



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

MARIANA MORETTO PISSINI

**UM ESTUDO FUZZY PARA PROPOR UM MODELO MATEMÁTICO
COMO AUXÍLIO AO DIAGNÓSTICO MÉDICO DAS
FARINGOTONSILITES**

Sorocaba

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

**UM ESTUDO FUZZY PARA PROPOR UM MODELO MATEMÁTICO
COMO AUXÍLIO AO DIAGNÓSTICO MÉDICO DAS
FARINGOTONSILITES**

Mariana Moretto Pissini

Orientadora: Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto

Sorocaba

2019

**UM ESTUDO FUZZY PARA PROPOR UM MODELO MATEMÁTICO
COMO AUXÍLIO AO DIAGNÓSTICO MÉDICO DAS
FARINGOTONSILITES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação da Professora Doutora Magda da Silva Peixoto.

Sorocaba

2019

Moretto Pissini, Mariana

Um estudo fuzzy para propor um modelo matemático como auxílio ao diagnóstico médico das faringotonsilites / Mariana Moretto Pissini. -- 2019. 100 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Magda da Silva Peixoto

Banca examinadora: Magda da Silva Peixoto, Érica Regina Filletti Nascimento, Antonio Noel Filho

Bibliografia

1. Relações Fuzzy. 2. Diagnóstico Médico. 3. Faringotonsilites. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano – CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Mariana Moretto Pissini, realizada em 21/02/2019:

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

Érica Filletti

Prof. Dr. Érica Regina Filletti Nascimento
UNESP

Antonio Noel Filho

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
IFSP

Dedico este trabalho aos meus pais, Reginaldo e Silvia, e ao meu irmão, Mario, os alicerces de minha vida.

Ao meu querido noivo, André Luigi, pelo apoio incondicional em todos os momentos, principalmente nos de incerteza, muito comuns para quem tenta trilhar novos caminhos. Sem vocês, nenhuma conquista valeria a pena.

AGRADECIMENTOS

Acredito que o amor é capaz de mover montanhas, de trazer a felicidade e a esperança onde elas já não mais habitavam. Por isso, em todas as coisas, desde as pequenas até as mais grandiosas, procuro colocar um toque de amor.

Diversas pessoas contribuíram, direta ou indiretamente, com a realização deste trabalho e nada mais justo do que retribuir com palavras de carinho.

Gostaria de agradecer a Deus, em primeiro lugar, por nunca me desamparar, por me proteger e iluminar em todos os momentos.

Ao meu noivo André Luigi pela paciência e compreensão nos momentos de desespero, pelo amor e abraço que confortam a alma, pelos risos, momentos leves e discursos motivacionais que me fizeram suportar toda a tensão que sentia, por fazer todos os dias com que eu acredite em mim mesma, pela companhia e parceria de hoje, amanhã e sempre. Eu te amo.

Ao meu pai Reginaldo por sempre acreditar em mim, nunca me deixar desistir e me motivar a ser um ser humano melhor a cada dia.

À minha mãe Silvia pelo amor incondicional, cuidado, proteção, exemplo e por sempre me apoiar independentemente de qual seja a minha decisão.

Ao meu irmão Mario pelo ombro amigo, ouvidos sempre atentos e sensibilidade em perceber meus sentimentos mesmo quando não os transformo em palavras.

À minha tia Selma pela incrível sintonia, auxílio, conselhos e amor. Que a cada “Primavera” sua vida tenha mais cores, mais flores e mais amores.

Às minhas primas Flávia e Fabiana pela contribuição, auxílio e paciência durante a realização deste trabalho.

À minha sogra Maria Salete pelas orações e palavras de otimismo.

À minha amada avó Clélia por ser uma pessoa de muita fé e tão otimista. Quanta generosidade tem em seu sorriso, quanta sabedoria tem em seu olhar e quanto aconchego tem em seus abraços. A senhora é o elo que liga toda a nossa família em um laço forte de amor e carinho. Obrigada por sempre acreditar em mim e por vibrar a cada uma de minhas pequenas conquistas.

À minha sempre amiga Flaviana por ser um ser humano maravilhoso com o qual eu pude aprender muito através de gestos singelos, pela amizade que permanece mesmo a cento e dez quilômetros de distância, pelas palavras de conforto, pelos cafés da tarde que

me faziam sentir tão amada como se eu estivesse pertinho de minha mãe e por sempre me mostrar, mesmo não tendo afinidade por Matemática, que tudo tem uma solução. Guardo, no fundo do meu coração, aquela frase que, em um dia tão escuro para mim, escreveste em uma tira de papel: “Doce coração de Maria, prepara-me um caminho seguro”. Gratidão hoje e sempre.

Às minhas amigas e ex-alunas Nina e Elena por me ensinarem tanto, mesmo sendo tão jovens. Vocês me motivam a ser uma professora melhor, mais justa e mais didática.

À minha amiga Vivian pela amizade sincera, risadas, brigadeiros maravilhosos, desabafos e, principalmente, pela delicadeza no modo de falar, sempre se preocupando com os meus sentimentos.

Aos meus queridos ex-alunos e colegas de trabalho do Colégio Photon (Campinas-SP) por terem contribuído tanto com o meu crescimento, não apenas profissional mas como ser humano. Durante os dois anos que trabalhei neste colégio tive a oportunidade de conhecer pessoas de caracteres maravilhosos e corações gigantes. Vocês foram para mim uma grande família da qual eu jamais me esquecerei.

Aos meus alunos e colegas de trabalho da OSE COC, do Colégio Sorocaba e do Colégio Dom Aguirre (Sorocaba/SP) por transformarem um local de trabalho em um ambiente tão acolhedor e por me ensinarem tanto em tão pouco tempo.

Aos meus eternos professores de Matemática Claudemir Camparini e Kátia Regina Yabiku pelo exemplo e incentivo que despertaram em mim a vontade de lecionar. Vocês foram grandes mestres dos quais eu jamais me esquecerei. Meus sinceros agradecimentos.

Aos professores Dr. Antonio Noel Filho e Dr^a. Érica Regina Filletti Nascimento por terem aceito participar de minha banca examinadora e pelas ricas contribuições.

À minha orientadora Prof^a. Dr^a. Magda da Silva Peixoto pelos ensinamentos, paciência e por ser sempre tão atenciosa. Em muitos momentos precisei desabafar e conversar como uma amiga e não como uma orientanda, obrigada por me ouvir e compartilhar experiências.

Aos amigos Fabio Takeshi Iriye, Lucas Zago e Denis Dias por me auxiliarem no LaTeX, nos estudos durante a dissertação e por compartilharem materiais, os quais me ajudaram muito nesta jornada.

Ao meu amigo Lucas Garcia Camargo pela amizade e por colaborar com a construção do “abstract” deste trabalho.

À minha amiga Beatriz Laiate que muito colaborou com os meus estudos. Não tenho palavras para lhe agradecer pelas tardes em que me auxiliou e sanou minhas inúmeras

dúvidas a respeito desta teoria tão nova para mim.

A todos os meus colegas e companheiros nas aulas do PROFMAT pelas sextas-feiras de muito estudo, tensão, força e divertimento.

À Universidade Federal de São Carlos, instituição que possibilitou a realização deste mestrado.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), por contribuir com minha formação.

Gratidão a todos que contribuíram de alguma forma não só com a realização deste trabalho, mas com a minha formação como pessoa. Peço desculpas se deixei de citar algum nome.

Fazei tudo por Amor.
Assim não há coisas pequenas: tudo é grande.
A perseverança nas pequenas coisas, por Amor, é heroísmo.
São Josemaria Escrivá

RESUMO

A prática médica consiste em um contínuo processo de tomada de decisões e a Lógica Fuzzy muito tem participado desse processo. Dentro deste contexto, esta pesquisa tem como objetivo principal realizar um estudo sobre conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy e uma aplicação deste estudo para propor um modelo matemático como auxílio ao diagnóstico médico de pacientes infectados com determinadas doenças no trato respiratório superior. Para isso foram consideradas as doenças: faringotonsilite viral, faringotonsilite estreptocócica, mononucleose e difteria; e utilizadas equações relacionais fuzzy para propor um modelo de diagnóstico médico relacionando os sintomas ou sinais de pacientes com essas quatro doenças.

Palavras-chaves: Relações Fuzzy. Diagnóstico Médico. Faringotonsilite viral. Faringotonsilite bacteriana. Difteria. Mononucleose. Conjuntos Fuzzy. Lógica Fuzzy.

ABSTRACT

Medical practice consists of a continuous decision-making process and Fuzzy Logic has participated in this process. In this context, this research has as main objective to carry out a study on basic concepts of Fuzzy Set Theory and an application of this study to propose a mathematical model as an aid to the medical diagnosis of patients infected with certain diseases in the upper respiratory tract. The following diseases were considered: viral pharyngotonsillitis, streptococcal pharyngotonsillitis, mononucleosis and diphtheria; and fuzzy relational equations were used to propose a medical diagnostic model relating the symptoms or signs of patients with these four diseases.

Key-words: Fuzzy relationships. Medical diagnostic. Viral pharyngotonsillitis. Bacterial pharyngotonsillitis. Diphtheria. Mononucleosis. Fuzzy sets. Fuzzy logic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação gráfica da função característica do conjunto dos números reais não negativos não pertencentes ao intervalo $[4,6]$	18
Figura 2 – Representação gráfica da função característica dos conjuntos: (a) $A = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid 4 \leq x \leq 7\}$; e (b) $B = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid 2 \leq x \leq 5\}$	24
Figura 3 – Representação gráfica da função característica do conjunto $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid 2 \leq x \leq 7\}$	25
Figura 4 – Representação gráfica da função característica do conjunto $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid 4 \leq x \leq 5\}$	25
Figura 5 – Representação gráfica da função característica do conjunto complementar de A (A').	25
Figura 6 – Ilustração de Subconjuntos Fuzzy e Crisp	34
Figura 7 – Representação gráfica da função de pertinência triangular que representa o conceito “aproximadamente 6”	35
Figura 8 – Representação gráfica da função de pertinência em forma de sino que representa o conceito “aproximadamente 6”	36
Figura 9 – Representação gráfica da função de pertinência trapezoidal que representa o conceito “aproximadamente 6”	36
Figura 10 – Representação gráfica da função de pertinência dos subconjuntos fuzzy A e B: (a)Subconjunto Fuzzy A; e (b)Subconjunto Fuzzy B.	39
Figura 11 – Operação de união entre os subconjuntos fuzzy A e B.	40
Figura 12 – Operação de intersecção entre os subconjuntos fuzzy A e B.	40
Figura 13 – Complementar do subconjunto fuzzy A.	41
Figura 14 – Subconjunto fuzzy das mulheres com 1,60 m abaixo do peso e seu complementar.	42
Figura 15 – Representação gráfica do α -nível, do suporte e do <i>core</i> de um conjunto fuzzy A representado por uma função de pertinência trapezoidal.	51
Figura 16 – Função de pertinência do subconjunto fuzzy A do Exemplo 1.12.	54
Figura 17 – Função f do Exemplo 1.12.	55
Figura 18 – Subconjunto $\hat{f}(A)$ do Exemplo 1.12.	55
Figura 19 – Esquema para se obter a imagem de um subconjunto fuzzy a partir do princípio de extensão para o Exemplo 1.12.	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades das operações de complemento, união e intersecção de conjuntos clássicos.	27
Tabela 2 – Representação tabular do conceito <i>febre alta</i> , para um conjunto universo discreto.	38
Tabela 3 – Propriedades das operações de complemento, união e intersecção de conjuntos fuzzy.	43
Tabela 4 – Ilustração de pacientes com febre e dor abdominal.	58
Tabela 5 – Representação na forma tabular de uma relação fuzzy binária.	59
Tabela 6 – Relação Fuzzy R : sintomas \times diagnósticos	77
Tabela 7 – Relação Fuzzy S : pacientes \times sintomas	77
Tabela 8 – Relação Fuzzy T : pacientes \times diagnósticos	92

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	SOBRE CONJUNTOS	16
1.1	Conceitos Básicos da Teoria Clássica de Conjuntos	16
1.2	Conjuntos Fuzzy	33
1.3	Operações com Subconjuntos Fuzzy	38
1.4	O conceito de α -nível	51
1.5	O Princípio de Extensão	53
2	RELAÇÕES E EQUAÇÕES RELACIONAIS FUZZY	57
2.1	Relações Fuzzy	57
2.2	Formas de Representações e Propriedades das Relações Binárias	59
2.3	Composição entre Relações Fuzzy Binárias	60
2.4	t-norma e t-conorma	65
2.5	Equações Relacionais Fuzzy	69
2.6	Equações Relacionais Fuzzy com a composição max-min	70
3	A MODELAGEM MATEMÁTICA	72
3.1	As faringotonsilites	72
3.2	O modelo	75
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
	REFERÊNCIAS	97

INTRODUÇÃO

Ao abandonar a idéia rígida de verdadeiro ou falso, em 1965, Lofti A. Zadeh, professor da Universidade da Califórnia, em Berkeley, redefiniu a forma como se pensar em lógica. Ele enfrentou diversas críticas ao longo do caminho, mas finalmente se tornou o “Pai da Lógica Fuzzy” [25] [12].

A característica especial da Lógica Fuzzy (também conhecida como Lógica Difusa), com base na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, é a de representar uma forma inovadora de manuseio de informações imprecisas. Tal lógica provê um método de traduzir expressões verbais, vagas, imprecisas e qualitativas, comuns na comunicação humana em uma forma compreensível pelos computadores. Desta forma, a tecnologia possibilitada pelo enfoque fuzzy tem um imenso valor prático, na qual se torna possível a inclusão da experiência de operadores humanos, impulsionando, desta forma, o desenvolvimento da Inteligência Artificial. As contribuições da Engenharia Médica no desenvolvimento de controladores inteligentes no pré e pós operatórios, na tecnologia de exames laboratoriais, no tratamento de imagens, na dosagem de anestésias e em sistemas de diagnósticos, são inegáveis [16] [23].

A Medicina é uma área na qual a aplicabilidade da Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi reconhecida bem cedo, em meados da década de 1970. Dentro desta área, a incerteza encontrada nos processos de diagnósticos das doenças tem sido foco de aplicações da Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

Com o aumento do volume de informações disponíveis aos médicos, a partir de novas tecnologias, o processo de classificar diferentes conjuntos de sintomas ou sinais sob um único nome e determinar as ações terapêuticas adequadas torna-se cada vez mais difícil. A Teoria dos Conjuntos Fuzzy, introduzida por Zadeh (1965), tem sido muito utilizada para lidar com o diagnóstico de doenças, uma vez que uma única doença pode se manifestar de forma diferente em pacientes e com vários graus de severidade. Além disso, um único sintoma pode ser indicativo de doenças distintas, e a presença de outras doenças em um mesmo indivíduo pode alterar completamente o padrão sintomático esperado para qualquer uma delas [7].

Geralmente, o médico reúne diversos dados de um mesmo paciente para obter um diagnóstico mais preciso, dentre esses dados estão o histórico passado do paciente, exames clínicos, resultados de exames laboratoriais e outros procedimentos investigativos, como raios X e ultrassom. Cada um dos dados fornecidos por cada uma dessas fontes carrega consigo graus variados de incerteza. O histórico passado, fornecido pelo paciente, pode ser

subjetivo, exagerado, subestimado ou incompleto. Erros podem ser cometidos durante os exames e determinados sintomas podem se passar despercebidos. Os medidores fornecidos por testes laboratoriais são frequentemente de precisão limitada, e a fronteira exata entre normal e patológico é, muitas vezes, incerta. Ultrassom e outros procedimentos similares exigem uma interpretação correta dos resultados. Assim, o estado e os sintomas do paciente podem ser conhecidos pelo médico apenas com um grau limitado de precisão.

Diante de tantas incertezas a respeito dos sintomas observados nos pacientes, bem como a incerteza sobre a relação dos sintomas com uma determinada doença, o objetivo dessa dissertação é realizar um estudo bibliográfico e uma aplicação por meio de relações fuzzy para auxiliar no diagnóstico de pacientes infectados com determinadas doenças do trato respiratório superior. Para isso foram consideradas as doenças: faringotonsilite viral, faringotonsilite estreptocócica, mononucleose e difteria; e utilizadas equações relacionais fuzzy para propor um modelo matemático de diagnóstico médico relacionando os sintomas ou sinais, coletados em tabelas e representados por matrizes, de vinte pacientes com essas quatro doenças. As perguntas que desejamos responder são: Esta teoria pode ser útil na resolução de problemas da medicina como, por exemplo, auxiliar no diagnóstico médico das faringotonsilites? Esta abordagem fornece resultados efetivamente aplicáveis?.

A motivação deste presente estudo se deu através da leitura do livro “Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática”, o qual pode ser encontrado em [3], e das diversas contribuições do Professor Doutor Laécio Carvalho de Barros em modelagem matemática fuzzy para auxiliar em diagnósticos médicos.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. Nos Capítulos 1 e 2 encontram-se os conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, Relações Fuzzy e Equações Relacionais Fuzzy. O desenvolvimento da modelagem matemática para auxiliar no diagnóstico médico das faringotonsilites e as discussões a respeito da aplicação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy em tal modelo, encontram-se no Capítulo 3. E por fim, no Capítulo 4, são apresentadas as considerações finais.

1 SOBRE CONJUNTOS

A fala humana é repleta de termos subjetivos e, que na maioria das vezes, expressam incertezas. Quando nos deparamos com perguntas como “aquela pessoa é muito jovem?”, “hoje está ventando muito forte?”, “está com pouca dor?” ou “este copo está muito cheio?”, respostas como “sim” ou “não” nem sempre representam o que queremos expressar. De certo modo, “jovem”, “forte”, “dor” e “cheio” podem representar subjetividade, pois é difícil expressar, com precisão, o que exatamente é ser *jovem*, ventar *forte*, ter *dor*, ou estar *cheio*. Quando trabalhamos com conjuntos fuzzy, tal impressão é associada com uma função, que chamamos de função de pertinência e, deste modo, conseguimos expressar o quanto é ser “*muito jovem*”, ventar “*muito forte*”, sentir “*pouca dor*”, ou estar “*muito cheio*”.

Um conjunto clássico, chamado em inglês de *crisp*, fica bem definido no sentido de sabermos identificar se um elemento pertence a um conjunto ou não. Por exemplo, a letra “a” é uma vogal e a letra “m” não, ou o número dois é par e o número três não. Isso caracteriza um conjunto clássico (*crisp*). Agora, seja J o conjunto das pessoas jovens definido como $J = \{x \in U \mid x \leq 30 \text{ anos}\}$, ou seja, uma pessoa é considerada jovem se tiver 30 anos de idade ou menos. Então, de acordo com escrevemos o conjunto J , uma pessoa com 31 anos de idade não estaria em J . Mas, tal pessoa poderia ser considerada velha? Não. Foi a partir de desafios como esse, no qual a propriedade que define o conjunto é imprecisa, que surgiu a ideia de conjuntos fuzzy e função de pertinência, que serão definidos mais adiante [5].

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos de Conjuntos Clássicos e Conjuntos Fuzzy, assim como os principais resultados dessa teoria ilustrados com exemplos. As principais referências adotadas para este capítulo foram: [3], [14], [5], [6], [7], [9] e [23].

1.1 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA CLÁSSICA DE CONJUNTOS

Em Matemática, alguns termos são aceitos sem definição matemática formal, de modo que a experiência cotidiana e exemplos ilustrativos sejam suficientes para expressar e repassar suas principais características. Tais termos recebem o nome de noções primitivas.

A noção matemática de conjunto é praticamente a mesma que se utiliza na linguagem comum: é o mesmo que agrupamento, classe ou coleção de objetos distinguíveis que compartilham de algumas características em comum. Tais características qualificam os objetos a pertencer ou não ao conjunto. Cada membro ou objeto que entra na formação

do conjunto é chamado de *elemento do conjunto* [15].

Usualmente, representa-se um conjunto por uma letra maiúscula e seus elementos por letras minúsculas. Quando desenvolve-se um certo assunto de Matemática, admite-se a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no tal assunto, mais precisamente, é o conjunto do qual todos os conjuntos em estudo são subconjuntos. Esse conjunto U recebe o nome de *conjunto universo* e a partir dele outros conjuntos podem ser formados.

Outra noção primitiva, ou seja, sem definição é a noção de pertinência. Representa-se simbolicamente por $x \in A$ quando determinado objeto x é elemento de um conjunto A . Para indicar que x não é elemento de A , escreve-se: $x \notin A$.

Uma forma de se indicar a pertinência de um elemento x em um conjunto A pode ser através de uma *função característica* $\chi_A(x)$:

Definição 1.1. *Seja U um conjunto e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

A função característica especifica quais elementos de U pertencem ou não ao conjunto A , ou seja, para cada $x \in U$, $\chi_A(x) = 1$ indica que o elemento x está em A , enquanto $\chi_A(x) = 0$ indica que o elemento x não está em A .

Particularmente, a representação de conjuntos por meio de sua função característica é bastante importante dado que pode ser generalizada para conjuntos *fuzzy* [3] [14].

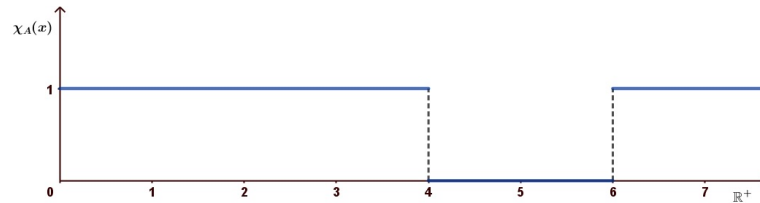
Exemplo 1.1. Considere o conjunto dos números reais não negativos (\mathbb{R}^+) e seja A o conjunto dos números reais x tais que $x \notin [4, 6]$. A função característica do conjunto A é:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 1 abaixo representa essa situação graficamente:

É de importância destacar que os valores 0 e 1 provenientes da definição de uma função característica são apenas símbolos utilizados para distinguir os elementos de um conjunto universo que pertencem a um subconjunto, do conjunto universo, daqueles que não pertencem, ou seja, os valores 0 e 1, neste caso, são desprovidos de significado numérico.

