Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática
Programa de Pós Graduação em Ciências Exatas (PPGECE)

O uso de questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas como ferramenta para o desenvolvimento de competências

Elias Campos da Silva

Orientadora: *Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Grazielle Feliciani Barbosa*

São Carlos, 12 de fevereiro de 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Elias Campos da Silva, realizada em 18/12/2018:

Grazielle F. Barbosa

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCar

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
USP

Profa. Dra. Selma Helena de Jesus Nicola
UFSCar

O uso de questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas como ferramenta para o desenvolvimento de competências

Autor: *Elias Campos da Silva*

Orientadora: *Prof.ª Dr.ª Grazielle Feliciani Barbosa*

Disciplina: Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática

Curso: Programa de Pós Graduação em Ciências Exatas

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 12 de fevereiro de 2019.

Elias Campos da Silva	Grazielle Feliciani Barbosa

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela força e saúde que Ele tem dado a mim para concluir esta Dissertação de Mestrado. Agradeço especialmente a Professora Orientadora Grazielle Feliciani Barbosa pela sua ajuda, atenção e paciência nos nossos encontros semanais. Agradeço também, aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, que tanto me ajudaram ao longo desses anos na construção do meu conhecimento matemático, tanto na graduação quanto na pós graduação. Agradeço também, aos alunos do nono ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira, de Araraquara (SP), turma de 2017, pelo comprometimento deles para com esse projeto. Agradeço a minha família, esposa Gabriela e meus dois filhos Pedro e Rafael pela paciência, incentivo e inspiração, para concluir tal dissertação.

Resumo

Nesta dissertação estudaremos alguns problemas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas, e analisaremos o desempenho dos alunos da Escola Estadual João Batista de Oliveira, em Araraquara (SP), mediante algumas atividades propostas, envolvendo tais questões. O desenvolvimento deste trabalho se deu pela aplicação de algumas atividades aos alunos de forma individual e em grupo, de forma a avaliar quais as maiores dificuldades que tais alunos tiveram em questões das Olimpíadas de Matemática. Este trabalho visou analisar a evolução e a motivação dos alunos a cada desafio proposto de forma a mostrar que eles tem plenas condições de resolver tais questões. Por conseguinte, a proposta desta dissertação é encontrar novas formas de preparar e avaliar os alunos das escolas públicas para as Olimpíadas Brasileiras de Matemática e buscar novas estratégias no Ensino da Matemática, de forma a mostrar aos alunos que é possível prepará-los para essa prova de alto nível, e fazê-los acreditar que com dedicação e estudo podemos buscar êxito nas avaliações da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Nesta Dissertação de Mestrado do Programa de Pós Graduação em Ciências Exatas (PPGECE), analisaremos o desempenho dos alunos do nono ano da escola pública João Batista de Oliveira, em Araraquara, mediante a resolução de alguns problemas relativos à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. De início será apresentado o embasamento teórico-pedagógico que foi utilizado nesse referido trabalho, ou seja, as metodologias usadas, que são a aprendizagem significativa e a teoria da assimilação, a engenharia didática e a resoluções de problemas, além disso, será apresentado o propósito com o qual foi criada a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e a sua importância no contexto da Educação Matemática no Brasil. Também nesse trabalho, veremos como foi articulada essa proposta, que é de analisar habilidades presentes ou ausentes em tais alunos de modo a buscar alternativas para prepara-los para essa avaliação, que exige uma grande dedicação por parte dos envolvidos, alunos, professor e escola. A princípio foi aplicada uma atividade diagnóstica sobre conteúdos necessários para que tais alunos tivessem condições mínimas de resolver uma questão de nível médio da OBMEP, após tal atividade foi aplicada mais uma atividade diagnóstica, com nível de complexidade um pouco mais elevado, de forma que pudéssemos avaliar se houve algum tipo de evolução dessa turma de nono ano. Ao final foi aplicada uma avaliação com nível mais elevado e ao término da aplicação de cada atividade e da avaliação eu ,como professor dessa turma, resolvia as questões na lousa para que os alunos pudessem avaliar quais os critérios necessários em cada questão, e indicava quais as habilidades a serem desenvolvidas caso alguma questão similar aparecesse em provas futuras, quando algum aluno respondia a questão de forma correta eu pedia o auxílio desse aluno para explicar a classe como aquele problema foi pensado e resolvido pelo mesmo, o que colaborou ainda mais para o desenvolvimento desse trabalho. Assim, aos poucos fui percebendo o envolvimento dos alunos nessas atividades e percebi que a motivação foi aumentando a cada atividade e quando era dada a devolutiva dessas questões os alunos viam que eles tinham condições de resolve-las caso tivessem se dedicado um pouco mais.

1.1 Metodologias empregadas nessa Dissertação

Nesta seção serão apresentadas as metodologias utilizadas como base para o estudo e da aplicação dessa dissertação, tais metodologias visam sistematizar, organizar e servir como parâmetros para a aplicação desse trabalho que tem como objetivo avaliar as facilidades e dificuldades dos alunos da rede pública de ensino em lidar com o tema “ Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas”.

1.1.1 Aprendizagem significativa ou teoria da assimilação

É uma teoria que procura explicar os mecanismos internos que ocorrem n mente humana com relação ao aprendizado e à estruturação do conhecimento. A metodologia de ensino da aprendizagem significativa ou a teoria da assimilação criada por David Paul Ausubel em 1982, diz que a aprendizagem do aluno se torna mais significativa, a medida que o aluno associa o novo conceito aprendido com um conhecimento prévio, mediante uma situação similar, ou seja, deve-se atribuir significado ao novo conceito a partir de um conhecimento prévio do aluno, senão o novo conceito aprendido se torna algo mecânico e repetitivo e dessa forma o aprendizado não possui significado para o aluno, segundo [1].

> “[...] Neste processo a nova informação interage em comum à estrutura de conhecimento específico, que Ausubel chama de conceito “subsunçor”. Esta é uma palavra que tenta traduzir a inglesa “subsumer”, que se refere ao termo subordinador, quando o conhecimento prévio mais abrangente auxilia na aquisição de novos conhecimentos. Quando o conteúdo escolar a ser aprendido não consegue ligar-se a algo já conhecido, ocorre o que Ausubel chama de aprendizagem mecânica, ou seja, quando as novas informações são aprendidas sem interagir com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Assim, a pessoa decora fórmulas, leis, mas esquece após a avaliação”. Revista. PEC, Curitiba, v.2, n.1, pg.37 – 42, jul. 2001-jul. 2002 [2]

Além do mais, segundo Ausubel o aprendizado tem que possuir dois aspectos, lógico e psicológico. O primeiro se dá pelo fato de que o aprendizado deve fazer sentido ao aluno, ou seja, ser de forma lógica e natural e o segundo o fator psicológico é dado mediante as experiências do aluno, do contrário o aprendizado não terá significado.
O autor propõe a forma como é produzida a aprendizagem escolar Ausubel distingue em dois eixos de organização, as classes diferentes de aprendizagem.

1- Aprendizagem significativa: Gira em torno da concepção da aprendizagem por descoberta receptiva. Esse tipo de aprendizagem se dá pela forma que é recebido o novo conceito pelo aluno, e quanto mais o novo conhecimento se dá pela descoberta, melhor será a aprendizagem desse conceito significativo. Ausubel concentra sua pesquisa na sala de aula.

2- Aprendizagem memorística: Esse tipo de aprendizagem possui um misto de duas situações, por um lado a aprendizagem significativa e por outro, a aprendizagem repetitiva. Nesse caso a distinção se dá pelo aluno, segundo a necessidade do conceito a ser aprendido e ao conhecimento prévio do aluno.

O processo de assimilação de novos conceitos, segundo Novak reforça que o conceito inclusor, citado por Ausubel em sua teoria,

> "[...] Não é um mata moscas que tem como propósito aderir uma informação, mas sim o propósito de associar a nova informação a outra já existente e compreendida pelo aluno, para que o novo conceito tenha significado". Novak (1998, pg 84). [3]

Nesse trabalho houve a preocupação de interagir com os alunos e fazer com que eles buscassem soluções para determinados problemas, mediante seus conhecimentos prévios de vida pessoal e de vida escolar, as intervenções feitas pelo professor se davam apenas quando a lógica de raciocínio tomava rumos que iam além das necessidades dos problemas propostos, mas sem impor diretamente uma solução para o problema em questão.

1.1.2 Engenharia didática

É uma metodologia de pesquisa e teoria educacional que foi criada na área de Matemática, na França, na década de 80, tem como base o trabalho do engenheiro, cujo intuito se baseia no enfrentamento de problemas mediante o conhecimento básico prévio e o cientifico (mais avançado) Vera Clotilde Garcia Carneiro em seu trabalho "Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática".

> "[...] A origem desta teoria está na preocupação com uma certa "ideologia da inovação" presente no âmbito educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino. Nesta perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da realização didática na sala de aula como prática de investigação." Carneiro, V.C.G, Zetetiké, Campinas-UNICAMP, (v. 13, n. 23, 2005, p.85 – 118) [4]

Uma Engenharia Didática, em Artigue (1996) [5], inclui quatro fases:

a) Análises prévias.

b) Concepção e análise a partir de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na aula de Matemática.

c) Implementação da experiência.

d) Análise e validação da experiência.

Obviamente, durante o processo de aplicação desse projeto poderá ocorrer mudanças, mas é importante que se crie um esquema para que o trabalho seja realizado com êxito, para isso é necessário que os problemas sejam pensados de forma coerente e também que seja conhecido o público alvo, os alunos, que participarão dessa atividade.
Assim, nessa dissertação foi privilegiado a opinião dos alunos envolvidos mediante seus pensamentos e seus conhecimentos prévios, seja no âmbito de suas experiências de vida, como também no conhecimento adquirido dentro do âmbito escolar, entretanto, quando necessário houve algumas intervenções do professor, para que os alunos pudessem associar o conhecimento prático com o conhecimento científico desenvolvido em sala de aula da referida disciplina.

1.1.3 Resoluções de Problemas

O ensino da Matemática até o final do século XIX e início do século XX dava-se apenas por meio da repetição, memorização e treinamento e só em meados do século XX é que o ensino da Matemática começou a privilegiar o pensamento e a compreensão, ou seja, a partir desse momento é que foi dada a liberdade para que os alunos expusessem a sua forma de pensar e buscassem autonomia nas resoluções de problemas matemáticos. Começa-se a partir de então, a falar em resolução dos problemas como metodologia de ensino .
Neste trabalho, foi utilizado um método proposto por Polya (1978) [6] para a resolução de problemas, pois foi dado toda a liberdade para que os alunos pensassem, refletissem, trocassem informações sobre os problemas e discutissem os diferentes processos de resolução dos problemas da OBMEP e, através de discussões sobre tais problemas, chegassem a algum senso comum sobre os resultados obtidos. Durante a leitura desse trabalho será verificado que os alunos em questão tiveram toda liberdade para dar suas opiniões e dividir com os colegas de classe e o professor a linha de pensamento sobre determinados problemas matemáticos.
Em seu livro, A Arte de Resolver Problemas, Polya (1978), o autor propõe o seu método dividindo-o em quatro momentos:

1- Compreender o problema.

2- Elaborar uma estratégia.

3- Execução de tal estratégia.

4- Revisão da solução.

Nessa metodologia proposta por Polya é importante que, após a sua aplicação, haja uma reflexão bem detalhada e se no decorrer do processo de aplicação houver a necessidade de realizar correções, que assim seja feito, mas é importante enfatizar que nesse método é importante que o professor seja mediador das discussões em torno dos problemas matemáticos e que os alunos devam se sentir a vontade ao expor a sua forma de pensar o problema.
Em sua Metodologia Polya já afirmava que:

> "[. . .] Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. [...] se, você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom "resolvedor de problemas" tem que resolver problemas." Polya(1978, pg 65).

O quesito compreender o problema, se dá pelo fato do aluno entender realmente de que se trata o problema do ponto de vista interpretativo e saber quais variáveis possui, como por exemplo as incógnitas, os dados do problema e a condicionante. Agora, na questão da elaboração de uma estratégia para resolver o problema, deve-se pensar em um problema semelhante de menor complexidade, ou em algum problema similar já resolvido, assim fica mais fácil de chegar no produto final do problema, que é a sua solução. Para executar a estratégia e chegar na resolução deve-se ter plena certeza que os dois passos anteriores foram bem executados, que nesse caso é a compreensão do problema e elaboração de uma estratégia. Por último, a revisão da solução consiste em verificar se o problema de fato foi resolvido. Neste caso é importante que seja verificado todos os argumentos usados na solução de tal problema, se essa estratégia pode ser aplicada num problema similar e se não há contradições.
Essa metodologia tem como intuito instigar os alunos a pensarem matematicamente e desenvolver o raciocínio lógico e abstrato, além de desenvolver no aluno a prática de resolução de problemas em qualquer área de atuação. Esse propósito deve ser exposto aos alunos para que compreendam a importância da resolução de problemas, e que seja evidenciado que em vários momentos na vida pessoal, escolar, acadêmica e profissional é exigido que o indivíduo tenha aptidão na resoluções de problemas de várias naturezas e não apenas na área da Matemática.

1.2 Trabalhos correlatos, já realizados, sobre Olimpíadas de Matemática

Nesta seção será abordada de modo breve algumas pesquisas correlatas sobre o tema Olimpíadas de Matemática, com o intuito de traçar um paralelo entre pesquisas já realizadas

e a presente dissertação.
O primeiro trabalho analisado é o de Vívia Maria Rodrigues Lima e Antônio Francisco Ramos, este artigo, escrito em 2016 [7], cujo tema é “A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, segundo a Ótica dos Professores de Água Branca (PI)”. Nesse Trabalho, realizado no Instituto Federal do Piauí, foi realizada uma pesquisa qualitativa com dez professores, em cinco escolas participantes da OBMEP, os quais passaram por uma entrevista gravada, respondendo a um questionário. Esta pesquisa mostra que a OBMEP influencia de forma positiva o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois desperta no aluno o interesse pela disciplina, mediante os desafios propostos por essa avaliação. Mas, gera preocupação e questionamentos, enquanto a forma de preparação dos alunos. A referida pesquisa fez com que os pesquisadores pudessem avaliar sobre as reflexões dos professores sobre os desafios enfrentados e as dificuldades dos alunos, em relação aos conteúdos de Matemática, e as contribuições que a metodologia de resolução de problemas trouxe para os alunos e docentes na aprendizagem dessa disciplina, pois segundo Vívia, M.R.P e Antônio, F.R,

> “[...] percebe-se que a OBMEP é uma política pública no campo da educação que tem contribuído para mudanças nas estratégias de Ensino de Matemática nas escolas públicas brasileiras, na medida em que se utiliza da resolução de problemas como estratégia de avaliação dos conhecimentos em Matemática inclusive de outras áreas do conhecimento. Cabe agora verificar como essa realidade afeta às escolas do Município de Água Branca. Para isso, é necessário delinear o caminho percorrido para entender as implicações desse processo na realidade em comento. ”Vívia, M.R.P e Antônio, F.R (2016, pag.10).

Logo, nesse artigo foi verificado que na cidade de Água Branca no Piauí, a preparação para a OBMEP gerou efeitos muito positivos, como por exemplo, a mudança da forma como os professores preparam suas aulas, e a forma como os alunos vêm a Olimpíada de Matemática, e também, houve sensível diminuição no preconceito que os alunos tinham com respeito a prova da OBMEP, pois eles pensavam que a OBMEP era uma prova muito difícil e isso já fazia com que eles se sentissem desestimulados.
Outra referência para realizar esse trabalho, foi a dissertação de mestrado de Washington José Santos Alves, cujo tema é “O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública”. Nesse trabalho, que foi escrito em 2010 [8] pelo mestrando da PUC(SP), o autor pesquisou a falta de motivação dos alunos em participar da OBMEP, e verificou que em São Paulo muitas escolas não incentivam os alunos a participarem dessa Olimpíada e que há um certo descaso, ao ponto dos alunos nem serem informados sobre a importância da preparação, realização e premiação gerada pelo bom desempenho nessa Olimpíada. Nesse trabalho foi proposto um questionário para avaliar, dentre outras coisas, a participação dos alunos na OBMEP.

A pesquisa citada mostra que na escola pesquisada, Escola Estadual Padre Tiago Alberione, em São Paulo capital, dos 199 estudantes matriculados na 3ª série do Ensino Médio da escola, apenas 117 responderam o questionário proposto, onde 85 afirmam ter participado de pelo menos uma prova da OBMEP, o que chama atenção é que dos pesquisados, apenas 20 estudantes afirmaram participar por três vezes ou mais da Olimpíada, sendo que tiveram cinco oportunidades para participar da prova citada. Outro dado pertinente dessa pesquisa é o uso do caderno de banco de questões da OBMEP, que é fornecido para as escolas públicas visando a preparação dos alunos para essa prova, nesse contexto é mostrado que poucos alunos têm acesso a tal material, que é norteador dos conteúdos abordados na Olimpíada. Muitos alunos não têm acesso a esse material pelo fato da falta de preocupação da escola e do professor em prepará-los para essa prova. Esse trabalho discute tal situação e busca alternativas para a solução desse problema, orientando os professores a usar o caderno de banco de questões da OBMEP para que haja uma potencialização no desempenho do aluno nessa prova e também no quesito motivação dos alunos, mediante as informações pertinentes orientadas para os alunos, que nesse caso depende dos docentes envolvidos, da direção e coordenação da escola, pois segundo Alves, W.J.S,

> “[...] Neste caso, que o aluno demonstra interesse em participar da competição,mas a falta de preparação e estímulo da Escola provoca a ausência do aluno na Olimpíada e, consequentemente o desinteresse pela participação. O que chama atenção é que o argumento utilizado pelos 65 estudantes coincide com um dos objetivos propostos pela OBMEP que é contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica. Grande parte dos discursos apresentados pelos alunos envolve aperfeiçoamento da Matemática, como por exemplo: “os trabalhos poderiam contribuir para melhorar meu conhecimento”, “as tarefas ajudariam em meu aprendizado”, “aprimoram o conhecimento de uma matéria tão complexa, mostrando também a realidade dos vestibulares que seguem o mesmo padrão.”Alves, W.J.S (2010, pg 26, 27).

Por conseguinte, avalia-se que o preparo para a prova da OBMEP tem que ser articulada e bem estruturada, tendo como base a informação, a preparação e a motivação, esta última tanto na participação quanto na aquisição de conhecimento matemático, que pode melhorar o desempenho do aluno em avaliações futuras.

1.3 A importância da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas(OBMEP) foi criada em 2005 pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), juntamente com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Ministério da Educação e Cultura (MEC) e pelo Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), com intuito de estimular os alunos do ensino básico, sexto ano do ensino fundamental dois ao terceiro ano do ensino médio, a se interessarem por Matemática e, além disso, visa buscar talentos na Matemática. A cada ano, desde sua criação, a OBMEP tem batido recordes de participantes, isso se deve pela propaganda em larga escala, tanto pelos meios de comunicação, internet e televisão, quanto pelas escolas, que vem a cada ano motivando seus alunos a participarem.

A OBMEP está dividida em três níveis; 1º nível: sexto e sétimo anos, 2º nível: oitavo e nono anos, e o 3º nível: ensino médio. A OBMEP tem premiações vão de menção honrosa à medalhas de ouro, prata e bronze, aos melhores colocados. [9]

O Programa de Iniciação Científica Jr.(PIC) contemplará com a oportunidade de participar deste programa, seis mil e quinhentos alunos de Escolas Públicas premiados com medalhas na OBMEP 2018 e matriculados em escolas públicas em 2019, a participação do Programa de Iniciação Científica Júnior, PIC Jr/OBMEP implicará na obtenção de uma bolsa de estudos pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) cuja estrutura e planejamento do programa serão definidos e divulgados no início de 2019.

