Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Determinante Regularizado do Laplaciano e Conjuntos Isoespectrais em Superfícies

Mateus da Silva Rodrigues Antas

Orientador: *Luiz Roberto Hartmann Junior*

São Carlos - SP
Janeiro de 2019

Determinante Regularizado do Laplaciano e Conjuntos Isoespectrais em Superfícies

Mateus da Silva Rodrigues Antas

Orientador: *Luiz Roberto Hartmann Junior*

Dissertação apresentada ao PPGM/UFSCar como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
Janeiro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Mateus da Silva Rodrigues Antas, realizada em 27/02/2019:

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior
UFSCar

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior
ICMC/USP

Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos
UFABC

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela suas bençãos e presença constante em minha vida.

Aos meus pais, que cuidam de mim e zelam pelo meu bem-estar.

Aos meus amigos do curso de Mestrado em Matemática, em especial a José Ramos Araujo dos Santos, Mynor Ademar Melara Estrada e Dayana Daffny Vigário.

A todos os professores do PPGM/USFCar que participaram da minha formação. Em especial ao professor e orientador, Luiz Roberto Hartmann Junior por sua dedicação em ajudar-me a concluir este trabalho. Também gostaria de agradecer aos professores Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior, Marcus Antônio Mendonça Marrocos e Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta pela suas sugestões para melhorar este trabalho.

Por fim agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) Processo nº: 2017/00739-7 e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante o curso de Mestrado em Matemática, pois sem ele este trabalho não teria se concretizado.

Resumo

Em superfícies compactas com bordo, sob certas condições em uma classe conforme de métricas, estudamos o problema de encontrar uma métrica de curvatura Gaussiana constante com bordo de curvatura geodésica constante que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano. A partir disto, obtemos aplicações relacionadas ao problema de determinar uma variedade Riemanniana compacta a partir do seu espectro. Por fim, usamos o determinante regularizado do Laplaciano e os invariantes do núcleo do calor para estudar compacidade de conjuntos isoespectrais de domínios planares simplesmente conexos em uma topologia natural C^∞.

Palavras-chave: Expansão assintótica do núcleo do calor, métricas conformes, conjuntos isoespectrais, determinante regularizado do Laplaciano, fórmula de Polyakov.

Abstract

On compact surfaces with boundary, with some conditions in a conformal class, we study the problem about to find a metric with constant Gaussian curvature with boundary of constant geodesic curvature for which the regularized determinant of Laplacian has a maximum. From this, we present applications to the problem to obtain a compact Riemannian manifold from its spectrum. Finally, we use the regularized determinant of Laplacian and the invariants of the heat kernel to study the compactness for isospectral sets of simply connected planar domains in a natural C^∞ topology.

Keywords: Asymptotic expansion of the heat kernel, conformal metrics, isospectral sets, regularized determinant of Laplacian and Polyakov formula.

Sumário

Introdução

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo e considere o operador Laplaciano $\Delta_g = \mathrm{div}_g \circ \nabla_g$ agindo no espaço $C^\infty(M)$. Associado a este operador existe o problema de autovalor de Dirichlet, isto é,

$$\begin{cases} \Delta_g \phi + \lambda \phi = 0 \\ \phi|_{\partial M} = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

onde λ e ϕ são chamados autovalor e autofunção de $-\Delta_g$, respectivamente. O espectro de (M, g) é o conjunto de todos os autovalores de $-\Delta_g$, cuja existência é dada no Teorema 1.14, e dizemos que duas variedades Riemannianas são isoespectrais se os espectros, contados com multiplicidade, coincidem. Uma questão clássica relacionada é: *Duas variedades Riemanninas isoespectrais são isométricas*? Existem muitos artigos que mostram que esta questão é falsa em geral, em particular, Milnor [16] apresentou um par de toros de dimensão 16 que são isoespectrais porém não são isométricos. Esta questão foi primeiramente posta em 1966 por Mark Kac [11] em domínios planares com bordo munidos da métrica euclidiana sob a forma: "*Can one hear the shape of a drum?*" O que levou Kac a fórmular esta questão com este título foi o seu pensamento de um domínio planar como a membrana de um tambor e os autovalores do problema de Dirichlet (1) como os tons musicais. Em 1992, Gordon, Webb e Wolpert [10] construiram dois domínios planares simplesmente conexos isoespectrais que não são isométricos. Portanto a resposta da questão de Kac é não.