Figura 1 – Representação gráfica da função característica do conjunto dos números reais não negativos não pertencentes ao intervalo $[4,6]$.



Fonte: [14], adaptado pela autora.

A seguir serão revisados os principais conceitos de conjuntos clássicos, assim como algumas proposições e resultados importantes, pois são base para os estudos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

Definição 1.2. *Dois conjuntos A e B são iguais, notado por $A = B$ se, e somente se, eles tiverem os mesmos elementos. Simbolicamente,*

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Quando A e B não são iguais, nota-se $A \neq B$.

Definição 1.3. *O conjunto vazio não tem elementos. É notado por \emptyset ou $\{\}$.*

Definição 1.4. *Uma família ou coleção de conjuntos é um conjunto cujos elementos são conjuntos. Famílias de conjuntos são notadas com letras maiúsculas em itálico.*

Definição 1.5. *Se A e B são conjuntos, então A está contido em B , notado por $A \subseteq B$, se e somente se cada elemento de A for elemento de B . Se $A \subseteq B$, então A é um subconjunto de B e, se existir um elemento x tal que $x \in B$ e $x \notin A$, então A é um subconjunto próprio de B , notado por $A \subset B$. Se $A \subseteq B$ não se verifica, escreve-se $A \not\subseteq B$. É interessante notar que B inclui A ($B \supseteq A$) é o mesmo que $A \subseteq B$. Todo conjunto é subconjunto de si próprio e todo conjunto é subconjunto do conjunto universo.*

Teorema 1.1. *Para qualquer conjunto A , $\emptyset \subset A$.*

Demonstração. Supõe-se, por absurdo, que existe um conjunto A tal que $\emptyset \not\subset A$. Isso significa que existe pelo menos um elemento x tal que $x \in \emptyset$ e $x \notin A$. Assim, $\exists x \in \emptyset$ contradiz a definição de *conjunto vazio*, já que o *conjunto vazio* é definido como o conjunto que não possui elementos. Logo, a proposição $\exists A$ tal que $\emptyset \not\subset A$ é falsa.

Portanto, $\emptyset \subset A$. □

Teorema 1.2. *Os conjuntos A e B são iguais, se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.*

Demonstração. Será demonstrado que $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

(i) (\Rightarrow) Sejam A e B conjuntos tais que $A = B$. Por definição, como $A = B$ tem-se que $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ e $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$.

Logo, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

(ii) (\Leftarrow) Sejam A e B conjuntos tais que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então, $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ e $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$. Assim, $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Logo, $A = B$.

De (i) e (ii) tem-se que $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. □

Exemplo 1.2. Considere os conjuntos:

- Conjunto formado pelas letras da palavra AMOR: X
- Conjunto formado pelas letras da palavra RAMO: Y
- Conjunto formado pelas letras da palavra AMORAS: Z
- Conjunto formado pelas letras da palavra AROMAS: W

Observa-se que:

$X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, logo $X = Y$

$X \subset Z$ e $Z \not\subseteq X$, logo $X \neq Z$

$Z \subseteq W$ e $W \subseteq Z$, logo $Z = W$

Definição 1.6. A família de todos os subconjuntos de um conjunto A é chamada de conjunto potência de A e notada por $P(A)$ ou 2^A .

Para a demonstração do teorema a seguir será considerada a seguinte observação: o número de elementos de um conjunto finito A é chamado de *cardinalidade* de A e é notado por $|A|$. Além da observação, será utilizada a combinação de n elementos tomados p a p .

Teorema 1.3. Se um conjunto finito A tem n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos, ou seja, $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^n$

Demonstração. Se um conjunto A tem n elementos, então o número de subconjuntos é:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n$$

Nesta demonstração usou-se o Binômio de Newton $(x + y)^n = \sum_{p=0}^n x^p y^{n-p}$, com $x = y = 1$. □

Exemplo 1.3. Seja $X = \{1, 2, 3\}$. Formando os subconjuntos de X , tem-se que:

- Subconjuntos com exatamente 0 elementos: \emptyset
- Subconjuntos com exatamente 1 elemento: $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$
- Subconjuntos com exatamente 2 elementos: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$
- Subconjuntos com exatamente 3 elementos: $\{1, 2, 3\} = X$

Desta forma, tem-se $8 = 2^3$ subconjuntos de X .

Definição 1.7. Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U . A união dos conjuntos A e B é o conjunto definido por:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

em que "ou" tem o significado inclusivo, ou seja, uma das seguintes situações deve ser satisfeita: $x \in A$ e $x \notin B$, $x \notin A$ e $x \in B$, $x \in A$ e $x \in B$.

Definição 1.8. Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U . A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto definido por:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Definição 1.9. Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U . Os conjuntos A e B são chamados disjuntos se:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Definição 1.10. O complemento relativo de um conjunto A em relação a um conjunto X , notado por $X - A$ (também chamado de conjunto diferença) é o conjunto que contém todos os elementos de X que não são elementos de A :

$$X - A = \{x | x \in X \text{ e } x \notin A\}.$$

O complemento absoluto de um conjunto A , também chamado de complementar de um conjunto A , notado por A' , é o conjunto $U - A$. Desta forma, tem-se: $X - A = X \cap A'$.

Teorema 1.4. Seja A um conjunto e seja U o conjunto universo, então $A \cup A' = U$ e $A \cap A' = \emptyset$.

Demonstração. (i) Será demonstrada a seguinte igualdade $A \cup A' = U$.

(1) (\Rightarrow) Seja $x \in (A \cup A')$. Então, $x \in A$ ou $x \in A'$. Logo, $x \in U$.

(2) (\Leftarrow) Seja $x \in U$. Então, $x \in A$ ou $x \in A'$. Logo, $x \in (A \cup A')$.

Portanto, por (1) e (2), tem-se: $A \cup A' = U$.

(ii) Será demonstrada a seguinte igualdade $A \cap A' = \emptyset$.

Supõe-se que $A \cap A' \neq \emptyset$. Então, $\exists x \in (A \cap A')$. Então, $x \in A$ e $x \in A'$. O que contradiz a definição de conjunto complementar de A em U .

Portanto, $A \cap A' = \emptyset$.

□

Teorema 1.5. *Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U . Então: $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.*

Demonstração. Para provar que $A \cap B \subset A$ deve-se mostrar que qualquer elemento do conjunto $A \cap B$ também está em A .

Seja $x \in A \cap B$ um elemento qualquer. Então, pela definição de intersecção, $x \in A$ e $x \in B$. Logo, $x \in A$.

Portanto, $A \cap B \subset A$.

Analogamente, prova-se que $A \cap B \subset B$.

□

Teorema 1.6. *Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U . Então, $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Sabe-se que $A \subset B$ e deve-se provar que $A \cap B = A$. Pelo Teorema 1.5., $A \cap B \subset A$ logo, para se mostrar a igualdade, é preciso mostrar que $A \subset A \cap B$.

Seja $x \in A$, como $A \subset B$ então $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in A \cap B$. Como x é um elemento qualquer de A , mostrou-se que qualquer elemento de A é também elemento de $A \cap B$, ou seja, $A \subset A \cap B$.

(\Leftarrow) Sabe-se que $A \cap B = A$ e deve-se provar que $A \subset B$. Por hipótese, $A = A \cap B$ e, pelo Teorema 1.5., $A \cap B \subset B$, logo $A \subset B$.

□

Em termos das funções características, pode-se expressar as operações de união e intersecção entre conjuntos, e também, o complemento e o subconjunto de um conjunto. É importante reescrever as definições vistas anteriormente através das funções características, pois poderão ser generalizadas para conjuntos fuzzy.

Proposição 1.1. *Seja U o conjunto universo e, A e B subconjuntos de U . Então são válidas as afirmações:*

(i) $A \subseteq B$, se e somente se $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$;

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \chi_{A \cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cup B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cup B \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii) \quad \chi_{A \cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ e } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cap B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases}
\end{aligned}$$

(iv) Se A' é o complemento de um conjunto A , então $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

Demonstração. (i) (\Rightarrow) Sejam A e B conjuntos tais que $A \subseteq B$. Considera-se as funções características de tais conjuntos como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

e

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin B \end{cases}$$

Supõe-se que $\chi_A(x) > \chi_B(x)$, então $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$. Assim, $x \in A$ e $x \notin B$, que contradiz a hipótese, pois com a hipótese $A \subseteq B$, temos que $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

Portanto, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$.

(\Leftarrow) Seja $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$. Supõe-se que $A \not\subseteq B$, então $\exists x \in A$ tal que $x \notin B$. Assim, $\exists x \in A$ tal que $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$, que contradiz a hipótese $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$.

Portanto, $A \subseteq B$.

(ii) Como A e B são subconjuntos clássicos de U , então possuem funções características:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

e

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin B \end{cases}$$

Se $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 0$ tem-se: $\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$
 $\Rightarrow \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0 \Rightarrow x \notin A \cup B$.

Se $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 1$ tem-se: $\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1$. Logo, $x \notin A$ e $x \in B$
 $\Rightarrow \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1 \Rightarrow x \in A \cup B$.

Se $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 1$ tem-se: $\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1$. Logo, $x \in A$ e $x \in B$
 $\Rightarrow \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1 \Rightarrow x \in A \cup B$.

Se $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$ tem-se: $\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1$. Logo, $x \in A$ e $x \notin B$
 $\Rightarrow \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1 \Rightarrow x \in A \cup B$.

Portanto,

$$\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cup B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cup B \end{cases}$$

(iii) Como A e B são subconjuntos clássicos de U , então possuem funções características:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

e

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin B \end{cases}$$

Se $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 0$ tem-se: $\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$
 $\Rightarrow \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0 \Rightarrow x \notin A \cap B$.

Se $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 1$ tem-se: $\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0$. Logo, $x \notin A$ e $x \in B$
 $\Rightarrow \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0 \Rightarrow x \notin A \cap B$.

Se $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 1$ tem-se: $\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1$. Logo, $x \in A$ e $x \in B$
 $\Rightarrow \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1 \Rightarrow x \in A \cap B$.

Se $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$ tem-se: $\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0$. Logo, $x \in A$ e $x \notin B$
 $\Rightarrow \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0 \Rightarrow x \notin A \cap B$.

Portanto,

$$\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cap B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases}$$

(iv) Sejam A um subconjunto clássico de U e A' o complemento de A . Como A é subconjunto clássico então possui função característica:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Por definição, A' é o conjunto que contém todos os elementos de U que não são elementos de A . Logo, representando a função característica de A' tem-se:

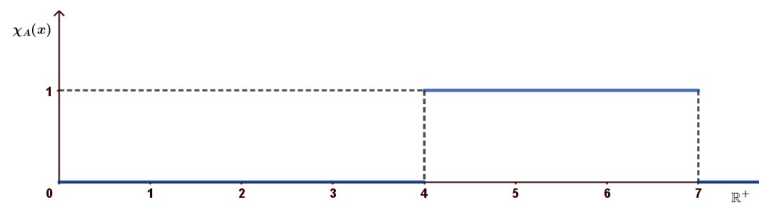
$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin A \\ 0, & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Portanto, $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$. □

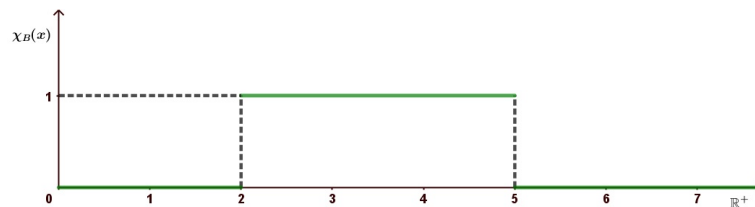
O exemplo a seguir mostra graficamente a função característica de dois conjuntos A e B assim como a representação gráfica das funções características dos conjuntos união $A \cup B$, intersecção $A \cap B$ e complementar de A .

Exemplo 1.4. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}^+ | 4 \leq x \leq 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^+ | 2 \leq x \leq 5\}$, cujas funções características estão representadas nas Figuras 2(a) e 2(b), respectivamente:

Figura 2 – Representação gráfica da função característica dos conjuntos: (a) $A = \{x \in \mathbb{R}^+ | 4 \leq x \leq 7\}$; e (b) $B = \{x \in \mathbb{R}^+ | 2 \leq x \leq 5\}$.



(a)

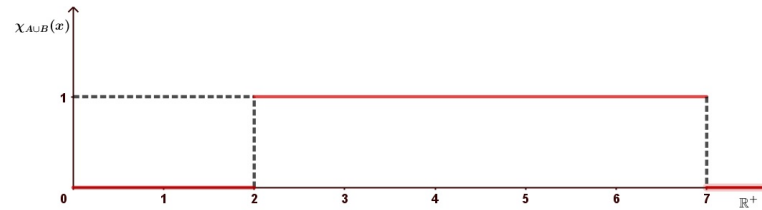


(b)

Fonte: [14], adaptado pela autora.

A representação gráfica da função característica do conjunto união $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}^+ | 2 \leq x \leq 7\}$ está mostrada na Figura 3.

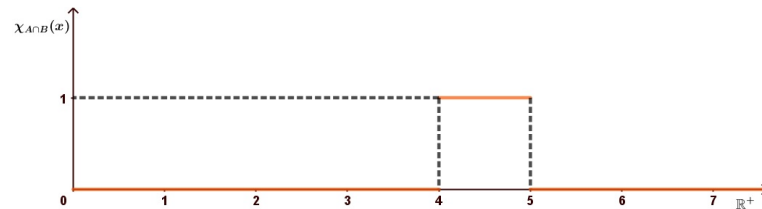
Figura 3 – Representação gráfica da função característica do conjunto $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid 2 \leq x \leq 7\}$.



Fonte: [14], adaptado pela autora.

A representação gráfica da função característica do conjunto $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid 4 \leq x \leq 5\}$ está mostrada na Figura 4.

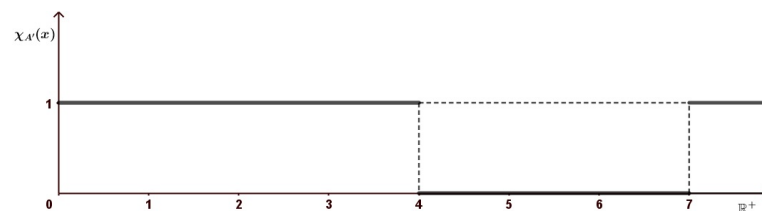
Figura 4 – Representação gráfica da função característica do conjunto $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid 4 \leq x \leq 5\}$.



Fonte: [14], adaptado pela autora.

A representação gráfica da função característica do conjunto complementar de A (A') está mostrada na Figura 5.

Figura 5 – Representação gráfica da função característica do conjunto complementar de A (A').



Definição 1.11. *Seja $A = \{A_{s_1}, A_{s_2}, A_{s_3}, \dots\}$ uma família de conjuntos, em que $A_{s_i} = A_{s_j}$ se $s_i = s_j$. Os elementos do conjunto A podem então ser identificados pelos elementos do conjunto $I = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$. Logo, escreve-se:*

$$A = \{A_i \mid i \in I\}$$

.

Os elementos de I são chamados de *índices*, o conjunto I , de *conjunto índice*, e A , de *conjunto indexado*.

Definição 1.12. *Seja I um conjunto índice. As operações de união e intersecção podem ser generalizadas como:*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a | a \in A_i, \text{ para pelo menos um } i \in I\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a | a \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}$$

Exemplos para as operações de união e intersecção generalizadas serão descritos abaixo.

Exemplo 1.5. 1. Se $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, 2]$, $A_3 = [0, 3]$, $A_4 = [0, 4]$, ... , $A_n = [0, n]$. Então:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = [0, n]$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = [0, 1]$$

2. Sejam os conjuntos:

$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 2\};$$

$$A_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 3\};$$

$$A_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 4\}.$$

Então, $n \in (A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ se, e somente se, n é múltiplo de 2 ou de 3 ou de 4, ou seja:

$$\bigcup_{i=2}^4 A_i = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, \dots\}$$

E, $n \in (A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ se, e somente se, n é múltiplo de 2, 3 e 4 simultaneamente, ou seja, se n é múltiplo de 12, logo:

$$\bigcap_{i=2}^4 A_i = \{0, 12, 24, 36, \dots\}$$

Definição 1.13. *Uma partição $\mathbf{p}(A)$ de um conjunto A , $\mathbf{p}(A) = \{A_i | i \in I\}$, é uma família de subconjuntos distintos e não vazios de A tal que $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i, j \in I$ ($i \neq j$). Os conjuntos A_i são chamados de blocos da partição.*

Definição 1.14. A diferença simétrica dos conjuntos A e B , notada por $A + B$ é o conjunto definido por:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

Teorema 1.7. Sejam A , B e C subconjuntos do universo U , então as seguintes igualdades, descritas na Tabela 1, se verificam:

Tabela 1 – Propriedades das operações de complemento, união e intersecção de conjuntos clássicos.

1	Involução	$A'' = A$
2	Comutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3	Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4	Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5	Idempotência	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6	Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
7	Absorção por U e \emptyset	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
8	Identidade	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
9	Contradição	$A \cap A' = \emptyset$
10	Meio excluído	$A \cup A' = U$
11	De Morgan	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

As propriedades (9) e (10) já foram demonstradas e as outras propriedades serão demonstradas a seguir.

- $A'' = A$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in A''$. Então, pela definição de conjunto complementar, se $x \in A''$ então $x \in U$ e $x \notin A'$.

Desta forma, utiliza-se novamente a definição de conjunto complementar, se $x \notin A'$ então $x \in A$.

Logo, qualquer elemento de A'' é também elemento de A , ou seja, $A'' \subset A$.

(\Leftarrow) Seja $x \in A$. Então, pela definição de conjunto complementar, se $x \in A$ então $x \notin A'$.

Desta forma, utiliza-se novamente a definição de conjunto complementar, se $x \notin A'$ então $x \in A''$.

Logo, qualquer elemento de A é também elemento de A'' , ou seja, $A \subset A''$.

Portanto, como $A'' \subset A$ e $A \subset A''$, conclui-se que $A'' = A$. \square

- $A \cup B = B \cup A$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in (A \cup B)$. Então, pela definição de união, $x \in A$ ou $x \in B$. Assim, pode-se escrever $x \in B$ ou $x \in A$.

Desta forma, é possível afirmar que, $x \in (B \cup A)$.

Logo, qualquer elemento de $A \cup B$ é também elemento de $B \cup A$, ou seja, $(A \cup B) \subset (B \cup A)$.

(\Leftarrow) Seja $x \in (B \cup A)$. Então, pela definição de união, $x \in B$ ou $x \in A$. Assim, pode-se escrever $x \in A$ ou $x \in B$.

Desta forma, é possível afirmar que, $x \in (A \cup B)$.

Logo, qualquer elemento de $B \cup A$ é também elemento de $A \cup B$, ou seja, $(B \cup A) \subset (A \cup B)$.

Portanto, como $(A \cup B) \subset (B \cup A)$ e $(B \cup A) \subset (A \cup B)$, conclui-se que $A \cup B = B \cup A$. \square

- $A \cap B = B \cap A$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in (A \cap B)$. Então, pela definição de intersecção, $x \in A$ e $x \in B$. Assim, pode-se escrever $x \in B$ e $x \in A$.

Desta forma, é possível afirmar que, $x \in (B \cap A)$.

Logo, qualquer elemento de $A \cap B$ é também elemento de $B \cap A$, ou seja, $(A \cap B) \subset (B \cap A)$.

(\Leftarrow) Seja $x \in (B \cap A)$. Então, pela definição de intersecção, $x \in B$ e $x \in A$. Assim, pode-se escrever $x \in A$ e $x \in B$.

Desta forma, é possível afirmar que, $x \in (A \cap B)$.

Logo, qualquer elemento de $B \cap A$ é também elemento de $A \cap B$, ou seja, $(B \cap A) \subset (A \cap B)$.

Portanto, como $(A \cap B) \subset (B \cap A)$ e $(B \cap A) \subset (A \cap B)$, conclui-se que $A \cap B = B \cap A$. \square

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in ((A \cup B) \cup C)$. Então, pela definição de união, $x \in (A \cup B)$ ou $x \in C$. Assim, $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$. Desta forma, $x \in A$ ou $x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup (B \cup C))$.

Logo, qualquer elemento de $(A \cup B) \cup C$ é também elemento de $A \cup (B \cup C)$, ou seja, $((A \cup B) \cup C) \subset (A \cup (B \cup C))$.

(\Leftarrow) Seja $x \in (A \cup (B \cup C))$. Então, pela definição de união, $x \in A$ ou $x \in (B \cup C)$. Assim, $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$. Desta forma, $x \in (A \cup B)$ ou $x \in C \Rightarrow x \in ((A \cup B) \cup C)$.

Logo, qualquer elemento de $A \cup (B \cup C)$ é também elemento de $(A \cup B) \cup C$, ou seja, $(A \cup (B \cup C)) \subset ((A \cup B) \cup C)$.

Portanto, como $((A \cup B) \cup C) \subset (A \cup (B \cup C))$ e $(A \cup (B \cup C)) \subset ((A \cup B) \cup C)$, conclui-se que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. \square

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in ((A \cap B) \cap C)$. Então, pela definição de intersecção, $x \in (A \cap B)$ e $x \in C$. Assim, $x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C$. Desta forma, $x \in A$ e $x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap (B \cap C))$.

Logo, qualquer elemento de $(A \cap B) \cap C$ é também elemento de $A \cap (B \cap C)$, ou seja, $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$.

(\Leftarrow) Seja $x \in (A \cap (B \cap C))$. Então, pela definição de intersecção, $x \in A$ e $x \in (B \cap C)$. Assim, $x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C$. Desta forma, $x \in (A \cap B)$ e $x \in C \Rightarrow x \in ((A \cap B) \cap C)$.

