordo com a abertura adotada para a malha, os autores esclarecem que é preciso tomar cuidados na definição da malha e nas propriedades das barras, para que a placa e o reticulado equivalente apresentem comportamentos equivalentes para o mesmo carregamento aplicado.

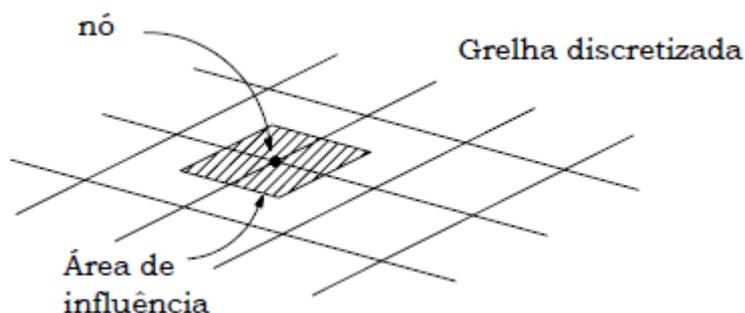
Neste trabalho, é utilizado o método do carregamento equivalente para consideração dos efeitos da protensão na laje. Esse processo considera uma carga linear uniformemente distribuída em trechos da laje e posteriormente concentrada nos nós da grelha equivalente. As mudanças no sentido das cargas lineares ocorrem nos pontos de inflexão de acordo com o traçado vertical do cabo como apresentado na Figura 23.



Fonte: (MILANI, 2006).

Almeida Filho (2002) orienta que, para substituir a carga distribuída aplicada na placa por cargas concentradas em nós, pode-se utilizar o processo de áreas de influência, dado que a área é delimitada pelo espaçamento da malha, onde cada carga, a uma distância menor ou igual a metade do comprimento da barra, em ambas as direções, é levada diretamente ao nó, conforme mostra a Figura 24.

**Figura 24: Área de influência do nó da grelha**



Fonte: (ALMEIDA FILHO, 2002).

A partir da carga equivalente são determinados os esforços devido à protensão, que são combinados com os demais esforços para realizar o dimensionamento da armadura passiva e a verificação de tensões. Com o carregamento equivalente, são determinados os deslocamentos devido à protensão. O deslocamento final da estrutura é obtido pela combinação dos deslocamentos do carregamento equivalente aos demais carregamentos (CARNEIRO, 2015).

Os esforços obtidos da carga balanceada incluem o efeito isostático e o efeito hiperestático de protensão. Na seção seguinte são detalhados os momentos causados pelas cargas descritas anteriormente.

#### **4.5 MOMENTO DE PROTENSÃO TOTAL**

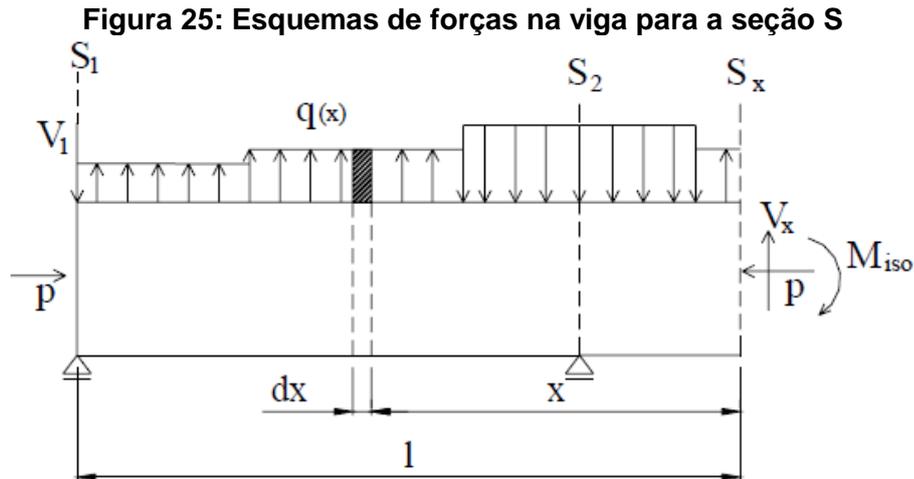
Segundo Mello (2005), os esforços obtidos através da utilização do método de cargas equivalentes ( $M_p$ ), conforme citado na seção anterior, incluem o efeito isostático ( $M_{isost}$ ) e o efeito hiperestático ( $M_{hip}$ ). Portanto tem-se:

$$M_p = M_{isost} + M_{hip} \quad (51)$$

A seguir será detalhado cada um destes efeitos.

##### **4.5.1 MOMENTO ISOSTÁTICO DE PROTENSÃO**

O momento necessário para manter o equilíbrio em uma seção S da viga, a qual dista "l" da ancoragem, é chamado de momento isostático, como pode ser visto na Figura 25 (MELLO, 2005).



Fonte: (MELLO, 2005).

O efeito isostático, ou momento primário, independe das condições de apoio e das cargas equivalentes. É função da força de protensão “P” e da excentricidade do cabo “e” (CARNEIRO, 2015):

$$M_{\text{isost}} = P \cdot e \quad (52)$$

Como a análise da protensão como carregamento equivalente gera o momento total de protensão, é necessário proceder com o cálculo dos esforços isostáticos de protensão nas seções para verificar o Estado Limite Ultimo.

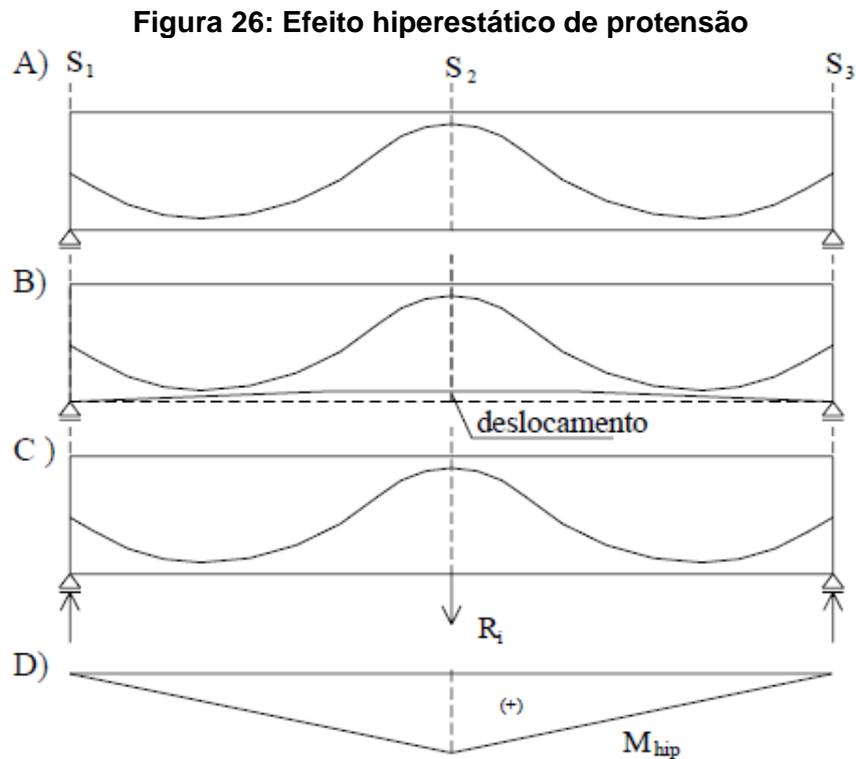
#### 4.5.2 MOMENTO HIPERESTÁTICO DE PROTENSÃO

O efeito hiperestático de protensão ocorre em estrutura hiperestática, em que a continuidade da viga se opõe à livre deformação de cada vão, sob o efeito das solicitantes de protensão, dando origem a momentos fletores e esforços cortantes (MELLO, 2005).

De acordo com Carneiro (2015) nas estruturas hiperestáticas, as vinculações, ao impedirem a livre deformação do elemento, dão origem aos esforços hiperestáticos de protensão. As reações hiperestáticas dos apoios do elemento dão origem a diagramas de momento fletor e esforço cortante que devem ser considerados do dimensionamento da estrutura.

Para analisar uma estrutura hiperestática como exposta por Mello (2005), considera-se a viga da Figura 26, supondo que o apoio do vão intermediário desta viga, fosse retirado, como apresentado na Figura 26-A. Com a atuação da protensão, a viga terá um deslocamento vertical para cima, (Figura 26-B). Porém, devido à presença do apoio intermediário, ela não se deslocará, surgindo as reações indicadas na Figura 26-C. Estas

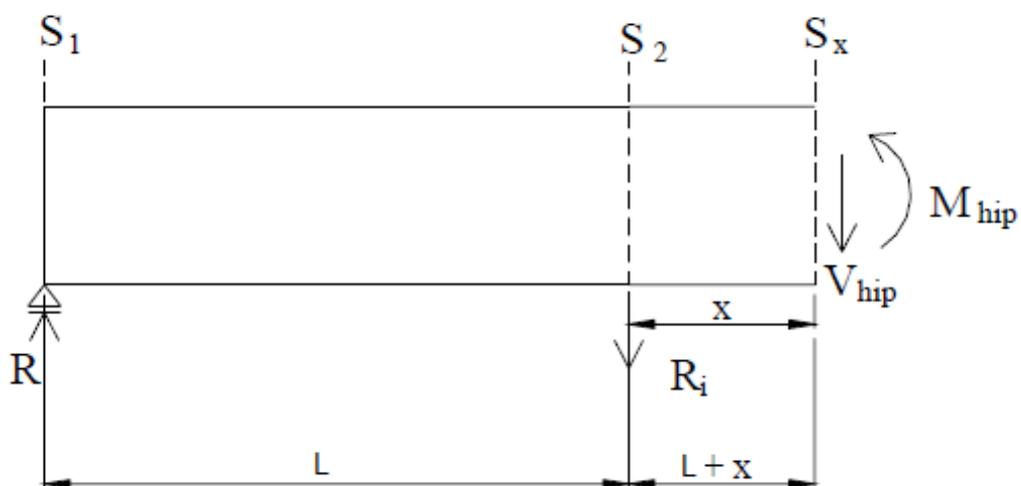
são as reações hiperestáticas e geram o diagrama de momento fletor ilustrado na Figura 26-D.



Fonte: (MELLO, 2005).

Ainda segundo Mello (2005), as reações da Figura 25 são oriundas apenas da protensão, sendo as únicas forças auto equilibradas na viga. Considerando o esquema de forças na seção S da viga ilustrada na Figura 27, tem-se:

**Figura 27: Efeito de forças na viga para a seção S devido ao efeito hiperestático**



Fonte: (MELLO, 2005).

Sendo que:

$M_{hip}$  – momento hiperestático de protensão;

$V_{hip}$  – esforço cortante hiperestático devido ao efeito de protensão;

$R_i$  – Reação devido ao momento hiperestático de protensão.

O conceito apresentado sobre o efeito hiperestático está descrito para o caso de vigas contínuas, porém pode ser estendido para lajes. No entanto, em lajes têm-se cabos distribuídos nas duas direções e concentrados em faixas, o que torna a determinação do hiperestático bem mais complexa, sendo necessário recorrer a procedimentos numéricos.

Ao calcular uma laje como uma grelha hiperestática obtém-se resultados que já incluem a parcela do momento isostático de protensão. Portanto, pode-se afirmar que o valor do hiperestático nesta faixa será a diferença entre os valores do momento final, obtido pela grelha, e do momento isostático de protensão da faixa, representado pelo número de cabos na faixa, vezes a excentricidade (PEDROZO, 2008).

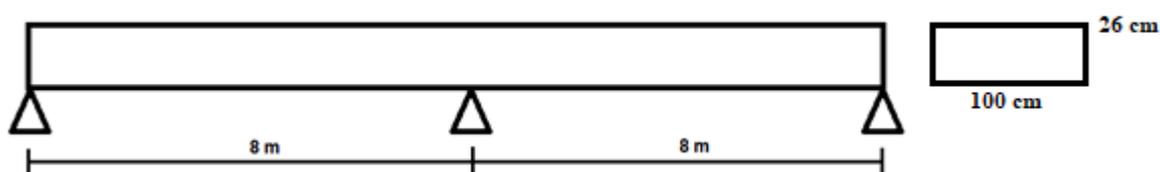
## 5. EXEMPLO NUMÉRICO – VIGA CONTÍNUA

Neste capítulo é resolvido um exemplo numérico de uma viga faixa contínua protendida e solicitada por apenas um cabo de protensão para desenvolver um algoritmo para ser aplicado no programa GRELHA. Para resolver esta viga faixa foi utilizado uma seção transversal de 100 x 26 cm, sendo dois trechos de 8 metros cada, totalizando 16 m. O ambiente é classificado na classe de agressividade ambiental I. Foi considerado que na face superior da viga faixa seja revestida, possibilitando assim a utilização do cobrimento da face superior de 15 mm. O  $f_{ck}$  do concreto utilizado foi de 30 MPa, possibilitando assim reduzir em 5mm o cobrimento da face inferior, de acordo com os critérios normativos contidos na ABNT NBR 6118:2014, pois o  $f_{ck}$  utilizado é maior que o mínimo, que para a classe de agressividade I e concreto protendido é de 25 MPa. Portanto para este exemplo resultou em um cobrimento de 2,0 cm na face inferior e 1,5 cm na face superior. Em relação ao tipo de protensão foi utilizada a não aderente, com o uso de cordoalhas engraxadas.

Para ter uma confiabilidade no algoritmo foi resolvido este exemplo de três modos diferentes, pelo FTOOL, por análise matricial com auxílio de planilhas do Excel e, por último, utilizando o programa GRELHA. A resolução por meio de análise matricial é bem parecida com a resolução através do GRELHA, sendo a diferença é que é desprezado o efeito da torção na resolução por análise matricial nas planilhas do Excel. No programa GRELHA foi resolvido de maneira manual, inserindo apenas as forças pontuais nos nós da grelha. Foi utilizado este modo de resolução para comprovar que, neste caso apesar da não consideração dos momentos de bloqueio nodais, ao utilizar o programa GRELHA chega-se a resultado satisfatório, o maior inconveniente é o processo ser trabalhoso e demorado por demandar muitas atividades manuais, sendo o objetivo deste trabalho automatizar todo esse processo.

Na Figura 28 são apresentados os vãos, seção transversal e as condições de apoio da viga.

**Figura 28: Seção transversal da viga faixa protendida.**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A seguir são dispostos os dados da cordoalha, contendo nesta viga, uma única cordoalha, para estudo do efeito da mesma na viga.

## 5.1 DADOS DA CORDOALHA ESCOLHIDA

As propriedades da cordoalha engraxada escolhida estão contidas na Tabela 4:

- Área da cordoalha = 1,01 cm<sup>2</sup>;
- $E_p = 195000$  MPa;
- $f_{pyk} = 1710$  MPa;
- $f_{ptk} = 1900$  MPa;

Foi calculada a tensão de protensão inicial, para o limite estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014, que deve ser o menor dos seguintes valores:

$$\sigma_{pi} = 0,8 \cdot f_{ptk} = 0,8 \cdot 1900 = 1520 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{pi} = 0,88 \cdot f_{pyk} = 0,88 \cdot 1710 = 1504,8 \text{ MPa}$$

Como a tensão inicial de protensão tem que ser menor que estes dois valores, foi adotada  $\sigma_{pi} = 1500$  MPa.

## 5.2 TRAJETÓRIA DO CABO

A trajetória do cabo representante tem início na definição do revestimento utilizado que é de acordo com a classe de agressividade ambiental. A ABNT NBR 6118:2014 também define revestimentos diferentes para as faces inferiores e superiores, onde é mencionado que para as faces superiores que estejam devidamente protegidas, pode-se utilizar o revestimento nominal mínimo de 15 mm. Com isso, foi adotado 2 cm para o revestimento inferior e 1,5 cm para revestimento superior de.

A partir do revestimento foi encontrado o valor do ( $d'$ ) que foi utilizado neste exemplo como, o revestimento mais o diâmetro da armadura, justificado pelo fato de ter duas cordoalhas no mesmo ponto, uma no sentido vertical e outra no sentido horizontal, resultando em um  $d'$  inferior de 3,27 cm e um  $d'$  superior de 2,77 cm.

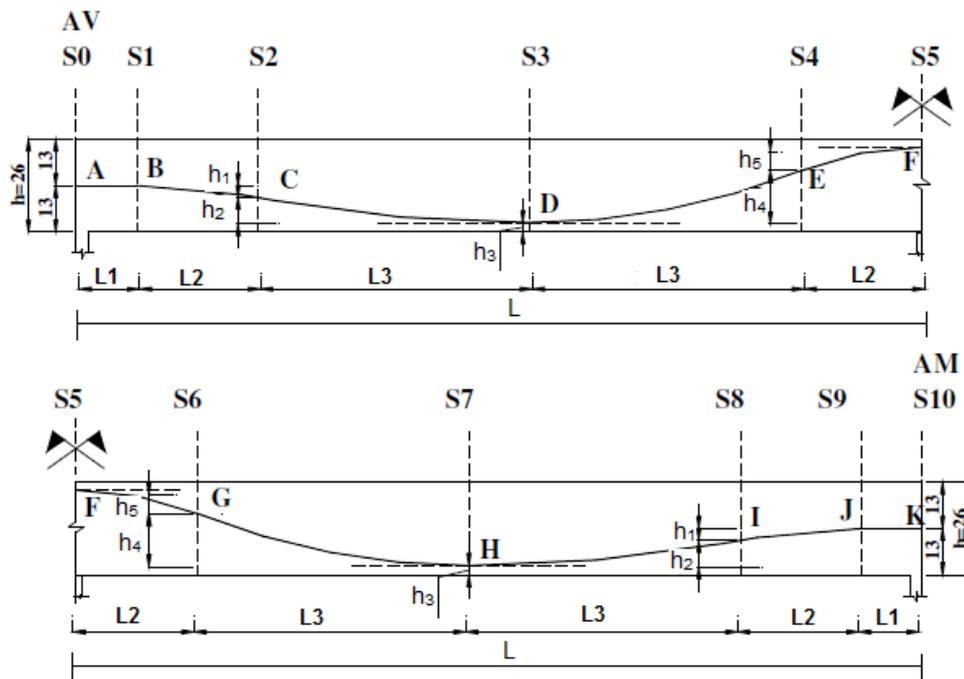
O traçado do cabo representante está disposto na Figura 31.

Para obter a trajetória considera-se aqui como um traçado ideal aquele com a saída do cabo no centro de gravidade da peça na sua extremidade até o apoio com a máxima excentricidade permitida, passando pela face inferior da laje na seção próxima ao meio do

vão. No centro da peça há uma curvatura com a máxima flecha permitida. O cabo sai da extremidade da peça com ângulo nulo do centro de gravidade e prossegue reto por 100 cm. No trecho 15% do vão próximo ao pilar, deve-se fazer uma concordância vertical para evitar uma concentração de tensão normal vertical junto ao pilar. Ao longo do trecho adotou-se mais duas curvaturas.

Devido à grande perda por deformação da ancoragem o cabo terá uma extremidade morta (pré-blocada) (M) e outra ativa (A). Na prática, para se manter simetria de ações, considera-se que para cada cabo com extremidades AM (ativa - morta) haverá um simétrico com extremidades MA (morta-ativa). O traçado do cabo representante está disposto na Figura 29.

**Figura 29: Trajetória do cabo**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Sendo:

$$L_1 = 100 \text{ cm};$$

$$L_2 = 0,15 \cdot L = 0,15 \cdot 800 = 120 \text{ cm};$$

$$L_3 = (L - L_1 - 2 \cdot L_2) / 2 = 230 \text{ cm};$$

$$h_1 = 3,2 \text{ cm};$$

$$h_2 = 6,53 \text{ cm};$$

$$h_3 = 3,27 \text{ cm};$$

$$h_4 = 13,06 \text{ cm};$$

$$h_5 = 6,9 \text{ cm};$$

A partir do traçado do cabo representante adotado, foram obtidos os valores do desvio angular e da flecha para cada trecho do mesmo. Estes valores estão na Tabela 10.

**Tabela 10: Valores do desvio angular e da flecha para cada trecho do cabo**

Trechos	S1 – S2	S2 – S3	S3 -S4	S4 – S5
Flechas (cm)	3,2	6,53	13,06	6,9
Desvio angular (°)	3,05	3,25	6,48	6,56

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

O desvio angular é obtido a partir da seguinte formula:

$$\alpha(^{\circ}) = \text{arc.tg}\left(\frac{2 \cdot y}{\Delta x}\right) \quad (53)$$

Onde:

y – é a flecha no trecho analisado;

$\Delta x$  – é o comprimento do trecho analisado.

### 5.3 CÁLCULO DAS PERDAS IMEDIATAS

Com os valores encontrados do desvio angular, juntamente com as informações da seção 4.3.1 deste trabalho, considerando os dados a seguir, é possível obter as perdas imediatas (perdas por atrito e acomodação da ancoragem).