Outro ganho da OBMEP é a criação do Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional(Profmat), que tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência , que implica um melhor preparo dos alunos para a OBMEP. Esse Mestrado foi criado pela Sociedade Brasileira da Matemática (SBM) juntamente com o Ministério da Educação e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que contempla os professores, aprovados no processo seletivo, com uma bolsa para custear seus estudos e dar suporte para que haja diminuição de carga horário para que o professor possa se dedicar a essa pós graduação. Outro fator importante é que o pré requisito para que o professor da rede pública de ensino esteja em tal programa é a vinculação desse profissional à rede pública e a garantia que ele permanecerá na rede pelo menos cinco anos após a sua formação no Profmat. Os órgãos responsáveis pela criação da OBMEP, a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), é presidida e dirigido, respectivamente, por Paolo Piccione (USP) e Marcelo Viana (IMPA). Tais instituições são incentivadoras da Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas, pois ambos já relataram que existem muitas "mentes geniais" por aí no nosso país que devem ser encontradas e estimuladas, além do mais ambos vem que o Ensino da Matemática no Brasil deve ser estimulado através de novos mecanismos de ensino. O Ensino da Matemática no Brasil, em todos os âmbitos, esteve em evidência nos últimos quatro anos, após a conquista

da medalha Fields de Matemática pelo brasileiro Arthur Ávila, em 2014. Ávila que foi medalhista de Olimpíada de Matemática no ensino básico, também é entusiasta desse tipo de modalidade, mas infelizmente muitos alunos das escolas públicas não o conhecem, e nem ao menos sabe do prêmio da medalha Fields e sua importância para Matemática.
Portanto, vemos o quão importante é a OBMEP para o Ensino da Matemática no Brasil, pois essa Olimpíada promove não só a busca por talentos na Matemática, mas também, o estímulo no ensino e aprendizagem da Matemática, pois muitos alunos passam a gostar mais de Matemática, quando tal disciplina traz uma abordagem diferente e com significado, atitude essa que a OBMEP busca através de seus problemas.

1.4 Apresentação da Escola e o perfil dos alunos

O campo onde esse trabalho foi realizado é a Escola Estadual João Batista de Oliveira, em Araraquara, no bairro da Santa Angelina, região próxima ao centro da cidade. Essa escola recebe alunos tanto da região central, quanto da periferia. A classe escolhida para o desenvolvimento desse trabalho, pautado em questões da OBMEP, é o nono ano A do ensino fundamental 2. Essa escola tem 12 turmas de manhã do ensino médio, no período da tarde há quatro turmas de ensino fundamental, três turmas de Ensino de Jovens e Adultos (EJA), primeiro, segundo e terceiro anos e a noite são quatro turmas de EJA e três de ensino médio regular, um primeiro, um segundo e um terceiro anos. As instalações possuem poucos recursos, basicamente só giz e lousa e muitas vezes, quando vamos usar a sala de informática muitos computadores estão quebrados e, em outros casos, o data-show não funciona por falta de manutenção.

Como pontos positivos destacamos o corpo docente de ótima qualidade, o respaldo que o núcleo pedagógico dá ao professor para aplicar atividades aos alunos e o comprometimento dos alunos.

A turma do nono ano A da escola João Batista de Oliveira, conhecida como JBO, possui 28 alunos, é muito dedicada e possui comprometimento com a escola, com os professores e com o próprio conhecimento que lhes é oferecido. Essa turma possui quatro alunos que tiveram acesso aos Instituto Federal do Estado São Paulo, da cidade de Araraquara, para o ano de 2018. Essa turma também teve um ótimo desempenho nas avaliações durante o ano de 2017, pois muitos deles veem os estudos como fator determinante ao acesso, tanto ao Instituto Federal quanto ao Centro Paula Souza (Industrial).

1.5 O projeto didático

O projeto aplicado nessa dissertação aborda o tema da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP), ou seja, sobre a análise da relevância dessa avaliação para o ensino básico e quais as habilidades necessárias para que o aluno da escola pública possa realizar tal avaliação. Além disso, é uma forma de ampliar o conhecimento matemático dos alunos, pois o conhecimento exigido para que o aluno tenha êxito nesse tipo de avaliação deve ser algo que vai além daquilo que geralmente é trabalhado em sala de aula.

Esse projeto didático foi pensado focando na palavra chave "desafio", pois a importância dessa palavra na Matemática é o que leva o aluno a pesquisar e buscar desvendar aquele problema que lhe foi proposto. Na História da Matemática é conhecido que todas as descobertas nesse campo se deram mediante o fator curiosidade e pela busca de soluções de problemas, que aparentemente pareciam insolúveis. Nesse trabalho tivemos como objetivo a busca pelas soluções de problemas matemáticos mais complexos do que aqueles que geralmente alunos de nono ano veem. Buscamos também resgatar um pouco do fator "paciência", pois sabemos que lidamos com uma geração imediatista que busca a solução de problemas diversos de forma rápida e, de preferência já pronta trazida pelo professor.

A aplicação desse trabalho se deu em três etapas. A primeira foi a preparação prévia dos alunos sem citar que se tratava de uma atividade voltada para a Olimpíada Brasileira de Matemática, pedi aos alunos que revisassem todo conteúdo aprendido durante o ano. Para a primeira atividade com quatro questões autorais avaliei se os alunos haviam se preparado minimamente. Em uma aula posterior resolvi as questões dessa primeira atividade e percebi que mais da metade da sala havia, de fato, estudado e se comprometido com esta atividade. Na semana seguinte apliquei a segunda atividade, com quatro questões da OBMEP, de nível um pouco mais elevado, e percebi algumas dúvidas, em relação a essas questões, que posteriormente expliquei em sala de aula, com a ajuda de alguns alunos que se destacaram nessas atividades. A terceira e última atividade foi com cinco questões mais elaboradas da OBMEP, na qual fiquei surpreso com a evolução e desenvolvimento desses alunos do nono ano da escola João Batista de Oliveira.

Essas atividades avaliativas e diagnósticas foram aplicadas entre os meses de outubro e novembro de 2017, com ótima participação dos alunos, inclusive dos alunos com deficiência intelectual com o auxílio dos alunos com mais afinidade com a Matemática, o que me deixou surpreso, pois percebi que houve interesse em aprender Matemática e de participar dessa atividade. Como foi citado anteriormente, no início não disse aos alunos que se tratavam de atividades voltadas para a OBMEP, só após a aplicação da segunda atividade e na preparação para a terceira é que comentei com os alunos, e esses ficaram surpresos e disseram que se soubessem desse fato, logo no início, talvez não teriam o mesmo desempenho, pelo fato de saberem que as provas da OBMEP são mais complexas que uma prova Brasil ou a Prova do Saresp. Dessa forma finalizamos as atividades com saldo positivo, quando os alunos perceberam que, com uma preparação correta e dedicação, eles podem obter bons resultados na prova da OBMEP.

Capítulo 2

Aplicação da Primeira Atividade Diagnóstica sobre questões da OBMEP

2.1 Aplicação da Atividade 1

Iniciaremos a análise das atividades aplicadas aos alunos do nono ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira. A partir da primeira atividade foi individual e teve como intuito avaliar o desempenho dos alunos sobre alguns conteúdos básicos, para a aplicação das atividades sequenciais que visavam a análise sobre as condições dos alunos da escola pública em ter êxito na OBMEP. A escolha foi sobre alguns temas recorrentes ensinados no nono ano: potenciação, radiciação, teorema de Pitágoras, conjuntos numéricos e equações polinomiais do segundo grau.

A princípio não foi dito aos alunos qual era a motivação dessas atividades, apenas que eram atividades que visavam avaliar o desempenho deles perante os conteúdos ensinados até o momento. Houve cooperação plena desses alunos, que participaram com seriedade. Alguns estavam se preparando para as provas de seleção do Centro Paula Souza (Industrial) e para o processo seletivo do Instituto Federal do Estado de São Paulo da cidade de Araraquara e viram, nessa atividade, um meio de se auto avaliarem. Os demais alunos cooperaram, pois queriam ajudar os colegas que estavam se preparando para os processos seletivos. Também tive uma conversa com eles sobre a importância de avaliarmos as habilidades matemáticas que eles tinham dificuldades. Voltando a primeira avaliação, foi trabalhado folhas com atividades que abordam quatro problemas cujos conteúdos são a base para o nono ano e para o conhecimento de um aluno desse ano, para que ele possa ter condições mínimas de realizar uma prova com um significativo grau de exigência. Tal folha de atividades foi elaborada como exposto abaixo:

9º Ano A da Escola Estadual João Batista de Oliveira
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE MATEMÁTICA

Professor: Elias Campos da Silva
Aluno:
Tema: Potenciação, radiciação, teorema de Pitágoras e equações polinomiais do segundo grau

1) *Um campo de futebol retangular tem dimensões* 80 *m por* 120 *m. Um jogador quer atravessar esse campo indo de um vértice ao vértice oposto. Pergunta-se:*

a) *A menor distância que esse jogador deverá percorrer é:*

b) *Essa distância é racional, ou irracional?*

2) *João Henrique quer guardar certas quantias, em reais, ele estipulou uma forma de guardar esse dinheiro. A cada mês ele guardará certa quantia e no mês seguinte o valor guardado será o dobro do mês anterior. Pergunta-se:*

a) *Se ele começar guardando x reais no primeiro mês, qual será o montante que ele terá guardado após* 1 *ano?*

b) *Sendo $x = 1$ real, de quanto será o valor obtido após* 1 *ano.*

3) *Um retângulo tem área igual a $x^2 + 3x$. Responda:*

a) *Qual é a área se, x for igual a* 10*?*

b) *Qual é o valor de x se, a área for $40m^2$?*

4) *Camila, aluna do 9º ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira perguntou ao seu professor João de matemática: "professor qual é a sua idade?". Ele respondeu: "A minha idade é a solução da expressão":*

$$\sqrt{10 \cdot (\sqrt{250} + \sqrt{360} - \sqrt{160} - \sqrt{40})^2}$$

Camila resolveu a expressão de forma correta obtendo a idade do professor João que é:

Veja a referência [10]

A Primeira questão disserta sobre noções básicas de geometria plana e teorema de

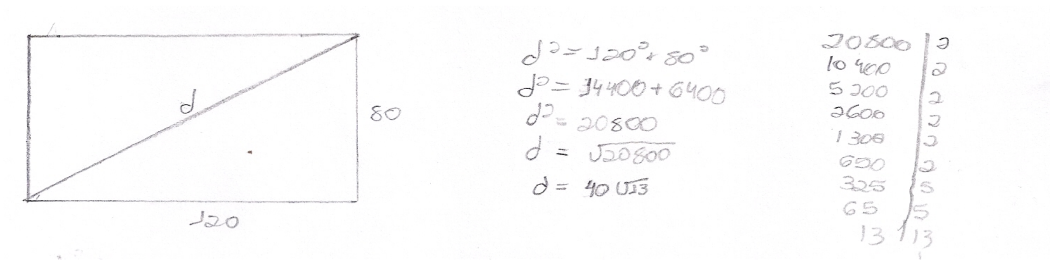


Figura 2.1: Resolução do problema 1 da primeira atividade diagnóstica, segundo o aluno VV.

Pitágoras. No item A) a maioria dos alunos teve facilidade de identificar que essa distância era o comprimento da diagonal do campo de futebol de dimensões 80 metros por 120 metros. A maior dificuldade se deu no cálculo desse valor, pois caía na questão de decompor em um número de fatores primos para decidir se o número era racional ou irracional. Alguns alunos lembraram da decomposição em fatores primos, como mostrado na Figura 2.1.

Em outros casos os alunos pararam quando obtinham $d^2 = 80^2 + 120^2 = 20800$, o quê mostra a grande deficiência que alguns alunos possuem a resolverem raízes quadradas de números grandes, como na Figura 2.2. Em determinado momento disse aos alunos "lembrem-se da decomposição do radicando". Alguns prontamente lembraram, mas a maioria não, embora essa é uma técnica que usamos muitas vezes em sala de aula. Como de praxe, os alunos pediram que eu desse um exemplo, mas eu disse que era para resolverem e que eles sabiam que, na semana seguinte, eu resolveria o problema para verem o quanto era simples.

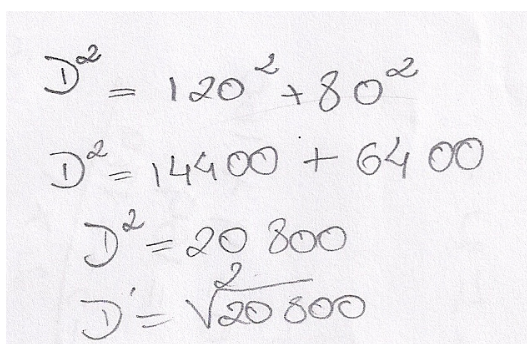


Figura 2.2: O caso da aluna JM que não conseguiu simplificar a raiz do problema 1 a).

A Figura 2.3 a seguir mostra um erro recorrente, relativo a questão 1 - a), esse caso, a aluna MJ aplicou o teorema de Pitágoras, mas não sabia o que fazer para obter o valor da diagonal. A aluna até fatorou o valor 20800, mas não soube expressar a resposta de forma simplificada e nem na forma de raiz. Isso nos mostra o quanto alguns alunos muitas vezes se apropriam das fórmulas, mas não sabem o real sentido de usá-las. No caso de tal teorema procurei explicar aos alunos usando abordagem da História da Matemática e a necessidade de encontrar o valor das diagonais do quadrado ou do retângulo e além disso discutimos os casos que as raízes não são números racionais.

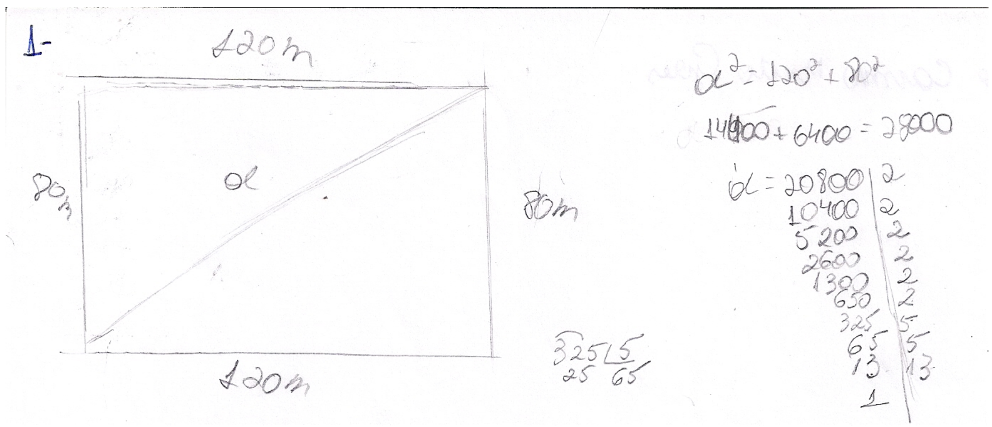


Figura 2.3: O caso da aluna MJ que não conseguiu entender o real sentido do teorema de Pitágoras no problema 1 a).

O segundo item da questão 1 pede para que o aluno diga se a raiz que representa a diagonal do campo é racional ou irracional. Nesse item, observamos que os alunos não tiveram dificuldades, pois a maioria acertou dizendo que era irracional. Aqueles que acertaram o item b) da primeira questão fizeram basicamente de duas formas distintas: a primeira foi verificar que $40\sqrt{13}$ é irracional, pelo fato de $\sqrt{13}$ ser irracional e o produto de um número inteiro por um irracional resulta num número irracional e a segunda foi no teste, pois eles constataram que a raiz que mais se aproximava de 20800 era 144 por tentativa e erro e os alunos demoraram muito para chegar nessa constatação. No caso dos alunos que não chegaram no resultado do item a) apenas chutaram uma das duas opções.
A questão 2 dessa atividade versa sobre as sequências numéricas usando potência. Nessa questão, o intuito era que o aluno identificasse a lei de formação da sequências, ou seja, era esperado que o aluno construísse a sequencia x, $2x$, $4x$, ..., $2048x$ e que, ao final, chegasse que, no mês t o valor seria $2^{t-1}x$, o que foi constatado por apenas três alunos. O segundo passo, que seria a soma dos termos da sequência, apenas fazemos uma ressalva sobre o fato deles terem dúvida relativa à palavra montante, o que prontamente eu lhes disse que era a soma dos valores guardados de todos os meses. Esse questão avalio que a maioria dos alunos não tiveram dificuldades, como mostra as Figura 2.4 a seguir.

O item b) da questão 2 foi relativamente tranquilo, pois os alunos que tinham resolvido o item anterior observaram que era só substituir o x por 1.

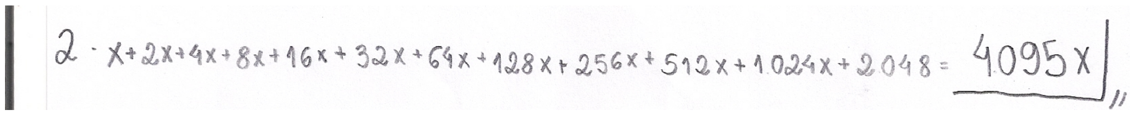

$2 \cdot x+2x+4x+8x+16x+32x+64x+128x+256x+512x+1.024x+2.048 = \underline{4095x}$

Figura 2.4: Resolução da questão 2 a) da atividade diagnóstica.

Agora, vamos a abordagem da questão 3 que colocava em discussão um retângulo cuja área era x^2+3x. No item a) era perguntado o valor da área para o caso $x = 10$. Observemos que a maioria acertou essa questão, pois bastava substituir o valor de x por 10 e obter a área que era 130.

No item b) era perguntado qual valor de x caso a área fosse 40. Observamos que a questão se refere a resolução de uma equação polinomial do 2º grau. Eu fiz questão de ler para se sentissem mais seguros em relação a parte interpretativa. O resultado foi positivo, pois alguns alunos de imediato perceberam o tema citado anteriormente, outros sabiam do que se tratava, mas não se lembravam de como resolver. Daí eu disse para que se lembrassem das fórmulas aprendidas naquele ano e alguém falou no fundo da sala "é a do Bhaskara". Dali em diante, a maioria que não sabia do que se tratava, mas lembraram da fórmula e foram, aos poucos, buscando a resolução desse problema. Mais de 80% da sala obteve êxito na solução do item 3 a). Entretanto, percebi que embora muitos soubessem resolver o item b), não sabiam responder a questão, apenas encontraram as duas soluções e, menos da metade dos alunos, assinalaram a alternativa $x = 5$ e excluíram a solução $x = -8$, pelo fato dela ser negativa. Mais adiante quando for comentado a devolutiva que fiz aos alunos sobre tais questões, será explicado o porque do x não poder assumir o valor -8.

A próxima abordagem que faremos diz respeito à questão 4 dessa atividade diagnóstica. Essa questão avalia a habilidade que o aluno deve ter em relação a aritmética, mais precisamente radiciação, tema esse que os alunos começam a desenvolver no 6º ano e dão continuidade até o 3º ano do ensino médio. Esse tema exige que o aluno entenda a definição da radiciação, bem como suas propriedades. É de fato um tema muito importante, pois vários conteúdos matemáticos fazem uso de tais propriedades e, os alunos que não se apropriam de tal conceito acabam por deixar de entender como se chega a determinados resultados importantes na Matemática. É sabido o quanto os alunos têm dificuldades com radiciação e devido a tal fato, é que tanto as Olimpíadas de Matemática, quanto os vestibulares pedem questões referentes a tal tema. Mediante isso, vi como coerente colocar uma questão com tal foco, para que os alunos pudessem posteriormente trabalhar com resultados expressos na forma de raízes com segurança.