Logo, qualquer elemento de $A \cap (B \cap C)$ é também elemento de $(A \cap B) \cap C$, ou seja, $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$.

Portanto, como $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ e $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$, conclui-se que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. \square

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in (A \cap (B \cup C))$. Então, pela definição de intersecção, pode-se escrever que $x \in A$ e $x \in (B \cup C)$. Assim, pela definição de união, $x \in A$

e $(x \in B \text{ ou } x \in C)$. Desta forma, é possível afirmar que, ao mesmo tempo, $(x \in A \text{ e } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ e } x \in C)$. Isto é, $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$.

Logo, qualquer elemento de $A \cap (B \cup C)$ é também elemento de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, ou seja, $(A \cap (B \cup C)) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(\Leftarrow) Seja $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Então, pela definição de união, pode-se escrever que $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$. Desta forma, pela definição de intersecção, $(x \in A \text{ e } x \in B)$ ou $(x \in A \text{ e } x \in C)$. É possível afirmar que: $x \in A$ e $(x \in B \text{ ou } x \in C) \Rightarrow x \in A$ e $x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap (B \cup C))$.

Logo, qualquer elemento de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ é também elemento de $A \cap (B \cup C)$, ou seja, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset (A \cap (B \cup C))$.

Portanto, como $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset (A \cap (B \cup C))$, conclui-se que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. \square

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in (A \cup (B \cap C))$. Então, pela definição de união, $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$. Assim, pela definição de intersecção, $x \in A$ ou $(x \in B \text{ e } x \in C)$. Desta forma, é possível afirmar que, ao mesmo tempo, $(x \in A \text{ ou } x \in B)$ e $(x \in A \text{ ou } x \in C)$. Isto é, $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.

Logo, qualquer elemento de $A \cup (B \cap C)$ é também elemento de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, ou seja, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(\Leftarrow) Seja $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$. Então, pela definição de intersecção, $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$. E, pela definição de união, $(x \in A \text{ ou } x \in B)$ e $(x \in A \text{ ou } x \in C)$. Isto é, $x \in A$ ou $(x \in B \text{ e } x \in C) \Rightarrow x \in A$ ou $x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup (B \cap C))$.

Logo, qualquer elemento de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ é também elemento de $A \cup (B \cap C)$, ou seja, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Portanto, como $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$, conclui-se que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. \square

- $A \cup A = A$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in (A \cup A)$. Então, pela definição de união, $x \in A$ ou $x \in A$. Isto é, $x \in A$.

Logo, qualquer elemento de $A \cup A$ é também elemento de A , ou seja, $(A \cup A) \subset A$.

(\Leftarrow) Seja $x \in A$. Então, $x \in A$ ou $x \in A$. Isto é, $x \in (A \cup A)$.

Logo, qualquer elemento de A é também elemento de $A \cup A$, ou seja, $A \subset (A \cup A)$.
Portanto, como $(A \cup A) \subset A$ e $A \subset (A \cup A)$, conclui-se que $A \cup A = A$. \square

- $A \cap A = A$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in (A \cap A)$. Então, pela definição de intersecção, $x \in A$ e $x \in A$. Isto é, $x \in A$.

Logo, qualquer elemento de $A \cap A$ é também elemento de A , ou seja, $(A \cap A) \subset A$.

(\Leftarrow) Seja $x \in A$. Então, $x \in A$ e $x \in A$. Isto é, $x \in (A \cap A)$.

Logo, qualquer elemento de A é também elemento de $A \cap A$, ou seja, $A \subset (A \cap A)$.

Portanto, como $(A \cap A) \subset A$ e $A \subset (A \cap A)$, conclui-se que $A \cap A = A$. \square

- $A \cup (A \cap B) = A$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in A \cup (A \cap B)$. Então, pela definição de união, $x \in A$ ou $x \in (A \cap B)$. E, pela definição de intersecção, $x \in A$ ou $(x \in A \text{ e } x \in B) \Rightarrow x \in A$ ou $x \in A$ e $x \in A$ ou $x \in B$. Isto é, $x \in A$.

Logo, qualquer elemento de $A \cup (A \cap B)$ é também elemento de A , ou seja, $A \cup (A \cap B) \subset A$.

(\Leftarrow) Seja $x \in A$. Então, pode-se escrever $x \in A$ ou $x \in (A \cap B)$. Assim, pela definição de união, $x \in A \cup (A \cap B)$.

Logo, qualquer elemento de A é também elemento de $A \cup (A \cap B)$, ou seja, $A \subset A \cup (A \cap B)$.

Portanto, como $A \cup (A \cap B) \subset A$ e $A \subset A \cup (A \cap B)$, conclui-se que $A \cup (A \cap B) = A$. \square

Analogamente, pode-se demonstrar a igualdade (6) $A \cap (A \cup B) = A$.

- $A \cup U = U$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $x \in A \cup U$. Então, pela definição de união, $x \in A$ ou $x \in U$. Como A é um subconjunto do universo U temos que $x \in U$.

Logo, qualquer elemento de $A \cup U$ é também elemento de U , ou seja, $A \cup U \subset U$.

(\Leftarrow) Supõe-se que existe $x \in U$ tal que $x \notin A \cup U$. Então, pela definição de união, $x \notin A$ e $x \notin U$. O que é uma contradição.

Logo, qualquer elemento de U é também elemento de $A \cup U$, ou seja, $U \subset A \cup U$.

Portanto, como $A \cup U \subset U$ e $U \subset A \cup U$, conclui-se que $A \cup U = U$. \square

- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Demonstração. Pelo Teorema 1.1., para qualquer conjunto A , tem-se $\emptyset \subset A$. E, pelo Teorema 1.6., $\emptyset \subset A \Leftrightarrow \emptyset \cap A = \emptyset$.

Portanto, $A \cap \emptyset = \emptyset$. □

- $A \cup \emptyset = A$

Demonstração. (\Rightarrow) Será demonstrado que $A \cup \emptyset \subset A$.

Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então, pela definição de união, $x \in A$ ou $x \in \emptyset$, como não existem elementos no conjunto vazio então $x \in A$.

Logo, qualquer elemento de $A \cup \emptyset$ é também elemento de A , ou seja, $A \cup \emptyset \subset A$.

(\Leftarrow) Será demonstrado que $A \subset A \cup \emptyset$.

Seja $x \in A$. Então, pode-se escrever que $x \in A$ ou $x \in \emptyset$. Assim, $x \in A \cup \emptyset$.

Logo, qualquer elemento de A é também elemento de $A \cup \emptyset$, ou seja, $A \subset A \cup \emptyset$.

Portanto, como $A \cup \emptyset \subset A$ e $A \subset A \cup \emptyset$, conclui-se que $A \cup \emptyset = A$. □

- $A \cap U = A$

Demonstração. Por hipótese, o conjunto A é um subconjunto do conjunto universo U . Logo, $A \subset U$. E, pelo Teorema 1.6., $A \subset U \Leftrightarrow A \cap U = A$.

Portanto, $A \cap U = A$. □

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja x um elemento qualquer tal que $x \in (A \cap B)'$. Então, pela definição de conjunto complementar, $x \notin (A \cap B)$. Assim, tem-se que $x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \in A'$ ou $x \in B'$. Pela definição de união, $x \in (A' \cup B')$.

Logo, qualquer elemento de $(A \cap B)'$ é também elemento de $A' \cup B'$, ou seja, $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$.

(\Leftarrow) Seja x um elemento qualquer tal que $x \in A' \cup B'$. Então, pela definição de união, $x \in A'$ ou $x \in B'$. E, pela definição de conjunto complementar, pode-se escrever que $x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B)$. Assim, $x \in (A \cap B)'$.

Logo, qualquer elemento de $A' \cup B'$ é também elemento de $(A \cap B)'$, ou seja, $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$.

Portanto, como $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ e $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$, conclui-se que $(A \cap B)' = A' \cup B'$. □

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja x um elemento qualquer tal que $x \in (A \cup B)'$. Então, pela definição de conjunto complementar, $x \notin (A \cup B)$. Assim, tem-se que $x \notin A$ e $x \notin B \Rightarrow x \in A'$ e $x \in B'$. Pela definição de intersecção, $x \in (A' \cap B')$.

Logo, qualquer elemento de $(A \cup B)'$ é também elemento de $A' \cap B'$, ou seja, $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$.

(\Leftarrow) Seja x um elemento qualquer tal que $x \in A' \cap B'$. Então, pela definição de intersecção, $x \in A'$ e $x \in B'$. E, pela definição de conjunto complementar, pode-se escrever que $x \notin A$ e $x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cup B)$. Assim, $x \in (A \cup B)'$.

Logo, qualquer elemento de $A' \cap B'$ é também elemento de $(A \cup B)'$, ou seja, $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$.

Portanto, como $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$ e $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$, conclui-se que $(A \cup B)' = A' \cap B'$. \square

1.2 CONJUNTOS FUZZY

Um conjunto clássico, como já visto, é bem definido por sua função característica, a qual atribui o valor 1 ou 0 a cada elemento do conjunto universo e, desta forma, pode-se estabelecer se um elemento pertence ou não ao conjunto em questão.

Um conjunto fuzzy é uma generalização da noção clássica de conjuntos e é bem definido por sua função de pertinência, a qual atribui um valor no intervalo de 0 a 1 a cada elemento do conjunto universo e, desta forma, pode-se estabelecer o grau de pertinência do elemento ao conjunto em questão. O grau de pertinência de um elemento do conjunto universo a um conjunto fuzzy expressa o grau de compatibilidade do elemento com o conceito representado pelo conjunto fuzzy [14].

Desta forma, comparando com os conjuntos clássicos, os quais são determinados pela função característica, um conjunto fuzzy fica determinado pela sua função pertinência.

Definição 1.15. *Seja U um conjunto universo clássico. Um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função $\varphi_F : U \rightarrow [0, 1]$, pré fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F .*

O valor $\varphi_F(x) \in [0, 1]$ indica o grau de pertinência com o qual o elemento x de U está no conjunto fuzzy F , desta forma, tem-se que $\varphi_F(x) = 0$ e $\varphi_F(x) = 1$ indicam a não pertinência e a pertinência completa do elemento x ao conjunto fuzzy F , respectivamente.

O conjunto fuzzy foi obtido ampliando-se o contradomínio da função característica que é representado pelo conjunto $\{0, 1\}$, para o intervalo $[0, 1]$. Por isso, pode-se dizer que o conjunto clássico é um caso particular de um certo conjunto fuzzy. Um subconjunto clássico, na linguagem fuzzy, costuma ser denominado por subconjunto crisp.

Um subconjunto fuzzy F é composto por elementos x de um conjunto clássico U , providos de um valor de pertinência a F , dado por $\varphi_F(x)$. Desta forma, pode-se dizer que um subconjunto fuzzy F de U é dado por:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)) / x \in U\}$$

O subconjunto clássico de U definido por:

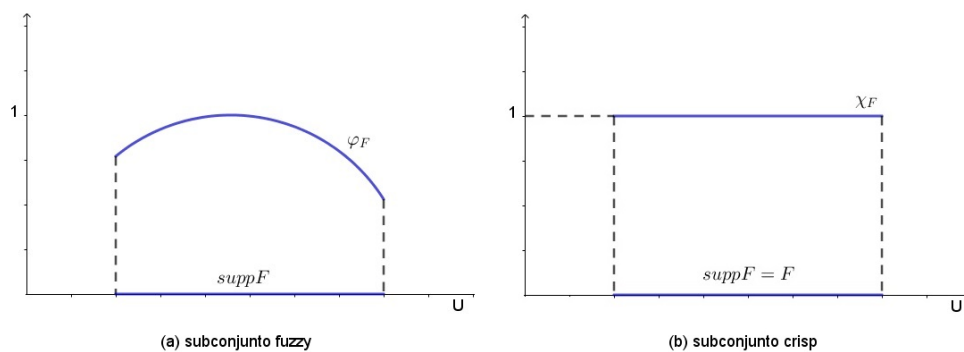
$$\text{supp}(F) = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

é denominado suporte de F e é de fundamental participação na inter-relação entre as teorias de conjuntos clássica e fuzzy [3].

O conceito de suporte de um subconjunto fuzzy F definido em um conjunto universo U é bastante importante e, de maneira geral, é interpretado como sendo o conjunto formado pelos elementos de U cujos elementos têm grau de pertinência não-nulos em F .

Através da Figura 6, nota-se que diferentemente do subconjunto fuzzy, o suporte de um subconjunto crisp sempre coincide com o próprio conjunto.

Figura 6 – Ilustração de Subconjuntos Fuzzy e Crisp



FONTE: [3], adaptado pela autora.

Exemplo 1.6. Considere o subconjunto dos números reais "próximos de 6", ou seja,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 6\}.$$

Questionamentos sobre a pertinência do número 6,5 e do número 50 ao conjunto A seriam cabíveis, mas a resposta seria incerta, pois não se sabe até que ponto um número é considerado próximo de 6.

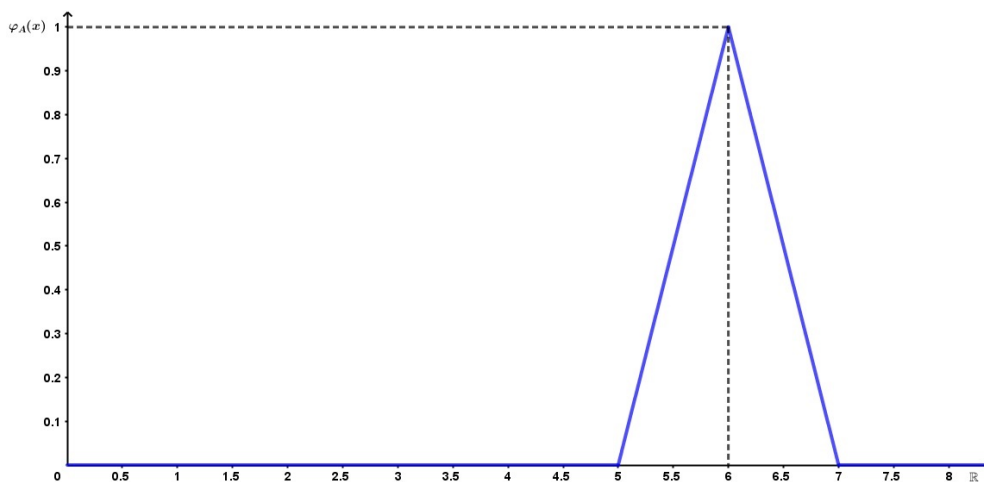
Para essa questão, uma afirmação plausível seria que o número 6,5 está mais próximo de 6 do que o número 50, ou seja, tem maior grau de pertinência.

Poderia-se definir, por exemplo, $\varphi_A(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, que associa cada $x \in \mathbb{R}$ a um valor próximo ao ponto 6, como:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} (1 - |x - 6|), & \text{se } x \in [5, 7] \\ 0, & \text{se } x \notin [5, 7] \end{cases},$$

cuja representação gráfica é apresentada na Figura 7:

Figura 7 – Representação gráfica da função de pertinência triangular que representa o conceito “aproximadamente 6”



FONTE: [3], adaptado pela autora.

Pode-se observar, através deste gráfico, que $\varphi_A(6,5) = 0,5$ e $\varphi_A(50) = 0$. Neste caso, $x = 6,5$ é um ponto próximo de 6 com grau de pertinência 0,5 e $x = 50$ apresenta grau de pertinência 0, ou seja, não é um ponto próximo de 6.

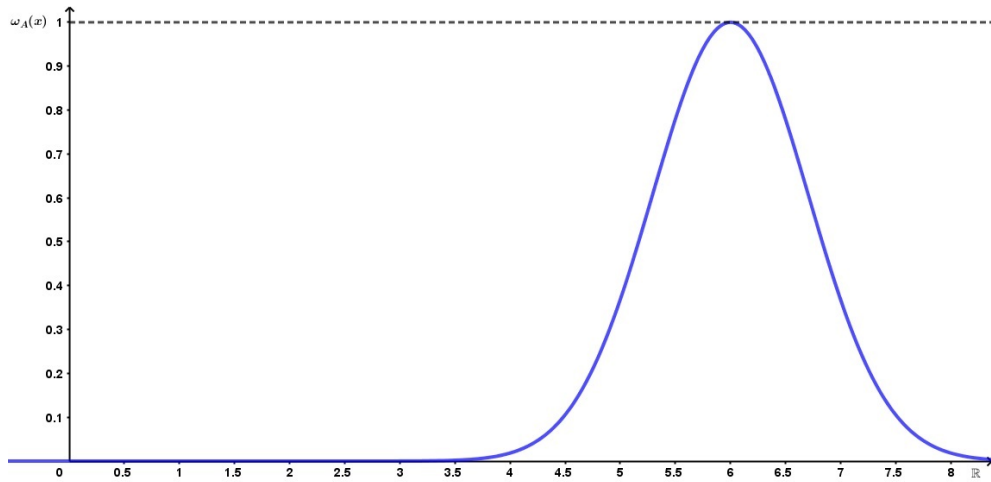
Ser próximo de 6 significa estar numa vizinhança predeterminada de 6 e a subjetividade está exatamente na escolha do raio desta vizinhança. Por isso, poderiam ser definidas outras funções de pertinência para este mesmo exemplo.

A função de pertinência poderia ser definida através da função gaussiana:

$$\omega_A(x) = e^{-(x-6)^2},$$

cuja representação gráfica é apresentada na Figura 8:

Figura 8 – Representação gráfica da função de pertinência em forma de sino que representa o conceito “aproximadamente 6”

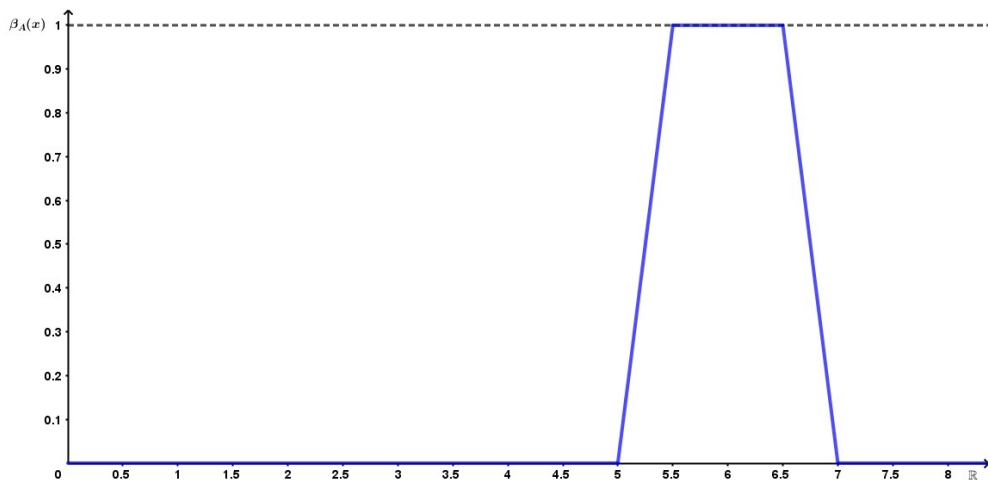


Ou ainda, poderia-se representar através da função de pertinência trapezoidal:

$$\beta_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 5 \\ 2x - 10, & \text{se } 5 \leq x < 5,5 \\ 1, & \text{se } 5,5 \leq x < 6,5 \\ 14 - 2x, & \text{se } 6,5 \leq x < 7 \\ 0, & \text{se } x \geq 7 \end{cases}$$

cuja representação gráfica é apresentada na Figura 9:

Figura 9 – Representação gráfica da função de pertinência trapezoidal que representa o conceito “aproximadamente 6”



Geralmente, quando o conjunto fuzzy é definido em um conjunto universo infinito, a representação adotada é a analítica, ou seja, por meio de uma função. Como pode ser

evidenciado, através deste exemplo, a escolha da função de pertinência adequada é um problema difícil para o qual não há regras ou procedimentos a serem seguidos [14].

Pode-se dizer que as funções de pertinência mais utilizadas são:

- triangular;
- trapezoidal;
- gaussiana.

Definição 1.16. *Qualquer função de pertinência triangular pode ser caracterizada por três parâmetros: a , m e b , como mostra a expressão geral:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } x \in [a, m) \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{se } x \in [m, b) \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Definição 1.17. *As funções de pertinência que apresentam o contorno trapezoidal podem ser caracterizadas por quatro parâmetros: a , m , n e b ; e possuem expressão analítica geral expressa por:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } x \in [a, m) \\ 1, & \text{se } x \in [m, n) \\ \frac{b-x}{b-n}, & \text{se } x \in [n, b) \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Definição 1.18. *As funções de pertinência com o formato de sino, também chamadas de gaussianas, podem ser expressas por três parâmetros dados: u , a e b ; e são representadas pela expressão:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right), & \text{se } u-b \leq x \leq u+b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Um conjunto fuzzy A pode ser discreto e, neste caso, quanto à sua representação pode-se simplesmente enumerar os elementos x_i do conjunto A juntamente com seus graus de pertinência $\varphi_A(x_i)$, com $i \in \mathbb{N}$, na forma:

$$A = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)/x_i = \varphi_A(x_1)/x_1 + \varphi_A(x_2)/x_2 + \dots + \varphi_A(x_n)/x_n.$$

Na notação acima, a barra (/) é usada apenas para unir os elementos a seus respectivos graus de pertinência ao conjunto. O sinal de adição (+) apenas indica que os pares **elemento/grau de pertinência** coletivamente formam a definição do conjunto fuzzy. Desta forma é importante não se confundir uma vez que, neste caso, a barra (/) não significa divisão, o sinal de adição (+) não significa soma, bem como \sum não significa somatório. Tais símbolos servem apenas para conectar os elementos do conjunto universo U , que estão contidos em A , com seus respectivos graus de pertinência [16].

Exemplo 1.7. Seja $A = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 38; 38,5; 40; 45\}$ o subconjunto fuzzy dos reais que representa o conceito de febre alta, e está representado na forma de tabela como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Representação tabular do conceito *febre alta*, para um conjunto universo discreto.