Dados:

- $\beta = 0,01$  rad/m;
- $\mu = 0,05$  (cordoalha engraxada);
- $\sigma_{pi}$  (tensão do aço na extremidade ativa por ocasião da protensão) =  $150,0$  kN/cm<sup>2</sup>;
- $\Delta_L = 6$  mm;
- $E_p = 195$  GPa;

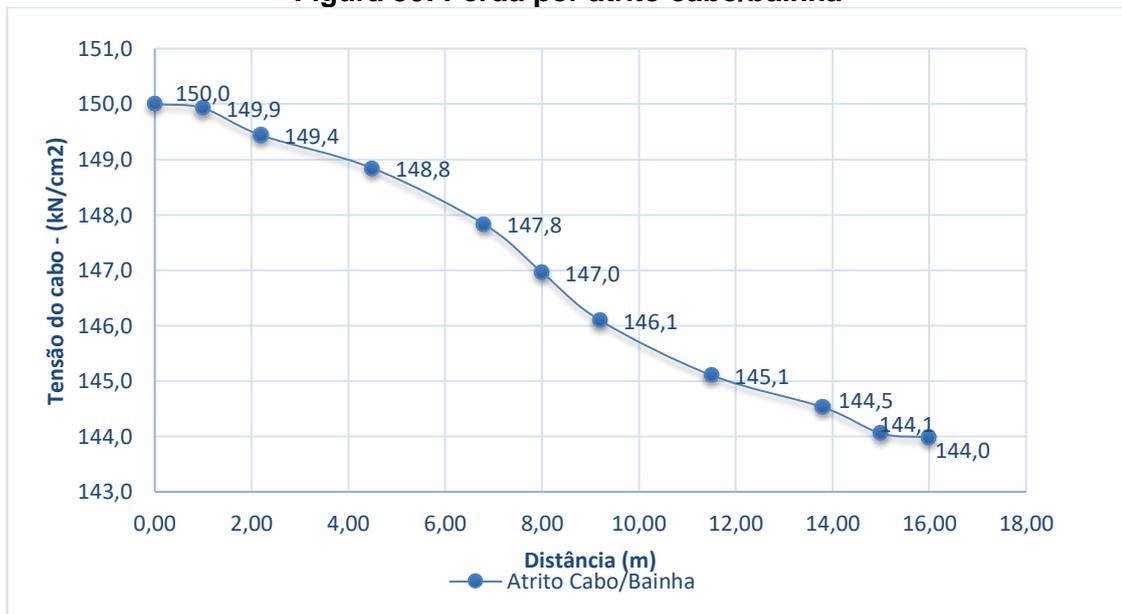
Os valores das tensões em cada trecho, após as perdas de atrito, são mostrados na Tabela 11.

**Tabela 11: Tensão ao longo do cabo representante após as perdas por atrito**

Seção	$\Delta_x$ (m)	x (m)	$\Delta_y$ (m)	$\alpha$ (°)	$\Delta\alpha$ (°)	$\alpha$ (rad)	$(\mu.\alpha + k.x)$	$e^{-(\mu.\alpha + k.x)}$	$\sigma = \sigma_0.e^{-(\mu.\alpha + k.x)}$
S <sub>0</sub>	0,00	0,00	0,0000	0,000	0,0	0,000	0,000	1,000	150,0
S <sub>1</sub>	1,00	1,00	0,0000	0,000	0,0	0,000	0,001	1,000	149,9
S <sub>2</sub>	1,20	2,20	0,0320	3,053	3,1	0,053	0,004	0,996	149,4
S <sub>3</sub>	2,30	4,50	0,0653	3,250	6,3	0,110	0,008	0,992	148,8
S <sub>4</sub>	2,30	6,80	0,1306	6,479	12,8	0,223	0,015	0,986	147,8
S <sub>5</sub>	1,20	8,00	0,0640	6,089	18,9	0,329	0,020	0,980	147,0
S <sub>6</sub>	1,20	9,20	0,0640	6,089	25,0	0,436	0,026	0,974	146,1
S <sub>7</sub>	2,30	11,50	0,1306	6,479	31,4	0,549	0,033	0,967	145,1
S <sub>8</sub>	2,30	13,80	0,0653	3,250	34,7	0,605	0,037	0,964	144,5
S <sub>9</sub>	1,20	15,00	0,0320	3,053	37,7	0,659	0,040	0,960	144,1
S <sub>10</sub>	1,00	16,00	0,0000	0,000	37,7	0,659	0,041	0,960	144,0

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Na Figura 30 é apresentado o gráfico que relaciona a perda por atrito do cabo de protensão ao longo de seu comprimento.

**Figura 30: Perda por atrito cabo/bainha**

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A Tabela 12 apresenta o cálculo da perda por acomodação da ancoragem do cabo representante.

**Tabela 12: Perda por acomodação da ancoragem**

Seção	x (cm)	s (MPa)	$\Omega$	Verificação	$\Omega$ (kN/cm)	11.700
S <sub>0</sub>	0	150,00	0	P.I. ABAIXO	$\Delta\sigma$ (kN/cm <sup>2</sup> )	1,34
S <sub>1</sub>	100	149,93	7	P.I. ABAIXO	$l_0 =$ (cm)	1.600
S <sub>2</sub>	120	149,44	164	P.I. ABAIXO		
S <sub>3</sub>	230	148,84	562	P.I. ABAIXO		
S <sub>4</sub>	230	147,83	1.703	P.I. ABAIXO		
S <sub>5</sub>	120	146,96	2.993	P.I. ABAIXO		
S <sub>6</sub>	120	146,09	4.483	P.I. ABAIXO		
S <sub>7</sub>	230	145,10	6.534	P.I. ABAIXO		
S <sub>8</sub>	230	144,53	7.994	P.I. ABAIXO		
S <sub>9</sub>	120	144,06	9.350	P.I. ABAIXO		
S <sub>10</sub>	100	143,98	9.563	P.I. ABAIXO		

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

O cálculo da perda por acomodação da ancoragem se resolve por tentativas, sendo necessário considerar inicialmente a perda por atrito. Para cada tentativa, verifica-se se o ponto em questão é indeslocável, caso não seja é verificado então o próximo ponto. Portanto, na Tabela 12, na coluna verificação, “P.I. ABAIXO”, significa que o ponto em questão não é o indeslocável, sendo necessário verificar o próximo ponto. Como observado, para o cabo analisado, não foi verificado um ponto indeslocável, sendo assim todos os pontos sofreram perda por acomodação da ancoragem.

A Tabela 13 apresenta a tensão após calculadas as perdas por atrito e por acomodação da ancoragem.

**Tabela 13: Tensão após as perdas imediatas**

Seção	Distância (m)	$\sigma$ (kN/cm <sup>2</sup> ) Atrito	$\sigma'$ (kN/cm <sup>2</sup> ) Atrito-Acom.Ancoragem
S <sub>0</sub>	0,00	150,0	136,6
S <sub>1</sub>	1,00	149,9	136,7
S <sub>2</sub>	2,20	149,4	137,2
S <sub>3</sub>	4,50	148,8	137,8
S <sub>4</sub>	6,80	147,8	138,8
S <sub>5</sub>	8,00	147,0	139,7
S <sub>6</sub>	9,20	146,1	140,5
S <sub>7</sub>	11,50	145,1	141,5
S <sub>8</sub>	13,80	144,5	142,1
S <sub>9</sub>	15,00	144,1	142,6
S <sub>10</sub>	16,00	144,0	142,6

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A Figura 31 apresenta um gráfico com as perdas imediatas (por atrito e acomodação da ancoragem), ao longo do comprimento.

**Figura 31: Perda por atrito cabo/bainha e acomodação da ancoragem**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Com os valores finais das tensões ao longo do cabo e das flechas, pode-se determinar as forças de protensão em cada trecho e os carregamentos equivalentes respectivos.

#### 5.4 CARREGAMENTO EQUIVALENTE DO CABO DE PROTENSÃO

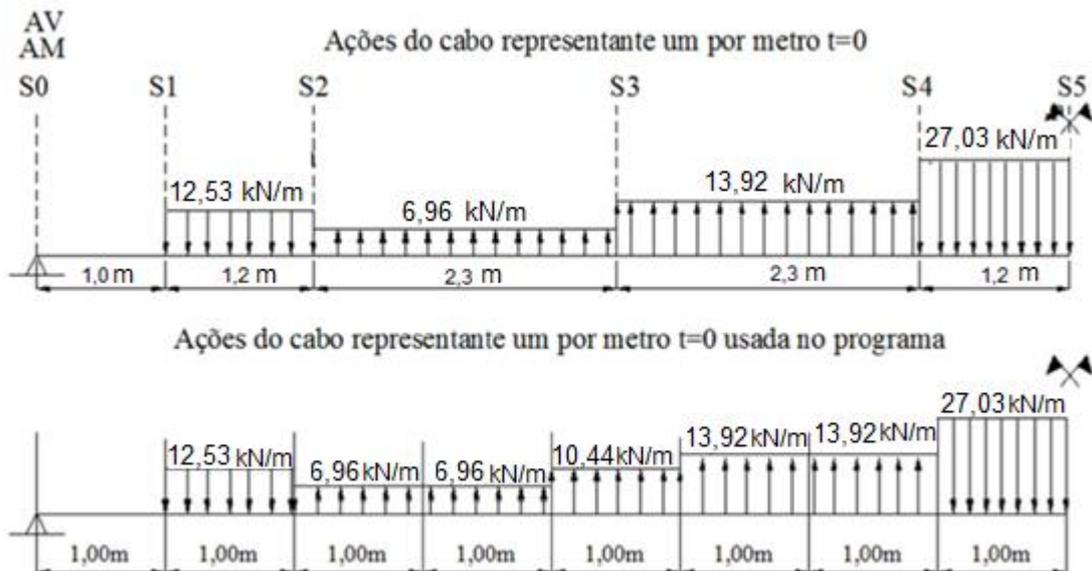
Os valores do carregamento equivalente ( $\mu$ ) de cada trecho do cabo de protensão levam em consideração as forças de protensão ( $P$ ), está já desconsiderada as perdas imediatas. Inicialmente foi considerado apenas um cabo por metro. Posteriormente, adota-se 2 cordoalhas no mesmo feixe simulando um espaçamento entre cabos de 50,0 cm. Na Tabela 14 são apresentados os respectivos carregamentos. O cabo utilizado tem ancoragem ativa (viva) do lado esquerdo e ancoragem passiva (morta) do lado direito, assim o seu simétrico corresponde a um outro com ancoragem ativa à direita e passiva à esquerda.

**Tabela 14: Carregamento equivalente do cabo de protensão**

Seção	$\sigma_{A-M}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{M-A}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{\text{medio}}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$P_{\text{trecho}}$ (kN)	e (m)	L (m)	u (c/100cm) (kN/m)	u (c/50 cm) (kN/m)
S <sub>0</sub> -S <sub>10</sub>	136,6	142,6	139,6	141,0	0,0000	1,00	0,00	0,00
S <sub>1</sub> -S <sub>9</sub>	136,7	142,6	139,6	141,0	0,0320	1,20	6,27	12,53
S <sub>2</sub> -S <sub>8</sub>	137,2	142,1	139,7	141,0	0,0653	2,30	3,48	6,96
S <sub>3</sub> -S <sub>7</sub>	137,8	141,5	139,7	141,0	0,1306	2,30	6,96	13,92
S <sub>4</sub> -S <sub>6</sub>	138,8	140,5	139,7	141,0	0,0690	1,20	13,51	27,03
S <sub>5</sub> -S <sub>5</sub>	139,7	139,7	139,7	141,0	0,0000	0,00	0,00	0,00

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

O carregamento equivalente distribuído ao longo do cabo de protensão como pode ser visto na Figura 32.

**Figura 32: Ações em uma faixa de 1 m da solução para cabos a cada 50,0 cm**

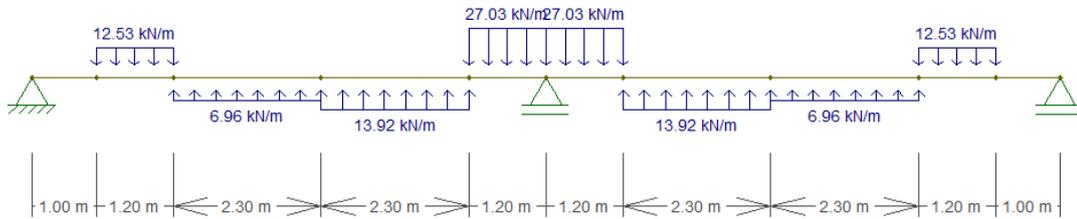
Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

O carregamento equivalente foi dividido em faixas de 1 metro conforme o espaçamento da grelha, também de 1 m. Na sequência, este carregamento foi concentrado nos nós da grelha, de acordo com a área de influência de cada nó.

Inicialmente, foi utilizado o FTOOL para obter o diagrama de momento fletor do cabo de protensão.

A Figura 33 apresenta o carregamento equivalente do cabo de protensão aplicada no FTOOL.

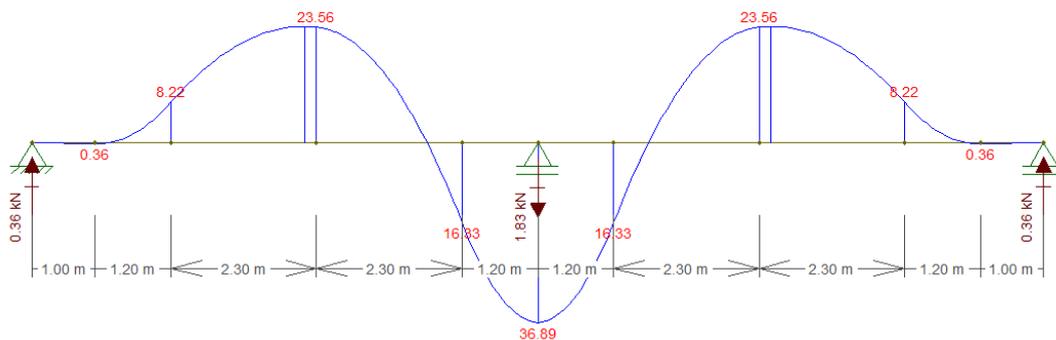
**Figura 33: Carregamento equivalente do cabo de protensão usado no FTOOL**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR

O diagrama de momento fletor do carregamento equivalente do cabo, pode ser visto na Figura 34.

**Figura 34: Diagrama de momento fletor do cabo de protensão no FTOOL**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Após a resolução pelo FTOOL, o mesmo exemplo foi resolvido com análise matricial (método do deslocamento), utilizando planilhas do Excel. A estrutura foi dividida em dez barras. Primeiramente, foi calculado o momento de engastamento perfeito de cada barra como apresentado na Tabela 15.

**Tabela 15: Momento de engastamento perfeito em cada barra do cabo de protensão**

	Membro 01	Membro 02	Membro 03	Membro 04	Membro 05	Membro 06	Membro 07	Membro 08	Membro 09	Membro 10
E (kN/m <sup>2</sup> )	26.071.594	26.071.594	26.071.594	26.071.594	26.071.594	26.071.594	26.071.594	26.071.594	26.071.594	26.071.594
A (m <sup>2</sup> )	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
I (m <sup>4</sup> )	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036	0,0036
L (m)	1,0	1,2	2,3	2,3	1,2	1,2	2,3	2,3	1,2	1,0
q (kN/m)	0,00	12,53	-6,96	-13,92	27,03	27,03	-13,92	-6,96	12,53	0,00
Q1 (kN)	0,00	7,52	-8,00	-16,01	16,22	16,22	-16,01	-8,00	7,52	0,00
M2 (kN.m)	0,00	1,50	-3,07	-6,14	3,24	3,24	-6,14	-3,07	1,50	0,00
Q3 (kN)	0,00	7,52	-8,00	-16,01	16,22	16,22	-16,01	-8,00	7,52	0,00
M4 (kN.m)	0,00	-1,50	3,07	6,14	-3,24	-3,24	6,14	3,07	-1,50	0,00

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Em seguida, foi elaborado o vetor deslocamento e o vetor das ações nodais e posteriormente, calculado a matriz de rigidez de cada barra. Na sequência, calculou-se a matriz de rigidez global. Para a resolução do sistema de matriz foi utilizado a técnica do zero um. Em seguida, foi calculado o vetor deslocamento como apresentado na Tabela 16.

**Tabela 16: Vetor deslocamento devido ao cabo de protensão**

Vetor Deslocamento (m)	
0	0,00000
u2	0,00086
u3	0,00086
u4	0,00087
u5	0,00189
u6	0,00079
u7	0,00257
u8	-0,00035
u9	0,00063
u10	-0,00094
0	0,00000
u12	0,00000
u13	0,00063
u14	0,00094
u15	0,00257
u16	0,00035
u17	0,00189
u18	-0,00079
u19	0,00086
u20	-0,00087
0	0,00000
u22	-0,00086

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Em seguida, foram calculadas as reações de apoio da estrutura devido ao carregamento equivalente do cabo (Tabela 17).

**Tabela 17: Reação de apoio devido ao cabo de protensão**

Reações nos Nós (kN)	
R1 =	0,36
R2 =	0,00
R3 =	0,00
R4 =	0,00
R5 =	0,00
R6 =	0,00
R7 =	0,00
R8 =	0,00
R9 =	0,00
R10 =	0,00
R11 =	-1,83
R12 =	0,00
R13 =	0,00
R14 =	0,00
R15 =	0,00
R16 =	0,00
R17 =	0,00
R18 =	0,00
R19 =	0,00
R20 =	0,00
R21 =	0,36
R22 =	0,00

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Enfim, são obtidos os esforços internos de cada barra. Na Tabela 18 estão apresentados os resultados das barras 1, 2 e 3 e na Tabela 19 estão apresentados os resultados das barras 4 e 5. Como a estrutura é simétrica os restantes das barras apresentam valores iguais a seus correspondentes.

**Tabela 18: Esforços internos das barras 1, 2 e 3**

Matriz de Rigidez da Barra 1				X	Vetor Deslocamento (m)	=	Ações nas Extremidades da Barra				
[K]1 =	458.234	229.117	-458.234		229.117		0,00000	0,36	0,00	Q1 (kN) =	0,36
	229.117	152.745	-229.117		76.372		0,00086	0,00	0,00	M2 (kN.m) =	0,00
	-458.234	-229.117	458.234		-229.117		0,00086	-0,36	0,00	Q3 (kN) =	-0,36
	229.117	76.372	-229.117		152.745		0,00087	0,36	0,00	M4 (kN.m) =	0,36
Matriz de Rigidez da Barra 2				X	Vetor Deslocamento (m)	=	Ações nas Extremidades da Barra				
[K]2 =	265.182	159.109	-265.182		159.109		0,00086	-7,15	7,52	Q1 (kN) =	0,36
	159.109	127.287	-159.109		63.644		0,00087	-1,87	1,50	M2 (kN.m) =	-0,36
	-265.182	-159.109	265.182		-159.109		0,00189	7,15	7,52	Q3 (kN) =	14,67
	159.109	63.644	-159.109		127.287		0,00079	-6,72	-1,50	M4 (kN.m) =	-8,22
Matriz de Rigidez da Barra 3				X	Vetor Deslocamento (m)	=	Ações nas Extremidades da Barra				
[K]3 =	37.662	43.311	-37.662		43.311		0,00189	-6,67	-8,00	Q1 (kN) =	-14,67
	43.311	66.411	-43.311		33.205		0,00079	11,29	-3,07	M2 (kN.m) =	8,22
	-37.662	-43.311	37.662		-43.311		0,00257	6,67	-8,00	Q3 (kN) =	-1,34
	43.311	33.205	-43.311		66.411		-0,00035	-26,63	3,07	M4 (kN.m) =	-23,56

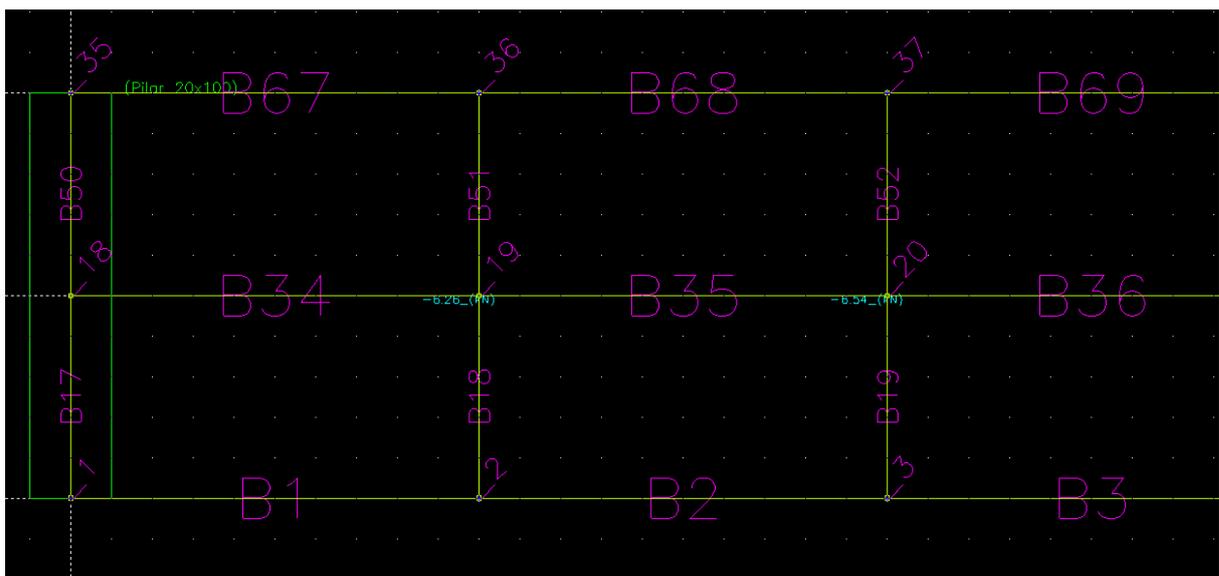
Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