Resumindo, a questão é sobre a aluna Camila que pergunta a seu professor de Matemática , João, qual a sua idade, e por sua vez, coloca aos alunos uma charada matemática dizendo

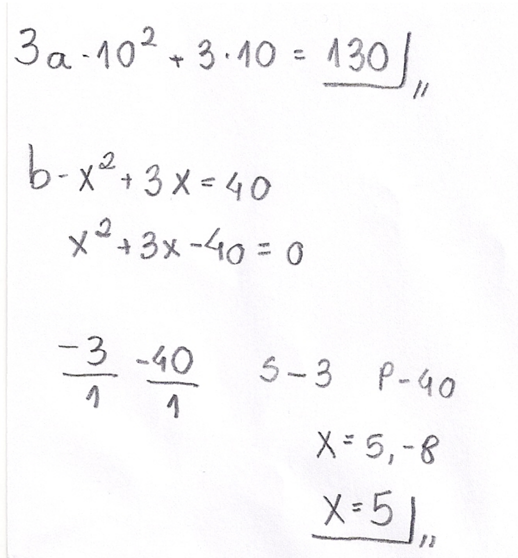


Figura 2.5: Resolução da questão 3 segundo o aluno KA do 9º ano A.

que a idade dele é a solução da expressão:

$$\sqrt{10 \cdot (\sqrt{250} + \sqrt{360} - \sqrt{160} - \sqrt{40})^2}.$$

Nessa questão ficou evidente o quanto os alunos se sentem inseguros com a “tal” da radiciação, pois muitos não sabiam nem por onde começar resolver, e quando davam o primeiro passo ficavam inseguros de dar continuidade na resolução. O erro mais frequente ocorre quando os alunos dividem o radicando por dois, nesse caso nos referimos as raízes quadradas. Esse procedimento foi verificado quando percorri a sala para observar os alunos nas resoluções dos problemas propostos. Quando percebi o procedimento equivocado, fiz um novo lembrete aos alunos sobre a definição da raiz quadrada e cúbica. Muitos alunos lembraram e fizeram as devidas correções, mas alguns pararam a resolução por insegurança, enquanto outros deram continuidade e resolveram o problema. Percebi que dois alunos tinham um excelente domínio em resolver questões de aritmética, mas me disseram que possuíam alguns problemas na interpretação dos enunciados. Cada fato ocorrido nesse dia foi anotado para que eu pudesse fazer os devidos comentários com a turma, de como melhorar as habilidades de interpretação de texto, aquisição de conceitos matemáticos e às técnicas de resoluções de problemas, e que essas mudanças seriam possíveis, desde que houvesse dedicação de todos.

O que ficou evidente nesse último problema é que muitos alunos esqueceram da definição e das propriedades da radiciação, e isso os impede de resolver alguns problemas desse tipo. Esse problema é percebido também no ensino médio, quando trabalho com potenciação, com exponencial e com logaritmos.

Nessa questão, que fecha a 1ª atividade avaliativa referente aos conhecimentos básicos do nono ano para o bom desempenho na OBMEP, percebe-se que os alunos que tiveram dificuldade foi devido à questão da fatoração do radicando, para simplificar as raízes e consequentemente resolver a expressão final, erro de sinais dentro das raízes internas da expressão, que culminou no impedimento de resolver a expressão de forma correta, como é mostrado na Figura 2.6.

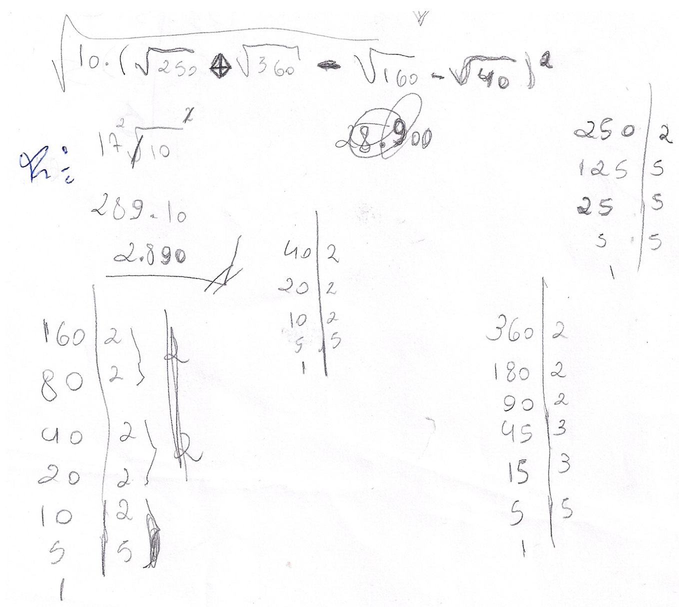


Figura 2.6: Erro na resolução da questão 4 apresentado pelo aluno TR.

Finalizado a Atividade 1, que teve como intuito diagnosticar as habilidades presentes nos alunos do 9º ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira evidencio que teve o resultado esperado por mim, ou seja, aqueles alunos que apresentam maior desenvoltura e evolução em matemática e, tiveram apenas dúvidas simples que não envolviam erros conceituais graves, enquanto, que a maioria da sala tinha dificuldade com definições de radiciação, com a resolução de equação polinomiais do segundo grau e com a aplicação do teorema de Pitágoras. Um ponto positivo nessa atividade foi que os alunos se empenharam e levaram a sério essa proposta, que é melhorar o desenvolvimento do conhecimento matemático proposto para que tenham melhor aproveitamento na próxima atividade e, consequentemente, numa futura Avaliação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, bem como em outras avaliações de Matemática.

2.2 Devolutiva e correções dos Problemas da Atividade 1

Uma semana após a aplicação da atividade 1, visando preparar os alunos do 9º ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira para as atividades posteriores, foi realizado a devolutiva das suas questões. Nesse dia, comentei com os alunos que a atividade proposta era a respeito da preparação para a Olimpíada Brasileira de Matemática. Percebi que os alunos ficaram um pouco surpresos e me questionaram o porque de não ter dito isso no dia da realização dessa atividade. Eu respondi que não queria, logo de início, que achassem que aqueles problemas seriam impossíveis de serem resolvidos. Enfatizei que tal atividade era apenas para avaliar as dificuldades e facilidades que cada aluno apresentava, para que eu pudesse ajudá-los. Separei uma aula para discutir com os alunos as resoluções e os resultados dessa atividade, mas como as discussões renderam várias perguntas estendi para duas aulas. Logo de início, percebi um certo desconforto por conta de alguns alunos, pelo fato de terem ideia de que não foram tão bem quanto eles gostariam, mas disse a eles que era uma preparação e uma forma de buscar um melhor rendimento nas próximas atividades.

Primeiramente li a questão 1, li o que era pedido no item a). Era exigido do aluno um conhecimento de noções básicas de geometria plana, para que identificasse que essa distância era obtida pela diagonal do campo retangular. O próximo passo era calcular tal distância. Perguntei qual era tal distância e o aluno, que identificaremos por JH, respondeu "É a diagonal do campo retangular". Eu respondi que era exatamente isso, e perguntei se havia alguma forma de calcular essa diagonal. Prontamente o aluno JH perguntou "eu posso responder" e, ao dizer que sim ele falou que deveríamos usar o teorema de Pitágoras. Em seguida perguntei se lembravam de tal teorema e outro aluno, que chamaremos de VV respondeu " a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos". Daí eu os respondi que era esse o teorema e assim convidei os alunos a virem a lousa para resolver o problema. O aluno JH foi à lousa e resolveu de forma precisa obtendo o resultado $40 \cdot \sqrt{13}$ metros.
O segundo item da questão 1 perguntava se a distância obtida do item a) era racional ou irracional. Percebi que muitos não se lembravam da definição de número irracional, mas a aluna que chamaremos MH disse " Um número é irracional quando ele é uma dízima não periódica e infinita". Um detalhe de extrema importância, que vale a pena destacar, é que vários alunos tiveram dificuldade na hora de determinar o valor da raiz de 20800. O maior problema foi a questão de decomposição em fatores primos para que pudessem determinar o valor da raiz e avaliar se era racional ou irracional. Outro problema é que muitos alunos dividiram o radicando por 2 obtendo o valor 10400, então deixei bem claro que a simbologia da raiz nos dizia que deveríamos determinar a base da potência, que quando é um número

que elevado ao quadrado resulta em 20800. A partir disso, ouvi muitos alunos dizendo que sempre apresentaram dificuldades com as resoluções de raízes e, diante do que foi presenciado, vejo que essa deficiência se dá na aquisição de um "vocabulário" matemático apropriado. a partir disso, vejo o quanto é necessário que os professores reforcem com os alunos a questão da linguagem na Matemática.

Agora, avaliaremos o desempenho dos alunos na segunda questão dessa atividade diagnóstica. Essa questão narra o fato de João Henrique que quer guardar certa quantia em dinheiro e começa guardando certo valor, e a cada mês guarda o dobro do valor que havia guardado no mês anterior. No item a) diz que se for suposto que ele comece guardando x reais no primeiro mês, qual será o montante que ele conseguirá guardar após 1 ano.
Nessa atividade percebi os alunos um pouco mais a vontade, embora houvesse a questão da incógnita x. Em alguns casos percebi que fizeram, de fato, com a incógnita, mas na maioria dos casos tomaram o valor de $x = 1$ e resolveram o problema do item b). Eu fiz passo a passo o item a) desse problema e os alunos ficaram bem atentos com a resolução, mas como citado anteriormente apenas três alunos chegaram a resposta $4095x$, Houve um aluno, que chamaremos de AM que disse "Eu pensei de fazer com 1 e depois trocar por x, mas fiquei com medo de errar". Após a fala desse aluno eu prontamente disse a turma que eles não precisam ter medo de errar, pois o intuito dessa atividade é de avaliar quais são as deficiências e quantidade de erros, para que possamos melhorar o desempenho da sala.

O terceiro problema que abordamos nessa atividade foi relativo às equações polinomiais do segundo grau, que determinava a área de um retângulo sendo $x^2 + 3x$. Em seguida era feito a pergunta: a) Qual é a área desse retângulo caso $x = 10$? e b) Qual o valor da medida x, em metros caso a área desse retângulo seja $40m^2$?.
Observamos que o tema equações polinomiais do segundo grau é abordado no nono ano com muita ênfase. Além de estar na matriz curricular aparece muitas vezes em provas da OBMEP. Devido esse fato, foi escolhida essa atividade que relaciona álgebra e geometria, afim dos alunos entenderem que essa relação pode ser feita de maneira tranquila e que há conexões entre ramos da matemática.

Quando iniciei a abordagem das equações do segundo grau mediante a área do retângulo perguntei qual seria a medida do comprimento e da largura desse retângulo em função de x. Percebi que alguns ficaram confusos e outros entenderam plenamente a pergunta. Um dos alunos VV, citado anteriormente, respondeu "o comprimento é $x + 3$ e a largura x". Então perguntei ao resto da sala o porquê?. O aluno JH respondeu "se multiplicarmos x por $x + 3$ resulta na área $x^2 + 3x$". A aluna MJ disse " Entendi. É o produto notável, o chuveirinho".

Nesse momento a sala deu risada e eu intervi de forma sutil e perguntei se eles haviam entendido e a classe respondeu que sim. No caso do item a) foi percebido que os alunos não apresentaram dificuldades em substituir o 10 no lugar do x, mas alguns alunos tiveram um pouco em trabalhar com a igualdade, ou seja, subtrair 40 em ambos os lados da igualdade e, assim obter uma equação polinomial do 2º grau cujas raízes seriam os valores possíveis de x, como foi pedido. Nessa devolutiva deixei que os alunos se expressassem sobre tal problema e observei que alguns não associaram a igualdade $x^2 + 3x = 40$ com uma equação polinomial do 2º grau, e não visualizaram que se fosse subtraído 40 em ambos os lados da igualdade obteríamos $x^2 + 3x - 40 = 0$ e daí era só determinar as raízes de tal equação. Outros alunos tiveram facilidade em resolver e determinar o valor de $x = 5$, quatro alunos encontraram os valores $x = 5$ e $x = -8$ e perguntaram o porque não admitir o valor de x negativo. Daí eu perguntei a sala e alguns alunos responderam "É porque o lado do retângulo não pode ter medida negativa", eu confirmei e a classe entendeu a exclusão do valor -8.
Agora, farei um breve comentário sobre a questão 4 dessa primeira atividade diagnóstica, onde a questão abordada diz o seguinte:
Camila aluna do 9º ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira perguntou ao seu professor João de matemática: "professor qual é a sua idade?". Ele respondeu: "A minha idade é a solução da expressão":

$$\sqrt{10 \cdot (\sqrt{250} + \sqrt{360} - \sqrt{160} - \sqrt{40})^2}.$$

Nesse problema o que ficou evidente é a insegurança que os alunos possuem em relação a cálculos aritméticos, ainda mais quando envolve expressões, pois a maioria dos alunos do ensino básico não se atenta à importância sobre as propriedades que envolvem operações com números inteiros e com a simplificação de tais expressões. Ao bem da verdade, vejo que tal situação se agrava a cada ano, pois os alunos apenas assimilam tais propriedades matemáticas mediante a uma avaliação, mas não se conscientizam que não é apenas memorizar de forma mecânica, mas sim entender o significado de cada propriedade e avaliar que elas são necessárias para simplificar cálculos mais complexos. Mediante tal fato, quando fui avaliar tais atividades, percebi que alguns alunos pararam os cálculos da expressão pela metade por não conseguirem concluir o cálculo mediante a falta de aquisição de técnicas aritméticas. Isso se deve pelo medo" que os alunos tem da matemática, pois poucos veem uma expressão e buscam resolvê-la com calma. A maioria das vezes, quando se deparam com as expressões, se assustam e nem ao menos tentam resolvê-la. Felizmente, alguns alunos identificaram logo que era necessário simplificar as raízes menores dentro do radical maior e, a partir do momento que fizeram isso, verificaram que a questão era simplificar a expressão interna ao radical e obter

$$10 \cdot (5\sqrt{10} + 6 \cdot \sqrt{10} - 4 \cdot \sqrt{10} - 2 \cdot \sqrt{10})^2 = 10 \cdot (5 \cdot \sqrt{10})^2 = 10 \cdot 25 \cdot 10 = 2500$$

Assim, a expressão se reduziria a

$$\sqrt{10 \cdot (\sqrt{250} + \sqrt{360} - \sqrt{160} - \sqrt{40})^2} = \sqrt{2500} = 50.$$

Nesse item fiz questão de resolver passo a passo com os alunos, embora alguns tinham resolvido corretamente, pois senti que naquela hora teria que intervir para que se sentissem mais seguros. Após a resolução do problema senti que eles ficaram mais tranquilos. Ouvi de alguns alunos que era muita informação matemática num problema só. Daí disse que conhecimento matemático é algo que deve ser construído aos poucos e que devem se esforçar, pois para adquirir tais habilidades leva certo tempo. O que me deixou feliz foi o fato deles me ouvirem e concordarem e muitos deles me procuraram e disseram que estavam animados com as atividades, pois as viam como uma oportunidade de analisar as suas maiores dificuldades e de ver como os colegas resolvem tais problemas. Outro ponto a ser colocado é que, após a aplicação e a devolutiva da atividade 1 combinei com os alunos que seria feita retomadas sobre as maiores dificuldades apresentadas por eles. Foi o que ocorreu nas aulas subsequentes. Fizemos exercícios que apresentavam dificuldades muito parecidas com das atividades ano e percebi que se mostraram mais confiantes após essas aulas e perguntaram sobre a próxima atividade. Prontamente respondi que ela seria realizada na semana seguinte ao término das retomadas dos temas abordados e será exposto no próximo capítulo.

Capítulo 3

Aplicação da Segunda Atividade Diagnóstica sobre questões da OBMEP

3.1 Aplicação da Atividade 2

A atividade diagnóstica 2 discorre sobre os temas: potenciação, ângulos na circunferência, equações polinomiais do segundo grau e fatoração de expressões algébricas. Nessa atividade permiti que os alunos pudessem formar trios para discutir tais questões e percebi que a troca de informações entre eles foi benéfico para o grupo, principalmente para aqueles que têm mais dificuldade. Nessa atividade 2, embora um pouco mais elaborada e com atividades oriundas das Olimpíadas de Matemática, foi verificado que os alunos do 9º ano da escola estadual João Batista de Oliveira, em Araraquara (SP), apresentaram mais desenvoltura nos problemas propostos e buscaram, de forma mais confiante, a resolução de tais desafios matemáticos. Fiquei muito satisfeito com o comprometimento dessa sala em participar desse projeto didático, que visa melhorar as perspectivas dos alunos em relação às provas de Olimpíadas de Matemática. A complexidade dessa avaliação exige um preparo diferenciado aos alunos que participam das Olimpíadas de Matemática e, devemos ter um cuidado melhor no trato de conceitos matemáticos e na linha de raciocínio lógico e abstrato.

9º Ano Escola Estadual João Batista de Oliveira
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE MATEMÁTICA II

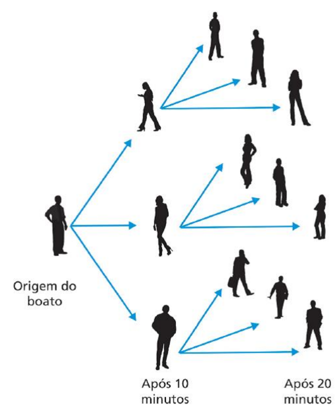
Professor: Elias Campos da Silva
Nome do grupo:

1) *Pensemos numa situação em que uma pessoa fica sabendo de um boato e gasta 10 minutos para contar para os seus três melhores amigos. Imagine que cada um dos três*

Tempo (minutos)	Novos alunos que ouvem o boato	Representação em forma de potência
10	3	
20	3.3	
30	3.3.3	
40		
50		
60		
70		

Tabela 3.1: Tabela da disseminação do boato, conforme passa o tempo

amigos resolve fazer a mesma coisa e 10 minutos depois contam a novidade para três colegas que ainda não a conheciam. Assim, cada um que recebia a notícia sempre a transmitia para três colegas desinformados, gastando, para isso, 10 minutos.



Pergunta-se:

a) *Quantas pessoas ficaram sabendo do boato entre 20 e 30 minutos?*

b) *Quantas pessoas ficaram sabendo do boato na primeira meia hora?*

c) *Se, na escola onde estudam, há 364 alunos, em quantos minutos todos os alunos ficariam sabendo do boato? Lembre-se que a quantidade de pessoas que ficam sabendo do boato acumula-se. Por exemplo, a partir do momento que a primeira pessoa conta para outras três, já são quatro sabendo do boato. No segundo momento, já são 1 + 3 +9 e assim sucessivamente.*
Extraído da referência [11].

2) Nesse problema, vamos aprender e utilizar o famoso Teorema do Bico, que tem esse nome porque a figura formada parece realmente a cabeça e o bico de um pássaro.

a) O Teorema do Bico diz que as distâncias de um ponto exterior a uma circunferência aos pontos onde suas tangentes tocam a circunferência são iguais. Na figura a seguir, $\overline{AP}$ *e* $\overline{AQ}$ *são tangentes à circunferência. Mostre que* $\overline{AP} = \overline{AQ}$.

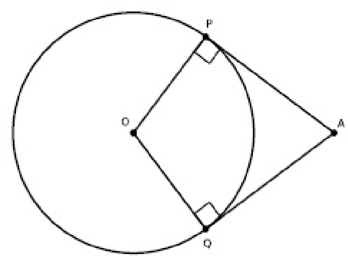


Figura 3.1: Teorema do Bico

b) Considere o hexágono da figura a seguir, no qual todos os lados tangenciam a circunferência. Determine o valor do lado desconhecido x.
Extraído da referência [12].