Embora não seja possível determinar um domínio planar Ω a partir do seu espectro, podemos determinar a sua área ou na linguagem de Kac, podemos escutar a área do tambor. Em particular, em outubro de 1910, Lorentz apresentou esta conjectura em uma palestra em Gottingen. Na época este resultado despertou grande interesse e foi tido por Hilbert como insolúvel durante a sua vida. Porém quatro meses mais tarde Weyl [32], provou que Hilbert estava errado, e mostrou que se $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ são os autovalores de Dirichlet de $-\Delta_\Omega$ então

$$N(\lambda) := \sum_{\lambda_k \leq \lambda} 1 \sim \frac{\text{área}(\Omega)}{2\pi} \lambda \tag{2}$$

para $\lambda \to +\infty$, onde $N(\lambda)$ é a função contagem dos autovalores menores do que λ (contados com multiplicidade) e $\sim$ significa que $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{\text{área}(\Omega)}{2\pi}$. Talvez este seja o resultado que fez Kac e muitos outros matemáticos a indagar se é possível determinar um domínio a partir do seu espectro. Mais tarde este importante resultado foi estendido para uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) sob a forma

$$N(\lambda) \sim \omega_n V(M) \lambda^{n/2} / (2\pi)^n, \tag{3}$$

para $\lambda \to +\infty$, onde ω_n é o volume da bola unitária no $\mathbb{R}^n$, $V(M)$ é o volume de (M^n, g) e $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ é o espectro de Dirichlet de (M, g).

Em 1966, Mark Kac [11] obteve outras informações do domínio Ω a partir do seu espectro. Ele provou, usando o núcleo do calor (veja Seção 1.7), a expansão assintótica para domínios planares

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\Omega}) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sim \frac{\text{área}(\Omega)}{4\pi t} - \frac{1}{8\sqrt{\pi t}} \text{comprimento}(\partial\Omega) + \frac{1}{6}\chi(\Omega) + O(\sqrt{t}), \tag{4}$$

para $t \to 0^+$. Em particular, o conhecimento do espectro de Δ_Ω fornece o comprimento do bordo e a característica de Euler de Ω. Em 1967, McKean e Singer [15] provaram uma expansão assintótica de $\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_g})$ no contexto de variedades Riemannianas compactas com bordo. A expansão assintótica no caso de variedades Riemanninas compactas sem bordo já era conhecida antes da questão de Kac, pois em 1953 Minakshisundaram provou que

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_g}) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(V(M) + \frac{t}{6} \int_M s_g(x)\, d\omega_g(x) + O(t^2) \right) \tag{5}$$

em um curto espaço de tempo t, onde $s_g(x)$ denota a curvatura escalar de (M, g). A discussão destes resultados são apresentados com mais detalhes no Capítulo 1.

Relacionado a esta discussão, formalmente o determinante de Δ_g é definido como

$$\det \Delta_g := \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Porém para que esta expressão faça sentido, em 1971 Ray e Singer [23] usaram uma função zeta

$$\zeta(s, \Delta_g) := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} \quad s \in \mathbb{C}$$

associada ao espectro de (M, g), que possui uma extensão meromorfa em $\mathbb{C}$ que é regular em $s = 0$, para definir o determinante regularizado do Laplaciano como

$$\det \Delta_g := \exp\left(-\frac{d}{ds} \zeta(s, \Delta_g) \right) |_{s=0}. \tag{6}$$

Os detalhes desta definição fazem parte do Capítulo 2 desta dissertação.

Em 1987, Osgood, Phillips e Sarnak [19] estudaram propriedades extremais do determinante regularizado do Laplaciano em superfícies compactas com ou sem bordo dentro de uma classe conforme $[\sigma_0] := \{e^{2\varphi}\sigma_0 : \varphi \in C^\infty(M)\}$, mais precisamente:

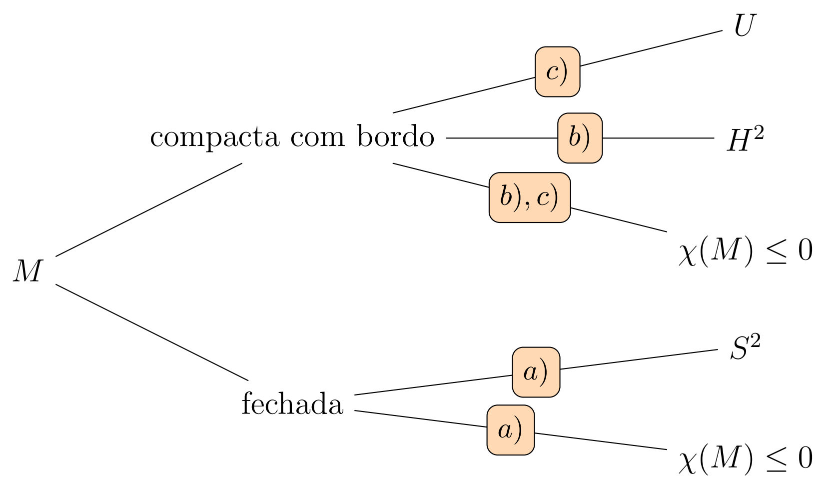
Teorema 0.1. **a)** *Se M é fechada então mantendo a área em $[\sigma_0]$ constante, existe uma única métrica de curvatura Gaussiana constante, a menos de isometria na classe, que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano.*

b) *Se $\partial M \neq \varnothing$ então mantendo a área A_φ constante e $\int_M K_\varphi dA_\varphi \leq 2\pi\chi(M)$ para toda métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$, existe uma única métrica de curvatura Gaussiana constante e curvatura geodésica do bordo nula, a menos de isometria na classe, que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano.*

c) *Se $\partial M \neq \varnothing$ então mantendo o comprimento do bordo $l_\varphi(\partial M)$ constante e $\int_M K_\varphi dA_\varphi \leq 0$ para toda métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$, existe uma única métrica de curvatura Gaussiana nula e curvatura geodésica do bordo constante, a menos de isometria na classe, que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano.*

Aqui K_φ, $A_\varphi := \int_M dA_\varphi$ e $l_\varphi(\partial M) := \int_{\partial M} ds_\varphi$ denotam a curvatura Gaussiana, a área e o comprimento do bordo associado a métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$.

Este teorema é um dos principais resultados apresentados nesta dissertação. A chave em estudar este teorema de maximização do determinante regularizado do Laplaciano em uma classe conforme $[\sigma_0]$ são as Fórmulas de Polyakov [22] no caso de M fechada, e de Alvarez [1] no caso de M compacta com bordo para a variação do $\log\det\Delta_\varphi$ na classe conforme de σ_0. As demonstrações destas fórmulas estão nas Seções 2.2 e 3.2. A fórmula variacional do $\log\det\Delta_\varphi$ permite definir em cada caso do teorema de maximização um funcional F estritamente relacionado, que sob as hipóteses do teorema permite concluir que maximizar o determinante regularizado do Laplaciano é equivalente a minimizar o funcional F, veja isso com mais detalhes nas seções 2.3, 3.3 e 3.4. Sob as hipóteses do Teorema 0.1, o Teorema de Classificação de Superfícies Compactas com ou sem bordo e orientadas, permite dividir os casos da prova do Teorema 0.1 no seguinte esquema:



onde U é o disco unitário em $\mathbb{R}^2$, S^2 é a esfera e H^2 é o hemisfério superior munidos da métrica usual σ_0. O caso M fechada é feito nas Seções 2.4 e 2.6. O caso M compacta com bordo é feito nas Subseções 3.3.1, 3.4.1 para o caso $\chi(M) \leq 0$, e nas Subseções 3.5.1, 3.5.2 para o caso de U e H^2, respectivamente. Este teorema é conhecido como um teorema de uniformização, e chamamos a atenção que no caso de M fechada com $\chi(M) \leq 0$, apresentamos no Capítulo 2 um novo método de uniformização feito por Osgood, Phillips e Sarnak [19] de obter a métrica uniforme (curvatura Gaussiana constante) que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano na classe conforme $[\sigma_0]$ de métricas de área constante. Tal método consiste em estudar a equação de evolução

$$\frac{d}{dt}\varphi(x,t) = -\nabla F(\varphi), \tag{7}$$

onde $\nabla F(\varphi)$ é definido em (2.24) na Seção 2.5. Mostramos que dada uma condição inicial φ_0 com uma certa regularidade de Sobolev, isto é, $\varphi_0 \in W^2(M)'$, então existe única solução $\varphi(\cdot,t) \in W^2(M)'$ da equação (7) definida para todo $t > 0$ com $\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$ e $\lim_{t\to\infty} \varphi(x,t) = \varphi_\infty(x)$ na norma $||.||_{W^2(M)'}$, onde $e^{2\varphi_\infty}\sigma_0$ é a métrica uniforme obtida no Teorema 0.1-a). A solução da equação (7) é chamada fluxo gradiente.