**Tabela 19: Esforços internos das barras 4 e 5.**

Matriz de Rigidez da Barra 4					X	Vetor Deslocamento (m)	=	Ações nas Extremidades da Barra			
[K]4 =	37.662	43.311	-37.662	43.311		0,00257		17,34	-16,01	Q1 (kN) =	1,34
	43.311	66.411	-43.311	33.205		-0,00035		29,70	-6,14	M2 (kN.m) =	23,56
	-37.662	-43.311	37.662	-43.311		0,00063		-17,34	-16,01	Q3 (kN) =	-33,35
	43.311	33.205	-43.311	66.411		-0,00094		10,19	6,14	M4 (kN.m) =	16,33
Matriz de Rigidez da Barra 5					X	Vetor Deslocamento (m)	=	Ações nas Extremidades da Barra			
[K]5 =	265.182	159.109	-265.182	159.109		0,00063		17,13	16,22	Q1 (kN) =	33,35
	159.109	127.287	-159.109	63.644		-0,00094		-19,57	3,24	M2 (kN.m) =	-16,33
	-265.182	-159.109	265.182	-159.109		0,00000		-17,13	16,22	Q3 (kN) =	-0,92
	159.109	63.644	-159.109	127.287		0,00000		40,13	-3,24	M4 (kN.m) =	36,89

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

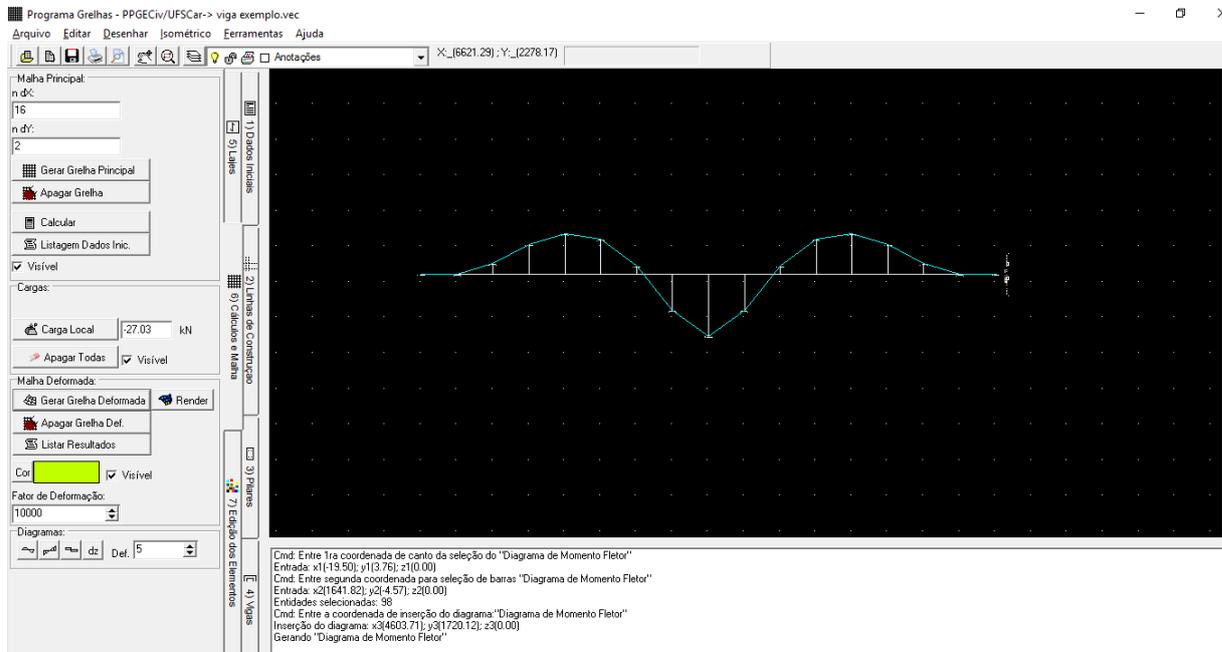
Por último, foi calculado o exemplo no programa GRELHA. Para isto foi necessário dividir o carregamento equivalente do cabo de acordo com o espaçamento da grelha (1 m). Para representar a viga no GRELHA, já que ele foi criado para resolução de lajes, foi necessário criar uma laje fictícia para aplicar a malha, porém, para efeito de carregamento, foram apenas computadas as cargas locais. As cargas na grelha devem ser aplicadas concentradas nos nós, então a carga distribuída foi concentrada nos nós de acordo com sua área de influência. A Figura 35 apresenta apenas o primeiro trecho da discretização da viga no GRELHA, para facilitar a visualização da aplicação das cargas nodais nos nós e a divisão das barras da grelha.

**Figura 35: Representação da viga no GRELHA**

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Utilizando o carregamento equivalente do cabo de protensão apresentado na Figura 32 as forças foram concentradas nos nós da grelha e, posteriormente, foi calculado e gerado o diagrama de momento fletor como mostrado na Figura 36.

**Figura 36: Diagrama de momento fletor da viga no GRELHA**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A Tabela 20 expõe todos resultados das três resoluções, assim como o percentual de diferença entre elas.

**Tabela 20: Resumo dos resultados dos modos de resolução do carregamento equivalente do cabo de protensão da viga**

Método de Resolução	Momento máximo positivo (kN.m)	Momento máximo negativo (kN.m)
FTOOL	36,89	23,56
Análise matricial	36,89	23,56
GRELHA	37,25	23,47
Diferença (%)	0,97	0,38

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Como pode ser observado houve uma pequena diferença entre a resolução pelo GRELHA e a outras duas resoluções que pode ser devido a não consideração os momentos de bloqueio. Também foi necessário fazer uma aproximação do carregamento que teve ser adequado ao espaçamento da grelha. Porém como a diferença foi menor que 1%, considera-se aceitável.

# 6. EXEMPLO NUMÉRICO – LAJE LISA PROTENDIDA

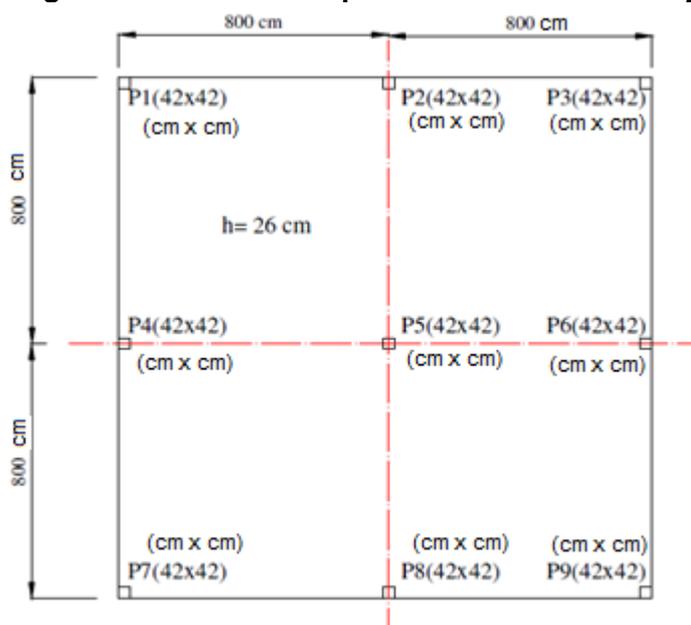
Neste capítulo é resolvido um exemplo numérico para apresentar como pode ser a sequência de cálculo de uma laje lisa protendida utilizando protensão não aderente com cordoalha engraxada. A distribuição dos cabos em planta é uniforme nas duas direções, espaçados a cada 50 cm.

Visando uma melhor compreensão do leitor, é analisado um pavimento simples usando protensão parcial e um traçado em elevação dos cabos de protensão de acordo com a planta esquemática do pavimento e utilizando as informações fornecidas na seção 4.2 deste trabalho. De posse destas informações, são calculadas as perdas de protensão, o espaçamento entre cordoalhas, são verificadas as tensões atuantes na seção e, posteriormente, a quantidade de armadura passiva necessária. Finalmente, são verificadas as flechas atuantes.

O exemplo foi resolvido empregando-se todos os preceitos discorridos nos capítulos anteriores e utilizando de planilhas. Para fazer a analogia de grelha do pavimento utilizou-se o programa CALCO (CASS, 2015). O carregamento equivalente distribuído do cabo de protensão foi concentrado e aplicado nos nós da grelha de acordo com a área de influência de cada nó, sem os momentos de bloqueio. O pavimento foi processado diferentes vezes para analisar os esforços separadamente e depois associados, primeiramente apenas o peso próprio, depois o carregamento frequente, depois o esforço de protensão no tempo zero e, por último, o esforço de protensão no tempo infinito.

Os dados gerais utilizados para a resolução do exemplo são: a estrutura é uma laje lisa de 16 x 16 m, apoiada em nove pilares (pilar de 42 x 42 cm), cuja planta esquemática pode ser vista na Figura 37.

**Figura 37: Desenho esquemático da forma de laje**



Fonte: (MELLO, 2005).

Os dados complementares são:

- Espessura da laje de 26 cm;
- Vão entre pilares de 8 m;
- A armadura de protensão utilizada foi a cordoalha engraxada CP190-RB de 12,7 mm de diâmetro;
- Classe de agressividade ambiental I;
- As propriedades do concreto utilizado são:
  - $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ ;
  - $E_{c,i} = 30672 \text{ MPa}$ ;
  - $G_c = 12200 \text{ MPa}$ ;
- As ações consideradas no projeto são de:  $g_1 = 6,5 \text{ kN/m}^2$ ,  $g_2 = 0,5 \text{ kN/m}^2$  e  $q = 1,5 \text{ kN/m}^2$ ;
- O cobrimento adotado foi de 2 cm, justificado pelo fato de ser CAA I e o  $f_{ck}$  utilizado ser superior ao mínimo exigido, podendo assim reduzir em 5 mm o cobrimento nominal mínimo.
- A distância entre o centro de gravidade da armadura até a borda mais próxima ( $d'$ ) foi adotada como 3,27 cm;

## 6.1 DADOS DA CORDOALHA ESCOLHIDA

As propriedades da cordoalha escolhida estão contidas na Tabela 3:

- Área da cordoalha = 1,01 cm<sup>2</sup>;
- $E_p = 195000$  MPa;
- $f_{pyk} = 1710$  MPa;
- $f_{ptk} = 1900$  MPa;

Com estas informações foi calculada a tensão de protensão inicial, utilizando o limite estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014, que deve ser o menor dos seguintes valores:

$$\sigma_{pi} = 0,8 \cdot f_{ptk} = 0,8 \cdot 1900 = 1520 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{pi} = 0,88 \cdot f_{pyk} = 0,88 \cdot 1710 = 1504,8 \text{ MPa}$$

Como a tensão inicial de protensão tem que ser menor que estes dois valores, foi adotada uma  $\sigma_{pi} = 1500$  MPa.

## 6.2 TRAJETÓRIA DO CABO REPRESENTANTE

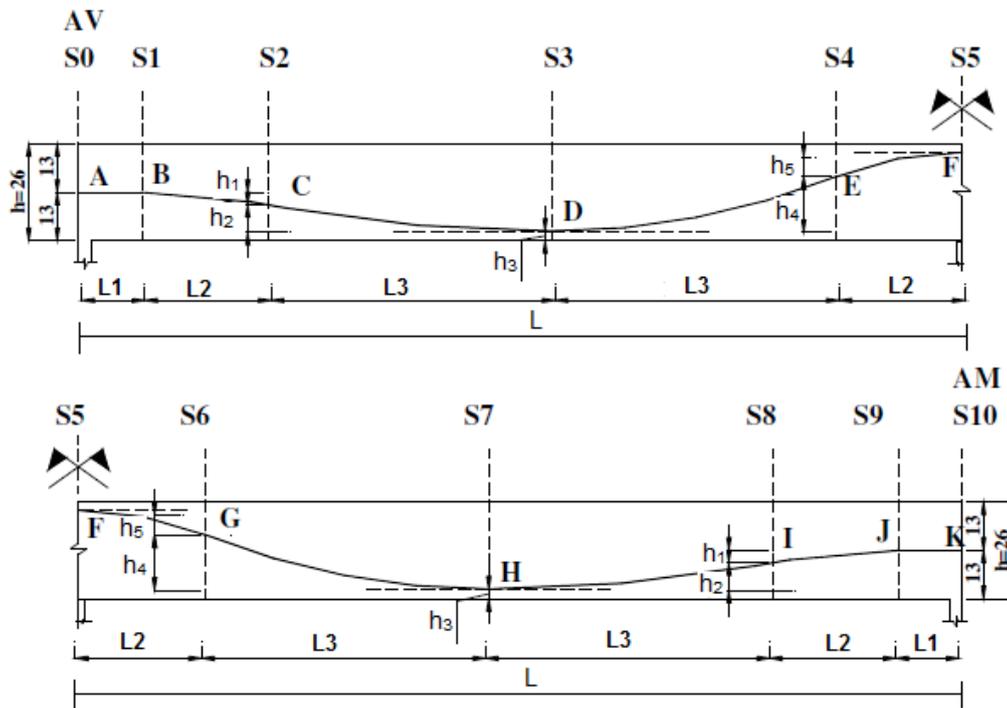
A trajetória do cabo representante tem início na definição do cobrimento utilizado que é de acordo com a classe de agressividade ambiental. A ABNT NBR 6118:2014 também define cobrimentos diferentes para as faces inferiores e superiores, onde é mencionado que para as faces superiores que estejam devidamente protegidas, pode-se utilizar o cobrimento nominal mínimo de 15 mm. Com isso foi adotado 2 cm para o cobrimento inferior e 1,5 cm para o superior.

A partir do cobrimento, foi encontrado o valor do ( $d'$ ) que foi utilizado neste exemplo como o cobrimento mais o diâmetro da armadura, resultando em um  $d'$  inferior de 3,27 cm e um  $d'$  superior de 2,77 cm.

Para obter uma boa trajetória deve-se considerar um traçado ideal, que consiste na saída do cabo no centro de gravidade da peça e chegando no apoio com a máxima excentricidade permitida, passando pela face inferior da laje, na seção próxima ao meio do vão. No centro da peça há uma curvatura com a máxima flecha permitida. O cabo sai com ângulo nulo do centro de gravidade e prossegue reto por 100 cm. No trecho a 15% do vão próximo ao pilar, deve-se fazer uma concordância vertical para evitar concentração de tensão normal vertical junto ao pilar. Ao longo do trecho, foram adotadas mais duas curvaturas.

Devido à grande perda por deformação da ancoragem, o cabo terá uma extremidade morta (pré-blocada) (M) e outra ativa (A). Na prática, para manter simetria de ações, considera-se que para cada cabo com extremidades AM haverá um simétrico com extremidades MA. O traçado do cabo representante está disposto na Figura 38.

**Figura 38: Trajetória do cabo representante**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Sendo:

$$L_1 = 100 \text{ cm};$$

$$L_2 = 0,15 \cdot L = 0,15 \cdot 800 = 120 \text{ cm};$$

$$L_3 = (L - L_1 - 2 \cdot L_2) / 2 = 230 \text{ cm};$$

$$h_1 = 3,2 \text{ cm};$$

$$h_2 = 6,53 \text{ cm};$$

$$h_3 = 3,27 \text{ cm};$$

$$h_4 = 13,06 \text{ cm};$$

$$h_5 = 6,9 \text{ cm};$$

A partir do traçado do cabo representante adotado, foram obtidos os valores do desvio angular e da flecha para cada trecho do mesmo. Estes valores estão na Tabela 21.

**Tabela 21: Valores do desvio angular e da flecha para cada trecho do cabo representante**

Trechos	S1 – S2	S2 – S3	S3 -S4	S4 – S5
Flechas (cm)	3,2	6,53	13,06	6,9
Desvio angular (°)	3,05	3,25	6,48	6,56

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

O desvio angular é obtido a partir da seguinte fórmula:

$$\alpha(^{\circ}) = \text{arc.tg}\left(\frac{2 \cdot y}{\Delta x}\right) \quad (54)$$

Onde:

y – é a flecha no trecho analisado;

$\Delta x$  – é o comprimento do trecho analisado.

### 6.3 CÁLCULO DAS PERDAS IMEDIATAS

Com os valores encontrados do desvio angular, juntamente com as informações da seção 4.3.1 deste trabalho e considerando os dados a seguir, é possível obter as perdas imediatas (perdas por atrito e acomodação da ancoragem).

Dados:

- $\beta = 0,01$  rad/m;
- $\mu = 0,05$  (cordoalha engraxada);
- $\sigma_{pi}$  (tensão do aço na extremidade ativa por ocasião da protensão) = 150,0 kN/cm<sup>2</sup>;
- $\Delta_L = 6$  mm;
- $E_p = 195$  GPa;

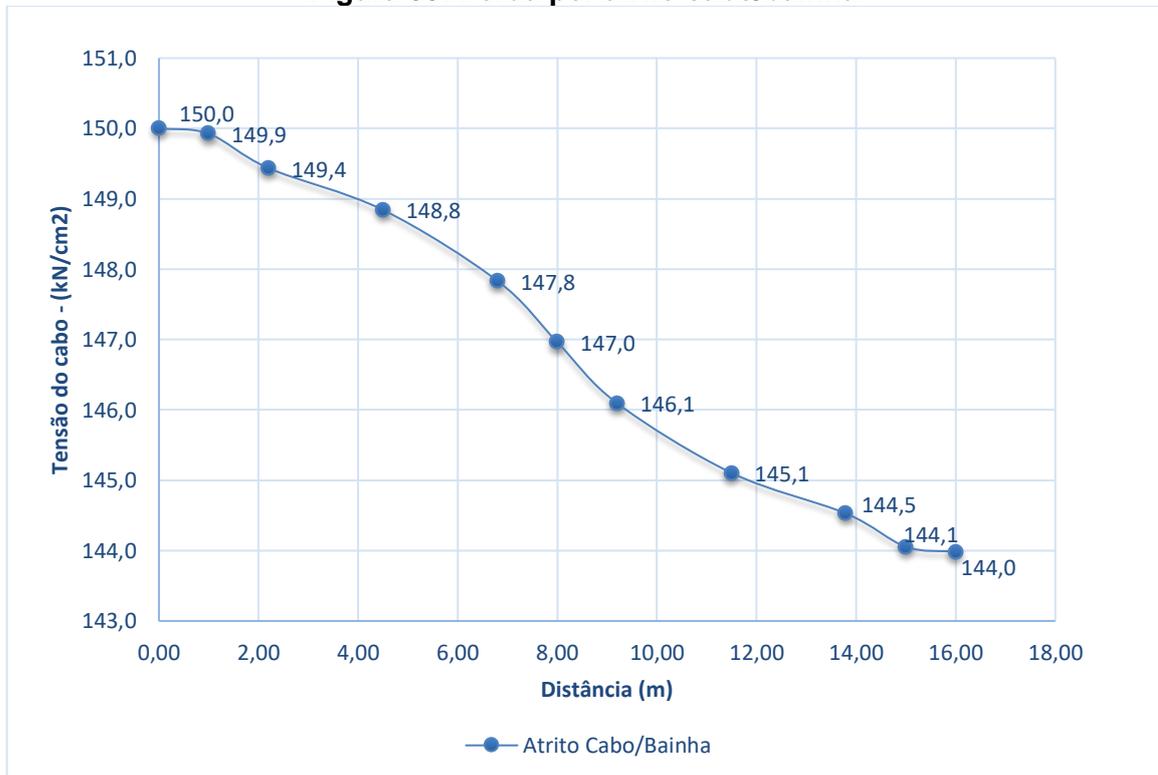
Os valores das tensões em cada trecho, após as perdas de atrito, são mostrados na Tabela 22.

**Tabela 22: Tensão ao longo do cabo representante após as perdas por atrito**

Seção	$\Delta_x$ (m)	x (m)	$\Delta_y$ (m)	$\alpha$ (°)	$\Delta\alpha$ (°)	$\alpha$ (rad)	$(\mu.\alpha + k.x)$	$e^{-(\mu.\alpha + k.x)}$	$\sigma = \sigma_0.e^{-(\mu.\alpha + k.x)}$
S <sub>0</sub>	0,00	0,00	0,0000	0,000	0,0	0,000	0,000	1,000	150,0
S <sub>1</sub>	1,00	1,00	0,0000	0,000	0,0	0,000	0,001	1,000	149,9
S <sub>2</sub>	1,20	2,20	0,0320	3,053	3,1	0,053	0,004	0,996	149,4
S <sub>3</sub>	2,30	4,50	0,0653	3,250	6,3	0,110	0,008	0,992	148,8
S <sub>4</sub>	2,30	6,80	0,1306	6,479	12,8	0,223	0,015	0,986	147,8
S <sub>5</sub>	1,20	8,00	0,0640	6,089	18,9	0,329	0,020	0,980	147,0
S <sub>6</sub>	1,20	9,20	0,0640	6,089	25,0	0,436	0,026	0,974	146,1
S <sub>7</sub>	2,30	11,50	0,1306	6,479	31,4	0,549	0,033	0,967	145,1
S <sub>8</sub>	2,30	13,80	0,0653	3,250	34,7	0,605	0,037	0,964	144,5
S <sub>9</sub>	1,20	15,00	0,0320	3,053	37,7	0,659	0,040	0,960	144,1
S <sub>10</sub>	1,00	16,00	0,0000	0,000	37,7	0,659	0,041	0,960	144,0

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A Figura 39 permite observar a perda por atrito do cabo de protensão ao longo de seu comprimento.