$x \in A$	$\varphi_A(x)$
0	0
5	0
10	0
15	0
20	0
25	0
30	0
35	0
38	0,5
38,5	0,75
40	1
45	1

Pode-se representar o subconjunto fuzzy A da seguinte forma:

$$A = 0/0+0/5+0/10+0/15+0/20+0/25+0/30+0/35+0,5/38+0,75/38,5+1/40+1/45.$$

1.3 OPERAÇÕES COM SUBCONJUNTOS FUZZY

As operações apresentadas nesta seção são generalizações das correspondentes clássicas. Para isso, serão consideradas operações como união, intersecção e complementação.

Seja U o conjunto universo, consideram-se A e B dois subconjuntos fuzzy de U , com funções de pertinência indicadas por φ_A e φ_B , respectivamente. Então, pode-se dizer que A é subconjunto fuzzy de B ($A \subset B$) se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ para todo elemento $x \in U$.

Por definição, o conjunto vazio (\emptyset) não tem elementos e o conjunto universo (U) é formado por todos os elementos que são considerados em determinado estudo. Portanto, a

função de pertinência do conjunto vazio é dada por $\varphi_{\emptyset}(x) = 0$, enquanto que o conjunto universo tem função de pertinência $\varphi_U(x) = 1$, para todo $x \in U$.

Definição 1.19. A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A \cup B)}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \quad x \in U .$$

Definição 1.20. A intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A \cap B)}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \quad x \in U .$$

Definição 1.21. O complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U .$$

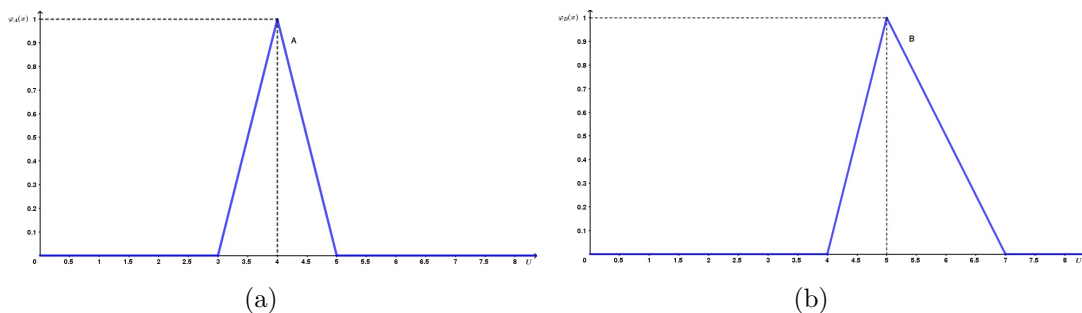
Exemplo 1.8. Considere os subconjuntos fuzzy A e B com as suas respectivas funções de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} (1 - |x - 4|), & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{se } x \notin [3, 5] \end{cases} ;$$

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 4 \\ x - 4, & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ \frac{7 - x}{2}, & \text{se } 5 \leq x < 7 \\ 0, & \text{se } x \geq 7 \end{cases}$$

Representando tais funções de pertinência graficamente nas Figuras 10(a) e 10(b) tem-se:

Figura 10 – Representação gráfica da função de pertinência dos subconjuntos fuzzy A e B :
(a) Subconjunto Fuzzy A ; e (b) Subconjunto Fuzzy B .



As operações de união e intersecção, bem como o complementar de A estão representadas nas Figuras 11, 12 e 13, respectivamente:

Figura 11 – Operação de união entre os subconjuntos fuzzy A e B .

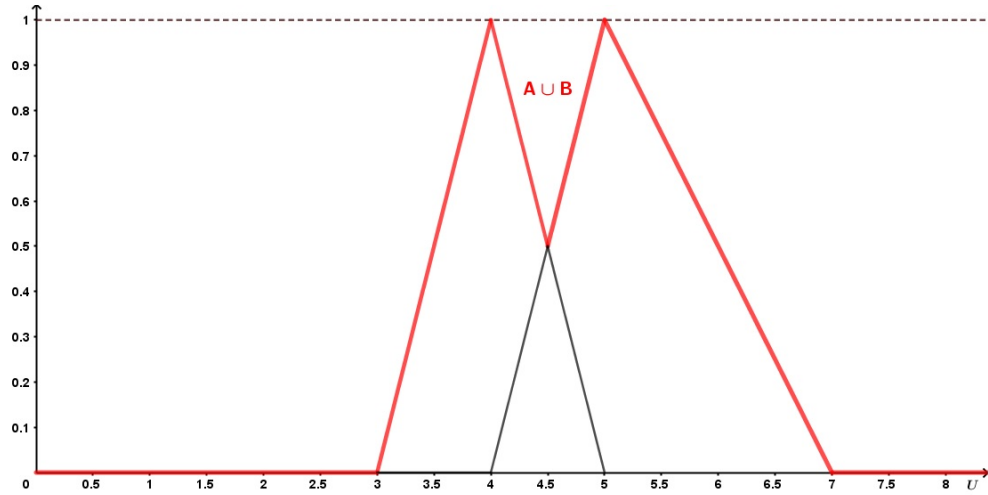


Figura 12 – Operação de intersecção entre os subconjuntos fuzzy A e B .

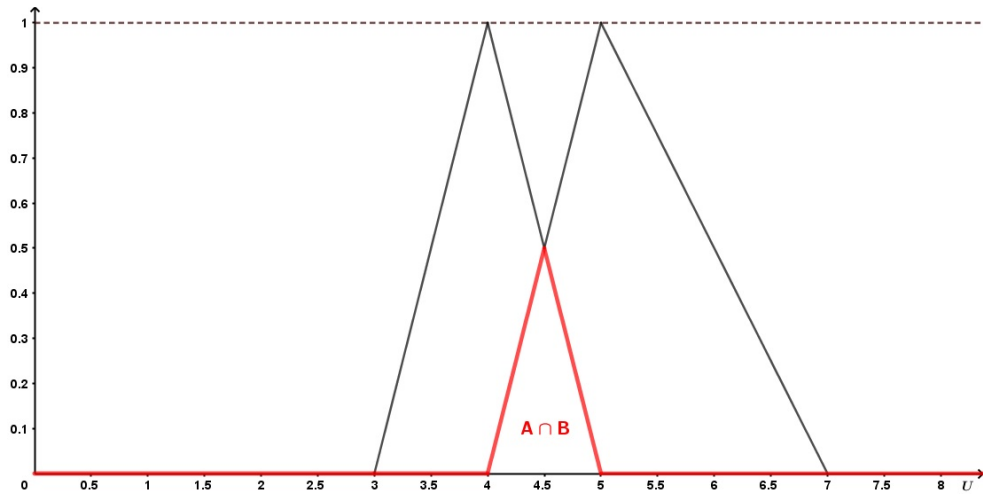
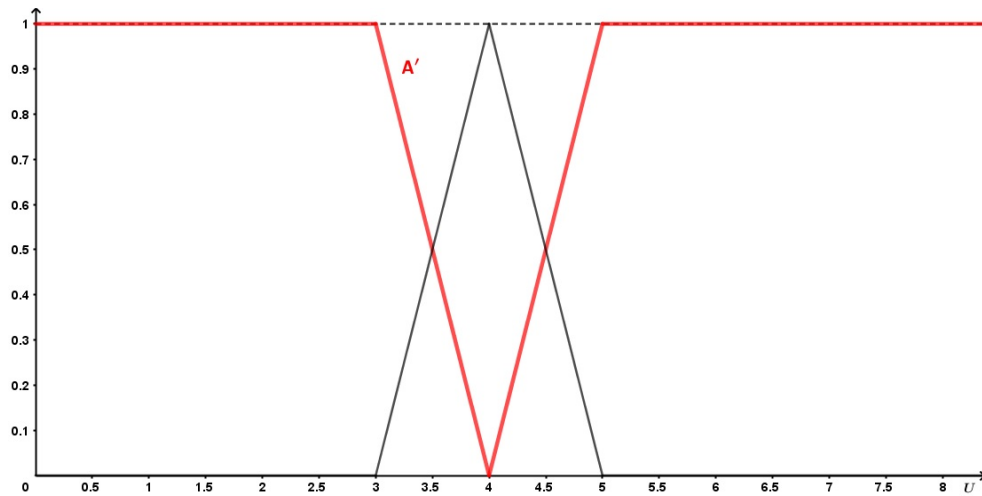


Figura 13 – Complementar do subconjunto fuzzy A .

No exemplo 1.9 pode-se explorar as particularidades apresentadas no complemento de um conjunto fuzzy.

Exemplo 1.9. Suponha que o conjunto universo U seja composto por mulheres com altura de 1,60 m. Seja A o subconjunto fuzzy que representa as mulheres acima do peso. O subconjunto fuzzy A deve refletir uma situação oposta da relacionada com o subconjunto B das mulheres abaixo.

Enquanto que para o subconjunto B das mulheres abaixo do peso a função de pertinência deve ser decrescente com o peso, para o subconjunto A das mulheres acima do peso deve ser crescente.

Uma possibilidade para a função de pertinência de A é:

$$\varphi_A(x) = 1 - \varphi_B(x),$$

onde $\varphi_B(x)$ é a função de pertinência do subconjunto fuzzy das mulheres abaixo do peso.

Desta forma, o subconjunto fuzzy A é o complementar fuzzy de B .

Seja:

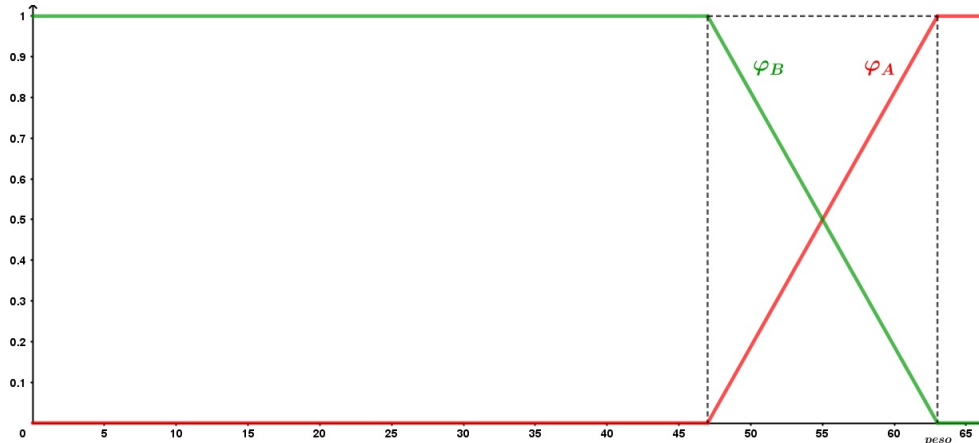
$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 47 \\ \frac{63 - x}{16}, & \text{se } 47 < x \leq 63 \\ 0, & \text{se } x > 63 \end{cases}$$

Então:

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 47 \\ \frac{x - 47}{16}, & \text{se } 47 < x \leq 63 \\ 1, & \text{se } x > 63 \end{cases}$$

Uma representação gráfica para A e B pode ser observada na Figura 14:

Figura 14 – Subconjunto fuzzy das mulheres com 1,60 m abaixo do peso e seu complementar.



Pode-se notar que esta operação de complemento permuta os graus de pertinência dos subconjuntos fuzzy B e A . Esta é a propriedade que caracteriza o complementar fuzzy, isto é, quando $\varphi_M(x)$ indica o grau de compatibilidade de x com o conceito linguístico peso, $\varphi_{M'}(x)$ expressa a incompatibilidade de x com tal conceito.

Observa-se que uma consequência da imprecisão dos conjuntos fuzzy é que há uma sobreposição do conjunto e seu complemento fuzzy. Por exemplo, uma mulher que pertence ao conjunto fuzzy B com grau 0,5 pertence também ao seu complementar A com grau 0,5.

Desta forma, um elemento pode pertencer aos dois conjuntos (B e A) com o mesmo grau de pertinência, ou seja, $A \cap A' \neq \emptyset$. Esta é uma importante diferença da teoria clássica de conjuntos para os conjuntos fuzzy, pois na teoria clássica, ou um elemento pertence a um conjunto, ou ele pertence ao seu complementar. O mesmo se aplica a $A \cup A'$, que pode não ser U . De fato, $\varphi_{A \cup B}(55) = \max\{0,5; 0,5\} = 0,5 \neq 1$ e $\varphi_{A \cup B}(59,8) = \max\{0,2; 0,8\} = 0,8 \neq 1$.

Estendendo o conceito de conjunto complementar para A e B subconjuntos fuzzy, ambos com universo U , tais que $A \subseteq B$. O complemento de A em B é o subconjunto fuzzy A'_B , cuja função de pertinência é:

$$\varphi_{A'_B}(x) = \varphi_B(x) - \varphi_A(x), \quad x \in U .$$

Definição 1.22. Os subconjuntos fuzzy A e B de U são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é, se $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$.

Proposição 1.2. As operações entre subconjuntos fuzzy satisfazem as propriedades descritas na Tabela 3:

Tabela 3 – Propriedades das operações de complemento, união e intersecção de conjuntos fuzzy.

1	Comutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2	Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3	Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4	Idempotência	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
5	Absorção por U e \emptyset	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
6	Identidade	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
7	De Morgan	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

A demonstração de cada propriedade é uma aplicação imediata das propriedades de máximo e mínimo entre funções, isto é:

$$\max[\varphi(x), \psi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) + |\varphi(x) - \psi(x)|]$$

$$\min[\varphi(x), \psi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)|]$$

onde, φ e ψ são funções com imagens em \mathbb{R} , o conjunto dos números reais [3].

Serão demonstradas todas as propriedades da Tabela 3.

- $A \cup B = B \cup A$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cup B}(x) &= \max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|] \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi_B(x) + \varphi_A(x) + |\varphi_B(x) - \varphi_A(x)|] \\
 &= \max[\varphi_B(x), \varphi_A(x)] \\
 &= \varphi_{B \cup A}(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, $A \cup B = B \cup A$. □

- $A \cap B = B \cap A$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cap B}(x) &= \min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|] \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi_B(x) + \varphi_A(x) - |\varphi_B(x) - \varphi_A(x)|] \\
 &= \min[\varphi_B(x), \varphi_A(x)] \\
 &= \varphi_{B \cap A}(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, $A \cap B = B \cap A$. □

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \max[\varphi_A(x), \varphi_{(B \cup C)}(x)] \\
 &= \max[\varphi_A(x), \max[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]].
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) &= \max[\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \max[\max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], \varphi_C(x)].
 \end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

1. $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$

2. $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$
3. $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$
4. $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$
5. $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$
6. $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$

Faz-se a demonstração para o primeiro caso e os demais são análogos.

Para o caso (1), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \max[\varphi_A(x), \varphi_{(B \cup C)}(x)] \\
 &= \max[\varphi_A(x), \max[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]] \\
 &= \max[\varphi_A(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \varphi_C(x),
 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) &= \max[\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \max[\max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], \varphi_C(x)] \\
 &= \max[\varphi_B(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \varphi_C(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. □

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cap B) \cap C}(x) &= \min[\varphi_{(A \cap B)}(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \min[\min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], \varphi_C(x)].
 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cap (B \cap C)}(x) &= \min[\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)] \\
 &= \min[\varphi_A(x), \min[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]].
 \end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

1. $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$

2. $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$
3. $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$
4. $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$
5. $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$
6. $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$

Faz-se a demonstração para o primeiro caso e os demais são análogos. Para o caso (1), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cap B) \cap C}(x) &= \min[\varphi_{(A \cap B)}(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \min[\min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], \varphi_C(x)] \\
 &= \min[\varphi_A(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \varphi_A(x),
 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cap (B \cap C)}(x) &= \min[\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)] \\
 &= \min[\varphi_A(x), \min[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]] \\
 &= \min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] \\
 &= \varphi_A(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. □

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cap (B \cup C)}(x) &= \min[\varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x)] \\
 &= \min[\varphi_A(x), \max[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]].
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x) &= \max[\varphi_{(A \cap B)}(x), \varphi_{(A \cap C)}(x)] \\
 &= \max[\min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], \min[\varphi_A(x), \varphi_C(x)]].
 \end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

1. $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$
2. $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$

3. $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$
4. $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$
5. $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$
6. $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$

Faz-se a demonstraçãõ para o primeiro caso e os demais sãõ análogos. Para o caso (1), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cap (B \cup C)} &= \min[\varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x)] \\
 &= \min[\varphi_A(x), \max[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]] \\
 &= \min[\varphi_A(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \varphi_A(x),
 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x) &= \max[\varphi_{(A \cap B)}(x), \varphi_{(A \cap C)}(x)] \\
 &= \max[\min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], \min[\varphi_A(x), \varphi_C(x)]] \\
 &= \max[\varphi_A(x), \varphi_A(x)] \\
 &= \varphi_A(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demonstraçãõ. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \max[\varphi_A(x), \varphi_{(B \cap C)}(x)] \\
 &= \max[\varphi_A(x), \min[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]].
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) &= \min[\varphi_{(A \cup B)}(x), \varphi_{(A \cup C)}(x)] \\
 &= \min[\max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], \max[\varphi_A(x), \varphi_C(x)]].
 \end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

1. $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$
2. $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$
3. $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$

4. $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$
5. $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$
6. $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$

Faz-se a demonstraçã para o primeiro caso e os demais sã análogos. Para o caso (1), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \max[\varphi_A(x), \varphi_{(B \cap C)}(x)] \\
 &= \max[\varphi_A(x), \min[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]] \\
 &= \max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] \\
 &= \varphi_B(x),
 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) &= \min[\varphi_{(A \cup B)}, \varphi_{(A \cup C)}] \\
 &= \min[\max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], \max[\varphi_A(x), \varphi_C(x)]] \\
 &= \min[\varphi_B(x), \varphi_C(x)] \\
 &= \varphi_B(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

- $A \cup A = A$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cup A}(x) &= \max[\varphi_A(x), \varphi_A(x)] \\
 &= \varphi_A(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, $A \cup A = A$. □

- $A \cap A = A$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A \cap A}(x) &= \min[\varphi_A(x), \varphi_A(x)] \\
 &= \varphi_A(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, $A \cap A = A$. □

- $A \cup U = U$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup U}(x) &= \max[\varphi_A(x), \varphi_U(x)] \\ &= \max[\varphi_A(x), 1] \\ &= 1 \\ &= \varphi_U(x).\end{aligned}$$

Portanto, $A \cup U = U$. □

- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cap \emptyset}(x) &= \min[\varphi_A(x), \varphi_{\emptyset}(x)] \\ &= \min[\varphi_A(x), 0] \\ &= 0 \\ &= \varphi_{\emptyset}(x).\end{aligned}$$

Portanto, $A \cap \emptyset = \emptyset$. □

- $A \cup \emptyset = A$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup \emptyset}(x) &= \max[\varphi_A(x), \varphi_{\emptyset}(x)] \\ &= \max[\varphi_A(x), 0] \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

Portanto, $A \cup \emptyset = A$. □

- $A \cap U = A$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cap U}(x) &= \min[\varphi_A(x), \varphi_U(x)] \\ &= \min[\varphi_A(x), 1] \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

Portanto, $A \cap U = A$. □

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A' \cup B'}(x) &= \max[\varphi'_A(x), \varphi'_B(x)] \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi'_A(x) + \varphi'_B(x) + |\varphi'_A(x) - \varphi'_B(x)|] \\
 &= \frac{1}{2}[1 - \varphi_A(x) + 1 - \varphi_B(x) + |(1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x))|] \\
 &= \frac{1}{2}[2 - \varphi_A(x) - \varphi_B(x) + |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|] \\
 &= \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|)] \\
 &= \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|)] \\
 &= 1 - \min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] \\
 &= 1 - \varphi_{A \cap B}(x) \\
 &= \varphi_{(A \cap B)'}(x)
 \end{aligned}$$

Portanto, $(A \cap B)' = A' \cup B'$. □

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{A' \cap B'}(x) &= \min[\varphi'_A(x), \varphi'_B(x)] \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi'_A(x) + \varphi'_B(x) - |\varphi'_A(x) - \varphi'_B(x)|] \\
 &= \frac{1}{2}[1 - \varphi_A(x) + 1 - \varphi_B(x) - |(1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x))|] \\
 &= \frac{1}{2}[2 - \varphi_A(x) - \varphi_B(x) - |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|] \\
 &= \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|)] \\
 &= \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|)] \\
 &= 1 - \max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] \\
 &= 1 - \varphi_{A \cup B}(x) \\
 &= \varphi_{(A \cup B)'}(x)
 \end{aligned}$$

Portanto, $(A \cup B)' = A' \cap B'$. □

1.4 O CONCEITO DE α -NÍVEL

O conceito de α -nível é uma maneira de identificar subconjuntos do conjunto universo por meio da restrição de seus graus de pertinência [14]. Tal conceito é particularmente importante no desenvolvimento da Teoria de Conjuntos Fuzzy e é formalizado a seguir.

Definição 1.23. Dado um subconjunto fuzzy A definido em um conjunto universo U e qualquer valor $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de A é o subconjunto clássico de U definido por:

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1 .$$

Definição 1.24. Seja A um subconjunto fuzzy definido em um conjunto universo U . O α -nível zero é definido como fecho do suporte de A , isto é, $[A]^0 = \overline{\text{supp}}(A)$.