O Teorema 0.1 possibilita o estudo de alguns problemas isoespectrais. Primeiramente chamamos a atenção para o seguinte problema isoespectral relacionado a questão *can one hear the shape of a drum?*

Corolário 0.1. *Seja $(D, \rho_0|dz|^2)$ um disco unitário planar com ρ_0 constante. Então $(D, \rho_0|dz|^2)$ é audível (veja Definição 4.1) na classe de todos os domínios planares Ω de densidade uniforme ρ satisfazendo*

$$\int_\Omega \Delta_0 \log \rho \, dx\, dy \geq 0, \tag{8}$$

onde $|dz|^2$ é a métrica euclidiana, Δ_0 é o Laplaciano euclidiano, $dx\,dy$ é a medida Riemanniana associada a $|dz|^2$ e a densidade ρ é o fator conforme da métrica $\rho|dz|^2$.

A prova deste corolário é dada no Capítulo 4 e constitui uma boa aplicação do Teorema 0.1-c). Outras aplicações interessantes do Teorema 0.1 são dadas no Capítulo 4.

Relacionado ao trabalho de Osgood, Phillips e Sarnak [20], no Capítulo 5 usamos a expansão assintótica do núcleo do calor (4) e o determinante regularizado do Laplaciano para provar compacidade de conjuntos isoespectrais em domínios planares simplesmente conexo em uma topologia natural C^∞.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais resultados da Teoria Espectral a serem usados nesta dissertação, cujas referências gerais são [25], [8] e [4]. Em todo este trabalho consideraremos variedades Riemannianas orientadas e conexas. Admitimos conhecimentos básicos de variedades diferenciáveis e métricas Riemannianas. Uma variedade Riemanniana de dimensão 2 será chamada de superfície.

1.1 Fundamentos de Geometria Riemanniana

Apresentaremos nesta seção a definição do Laplaciano no espaço de funções $C^\infty(M)$, a fórmula de Green e a fórmula relacionando as curvaturas Gaussianas de métricas conformes.

1.1.1 Gradiente

Dado uma variedade Riemanniana (M, g) de dimensão n e $f \in C^\infty(M)$, define-se a diferencial de f em x como o funcional linear $df(x) : T_xM \to \mathbb{R}$ dado por

$$df(x)X = X(f),$$

para todo $X \in T_xM$.

Notamos que $df(x)$ é um elemento do espaço dual T_x^*M, que possui dimensão n. A base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ de T_xM associada a uma carta coordenada (U, φ) com $x \in U \subset M$ aberto, possui base dual $\{dx_i\}$, pois $\frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \delta^i_j$. Logo $df(x)$ pode ser representado na base $\{dx_i\}$ como

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{1.1}$$

Definição 1.1. *O gradiente é o operador*

$$\nabla_g : C^\infty(M) \to \Gamma(TM)$$

tal que

$$\langle \nabla_g f, X \rangle_g = df(X), \tag{1.2}$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$*, onde* $\Gamma(TM)$ *é o conjunto dos campos de vetores de classe* C^∞ *em* M*.*

Agora, obteremos a expressão do campo vetorial gradiente nas coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ de uma carta (U, φ). Sejam $\nabla_g f = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ a base coordenada de TU, onde $a_i \in C^\infty(U)$. Como $df(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, obtemos da expressão (1.2) do gradiente que

$$\sum_{m=1}^n a_m g_{mi} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

onde $g_{mi} = \langle \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle_g$ são os coeficientes da métrica g nas coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$. Logo $a_j = \sum_{i=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ onde (g^{ij}) é a inversa da matriz (g_{ij}), e portanto,

$$\nabla_g f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.4}$$

O gradiente satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1.1. *Se* $f, h \in C^\infty(M)$ *então*

1. $\nabla_g(f + h) = \nabla_g f + \nabla_g h$.
2. $\nabla_g(fh) = f\nabla_g h + h\nabla_g f$.