**Figura 39: Perda por atrito cabo/bainha**

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A Tabela 23 contém o cálculo da perda por acomodação da ancoragem do cabo representante.

**Tabela 23: Perda por acomodação da ancoragem**

Seção	x (cm)	s (MPa)	$\Omega$	Verificação	$\Omega$ (kN/cm)	11.700
S <sub>0</sub>	0	150,00	0	P.I. ABAIXO	$\Delta\sigma$ (kN/cm <sup>2</sup> )	1,34
S <sub>1</sub>	100	149,93	7	P.I. ABAIXO	$l_0 =$ (cm)	1.600
S <sub>2</sub>	120	149,44	164	P.I. ABAIXO		
S <sub>3</sub>	230	148,84	562	P.I. ABAIXO		
S <sub>4</sub>	230	147,83	1.703	P.I. ABAIXO		
S <sub>5</sub>	120	146,96	2.993	P.I. ABAIXO		
S <sub>6</sub>	120	146,09	4.483	P.I. ABAIXO		
S <sub>7</sub>	230	145,10	6.534	P.I. ABAIXO		
S <sub>8</sub>	230	144,53	7.994	P.I. ABAIXO		
S <sub>9</sub>	120	144,06	9.350	P.I. ABAIXO		
S <sub>10</sub>	100	143,98	9.563	P.I. ABAIXO		

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Como já explicado na seção 5.3, para este cabo não foi encontrado um ponto indeslocável (“P.I. ABAIXO”), sendo assim todos os pontos sofreram perda por acomodação da ancoragem.

Está disposto na Tabela 24 a tensão após calculadas as perdas por atrito e por acomodação da ancoragem.

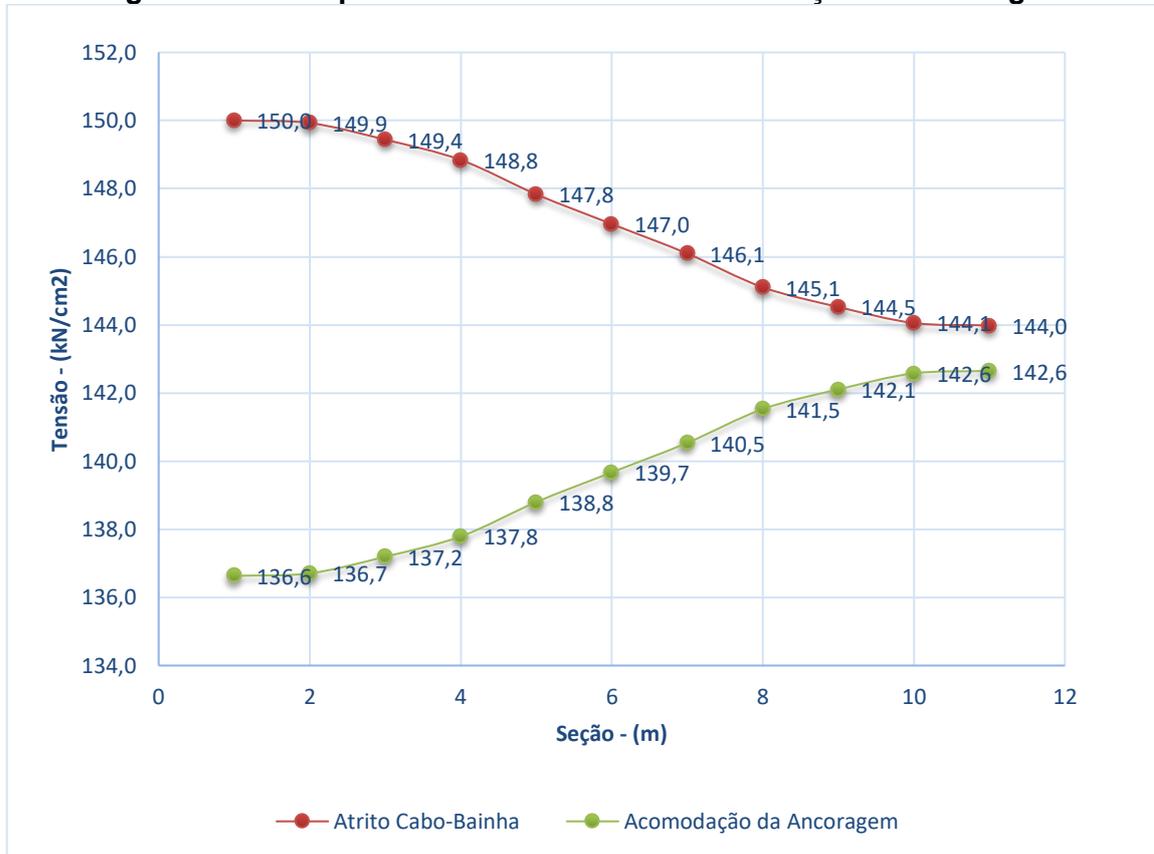
**Tabela 24: Tensão após as perdas imediatas**

Seção	Distância (m)	$\sigma$ (kN/cm <sup>2</sup> ) Atrito	$\sigma'$ (kN/cm <sup>2</sup> ) Atrito-Acom.Ancoragem
S <sub>0</sub>	0,00	150,0	136,6
S <sub>1</sub>	1,00	149,9	136,7
S <sub>2</sub>	2,15	149,4	137,2
S <sub>3</sub>	4,50	148,8	137,8
S <sub>4</sub>	6,85	147,8	138,8
S <sub>5</sub>	8,00	147,0	139,7
S <sub>6</sub>	9,15	146,1	140,5
S <sub>7</sub>	11,50	145,1	141,5
S <sub>8</sub>	13,85	144,5	142,1
S <sub>9</sub>	15,00	144,1	142,6
S <sub>10</sub>	16,00	144,0	142,6

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A Figura 40 apresenta as perdas imediatas (por atrito e acomodação da ancoragem), ao longo do comprimento.

**Figura 40: Perda por atrito cabo/bainha e acomodação da ancoragem**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Com os valores finais das tensões ao longo do cabo e das flechas, pode-se determinar as forças de protensão em cada trecho e os carregamentos equivalentes respectivos.

#### 6.4 CARREGAMENTO EQUIVALENTE DO CABO DE PROTENSÃO REPRESENTANTE

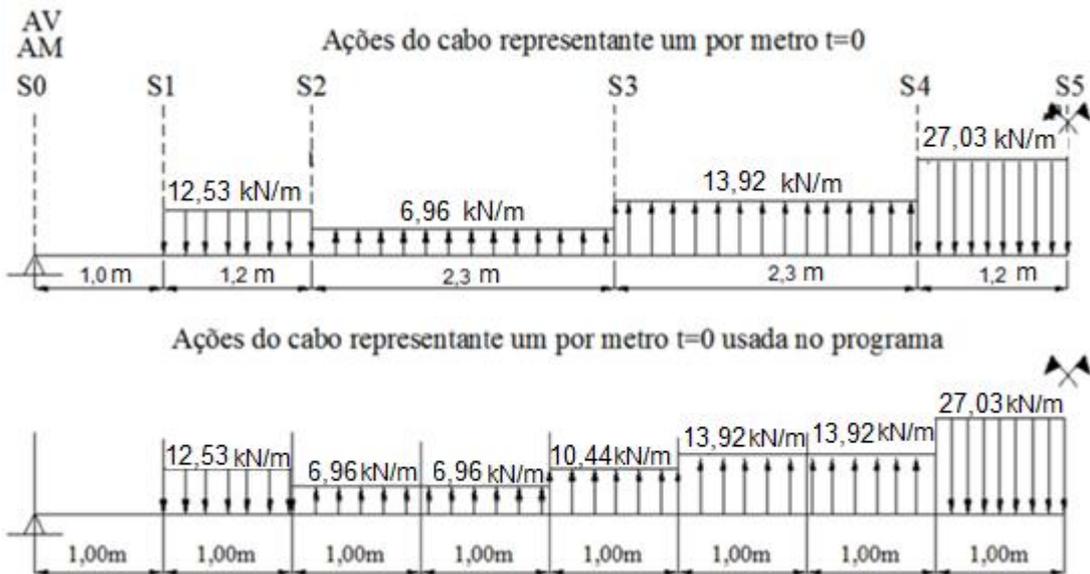
Os valores do carregamento equivalente ( $\mu$ ) de cada trecho do cabo de protensão levam em consideração as forças de protensão ( $P$ ), está já desconsiderada as perdas imediatas. Inicialmente foi considerado apenas um cabo por metro. Posteriormente, adotou-se como espaçamento inicial entre os cabos 50,0 cm. Na Tabela 25 são apresentados os respectivos carregamentos. O cabo utilizado tem ancoragem ativa (viva) do lado esquerdo e ancoragem passiva (morta) do lado direito. Assim, o seu simétrico corresponde a um outro com ancoragem ativa à direita e passiva à esquerda.

**Tabela 25: Carregamento equivalente do cabo de protensão**

Seção	$\sigma_{A-M}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{M-A}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{\text{medio}}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$P_{\text{trecho}}$ (kN)	e (m)	l (m)	u (c/100cm) (kN/m)	u (c/50 cm) (kN/m)
S <sub>0</sub> -S <sub>10</sub>	136,6	142,6	139,6	141,0	0,0000	1,00	0,00	0,00
S <sub>1</sub> -S <sub>9</sub>	136,7	142,6	139,6	141,0	0,0320	1,20	6,27	12,53
S <sub>2</sub> -S <sub>8</sub>	137,2	142,1	139,7	141,0	0,0653	2,30	3,48	6,96
S <sub>3</sub> -S <sub>7</sub>	137,8	141,5	139,7	141,0	0,1306	2,30	6,96	13,92
S <sub>4</sub> -S <sub>6</sub>	138,8	140,5	139,7	141,0	0,0690	1,20	13,51	27,03
S <sub>5</sub> -S <sub>5</sub>	139,7	139,7	139,7	141,0	0,0000	0,00	0,00	0,00

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

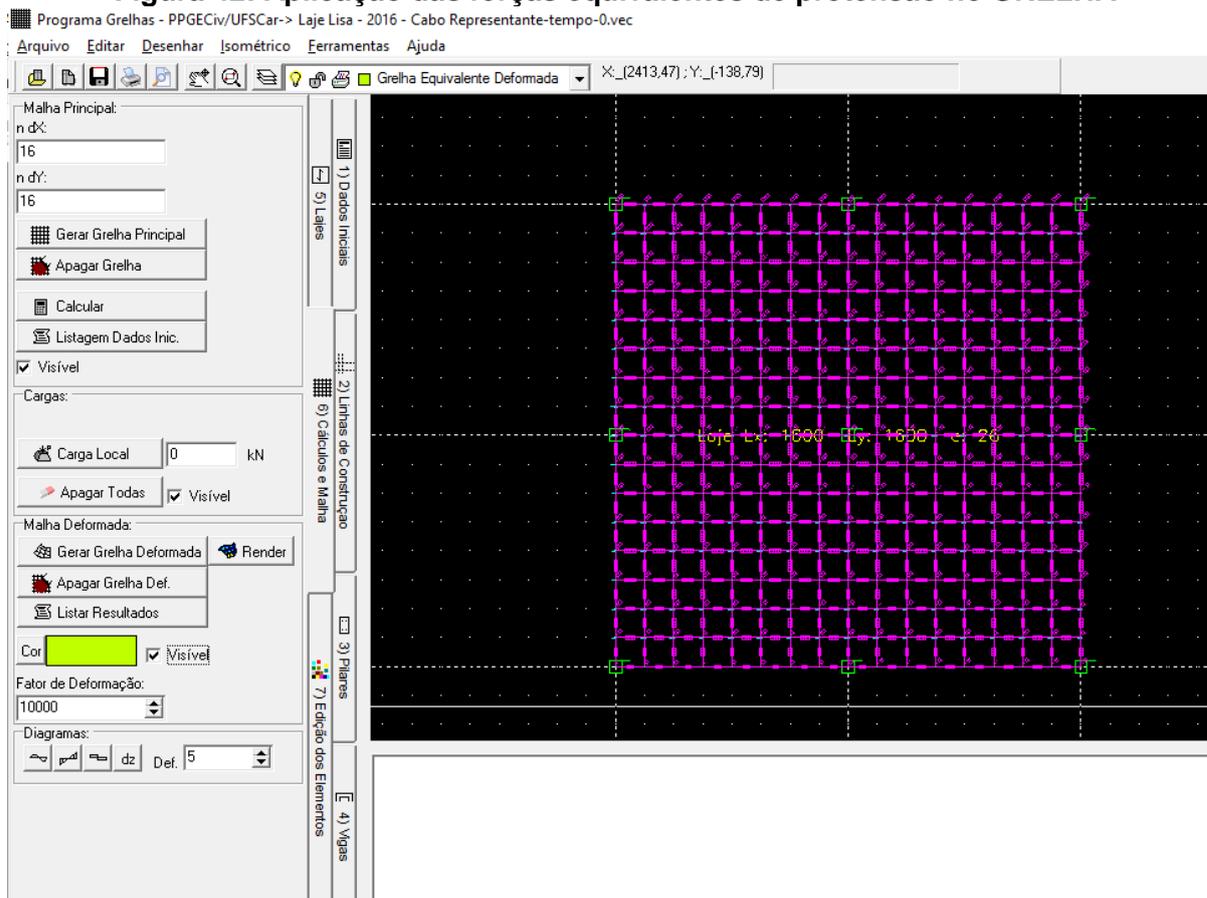
A seguir é apresentado o carregamento equivalente distribuído ao longo do cabo de protensão (Figura 41):

**Figura 41: Ações em uma faixa de 1 m da solução para cabos a cada 50,0 cm**

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

O carregamento equivalente foi dividido em faixas de 1 m justificado pelo espaçamento da grelha que foi utilizado também como 1 m. Na sequência, este carregamento foi concentrado nos nós da grelha de acordo com a área de influência de cada nó. Este procedimento é feito tanto no eixo x quanto no eixo y o que resulta em uma carga concentrada no nó, resultante nos 2 sentidos. A Figura 42 a seguir apresenta as cargas concentradas resultantes nos nós da grelha que para esta análise foi utilizado o software GRELHA (CASS, 2015).

**Figura 42: Aplicação das forças equivalentes de protensão no GRELHA**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Após o processamento da grelha com a ação da protensão no tempo zero são calculadas as perdas ao longo do tempo para, posteriormente, gerar o carregamento equivalente do cabo no tempo infinito.

## 6.5 CÁLCULO DAS PERDAS AO LONGO DO TEMPO

O carregamento equivalente do cabo de protensão deve ser feito primeiramente contabilizando apenas as perdas imediatas para a verificação da tensão no tempo zero e, posteriormente, contabilizando as perdas ao longo do tempo para verificação das tensões no tempo infinito.

O cálculo das perdas ao longo do tempo seguiu o roteiro apresentado na seção 4.3.2 que são as perdas por retração do concreto, fluência e relaxação da armadura.

### 6.5.1 PERDA POR RETRAÇÃO DO CONCRETO

Para o cálculo da perda por retração do concreto foi necessário utilizar dos seguintes dados:

- $h_{fic} = h_{laje} = 26 \text{ cm};$
- Umidade relativa do ar = 75%;
- $t_0 = 5 \text{ dias};$
- $E_p = 195000 \text{ MPa};$
- $\varepsilon_{CS}(t, t_0) = -0,351\text{‰}$  (Obtido por meio da Tabela 6 deste trabalho);

A partir da equação 13 foi encontrada a perda por retração do concreto que foi de:

$$\Delta\sigma_{ps}(t, t_0) = \frac{0,351}{1000} \cdot 195000 = 68,445 \text{ MPa.}$$

### 6.5.2 PERDA POR FLUÊNCIA DO CONCRETO

Para o cálculo da perda por fluência do concreto foram necessários os seguintes dados iniciais.

- $f_{ck} = 30 \text{ MPa};$
- $\sigma_{co} = 5,0 \text{ MPa}$  (adotado);
- Agregado graúdo de granito ( $\alpha_e=1,0$ );
- $\alpha_p = \frac{E_p}{E_{cs}} ;$
- $E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci}$
- $\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 = 0,8 + 0,2 \frac{30}{80} = 0,875 ;$
- $E_{ci} = \alpha_e \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 1 \cdot 5600 \cdot \sqrt{30} = 30672,46 \text{ MPa} ;$
- $E_{cs} = 0,875 \cdot 30672,46 = 26838,4 \text{ MPa} ;$
- $\alpha_p = \frac{195000}{26838,4} = 7,27$
- $\varphi(t_\infty, t_0) = 2,842$  (Obtido por meio da Tabela 6 deste trabalho);
- $\Delta\sigma_{pc}(t, t_0) = \varphi(t_\infty, t_0) \cdot \alpha_p \cdot \sigma_{cgp} = 2,842 \cdot 7,27 \cdot 5 = 103,31 \text{ MPa.}$

### 6.5.3 PERDA POR RELAXAÇÃO DA ARMADURA

Para calcular a perda por relaxação da armadura foi necessário obter a taxa de relaxação da armadura que é a relação entre tensão média de protensão após as perdas

imediatas ( $\sigma_{\text{méd}} = 1396,0$  MPa) e o  $f_{\text{ptk}}$  (1900 MPa) da cordoalha. Após encontrar a taxa de relaxação utilizou-se a Tabela 7 deste trabalho para determinar o coeficiente de relaxação dos fios e cordoalhas, fazendo a interpolação para obtenção do valor mais próximo, com os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 - \quad r &= \frac{\sigma_{\text{méd}}}{f_{\text{ptk}}} = \frac{1396}{1900} = 0,735 \\
 - \quad \Psi_{1000;0,735} &= 2,85 \\
 - \quad \Psi_{\infty} &= 2,5 \cdot \Psi_{1000;0,735} = 2,5 \cdot 2,85 = 7,125\% \\
 - \quad \sigma_{\text{pr}} &= \sigma_{\text{médio}} \cdot \Psi_{\infty} = 1396 \cdot \frac{7,125}{100} = 99,465 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

#### 6.5.4 PERDAS TOTAIS

As perdas totais resultantes consideradas no tempo infinito são a soma das 3 parcelas separadas das perdas progressivas:

$$- \quad \sigma_{\text{p,s,c,r}} = 68,445 + 103,31 + 99,465 = 271,22 \text{ MPa} = 27,12 \text{ kN/cm}^2$$

Com o cálculo das perdas totais, pode ser realizada uma relação entre as tensões após as perdas imediatas e as perdas progressivas (Tabela 26).

**Tabela 26: Valores das tensões no tempo  $t_0$  e no  $t_{\infty}$**

Seção	Tensão com perdas Iniciais ( $t_0$ ) kN/cm <sup>2</sup>	Tensão no tempo Infinito ( $t_{\infty}$ ) kN/cm <sup>2</sup>	Relação $t_{\infty}/t_0$
S <sub>0</sub>	136,61	109,49	0,80
S <sub>1</sub>	136,71	109,58	0,80
S <sub>2</sub>	136,9	109,78	0,80
S <sub>3</sub>	137,5	110,38	0,80
S <sub>4</sub>	138,78	111,66	0,80
S <sub>5</sub>	139,71	112,59	0,81
S <sub>6</sub>	140,61	113,49	0,81
S <sub>7</sub>	141,51	114,39	0,81
S <sub>8</sub>	142,08	114,96	0,81
S <sub>9</sub>	142,55	115,43	0,81
S <sub>10</sub>	143,63	115,51	0,80

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Nota-se que há uma perda de 19% em média no tempo infinito em relação ao tempo zero.