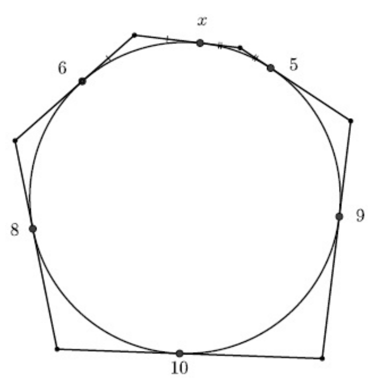


Figura 3.2: Problema 2 b)

3) Seja a *a maior raiz de* $x^2 + x - 1$. *Determine o valor de* $a^5 - 5a$.
Extraído da referência [13].

4) Um problema radical

a) Verifique que $(x-1)\cdot(x+1)+1 = x^2$.

b) Encontre o valor de $\sqrt{1+2014\cdot\sqrt{1+2015\cdot\sqrt{1+2016\cdot 2018}}}$.

Extraído da referência [14].

A questão 1) é sobre potenciação, tema recorrente no ensino fundamental II e no ensino médio. Tal questão, além de envolver o conceito de potência, também precisa da interpretação de problemas matemáticos. Uma questão pertinente a ser colocada é que a maioria dos alunos têm dificuldades na interpretação de textos. Embora o texto da questão 1) seja relativamente simples, vejo que os alunos, muitas vezes, cometem erros nas interpretações de texto em problemas matemáticos como, por exemplo, no item a) da questão mencionada, quando o aluno tem que determinar a quantidade de pessoas que ficam sabendo da fofoca entre 20 e 30 minutos, a maioria deles colocou a quantidade que ficou sabendo após 30 minutos. Nessa questão frisei com os alunos a necessidade de um bom entendimento na leitura e na interpretação, mas tivemos alguns alunos que debateram, de forma positiva com outros amigos de sala e, no fim, tivemos um bom resultado, que será melhor detalhado mais adiante.

A segunda questão tinha como tema potência de ponto ou segmentos na circunferência. Essa questão inicialmente mostrava a relação entre dois segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AQ}$ de mesma origem no ponto A, e tangentes à circunferência e pedia para mostrar que $\overline{AP} = \overline{AQ}$. Esse problema foi extraído do banco de questões da OBMEP 2015. Nele percebi que, embora os alunos tivessem em tese, os pré requisitos matemáticos para resolver esse problema, muitos tiveram dificuldades para perceber que se uníssemos o vértice A ao centro da circunferência teríamos dois triângulos retângulos congruentes e daí era só relacionar o fato dos dois segmentos citados serem congruentes. O segundo item dessa questão era de vários segmentos tangenciando a circunferência e perguntava o valor de um desses segmentos, haja vista que foram dados o valor dos demais segmentos. Observei que os alunos tiveram mais dificuldade em resolvê-la e, alguns, só conseguiram desenvolvê-la após a dica que foi dada. Tal dica será comentada mais adiante, quando for abordado a devolutiva dessa questão.

Na questão 3) uma das raízes da equação x^2+x-1 é a e pedia para determinar o valor de $a^5 - 5\cdot a$. Os alunos chegaram facilmente na solução das raízes, através da fórmula resolutiva da equação polinomial do 2º grau, mas quando foi a vez de determinar o valor de $a^5 - 5$, todos os alunos não fizeram, pelo fato de ficarem inseguros em relação a expressão ser um polinômio do quinto grau. Adiante será explicado o argumento que poderíamos usar para resolver tal questão, que na verdade era apenas usar a fatoração e o produto notável.

Na questão 4) foi pedido que verificassem a igualdade $(x-1)\cdot(x+1)+1 = x^2$, e depois essa fosse usada como modelo para a resolução da expressão $\sqrt{1+2014\cdot\sqrt{1+2015\cdot\sqrt{1+2016\cdot 2018}}}$.

Poucos alunos conseguiram associar os itens de tal problema. Isso fez com que eu trabalhasse melhor com a questão da associação da álgebra com a aritmética, que era umas das competências cujos alunos apresentaram falta de habilidade.

Percebe-se também, que os alunos possuem mais competências com problemas de ordem lógica, como por exemplo, problemas cuja interpretação está mais atrelada à realidade que vivem, como no caso do primeiro problema, dessa segunda avaliação diagnóstica.

Na questão 1), um trio de alunos que se auto denominava "Batatas", completou a tabela do item a) e respondeu os itens seguintes de forma correta, como é mostrado abaixo nas Figuras 3.3 e 3.4. No caso dessa questão foi verificado que os alunos tiveram mais

Tempo (minutos)	*Novos alunos que ouvem o boato*	*Representação em forma de potência*
10	3	3^1
20	3.3	3^2
30	3.3.3	3^3
40	3.3.3.3	3^4
50	3.3.3.3.3	3^5
60	3.3.3.3.3.3	3^6
70	3.3.3.3.3.3.3	3^7

Figura 3.3: Tabela das potências

1-
a) 20 30
$1+3+3^2 = 1+3+9 = 13$ pessoas
b) $1+3+3^2+3^3 = 1+3+9+27 =$ 40 pessoas
c) $1+3+9+27+81 = 121$
$121+243 = 364$
em 50 minutos

Figura 3.4: Resolução proposta pelo grupo Batatas

competência, pois associaram tal situação problema com seu cotidiano. Na sala de aula deste nono ano, percebi que houve um boa discussão sobre o problema e ouvi alguns grupos discutindo com outros ao final da aula. Alguns daqueles que erraram na interpretação se lamentaram dizendo que o problema não era tão complexo assim, bastava eles pensarem um pouco.

O maior índice de erros se deu na interpretação dos itens do problema, pois alguns confundiram, por exemplo, entre 20 e 30 minutos com a primeira meia hora que, nesse caso, era quando completasse 30 minutos. Também, no quesito da soma proposta $1+3+9+...$, alguns esqueceram que essa situação é acumulativa conforme o tempo passa. Na devolutiva que será abordada mais adiante, expliquei o problema para eles e concordaram que foi apenas um equívoco na interpretação.

A questão 2) item *a*), referente ao Teorema do Bico, pedia para que mostrassem que os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AQ}$ eram congruentes. Nesse item, fiquei muito surpreso, pois muitos alunos reconheceram que havia necessidade de traçar uma bissetriz do vértice A até o centro C da circunferência, e assim relacionar com o teorema de Pitágoras, mostrando o que o problema pedia, como exposto na Figura 3.5 pelo grupo Velho Chico. Nesse caso, percebi que

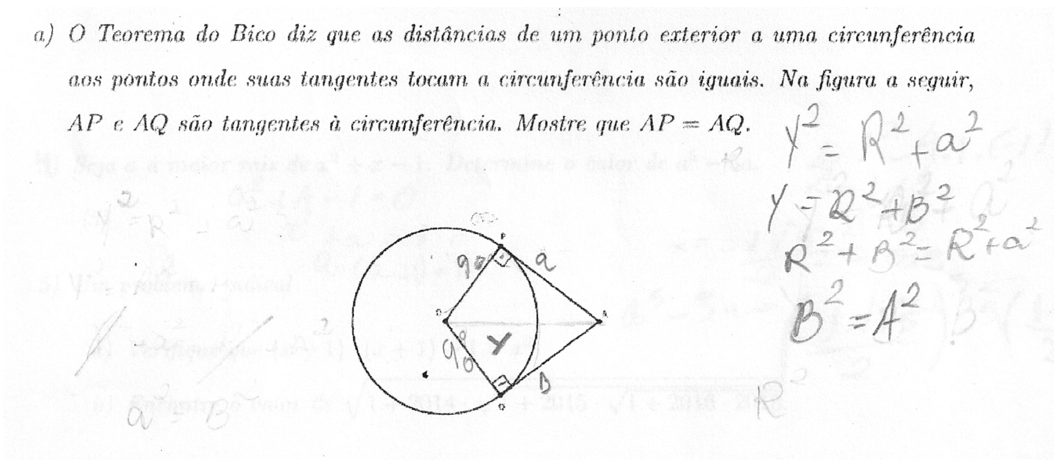


Figura 3.5: Resolução do Grupo Velho Chico, sobre a questão 2 *a*)

alguns alunos ficaram um pouco inseguros, pois muitos disseram que tiveram pouca noção de geometria nos anos anteriores, mas a maior parte deles, em discussão com os colegas, conseguiram fazer os cálculos devidos. Problema esse que deve ser sanado com maior tempo de abordagem nas aulas de Matemática sobre o tema. Vejo que alguns professores não dão atenção devida a geometria, que é muito importante para que o aluno tenha noção de espaço e forma e também desenvolva a abstração por meio dos Teoremas e Postulados da geometria plana e espacial. É muito importante o desenho geométrico que, não há na ementa das escolas públicas do estado de São Paulo. Esse segmento da Matemática é importante para o desenvolvimento da noção de espaço e forma, além disso, trabalha bastante a questão da coordenação motora e da "visão" abstrata da geometria. Outro fator a se destacar é que o desenho geométrico é pouco trabalhado nas escolas, muitas vezes devido à falta de material apropriado (régua, compasso e transferidor) para os alunos, ou até mesmo pelo fato de demandar maior tempo de preparo para tais aulas, tempo esse que muitos professores não possuem pela longa carga de aulas que esse profissional tem. Assim, muitas vezes esse segmento da matemática deixa de ser trabalhado e isso influencia de forma negativa o desenvolvimento da geometria pelos alunos das escolas públicas do ensino básico.

Na questão 2) *b*) foi verificado que muitos alunos tiveram dificuldade. Apenas dois grupos, dos nove da sala conseguiram resolver tal problema que se referia à potência de ponto ou segmentos na circunferência. Esse problema exige do aluno a aplicação do "Teorema do Bico", mas muitos alunos não o conhecem, por falta de experiência com a geometria. Entretanto um dos dois grupos que resolveram tal problema, o grupo Oráculo, resolveu como exposto na Figura 3.6. Nesse problema, os alunos disseram que eles não conseguiram

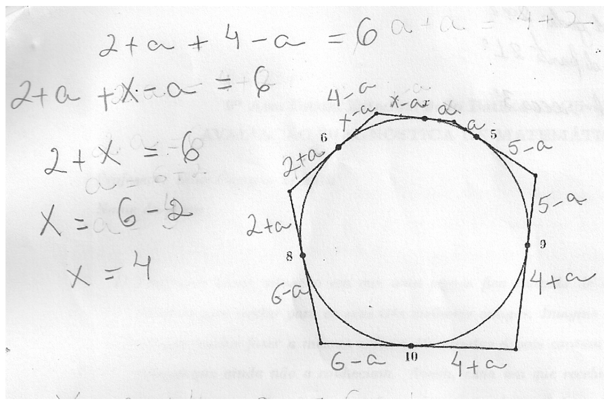


Figura 3.6: Resolução do Grupo Oráculo, sobre a questão 2 *b*)

associar o problema 2) *a*) com o 2) *b*) e falaram que, embora já tivessem trabalhado com potência de ponto, eles não conseguiram ter a ideia de relacionar uma situação com a outra. Isso, fez com que eu refletisse sobre tais dificuldades e procurasse trabalhar mais com questões que envolvessem tal conteúdo, para que os alunos tivessem um suporte melhor para resolver questões, tanto nas Olimpíadas de Matemática quanto em avaliações de qualquer espécie que envolvesse potência de ponto.

A questão 3) se refere a um problema da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Particulares (OBM) de 2011 que pedia para resolver a equação $x^2 + x - 1$ e determinar o valor de $a^5 - 5a$, sendo a a maior raiz da equação dada. Nessa questão ficou evidente que os alunos possuem certo receio quando diz respeito a fazer operações envolvendo raízes, pois no caso da equação citada a raiz a é $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Até encontrar os valores das raízes foi relativamente tranquilo para os alunos, mas na hora de calcular $a^5 - 5a$, eles deixaram a expressão apenas montada da forma

$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - 5 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Na devolutiva dessa atividade diagnóstica expliquei aos alunos que ao usarmos técnicas de potenciação e fatoração, o cálculo preciso dessa expressão será um número inteiro. Os alunos ficaram com cara de espanto pois, do ponto de vista deles, essa expressão era claramente um número irracional. A Figura 3.7, mostra como os alunos do nono ano deixaram a questão 3), ou seja, apenas montaram a expressão $a^5 - 5a$ sem resolvê-la. Agora,

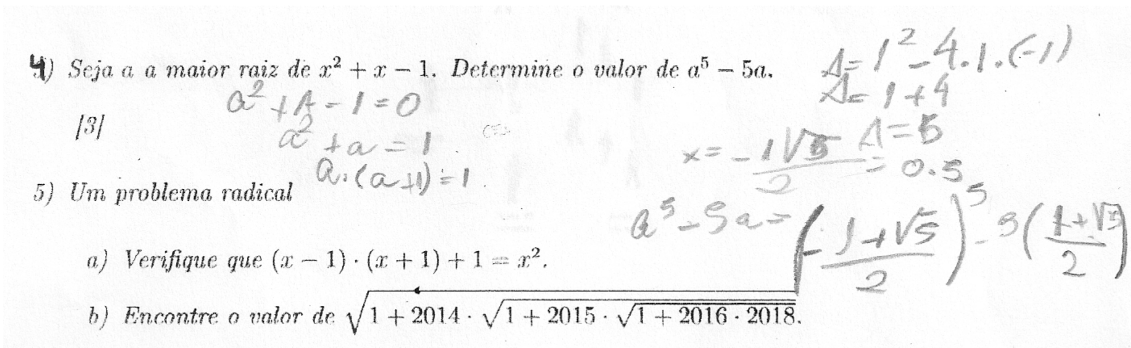
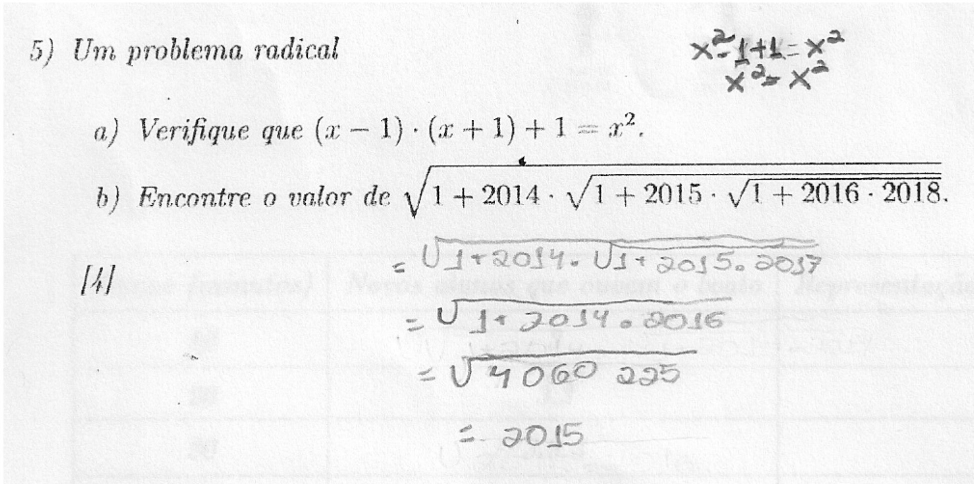


Figura 3.7: Resolução do Grupo Mendes, sobre a questão 3

vamos para o último problema dessa segunda atividade diagnóstica, para logo a seguir evidenciar como foi a devolutiva sobre tais atividades. Nesse último problema foi verificado que os alunos entenderam bem o item a) do problema 4), tanto que desenvolveram o produto notável do lado esquerdo da igualdade e compararam com a expressão do lado direito desta mesma igualdade, $(x-1) \cdot (x+1) + 1 = x^2$. O maior problema foi associar tal igualdade com o item b) do mesmo problema, pois muitos não conseguiram associar essa identidade com o que podia ser feito no item b). Dois grupos conseguiram associar as suas resoluções do item a) e usá-la no item seguinte, e o Grupo "Eh nóis" resolveu de maneira alternativa, ou seja, fez a resolução usando produto e soma e não optou por fatorar, como é mostrado na Figura 3.8.

Por conseguinte, foi percebido que os alunos do nono ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira ainda possuem muitas deficiências na aprendizagem da matemática, tanto na álgebra, quanto na geometria e muitas vezes falta experiência ao aluno quando se depara com uma questão nível OBMEP, pois tais questões exigem certas habilidades que o aluno muitas vezes não explora no seu cotidiano escolar. Obviamente, as provas da OBMEP exigem do aluno um preparo mais adequado, pois a maioria das escolas promovem o conteúdo mínimo ao aluno, e na disciplina de matemática não é diferente. Isso é o contrário que uma prova de alto nível, como a da Olimpíada de matemática das escolas públicas, exige.



5) *Um problema radical*

$x^2 - 1 + 1 = x^2$

$x^2 = x^2$

a) *Verifique que* $(x-1)\cdot(x+1)+1 = x^2$.

b) *Encontre o valor de* $\sqrt{1+2014\cdot\sqrt{1+2015\cdot\sqrt{1+2016\cdot 2018}}}$.

[4]

$= \sqrt{1+2014\cdot\sqrt{1+2015\cdot 2017}}$

$= \sqrt{1+2014\cdot 2016}$

$= \sqrt{4060\,225}$

$= 2015$

Figura 3.8: Resolução do Grupo Eh nóis, sobre a questão 4

3.2 Devolutiva e correções dos problemas da atividade 2

A devolutiva sobre a atividade diagnóstica 2 se deu uma semana após a aplicação de tal atividade. A priori, percebi que os alunos estavam mais participativos nesse dia e fizeram vários questionamentos, até mesmo dois alunos que anteriormente não participavam muito das aulas começaram a fazer excelentes perguntas, o que deixou a sala admirada.
A primeira questão que relatava sobre o boato. É uma forma de introduzir um problema de progressão geométrica, conteúdo esse abordado no ensino médio, mas guardada as devidas proporções, esse tema para os alunos do nono ano é relativo à potenciação. Percebi um grande esforço por parte de todos em resolver esse problema, e vi que a questão foi relativamente simples e todos a executaram com relativo sucesso preenchendo a tabela como pedido. Quanto ao item *a*) que perguntava quantas pessoas ficaram sabendo de tal boato entre vinte e trinta minutos alguns confundiram tal problema, pois alguns colocaram 9 pessoas, outros colocaram 27 pessoas, mas coloquei a seguinte situação: “ Entre vinte e trinta minutos é o final de vinte minutos, mas não ao término dos trinta minutos”. A partir disso, o aluno LT disse, “ Então professor, eu coloquei no começo 9 mas, percebi que tinha que somar as pessoas que ficaram sabendo antes dessas nove, que na verdade é $1+3+9=13$ está certo?”. Eu respondi que sim, daí retornei a devolutiva para sala de que não poderíamos contar com aqueles que ficavam sabendo após trinta minutos, pois, a contagem não era precisa, mas podíamos contar com aqueles que estavam sabendo após o término dos vinte minutos. A sala compreendeu a solução do aluno LT e partimos para o próximo item.

O item seguinte era sobre quantas pessoas ficaram sabendo do boato após a primeira meia hora. Quando eu li tal enunciado, a aluna JF, que pouco participava das aulas disse

"É só somar $13 + 27$ que dá quarenta pessoas". Este comentário deixou a sala admirada, pois tal aluna quase não participa das aulas, mas percebi que tal desafio fez com que ela se envolvesse e participasse com tal resposta. Voltando ao comentário da aluna JF, eu a parabenizei e disse que ela havia pensado de forma correta. Tal atitude visa estimular os alunos menos participativos a se comprometerem e terem interesse pela matemática. Esse fato deixou não só a mim, mas todos os colegas felizes e surpresos ao mesmo tempo. No item c), que é o último desse problema, perguntava após quantos minutos 364 pessoas ficariam sabendo desse boato. A partir do que foi conversado com os alunos sobre os itens anteriores, os alunos pediram alguns minutos para que pudessem resolver tal problema. Após alguns minutos eles resolveram de forma bem coerente e direta. O aluno JH pediu para falar sobre o problema em questão, " Professor, eu fui somando até dar 364, daí eu fiz assim $1 + 3 + 9 + 27 = 40$, daí somei mais 81 que deu 121 daí fiz mais 243 que resultou em 364, assim obtive que era após cinquenta minutos, tá certo o que eu fiz?". Eu perguntei, " O que você acha?". Ele respondeu, " Tá certo porque no início que é durante o intervalo de zero a dez minutos apenas uma pessoa sabe, quando completa dez minutos quatro ficam sabendo, e assim por diante". Eu retornei à sala que estava correto e que eles deveriam se arriscar mais nas resoluções, fazer testes e comparar com problemas parecidos, mas com ideias mais simples, para que depois pudessem resolver problemas mais sofisticados.