Demonstração. Use que $d(f + h) = d(f) + d(h)$ e $d(fh) = fd(h) + hd(f)$. $\square$

1.1.2 Divergente

Dado uma n-forma diferenciável ω e qualquer campo vetorial X em M, definimos a $(n-1)$-forma diferenciável $i_X\omega$ em M como

$$i_X\omega(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{n-1}), \tag{1.5}$$

onde $X_1, \ldots, X_{n-1}$ são campos vetoriais em M. Como a derivada exterior $d(i_X\omega)$ é uma n-forma diferenciável, existe uma função $\mathrm{div}_\omega X$ satisfazendo

$$d(i_X\omega) = (\mathrm{div}_\omega X)\omega. \tag{1.6}$$

Se $\omega_g = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ é a forma volume Riemanniana de (M, g) em uma carta (U, φ), então a função $\mathrm{div}_g X := \mathrm{div}_{\omega_g} X$ é o divergente de X.

Definição 1.2. *O divergente é o operador*

$$\mathrm{div}_g : \Gamma(TM) \to C^\infty(M) \tag{1.7}$$

tal que $d(i_X\omega_g) = (\mathrm{div}_g X)\omega_g$, *para todo* $X \in \Gamma(TM)$.

Agora, obteremos a expressão de div_g nas coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ da carta (U, φ). Para $X = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Gamma(TM)$ obtemos

$$\begin{aligned} i_X\omega_g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) &= \omega_g\left(X, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &= (-1)^{i-1}\omega_g\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, X, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &= (-1)^{i-1}\sqrt{\det g}\; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, X, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &= b_i(-1)^{i-1}\sqrt{\det g}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(i_X\omega_g) &= d\left(\sum_{i=1}^{n} b_i(-1)^{i-1}\sqrt{\det g} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\sqrt{\det g})dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\sqrt{\det g})dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\sqrt{\det g})\right)\omega_g. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathrm{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\sqrt{\det g}). \tag{1.8}$$

Em particular, se $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana g obtemos $\mathrm{div}_g X = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$, pois $\det g \equiv 1$.

Obviamente, se $X, Y \in \Gamma(TM)$ então $i_{X+Y}\omega_g = i_X\omega_g + i_Y\omega_g$. Segue da linearidade da derivada exterior que

$$\mathrm{div}_g(X+Y) = \mathrm{div}_g X + \mathrm{div}_g Y.$$

Da expressão em coordenadas (1.8) obtemos:

Proposição 1.2. *Dada* $f \in C^\infty(M)$ *e* $X \in \Gamma(TM)$, $\mathrm{div}_g(fX) = f\mathrm{div}_g X + \langle\nabla_g f, X\rangle_g$.

1.1.3 Laplaciano

Definição 1.3. *O Laplaciano em (M, g) é o operador $\Delta_g : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definido por*

$$\Delta_g := \mathrm{div}_g \circ \nabla_g. \tag{1.9}$$

Usando as Proposições 1.1 e 1.2, segue que Δ_g é um operador linear.

Proposição 1.3. *Para quaisquer funções $f, h \in C^\infty(M)$,*

$$\Delta_g(fh) = f\Delta_g h + h\Delta_g f + 2\langle \nabla_g f, \nabla_g h\rangle_g. \tag{1.10}$$

Demonstração. Da Proposição 1.2, $\mathrm{div}_g(h\nabla_g f) = h\Delta_g f + \langle \nabla_g h, \nabla_g f\rangle_g$. Então da Proposição 1.1

$$\begin{aligned}
\Delta_g(fh) &= \mathrm{div}_g \nabla_g(fh) \\
&= \mathrm{div}_g(f\nabla_g h) + \mathrm{div}_g(h\nabla_g f) \\
&= h\Delta_g f + f\Delta_g h + 2\langle \nabla_g h, \nabla_g f\rangle_g.
\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova. □

Nas coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ de uma carta (U, φ), obtemos das expressões em coordenadas do gradiente e do divergente em (1.4) e (1.8), respectivamente, que

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{\det g}\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \tag{1.11}$$

No $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana g, obtemos da expressão em coordenadas que

$$\Delta_g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

pois $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 1.1. *Se considerarmos o semi-plano superior*

$$\mathbb{R}^{2+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\} \tag{1.12}$$

com a métrica dada por $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$ e $g_{12} = 0$, então $\Delta_g = y^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Exemplo 1.2. *Seja g a métrica usual na esfera S^2. Considerando a carta local $T : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S^2$ dada por*

$$T(\theta, \phi) = (\,\mathrm{sen}\theta \cos\phi,\, \mathrm{sen}\theta\, \mathrm{sen}\phi, \cos\theta),$$

obtemos $g(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}^2\theta \end{pmatrix}$. *Logo*

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{1.13}$$

1.1.4 Fórmula de Green

Durante o desenvolvimento do trabalho usamos a Fórmula de Green em diversos momentos. Portanto, nesta seção relembramos esta fórmula.