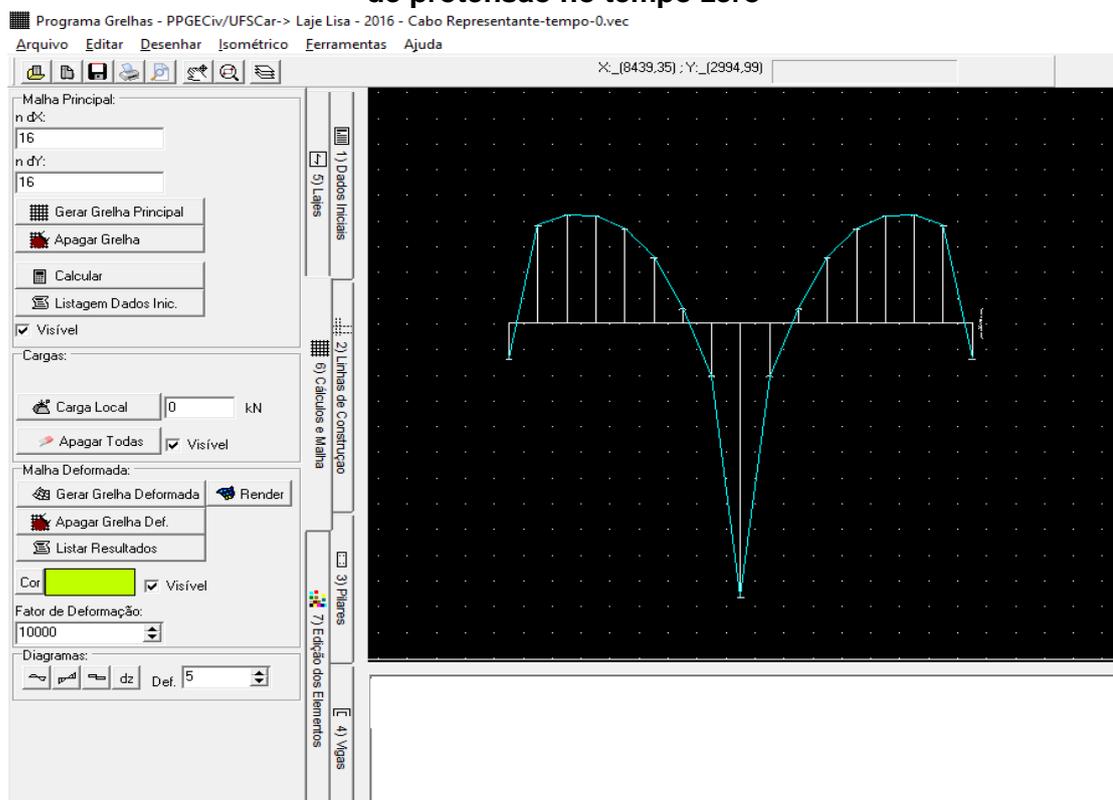
Após o cálculo das perdas progressivas deve ser realizado novamente o carregamento equivalente para o cabo, agora contemplando as ações no tempo infinito. Há também a possibilidade de fazer uma interpolação simples, devido a diferença entre as

ações no tempo zero e infinito serem lineares. Essa última opção, foi executada neste exemplo, devido ao tempo de processamento e a dificuldade de inserção das cargas concentradas nos nós da grelha da primeira opção. Após o processamento, são gerados os momentos fletores atuantes nos nós da grelha para a verificação da fissuração. O carregamento nos nós é complicado, pois em um nó qualquer em uma direção o cabo está com uma trajetória e na outra o cabo mais próximo está com outra trajetória.

## 6.6 VERIFICAÇÃO DA FISSURAÇÃO NO ELS

Após aplicados os carregamentos e processada a grelha com as devidas ações são gerados os momentos fletores atuantes nos nós. Para este exemplo foi gerado o momento fletor na barra mais desfavorável, a linha de barras da grelha que passa pelos pilares centrais, começa na barra 265 e termina na barra 280, como pode ser visto na Figura 43, o diagrama de momento fletor da linha de barras em questão para a ação da protensão no tempo zero.

**Figura 43: Diagrama de momento fletor da linha de barras do pilar central para ação de protensão no tempo zero**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Com os momentos fletores das respectivas ações, foi realizada a verificação de tensões para a condição de protensão. A ABNT NBR 6118:2014 não especifica valores de

tensões limites para protensão sem aderência fazendo apenas distinção entre pós tração e pré tração. No caso foi usada a condição de pós tração. A Tabela 27 apresenta os valores dos momentos junto ao pilar central e no meio do vão para um cabo a cada 50 cm.

**Tabela 27: Valores dos momentos junto ao pilar central e no meio do vão**

Ação	$M_{g1}$	$M_{(g1+g2+0,3.q)}$	$M_{(g1+g2+0,4.q)}$	$M_{(g1+g2+q)}$	$MP_{(t_0)}$	$MP_{(t_\infty)}$
Momento apoio pilar central (kN.m/m)	-156,46	-179,32	-182,93	-204,60	170,54	137,28
Momento meio do vão (kN.m/m)	44,96	51,53	52,57	58,80	-67,44	-54,29

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Os valores das tensões na borda superior e inferior são apresentados na Tabela 28, mostrando que a fissuração está atendida para a condição de protensão parcial. A ABNT NBR 6118:2014 menciona que basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental, para as lajes lisas e cogumelos protendidas.

**Tabela 28: Verificação das tensões junto ao pilar central e no meio do vão**

Tempo Zero:		Ações: $M_{g1} + MP_{(t=0)}$				
Limite de Tração – $\sigma_t = 1,2 \cdot f_{ct,m}$ (MPa)	-3,5	Limite de Compressão – $\sigma_c = 0,7 \cdot f_{ck}$ (MPa)			21,0	
	Borda	$M_p/W$ (MPa)	$M_g/W$ (MPa)	$\sigma$ (MPa)	Verificação	
Pilar	Inferior	1,19	-16,65	13,89	-1,57	Tensão Verificada
	Superior	1,19	16,65	-13,89	3,96	Tensão Verificada
Vão	Inferior	1,18	6,58	-3,99	3,77	Tensão Verificada
	Superior	1,18	-6,58	3,99	-1,42	Tensão Verificada

Tempo Infinito:		Ações: $M_{g1+g2+0,4.q} + MP_{(t=\infty)}$				
Limite de Tração – $\sigma_t = f_{ct,m}$ (MPa)	-3,5	Limite de Compressão – $\sigma_c = 0,7 \cdot f_{ck}$ (MPa)			21,0	
	Borda	$M_p/W$ (MPa)	$M_g/W$ (MPa)	$\sigma$ (MPa)	Verificação	
Pilar	Inferior	0,87	-12,18	16,24	4,93	Tensão Verificada
	Superior	0,87	12,18	-16,24	-3,18	Tensão Verificada
Vão	Inferior	0,86	4,82	-4,67	1,01	Tensão Verificada
	Superior	0,86	-4,82	4,67	0,70	Tensão Verificada

Fonte: PRÓPRIO AUTOR

Pode ser observado que, para o espaçamento de 50 cm entre cabos, a verificação de tensões foi atendida tanto para o tempo zero quanto para o infinito. Caso não tivesse passado na verificação o espaçamento entre cabos seria reduzido até atender aos limites de tensões. O espaçamento inicial de 50 cm foi adotado e a decisão de não verificar um espaçamento maior foi devido às tensões estarem próximas ao limite estabelecido.

Após a verificação das tensões para o estado limite de serviço de formação de fissuras foi realizada a verificação no estado limite último referente a ruptura.

## 6.7 VERIFICAÇÃO DA RUPTURA NO ESTADO LIMITE ULTIMO

Para a protensão no tempo infinito é preciso considerar além do momento de  $g_1+g_2+q$  o efeito do hiperestático de protensão no tempo infinito, considerando que o momento total é sempre a soma do isostático com o hiperestático de protensão e que nesse caso o cg da armadura de protensão (considerando em uma e outra direção) está a 2,77 cm da borda. Para a verificação em ruptura, consideraremos 1 cabo protendido a cada 50,0 cm.

$$M_{p,\infty} = M_{\text{isost.}} + M_{\text{hiperest.}}$$

$$137,28 = 112,59 \cdot \left( \frac{0,26}{2} - 0,0277 \right) + M_{\text{hiperest.}}$$

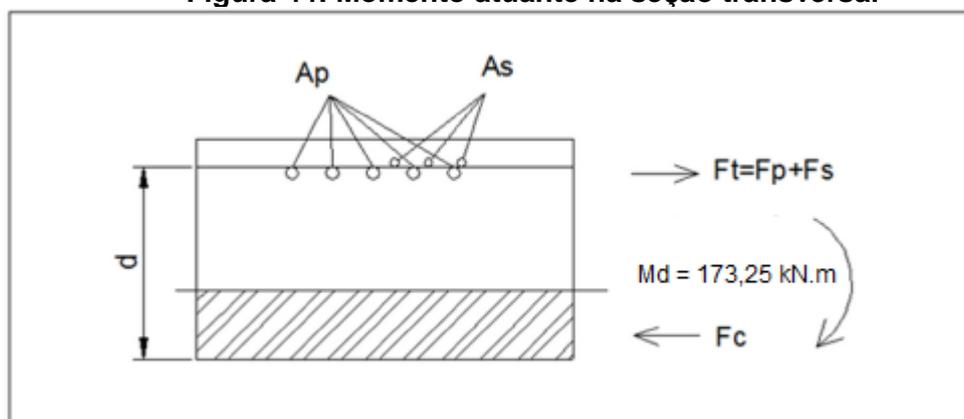
$$M_{\text{hiperest.}} = 125,76 \text{ kN.m}$$

Com isso o momento de cálculo é:

$$M_d = -1,4 \cdot 204,6 + 0,9 \cdot 127,75 = -173,25 \text{ kN.m}$$

As ações atuantes na seção transversal e suas características estão apresentadas na Figura 44:

**Figura 44: Momento atuante na seção transversal**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR

Como a cordoalha engraxada é uma armadura não aderente, a determinação da tensão é feita de acordo com a seção 17.2.2 da NBR 6118:2014.

$$\frac{L}{h} = \frac{800}{26} = 30,77 < 35,0$$

$$\Delta\sigma_p = 70 + \frac{f_{ck}}{100 \cdot \rho_p} \leq 420 \text{MPa}$$

Como a  $\sigma_{p,t\infty} = 1125,9$  MPa o pré-alongamento será de:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_{p,t\infty}}{E_p} = \frac{1125,9}{195000} = 5,77\text{‰}$$

Para a determinação da armadura ativa foi utilizado o  $d_{\text{médio}} = 26 - 2,77 = 23,23$  cm. Assim, a expressão fica:

$$k_{M_d} = \frac{173,25}{1 \cdot 0,2323^2 \cdot \frac{30000}{1,4}} = 0,150$$

$$k_x = 0,2445$$

$$k_z = 0,9022$$

$$\varepsilon_c = 3,2363\%$$

$$\varepsilon_s = 10,0\%$$

Portanto, a seção se encontra no domínio 2. A determinação da armadura ativa é de acordo com a seguinte expressão.

$$A_p = \frac{M_d - \frac{f_{ck} \cdot k_z \cdot b_w \cdot d^2}{100}}{k_z \cdot d \cdot (\sigma_{pd} + 70)} = \frac{173,25 - \frac{30 \cdot 0,9022 \cdot 1,0 \cdot 0,2323^2}{100} \cdot 1000}{0,9022 \cdot 0,2323 \cdot (1125,9 + 70) \cdot 1000} = 0,000633 \text{m}^2 = 6,33 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Como tem-se no pré-dimensionamento, um cabo a cada 50,0 cm, o que resulta em 2,0 cm<sup>2</sup>/m, há necessidade de complementar com armadura passiva. A Força de tração (F<sub>t</sub>) é composta de uma parte da armadura de protensão e de outra de armadura de aço passivo, então:

$$F_t = \frac{M_d}{k_z \cdot d} = A_p \cdot f_p + A_s \cdot f_{yd}$$

$$\rho_p = \frac{A_p}{b \cdot d} = \frac{2,0}{100 \cdot 23,23} = 0,00086 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^2} = 0,086\%$$

$$\Delta\sigma_p = 70 + \frac{f_{ck}}{100 \cdot \rho_p} = 70 + \frac{30}{100 \cdot 0,00086} = 418,45 \text{MPa} < 420 \text{MPa}$$

Com isso, obtém-se:

$$f_{pd} = 1125,9 + 418,45 = 1544,35 \text{MPa}$$

Portanto, a armadura passiva necessária é:

$$A_s = \frac{\frac{M_d}{k_z \cdot d} - A_p \cdot f_p}{f_{yd}} = \frac{\frac{17325}{0,9022 \cdot 23,23} - 2,0 \cdot 154,435}{\frac{50}{1,15}} = 11,91 \text{cm}^2$$

Para a utilização de uma cordoalha engraxada CP 190 de 12,7 mm a cada 50 cm uniformemente distribuída é necessária uma área de armadura passiva de 11,91 cm<sup>2</sup>. A Tabela 29 representa o resumo das armaduras combinando ou não as armaduras passivas e ativas.

**Tabela 29: Valores de A<sub>s</sub> com e sem protensão**

Situação	A <sub>p</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> /m)
Protendido cordoalha engraxada mais aço passivo	2,0	11,91
Só protendido aderência posterior	6,33	_____
Só aço passivo (concreto armado)	_____	Aumentar h <sub>laje</sub>

Fonte: PRÓPRIO AUTOR

Com a determinação da armadura o próximo passo é verificação da flecha, em que se faz necessário averiguar qual estágio de deformação se encontra a seção. Para tal, calcula-se momento de fissuração para fazer a referida verificação.

# 7. IMPLEMENTAÇÃO DA AÇÃO DE PROTENSÃO NO GRELHA

Neste capítulo são explicadas as alterações feitas no programa GRELHA e como foram executadas.

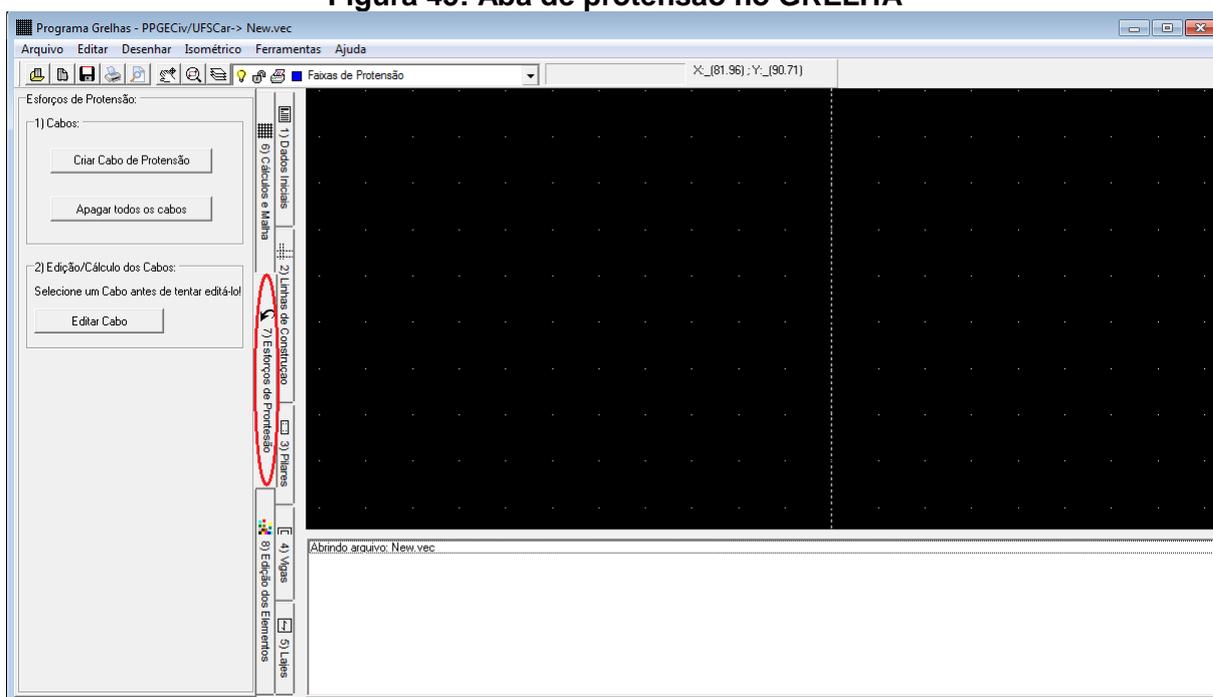
Para a consideração das ações de protensão o usuário deve adicionar os cabos e aplicar estes na barra da grelha, onde o usuário pode definir quantos cordoalhas estão concentradas no feixe. A partir da seleção da barra o usuário pode editar as informações do cabo a qualquer momento. Para o programa gerar a trajetória do cabo representante, de acordo com alguns critérios estabelecidos, são necessários informar algumas características geométricas dos elementos, comentados com mais detalhe a seguir. Após gerar a trajetória do cabo e com mais algumas informações fornecidas pelo usuário, é calculado o carregamento equivalente do cabo e estes são aplicados nos nós da grelha, de acordo com área de influência. A partir deste ponto, o usuário pode fazer a análise do efeito de protensão isoladamente ou em conjunto com os outros carregamentos.

A seguir é apresentada a aba de protensão, detalhando todo o processo necessário para a utilização do GRELHA.

## 7.1 ABA DO EFEITO DE PROTENSÃO DO GRELHA

A aba de protensão foi inserida após a aba Cálculos e Malha devido a necessidade de gerar as grelhas, realizar o cálculo de grelha ainda sem a protensão e também, antes, gerar as barras deformadas, devido a necessidade dos cálculos desenvolvidos nestes menus. Portanto, a aba de protensão é a de número 7. A seguir é apresentada a Figura 45 com os detalhes da aba de protensão.

**Figura 45: Aba de protensão no GRELHA**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR

Os menus internos na aba Efeito de Protensão, são dois: um para criação do cabo e outro de edição. Neste primeiro submenu há a opção de apagar todos os cabos já criados. Para a opção de apagar apenas alguns cabos específicos o usuário poderá utilizar a função “Delete” no teclado. Quando o usuário clicar no botão “Criar cabo de protensão”, este deve informar quais são as barras da grelha que este cabo deve ser aplicado. Importante salientar que o cabo apenas pode ser aplicado nas barras da grelha, podendo ser nas barras paralelas aos eixos horizontais ou verticais do desenho. Outra informação importante é que este cabo de protensão é criado como um bloco, ou seja, ele carrega todas as informações das propriedades do cabo que o usuário informar, sendo que este pode ser movido para outra barra, alterado suas propriedades, sem a necessidade de apagar um cabo e criar outro. No próximo item é explicado as propriedades dos cabos.

O outro submenu desta aba é da edição dos cabos, onde o usuário seleciona um cabo de protensão e clica no botão “Editar Cabo”, abrindo assim um formulário que o usuário deverá preencher e será explicado com mais detalhes na seção 7.2.

## 7.2 FORMULÁRIO DO CABO DE PROTENSÃO

No formulário do cabo de protensão o usuário tem que fornecer as seguintes informações, escolha da cordoalha (definida de acordo com os padrões encontradas no mercado), tensão de protensão inicial, perdas iniciais e finais, número de cordoalhas no mesmo feixe, d’ inferior e superior, número de tramos (quantidade de trechos que inicia e

termina a trajetória do cabo de protensão), comprimento do trecho retilíneo e comprimento de cada tramo. Estas informações dopem ser verificadas na Figura 46 a seguir.

**Figura 46: Formulário do cabo de protensão**

Fonte: PRÓPRIO AUTOR

Neste formulário são calculados a trajetória do cabo representante, como apresentado na seção 5.2, os efeitos de protensão e também as ações nodais que são aplicadas nos nós da grelha. As ações nodais formam um vetor, composto por um momento e uma força cortante, devido ao momento de engastamento perfeito gerado pelo carregamento equivalente do cabo de protensão.

O processo de cálculo deste formulário foi dividido em quatro operações, onde é identificado o tipo de cabo. As operações são separadas em cabos bi apoiados, cabos contínuos, sendo estes divididos em três trechos distintos, o trecho inicial, o trecho intermediário e o trecho final, totalizando as quatro operações. Foi necessário fazer desta maneira, pois cada operação tem suas particularidades. Em cada operação é calculada a trajetória do trecho, depois é calculado a ação equivalente de protensão, após este processo as ações são divididas nas barras, onde é gerado o vetor das cargas nodais nas barras. Neste caso aplica-se o visto nos itens 2.2 e 3.3.2. Após os cálculos de todas as operações, é obtido o vetor das ações nodais concentradas nos nós da grelha. Essas operações são identificadas quando o usuário fornece o número de trechos. No caso de o usuário informar que há apenas um trecho, o programa identifica que é um trecho bi apoiado. Se conter dois ou mais trechos é identificado trata-se de um cabo contínuo. A primeira operação é reservada para o primeiro trecho, a segunda operação para o último trecho e a terceira operação para os trechos intermediários, quando houver.

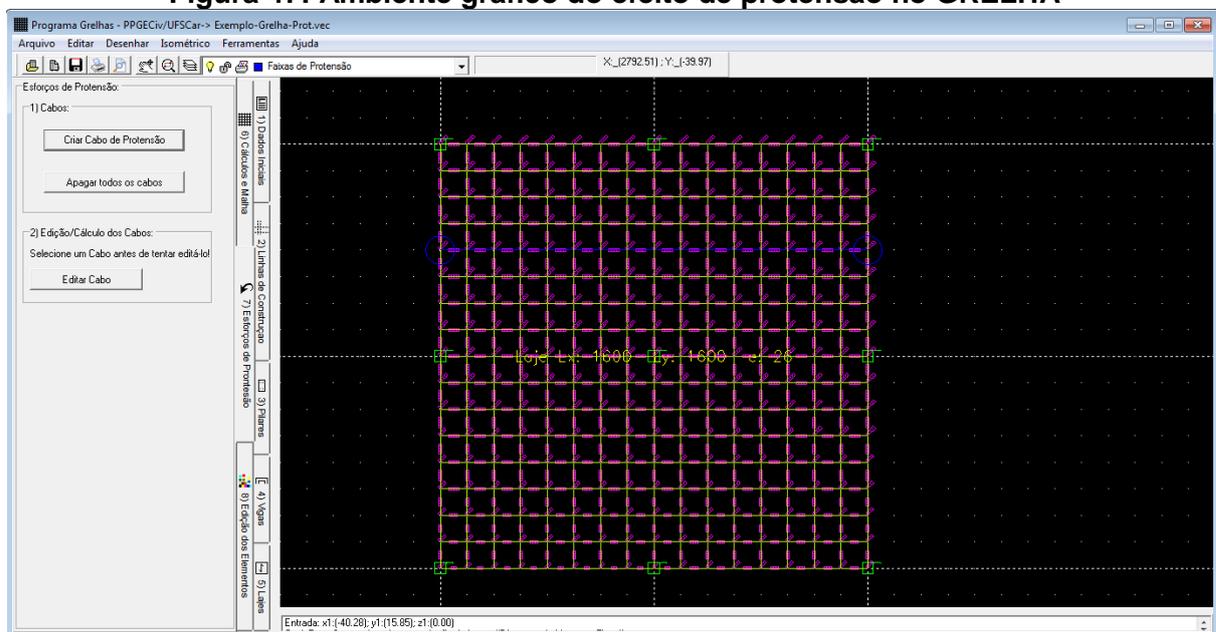
A parte gráfica dos efeitos de protensão é realizada na sub-rotina “UProtensao”.