O próximo problema a ser comentado é o segundo da atividade dois que pede para que seja provado o "Teorema do Bico", que na verdade, é aquele que mostra que dois segmentos de mesma origem num ponto externo a uma circunferência e tangentes a mesma, mas em pontos de tangência distintos, são congruentes, vide Figura 3.1. Nesse problema 2 a) fiquei surpreso, pois vários alunos conseguiram associar com o Teorema de Pitágoras para resolver. Assim convidei o alunos VV para que viesse a lousa resolvesse e explicasse como ele resolveu o problema. Assim ele o fez. O aluno pediu para que eu fizesse o desenho e resolveu o problema ligando o ponto comum dos segmentos tangentes ao centro da circunferência em questão, como mostrado na Figura 3.5. A partir daí ele usou o Teorema de Pitágoras para os dois triângulos formados pelos raios da circunferência, pelos segmentos tangentes, que eram os outros catetos, e pelo segmento gerado pela união entre o ponto comum dos segmentos e o centro da circunferência, chegando às igualdades

$$\overline{AO}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 \text{ e}$$
$$\overline{AO}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{AQ}^2$$

e igualando as expressões ele obteve

$$\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{AQ}^2$$

e como

$$\overline{OQ} = \overline{OP} = raio$$

então,

$$\overline{AP} = \overline{AQ}$$

No problema 2 b) a maioria dos alunos não apresentaram competência de relacionar a questão dos segmentos tangentes e congruentes e de mesma origem, para assim mostrar que, na divisão de um segmento em dois e comparados dois a dois, chegaríamos no valor do segmento x. Mas, antes de comentar tal fato perguntei se algum dos grupos tinha resolvido o problema. Um grupo em especial disse que tinha resolvido, que foi o grupo Oráculo. Daí perguntei se algum representante do grupo podia explicar como chegou à solução. Eles me disseram que sabiam resolver mas não sabiam explicar com as palavras corretas. Eu me dirigi a eles e disse ao grupo para que explicassem com suas palavras. A partir disso, a aluna MH foi até a frente da sala e disse que dividiu o segmento x como a e $x - a$, o segmento seguinte ela o escreveu como a e $5 - a$, o seguinte como $5 - a$ e $4 + a$, que resultava em 9 se somássemos, o seguinte no sentido horário era $4 + a$ e $6 - a$, o seguinte $6 - a$ e $2 + a$ cuja soma resulta em 8, e o último segmento $2 + a$ e $4 - a$. Daí chegaríamos no final do ciclo onde $2 + a + x - a = 6$ e resolvendo a equação temos que $x = 4$, como mostrado na Figura 3.6. Logo a seguir, perguntei a classe se todos tinham entendido. A maioria disse que sim, então, eu só ratifiquei o que a aluna MH falou, apenas detalhando mais a questão da potência de pontos entre segmentos tangentes, reforçando a cada passo a igualdade entre tais segmentos para que todos entendessem. A partir disso, a sala disse que entendeu.

Exaltei a resolução da turma e ressaltei que é de fato um problema difícil de resolver e falei que esse problema foi tirado do banco de dados da OBMEP. Alguns alunos disseram que acharam o problema bem complexo, mas tinham compreendido. Fiquei feliz com a atenção e a importância que os alunos deram a esse problema, e por fim, também percebi o comprometimento da sala com tal atividade, pois, todos tentaram resolver.

No penúltimo problema dessa atividade diagnóstica 2, que abordava a seguinte questão; "Seja a a maior raiz de $x^2 + x - 1$. Determine o valor de $a^5 - 5a$".
Nesse problema os alunos apresentam algumas deficiências na competência da álgebra, pois na resolução da equação até foram bem, mas quando foi para substituir o valor de a, que era

$$a = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

ficaram inseguros e apenas substituíram na expressão obtendo,

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - 5 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

E assim, deixaram a expressão sem ao menos desenvolvê-la. Apenas o aluno JH tentou mas, disse para mim que não sabia fazer a potência elevada a quinta. Então deixou como estava, ele apenas iniciou a distributiva e parou. A partir dos relatos dos alunos pedi a atenção deles e fui à lousa para continuar do ponto onde a maioria tinha parado, que era na substituição da maior raiz da equação citada na expressão. Mas antes, disse a eles que seria interessante fatorar a expressão da seguinte forma

$$a \cdot (a^4 - 5).$$

A seguir disse que deveriam desenvolver o quadrado de a e com o resultado obtido elevar novamente ao quadrado. O aluno VV ressaltou "Usando o produto notável, não é professor ?". Eu confirmei o que o aluno disse e resolvi o quadrado de a, obtendo

$$a^2 = \left(\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \tfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \tfrac{6-2\sqrt{5}}{4} = \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Fiz cada passo minunciosamente para que todos acompanhassem e tirei as dúvidas relativas a cada passo do cálculo do produto notável, do quadrado perfeito. O aluno, que chamaremos de LG, disse que não tinha aprendido produto notável na antiga escola de onde tinha vindo. Assim, tive que dar uma atenção especial no cálculo do quadrado perfeito para que tal aluno entendesse os cálculos, entretanto senti que o aluno ficou com dúvida. Então disse a ele que acompanhasse e que, na aula seguinte, eu ia retomar produtos notáveis com a sala, para que assim pudéssemos seguir em frente, e de fato fiz isso nas duas aulas após essa aula da devolutiva sobre a atividade diagnóstica 2. Continuando na resolução de tal problema, disse aos alunos que fizessem novamente o produto notável do resultado de a^2, elevando ao quadrado novamente. Assim tive também a oportunidade de reforçar aos alunos a propriedade potência de potência, pois $a^4 = [a^2]^2$. Fazendo os devidos cálculos, de forma bem minuciosa, obtemos

$$a^4 = \left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \tfrac{9-6\sqrt{5}+5}{4} = \tfrac{14-6\sqrt{5}}{4} = \tfrac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

Agora, subtraindo cinco obtemos

$$a^4 - 5 = \tfrac{7-3\sqrt{5}}{2} - 5 = \tfrac{7-3\sqrt{5}-10}{2} = \tfrac{-3-3\sqrt{5}}{2},$$

e assim, fazendo o produto desse número por a chegamos a

$$a \cdot (a^4 - 5) = \left(\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right) = \tfrac{3+3\sqrt{5}-3\sqrt{5}-15}{4} = -\tfrac{12}{4} = -3.$$

Logo, obtemos que, $a^5 - 5 \cdot a = -3$. Após o término da resolução, alguns alunos avaliaram o problema como difícil, mas a maioria disse que era um problema cuja resolução era trabalhosa, mas não impossível de ser feita. Inclusive a aluna que chamaremos de JG disse que se aparecesse outro problema igual a esse ela saberia qual caminho tomar. Eu conversei com os alunos e os disse que na Matemática não podemos desistir dos problemas, devemos insistir e buscar uma forma de aprimorar nosso conhecimento matemático, pesquisando e buscando sanar as dúvidas com o professor, nesse momento observei que os alunos me deram toda atenção e escutaram o que eu disse. Muitas vezes, percebo que os alunos não tem paciência de resolver um problema que exige maior disponibilidade de tempo, pois são muito imediatistas e gostam de resolver os problemas de forma rápida, mas muitas vezes um problema matemático exige uma análise mais detalhada, e isso dispõe de tempo para fazer. Talvez esse seja o grande desafio dessa geração atual de alunos, paciência e dedicação.

No quarto e último problema dessa avaliação diagnóstica, que na folha de atividades veio equivocadamente com a numeração 5) mas, nesse trabalho já foi corrigido, foi trabalhado uma questão que envolve fatoração, produtos notáveis e radiciação, conteúdos de extrema importância, na matemática. Esse problema pedia para verificar a igualdade:

$$(x-1)\cdot(x+1)+1=x^2.$$

Nesse item vi que grande parte dos alunos dominavam bem os produtos notáveis e não tiveram problema na resolução. Eles resolveram primeiro o produto da soma pela diferença e depois somaram o resultado com 1. Pedi ao aluno LM, que havia acertado, ir a lousa e resolver o problema, e de fato ele foi muito bem, como mostrado na Figura 3.8, ou seja, usando o conhecimento de produtos notáveis, ele resolveu da seguinte forma;

$$(x-1)\cdot(x+1)+1=x^2-x+x-1+1=x^2.$$

Apenas chamei atenção da classe para que detalhassem mais as resoluções para que pudéssemos fazer uma análise mais minuciosa dos exercícios e para que eu pudesse dar um melhor retorno sobre as questões que devem ser melhoradas para que possam ter êxito na prova da OBMEP. No problema 4) *b*), os alunos tiveram um pouco de dificuldade em associar o item *a*) com o *b*) para que pudessem resolver de forma mais tranquila tal problema. Entretanto três grupos se destacaram e conseguiram resolver, são os grupos Oráculo, Batatas e Eh nóis. Inclusive esse problema gerou um nível de competitividade muito positiva, sem ofensas ou clima de superioridade, mas de forma descontraída para todos nessa turma de nono ano. Pedi ao aluno que chamaremos de LH, que viesse a frente da sala e explicasse o problema aos alunos. Esse aluno é muito dedicado, porém muito tímido, mas aceitou resolver o problema na lousa explicando aos amigos que ao associar $2016 = x - 1$ e $2018 = x + 1$ obtemos que $x = 2017$. Daí temos $(2017-1)\cdot(2017+1)+1 = 2017^2$ e substituindo na raiz quadrada obtemos 2017. Então dentro da segunda raiz temos $1 + 2015 \cdot 2017$, onde podemos substituir por $1+(2016-1)\cdot(2016+1) = 2016^2$ e, por fim, dentro da raiz maior temos $(1+2014\cdot 2016)$, que pode ser substituído por $1+(2015-1)\cdot(2015+1) = 2015^2$ e assim temos $\sqrt{2015^2} = 2015$.

Os alunos desse nono ano disseram que entenderam as questão e que não era tão difícil, mas que o mais complicado era ligar a ideia do item a) para resolver o b) e escrever, por exemplo, $2016 \cdot 2018$ como $(2017 - 1) \cdot (2017 + 1)$. Eu falei que é muito importante fazer vários exercícios de radiciação, potenciação e produtos notáveis, e ver as variações sobre tais temas em problemas para que eles possam adquirir competência com os cálculos aritméticos. Percebi que os alunos estavam atentos a tudo o que eu disse, e nas aulas seguintes perguntaram bastante e mostraram uma predisposição grande para aprender matemática.

Embora os alunos do nono ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira apresentaram dificuldades, em relação aos conteúdos matemáticos, por outro lado, eles mostraram muito interesse em aprender e estavam mais participativos nas aulas, mesmo aqueles mais contidos que, pela influência dos amigos começarama a fazer mais perguntas. Vejo que o fato do professor fazer com que o aluno sinta que tem condições de participar das aulas e das atividades estimula-o a estar inserido nesse meio de aprendizagem e trocas de conhecimentos. Outro fator que vejo como positivo é o aumento do interesse dos alunos a participarem da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, pois mesmo com muitos alunos apresentando dificuldades ficou evidente que eles não criaram empecilhos na participação das atividades preparatórias para a avaliação final, que será abordada no próximo capítulo.

Só o fato deles não reclamarem e ficarem atentos em todas as atividades e em todas as devolutivas já mostra grande evolução, mas além disso, percebi que uma quantidade significativa dos alunos mostraram boa habilidade em Matemática e tiveram resultados satisfatórios nas atividades diagnósticas. No capítulo seguinte será mostrado o desempenho dos alunos, de forma quantitativa e qualitativa, para que assim possamos avaliar o impacto da preparação para tal avaliação final, que norteia essa dissertação.

Capítulo 4

Uma análise detalhada sobre a Avaliação Final sobre questões da OBMEP

4.1 Introdução da aplicação da Avaliação Final sobre questões referentes à OBMEP

Este capítulo aborda a aplicação da avaliação final, que visa avaliar a preparação dos alunos do nono ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira, em Araraquara, para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Neste momento será detalhado toda a aplicação dessa atividade. Foi aplicado cinco problemas retirados do banco de questões do site da obmep.org.br, ou seja, do site da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, onde tais questões abordam os temas, potenciação, múltiplos e divisores, geometria e sequências numéricas. São temas recorrentes nas avaliações da OBMEP e as escolhi para que os alunos se familiarizem com tais problemas matemáticos.

Tal avaliação foi aplicada no dia vinte e três do mês de novembro de dois mil e dezessete. Nesta prova compareceram vinte e cinco alunos dos vinte e sete da turma. Dois deles faltaram sem justificativas, mas vejo que a maioria se propôs a participar e se esforçaram para que fossem bem sucedidos. Ficaram as duas aulas inteiras sem que saíssem da sala, nem ao menos pediram ir ao banheiro ou beber água. Separei os alunos alternados em relação as fileiras, para que não houvesse a possibilidade de cola ou conversas. Como eu tinha orientado sobre o comportamento durante a prova eles cumpriram com o acordo que fizemos. A motivação dos alunos antes e após a avaliação foi algo muito importante para o bom desempenho da turma, fato esse que será abordado mais no final deste capítulo. Outro fator a se destacar é o interesse dos alunos que compareceram na aula do dia vinte e oito de novembro para assistir a devolutiva das questões dessa avaliação e debater sobre o resultado da avaliação. Dois alunos debateram, de forma civilizada e com bons argumentos as suas notas. Fiquei de fato muito satisfeito com a postura dos alunos perante essa avaliação, bem como a aplicação e o desempenho deles no sentido geral. Mais adiante será feito uma pequena análise estatística sobre a participação e o desempenho dos alunos desse nono ano na referida avaliação final sobre os temas da OBMEP.

4.2 Uma breve abordagem das questões aplicadas na Avaliação Final

Na avaliação final, com temas da OBMEP, foi escolhido cinco questões onde o primeiro problema aborda potenciação envolvendo divisibilidade, o segundo é sobre geometria envolvendo congruência entre áreas e lógica, o terceiro trabalha com sequências envolvendo análise geométrica e visão tridimensional, o quarto é sobre análise geométrica tridimensional e ângulos e o quinto e último problema versa sobre sequências periódicas com números naturais. Tais problemas foram retirados do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática dos anos de dois mil e dezesseis e dois mil e dezessete. A avaliação final será exposta a seguir.

ESCOLA ESTADUAL JOÃO BATISTA DE OLIVEIRA
SÉRIE/ ANO : 9º ANO A
ATIVIDADE AVALIATIVA BASEADA EM QUESTÕES DA OBMEP

Professor: Elias Campos da Silva
Nome do Aluno:
DATA:

1) *Qual é o resto da divisão de* 2^{2015} *por* 20*?. Bom, é difícil fazer essa divisão diretamente usando apenas papel e caneta. Vamos procurar uma maneira de obter tal resposta analisando os restos de potência de* 2 *por* 20 *com esperança de encontrar algum padrão neles. Qual é o resto da divisão de* 2^5 *por* 20*?*

$$2^5 = 32 = 1 \cdot 20 + 12$$

Sabendo disso, fica fácil saber o resto de 2^6 *por* 20*, pois*

n:	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
Resto por 20:	2	4	8	16	12	4

Tabela 4.1: Resto da divisão por 20 das potências de base 2

$$2^6 = 2 \cdot 2^5 = 2 \cdot (1 \cdot 20 + 12) = 2 \cdot 20 + 24 = 2 \cdot 20 + 1 \cdot 20 + 4$$

Dado que 24 é maior que 20 e não pode ser um resto, devemos escrever

$$2^6 = 3 \cdot 20 + 4.$$

Podemos estender esse argumento anterior concluindo que para saber o resto de 2^{i+1} por 20, basta saber o resto do produto do resto de 2^i por 20. Deste modo, podemos construir a sequência de potências e restos na divisão por 20

Pergunta-se:

a) *Determine os restos que os números 2^7, 2^{10} e 2^{13} deixam na divisão por 20.*

b) *Sabendo que os restos se repetem de forma periódica, determine o período de repetição, ou seja, o número de restos distintos que ficam se repetindo.*

c) *Voltamos à pergunta. Qual o resto que 2^{2015} deixa na divisão por 20 ?.*

Veja referência [15]

2) *Pelo centro do quadrado da Figura 1 traçam-se duas retas perpendiculares, que o dividem em quatro quadriláteros iguais. Esses quadriláteros são rearranjados em outro quadrado maior, como na Figura 2. Qual é a área do quadrado ABCD da Figura 2?*

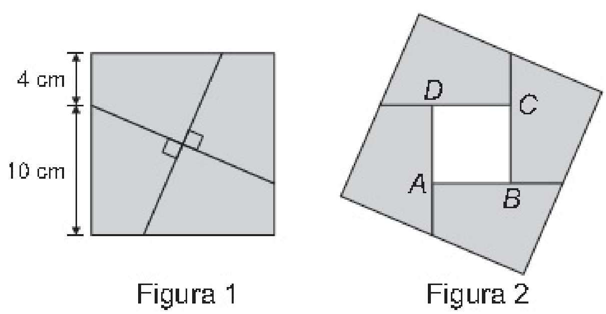


Figura 4.1: Figuras do quadrado formado por quatro quadriláteros iguais e rearranjados formando outro quadrado

Veja referência [16]

3) *Um objeto foi construído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1, 2, 3, 5, 7 e 11, como na figura. Uma formiguinha caminha pelas varetas, passeando*

de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio.

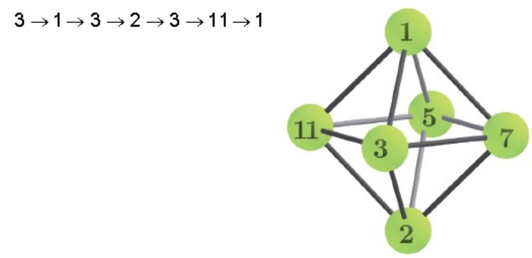


Figura 4.2: Octaedro com os vértices numerados (caminho da formiguinha)

$3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 1 = 594$

a) *Descreva um passeio no qual, ao final, a formiguinha obteve o número* 45.

b) *Explique o porque a formiguinha nunca obterá o número* 52 *ao final do passeio.*

c) *Explique o porque a formiguinha nunca obterá o número* 40 *ao final do passeio.*

d) *Quantos passeios diferentes a formiguinha deverá fazer para obter o número* 30*?*
Veja referência [17]

4) *Na figura estão desenhadas diagonais de duas faces de um cubo. Quanto mede o ângulo* $B\widehat{A}C$ *formado por elas?*

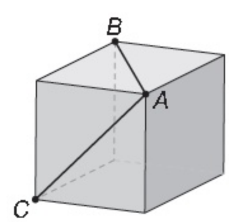


Figura 4.3: Cubo com vértices A, B e C não coplanares

Veja referência [18]

5) *Luciana marcou os números de 1 a 9 em uma circunferência, como na figura. A partir do número 1, ela começou a pular de 4 em 4. No primeiro pulo ela foi do 1 ao 5, no segundo, do 5 ao 9, no terceiro, do 9 ao 4 e assim por diante. Depois de pular 1 000 vezes, em que número ela parou?*
Veja referência [19]

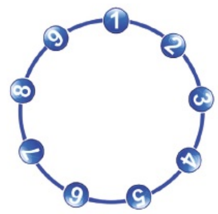


Figura 4.4: Círculo dividido em nove arcos côngruos, com os pontos de 1 a 9

Essa avaliação foi na forma individual e sem consulta. Começou as dezesseis horas e quarenta minutos e terminou as dezoito horas e vinte minutos do dia vinte e três de novembro de dois mil e dezessete, O tempo determinado para tal avaliação foi de duas aulas de cinquenta minutos e foi o tempo suficiente, pois os alunos a fizeram em tempo hábil.