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência)**.** *Seja (M,g) variedade Riemanniana com bordo. Para qualquer campo vetorial suave de suporte compacto X em M,*

$$\int_M \mathrm{div}_g X \ \omega_g = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle_g \ \sigma_g, \tag{1.14}$$

onde N é um campo normal unitário ao longo do ∂M que aponta para fora e σ_g é a forma volume da métrica induzida de g em ∂M.

Demonstração. Veja [13, pág. 424]. □

Corolário 1.1. *Se (M,g) é uma variedade Riemanniana compacta e orientada então para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \Gamma(TM)$ temos*

$$\int_M \langle \nabla_g f, X\rangle_g \ \omega_g = \int_{\partial M} f\langle X, N\rangle_g \ \sigma_g - \int_M f \mathrm{div}_g X \ \omega_g \tag{1.15}$$

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 1.2 e o Teorema da Divergência. □

Teorema 1.2 (Fórmula de Green)**.** *Seja (M,g) variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M, então para quaisquer $f,h \in C^\infty(M)$,*

$$\int_M h\Delta_g f \ \omega_g = -\int_M \langle \nabla_g h, \nabla_g f\rangle_g \ \omega_g + \int_{\partial M} h\frac{\partial f}{\partial N} \ \sigma_g, \tag{1.16}$$

onde $\dfrac{\partial f}{\partial N} := \langle \nabla_g f, N\rangle_g$ *é a derivada normal de f em relação ao ∂M.*

Demonstração. Basta aplicar o corolário anterior. □

Corolário 1.2. *Se (M,g) é uma variedade Riemanniana compacta sem bordo então para quaisquer $f,h \in C^\infty(M)$,*

$$\int_M h\Delta_g f \ \omega_g = -\int_M \langle \nabla_g h, \nabla_g f\rangle_g \ \omega_g = \int_M f\Delta_g h \ \omega_g. \tag{1.17}$$

1.1.5 Métricas conformes

Outro conceito importante para este trabalho é o de métricas conformes.

Definição 1.4. *Dizemos que duas métricas σ e σ_0 em uma variedade Riemanniana M são conformes, se existe $\rho \in C^\infty(M)$, $\rho > 0$, tal que $\sigma = \rho\sigma_0$.*

Definição 1.5. *Um difeomorfismo $f : (M, g) \to (N, \bar{g})$ é uma aplicação conforme, se existe $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi > 0$, tal que o pullback $f^*(\bar{g})$ seja conforme à g em M, isto é,*

$$\bar{g}(df(p)u, df(p)v) = \varphi(p)g(u, v),$$

para todo $u, v \in T_pM$.

Proposição 1.4. *Uma aplicação $f : (M, g) \to (N, \bar{g})$ é conforme se, e somente se, preserva ângulos, isto é, para quaisquer curvas $\gamma_1, \gamma_2 : I \to M$ diferenciáveis com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ vale*

$$\frac{g(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))}{||\gamma_1'(0)||_g||\gamma_2'(0)||_g} = \frac{\bar{g}((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0))}{||(f \circ \gamma_1)'(0)||_{\bar{g}}||(f \circ \gamma_2)'(0)||_{\bar{g}}}. \tag{1.18}$$

A seguinte proposição é de suma importância, pois fornece a relação conforme entre os principais elementos a serem tratados nesta dissertação.

Proposição 1.5. *Se $\sigma = e^{2\varphi}\sigma_0$ em uma superfície então*

1. $dA = e^{2\varphi}dA_0$.
2. $\Delta = e^{-2\varphi}\Delta_0$.
3. $K = e^{-2\varphi}(-\Delta_0\varphi + K_0)$,

onde dA, Δ e K correspondem a métrica σ e dA_0, Δ_0 e K_0 correspondem a σ_0. Aqui K e K_0 são curvaturas Gaussianas e, dA e dA_0 são os elementos área relacionados a medida Riemanniana das respectivas métricas.

Demonstração. Em um sistema de coordenadas locais (x_1, x_2), temos que

$$dA = \sqrt{\det \sigma}\, dx_1dx_2 = \sqrt{e^{4\varphi}\det \sigma_0}\, dx_1dx_2 = e^{2\varphi}dA_0,$$

onde dx_1dx_2 denota a medida de Lebesgue. Como a medida Riemanniana coincide na interseção de cartas, segue o afirmado em M.