Definição 1.25. Dado um conjunto fuzzy A definido em um conjunto universo U , o conjunto core de A é o conjunto clássico que contém todos os elementos de U que possuem grau de pertinência igual a 1 em A . Formalmente,

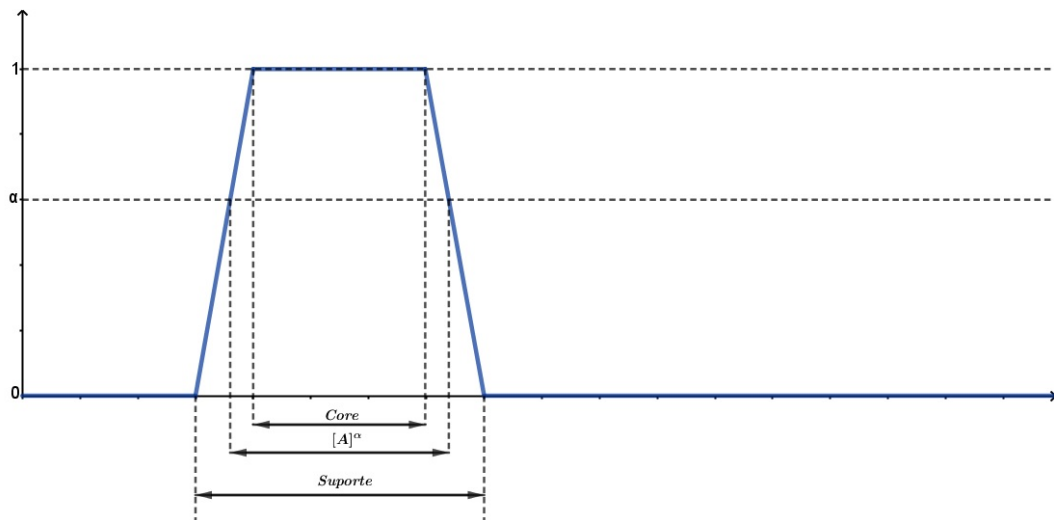
$$\text{core}(A) = \{x \in U | \varphi_A(x) = 1\}.$$

Neste caso, tem-se $\text{core}(A) = [A]^1$.

Definição 1.26. Um subconjunto fuzzy é dito normal se todos seus α -níveis forem não vazios, ou seja, se $[A]^1 \neq \emptyset$.

Exemplo 1.10. O gráfico, representado na Figura 15, ilustra o α -nível, o suporte e o core de um conjunto fuzzy A representado por uma função de pertinência trapezoidal.

Figura 15 – Representação gráfica do α -nível, do suporte e do core de um conjunto fuzzy A representado por uma função de pertinência trapezoidal.



Pode-se observar que o conjunto representado na Figura 15 é normal, pois existe $x \in U$ tal que $\varphi_A(x) = 1$.

Teorema 1.8. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy do conjunto universo U . Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ é que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Demonstração. Sabe-se que $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Supõe-se que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Se $A \neq B$ então existe $x \in U$ tal que $\varphi_A(x) \neq \varphi_B(x)$. Logo, tem-se que $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ ou $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$. Supõe-se $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$, podemos concluir que $x \in [A]^{\varphi_A(x)}$ e $x \notin [B]^{\varphi_B(x)}$ e, portanto, $[A]^{\varphi_A(x)} \neq [B]^{\varphi_B(x)}$, o que contradiz a hipótese $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Analogamente, pode-se chegar a uma contradição para o caso em que $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$. \square

Uma consequência deste teorema é a relação existente entre a função de pertinência de um subconjunto fuzzy e as funções características de seus α -níveis.

Corolário 1.1. *A função de pertinência φ_A de um conjunto fuzzy A pode ser expressa em termos de funções características de seus α -níveis, isto é,*

$$\varphi_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min[\alpha, \chi_{[A]^\alpha}(x)], \text{ onde } \chi_{[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [A]^\alpha \\ 0, & \text{se } x \notin [A]^\alpha \end{cases}$$

Proposição 1.3. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy. Usando a definição de α -nível, pode-se elencar as seguintes propriedades:*

- i) $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$,
- ii) $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

Demonstração. i) Se $x \in [A \cup B]^\alpha$, então $\varphi_{A \cup B}(x) \geq \alpha$.

Como $\varphi_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$, então:

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} \varphi_A(x), & \text{se } \varphi_A(x) > \varphi_B(x) \\ \varphi_B(x), & \text{se } \varphi_A(x) < \varphi_B(x) \end{cases}$$

Logo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ ou $\varphi_B(x) \geq \alpha$.

Portanto, $x \in [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$.

Por outro lado, se $x \in [A \cup B]^\alpha$, então $x \in [A]^\alpha$ ou $x \in [B]^\alpha$. Logo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ ou $\varphi_B(x) \geq \alpha$.

Desse modo $\max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha$, e portanto, $\varphi_{A \cup B}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [A \cup B]^\alpha$.

Portanto, $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$.

ii) Se $x \in [A \cap B]^\alpha$, então $\varphi_{A \cap B}(x) \geq \alpha$.

Como $\varphi_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$, então:

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \varphi_A(x), & \text{se } \varphi_A(x) < \varphi_B(x) \\ \varphi_B(x), & \text{se } \varphi_A(x) > \varphi_B(x) \end{cases}$$

Logo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ e $\varphi_B(x) \geq \alpha$.

Portanto, $x \in [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

Por outro lado, se $x \in [A \cap B]^\alpha$, então $x \in [A]^\alpha$ e $x \in [B]^\alpha$. Logo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ e $\varphi_B(x) \geq \alpha$.

Desse modo $\min_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha$, e portanto, $\varphi_{A \cap B}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [A \cap B]^\alpha$.

Portanto, $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

□

Exemplo 1.11. Seja $A = 0, 2/x_1 + 0, 4/x_2 + 0, 6/x_3 + 0, 8/x_4 + 1, 0/x_5$ um subconjunto fuzzy.

O conjunto fuzzy A está associado a cinco α -níveis:

- $[A]^{0,2} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$;
- $[A]^{0,4} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$;
- $[A]^{0,6} = \{x_3, x_4, x_5\}$;
- $[A]^{0,8} = \{x_4, x_5\}$;
- $[A]^{1,0} = \{x_5\}$.

1.5 O PRINCÍPIO DE EXTENSÃO

O Princípio de Extensão é um método utilizado para estender conceitos da Teoria de Conjuntos Clássica para a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Este princípio surgiu da necessidade de se aplicar uma função clássica a argumentos imprecisos. Neste sentido, seja $f : X \rightarrow Y$ uma função clássica, o Princípio de Extensão permite estender f a domínios fuzzy, de maneira que através dele pode-se indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy A de X por meio de f . E esta imagem será um subconjunto fuzzy de Y .

Definição 1.27. *Sejam f uma função tal que $f : X \rightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X . O Princípio de Extensão de f é a função \hat{f} que, aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy*

$\hat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z .

No Princípio de Extensão, a possibilidade de um valor de entrada é propagada diretamente para a possibilidade de sua imagem; e quando a combinação de múltiplas entradas mapeiam o mesmo valor de saída, a possibilidade da saída é obtida pela combinação das possibilidades dessas entradas através do operador **sup**.

Exemplo 1.12. Considere $f(x) = x^2$ e o subconjunto fuzzy A de números reais cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-10}{6}, & \text{se } 10 \leq x \leq 16 \\ \frac{28-x}{12}, & \text{se } 16 \leq x \leq 28 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Representando a função de pertinência na Figura 16 e $f(x) = x^2$ na Figura 17, tem-se:

Figura 16 – Função de pertinência do subconjunto fuzzy A do Exemplo 1.12.

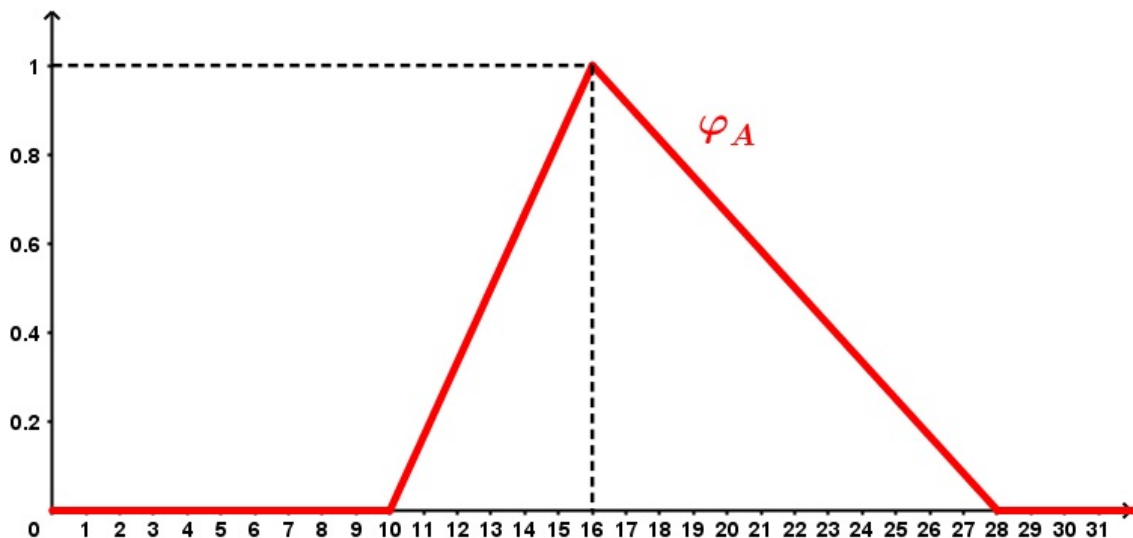
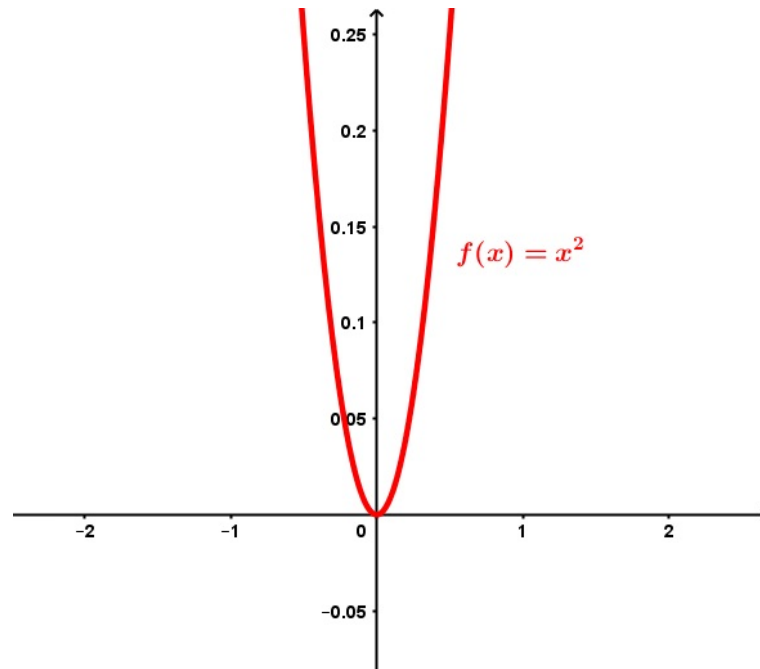
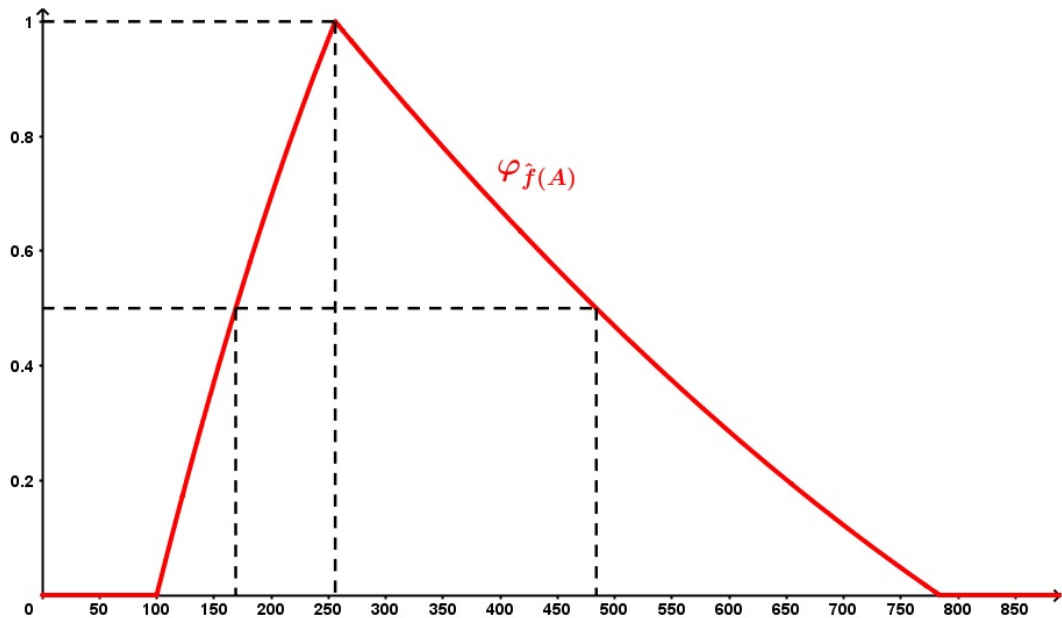


Figura 17 – Função f do Exemplo 1.12.

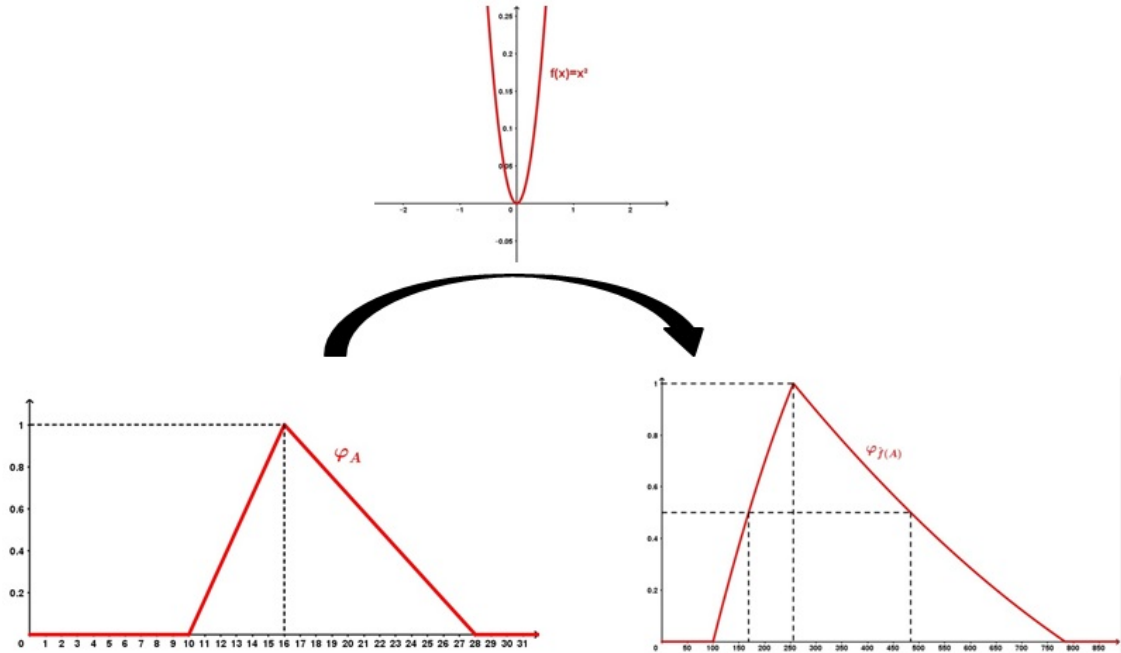
O Princípio de Extensão de f aplicada a A , é o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$, cuja função de pertinência está representada na Figura 18.

Figura 18 – Subconjunto $\hat{f}(A)$ do Exemplo 1.12.

Observa-se que o grau de pertinência de $f(10) = 10^2 = 100$ em $\hat{f}(A)$ é 0, ou seja, o mesmo grau de pertinência de 10 em A . Assim como o grau de pertinência de $f(16) = 16^2 = 256$ em $\hat{f}(A)$ é 1, ou seja, o mesmo grau de pertinência de 16 em A .

Desta maneira pode-se ilustrar o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ através do esquema mostrado na Figura 19.

Figura 19 – Esquema para se obter a imagem de um subconjunto fuzzy a partir do princípio de extensão para o Exemplo 1.12.



2 RELAÇÕES E EQUAÇÕES RELACIONAIS FUZZY

Este capítulo abordará dois temas: relações fuzzy e equações relacionais fuzzy. Pode-se dizer que o primeiro é, de alguma forma, uma extensão natural das relações matemáticas clássicas. Já o segundo, embora possa ser transportado para outras situações, foi escolhido no sentido de se estudar diagnóstico médico [3].

2.1 RELAÇÕES FUZZY

Olhando para qualquer relação específica, tal como a do “casamento” por exemplo, considerando-se o par ordenado (x,y) tal que x e y representam duas pessoas, nas relações humanas pode-se dizer que, ou alguém é ou não é casado com outro alguém, o que é uma simplificação da realidade [6]. Este seria um exemplo de relação clássica. Porém, observando a relação de “afinidade” entre duas pessoas pode-se considerar o grau de afinidade entre elas, isto é, dois ou mais indivíduos podem se relacionar com diferentes graus de afinidade, desde 0 (não possuem afinidade) até 1 (possuem total afinidade). E este seria um exemplo de relação fuzzy.

O conceito matemático de relação fuzzy generaliza o conceito de relação clássica por meio da atribuição de um valor do intervalo $[0,1]$ às associações entre elementos que fazem parte da relação.

Para este capítulo foram utilizadas principalmente as referências: [2], [3], [7], [8], [9], [10], [14], [16] e [18].

Definição 2.1. *Uma relação fuzzy R sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Assim, uma relação fuzzy é definida por uma função de pertinência $\varphi_R : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0,1]$.*

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$, a relação é chamada de fuzzy binária sobre $U_1 \times U_2$.

Do ponto de vista de inferência, com o objetivo de se tomar alguma decisão, uma relação fuzzy de grande importância é o produto cartesiano.

Definição 2.2. *O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n de U_1, U_2, \dots, U_n , respectivamente, é a relação fuzzy $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} = \varphi_{A_1} \wedge \varphi_{A_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n},$$

onde \wedge representa o mínimo.

Logo, de acordo com essa definição, o produto cartesiano é uma intersecção entre conjuntos pertencentes a universos de discurso diferentes. Pode-se dizer que relações fuzzy são conjuntos fuzzy definidos em conjuntos universos que são produtos cartesianos.

Exemplo 2.1. Suponha que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados por P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 . Sejam A e B os subconjuntos fuzzy que representam os pacientes com os sintomas febre e dor abdominal, respectivamente, representados na Tabela 4.

Tabela 4 – Ilustração de pacientes com febre e dor abdominal.

Paciente	F :Febre	D : Dor abdominal
P_1	0,75	1,0
P_2	0,5	0,6
P_3	0	0,2
P_4	1,0	0,2
P_5	0,4	0,5

Diversas doenças podem apresentar sintomas como febre e dor abdominal com intensidades e medições diversas. Para a apendicite, condição em que o apêndice fica inflamado e cheio de pus, por exemplo, o paciente apresenta sintomas de “febre” e de “dor abdominal” com intensidades que, se representadas por subconjuntos fuzzy, devem ter universos distintos. O universo indicador de febre pode ser dado pelas temperaturas possíveis de um indivíduo, enquanto que a dor abdominal pode ser avaliada pela intensidade.

Para indicar o quanto um indivíduo tem apendicite toma-se um grau de pertinência ao conjunto do sintoma febre e ao conjunto dor abdominal. O paciente P_1 da Tabela 4, por exemplo, tem uma temperatura x cuja pertinência ao conjunto febre F é $\varphi_F(x) = 0,75$ e tem um valor y de dor abdominal que faz com que $\varphi_D(x) = 1,0$. O diagnóstico do paciente P_1 para a doença apendicite é dado então por:

$$\varphi_{apendicite}(x, y) = \varphi_F(x) \wedge \varphi_D(y) = 0,75 \wedge 1,0 = 0,75.$$

Isto significa que o paciente P_1 está no subconjunto fuzzy dos febris com dor abdominal, tendo grau de pertinência 0,75 e este grau coincide com o grau de seu diagnóstico para apendicite.

2.2 FORMAS DE REPRESENTAÇÕES E PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES BINÁRIAS

Nesta seção serão apresentadas algumas formas de representação e algumas propriedades das relações binárias e fuzzy binárias.

Quando o universo for um conjunto discreto, uma relação fuzzy pode ser representada por uma matriz ou por uma tabela.

Quando relações são representadas por matrizes é preciso, primeiro considerar uma ordenação dos elementos do conjunto que definem a relação [14].

Considerando uma relação R definida em $X \times Y$ em que $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_m\}$. Pode-se notar a importância e o cuidado para se ordenar os elementos dos conjuntos X e Y , de maneira a poder identificar elementos relacionados e o correspondente grau de relacionamento, na matriz. A representação matricial associada à essa relação tem a forma:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} .$$

em que $r_{ij} = R(x_i, y_j) = \varphi_R(x_i, y_j)$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$. O valor encontrado na intersecção da i -ésima linha com a j -ésima coluna representa o grau de pertinência do par $\langle x_i, y_j \rangle$ à relação R .

Também é possível representar a mesma relação anterior na forma de tabela, conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Representação na forma tabular de uma relação fuzzy binária.

R	y_1	y_2	\dots	y_m
x_1	r_{11}	r_{12}	\dots	r_{1m}
x_2	r_{21}	r_{22}	\dots	r_{2m}
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
x_n	r_{n1}	r_{n2}	\dots	r_{nm}

Definição 2.3. *Seja R uma relação fuzzy binária definida em $X \times Y$. A relação fuzzy binária inversa, R^{-1} , definida em $Y \times X$, tem função de pertinência $\varphi_{R^{-1}}(y, x) = \varphi_R(x, y)$.*

Pode-se notar que a matriz R^{-1} coincide com a transposta de R , já que $\varphi_{R^{-1}}(y, x) = \varphi_R(x, y)$, por esse motivo, muitos textos de Lógica Fuzzy adotam o termo relação transposta no lugar de inversa [17].