No início da avaliação alguns alunos, perguntaram sobre o fato deles terem dúvidas sobre os problemas se podiam fazer perguntas. Eu disse que as perguntas seriam permitidas a mim apenas se a resposta de tal dúvida não implicasse na resposta do problema, mas durante a aplicação houve apenas perguntas sobre alguns enunciados, nada que comprometesse o desempenho dos alunos na prova.

Ao entregar a avaliação aos alunos, eu os orientei a ler os enunciados com calma, pois o tempo era o suficiente. Outro fator que me preocupa em relação aos alunos é que muitos têm medo de errarem as questões e, em certos casos, deixam até de tentar resolver os problemas, pois não se sentem bem ao errarem alguma resolução. Um dos comentários que fiz ao iniciar a avaliação é sobre a importância da tentativa, mesmo que errem. É importante tentar e, se caso ocorra algum equívoco, devem assumí-lo e buscar entender o problema. Com essa atitude percebi que os alunos ficaram mais tranquilos e disse que aquela avaliação não incidiria nas notas deles, era apenas uma forma de avaliar a prática deles e a minha como professor, e ambos buscarmos melhorias.

O primeiro problema da avaliação final era sobre o resto da divisão de 2^{2015} por 20, mas o próprio problema dá dicas de como fazer esse processo, que após analisar a Tabela 4.1, vemos que ao dividirmos a potência 2^n, com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ temos o resto da divisão por 20, respectivamente iguais a $2, 4, 8, 16, 12, 4$, ou seja, a partir de 2^2 há periodicidade nos restos. Mas antes de analisar a tabela, é importante que o aluno entenda o processo que o problema propôs, em que fossem encontrados tais restos, que na verdade era o de dividir as potências mais simples, do tipo $2^5 = 32$ por 20 e determinar o resto, que neste caso é 12, e a partir dessa potência determinar as seguintes, como por exemplo,

$$2^6 = 2 \cdot 2^5 = 2 \cdot (1 \cdot 20 + 12) = 2 \cdot 20 + 24 = 2 \cdot 20 + 20 \cdot 1 + 4 = 3 \cdot 20 + 4.$$

Logo, quando dividimos 2^6 por 20 o resto é 4.
Daí a pergunta feita no item a) desse problema é: Quais os restos de 2^7, 2^{10} e de 2^{13} por 20?. Percebi que, a maioria dos alunos, não tiveram dificuldades nesse item pois usaram a sequência periódica dos restos. Entretanto, alguns alunos resolveram as potências, em seguida resolveram a divisão determinando os restos pedidos. Abaixo será mostrado a resolução de dois alunos deste nono ano, a aluna que chamaremos de LQ, e o aluno que chamaremos de TR.

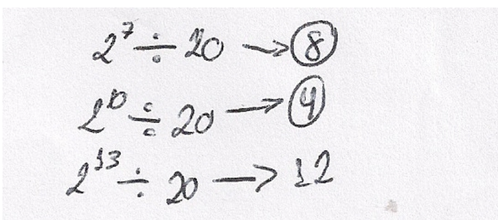


Figura 4.5: Resolução do problema 1 a) segundo a aluna LQ

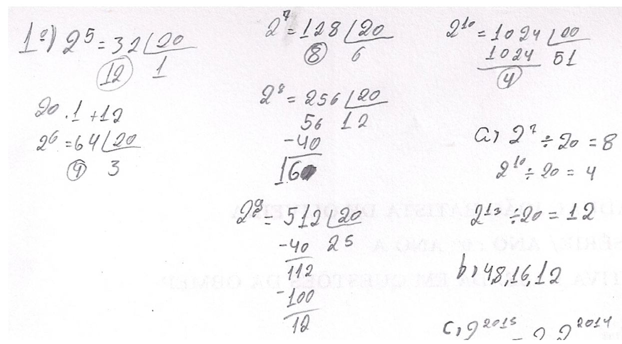


Figura 4.6: Resolução do problema 1 a) segundo o aluno TR

No item b) da questão 1 reforça o fato de que os restos se repetem periodicamente. A partir daí, o problema pede para que os alunos determinem o período de repetição. Esse problema fica fácil de resolver caso o aluno já tivesse resolvido o item anterior ou observado atentamente a Tabela 4.1, pois nela já pode-se observar que os restos são $4, 8, 16$ e 12. Portanto, como a maioria dos alunos teve êxito na resolução da questão 1 a), também acertaram este item.
No item 1 c) o problema retoma a questão inicial, que pede para determinar qual o resto da divisão de 2^{2015} por 20. De forma surpreendente, alguns alunos entenderam o sentido de uma questão tão abstrata, pois nessa questão devemos nos ater no expoente, bem como na sequência periódica dos restos. Alguns alunos ficaram tentando contar os restos de potências de base dois, de quatro em quatro mas, desistiram. Outros usaram as potências dividindo-as por quatro para encontrar qual é o múltiplo de quatro que mais de aproxima de 2015. Nesse problema eu não intervi e deixei os alunos tentarem encontrar uma solução viável. A única observação que fiz durante o processo dessa avaliação foi reforçar que é importante eles associarem uma questão difícil com uma questão mais simples, para que assim possam entender o processo e encontrar um padrão para questões mais difíceis. Alguns alunos conseguiram entender o problema e começaram analisando os padrões a partir do expoente dois, pois para

2^1 a divisão por vinte resulta no resto 2, que não está no período de repetição dos restos. Então, nesse caso, o mais correto a fazer é subtrair um do expoente da potência de base dois, e dividir este resultado por 4, que é o período de repetição. Se, a resposta for zero quer dizer que o resto na divisão por vinte é 12. Se, o resto for um quer dizer que o resto na divisão por vinte é 4. Se, o resto for dois quer dizer que o resto na divisão por vinte é 8. Se, o resto for três quer dizer que o resto na divisão por vinte é 16. Vejo que essa questão é uma das mais difíceis dessa avaliação, e fiquei surpreso por alguns resultados obtidos, como por exemplo a resolução dos alunos que chamaremos de GC e LM , como mostrados nas Figuras 4.7 e 4.8 a seguir.

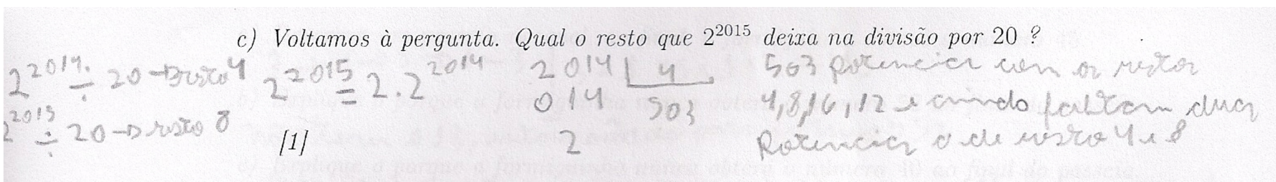


Figura 4.7: Resolução do problema 1 *c*) pela aluna GC

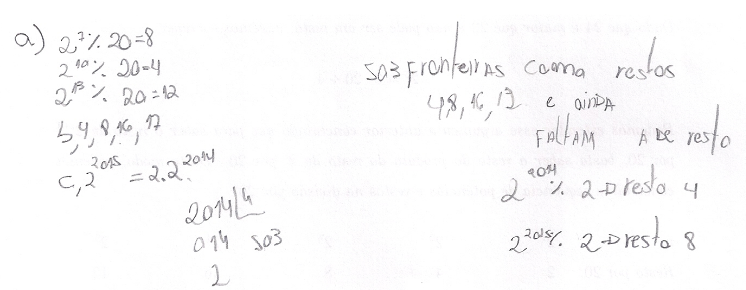


Figura 4.8: Resolução do problema 1 *c*) pelo aluno LM

O segundo problema dessa avaliação final abordava o tema geometria, mais especificamente área de quadrado, área de quadriláteros e congruências entre áreas. Esse problema dizia que ao traçarmos dois segmentos perpendiculares, com os extremos nos lados do quadrado formamos quatro quadriláteros iguais e rearranjando-os formamos outro quadrado, como mostrado na Figura 4.1. A partir desse exposto foi perguntado qual era a área do quadrado interno formado pelo rearranjo dos quadriláteros iguais.

Percebi que os alunos se esforçaram bastante para resolver a questão e um número considerável de alunos conseguiu resolvê-la. No começo do problema alguns alunos pediram para que eu desse alguma dica, então eu apenas disse para que comparassem as figuras dos quadrados compostos pelos quadriláteros, pois não havia a necessidade de fazer cálculos complexos. A partir dessa informação percebi um grande esforço e empolgação dos alunos em tentar resolver o problema, embora pareça algo estranho para eles resolver um problema matemático que não exija algum tipo de cálculo complexo. Alguns alunos chegaram na resposta percebendo que cada um dos quatro quadriláteros idênticos possuem dois ângulos retos, um ângulo agudo e outro obtuso, e se guiando pelos lados opostos desses ângulos, chegaram a conclusão de que os lados do quadrado central $ABCD$ é nada mais que a diferença entre os segmentos 4 cm e 10 cm. Logo, o lado do quadrado é $10 - 4 = 6$ cm. Como comentado anteriormente, uma quantidade considerável de alunos acertou neste problema, como por exemplo os alunos VV, JH, GS e AP, que resolveram o problema como é mostrado nas Figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12.

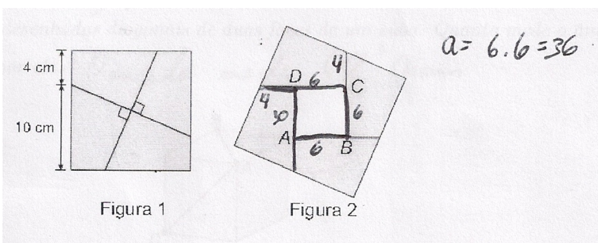


Figura 4.9: Resolução do problema 2 segundo a aluna GS

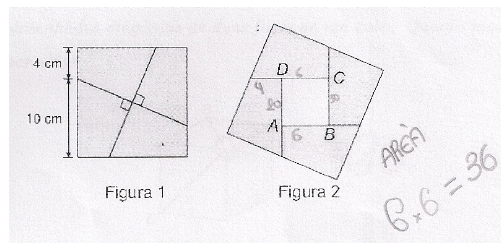


Figura 4.10: Resolução do problema 2 segundo a aluna AP

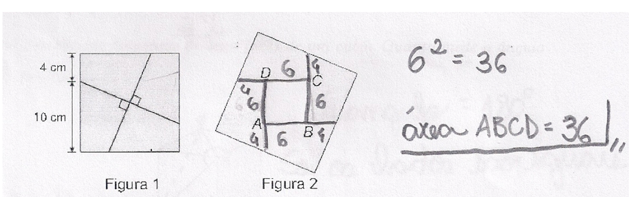


Figura 4.11: Resolução do problema 2 segundo o aluno JH

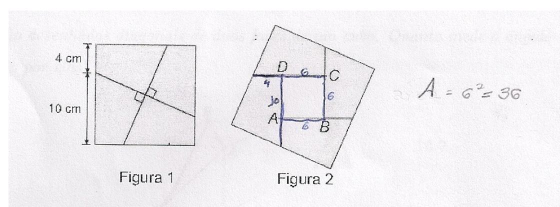


Figura 4.12: Resolução do problema 2 segundo o aluno VV

Reforço que eles não fizeram muitos cálculos na resolução desse problema, fato esse que ressaltei para a maioria dos alunos, e comentei com eles que caso a questão fosse dissertativa eles deveriam escrever o que foi analisado, para que assim eles pudessem ficar cientes de que na segunda fase da OBMEP é necessário fazer uma pequena redação na resolução, pois os critérios de correção são mais exigentes. Na devolutiva sobre essa avaliação eu reforcei tal fato e resolvi tal questão escrevendo toda linha de pensamento.

No problema 3 o tema abordado foi geometria espacial e sequências numéricas. Nele é dado uma figura de um octaedro construído com varetas, onde em cada um de seus vértices há um número natural $1, 2, 3, 5, 7$ e 11, como é mostrado na Figura 4.2. No item a) é pedido para que o aluno descreva um caminho ao qual o produto destes números resulte em 45. Esse item não exigiu dos alunos muitos esforços. Assim resolveram facilmente, como mostrado na Figura 4.13 a seguir. O segundo item perguntava porque a formiguinha nunca traçaria um

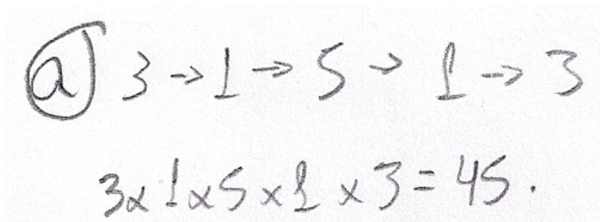


Figura 4.13: Resolução do problema 3 a) pela aluna LQ

caminho cujo resultado do produto fosse 52. Nesse item, foi verificado que a maioria dos alunos fizeram todas as possibilidades, alguns poucos alunos tiveram a ideia de decompor o número 52 da forma $2 \cdot 2 \cdot 13$. Nesse caso, surpreendentemente alguns alunos mostraram grande evolução, pois a ideia de fatorar para eles era algo muito distante à algum tempo atrás. No momento que a aluna MJ estava resolvendo tal item do referido problema, eu estava passando ao lado de sua carteira e percebi que ela ficou um pouco insegura e me olhou. A partir dessa atitude da aluna eu perguntei se ela precisava de alguma ajuda naquele problema. Ela me respondeu que sim, daí eu disse a ela "Pelo que eu vejo você não precisa da minha ajuda". Nesse momento a aluna sorriu mostrando satisfação em estar resolvendo de forma correta tal problema. A resolução da aluna está nas Figuras 4.14 e 4.15.

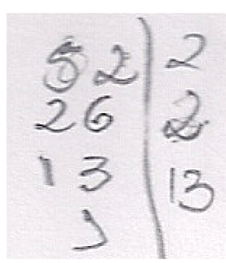
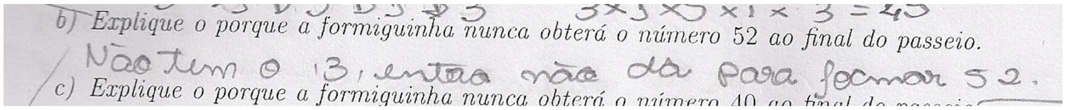


Figura 4.14: Fatoração do problema 3 b) segundo a aluna MJ

Na questão 3 c) pedia para que os os alunos explicassem o porque nunca poderia um passeio da formiguinha obter o número 40. Nesse caso, alguns alunos questionaram dizendo " Então professor, é do mesmo tipo do anterior não é?". Eu respondi que deveriam tentar antes de pedir uma aprovação minha e que aquela era a hora deles se arriscarem na resolução

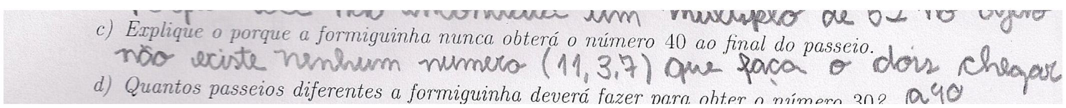


b) Explique o porque a formiguinha nunca obterá o número 52 ao final do passeio.
Não tem o 13, então não dá para formar 52.
c) Explique o porque a formiguinha nunca obterá o número 40 ao final do passeio.

Figura 4.15: Resposta do problema 3 b) segundo o aluna MJ

do problema. Nesse momento, percebi novamente o quanto os alunos têm medo de arriscar numa resolução de um problema matemático. Esse fato se deve muitas vezes da falta de liberdade que o alunos têm na escola, pois muitas vezes o professor não dá essa oportunidade ao aluno, para arriscar, e mesmo quando ocorre o erro explicar a sua linha de raciocínio, para que a classe possa entender a complexidade do problema.

Nessa questão o aluno JH me abordou e disse " Professor, não tem como fazer esse caminho, pois $40 = 2 \cdot 2 \cdot \cdot 2 \cdot 5$ e assim, não há como a formiguinha passar por esses caminhos sem colocar o cinco mais de uma vez, ou o sete , ou o três, ou o onze e dessa forma não tem como obter o 40. Eu parabenizei discretamente o aluno e percebi um sorriso de contentamento por parte dele. Na Figura 4.16 é mostrado a resolução do aluno JH.



c) Explique o porque a formiguinha nunca obterá o número 40 ao final do passeio.
não existe nenhum numero (11, 3, 7) que faça o dois chegar ao 40
d) Quantos passeios diferentes a formiguinha deverá fazer para obter o número 30?

Figura 4.16: Resposta do problema 3 c) segundo o aluno JH

No item 3) d) o problema é sobre quantos passeios diferentes a formiguinha deve fazer para obter o número 30. Os alunos entenderam que os números a serem multiplicados deveriam formar o inteiro 30 e, para isso, deveriam fatorar o número 30 como propôs o aluno VV. Ao fatorar o trinta os alunos analisaram a situação problema e viram como essa formiguinha poderia caminhar. Ao andar na sala percebi, de modo geral, os alunos testando as possibilidades, como deveria acontecer de fato, o que me deixou contente. Percebi que a parte lógica dos alunos estava fluindo bem, pois sempre deixei claro para que usassem o raciocínio lógico em qualquer problema, sendo de natureza matemática ou não. Na Figura 4.17 é mostrado como a aluna MH resolveu tal problema.

Na próxima seção será abordado a devolutiva sobre esse problema, onde detalharei os acertos e os equívocos nas resoluções dos alunos deste nono ano. Tomei cuidado de não tornar essa atividade uma avaliação baseada na pressão de uma nota, mesmo porque eu já havia fechado as médias desses alunos alguns dias antes e apenas pedi a colaboração

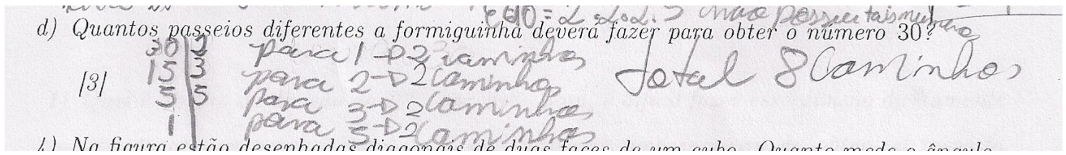


Figura 4.17: Resolução do problema 3 *d*) segundo a aluna MH

deles, em relação a participação e ao comprometimento, pois essa avaliação os ajudaria em criar critérios para que eles pudessem melhorar os seus desempenhos em provas futuras, e felizmente as minhas expectativas positivas foram atendidas.

O quarto problema é sobre o ângulo formado por duas diagonais das faces de um cubo. O que percebi, ao andar e observar algumas resoluções, é que muitos alunos responderam 90º, pelo fato de dois lados desse triângulo serem formados por diagonais de um quadrado. O aluno TR perguntou se essa constatação era verdadeira. O aluno VV pediu a palavra e eu o alertei que não deveria dar a resposta do problema. Ele disse que faria apenas uma observação, a de que os lados do triângulo ABC, em questão eram formados todos por diagonais e, assim, não poderia tal triângulo ter dois ângulos retos. Alguns alunos não entenderam o ponto onde VV queria chegar mas outros mais atentos perceberam que o triângulo ABC era equilátero e consequentemente um equiângulo. Dessa forma, constatou-se que o ângulo ao qual o enunciado se referia era de 60º, como resolvido e mostrado pelo aluno KA na Figura 4.18.