Usando a expressão do Laplaciano em coordenadas locais (x_1, x_2), isto é,

$$\Delta\psi = \frac{1}{\sqrt{\det \sigma}} \sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{\det \sigma}\sigma^{kj}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right),$$

e que $\sigma^{-1} = e^{-2\varphi}\sigma_0^{-1}$ (relação entre matrizes das métricas em coordenadas), segue que $\Delta\psi = e^{-2\varphi}\Delta_0\psi$ para $\psi \in C^\infty(M)$.

Para provar a última relação conforme, usamos que (M, σ_0) é localmente conforme a uma métrica plana, isto é, $\sigma_{0,jk} = e^{2v}\delta_{jk}$, para $v \in C^\infty(U)$. Assim σ_0 é expresso em coordenadas ortogonais, isto é, $\sigma_0 = Edx_1^2 + Gdx_2^2$ com $E = \sigma_{0,11}$ e $G = \sigma_{0,22}$. Logo vale a conhecida fórmula

$$K_0 = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\partial_1\left(\frac{\partial_1 G}{\sqrt{EG}}\right) + \partial_2\left(\frac{\partial_2 E}{\sqrt{EG}}\right)\right].$$

Segue que $K_0 = -e^{-2v}\Delta_\delta v$, pois $E = G = e^{2v}$, onde $\Delta_\delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$ é o laplaciano plano. Então, $\sigma_{jk} = e^{2(\varphi+v)}\delta_{jk}$. Repetindo o mesmo raciocínio para K, ao invés de K_0, temos

$$K = -e^{-2(\varphi+v)}\Delta_\delta(\varphi + v) = \left[-e^{-2v}\Delta_\delta\varphi - e^{-2v}\Delta_\delta v\right]e^{-2\varphi} = e^{-2\varphi}\left(K_0 - \Delta_0\varphi\right),$$

pois $\Delta_0\varphi = e^{-2v}\Delta_\delta\varphi$. $\square$

1.2 Espaços de Sobolev em domínios euclidianos

Apresentamos a definição de espaços de Sobolev em domínios euclidianos através da transformada de Fourier. Os detalhes das demonstrações podem ser encontrados na seção 1.3.1 de [25]. Usaremos o espaço $L^2(\Omega)$ (veja (1.24) da próxima seção).

Começamos relembrando a definição de espaços de Sobolev de funções avaliadas em $\mathbb{C}$ e definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com $\bar{\Omega}$ compacto. Para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $s \in \mathbb{N}$ defina a norma

$$||\phi||_{W^s} := \left(\sum_{|\alpha| \le s} ||\partial^\alpha \phi||^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.19}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\partial^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ e $|\alpha| := \sum_j \alpha_j$ para α_j inteiros não-negativos. Portanto, definimos:

Definição 1.6. *O espaço de Sobolev $W^s(\Omega)$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma* (1.19)*.*

Observação 1.1. *O completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com repeito a norma* (1.19) *significa que $W^s(\Omega)$ consiste das classes de equivalência de sequências de Cauchy na norma $||.||_{W^s}$, onde duas sequências de Cauchy são equivalentes se possuem o mesmo limite em $W^s(\Omega)$. Disto concluímos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^s(\Omega)$.*

Observação 1.2. *Quando $s = 0$, temos que $W^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Podemos definir espaço de Sobolev para funções $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ omitindo o termo $(-i)^{|\alpha|}$ em ∂^α.*

Agora estendemos esta definição de espaços de Sobolev de $s \in \mathbb{N}$ para $s \in \mathbb{R}$, através da transformada de Fourier de uma função.

Definição 1.7. *Dada $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos a transformada de Fourier de ϕ como*

$$\widehat{\phi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix.\xi} dx \tag{1.20}$$

onde $dx := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} dx_1 \ldots dx_n$, $dx_1 \ldots dx_n$ é a medida de Lebesgue do $\mathbb{R}^n$ e $x.\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

O próximo resultado sobre a transformada de Fourier é bem conhecido e pode ser encontrado no capítulo 1 de [28, pág.14].

Proposição 1.6. *1. A transformada de Fourier é uma isometria em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ na norma $L^2(\mathbb{R}^n)$, e estende-se para uma isometria em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

2. $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi$.

3. $\widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)$ onde $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ para $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

4. $\widehat{x^\alpha u}(\xi) = \partial^\alpha \widehat{u}(\xi)$.