Desta forma, a representação matricial da relação R^{-1} é dada por:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & \dots & r_{n1} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{1m} & r_{2m} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}_{m \times n} .$$

Exemplo 2.2 (Adaptado de [14]). Considere a relação $R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$, em que $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{x, y, z, w\}$, cuja representação matricial é:

$$R = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 1,0 & 0,6 & 0,1 & 0,0 \\ 0,7 & 0,8 & 0,0 & 0,2 \end{bmatrix} .$$

As linhas e colunas de R estão associadas aos elementos de X e Y , respectivamente, de acordo com sua posição na descrição dos conjuntos. Por exemplo, a primeira linha de R traz os graus de pertinência dos pares $\langle a, x \rangle$, $\langle a, y \rangle$, $\langle a, z \rangle$ e $\langle a, w \rangle$ ao conceito que a relação R representa.

A relação inversa $R^{-1} : Y \times X \rightarrow [0, 1]$ é dada pela matriz:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 1,0 & 0,7 \\ 0,3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,1 & 0,0 \\ 0,5 & 0,0 & 0,2 \end{bmatrix} .$$

2.3 COMPOSIÇÃO ENTRE RELAÇÕES FUZZY BINÁRIAS

Uma definição importante em diagnósticos médicos é composição de relações fuzzy binárias. Aqui será apresentada a composição mais tradicional em Lógica Fuzzy.

Definição 2.4. Considere R e S duas relações fuzzy binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in V} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))].$$

Quando os conjuntos U , V e W são finitos, então a forma matricial da relação $R \circ S$, dada pela composição [max-min], é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo [3].

Supõe-se que $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$; $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ e que:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

e

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{np} \end{bmatrix}_{n \times p} .$$

A forma matricial da relação $R \circ S$, dada pela relação [max - min], será:

$$T = R \circ S = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{np} \end{bmatrix}_{m \times p} ,$$

onde t_{ij} é dado por:

$$t_{ij} = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, w_j))] = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(r_{ik}, s_{kj})].$$

Exemplo 2.3. Considerando os conjuntos $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ e $C = \{z_1, z_2, z_3\}$ e as relações fuzzy $R : A \times B \rightarrow [0, 1]$ e $S : B \times C \rightarrow [0, 1]$, dadas pelas matrizes:

$$R = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 & 0,0 \\ 0,8 & 0,4 & 0,1 \\ 0,6 & 0,7 & 0,2 \\ 0,4 & 1,0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,0 \\ 0,8 & 0,7 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Calculando a relação $R \circ S: A \times C \rightarrow [0, 1]$, tem-se:

$$R \circ S = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{bmatrix}$$

onde,

$$t_{11} = \max\{\min\{1, 0; 0, 6\}, \min\{0, 1; 0, 8\}, \min\{0, 0; 0, 2\}\} = \max\{0, 6; 0, 1; 0, 0\} = 0, 6$$

$$t_{12} = \max\{\min\{1, 0; 0, 0\}, \min\{0, 1; 0, 7\}, \min\{0, 0; 0, 3\}\} = \max\{0, 0; 0, 1; 0, 0\} = 0, 1$$

$$t_{21} = \max\{\min\{0, 8; 0, 6\}, \min\{0, 4; 0, 8\}, \min\{0, 1; 0, 2\}\} = \max\{0, 6; 0, 4; 0, 1\} = 0, 6$$

$$t_{22} = \max\{\min\{0, 8; 0, 0\}, \min\{0, 4; 0, 7\}, \min\{0, 1; 0, 3\}\} = \max\{0, 0; 0, 4; 0, 1\} = 0, 4$$

$$t_{31} = \max\{\min\{0, 6; 0, 6\}, \min\{0, 7; 0, 8\}, \min\{0, 2; 0, 2\}\} = \max\{0, 6; 0, 7; 0, 2\} = 0, 7$$

$$t_{32} = \max\{\min\{0, 6; 0, 0\}, \min\{0, 7; 0, 7\}, \min\{0, 2; 0, 3\}\} = \max\{0, 0; 0, 7; 0, 2\} = 0, 7$$

$$t_{41} = \max\{\min\{0, 4; 0, 6\}, \min\{1, 0; 0, 8\}, \min\{0, 3; 0, 2\}\} = \max\{0, 4; 0, 8; 0, 2\} = 0, 8$$

$$t_{42} = \max\{\min\{0, 4; 0, 0\}, \min\{1, 0; 0, 7\}, \min\{0, 3; 0, 3\}\} = \max\{0, 0; 0, 7; 0, 3\} = 0, 7$$

Portanto, a relação composta $R \circ S: A \times C \rightarrow [0, 1]$ é dada pela matriz:

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,7 \\ 0,8 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

A Regra de Composição de Inferência, que será apresentada a seguir, será utilizada posteriormente em Equações Relacionais Fuzzy.

Definição 2.5. *Sejam U e V dois conjuntos, $F(U)$ e $F(V)$ as classes dos subconjuntos fuzzy de U e V respectivamente, e R uma relação fuzzy binária sobre $U \times V$, então:*

- (i) A relação R define um funcional de $F(U)$ em $F(V)$ que, a cada elemento $A \in F(U)$, faz corresponder o elemento $B \in F(V)$ cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_B(y) = \varphi_{R(A)}(y) = \max_{x \in U} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_A(x))].$$

Esta composição é conhecida como regra de composição de inferência.

A regra de composição de inferência diz que se a relação fuzzy que representa um sistema, $R(x, y)$, é conhecida, então a resposta do sistema, $B(y)$, pode ser determinada a partir de uma excitação conhecida $A(x)$ [23].

- (ii) A relação R também define um funcional de $F(V)$ em $F(U)$ da seguinte forma: a cada $B \in F(V)$ faz corresponder o elemento $A \in F(U)$ cuja função de pertinência é:

$$\varphi_A(x) = \varphi_{R^{-1}(B)}(x) = \max_{y \in V} [\min(\varphi_{R^{-1}}(y, x), \varphi_B(y))].$$

A é denominado imagem inversa de B por R .

Da Definição 2.5 segue que:

$$\max_{x \in U} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_A(x))] = \max_{x \in U} [\min(\varphi_A(x), \varphi_R(x, y))],$$

e portanto, $B = R(A) = A \circ R$.

De maneira análoga,

$$\max_{y \in V} [\min(\varphi_{R^{-1}}(y, x), \varphi_B(y))] = \max_{y \in V} [\min(\varphi_B(y), \varphi_{R^{-1}}(y, x))],$$

e portanto, $A = R^{-1}(B) = B \circ R^{-1}$.

A seguir serão apresentadas algumas definições para o estudo de relações binárias clássicas e, posteriormente serão apresentadas as mesmas definições para as relações binárias fuzzy. Esta estratégia de apresentação é feita para que se possa compreender melhor e comparar relações binárias clássicas e fuzzy.

Definição 2.6. *Seja R uma relação binária clássica sobre U . Então, para quaisquer x, y e z de U , a relação R é:*

- (i) *Reflexiva se $\chi_R(x, x) = 1$;*
- (ii) *Simétrica se $\chi_R(x, y) = 1 \Rightarrow \chi_R(y, x) = 1$;*
- (iii) *Transitiva se $\chi_R(x, y) = \chi_R(y, z) = 1 \Rightarrow \chi_R(x, z) = 1$;*
- (iv) *Antissimétrica se $\chi_R(x, y) = \chi_R(y, x) = 1 \Rightarrow x = y$.*

Agora, pode-se observar as extensões dos conceitos acima, quando adaptados para o caso fuzzy.

Definição 2.7. *Seja R uma relação fuzzy binária sobre U , cuja função de pertinência é φ_R . Então, para quaisquer x, y e z de U , a relação fuzzy R é:*

- (i) *Reflexiva se $\varphi_R(x, x) = 1$;*
- (ii) *Simétrica se $\varphi_R(x, y) = \varphi_R(y, x)$;*
- (iii) *Transitiva se $\varphi_R(x, z) \geq \varphi_R(x, y) \wedge \varphi_R(y, z)$, onde $\wedge = \text{mínimo}$;*
- (iv) *Antissimétrica se $\varphi_R(x, y) > 0$ e $\varphi_R(y, x) > 0 \Rightarrow x = y$.*

A relação reflexiva é aquela em que todo elemento tem relação máxima consigo mesmo.

Já a relação simétrica é caracterizada pela reciprocidade, com mesma intensidade com mesmo grau de pertinência, entre seus elementos.

A transitiva indica que a relação entre dois elementos quaisquer não deve ser, simultaneamente, inferior à relação de cada um destes dois com os demais.

A relação antissimétrica é aquela que não admite qualquer reciprocidade entre elementos distintos.

As relações que satisfazem apenas as três primeiras condições, reflexiva, simétrica e transitiva, são chamadas de relações de equivalência fuzzy [3].

As relações de equivalência clássicas são exemplos particulares de relações de equivalência fuzzy [24].

Os exemplos a seguir foram adaptados de [7].

Exemplo 2.4. *Seja $X = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9, 10\}$ um conjunto e R uma relação em $X \times X$ tal que dois elementos estão relacionados se possuem o mesmo resto na divisão por 2.*

Verificamos que R é reflexiva, pois o elemento x deixa o mesmo resto que o elemento x na divisão por 2.

Também é simétrica, já que se x e y possuem o mesmo resto na divisão por 2, então y e x também possuem o mesmo resto na divisão por 2.

E, por fim, pode-se dizer que R é transitiva, pois se os elementos x e y deixam o mesmo resto na divisão por 2 e os elementos y e z também, então x e z possuem o mesmo resto na divisão por 2.

Como, R é reflexiva, simétrica e transitiva, conclui-se que R é uma relação de equivalência.

Exemplo 2.5. Seja X o conjunto de todas as disciplinas de um curso e R uma relação $X \times X$ que representa “é pré-requisito para”.

Verifica-se que essa não é uma relação reflexiva, uma vez que uma disciplina nunca é pré-requisito dela mesma, portanto $\varphi_R(x, x) = 0$.

Também não é simétrica, já que se uma disciplina x é pré-requisito para y então y não pode ser pré-requisito para x e, assim $\varphi_R(x, y) \neq \varphi_R(y, x)$.

No entanto, R é uma relação transitiva, uma vez que se a disciplina x é pré-requisito para y , ou seja $\varphi_R(x, y) = 1$, e y é pré-requisito para z , ou seja $\varphi_R(y, z) = 1$, conseqüentemente x é pré-requisito para z , ou seja $\varphi_R(x, z) \geq \varphi_R(x, y) \wedge \varphi_R(y, z)$.

2.4 T-NORMA E T-CONORMA

Durante os trabalhos de modelagem matemática, conectivos como “e” e “ou” aparecem com frequência. Ao realizar a extensão de tais conectivos para modelos fuzzy utilizam-se as normas e conormas triangulares.

Definição 2.8. (*t-norma*). Uma norma triangular ou *t-norma* é uma operação $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, com $\Delta(a, b) = a\Delta b$, se satisfizer as seguintes condições:

1. *Comutativa*: $a\Delta b = b\Delta a$;
2. *Elemento neutro*: $a\Delta 1 = a$;
3. *Associativa*: $a\Delta(b\Delta c) = (a\Delta b)\Delta c$;
4. *Monotonicidade*: se $a \leq c$ e $b \leq d$, então $a\Delta b \leq c\Delta d$.

A operação t-norma $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ estende o operador \wedge que modela o conectivo “e”.

Exemplo 2.6. Um exemplo para t-norma:

$$\wedge : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

E pode-se demonstrar.

Demonstração. (i) $\Delta(1, x) = 1 \wedge x = \min\{1, x\} = x$, pois $x \in [0, 1]$. Logo, satisfaz a condição do elemento neutro.

(ii) $\Delta(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\} = \min\{y, x\} = y \wedge x = \Delta(y, x)$. Logo, é comutativa.

(iii) $x\Delta(y\Delta z) = x \wedge (y \wedge z) = \min\{x, \min\{y, z\}\}$.

Por outro lado, tem-se: $(x\Delta y)\Delta z = (x \wedge y) \wedge z = \min\{\min\{x, y\}, z\}$.

É preciso analisar os seguintes casos:

- 1) $x \leq y \leq z$;
- 2) $x \leq z \leq y$;
- 3) $y \leq x \leq z$;
- 4) $y \leq z \leq x$;
- 5) $z \leq x \leq y$;
- 6) $z \leq y \leq x$.

Será analisado o primeiro caso, os demais seguem de maneira análoga.

Supõe-se que $x \leq y \leq z$. Então:

$$\begin{aligned} x\Delta(y\Delta z) &= x \wedge (y \wedge z) \\ &= \min\{x, \min\{y, z\}\} \\ &= \min\{x, y\} \\ &= x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x\Delta y)\Delta z &= (x \wedge y) \wedge z \\ &= \min\{\min\{x, y\}, z\} \\ &= \min\{x, z\} \\ &= x. \end{aligned}$$

Logo, pela associatividade, $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$.

(iv) Para o caso “se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x\Delta y \leq u\Delta v$ ”, deve-se analisar as seguintes possibilidades:

- 1) $x \leq y$ e $u \leq v$;
- 2) $x \leq y$ e $v \leq u$;
- 3) $y \leq x$ e $u \leq v$;
- 4) $y \leq x$ e $v \leq u$.

Será analisada a primeira possibilidade, as demais seguem de maneira análoga.

Supõe-se que $x \leq y$ e $u \leq v$. Então:

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= x\Delta y \\ &= x \wedge y \\ &= \min\{x, y\} \\ &= x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(u, v) &= u\Delta v \\ &= u \wedge v \\ &= \min\{u, v\} \\ &= u.\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $x \leq u$, tem-se que $x\Delta y \leq u\Delta v$.

Portanto, se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x\Delta y \leq u\Delta v$.

Por (i), (ii), (iii) e (iv) pode-se concluir que o operador $\Delta(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\}$ é um exemplo para t-norma.

□

Definição 2.9. *Uma conorma triangular ou t-conorma é uma operação $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, com $\nabla(a, b) = a \nabla b$, se satisfizer as seguintes condições:*

1. *Comutativa:* $a \nabla b = b \nabla a$;
2. *Elemento neutro:* $a \nabla 1 = a$;
3. *Associativa:* $a \nabla (b \nabla c) = (a \nabla b) \nabla c$;
4. *Monotonicidade:* se $a \leq c$ e $b \leq d$, então $a \nabla b \leq c \nabla d$.

A operação t-conorma $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ estende o operador \vee do conectivo “ou”.

Exemplo 2.7. Um exemplo para t-conorma:

$$\vee : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \vee y = \max\{x, y\}.$$

E pode-se demonstrar.

Demonstração. (i) $\nabla(0, x) = 0 \vee x = \max\{0, x\} = x$, pois $x \in [0, 1]$. Logo, satisfaz a condição do elemento neutro.

(ii) $\nabla(x, y) = x \vee y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y \vee x = \nabla(y, x)$. Logo, é comutativa.

(iii) $x \nabla (y \nabla z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\}$.

Por outro lado, tem-se: $(x \nabla y) \nabla z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\}$.

É preciso analisar os seguintes casos:

- 1) $x \leq y \leq z$;
- 2) $x \leq z \leq y$;
- 3) $y \leq x \leq z$;
- 4) $y \leq z \leq x$;
- 5) $z \leq x \leq y$;
- 6) $z \leq y \leq x$.

Será analisado o primeiro caso, os demais seguem de maneira análoga.

Supõe-se que $x \leq y \leq z$. Então:

$$\begin{aligned} x \nabla (y \nabla z) &= x \vee (y \vee z) \\ &= \max\{x, \max\{y, z\}\} \\ &= \max\{x, z\} \\ &= z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \nabla y) \nabla z &= (x \vee y) \vee z \\ &= \max\{\max\{x, y\}, z\} \\ &= \max\{y, z\} \\ &= z. \end{aligned}$$

Logo, pela associatividade, $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$.

(iv) Para o caso “se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x \nabla y \leq u \nabla v$ ”, deve-se analisar as seguintes propriedades:

- 1) $x \leq y$ e $u \leq v$;
- 2) $x \leq y$ e $v \leq u$;
- 3) $y \leq x$ e $u \leq v$;
- 4) $y \leq x$ e $v \leq u$.

Será analisada a primeira possibilidade, as demais seguem de maneira análoga.

Supõe-se que $x \leq y$ e $u \leq v$. Então:

$$\begin{aligned}\nabla(x, y) &= x \nabla y \\ &= x \vee y \\ &= \max\{x, y\} \\ &= y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla(u, v) &= u \nabla v \\ &= u \vee v \\ &= \max\{u, v\} \\ &= v.\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $y \leq v$, tem-se que $x \nabla y \leq u \nabla v$.

Portanto, se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x \nabla y \leq u \nabla v$.

Por (i), (ii), (iii) e (iv) pode-se concluir que o operador $\nabla(x, y) = x \vee y = \max\{x, y\}$ é um exemplo para t-conorma.

□

2.5 EQUAÇÕES RELACIONAIS FUZZY

Para equações relacionais fuzzy, considera-se os conjuntos universos finitos:

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ e } W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}.$$

As equações relacionais fuzzy tratam de achar a forma matricial de uma relação fuzzy binária, a partir de duas outras conhecidas. As equações relacionais fuzzy de interesse aqui têm a forma:

$$R * X = T$$

onde R e T são as formas matriciais das relações fuzzy binárias dadas, “*” uma composição (não necessariamente [max-min]) entre relações fuzzy e X a forma matricial de uma relação fuzzy incógnita a ser encontrada.

Desta forma, resolver a equação:

$$R * X = T$$

significa encontrar a forma matricial de uma relação fuzzy binária X , em $V \times W$, supondo conhecidas as formas matriciais R e T em $U \times V$ e $U \times W$, respectivamente.

2.6 EQUAÇÕES RELACIONAIS FUZZY COM A COMPOSIÇÃO MAX-MIN

Toda a teoria estudada ao longo dos dois primeiros capítulos desta dissertação têm por objetivo ser aplicada em uma modelagem matemática fuzzy para diagnóstico médico. A composição entre relações fuzzy mais tradicional e também mais utilizada para diagnósticos chama-se [max-min], portanto para as Equações Relacionais Fuzzy, que serão estudadas nesta seção, considera-se o caso em que “ $*$ ” é uma composição [max-min] e a equação é dada por:

$$R \circ X = T$$

Supõe-se que os conjuntos universos envolvidos sejam finitos, de modo que as relações fuzzy tenham representações matriciais:

$$R = [r_{ij}], X = [x_{jk}] \text{ e } T = [t_{ik}]$$

onde $r_{ij} = \varphi_R(u_i, v_j)$, $x_{jk} = \varphi_X(v_j, w_k)$ e $t_{ik} = \varphi_T(u_i, w_k)$.

Proposição 2.1. *Se a desigualdade $\max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} < \max_{1 \leq k \leq p} t_{ik}$ for verificada, então a equação relacional fuzzy $R \circ X = T$ não terá solução.*

Demonstração. Como a composição em questão é a [max-min], resolver $R \circ X = T$ significa encontrar $x_{ij} \in [0, 1]$ tais que:

$$\max_{1 \leq j \leq n} [\min(r_{ij}, x_{jk})] = t_{ik},$$

para cada $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq p$.

Logo, para investigar a solução de $R \circ X = T$, a primeira providência a ser tomada é verificar se tal sistema de equações tem chance de ter solução.

De $\max_{1 \leq j \leq n} [\min(r_{ij}, x_{jk})] = t_{ik}$ tem-se:

$$\max_{1 \leq j \leq n} [\min(r_{ij}, x_{jk})] = t_{ik} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} \geq t_{ik}$$

para todo i e todo k . Daí, segue imediatamente que se existir uma linha i de modo que

$$\max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} < \max_{1 \leq k \leq p} t_{ik},$$

então **não** haverá X que resolva a equação. □

Exemplo 2.8. (Adaptado de [7]) Considere a equação relacional:

$$R \circ X = T \iff \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,7 & 0,8 \\ 1,0 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar X deve-se resolver o sistema de quatro equações:

$$\begin{cases} \max[\min(x_{11}; 0,9), \min(x_{12}; 0,7), \min(x_{13}; 1,0)] = 0,6 \\ \max[\min(x_{11}; 0,5), \min(x_{12}; 0,8), \min(x_{13}; 0,4)] = 0,3 \\ \max[\min(x_{21}; 0,9), \min(x_{22}; 0,7), \min(x_{23}; 1,0)] = 0,2 \\ \max[\min(x_{21}; 0,5), \min(x_{22}; 0,8), \min(x_{23}; 0,4)] = 1,0 \end{cases}$$

Observa-se que as duas primeiras equações apresentam apenas as incógnitas x_{11} , x_{12} e x_{13} , enquanto as duas últimas apresentam apenas as incógnitas x_{21} , x_{22} e x_{23} . E, desta forma, pode-se resolvê-las de maneira independente.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,7 & 0,8 \\ 1,0 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

e

$$\begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,7 & 0,8 \\ 1,0 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

Pela Proposição 3.1., o sistema de equações não tem solução, uma vez que:

$$\max(0,5; 0,8; 0,4) < 1,0.$$

3 A MODELAGEM MATEMÁTICA

O processo de selecionar no sistema, em estudo, teorias, argumentos ou parâmetros considerados essenciais, formalizando-os através de um processo artificial é denominado modelo. O modelo nunca encerra uma verdade definitiva, pois é sempre uma aproximação conveniente da realidade analisada e, portanto, sujeito a mudanças. Este processo dinâmico de busca a modelos adequados é o que se convencionou chamar de Modelagem Matemática. Desta forma pode-se dizer que a modelagem matemática é um conjunto de equações ou estruturas matemáticas, elaborada para corresponder a algum fenômeno [4].

3.1 AS FARINGOTONSILITES

Faringotonsilites, antigamente chamadas de amigdalites, representam uma das infecções mais frequentes das vias aéreas superiores, principalmente na população infantil. Esta afecção demanda uma fração importante dos atendimentos médicos, com custo ponderável à área da saúde, além de ausências no trabalho e às escolas, e afeta diretamente a qualidade de vida dos indivíduos acometidos [19] [20].