### 7.3 UNIDADE GRÁFICA DE PROTENSÃO

A tarefa gráfica da unidade de protensão é realizada na Unit UProtensao. Nesta unidade foi criado um layer específico das ações de protensão, seguindo os critérios já

estabelecidos no GRELHA, para separar em blocos cada elemento diferente. Para inserir o cabo de protensão é necessário informar a linha de barras da grelha onde o mesmo será inserido. Os cabos de protensão são inseridos apenas nas barras da grelha. O cabo de protensão é representado por uma linha com o mesmo comprimento das barras da grelha onde serão inseridos e por dois círculos um em cada extremidade do cabo. É importante salientar que é feito um clone dos dados das barras selecionadas pelo usuário que são armazenados em memória, com o objetivo de obter as informações contidas nestas barras e utilizá-las no processo de cálculo. Por isso, é necessária esta operação após a geração das barras deformadas da grelha. Na Figura 47 são apresentados os detalhes gráficos do cabo de protensão, onde é possível visualizar o cabo de protensão em azul.

**Figura 47: Ambiente gráfico do efeito de protensão no GRELHA**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR

Um detalhe importante é que as propriedades do elemento são armazenadas junto com os elementos gráficos, ou seja, junto com o desenho. Portanto quando a edição se faz necessário, esta deve ser feita através do desenho. Por exemplo, se o usuário tiver que mudar de posição o cabo de protensão, basta mover o objeto, pois as propriedades são carregadas com o desenho, não sendo necessário fornecer as informações novamente. Por isso a importância de o desenho carregar as propriedades do elemento, tornando o processo mais intuitivo e mais rápido de ser usado.

Após criar o cabo de protensão o usuário deve selecioná-lo e clicar no botão “Editar Cabo” para que seja aberto o formulário apresentado na seção 7.2 e assim inserir as características daquele cabo.

# 8. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo são resolvidos exemplos de aplicação para validação dos algoritmos criados para o cálculo do efeito de protensão e apresentar as possibilidades de utilização dos mesmos. O objetivo deste capítulo é verificar os algoritmos criados para a análise do efeito de protensão. Para tanto, foram utilizados os exemplos já resolvidos neste trabalho, para comparação dos resultados. Primeiramente, foi resolvida a viga presente no capítulo 5. Posteriormente, foi resolvida a laje lisa do capítulo 6, com as mesmas características que anteriormente e, na sequência, com variações da distribuição dos cabos de protensão em planta, para verificar a melhor maneira de distribuição dos cabos.

Para a resolução dos exemplos dispostos neste capítulos, foram definidos os seguintes dados, tensão de protensão inicial de 1500 MPa, perda de protensão inicial de 6,93%, perda de protensão final de 20%,  $d'$  inferior de 3,27 cm,  $d'$  superior de 2,77 cm, número de tramos igual a dois e o comprimento do trecho retilíneo que é igual a 1 m.

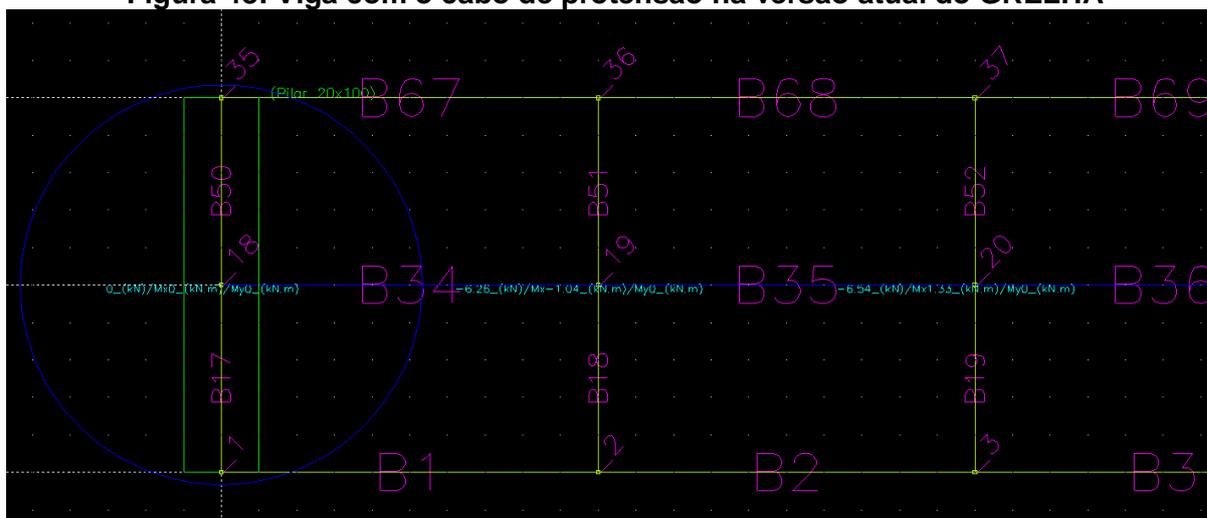
É importante enfatizar que as diferenças encontradas nos resultados eram esperadas, pois nos exemplos resolvidos nos capítulos anteriores, foram através apenas da inserção de carga local, onde levava em consideração apenas a força vertical aplicada. Neste caso, além da força vertical, é levado em conta o momento nodal equivalente da ação de protensão, que são calculados através de ações de engastamento perfeito na barra elementar.

## 8.1 VIGA CONTÍNUA

Para elaborar um estudo comparativo entre a versão atual e anterior do GRELHA, utilizou-se a viga do capítulo 5. As perdas de protensão utilizadas na versão atual do programa estão na seção 5.3.

Na Figura 48 pode ser observado o primeiro trecho da viga na versão atual do GRELHA com o cabo de protensão e as cargas equivalente já aplicadas.

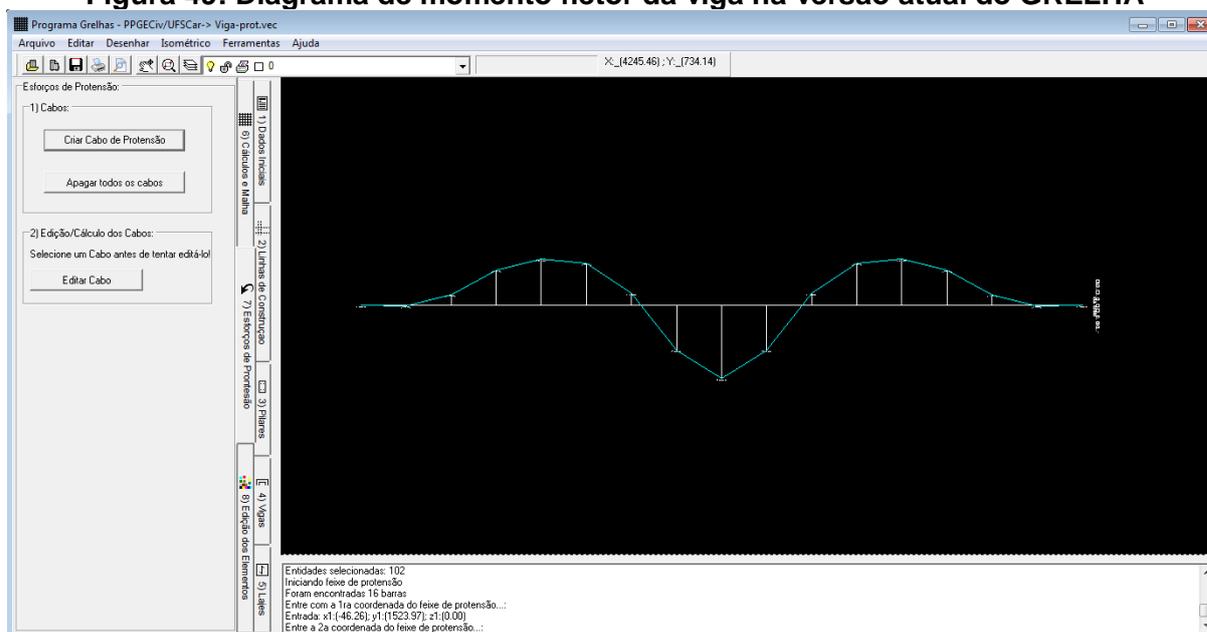
**Figura 48: Viga com o cabo de protensão na versão atual do GRELHA**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR

Na Figura 49 é apresentado o diagrama de momento fletor na versão atual do GRELHA.

**Figura 49: Diagrama de momento fletor da viga na versão atual do GRELHA**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR

A Tabela 30 apresenta os resultados do modelo anterior e atual do GRELHA, evidenciando o momento máximo positivo e o momento máximo negativo em cada tramo e também os resultados encontrados no FTOOL.

**Tabela 30: Resumo dos resultados dos modos de resolução do carregamento equivalente do cabo de protensão da viga**

<b>Método de Resolução</b>	<b>Momento máximo positivo (kN.m)</b>	<b>Momento máximo negativo (kN.m)</b>
<b>GRELHA anterior</b>	37,25	23,47
<b>GRELHA atual</b>	37,25	23,47
<b>FTOOL</b>	36,89	23,56
<b>Diferença entre a solução atual e o FTOOL (%)</b>	0,97	0,38

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Pode ser observado, que não houve diferença entre os resultados da solução atual do GRELHA e o modelo anterior. No caso de vigas, está situação, já era esperada, devido o cabo atuar em apenas um eixo (longitudinal), com isso os esforços de momento não provocam modificação do resultado. Com esta análise, foi possível validar a nova versão do GRELHA e utilizar o mesmo para consideração das ações do protensão através análise de grelha equivalente.

A seguir, será apresentada a solução do exemplo disposto no capítulo 6 com a versão atual do GRELHA e utilizando as variações propostas em MELLO (2005).

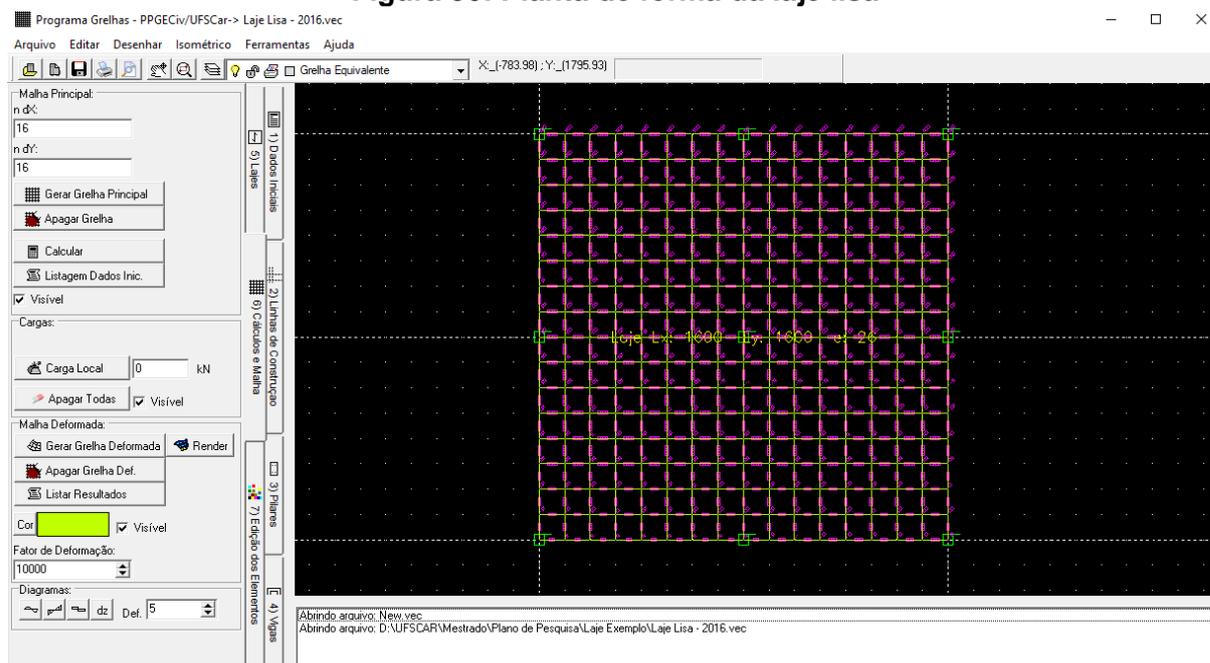
## **8.2 LAJE LISA PROTENDIDA COM CABOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS NA DIREÇÃO VERTICAL E HORIZONTAL**

Utilizando das características do exemplo do capítulo 6 deste trabalho e dados preliminares já calculados, será feita a análise do mesmo através da versão atual do GRELHA.

Primeiramente será apresentado o exemplo em questão apenas com os carregamentos permanentes e acidentais que não incluem os efeitos de protensão para que seja analisado os efeitos em separado e, posteriormente, a combinação dos mesmos.

Na Figura 50 será apresentada a planta com as características já apresentadas. A grelha foi estabelecida para que possua espaçamento a cada 1 metro em relação ao eixo horizontal e vertical, sendo inseridas 16 barras em cada eixo.

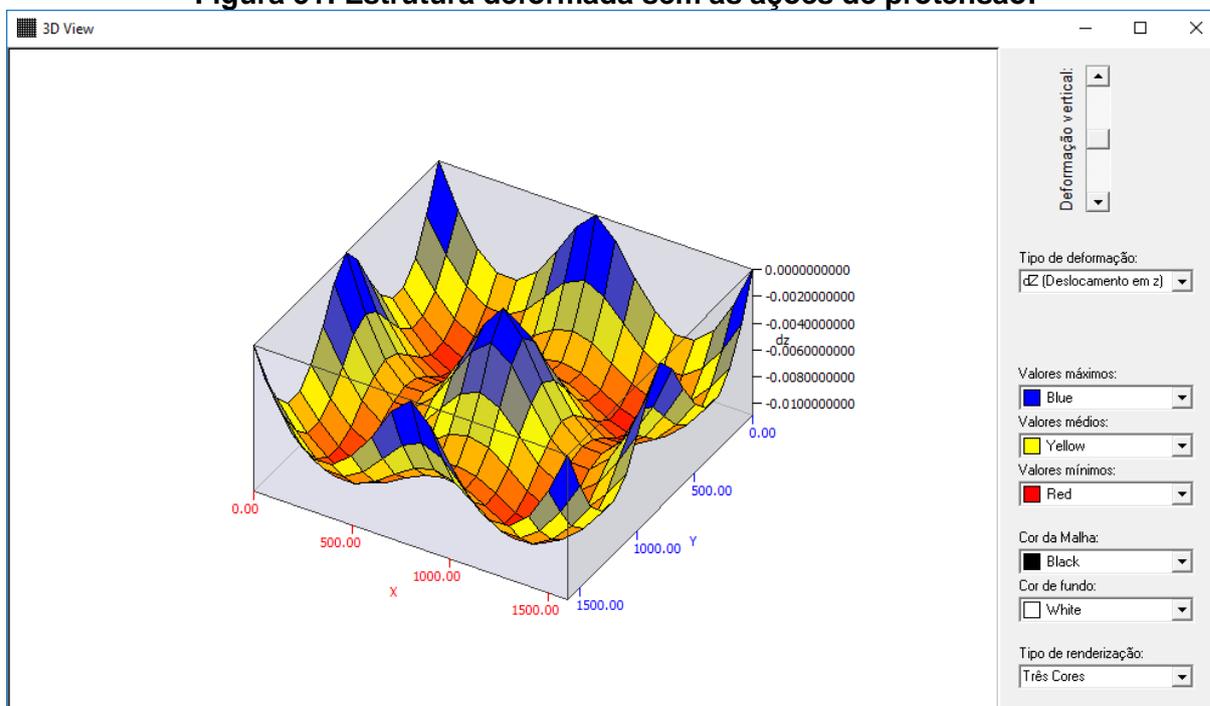
**Figura 50: Planta de forma da laje lisa**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Utilizando da combinação rara de carregamento, somatório das cargas permanentes e acidentais, lembrando que neste momento ainda não foi inserido as cargas de protensão, foi gerado o gráfico deformado da estrutura e apresentado na Figura 51.

**Figura 51: Estrutura deformada sem as ações de protensão.**

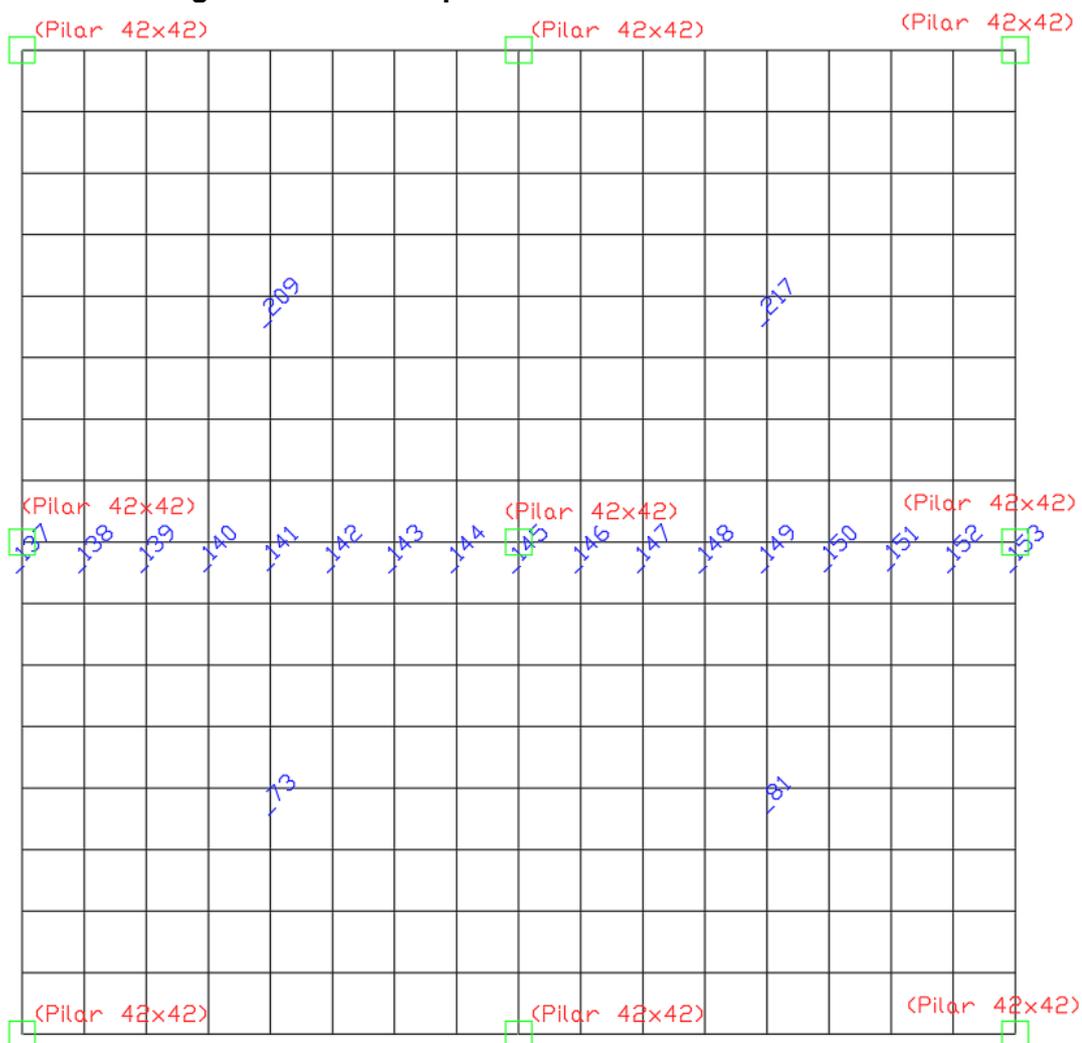


Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Como já esperado, a estrutura tem uma deformação predominantemente negativa em relação ao eixo Z (vertical), origem no plano da laje e com valores positivos para cima, com exceção nos pontos dos pilares que são indeslocáveis.

Os nós da grelha com as maiores deformações são os 73, 81, 209 e 217 com o deslocamento de -10,9 mm. A Figura 52 apresenta a localização dos nós em questão.

**Figura 52: Grelha equivalente com os nós numerados**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Na Tabela 31 são apresentados os momentos fletores com as diversas combinações de carregamento na barra dos pilares centrais que inicia no nó 137 e termina no nó 153 da grelha, como pode ser observado na Figura 52 a localização destes nós.