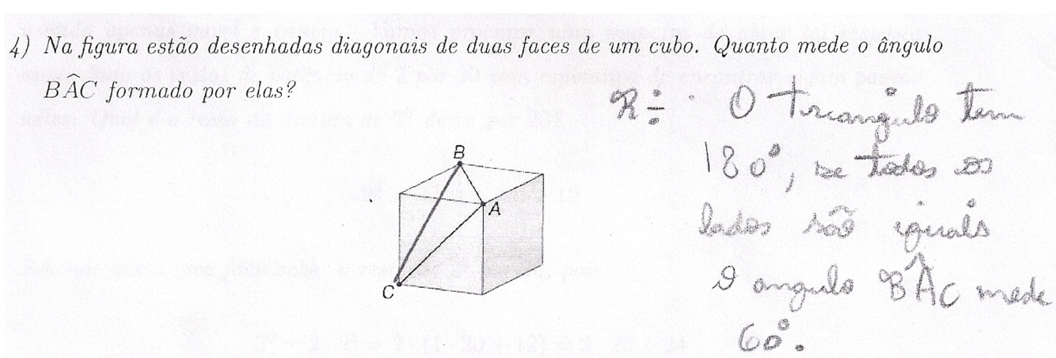


Figura 4.18: Resolução do problema 4 segundo o aluno KA

Na penúltima seção desta defesa abordaremos de forma estatística a quantidade de erros e acertos nos problemas desta avaliação, e observaremos que, embora, esse problema não seja difícil de resolver, ele exige do aluno certo nível de abstração. Nessa questão 4 observaremos que uma quantidade significativa de alunos errou o problema, pelo fato de pensarem que a diagonal sendo bissetriz do ângulo interno da face quadrada do cubo poderiam dizer que o ângulo $B\widehat{A}C$ era de fato 90º. Com isso, colocaram a resposta errada no problema, esquecendo que tal triângulo era equilátero e consequentemente equiângulo.

Agora, avaliamos a resolução do problema cinco desta avaliação sobre temas da OBMEP. Nessa questão, o problema mencionava que uma pessoa, cujo nome é Luciana, marcou nove pontos igualmente espaçados numa circunferência. Esses pontos foram numerados de 1 a 9, e a partir do número 1 ela foi pulando de quatro a quatro, ou seja, no primeiro "pulo" ela foi de 1 para 5, no segundo de 5 para 9. A pergunta é, "depois do milésimo pulo qual o número que ela parou". Nesse caso, observei que muitos alunos ficaram fazendo alguns testes para encontrar algum padrão para facilitar os cálculos. Este fato chamou minha atenção, pois estavam procurando uma forma para entender o processo de construção do problema, para que na hora de resolvê-lo fique mais fácil. Esse é um dos pressupostos da resolução de problemas, pois ao associarmos nosso problema com algo mais simples, podemos resolver outro mais complexo. Outro fato que chamou minha atenção foi que, a maioria dos alunos, fez a contagem certa e usaram a divisão, entretanto erraram na finalização do problema, como no caso da aluna MJ, mostrado na Figura 4.19.

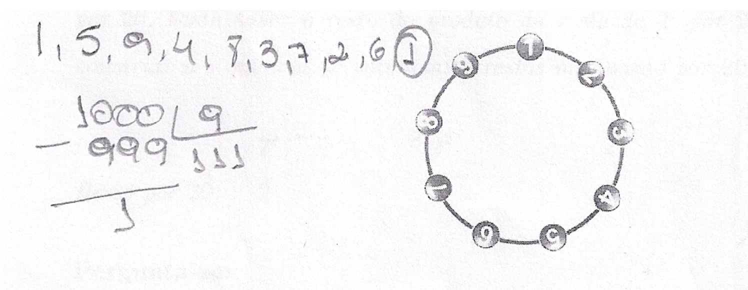


Figura 4.19: Resolução do problema 5 segundo a aluna MJ

Outro caso que chamou atenção foi do excelente aluno JH, tanto nas participações em sala quanto em notas, que se confundiu na resolução, pois descobriu que a sequência de repetições era de nove em nove, $5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 1$, mas nessa contagem ele começou a partir do 1, e no momento que ele dividiu 1000 por 9, resultou no resto 1. Ele assumiu então que, no milésimo pulo Luciana voltaria para o 1, quando na verdade ele deveria contar a partir do 5, e assim, nesse milésimo pulo, ela voltaria para o 5. A resolução do aluno JH está exposta na Figura4.20.

A aluna AF foi a única aluna que conseguiu resolver de maneira correta, pois assumiu que o primeiro pulo resultaria em 5, a partir dai ela dividiu 1000 por 9, descobrindo que dentro de mil pulos haveria cento e onze repetições da sequência $5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 1$, e o resto

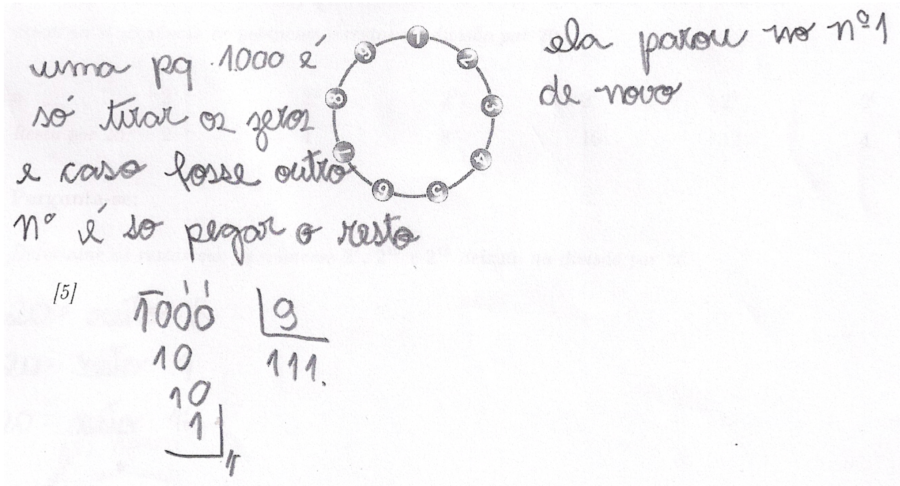


Figura 4.20: Resolução do problema 5 segundo o aluno JH

ficaria 1, ou seja, esse resto indica que iniciaríamos a centésima décima segunda sequência, mas pararíamos no primeiro elemento que é o 5, e portanto, ela pararia no 5, como mostrado na Figura 4.21.

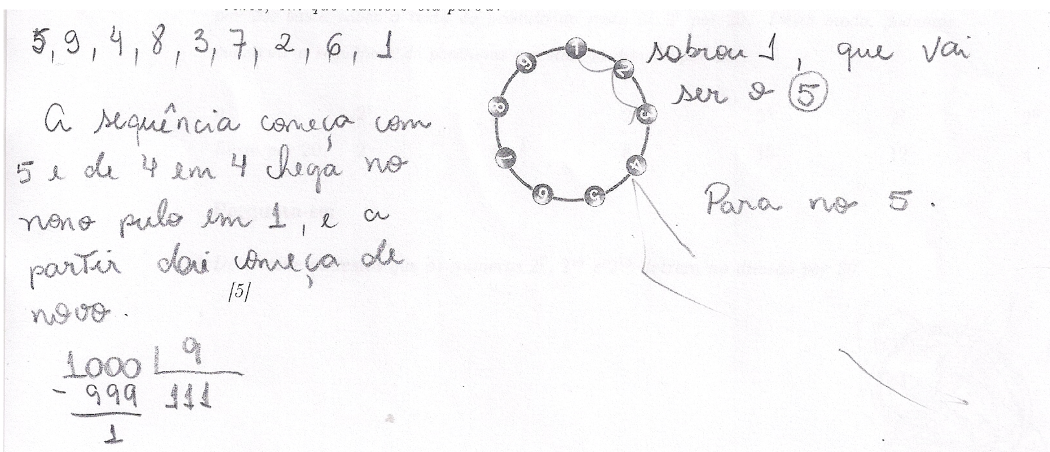


Figura 4.21: Resolução do problema 5 segundo a aluna AF

Eu discretamente, ao passar ao lado da aluna parabenizei-a ,pois já havia percebido o equívoco da maioria dos alunos na resolução, tinham resolvido os alunos MJ e JH assumindo como 1 o valor do primeiro pulo.

Portanto, ao término dessa avaliação observei os alunos mais confiantes e focados nos problemas, embora fosse já no final do ano letivo. Tais alunos colaboraram, em relação ao comportamento, e buscaram, cada um a sua maneira, resolver os problemas propostos naquele dia. Os alunos voltaram no dia 27 de novembro para que eu pudesse dar a devolutiva dos problemas dessa atividade avaliativa onde tomei muito cuidado ao expor seus erros e ressaltei os acertos, sem que nenhum aluno se sentisse incomodado pelo fato de ter cometido alguns erros nessa avaliação. De forma geral o resultado foi satisfatório, pois percebi que consegui tirar tais alunos da rotina e fiz com que muitos deles, que eram tímidos, ou até mesmo dispersos, se interessarem um pouco mais pela matemática, embora alguns apresentem muitas dificuldades referentes a tópicos estudados em anos anteriores. Outro ponto a ser colocado é o companheirismo, pois os que tinham mais facilidade com matemática ajudaram, antes da avaliação final, os alunos com mais dificuldade a estudar para essa avaliação. Houve uma boa evolução na melhora dos alunos com mais dificuldades. Dessa forma, analiso essa atividade como positiva na questão de ensino e aprendizagem na matemática, pois todos os alunos envolvidos se sentiram motivados nessas atividades, em especial na avaliação final, pois queriam saber o quanto tinham evoluído.

4.3 Devolutiva da Atividade Avaliativa Final Baseada em Questões da OBMEP

Essa devolutiva sobre a Avaliação Final baseada em questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas se deu no dia vinte e sete de novembro de dois mil e dezessete, por volta das treze horas e teve término às catorze e quarenta, ou seja, foram duas aulas de 50 minutos. A participação dos alunos foi total, pois foram vinte e seis alunos nesse dia para que pudéssemos discutir os exercícios. Eles entenderam que aquelas aulas eram uma forma de melhorarmos seu desempenho numa futura prova de Olimpíada, ou até mesmo num processo seletivo para o centro Paula Souza (Industrial) ou ao Instituto Federal do Estado de São Paulo (IFSP). Nesse dia havia um aluno a mais do que no dia da aplicação da avaliação. Era o aluno LA, que é autista. Quando fui até ele para perguntar o porque dele não participar da avaliação final, ele disse que estava doente, fato esse que constatei como verdadeiro, pois o educador especial que o acompanha na sala de recursos confirmou. Esse aluno é muito dedicado e, apesar de muitas vezes ter dificuldades na resolução dos problemas, vai no período contrário pedir ajuda do educador especial e eu dou o respaldo necessário ao profissional nos horários das reuniões semanais dos professores, para orientarmos melhor o educador. Quanto às atividades adaptadas ao aluno, eu propus ao educador que fizesse uma atividade avaliativa adaptada ao aluno, mas ele disse que como se tratava de um período de término de ano letivo o aluno não viria mais à escola a partir da semana seguinte, mas para o próximo ano isso seria feito.

Nessa devolutiva comecei com o problema 1 que abordava divisão de potências de base dois por vinte exposta na Tabela 4.1.

No início do problema é dado uma ideia de como poderia ser calculado os restos da divisão dessas potências por 20 na forma de decomposição da potência em produto e soma. Uma parte da soma seria um múltiplo de 20 e a outra parte que não era múltiplo de 20 era o resto da divisão, por exemplo

$$2^5 = 32 = 1 \cdot 20 + 12$$

e

$$2^6 = 2 \cdot 2^5 = 2 \cdot (1 \cdot 20 + 12) = 2 \cdot 20 + 24 = 3 \cdot 20 + 4$$

A partir disso foi construída uma tabela que mostrava os restos das potências de base dois, do expoente um até o expoente seis, observando assim que os restos se repetiam. A sequência se iniciava a partir de 2^2 até 2^5, onde os restos eram respectivamente $4, 8, 16$ e 12. A partir de 2^6 iniciava-se novamente o resto 4 e quando chegava a 2^9 o resto era novamente 12, evidenciando que os restos eram periódicos e o período era quatro. Sendo assim, o item a) do problema 1 perguntava, quais eram os restos que os números 2^7, 2^{10} e 2^{13} deixavam quando divididos por 20. Eu li o enunciado para os alunos, escrevi na lousa as fatorações para que os alunos entendessem o que propunha o problema e montei a tabela para que pudessem analisar. A partir disso a aluna LQ falou " Professor eu só segui a lógica a partir do 2^2 e fiz na mão um por um , depois percebi que a sequência dos restos fazia sentido, ou seja, o primeiro deixa resto 8, o segundo deixa resto 4 e o último deixa resto 12.". Eu parabenizei-a. Após esse fato perguntei qual o nível de dificuldade. Eles disseram que era trabalhoso, mas fácil. Seguindo a devolutiva, abordamos o problema 1 item b) onde foi perguntado qual era o período da repetição dos restos. Todos os alunos acertaram a pergunta, pois na Tabela 4.1 já estava indicado e a maioria coloca os valores dos restos da sequência periódica, que eram $4, 8, 16$ e 12. Já no item c) desse problema percebi grande dificuldade na análise do período por parte de alguns alunos, pois essa questão perguntava qual era o resto da divisão de 2^{2015} por 20. Alguns alunos resolveram este problema de forma muito coerente e precisa, que me deixou feliz, pois percebi o quanto eles haviam evoluído em relação ao pensamento lógico e às estruturas matemáticas do problema em questão. Perguntei aos alunos como tinham feito. O aluno VV disse que tinha dividido 2015 por quatro para determinar o resto, pois como temos quatro de período dos restos saberíamos qual seria o resto a determinar na contagem, mas se esqueceu que 2^1 não entra na contagem, pois é a única potência cujo resto da divisão por 20 é dois, e não entra na contagem dos restos. Mas o aluno TR me perguntou o porque que o resto da divisão de 2^1 por 20 é dois, assim como o resto de 2^2 por 20 é quatro, 2^3 por 20 é oito e 2^4 por 20 é dezesseis. A partir desse questionamento eu agradeci o aluno, pois eu tinha esquecido de mencionar tal fato e disse à classe "Pessoal, como fazemos a prova real da divisão?". O aluno JH respondeu quociente vezes divisor e somado com o resto resulta no dividendo", então eu escrevi na lousa:

$$0 \cdot 20 + 2 = 2$$
$$0 \cdot 20 + 4 = 4$$
$$0 \cdot 20 + 8 = 8$$
$$0 \cdot 20 + 16 = 16$$

Assim como,

$$1 \cdot 20 + 12 = 32$$

Os alunos entenderam a pergunta do aluno TR. Vejo que muitas vezes os alunos possuem dúvidas e não questionam o professor, pois às vezes eles vêm de uma cultura de aceitar tudo que é dito pelo professor como uma verdade absoluta ou têm um pouco de medo de se expor perante a classe. Essa dificuldade deve ser extinta da sala de aula, pois nesse ambiente deve ser cultivado os questionamentos e o aprendizado.

Voltando à questão do resto da divisão de 2^{2015} por 20, quando conversei com a sala sobre excluir o resto da divisão de 2^1 por vinte, pois era o único que não obedecia o padrão dos restos, entenderam, principalmente pela análise da tabela. Assim eu disse que devíamos dividir 2014 por quatro, para saber quantos períodos de quatro divisores teríamos "dentro" de 2014. O resultado foi 503 sequências com restos $4, 8, 16$ e 12 e ainda, na divisão sobram dois, ou seja são os dois primeiros termos da sequência, 4 e 8. Assim, o resto da divisão de 2^{2015} por 20 é oito. Eu perguntei quem acertou. Levantaram a mão por volta de 40% , ou seja, dez alunos, o que me deixou feliz, pois no início daquele ano letivo tive muitas dificuldades com esta sala. No ano anterior, 2016, eles ficaram um período sem professor de matemática e então eu tive que trabalhar alguns conceitos não vistos no oitavo ano, como por exemplo produtos notáveis, equações polinomiais do primeiro grau na forma fracionária e geometria plana.

Fiquei receoso dessa turma não conseguir obter boa evolução durante o ano, mas felizmente os objetivos foram alcançados. Tivemos alunos medalhistas de Olimpíada de Astronomia e excelente desempenho no Saresp.
Partimos para análise do segundo problema cujo tema era geometria, tal questão dizia o seguinte:

Pelo centro do quadrado da Figura 1 traçam-se duas retas perpendiculares, que o dividem em quatro quadriláteros iguais. Esses quadriláteros são rearranjados em outro quadrado maior, como na Figura 2. Qual é a área do quadrado $ABCD$ da Figura 2?

O que observei nessa questão foi o quanto melhorou a visão geométrica dos alunos. Embora eu tenha feito pedidos de materiais de acrílico, para que os alunos pudessem ter auxilio na visão geométrica, devido a falta de verba financeira, a escola não conseguiu obter tais materiais. Mas levei os alunos na sala de informática e os ensinei a manipular o programa Geogebra 2D e 3D. Os alunos adoraram e os levei para trabalhar com este software duas vezes durante o semestre, e isso auxiliou muito os alunos em algumas percepções sobre geometria. Aliás, foi devido a este às aulas retomadas de geometria no início do ano letivo. Percebi que os alunos entenderam e resolveram o problema de decomposição da figura, pois perceberam facilmente que o lado do quadrado central da figura da questão era formado pela diferença entre os lados indicados da Figura 1, ou seja, $10 - 4 = 6$cm. A aluna MJ disse que o problema era relativamente simples. Esta aluna demonstrou muitas dificuldades em matemática durante o ano, mas participou das atividades diagnósticas e da avaliação final demonstrando boa evolução na compreensão de alguns conceitos matemáticos que até então não eram compreendidos. Muitas vezes ela dizia que era impossível aprender geometria, mas ao fim deste ano ela me agradeceu pelo apoio e pela paciência que tive com ela durante o ano.

Na devolutiva da questão 3 avaliei que os alunos da rede pública de ensino têm grande facilidade com problemas de ordem lógica e, muitas vezes possuem dificuldades com regras e modelos pré determinados. Esse problema exigiu dos alunos raciocínio lógico. A organização da Olimpíada Brasileira de Matemática privilegia muito a questão do raciocínio e isso é que atrai mais os alunos, pela minha percepção.

No problema 3 o tema era sequência, múltiplos e divisores, decomposição em fatores primos e noções de geometria espacial. É sobre um octaedro cujos vértices estão numerados com os números $1, 3, 7, 5, 11$ e 2, como mostrado na Figura 4.2. O problema 3 diz que uma formiga passeia sobre as arestas desse octaedro até alcançar seus vértices, e chegando a cada um dos vértices numerados ela anota tais números e faz o produto entre eles para numerar cada passeio.

O item a) pergunta como podemos determinar um passeio cujo produto resulte em 45. Nesse problema avaliei que os alunos tiveram ótimo desempenho pois grande maioria acertou. O aluno TR perguntou se podia passar duas vezes por um mesmo vértice. Eu respondi que sim. O aluno respondeu “ainda bem, porque eu fiz o caminho $5 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3$”.

Eu ressaltei que o exemplo do enunciado usa a repetição do vértice no passeio.