Entre as infecções das vias aéreas superiores, encontramos muito frequentemente as faringotonsilites virais e bacterianas as quais, dependendo do vírus e da bactéria, podem ser classificadas de diversas maneiras como, por exemplo, faringotonsilite estreptocócica, faringotonsilite viral, mononucleose ou difteria. Embora as faringotonsilites de causa viral sejam mais prevalentes, esta síndrome clínica é um dos maiores e mais antigos exemplos de como os antibióticos são prescritos de maneira inadequada [21] [22].

A seguir será feita uma breve explicação sobre cada uma das faringotonsilites e seus principais sintomas, como referência bibliográfica, utilizou-se [22], [21], [11] e [1].

- Faringotonsilite Estreptocócica

A faringotonsilite estreptocócica é a mais comum das faringotonsilites bacterianas. A bactéria responsável por essa faringotonsilite é o *Streptococcus pyogenes* beta hemolítico do grupo A (SGA).

Os sinais e sintomas da faringotonsilite pelo SGA variam de dor de garganta e mal-estar moderados (30 a 50% dos casos), até febre elevada, náuseas, vômitos e desidratação (10% dos casos). O começo é súbito, agudo, caracterizado por odinofagia, febre elevada, cefaleia e dor abdominal. A mucosa faringotonsilar apresenta-se com hiperemia, ocasionalmente com edema e o exsudato está presente em 50 a 90% dos casos. A adenopatia cervical é muito comum (30 a 60% dos casos). O exantema

escarlatiforme, quando aparece na forma clássica, é bastante indicativo de infecção bacteriana, mas é pouco frequente. Nestes pacientes geralmente estão ausentes sinais de infecção viral (coriza, rouquidão, tosse, diarreia).

O diagnóstico da faringoamigdalite aguda estreptocócica é basicamente clínico. Entretanto, as manifestações da faringotonsilite estreptocócica e não-estreptocócica são muito semelhantes, o que dificulta o diagnóstico específico.

Existem alguns métodos diagnósticos específicos para detecção e confirmação da faringoamigdalite estreptocócica. Destes, o padrão-ouro é a confirmação com cultura de orofaringe. Um dos grandes problemas da cultura é o tempo que decorre até o resultado do exame, que pode ser de 18 a 48 horas. Torna-se difícil para o médico convencer os pais ou o paciente a aguardar o resultado para a introdução do antibiótico, principalmente quando o mesmo se encontra febril e com queda do estado geral.

Além do tratamento sintomático, com analgésico, antitérmico, hidratação e alimentação adequada, o tratamento com antimicrobiano é indicado. A antibioticoterapia é indicada com o objetivo de melhorar os sintomas da infecção aguda, diminuir o período de contágio e prevenir complicações, principalmente a febre reumática e a glomerulonefrite.

Para o tratamento da faringotonsilite estreptocócica (SGA) a penicilina é o antibiótico de escolha.

- Faringotonsilite Viral

As faringotonsilites virais correspondem a 75% dos casos em crianças menores de dois anos e diminui após a puberdade tanto nos casos isolados quanto nas recorrências.

O principal vírus responsável pelas faringotonsilites é o adenovírus (20%), mas rinovírus, coronavírus, influenza, parainfluenza e vírus sincicial respiratório também podem estar envolvidos. Alguns vírus como Herpes simplex e Epstein-Barr também podem se manifestar como faringotonsilite e/ou estomatite.

As infecções causadas pela maioria dos vírus se apresentam com febre, exsudato na faringe e tonsilas, mialgia, obstrução nasal, coriza e sintomas gastrointestinais.

As crianças com infecções virais têm muitas vezes sinais e sintomas extra-faríngeos, como secreção nasal, conjuntivite, tosse, rouquidão, diarreia, ulcerações ou outras manifestações clínicas altamente sugestivas de infecções virais.

Têm curso limitado e melhora espontânea, sendo indicados cuidados com estado geral, hidratação, medicação analgésica e antitérmica.

- Mononucleose

A mononucleose pode ser causada por vírus Epstein-Barr (EBV), citomegalovírus (CMV), toxoplasma, adenovírus ou vírus da hepatite, porém o principal vírus relacionado à mononucleose é o EBV.

A transmissão dos vírus ocorre por meio de troca de saliva durante o beijo ou contato próximo.

Os principais sintomas da mononucleose são mal-estar e fadiga, seguida por um início agudo de febre e dor de garganta. O exame físico revela tonsilas aumentadas de volume e, em muitos casos, exsudato tonsilar e linfadenopatia. Entre a segunda e quarta semanas, aproximadamente 50% dos pacientes apresenta esplenomegalia e linfadenopatia e 30 a 50% desenvolve hepatoesplenomegalia e petéquias em palato. A dor abdominal pode estar presente em alguns casos. A febre e a faringite, geralmente, persistem por duas semanas.

O tratamento é baseado em suporte, hidratação e analgésicos, e o repouso é importante.

- Difteria

Trata-se de doença infecciosa aguda grave causada pelo *Corynebacterium diphtheriae*. A difteria é uma doença de notificação compulsória imediata, já diante da suspeita, atualmente rara em virtude da vacinação. A letalidade da difteria pode atingir 5 a 10%.

Atinge preferencialmente crianças até dez anos, principalmente no outono e inverno, estações em que, além de predominar temperatura fria e seca, ainda aumenta o número de infecções de vias aéreas superiores e aglomeração populacional em ambientes fechados.

A transmissão se dá por contato direto com doentes ou portadores através de gotículas respiratórias (tosse, espirro). O período de incubação varia de um a seis dias.

O paciente apresenta-se com dor de garganta pouco intensa, febre baixa, toxemiado, prostrado e pálido. Ao exame da cavidade oral, observa-se placas pseudomembranosas branco-acinzentadas aderentes às tonsilas, além de linfadenopatia cervical e submandibular.

O diagnóstico de certeza é dado através de cultura para comprovação bacteriológica, mas já na suspeita clínica deverá ser administrado o soro antidiftérico e poderá ser usado antibiótico, penicilina ou eritromicina, como medida auxiliar ao soro e também medidas de suporte como hidratação vigorosa e analgésicos.

As quatro infecções, faringotonsilites viral e estreptocócica, difteria e mononucleose, apresentam sintomas clínicos muito semelhantes o que pode dificultar o diagnóstico médico. Os principais sintomas associados a estas infecções são:

- Febre

Elevação da temperatura corporal acima de $37,8^{\circ}\text{C}$.

- Odinofagia

É a dor durante a deglutição do alimento, enquanto ele está passando pelo esôfago para chegar ao estômago.

- Hiperemia tonsilar

É o aumento do volume sanguíneo nas tonsilas (amígdalas) e como consequência tem-se dilatação das mesmas.

- Exsudato tonsilar

É um líquido inflamatório que sai pelas paredes e membranas das amídalas.

- Petéquias em palato

São pequenos vasos que se assemelham a pontos vermelhos no céu da boca.

- Linfadenopatia

É qualquer alteração no tamanho e na consistência dos linfonodos, também chamados de gânglios linfáticos.

- Coriza / Obstrução nasal / Espirros

- Sintomas gastrointestinais / Dor abdominal

- Mal-estar / Fadiga

- Hepatoesplenomegalia

É o aumento do tamanho do fígado e do baço, provocado geralmente por uma grande atividade de defesa imunológica do organismo.

3.2 O MODELO

O processo de tomada de decisões ocorre em diversos pontos da atividade do médico, principalmente no diagnóstico. Desta forma, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy é aplicada no Diagnóstico Médico Fuzzy com auxílio de um especialista médico. O objetivo desta

aplicação é propor um modelo fuzzy para auxiliar o médico a tomar decisões e optar por exames laboratoriais mais detalhados [3].

A ideia básica aqui é relacionar os sintomas ou sinais de pacientes com algumas possíveis doenças das vias aéreas superiores, de acordo com os conhecimentos médicos de um especialista.

Para isso, considere os seguintes conjuntos universais: conjunto dos pacientes (U), conjunto dos sintomas (V) e conjunto das doenças (W).

Neste caso, trata-se de doenças das vias aéreas superiores, faringotonsilites. Existem inúmeras classificações para as faringotonsilites, levando-se em consideração seu quadro clínico e bacteriológico. Para este estudo considerou-se quatro delas: faringotonsilite estreptocócica, faringotonsilite viral, difteria e mononucleose, das quais tem-se conhecimento de vinte pacientes $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}, P_{18}, P_{19}, P_{20}$, com os sinais e sintomas $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$, que apresentaram os diagnósticos d_1, d_2, d_3, d_4 onde:

s_1 = febre

s_2 = odinofagia

s_3 = hiperemia tonsilar

s_4 = exsudato tonsilar

s_5 = petéquias em palato

s_6 = linfadenopatia

s_7 = coriza/obstrução nasal/ espirros

s_8 = sintomas gastrointestinais/ dor abdominal

s_9 = mal-estar / fadiga

s_{10} = hepatoesplenomegalia

d_1 = faringotonsilite estreptocócica

d_2 = faringotonsilite viral

d_3 = difteria

d_4 = mononucleose

A base de conhecimentos será composta pelos dados acima, os quais serão representados por meio de equações relacionais fuzzy. Solicitou-se a especialista (residente de otorrinolaringologia de Sorocaba/SP) que estabelecesse o grau da relação fuzzy R , Tabela 6, onde as colunas representam as doenças consideradas, as linhas são os sinais e sintomas, e os valores da matriz são os graus, no intervalo $[0,1]$, com que os sinais e sintomas se relacionam com as doenças. Por exemplo, o valor $R_{91} = 0,75$, indica que numa escala entre 0 e 1, o sintoma s_9 , mal-estar/fadiga, está relacionado com a doença d_1 , faringotonsilite estreptocócica, com grau 0,75.

Tabela 6 – Relação Fuzzy R : sintomas \times diagnósticos

Sinais e sintomas \ Diagnósticos	d_1	d_2	d_3	d_4
s_1	1,0	0,5	0,25	0,75
s_2	1,0	0,75	0,5	0,75
s_3	1,0	0,75	0,25	0,75
s_4	0,75	0,5	1,0	0,75
s_5	0,75	0,0	0,0	0,75
s_6	0,5	0,75	1,0	0,8
s_7	0,0	1,0	0,3	0,2
s_8	0,5	0,75	0,0	0,5
s_9	0,75	0,5	1,0	0,8
s_{10}	0,0	0,0	0,0	0,5

A Tabela 7 apresenta a relação fuzzy S , a qual é composta por valores no intervalo $[0,1]$ que indicam os graus com que cada sinal e sintoma se manifestou em vinte pacientes, estes graus foram fornecidos pela especialista.

Tabela 7 – Relação Fuzzy S : pacientes \times sintomas

Pacientes(P) \ (s)	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
P_1	0,75	1,0	1,0	0,8	1,0	0,2	0,0	0,0	0,6	0,0
P_2	0,5	0,6	0,6	0,0	0,0	0,6	1,0	0,2	0,2	0,0
P_3	0,75	1,0	0,8	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	0,0
P_4	0,75	0,8	1,0	0,6	0,0	0,2	0,0	0,0	0,8	0,0
P_5	0,0	0,2	0,6	0,0	0,0	0,6	1,0	0,6	0,2	0,0
P_6	1,0	0,2	0,0	1,0	0,0	1,0	0,2	0,4	1,0	0,0
P_7	0,0	0,6	1,0	0,2	0,0	0,2	0,8	0,0	0,2	0,0
P_8	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,2	0,0	0,0	1,0	0,0
P_9	0,5	1,0	0,8	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,8	0,0
P_{10}	0,5	0,8	0,6	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	0,0
P_{11}	0,5	0,2	0,6	0,0	0,0	0,6	1,0	0,2	0,2	0,0
P_{12}	0,5	0,2	0,2	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0
P_{13}	0,5	0,4	0,6	0,0	0,0	0,2	0,8	0,6	0,2	0,0
P_{14}	0,5	0,2	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0
P_{15}	0,5	0,4	0,8	0,2	0,0	0,2	0,8	0,0	0,2	0,0
P_{16}	1,0	0,2	0,2	1,0	0,0	0,8	0,2	0,0	1,0	0,0
P_{17}	1,0	1,0	0,6	0,6	1,0	0,0	0,0	0,0	0,6	0,0
P_{18}	0,5	0,2	0,2	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0
P_{19}	1,0	0,8	0,8	0,8	0,0	0,2	0,0	0,0	0,6	0,0
P_{20}	0,75	0,6	0,6	0,2	0,0	0,4	0,6	0,2	0,2	0,0

A ideia é obter uma relação fuzzy T , forma matricial da tabela pacientes \times diagnósticos ($U \times W$), de modo que

$$S \circ R = T,$$

onde S é a forma matricial da tabela pacientes \times sintomas ($U \times V$) e R é a forma matricial da tabela sintomas \times diagnósticos ($V \times W$), “ \circ ” uma composição [max-min] entre relações fuzzy [3]. A partir da relação fuzzy T será possível obter o diagnóstico médico com os respectivos graus das doenças para cada paciente, ou seja,

$$t_{ij}(x, z) = \max_{1 \leq k \leq 10} [\min(s_{ik}, r_{kj})],$$

com $1 \leq i \leq 20$ e $1 \leq j \leq 4$. Obtendo assim a forma matricial de T :

$$T = S \circ R = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{20,1} & t_{20,2} & t_{20,4} & t_{20,4} \end{bmatrix}_{20 \times 4}.$$

Assim, as Tabelas 6 e 7 podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$S \circ R = \begin{bmatrix} 0,75 & 1,0 & 1,0 & 0,8 & 1,0 & 0,2 & 0,0 & 0,0 & 0,6 & 0,0 \\ 0,5 & 0,6 & 0,6 & 0,0 & 0,0 & 0,6 & 1,0 & 0,2 & 0,2 & 0,0 \\ 0,75 & 1,0 & 0,8 & 0,8 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,6 & 0,0 \\ 0,75 & 0,8 & 1,0 & 0,6 & 0,0 & 0,2 & 0,0 & 0,0 & 0,8 & 0,0 \\ 0,0 & 0,2 & 0,6 & 0,0 & 0,0 & 0,6 & 1,0 & 0,6 & 0,2 & 0,0 \\ 1,0 & 0,2 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,2 & 0,4 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,6 & 1,0 & 0,2 & 0,0 & 0,2 & 0,8 & 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 1,0 & 1,0 & 1,0 & 1,0 & 0,0 & 0,2 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,5 & 1,0 & 0,8 & 1,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,8 & 0,0 \\ 0,5 & 0,8 & 0,6 & 0,6 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,6 & 0,0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 & 0,0 & 0,0 & 0,6 & 1,0 & 0,2 & 0,2 & 0,0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,2 & 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,6 & 0,0 & 0,0 & 0,2 & 0,8 & 0,6 & 0,2 & 0,0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,8 & 0,2 & 0,0 & 0,2 & 0,8 & 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 1,0 & 0,2 & 0,2 & 1,0 & 0,0 & 0,8 & 0,2 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 1,0 & 1,0 & 0,6 & 0,6 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,6 & 0,0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,2 & 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 1,0 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,0 & 0,2 & 0,0 & 0,0 & 0,6 & 0,0 \\ 0,75 & 0,6 & 0,6 & 0,2 & 0,0 & 0,4 & 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0,0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1,0 & 0,5 & 0,25 & 0,75 \\ 1,0 & 0,75 & 0,5 & 0,75 \\ 1,0 & 0,75 & 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 0,5 & 1,0 & 0,75 \\ 0,75 & 0,0 & 0,0 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1,0 & 0,8 \\ 0,0 & 1,0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,75 & 0,0 & 0,5 \\ 0,75 & 0,5 & 1,0 & 0,8 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

O diagnóstico médico do paciente P_1 , via relação fuzzy, é facilmente obtido através dos cálculos de t_{ij} , com $i = 1$ e $j = 1, 2, 3, 4$ da matriz T . Assim, de acordo com os sinais e sintomas apresentados, o paciente P_1 pode ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{11}

$$t_{11} = \max[\min\{0,75;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{11} = \max[0,75 ; 1,0 ; 1,0 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 1,0$$

- t_{12}

$$t_{12} = \max[\min\{0,75;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{12} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,5 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- t_{13}

$$t_{13} = \max[\min\{0,75;0,25\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{1,0;0,25\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{13} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,8 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,8$$

- t_{14}

$$t_{14} = \max[\min\{0,75;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{14} = \max[0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,75$$

Da mesma forma, de acordo com os sinais e sintomas apresentados, o paciente P_2 pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{21}

$$t_{21} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{21} = \max[0,5 ; 0,6 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

- t_{22}

$$t_{22} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{22} = \max[0,5 ; 0,6 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 1,0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 1,0$$

- t_{23}

$$t_{23} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0,6;0,25\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{1,0;0,3\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{23} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0,3 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

- t_{24}

$$t_{24} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,8\}, \min\{1,0;0,2\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{24} = \max[0,5 ; 0,6 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

O paciente P_3 pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{31}

$$t_{31} = \max[\min\{0,75;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{31} = \max[0,75 ; 1,0 ; 0,8 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 1,0$$

- t_{32}

$$t_{32} = \max[\min\{0,75;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{32} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,5 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- t_{33}

$$t_{33} = \max[\min\{0,75;0,25\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0,8;0,25\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{33} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,8 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,8$$

- t_{34}

$$t_{34} = \max[\min\{0,75;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{34} = \max[0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,75$$

O paciente P_4 pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{41}

$$t_{41} = \max[\min\{0,75;1,0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{41} = \max[0,75 ; 0,8 ; 1,0 ; 0,6 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,75 ; 0] = 1,0$$

- t_{42}

$$t_{42} = \max[\min\{0,75;0,5\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{42} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,5 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- t_{43}

$$t_{43} = \max[\min\{0,75;0,25\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{1,0;0,25\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{43} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,6 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

- t_{44}

$$t_{44} = \max[\min\{0,75;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,8;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{44} = \max[0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,6 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

O paciente P_5 pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{51}

$$t_{51} = \max[\min\{0;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{51} = \max[0 ; 0,2 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0,5 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

- t_{52}

$$t_{52} = \max[\min\{0;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{52} = \max[0 ; 0,2 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 1,0 ; 0,6 ; 0,2 ; 0] = 1,0$$

- t_{53}

$$t_{53} = \max[\min\{0;0,25\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,6;0,25\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{1,0;0,3\}, \min\{0,6;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{53} = \max[0 ; 0,2 ; 0,25 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0,3 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

- t_{54}

$$t_{54} = \max[\min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,8\}, \min\{1,0;0,2\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{54} = \max[0 ; 0,2 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0,2 ; 0,5 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

O paciente P_6 pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{61}

$$t_{61} = \max[\min\{1,0;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;1,0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0,4;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{61} = \max[1,0 ; 0,2 ; 0 ; 0,75 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0,4 ; 0,75 ; 0] = 1,0$$

- t_{62}

$$t_{62} = \max[\min\{1,0;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{62} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0,75 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- t_{63}

$$t_{63} = \max[\min\{1,0;0,25\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0,25\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,2;0,3\}, \min\{0,4;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{63} = \max[0,25 ; 0,2 ; 0 ; 1,0 ; 0 ; 1,0 ; 0,2 ; 0 ; 1,0 ; 0] = 1,0$$

- t_{64}

$$t_{64} = \max[\min\{1,0;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0,2;0,2\}, \min\{0,4;0,5\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{64} = \max[0,75 ; 0,2 ; 0 ; 0,75 ; 0 ; 0,8 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

O paciente P_7 pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{71}

$$t_{71} = \max[\min\{0;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,8;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{71} = \max[0 ; 0,6 ; 1,0 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 1,0$$

- t_{72}

$$t_{72} = \max[\min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{72} = \max[0 ; 0,6 ; 0,75 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,8 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,8$$

- t_{73}

$$t_{73} = \max[\min\{0;0,25\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{1,0;0,25\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,8;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{73} = \max[0 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,3 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,5$$

- t_{74}

$$t_{74} = \max[\min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0,8;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{74} = \max[0 ; 0,6 ; 0,75 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,75$$

O paciente P_8 pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{81}

$$t_{81} = \max[\min\{1,0;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{81} = \max[1,0 ; 1,0 ; 1,0 ; 0,75 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,75 ; 0] = 1,0$$

- t_{82}

$$t_{82} = \max[\min\{1,0;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{82} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,5 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- t_{83}

$$t_{83} = \max[\min\{1,0;0,25\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{1,0;0,25\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{83} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 1,0 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 1,0 ; 0] = 1,0$$

- t_{84}

$$t_{84} = \max[\min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{84} = \max[0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

O paciente P_9 pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- t_{91}

$$t_{91} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{91} = \max[0,5 ; 1,0 ; 0,8 ; 0,75 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,75 ; 0] = 1,0$$

- t_{92}

$$t_{92} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{92} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,5 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- t_{93}

$$t_{93} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0,8;0,25\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{93} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 1,0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 1,0$$

- t_{94}

$$t_{94} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,8;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{94} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

O paciente P_{10} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{10,1}$

$$t_{10,1} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{10,1} = \max[0,5 ; 0,8 ; 0,6 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,8$$

- $t_{10,2}$

$$t_{10,2} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{10,2} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,6 ; 0,5 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- $t_{10,3}$

$$t_{10,3} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0,6;0,25\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{10,3} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,6$$

- $t_{10,4}$

$$t_{10,4} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{10,4} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,6 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,75$$

O paciente P_{11} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{11,1}$

$$t_{11,1} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{11,1} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

- $t_{11,2}$

$$t_{11,2} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{11,2} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 1,0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 1,0$$

- $t_{11,3}$

$$t_{11,3} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,6;0,25\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{1,0;0,3\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{11,3} = \max[0,25 ; 0,2 ; 0,25 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0,3 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

- $t_{11,4}$

$$t_{11,4} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,8\}, \min\{1,0;0,2\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{11,4} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