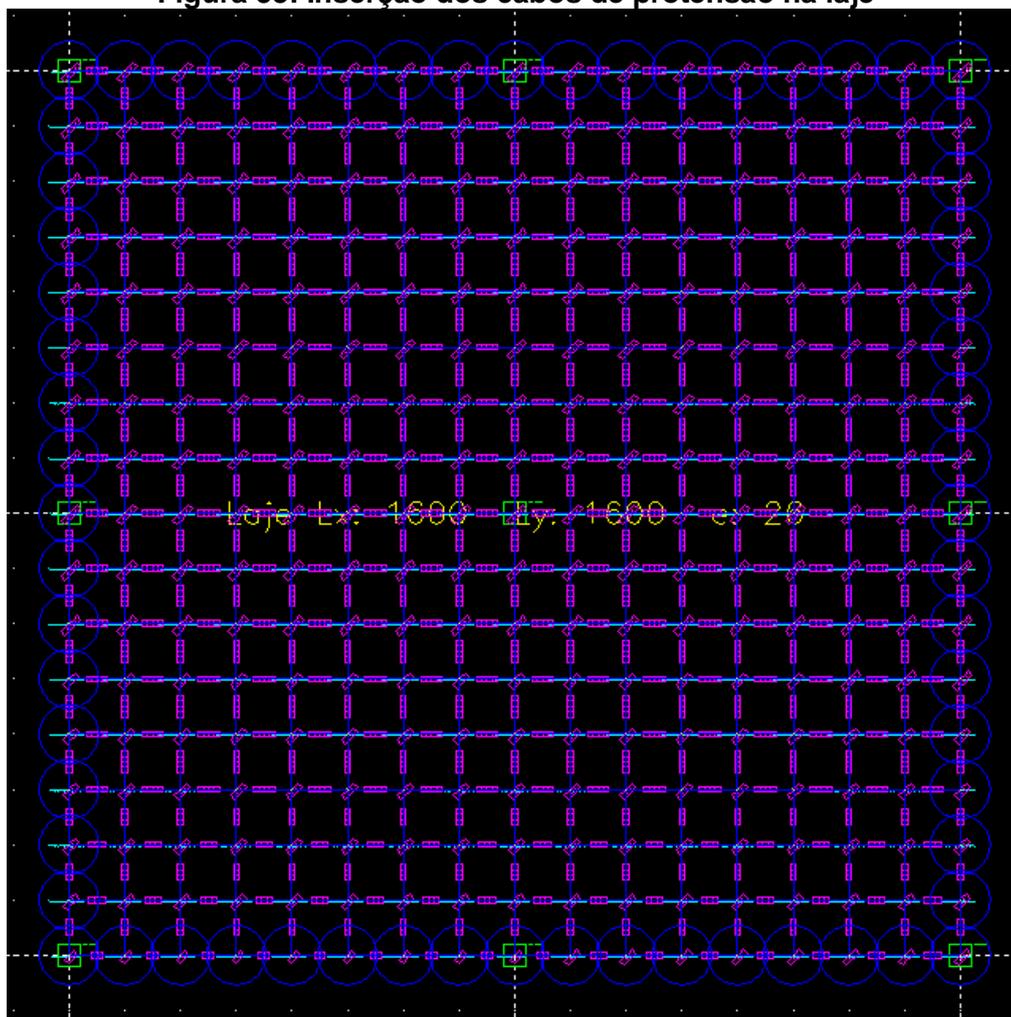
Tabela 31: Momento fletor na barra do pilar central para a grelha a cada 1m

Ação	$M_{(g1)}$	$M_{(g1+g2+0,3.q)}$	$M_{(g1+g2+0,4.q)}$	$M_{(g1+g2+q)}$
Momento apoio pilar central (kN.m/m)	-156,5	-179,3	-182,9	-204,6
Momento meio do vão (kN.m/m)	45,0	51,5	52,4	58,3

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A seguir é realizada a disposição dos cabos de protensão na planta de forma. A primeira análise será efetuada aplicando duas cordoalhas por barra da grelha, simulando uma situação com uma cordoalha a cada 50 cm. Na Figura 53 pode ser observada a disposição dos cabos em azul.

Figura 53: Inserção dos cabos de protensão na laje



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Após a aplicação do cabo é feita a edição dos mesmos para a geração das ações equivalentes de protensão e conseqüentemente a aplicação nos nós da grelha. Na Figura

54 está exposto o formulário com as características da cordoalha já mencionadas no início do capítulo.

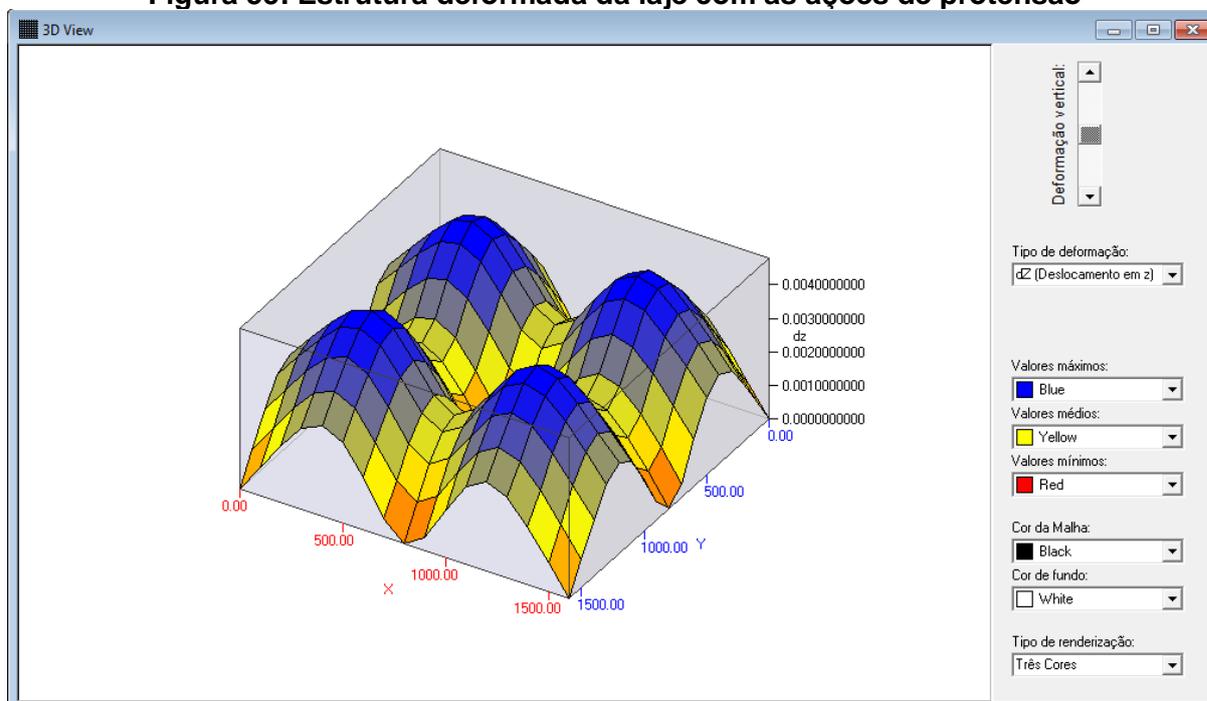
**Figura 54: Inserção dos cabos de protensão na laje**

Tramo	Tramo 1	Tramo 2
Comprimento [m]	0	0
u1 [kN/m]	0	-27.0251134309167
u2 [kN/m]	-12.5251895275	13.9235248090662
u3 [kN/m]	6.96176240453308	6.96176240453308

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Com as ações de protensão geradas nos nós da grelha é possível fazer a análise apenas destas ações. As informações importantes obtidas desta análise são os deslocamentos e o diagrama de momento fletor nos nós (73, 81, 209 e 217). Na Figura 55 é apresentada a estrutura deformada apenas com as ações de protensão.

**Figura 55: Estrutura deformada da laje com as ações de protensão**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A estrutura deformada na laje como observado na Figura 54, representa o que se espera de uma ação de protensão, sendo a deformação no sentido contrário a tendência de

deformação da estrutura sem a protensão. A deformação nos mesmos nós da grelha (73, 81, 209 e 217) é de 4,8 mm.

Após esta análise foi feito um estudo comparativo dispondo a grelha a cada 50 centímetros e aplicando apenas 1 cordoalha por barra da grelha para verificar a compatibilização dos resultados. A deformação encontrada nos nós equivalentes ao apresentado na Figura 52 foi de 4,8 mm. Verifica-se que não é necessário dispor a grelha com o mesmo espaçamento dos cabos de protensão, pois o processo é mais trabalhoso e o resultado da primeira situação da grelha espaçada a cada 1 m obteve resultados satisfatórios.

Foram realizadas outras análises utilizando como padrão a grelha espaçada a cada 1 metro. As diferentes análises foram de um cabo a cada 40 cm, para isto utilizou-se e 2,5 cordoalhas por barra da grelha, de um cabo a cada 33,33 cm, tendo 3 cabos por barra da grelha e por último um cabo a cada 25 cm, tendo 4 cabos concentrados por barra da grelha.

Na Tabela 32 são expostos os resultados dos momentos fletores na linha de barras que inicia no nó 137 e termina no nó 153 da grelha e pode ser visto na Figura 52 e também a deformação nos nós (73, 81, 209 e 217) dos diferentes tipos de análise. É necessário enfatizar que para a comparação dos momentos fletores da segunda análise, 1 cordoalha por barra da grelha a cada 50 cm, o valor do momento deve ser multiplicado por 2 para adequar a malha dos outros exemplos que estão a cada 1 metro, sendo que o valor apresentado na Tabela 32 já consta está adequação.

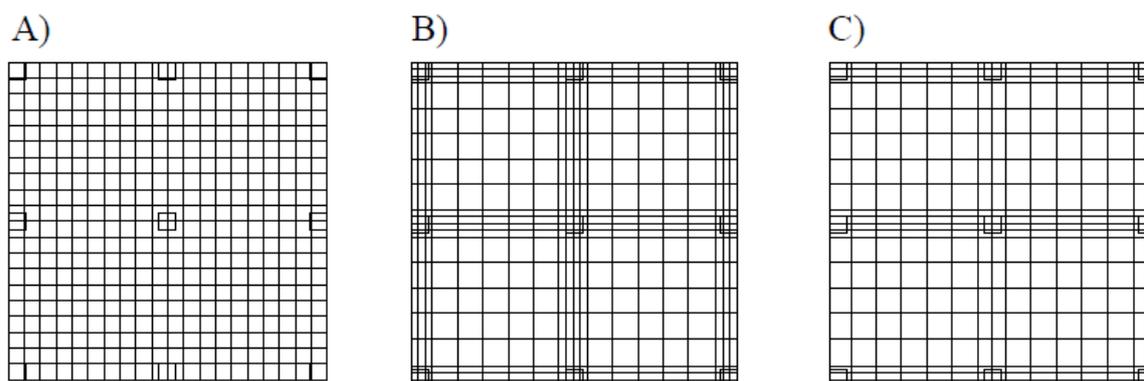
**Tabela 32: Comparativo entre deformação e momento fletor das diferentes análises**

<b>Análise</b>	<b>Momento no nó 145 da grelha (kN.m/m)</b>	<b>Momento no nó 141 da grelha (kN.m/m)</b>	<b>Deslocamentos nos nós (73, 81, 209 e 217) (mm)</b>
<b>2 cordoalhas por barra na grelha 1m x 1m</b>	46,22	-25,22	4,8
<b>1 cordoalhas por barra na grelha 0,5m x 0,5m</b>	47,18	-25,16	4,8
<b>2,5 cordoalhas por barra na grelha 1m x 1m</b>	57,95	-31,95	6,0
<b>3 cordoalhas por barra na grelha 1m x 1m</b>	69,42	-38,3	7,2
<b>4 cordoalhas por barra na grelha 1m x 1m</b>	92,6	-51,07	9,6

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Em relação à disposição dos cabos em planta como apresentado em Mello (2005), têm-se as seguintes situações, destacando as mais usuais: cabos uniformemente distribuídos nas duas direções, concentrados em faixas bidirecionais e concentrado em faixas em uma direção e uniformemente distribuído na outra, tal como pode ser visto na Figura 56.

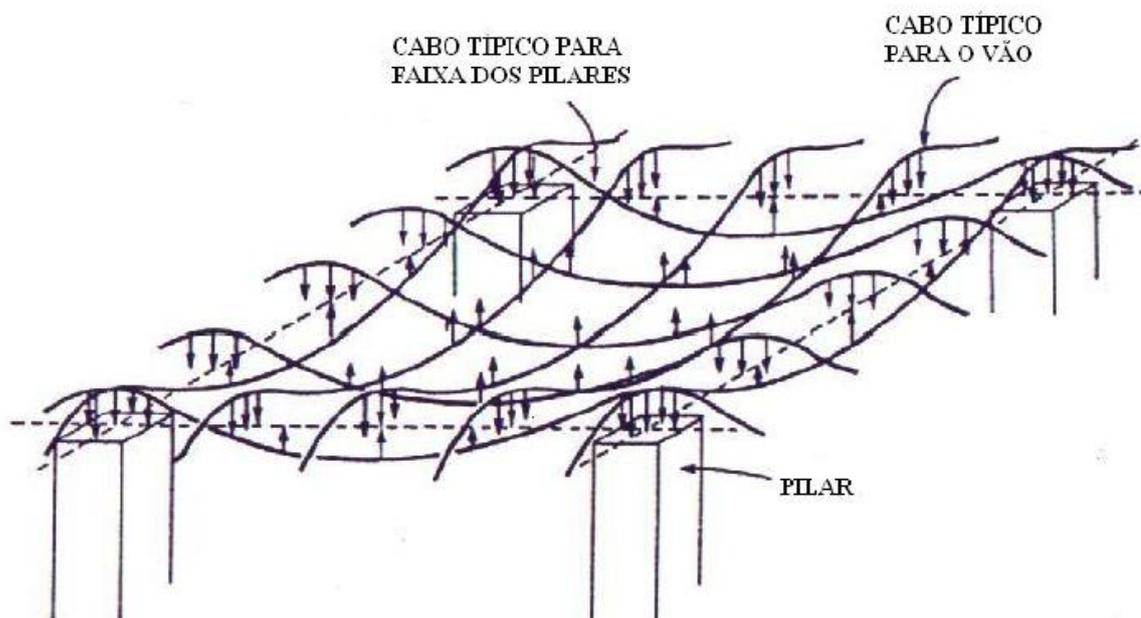
**Figura 56: Distribuição dos cabos em planta**



Fonte: (MELLO, 2005).

Para o estudo da melhor distribuição dos cabos na laje será ilustrado através da Figura 57 o comportamento das forças equivalentes resultantes da distribuição uniforme de cabos nas duas direções (x e y). Na figura 57 a aproximação das setas indica a intensidade, ou seja, para regiões com setas próximas a intensidade é maior.

**Figura 57: Ações das forças verticais no concreto para a distribuição uniforme dos cabos**

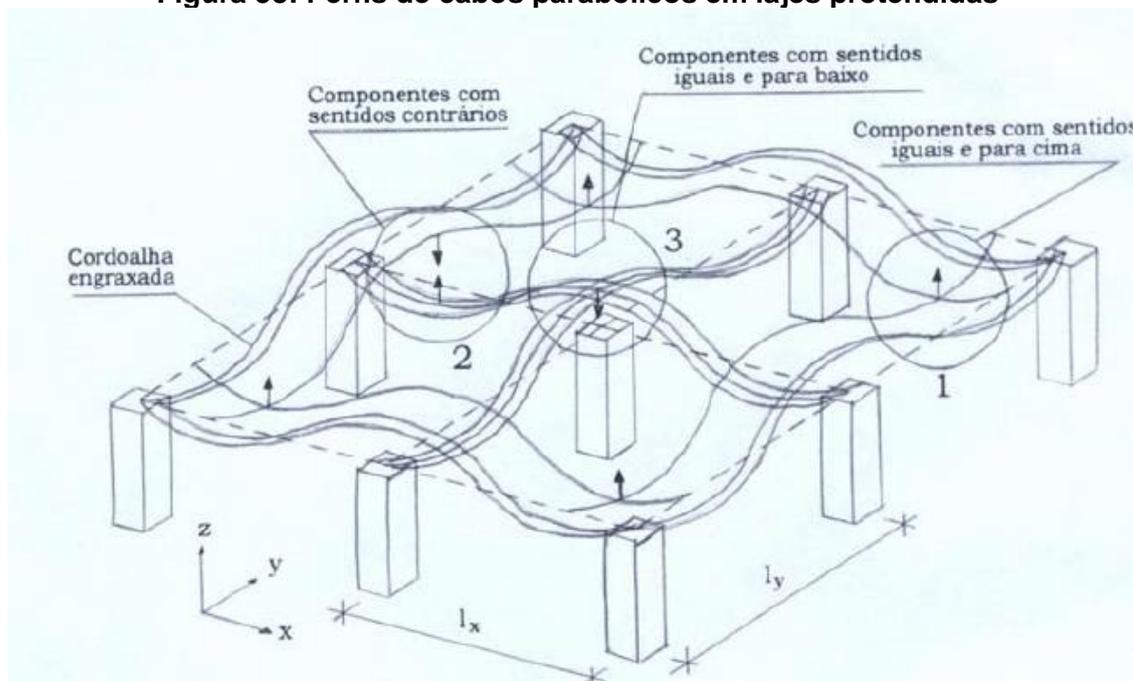


Fonte: (COLLINS e MITCHELL, 1987).

Ao analisar as forças de protensão dos cabos, nota-se que na região em que o cabo possui traçado convexo o carregamento obtido é descendente. Já na região de curvatura côncava tem-se o carregamento ascendente, porém, com os valores menores que os da convexa. Portanto, em termos de balanceamento de forças, é aconselhável maior concentração de cabos nas faixas dos pilares para compensar este efeito. Nota-se que, para esta distribuição, o balanceamento de forças não é uniforme em toda a região da laje (MELLO, 2005).

É possível verificar que os momentos crescem na seguinte ordem: nas faixas centrais, nas bordas e nos pilares. Portanto, para balancear estes momentos é aconselhável a distribuição dos cabos por faixa e que a quantidade de cabos seja proporcional aos momentos destas faixas como disposto na Figura 58.

**Figura 58: Perfis de cabos parabólicos em lajes protendidas**



Fonte: (ALMEIDA FILHO, 2002).

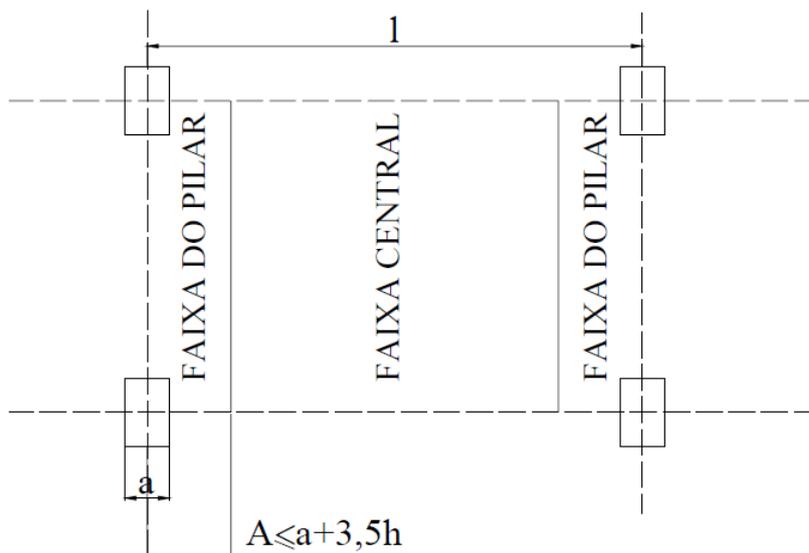
De acordo com Souza e Cunha (1998), concentrar os cabos nas faixas dos pilares apresenta as seguintes vantagens, em comparação com a distribuição uniforme: aumento da resistência a punção, melhor aproximação com a distribuição de momentos na laje e aumento da resistência próximo ao pilar para a transferência de momentos de ligação laje pilar.

O ACI 423 (1983) recomenda a utilização de 65 a 75% dos cabos concentrados na faixa dos pilares e 35 a 25% dos cabos na faixa central.

Segundo a seção 20.3.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, cabos dispostos em faixas externas de apoio devem estar contidos numa porção de laje, de tal forma que a largura

desta não ultrapasse a dimensão em planta do pilar de apoio, tomada transversalmente à direção longitudinal da faixa, acrescida de 3,5 vezes a espessura da laje para cada um dos lados do pilar, como mostrado na Figura 59.

**Figura 59: Largura para distribuição de cabos nas faixas dos pilares**



Fonte: (MELLO, 2005).

Ainda, para considerar a distribuição de cabos em planta, é preciso respeitar o espaçamento horizontal mínimo entre os cabos. Conforme a seção 18.6.2.3 da ABNT NBR 6118:2014, os valores mínimos dos espaçamentos são os indicados na Tabela 33, caso de pós tração.

**Tabela 33: Espaçamentos mínimos – Caso de pós-tração**

Disposição das bainhas	Espaço livre	
	$a_h$ (horizontal)	$a_v$ (vertical)
	$\geq \phi_{ext}$ $\geq 4 \text{ cm}$	$\geq \phi_{ext}$ $\geq 5 \text{ cm}$
	$\geq 1,2 \phi_{ext}$ $\geq 4 \text{ cm}$	$\geq 1,5 \phi_{ext}$ $\geq 5 \text{ cm}$

onde  
 $\phi_{ext}$  é o diâmetro externo da bainha.