No item *b*) quer que o aluno explique o porque de um passeio da formiguinha nunca obter o número 52. Esse item é um pouco mais difícil. Percebi que os alunos tiveram mais dificuldade. O aluno VV disse que fatorou o número em questão, obtendo assim, $52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$. A partir desse fato ele me disse que não tinha como obter o produto no passeio da formiguinha, pois o número 13 não tinha em nenhum vértice. O aluno LL, que apresenta muita dificuldade em matemática disse "Como eu vou saber que tem que usar decomposição, o problema não é difícil, mas o difícil é pensar isso". Eu ressaltei que bastava verificar que os vértices possuem números primos e o 1 que, não é primo mas, ele é elemento neutro da multiplicação. Então, o produto obtido é entre fatores primos mais o 1, assim devemos partir da ideia do produto, mas de trás para frente, ou seja, como foi obtido esse resultado, e quais os fatores que compõem o produto. O aluno afirmou que entendeu a explicação, mas muitas vezes o que vejo é a pouca dedicação de alguns nos estudos, pois a matemática, bem como qualquer outra disciplina, exige grande dedicação e muitos deles não se dedicam o suficiente para que entendam os conceitos exigidos em cada problema. No caso da escola pública tal situação fica muito evidente. O aluno que estuda e possui um foco se dedica muito, entretanto o que não se dedica aos estudos muitas vezes apenas assume que não consegue aprender e conta com a sorte, no caso de uma avaliação com questões testes. O que procuro fazer é que o aluno se sinta inserido na aula e na turma, me aproximo do aluno para que sinta confiança e liberdade para fazer questionamentos sobre a disciplina que eu ministro.

Devemos levar em conta a carência desses alunos, que muitas vezes passam mais tempo na escola com os amigos e professores do que com a família. Desta forma vejo que o professor deve ser o facilitador dessa boa relação, pois assim o aluno se sente mais confortável dentro deste ambiente de aprendizado. Finalizando a análise do item *b*) da questão 3 da avaliação, perguntei se a turma entendeu o pensamento do aluno VV e eles responderam que sim.

No item *c*) a questão fica sobre a impossibilidade do aluno conseguir obter o número 40 no caminho da formiguinha. Após eu ler o enunciado, a aluna MJ disse "Agora ficou fácil professor, é só decompor o 40". Eu disse a aluna que ela fez uma ótima colocação. O aluno JH ergueu o braço e perguntou se ele podia falar como fez. Eu disse que ele poderia falar. Então ele falou "40 foi decomposto como $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ e, para passar pelo dois mais de uma vez eu deveria passar pelo cinco duas vezes, ou pelo três, ou por onze, ou por sete e, na decomposição do 40 não tem o cinco mais de uma vez, nem o três, ou o onze, ou o sete. Desta forma não tem como obter o 40". Eu primeiramente agradeci ao aluno e depois me dirigi a turma perguntando se entenderam a resolução do colega. Mesmo assim fui à lousa e escrevi exatamente aquilo que o aluno disse e reforcei o fato da escrita, pois com ela conseguimos avaliar se o nosso raciocínio está correto.

Alguns alunos se manifestaram de forma positiva dizendo que a minha atitude era algo novo para eles, pois nunca tiveram um professor que os ensinavam a escrever uma resposta de um problema matemático, pois na maioria das vezes apenas faziam as contas e nem sabiam se a resposta estava coerente. Eu disse a eles que é muito importante saber o que se escreve, pois é uma ótima forma de fazer uma auto avaliação.

Partimos naquele momento para o item d) do problema 3 onde a pergunta era sobre quantos caminhos diferentes a formiguinha conseguia fazer de forma a obter o número 30. A aluna AF, que é muito tímida perguntou se o caminho $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5$ é o mesmo que $1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. Daí eu perguntei a ela "São caminhos iguais, ou diferentes". Ela me respondeu que são diferentes, então eu disse "Então, você deve contar como um caminho diferente, pois a ordem é diferente". A aluna se mostrou um pouco decepcionada, mas eu a tranquilizei dizendo que este tipo de equivoco é natural, mas agora que ela sabe o tipo de erro cometido, é só ficar atenta para não cometê-lo novamente. A aluna MH pediu a palavra e foi concedido, então ela disse que fez todas as possibilidades, ou seja,

$$
\begin{array}{c}
1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \\
1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \\
2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 5 \\
2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \\
3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2 \\
3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1 \\
5 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \\
5 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1
\end{array}
$$

que obteve oito possibilidades de caminhos cujo produto resulte 30. A turma mostrou grande satisfação pela resolução desse problema, pois ela é uma aluna muita querida por todos e muito dedicada. Eu a agradeci, dirigi à turma e perguntei se tinha ficado alguma dúvida na explicação da aluna. Eles disseram que ficou bem esclarecido e até brincaram com a aluna dizendo que ela tinha futuro como professora de matemática. Ela sorriu e me agradeceu. Só para ressaltar, a aluna MH foi para a Suécia com a família como imigrante ilegal. Ficou um ano por lá e foi deportada alguns meses depois. Ficou um ano sem frequentar a escola, mas quando conheci a família no ano de 2017, percebi o quanto eles estavam preocupados com o aprendizado da aluna. Durante este ano correu tudo bem e, ao final daquele ano letivo, a aluna me agradeceu em nome dela e da família.

A próxima questão que abordei com os alunos foi o problema 4, onde tínhamos um cubo cuja base superior possuía vértices opostos A e B e uma face frontal com vértices opostos A e C e perguntava, qual o ângulo formado em $B\widehat{A}C$, imagem mostrada na Figura 4.3.

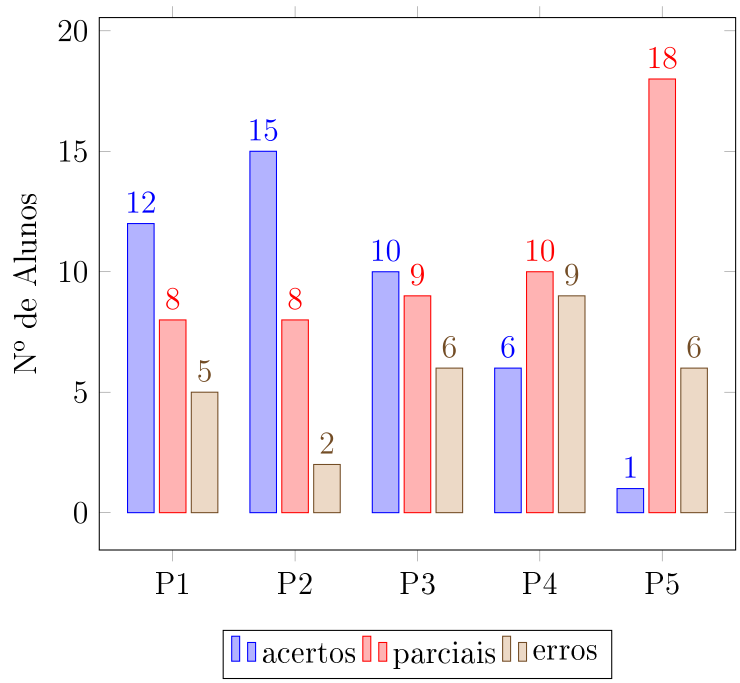
Neste problema percebi, durante a aplicação dessa avaliação final, que os alunos em uma quantidade considerável assumia o ângulo $B\widehat{A}C$ como sendo 90º. pois, como $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são diagonais de duas faces distintas, eles acharam que o $B\widehat{A}C$ era 90º. Na devolutiva eu perguntei se as faces do cubo eram coplanares. Eles disseram que não. Então, disse que não podiam assumir que $B\widehat{A}C$ era 90º e eles concordaram. Um aluno ML, disse que tinha resolvido esse problema e o ângulo $B\widehat{A}C$ era 60º. Eu parei a aula e perguntei como ele tinha resolvido. Ele disse "Então professor, eu pensei que se ligasse C em B eu teria um triângulo equilátero pois, todos os lados teriam a medida da diagonal do quadrado das faces. Então coloquei que o ângulo era de 60º". O aluno KA também se manifestou dizendo que tinha feito o mesmo, ele disse "como os lados são todos iguais era só dividir 180º por três". Eu os parabenizei pela excelente "visão" geométrica e perguntei a sala se havia alguma dúvida. A única a se manifestar foi a aluna JG que disse que foi uma pegadinha e ela tinha colocado a resposta errada, mas não era difícil, era só uma questão de conhecer um pouco dos conceitos da geometria. Eu então confirmei a fala da aluna.

No último problema dessa avaliação final o tema era sobre sequências circulares e neste os alunos foram bem, embora muitos erraram na sua finalização, determinar o número pedido. Este problema colocava um círculo dividido em nove arcos côngruos de 1 a 9, como mostrado na Figura 4.4. Ele dizia que Luciana, personagem do problema, pulava de 4 em 4 começando a partir do 1, formando assim a sequência $1, 5, 9, 4, ...$ e perguntava em qual número parava no milésimo pulo. O que percebi, em relação a confusão feita, foi que o maior índice de erros foi na contagem, pois a sequência começa no 5, que é o valor obtido no primeiro "pulo" e não o número 1. Os alunos que cometeram esse equívoco ficaram inconformados. Apenas a aluna AF conseguiu observar essa situação, responder de forma correta e precisa, embora tímida, é muito dedicada. Ela dividiu os mil pulos por nove obtendo 111 sequências com os números $5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1$, onde 5 é o resultado do primeiro pulo, 9 é o resultado do segundo pulo, e assim sucessivamente. Então ela descobriu que haveriam 111 repetições dessa sequência, e quando iniciava a 112^a sequência era quando Luciana executava o milésimo pulo. Esse fato foi impressionante para todos os alunos, pois AF mostrou uma linha de raciocínio que nenhum de seus amigos esperava, pelo fato dessa aluna ser tão quieta e pouco participar das aulas. Esse fato foi muito importante para que os alunos vissem que têm condições de evoluir e resolver problemas de Matemática, com níveis altos como os da OBMEP. A aluna infelizmente não quis explicar para a sala, mas eu tomei a liberdade de pegar sua avaliação e perguntar-lhe se minha interpretação estava correta. Ela afirmava cada palavra que eu dizia. Este fato foi muito valorizado pelos alunos e assim encerramos essa devolutiva. Ainda será feito uma breve análise estatística desta avaliação na próxima seção e, alguns comentários pertinentes a este trabalho, que auxiliou numa perspectiva positiva para o preparo dos alunos em respeito a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

4.3.1 Uma breve análise estatística

Agora faremos uma breve análise estatística, referente ao desempenho na avaliação final dos vinte e cinco alunos do nono ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira, em Araraquara, presentes nesta avaliação.

No gráfico de barras a seguir, os problemas de 1 a 5 estão descritos como $P1$, $P2$, $P3$, $P4$ e $P5$ no eixo horizontal. Na legenda há barras e cores azul, vermelho e rosa, que indicam respectivamente o números de acertos, acertos parciais e erros, respectivamente. No eixo vertical consta o número de alunos. O gráfico mostra para cada problema o número de alunos que acertaram ou acertaram parcialmente ou erraram. Os casos dos alunos que acertaram o problema são aqueles que o concluíram. Aqueles que acertaram parcialmente, foram que acertaram ao menos um item, os que nos problemas 1 e 3, no problema 2 conseguiram entender que o quadrado central era composto pelos segmentos cujas medidas eram 10cm e 4cm, mas não conseguiram determinar o valor do lado do quadrado central, no problema 4 os que entenderam que o triângulo ABC era isósceles mas, não conseguiram definir tal polígono como equilátero, e consequentemente como equiângulo e, no problema 5 que entenderam a lógica da sequência, mas ao invés de começar a contagem com o 5, começaram com o 1. No caso do erro, foram os alunos sem habilidades necessárias para resolver tal problema, ou até mesmo deixaram as questões em branco.



Pela Tabela 4.2 observamos que na questão 1 os acertos parciais e os erros se deram pelo item c), que perguntava qual era o resto da divisão de 2^{2015} por 20, pois alguns alunos se confundiram com a questão dos períodos dos restos começarem a ser contados a partir de 2^2. Já na questão 2, foram devidos a dificuldade que alguns alunos tiveram no rearranjo do quadrado e, entender que o lado do quadrado central da figura 2 era dado por $10 - 4 = 6$ cm. No problema 3 os acertos parciais quase se igualam aos de acertos, devido aos itens b) e c) que exigiam do aluno a associação do número com a sua decomposição. No caso do problema 4, embora relativamente simples, não se atentaram ao fato que existe um plano que contém os pontos A, B e C, de forma que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ e que o triângulo é equilátero, e portanto, o ângulo $B\widehat{A}C = 60^{\text{o}}$ e não 90^{o} como muitos colocaram. No problema 5, os 72% de acertos parciais e os 4% de acertos se deram pelo fato dos alunos começarem contando o número do primeiro pulo como sendo o 1, e não o 5 como deveria ser. Neste caso, foi um equívoco provocado por conta da ansiedade dos alunos, não pela falta do conhecimento específico de conceitos matemáticos.

Por conseguinte, vejo que esta breve análise estatística deixou evidente que deve ser trabalhado algumas habilidades específicas dos alunos do nono ano da Escola Estadual João Batista de Oliveira, como por exemplo: lógica envolvendo construções de sequências periódicas e padrões matemáticos, noção de construções geométricas, decomposição em fatores primos e divisibilidade. Outra questão pertinente a ser destacada é criar no âmbito escolar a participação em Olimpíadas de conhecimento, pois percebe-se que muitos alunos ficam

Problemas	% de acertos	% de acertos parciais	% de erros
1	48	32	20
2	60	32	8
3	40	36	24
4	24	40	36
5	4	72	24

Tabela 4.2: Tabela das porcentagens de acerto, acerto parcial e erro das questões da avaliação final

ansiosos para as avaliações de tais modalidades devido a falta de participação pois, muitas escolas não montam um calendário específico para que os alunos e os professores se programem para participar destas competições, e assim criar uma "cultura escolar" de participação nas Olimpíadas do conhecimento, mais especificamente na OBMEP.

Capítulo 5

Considerações Finais

Inicio a conclusão deste trabalho avaliando a participação e o desempenho dos alunos. Primeiramente, a participação dos alunos foi muito positiva devido ao comprometimento dos alunos com este projeto, que visa melhorar o desempenho desses alunos nas Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, pois vejo que os alunos entenderam a proposta deste trabalho e colaboraram nas aulas, na aplicação das atividades diagnósticas, bem como na participação da Avaliação Final.

A postura dos alunos perante as atividades referentes a este trabalho foi admirável, pois houve extremo respeito entre os alunos e para com o professor e, além disso, os alunos viram-no como oportunidade de adquirir habilidades em Matemática que serão de extrema valia para o futuro, seja numa prova de concurso para vagas em colégios técnicos, como por exemplo; Centro Paula Souza (Industrial) ou para Instituto Federal do Estado de São Paulo (IFSP), quanto para a própria vida escolar. Aliás, vale ressaltar que alguns dias após a realização deste projeto, tivemos a feliz notícia de que três alunos desta turma foram selecionados para cursar o ensino médio, atrelado ao curso técnico, no Instituto Federal, em Araraquara, este fato valorizou ainda mais esse trabalho mediante a equipe escolar e os alunos.

Analiso o desempenho dos alunos nessa Avaliação Final de forma muito positiva, pois vi ao decorrer dos dias de aplicação grande evolução dos alunos, em vários quesitos, como por exemplo, na desenvoltura em participar das aulas e debater as resoluções dos problemas matemáticos, pois a forma como foi conduzido o projeto fez com que os alunos tivessem liberdade de expor a sua linha de raciocínio, sem o prejuízo de serem julgados, caso o pensamento fosse equivocado. Outro fator a ser destacado foi a aquisição de competências pois faltava aos alunos algumas habilidades, como por exemplo em divisibilidade, conceito esse que causa certa resistência por parte dos alunos, pois muitos deles possuem dificuldades aparentes com o fator divisão.

No decorrer deste trabalho, procurei incentivá-los a trabalhar com divisão sem que fosse citado o nome desse conceito como um "estigma", pois o aluno tem que reconhecer a divisão como uma operação como qualquer outra. Busquei estimulá-los a reforçarem o conceito de divisão Euclidiana trabalhando com dividendo, divisor e resto.

Outro fator dramático no ensino da Matemática é a geometria, pois muitos alunos criam certo "trauma" com essa disciplina. Antes das aulas procurei sempre associar o aprendizado da geometria com uma necessidade cotidiana, para que os alunos se sentissem motivados em aprender os conceitos geométricos exigidos, observei que este "trauma" foi amenizado, devido a forma como este conceito foi abordado, ou seja, de forma mais prática e buscando usar o raciocínio lógico.

A construção de sequências também foi um tema trabalhado com muito afinco e percebe-se o quanto os alunos evoluíram antes da aplicação das atividades e da avaliação, percebia o quanto tinham dificuldade em entender o padrão e construir uma lei de formação. Hoje observo que devemos valorizar e estimular o pensamento dos alunos, pois a prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas exige um alto nível de lógica e abstração, e sem uma preparação adequada para alguns fica inviável sua participação em tal competição.

No caso de procurar uma preparação adequada à OBMEP, vejo que este trabalho foi um primeiro passo, mas que deve ser repensado e avaliado de maneira adequada. O objetivo era mudar a perspectiva do aluno que opta em participar de uma Olimpíada de Matemática como esta e que muitas vezes tem no pensamento que a realização dessa prova é inviável, ou seja, muito difícil para suas competências, mas devemos dar suporte para que esses alunos tenham condições de participar da OBMEP, é necessário mostrando que têm habilidades para obter um bom desempenho nesta avaliação. Para isso, é necessário que haja um preparo adequado e dedicação entre os indivíduos envolvidos, ou seja, direção, coordenação, corpo docente e alunos.

Referências Bibliográficas

[1] D. P. Ausebel and D. B. Gowin, "A aprendizagem significativa: A Teoria de David Ausubel, São Paulo: Moraes," p. 3, 1982.

[2] A. Pelizzari, "Rev. pec, curitiba, v.2, n.1," p. 41, 2002.

[3] J. D. Novak, "Teoria y practica de la educación," p. 3, 1998.

[4] V. C. G. Carneiro, "Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. Zetetike, Campinas- UNICAMP, v. 13, n. 23," p. 88, 2005.

[5] M. Artigue, "Engenharia didática: In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes pedagógicos," p. 193, 1996.

[6] G. Polya, "A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência," p. 3, 1978.

[7] V. M. R. Lima and A. F. Ramos, "A Olimpíada Brasileira de Matemática sob a Ótica dos Docentes das Escolas Públicas de Água Branca-PI," p. 10, 2016.

[8] W. J. S. Alves, "O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública," p. 26, 2010.

[9] Obmep, "Informações sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm," 2018.

[10] E. C. da Silva, "Questões autorais," p. 47, 2017.

[11] http://cejarj.cecierj.edu.br/Material_Versao7/Matematica/Mod0/Matematica_Unidade_08_seja.pdf "Problemas com potenciação e radiciação, pg 3, adaptado," 2008.

[12] www.obmep.org.br, "Banco de questões da obmep , pg 42, problema 32," p. 11, 2015.

[13] https://matematica.obmep.org.br, "Obm," 2011.

[14] www.obmep.org.br, "Banco de questões da obmep, pg 47, problema 6," p. 47, 2016.

[15] www.obmep.org.br, "Banco de questões da obmep, problema 27," p. 21, 2016.

[16] www.obmep.org.br, "Questãos da obmep primeira fase , problema 14," p. 3, 2017.

[17] www.obmep.org.br, "Questãos da obmep segunda fase, problema 5," p. 5, 2017.

[18] www.obmep.org.br, “Questão da obmep primeira fase, problema 5,” p. 2, 2016.

[19] www.obmep.org.br, “Questão da obmep primeira fase, problema 11,” p. 3, 2016.