O paciente P_{12} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{12,1}$

$$t_{12,1} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{12,1} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,75 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0 ; 0,75 ; 0] = 0,75$$

- $t_{12,2}$

$$t_{12,2} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{12,2} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,5 ; 0 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- $t_{12,3}$

$$t_{12,3} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,25\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{12,3} = \max[0,25 ; 0,2 ; 0,2 ; 1,0 ; 0 ; 1,0 ; 0 ; 0 ; 1,0 ; 0] = 1,0$$

- $t_{12,4}$

$$t_{12,4} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{12,4} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,75 ; 0 ; 0,8 ; 0 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

O paciente P_{13} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{13,1}$

$$t_{13,1} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{0,4;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,8;0\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{13,1} = \max[0,5 ; 0,4 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0,5 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

- $t_{13,2}$

$$t_{13,2} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{13,2} = \max[0,5 ; 0,4 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,2 ; 0,8 ; 0,6 ; 0,2 ; 0] = 0,8$$

- $t_{13,3}$

$$t_{13,3} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{0,4;0,5\}, \min\{0,6;0,25\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,8;0,3\}, \min\{0,6;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{13,3} = \max[0,25 ; 0,4 ; 0,25 ; 0 ; 0 ; 0,2 ; 0,3 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,4$$

- $t_{12,4}$

$$t_{13,4} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0,8;0,2\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{13,4} = \max[0,5 ; 0,4 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,5 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

O paciente P_{14} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{14,1}$

$$t_{14,1} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;1,0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{14,1} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0 ; 0,75 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0 ; 0,75 ; 0] = 0,75$$

- $t_{14,2}$

$$t_{14,2} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{14,2} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- $t_{14,3}$

$$t_{14,3} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0,25\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{14,3} = \max[0,25 ; 0,2 ; 0 ; 1,0 ; 0 ; 1,0 ; 0 ; 0 ; 1,0 ; 0] = 1,0$$

- $t_{14,4}$

$$t_{14,4} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{14,4} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0 ; 0,75 ; 0 ; 0,8 ; 0 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

O paciente P_{15} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{15,1}$

$$t_{15,1} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{0,4;1,0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,8;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{15,1} = \max[0,5 ; 0,4 ; 0,8 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,8$$

- $t_{15,2}$

$$t_{15,2} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{15,2} = \max[0,5 ; 0,4 ; 0,75 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,8 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,8$$

- $t_{15,3}$

$$t_{15,3} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{0,4;0,5\}, \min\{0,8;0,25\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,8;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{15,3} = \max[0,25 ; 0,4 ; 0,25 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,3 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,4$$

- $t_{15,4}$

$$t_{15,4} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0,8;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{15,4} = \max[0,5 ; 0,4 ; 0,75 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,75$$

O paciente P_{16} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{16,1}$

$$t_{16,1} = \max[\min\{1,0;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{16,1} = \max[1,0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,75 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0 ; 0,75 ; 0] = 1,0$$

- $t_{16,2}$

$$t_{16,2} = \max[\min\{1,0;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{16,2} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,5 ; 0 ; 0,75 ; 0,2 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- $t_{16,3}$

$$t_{16,3} = \max[\min\{1,0;0,25\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,25\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0,2;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{16,3} = \max[0,25 ; 0,2 ; 0,2 ; 1,0 ; 0 ; 0,8 ; 0,2 ; 0 ; 1,0 ; 0] = 1,0$$

- $t_{16,4}$

$$t_{16,4} = \max[\min\{1,0;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,8;0,8\}, \min\{0,2;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{16,4} = \max[0,75 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,75 ; 0 ; 0,8 ; 0,2 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

O paciente P_{17} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{17,1}$

$$t_{17,1} = \max[\min\{1,0;1,0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{17,1} = \max[1,0 ; 1,0 ; 0,6 ; 0,6 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 1,0$$

- $t_{17,2}$

$$t_{17,2} = \max[\min\{1,0;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{17,2} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,6 ; 0,5 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- $t_{17,3}$

$$t_{17,3} = \max[\min\{1,0;0,25\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0,6;0,25\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{1,0;0\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{17,3} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,6 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,6$$

- $t_{17,4}$

$$t_{17,4} = \max[\min\{1,0;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{17,4} = \max[0,75 ; 0,75 ; 0,6 ; 0,6 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,75$$

O paciente P_{18} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{18,1}$

$$t_{18,1} = \max[\min\{0,5;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{18,1} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,75 ; 0 ; 0,5 ; 0 ; 0 ; 0,75 ; 0] = 0,75$$

- $t_{18,2}$

$$t_{18,2} = \max[\min\{0,5;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{18,2} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,5 ; 0 ; 0,75 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- $t_{18,3}$

$$t_{18,3} = \max[\min\{0,5;0,25\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,25\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{1,0;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{18,3} = \max[0,25 ; 0,2 ; 0,2 ; 1,0 ; 0 ; 1,0 ; 0 ; 0 ; 1,0 ; 0] = 1,0$$

- $t_{18,4}$

$$t_{18,4} = \max[\min\{0,5;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{1,0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{1,0;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{18,4} = \max[0,5 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,75 ; 0 ; 0,8 ; 0 ; 0 ; 0,8 ; 0] = 0,8$$

O paciente P_{19} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{19,1}$

$$t_{19,1} = \max[\min\{1,0;1,0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{19,1} = \max[1,0 ; 0,8 ; 0,8 ; 0,75 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 1,0$$

- $t_{19,2}$

$$t_{19,2} = \max[\min\{1,0;0,5\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;1,0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{19,2} = \max[0,5 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,5 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,5 ; 0] = 0,75$$

- $t_{19,3}$

$$t_{19,3} = \max[\min\{1,0;0,25\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0,8;0,25\}, \min\{0,8;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0,3\}, \min\{0;0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{19,3} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,8 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,8$$

- $t_{19,4}$

$$t_{19,4} = \max[\min\{1,0;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,2\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0,6;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{19,4} = \max[0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,75 ; 0 ; 0,2 ; 0 ; 0 ; 0,6 ; 0] = 0,75$$

O paciente P_{20} pode também ter uma das doenças d_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, com os respectivos graus de pertinência:

- $t_{20,1}$

$$t_{20,1} = \max[\min\{0,75;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,4;0,5\}, \min\{0,6;0\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{20,1} = \max[0,75 ; 0,6 ; 0,6 ; 0,2 ; 0 ; 0,4 ; 0 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 0,75$$

- $t_{20,2}$

$$t_{20,2} = \max[\min\{0,75;0,5\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0,6;1,0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{20,2} = \max[0,5 ; 0,6 ; 0,6 ; 0,2 ; 0 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 0,6$$

- $t_{20,3}$

$$t_{20,3} = \max[\min\{0,75;0,25\}, \min\{0,6;0,5\}, \min\{0,6;0,25\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,4;1,0\}, \min\{0,6;0,3\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0,2;1,0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{20,3} = \max[0,25 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,2 ; 0 ; 0,4 ; 0,3 ; 0 ; 0,2 ; 0] = 0,5$$

- $t_{20,4}$

$$t_{20,4} = \max[\min\{0,75;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,6;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,4;0,8\}, \min\{0,6;0,2\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,2;0,8\}, \min\{0;0,5\}]$$

$$t_{20,4} = \max[0,75 ; 0,6 ; 0,6 ; 0,2 ; 0 ; 0,4 ; 0,2 ; 0,2 ; 0,2 ; 0] = 0,75$$

Desta forma, obtém-se os possíveis diagnósticos para todos os pacientes.

Através dos cálculos, foi possível encontrar a relação fuzzy T (pacientes \times diagnósticos), Tabela 8, onde as colunas representam as doenças consideradas, as linhas são os pacientes, e os valores da matriz são os graus com que as doenças se relacionam com cada paciente.

Tabela 8 – Relação Fuzzy T : pacientes \times diagnósticos

Pacientes \ Diagnósticos	d_1	d_2	d_3	d_4
P_1	1,0	0,75	0,8	0,75
P_2	0,6	1,0	0,6	0,6
P_3	1,0	0,75	0,8	0,75
P_4	1,0	0,75	0,8	0,8
P_5	0,6	1,0	0,6	0,6
P_6	1,0	0,75	1,0	0,8
P_7	1,0	0,8	0,5	0,75
P_8	1,0	0,75	1,0	0,8
P_9	1,0	0,75	1,0	0,8
P_{10}	0,8	0,75	0,6	0,75
P_{11}	0,6	1,0	0,6	0,6
P_{12}	0,75	0,75	1,0	0,8
P_{13}	0,6	0,8	0,4	0,6
P_{14}	0,75	0,75	1,0	0,8
P_{15}	0,8	0,8	0,4	0,75
P_{16}	1,0	0,75	1,0	0,8
P_{17}	1,0	0,75	0,6	0,75
P_{18}	0,75	0,75	1,0	0,8
P_{19}	1,0	0,75	0,8	0,75
P_{20}	0,75	0,6	0,5	0,75

Desta forma, notamos na Tabela 8, que a possibilidade do paciente P_1 ter faringotonsilite estreptocócica (d_1), faringotonsilite viral (d_2), difteria (d_3) e mononucleose (d_4) é 1,0; 0,75; 0,8 e 0,75, respectivamente. Os pacientes P_2 , P_5 e P_{11} podem estar com faringotonsilite viral com grau de pertinência 1,0. Já os pacientes P_3 , P_4 , P_7 , P_{17} e P_{19} , com grau de pertinência 1,0, têm maior possibilidade de serem diagnosticados com faringotonsilite estreptocócica. Os pacientes P_6 , P_8 , P_9 e P_{16} apresentam o mesmo grau de pertinência 1,0 tanto para faringotonsilite estreptocócica quanto para difteria. O paciente P_{10} , com grau de pertinência 0,8, tem maior possibilidade de ser diagnosticado com faringotonsilite estreptocócica. Os pacientes P_{12} , P_{14} e P_{18} possuem maior grau de pertinência para difteria. O paciente P_{13} apresenta grau de pertinência 0,8 para faringotonsilite viral. O paciente P_{15} apresenta o mesmo grau de pertinência 0,8 tanto para faringotonsilite estreptocócica quanto para faringotonsilite viral. Já o paciente P_{20} tem o mesmo grau de pertinência 0,75 tanto para faringotonsilite estreptocócica quanto para mononucleose.

Observa-se que os resultados dos diagnósticos são muito próximos uns dos outros, resultado esperado pela residente de otorrinolaringologia, uma vez que as doenças pesquisadas possuem sintomas semelhantes, exceto em alguns casos específicos como hepatoesplenomegalia, que é o aumento do tamanho do fígado e do baço, provocado

geralmente por uma grande atividade de defesa imunológica do organismo, presente apenas na mononucleose.

Os resultados do modelo fuzzy disponíveis na Tabela 8 e comparados com os diagnósticos fornecidos pela especialista foram compatíveis em 95% dos casos, ou seja, dos 20 diagnósticos 19 foram compatíveis. Fazendo-se uma pesquisa e um questionamento desses casos, considerou-se pacientes com idades maiores ou iguais a 5 anos, essa escolha se deu pelo fato de que os pacientes com idades inferiores não possuem autonomia para responderem por si só sobre seus sinais e sintomas, e ficam dependentes da análise de seus responsáveis. Além disso, na maioria dos casos, os pacientes já vão medicados ao médico, ou seja, já ingeriram um antitérmico ou um analgésico, o que pode comprometer o resultado da aferição da febre e do grau da dor que estão sentindo no momento da consulta.

É importante observar que a resposta da composição é também um conjunto fuzzy, ou seja, a composição nem sempre responde qual doença o paciente possui. A composição fuzzy fornece a distribuição de possibilidades do paciente no conjunto de doenças dado que ele apresenta uma certa distribuição de possibilidades no conjunto de sintomas [13] [9] [10].

Outra propriedade importante da relação fuzzy é que à medida que se obtém diagnósticos de novos pacientes, estes podem ser incluídos na base de conhecimentos aumentando assim a capacidade de se obter mais diagnósticos por meio de relações fuzzy, tal como fazem os profissionais da saúde [2] [13] [3].

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta dissertação foi estudar conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy e, em seguida, desenvolver uma aplicação em um problema da Biomedicina.

Na modelagem de fenômenos biológicos é comum se deparar com incertezas, envolvendo variáveis que não são precisamente quantificadas. Esse é o caso típico de alguns procedimentos adotados em Biomedicina para o diagnóstico de doenças. Por exemplo, para se diagnosticar determinada doença, observam-se os sinais ou sintomas apresentados pelo paciente. Diante de tantas incertezas a respeito dos sintomas observados nos pacientes, bem como a incerteza sobre a relação dos sintomas com uma determinada doença, esta teoria tem se mostrado mais adequada no tratamento de variáveis incertas e subjetivas do que a matemática clássica. Neste sentido, uma das possíveis contribuições dessa dissertação é a de agregar algum conhecimento às pesquisas realizadas nessa área.

Dessa forma, este trabalho iniciou-se com estudo de conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Clássica relacionando-os com a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Em seguida, foram estudados conceitos relacionados a Relação Fuzzy e Equação Relacional Fuzzy.

Dentro desse contexto, propõe-se uma aplicação da teoria estudada através de um modelo matemático para auxiliar o diagnóstico de pacientes infectados com faringotonsilites, dentre elas selecionou-se quatro: faringotonsilite viral, faringotonsilite estreptocócica, mononucleose e difteria. A ideia básica foi relacionar os sintomas e sinais de paciente com as possíveis doenças, de acordo com os conhecimentos de uma especialista, e utilizar equações relacionais fuzzy para propor um modelo de diagnóstico médico.

Com o auxílio de uma especialista (residente de otorrinolaringologia de Sorocaba/SP), que colaborou de forma anônima, foram selecionados dez sintomas primordiais para um exame clínico visando as doenças a serem consideradas: febre (s_1), odinofagia (s_2), hiperemia tonsilar (s_3), exsudato tonsilar (s_4), petéquias em palato (s_5), linfadenopatia (s_6), coriza/obstrução nasal/espirros (s_7), sintomas gastrointestinais/dor abdominal (s_8), mal-estar/ fadiga (s_9) e hepatoesplenomegalia (s_{10}).

A especialista também auxiliou na construção de uma tabela composta por 20 pacientes com idades maiores ou iguais a 5 anos e pelos respectivos sintomas, ou seja, para cada sintoma foi atribuído um grau de pertinência (valores entre 0 e 1) e desta forma elaborou-se uma tabela de pacientes \times sintomas.

Para prosseguir com o trabalho, fez-se necessário ter o conhecimento dos graus de pertinência com que cada doença se relaciona com os sintomas, e para isso as informações

foram coletadas de uma tabela construída pela especialista. Essa tabela foi convertida para os valores pertencentes ao intervalo $[0,1]$, obtendo-se uma tabela de sintomas \times diagnósticos.

Os dados de sintomas e diagnósticos compuseram a base de conhecimentos que foram expressos por meio de equações relacionais fuzzy. As equações relacionais fuzzy tratam de achar a forma matricial de uma relação fuzzy binária, a partir de duas outras conhecidas. As equações relacionais fuzzy de interesse aqui têm a forma: $S \circ R = T$, onde S é a forma matricial da tabela pacientes \times sintomas e R é a forma matricial da tabela sintomas \times diagnósticos, “ \circ ” uma composição [max-min] entre relações fuzzy [3]. A partir da relação fuzzy T foi possível obter o diagnóstico médico com os respectivos graus de pertinência das doenças para cada paciente.

Os resultados obtidos condizem com os diagnósticos estabelecidos pela especialista em 95% dos casos, ou seja, dos 20 diagnósticos 19 foram compatíveis. Conforme depoimento da especialista, na maioria dos casos, os pacientes já vão medicados ao médico e isso pode comprometer o resultado da aferição da febre e do grau da dor que estão sentindo no momento da consulta. Além disso, destaca a coerência da proximidade dos graus de pertinência nos resultados dos diagnósticos, uma vez que as doenças pesquisadas possuem sintomas semelhantes.

Desta maneira, o modelo pretende ser mais uma ferramenta para auxiliar os profissionais da saúde envolvidos, com a finalidade de diminuir as dúvidas dos médicos quanto ao diagnóstico mais adequado, e conseqüentemente, diminuir a prescrição inadequada de antibióticos. Além disso, o trabalho pretende ser mais uma contribuição para a Matemática e para as futuras pesquisas a respeito de Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

Considerando tudo que foi exposto, é possível agora responder as perguntas colocadas no início desse texto, quais sejam: Esta teoria pode ser útil na resolução de problemas da medicina como, por exemplo, auxiliar no diagnóstico médico das faringotonsilites? Esta abordagem fornece resultados efetivamente aplicáveis?. A resposta que esta dissertação fornece é: Sim, a Lógica Fuzzy é uma estrutura matemática que mostrou-se adequada para abordar problemas de Medicina. Em particular, para auxiliar no diagnóstico médico das faringotonsilites ela se apresenta como uma ferramenta útil e de aplicabilidade real e efetiva.

No geral, vimos que a Teoria de Conjuntos Fuzzy pode ser usada, muitas vezes, para facilitar a modelagem de problemas. Além disso, pode-se afirmar que esta teoria ainda tem muito a ser explorada, devido ao fato de ser uma teoria relativamente nova em se tratando de Matemática.

Posteriormente, pretendemos aperfeiçoar os estudos em Equações Relacionais Fuzzy

e Modelagem em Biomatemática.

REFERÊNCIAS

- [1] ABORLCCF. *Tratado de Otorrinolaringologia e Cirurgia Cérvico Facial*. Volume 4. Elsevier, 2011.
- [2] BARROS, Laécio Carvalho; BASSANEZI, Rodney C. Introdução à teoria fuzzy: aplicações em biomatemática. In *Congresso Latino Americano de Biomatemática*, p.1-46, Campinas, Brasil, 2001. In Minicurso.
- [3] BARROS, Laécio Carvalho; BASSANEZI, Rodney C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2015.
- [4] BASSANEZI, Rodney C. Modelagem Matemática uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. *Biomatemática IX*. 1999. Disponível em http://www.ime.unicamp.br/biomat/bio9art_1.pdf. Acesso em 26 de fevereiro de 2019.
- [5] BELLUCCI, Danilo P. *Sistemas Baseados em Regras Fuzzy e Aplicações*. Dissertação de Mestrado. UFABC - Santo André, 2009.
- [6] HALMOS, Paul R. *Teoria ingênua dos conjuntos*. Ciência Moderna, Rio de Janeiro/RJ, 2001.
- [7] KLIR, George J.; YUAN, Bo. *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and Applications*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [8] LOPES, Wanda Aparecida; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta; BARROS, Laécio Carvalho. Modelagem Fuzzy de diagnóstico médico e monitoramento do tratamento da pneumonia. *Revista de Biomatemática*, 15(7):77-96, 2005.
- [9] MARINS, Lazaro Rodrigo. *Diagnóstico médico por meio de relações fuzzy: dengue, chikungunya ou zica*. Dissertação de Mestrado. CCET-UFSCar, 2016.
- [10] MARINS, Lazaro Rodrigo; PEIXOTO, Magda da Silva. Dengue, chikungunya ou zica: uma proposta de diagnóstico médico por meio de relações fuzzy. *Revista de Biomatemática*, 26(11):161-168, 2016.
- [11] MARTINS, Herlon Saraiva et al. *Emergências clínicas: abordagem prática*. Manole, 2013.
- [12] MARTINS, Ricardo Rhomberg. *Aplicação de Lógica Fuzzy à avaliação de cursos, em particular dos cursos do sistema Arcu-Sul*, 2012.

- [13] MASSAD, Eduardo et al. *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond*. Springer, 2008.
- [14] NICOLETTI, Maria do Carmo; CAMARGO, Heloisa de Arruda. *Fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy*. Série Apontamentos. São Carlos: EdUFSCar, 2011.
- [15] OLIVEIRA, Marcelo Rufino; PINHEIRO, Márcio Rodrigo da Rocha. *Coleção Elementos da Matemática, 1: conjuntos, funções, aritmética*. Volume 1. VestSeller, Fortaleza/CE, 2010.
- [16] ORTEGA, Neli Regina Siqueira. *Aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Biomedicina*. Tese de Pós-Doutorado. Instituto de Física-USP, São Paulo/SP, 2001.
- [17] PEDRYCZ, Witold; GOMIDE, Fernando. *An introduction to fuzzy sets: analysis and design*. The Mit Press, 1998.
- [18] PEIXOTO, Magda da Silva. *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: Um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo*. Tese de Doutorado. IMECC - UNICAMP, Campinas/SP, 2005.
- [19] PISSINI, Mariana M.; PEIXOTO, Magda S. Uma Abordagem Fuzzy para Auxiliar no Diagnóstico Médico das Faringotonsilites. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v.6, n.2, 2018.
- [20] PISSINI, Mariana M.; PEIXOTO, Magda S. (no prelo) Uma Abordagem Fuzzy para Auxiliar no Diagnóstico Médico das Faringotonsilites. *Revista de Biomatemática*, v.28, IMECC - UNICAMP, Campinas/SP.
- [21] SANTOS, Ana Gabriela P.; BEREZIN, Eitan N. Comparação entre métodos clínicos e laboratoriais no diagnóstico das faringotonsilites estreptocócicas. *Jornal de Pediatria*, 81:23-28, 2005.
- [22] SIH, Tania. Tonsilite viral ou bacteriana?. *IV Manual de otorrinolaringologia pediátrica da IAPO*. Guarulhos: Lis Gráfica e Editora, 4(11):57-60, 2006.
- [23] SIMÕES, Marcelo Godoy; SHAW, Ian S. *Controle e Modelagem Fuzzy*. Edgard Blücher, São Paulo/SP, 2007.
- [24] WASQUES, Vinícius Francisco. *Lógica Fuzzy aplicada a Geologia*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro/SP, 2015.
- [25] ZADEH, Lotfi A. *Fuzzy sets. Information and Control*, 8:338-353, 1965.