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

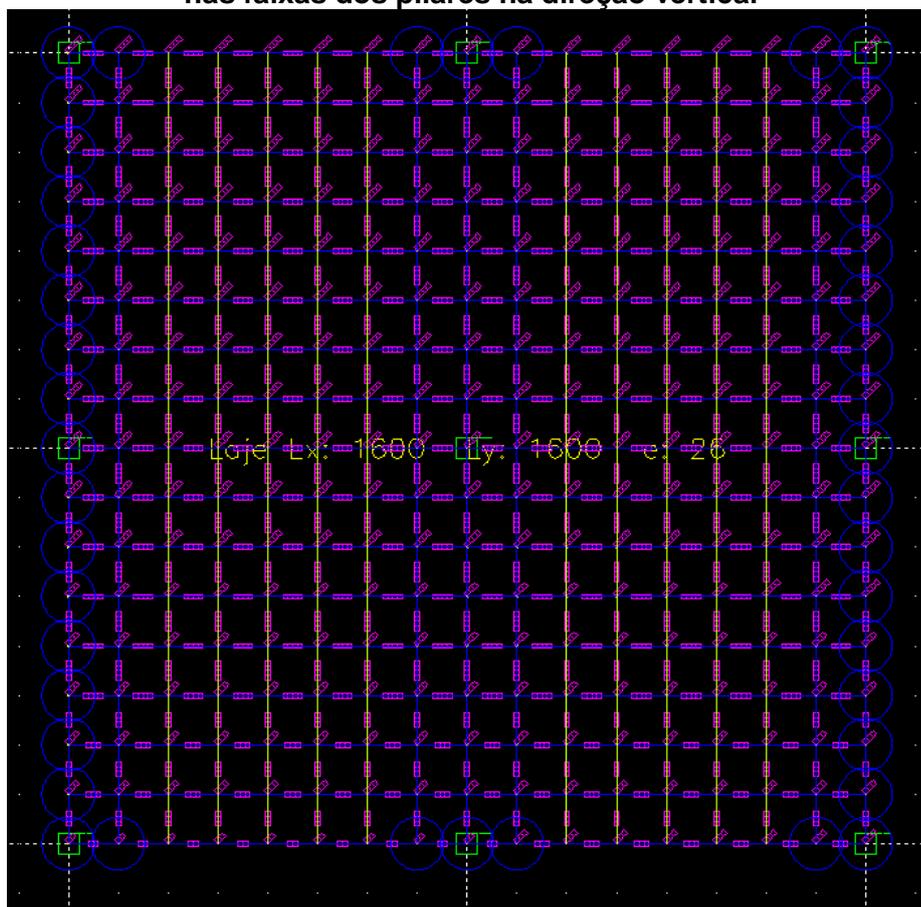
Já na seção 20.3.2.3 da ABNT NBR 6118:2014, tem-se que entre cabos ou feixes de cabos, ou entre cabos e armaduras passivas, deve ser mantido um espaçamento mínimo de 5 cm.

Em relação ao espaçamento máximo, na seção 20.3.2.1 da ABNT NBR 6118:2014, tem-se que entre cabos ou feixes de cabos deve ser mantido um espaçamento máximo  $6h$  (sendo  $h$  a espessura da laje), não excedendo 120 cm.

A partir dessas disposições será elaborado no GRELHA as diferentes distribuições dos cabos de acordo com a Figura 56, sendo que a solução A da figura já foi resolvido neste capítulo.

As faixas de protensão deste exemplo foram estabelecidas de acordo com a Figura 59, obtendo o valor de 1 metro nas bordas laterais e 2 metros na faixa central. Como a grelha tem espaçamento a cada 1 metro, as faixas de borda ocuparam 2 barras da grelha e as faixas centrais ocuparam 3 barras da grelha. Esta disposição dos cabos está representada na Figura 60, representando a disposição B da Figura 57.

**Figura 60: Cabos uniformemente distribuídos na direção horizontal e concentrados nas faixas dos pilares na direção vertical**

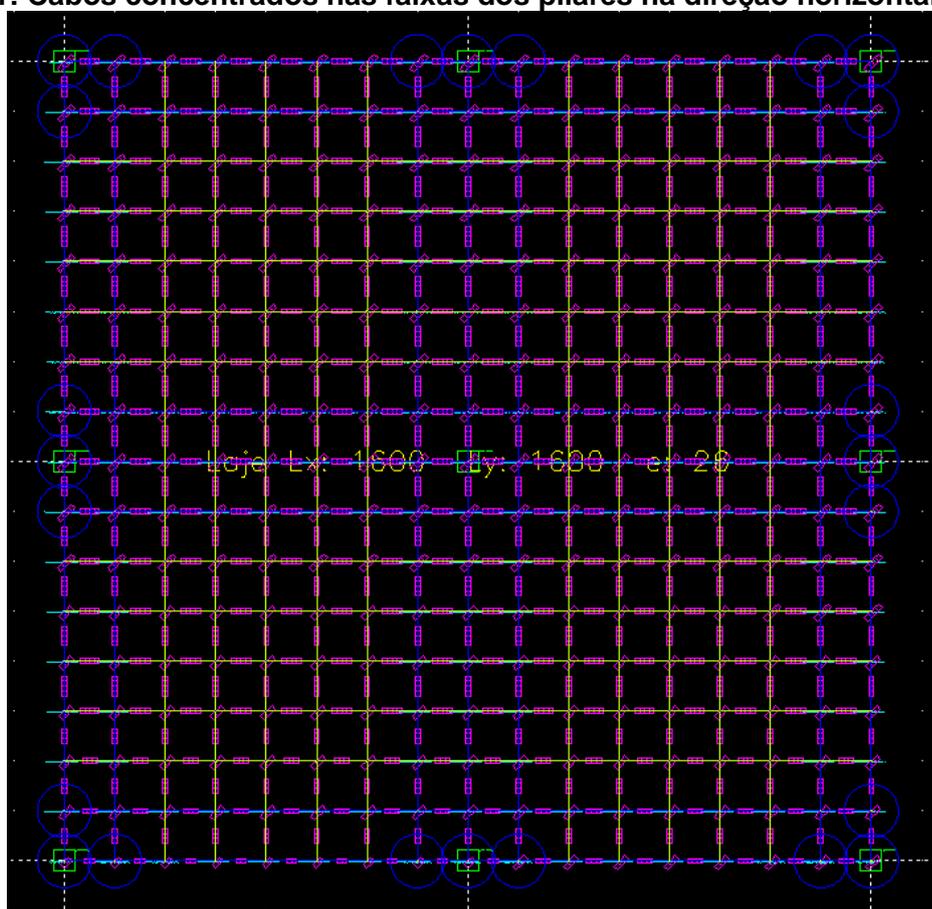


Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Nesta disposição os cabos estão uniformemente distribuídos na direção horizontal e concentrados nas faixas dos pilares na direção vertical. As barras horizontais possuem 2 cordoalhas cada, já nas barras verticais da borda externa possui 4 cordoalhas e as barras verticais da faixa central possui 8 cordoalhas. O objetivo foi manter a mesma quantidade de cordoalha, apenas com a mudança de distribuição, analisar o momento fletor e a deformação gerada. As características das cordoalhas permaneceram as mesmas já utilizadas neste trabalho.

Já de acordo com a disposição do item C da Figura 56, os cabos estão concentrados na faixa dos pilares no eixo vertical e horizontal. A Figura 61 mostra esta disposição no GRELHA.

**Figura 61: Cabos concentrados nas faixas dos pilares na direção horizontal e vertical**



Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

Como pode ser visto na Figura 61, os cabos em azul estão concentrados nas faixas dos pilares tanto na direção horizontal quanto na vertical. As barras das bordas externas possuem 4 cordoalhas cada barra, já a faixa central possui 8 cordoalhas cada barra. Novamente o objetivo é analisar o momento fletor e a deformação com o mesmo número de cordoalhas que os exemplos anteriores, variando somente a distribuição dos cabos.

Na Tabela 34 são expostos os resultados dos momentos fletores apenas considerando os efeitos de protensão na linha de barras que inicia no nó 137 e termina no nó 153 da grelha e pode ser visto na Figura 52 e também os deslocamentos nos nós (73, 81, 209 e 217). As situações apresentadas nesta tabela seguem o disposto na Figura 56, sendo que para a situação A foi utilizado como exemplo 2 cordoalhas em cada barra da grelha, uniformemente distribuídos nas duas direções já calculado anteriormente. A situação B são cabos uniformemente distribuídos na horizontal e concentrados em faixas na vertical. A situação C são cabos concentrados nas regiões dos pilares nas duas direções.

**Tabela 34: Comparativo entre deslocamento e momento fletor das diferentes análises**

<b>Análise</b>	<b>Momento no nó 145 da grelha (kN.m/m)</b>	<b>Momento no nó 141 da grelha (kN.m/m)</b>	<b>Deslocamentos nos nós (73, 81, 209 e 217) (mm)</b>
<b>Situação A</b>	46,22	-25,22	4,8
<b>Situação B</b>	71,92	-33,49	5,56
<b>Situação C</b>	122,46	-35,26	6,35

Fonte: PRÓPRIO AUTOR.

A partir deste comparativo verifica-se que a distribuição dos cabos concentrados nas faixas dos pilares é mais eficiente, visto que a quantidade de cordoalhas para este comparativo foi o mesmo nas três situações.

A situação B apresenta um melhor custo benefício visto que não houve um ganho de eficiência de C em relação a B, sendo esta mais viável tecnicamente para se executar, pois a concentração de cabos dificulta o processo de protensão.

## 9. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

As conclusões, considerações finais e sugestões para trabalho futuro apresentadas a seguir originaram-se do conteúdo apresentado neste trabalho onde se procurou avaliar as considerações para a implementação da ação de protensão através de grelha equivalente no programa GRELHA.

Com a demanda crescente da utilização de estruturas protendidas e, em particular, lajes lisas protendidas é necessário dispor de programas computacionais que auxiliam no processo de resolução destes tipos de estruturas.

A primeira conclusão que pode ser obtida é em relação ao modelo de cálculo tanto para representar a estrutura como o esforço de protensão. O uso de grelha equivalente permite a utilização de programas mais simples e acessíveis aos engenheiros. Assim, além da facilidade de acesso o modelo de grelha permite uma fácil interpretação dos resultados, pois o engenheiro estrutural está acostumado a trabalhar com sistemas em vigas, onde foi possível observar através dos resultados, que a consideração do efeito de protensão através de grelha equivalente se mostrou promissor e com resultados satisfatórios. Porém o grande número de operações manuais dificultava a utilização do programa GRELHA para este fim. Como o objetivo deste trabalho foi automatizar este lançamento eliminando estas atividades repetitivas e trabalhosas, pode-se afirmar que os objetivos deste trabalho foram alcançados, ou seja, foi desenvolvida uma plataforma de protensão que gera as ações de protensão e aplica na grelha. Esta nova versão será utilizada por alunos de graduação e pós-graduação de cursos de engenharia civil e será disponibilizada na internet para que todos tenham acesso.

A nova versão do GRELHA gera o traçado vertical do cabo de protensão automaticamente, calcula as ações de protensão através do carregamento equivalente e aplica as ações nodais devido a protensão nos nós da grelha. A partir deste ponto as funcionalidades do programa são as mesmas.

Como observado no capítulo anterior, a nova versão do programa mostrou-se precisa e confiável em todos os aspectos e em todos os modelos gerados até o momento. O GRELHA apresentou também ser didático e de fácil utilização proporcionando uma maneira rápida e eficiente se analisar pavimentos de concreto protendido.

Em relação a distribuição dos cabos em planta, nota-se nos exemplos resolvidos neste trabalho que a utilização da distribuição dos cabos em faixa obteve resultados melhores. A

distribuição uniforme dos cabos é uma solução com um consumo maior de cordoalhas. A determinação das larguras das faixas de protensão é em função de critérios normativos, porém cabe sempre ao projetista definir estas faixas de protensão, visando apresentar uma boa solução de distribuição atendendo a todas as condições normativas que resulte no menor número de cabos. Cabe ressaltar que neste trabalho a análise de distribuição dos cabos de protensão foi apenas superficial, e para demonstrar que com a versão atual do GRELHA é possível fazer um estudo mais detalhado a respeito do tema.

Apesar de alcançar os objetivos propostos, o sistema está susceptível a diversas melhorias. Apresentam-se na sequência algumas dessas possíveis melhorias.

- Automatização do cálculo das perdas de protensão. As perdas de protensão no GRELHA são informadas pelo usuário atualmente, sendo que poderia realizar o cálculo automático de cada situação.
- Distribuição automática dos cabos e protensão. Os cabos de protensão são inseridos um por vez em cada barra da grelha. Uma automatização pode ser feita para a criação de uma faixa de protensão e os cabos são distribuídos em cada barra da grelha automaticamente.
- Aplicação dos cabos de protensão não apenas nas barras da grelha. Os cabos necessariamente precisam ser inseridos nas barras da grelha. Uma situação que ocorre na execução destes projetos são a distribuição não linear destes cabos.
- Possibilitar a determinação da trajetória do cabo de protensão. A trajetória do cabo atualmente está pré-definida, uma melhoria seria a possibilidade de o usuário informa qual trajetória ele prefere executar.
- Elaborar uma sub-rotina para calcular e verificar no estado limite último as armaduras passiva e ativa em lajes e vigas protendidas.
- Automatizar o detalhamento de armaduras ativas em lajes e vigas protendidas.
- Desenvolver uma sub-rotina para calcular e verificar no estado limite último os esforços de cisalhamento devido à flexão em lajes e vigas protendidas.
- Um estudo detalhado que pode ser feito utilizando o GRELHA atual é em relação a distribuição dos cabos em planta, para verificar qual solução apresenta melhores resultados utilizando exemplos diferentes dos resolvidos neste trabalho.

- Outra análise que pode ser feita é em relação a diferença de momentos fletores nas barras perpendiculares simétricas quando se utiliza da distribuição não uniforme dos cabos em planta.

Finalmente, o estudo aqui realizado se propôs a desenvolver um trabalho que pode ser continuado através da utilização da versão atual GRELHA para a análise de diversas estruturas protendidas, considerando estruturas mais complexas.

# 10. REFERÊNCIAS

ALMEIDA FILHO, F. M. **Estrutura de pisos de edifícios com a utilização de cordoalhas engraxadas**. 2002. 283 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118** – Projeto de estruturas de concreto – Procedimentos. Rio de Janeiro. 2014.

BORTONE, T. P. **Avaliação das tensões no estado limite de serviço em seções de concreto protendido**. 2014. 230 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais.

CARNEIRO, A. L. **Análise e dimensionamento de lajes lisas protendidas sem aderência**. 2015. 161 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Universidade Federal do Espírito Santo).

CARVALHO, R. C. **Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. 1994. 218 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo.

CARVALHO, R. C. **Aplicações do concreto protendido**. Notas de aula, Universidade Federal de São Carlos, 2015.

CARVALHO, R. C. **Estruturas em concreto protendido: cálculo e detalhamento**. 1ª Ed. São Paulo: PINI, v. 1, 2012. 431 p.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 3º Edição, EdUFSCar, São Carlos, 2012.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 2º Ed. São Paulo: PINI, v. 2, 2013. 617 p.

CARVALHO, R. C. et al. **Análise de estruturas de edifícios em concreto armado usando programas de computador**. Apostila, Universidade Federal de São Carlos, 2017.

CASS, A. J. R. **Programa gráfico livre para a análise de lajes de edificações em concreto armado usando o modelo de grelha equivalente**. 2012. 159 p. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos.

COELHO, J. R. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha – conceitos iniciais**. 2013. Artigo. AltoQI. Disponível em <[http://faq.altoqi.com.br/content/245/600/pt-br/modelagem-de-lajes-de-concreto-armado-por-analogia-de-grelha\\_-conceitos-iniciais.html](http://faq.altoqi.com.br/content/245/600/pt-br/modelagem-de-lajes-de-concreto-armado-por-analogia-de-grelha_-conceitos-iniciais.html)>. Acesso em 25 outubro 2017.

COLLINS, M. P.; MITCHELL, D. **Prestressed concrete basics**. 1987. Ottawa, Canadian Prestressed Concrete Institute.

CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO, M. A. **Sistema laser de análise estrutural**. 1987. Sinpósio Nacional de Tecnologia e Construção. Anais. São Paulo: EPUSP.

COTTA, I. S. **Desenvolvimento de programa livre automático para a determinação de esforços solicitantes, deslocamentos e armadura de pavimentos em concreto armado usando a analogia de grelha não linear**. 2006. 62 p. Iniciação científica – Universidade Federal de São Carlos São Carlos.

CUBAS, M. V. L. T. **Análise numérica do comportamento de pavimentos constituídos de lajes lisas de concreto protendido**. 2015. 182 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

EMERICK, A. A. **Projeto e Execução de Lajes Protendidas**. 1. ed. Brasília: Interciência, 2005. 192 p.

EUROCODE 2. **Design of concrete structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**. European Prestandard EN 1992-1-1:2010. European Committee for Standardization. Brussels, 2010, 259 p.

GOLDSTEIN, A. E. et al. **Design of prestressed Concrete flat slabs**. The South African Institution of Civil Engineering, South African, 1991. 37 p.

HAMBLY, E. C. **Bridge Deck Behaviour**. 2ª Ed. London: Chapman and Hall, 1991. 313 p.

ISHITANI, H.; LEOPOLDO, R.; FRANÇA, S. **Concreto protendido: fundamentos iniciais**. 2002. 30 p. Notas de aula – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

KOERICH, R. B. **Estudo de estruturas protendidas hiperestáticas com a representação da protensão por carregamentos equivalentes**. 2004. 213 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal de Rio Grande do Sul.

LAZZARI, B. M. **Análise por elementos finitos de peças de concreto armado e protendido sob estados planos de tensão**. 2015. 208 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

LEAL, U. **Projetos: Estruturas**. Revista Técnica. São Paulo: PINI, Ed. 87, 2004. Disponível em <<http://techne.pini.com.br/engenharia-civil/87/artigo287322-1.aspx>>. Acesso em 30 novembro 2016.

LIN, T. Y. **Load-balancing method for design and analysis of prestressed concrete structures**. ACI Journal, Proceedings, v. 60, 1963. 719-742 p.

LIVIN, T. G. **Avaliação de conjuntos de testes funcionais no contexto de programas orientados a objetos e programas orientados a aspectos**. 2014. 116 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Software) – Universidade Federal de São Carlos.

MARIANE, A. **Custo comparado: laje maciça vigada x laje plana protendida**. Revista Construção. São Paulo: PINI, Ed. 182, 2016. Disponível em <<http://construcaomercado.pini.com.br/negocios-incorporacao-construcao/182/custo-comparado-laje-macica-vigada-x-laje-plana-protendida-372384-1.aspx>>. Acesso em 30 novembro 2016.

MELLO, A. L. V. **Cálculo de lajes lisas com protensão parcial e limitada**. 2005. 138 p. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos.

MILANI, A. C. **Análise de lajes planas protendidas pelo método dos elementos finitos**. 2006. 145 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

MIZUMOTO, C.; MARIN, M. C.; SILVA, M. C. **Aspectos técnicos referente a sistemática de controle e produção da laje alveolar de concreto pré-fabricado**. 3º Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto Pré-Moldado, 2013. 16 p.

OLIVEIRA, T. L. **Desenvolvimento de uma plataforma computacional gráfica de código aberto para estudos de sistema de potência**. 2016. 177 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Uberlândia.

PARK, R.; GAMBLE, W. L. **Reinforced concrete slab**. New York: John Wiley & Sons. 1980

PEDROZO, D. G. E. **Estudo de modelos para projeto de lajes lisas protendidas**. 2008. 145 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal de Santa Catarina.

RUDLOFF. **Concreto protendido**: catálogo. São Paulo, 2011. 31p. Disponível em <<http://www.rudloff.com.br/concreto-protendido/catalogo-tela.php>>. Acesso em 14 novembro 2016.

RUDLOFF. **Lajes planas protendidas**. 3ª Ed. São Paulo, 2009. 30p. Disponível em <[http://www.rudloff.com.br/downloads/publicacao1\\_lajes\\_planas\\_protendidas.pdf](http://www.rudloff.com.br/downloads/publicacao1_lajes_planas_protendidas.pdf)>. Acesso em 14 novembro 2016.

RUDLOFF. **Perdas da força de protensão**. 2ª Ed. São Paulo, 1998. 17p. Disponível em <[http://www.rudloff.com.br/downloads/publicacao2\\_perdas\\_da\\_forca\\_de\\_protensao.pdf](http://www.rudloff.com.br/downloads/publicacao2_perdas_da_forca_de_protensao.pdf)>. Acesso em 23 junho 2017.

SOARES, S. J. D. L. **Avaliação in loco das perdas de protensão de cordoalhas engraxadas em lajes planas**. 2008. 75 p. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de Minas Gerais.

SOUZA, J. P. V. L.; MACEDO, M. G. G. **Lajes lisas em concreto protendido**: análise e dimensionamento estrutural. 2016. 83 p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás.

SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A.J.P. **Lajes em Concreto Armado e Protendido**. 2ª Ed. Rio de Janeiro, 1998.

TEIXEIRA, A. O. F. **Cálculo automático de lajes protendidas simuladas como grelha utilizando o método dos elementos finitos.** 1998. 162 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Estadual de Campinas.