Definição 1.8. *Dado duas normas $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ em um espaço vetorial E, escrevemos*

$$||\cdot||_1 \approx ||\cdot||_2,$$

se existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$C_1||f||_1 \leq ||f||_2 \leq C_2||f||_1,$$

para toda $f \in E$. Dizemos que $||\cdot||_1$ é equivalente a $||\cdot||_2$.

Proposição 1.7. *Para s inteiro não-negativo e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$||\phi||_{W^s} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi\right)^{1/2}, \tag{1.21}$$

onde $\phi \equiv 0$ em Ω^c.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
||\phi||_{W^s}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} ||\partial^\alpha \phi||_{L^2}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq s} ||\widehat{\partial^\alpha \phi}||_{L^2}^2 \\
&= \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \left(\sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha|^2 \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{|\alpha|\leq s} |\xi^\alpha|^2$ e $(1+|\xi|^2)^s$ são polinomiais em ξ de mesmo grau, existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$C_1 \sum_{|\alpha|\leq s} |\xi^\alpha|^2 \leq (1+|\xi|^2)^s \leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq s} |\xi^\alpha|^2,$$

do qual

$$C_1||\phi||^2_{W^s} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi \leq C_2||\phi||^2_{W^s}.$$

Portanto,

$$||\cdot||_{W^s} \approx (\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\cdot}|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Como as normas $||\cdot||_{W^s}$ e $(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\cdot}|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi)^{\frac{1}{2}}$ são equivalentes em $C_0^\infty(\Omega)$ para $s \in \mathbb{N}$, e a segunda é definida para $s \in \mathbb{R}$, definimos

Definição 1.9. *Para qualquer $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $W^s(\Omega)$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma*

$$||\phi||_s := (\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, d\xi)^{1/2}. \tag{1.22}$$

Esta definição estende a Definição 1.6 para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

Observação 1.3. *Para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^s(\Omega)$.*

Como $(1+|\xi|^2)^s > (1+|\xi|^2)^t$ para $s > t$, segue que se $s > t > 0 > r$, então temos os mergulhos contínuos

$$W^s \hookrightarrow W^t \hookrightarrow W^0 = L^2 \hookrightarrow W^r. \tag{1.23}$$

Em particular, obtemos que $W^s(\Omega)$ é um subespaço de $L^2(\Omega)$ para todo $s \geq 0$.

Agora, apresentamos as principais propriedades de espaços de Sobolev.

Teorema 1.3 (Teorema de Mergulho Sobolev)**.**

$$\phi \in W^k(\Omega) \Rightarrow \phi \in C^s(\bar{\Omega})$$

para todo $s < k - \frac{n}{2}$.

Corolário 1.3. *Se $\phi \in \bigcap_{k\in\mathbb{R}} W^k(\Omega) \Rightarrow \phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Definição 1.10. *Um operador entre espaços de Banach é compacto se a imagem de toda sequencia limitada contêm uma subsequencia convergente.*

Teorema 1.4 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondarachov)**.** *Se $t > s$ então a inclusão $W^t(\Omega) \hookrightarrow W^s(\Omega)$ é compacta, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $\bar{\Omega}$ é compacto.*

1.3 Distribuições e espaços de Sobolev em variedades compactas

Nesta seção, apresentamos a definição de espaços de Sobolev em variedades Riemannianas compactas e alguns conceitos sobre a teoria das distribuições que serão usados neste trabalho. Os detalhes podem ser encontrados no Capítulo 4 de [8, pág.97-104].

Começamos definindo o importante espaço de Hilbert

$$L^2(M) := \{f : M \to \mathbb{C} \quad \text{mensurável} : ||f||_{L^2} < \infty\}$$

onde

$$||f||_{L^2} := \left(\int_M |f|^2 \, d\omega_g\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \langle f, h\rangle_{L^2} = \int_M f\bar{h} \, d\omega_g. \tag{1.24}$$

Definição 1.11 (**Espaços de Sobolev em variedades compactas**). *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n e $\{(U_i \subset M, \varphi_i)\}$ um atlas coordenado localmente finito de M. Considere uma partição da unidade $\{\rho_i : M \to [0,1]\}$ subordinada à cobertura $\{U_i\}$. Para qualquer $s \in \mathbb{R}$, defina o espaço de Sobolev $W^s(M)$ como o completamento de $C^\infty(M)$ com respeito a norma*

$$||\phi||_{W^s(M)} := \left(\sum_i ||(\rho_i\phi) \circ \varphi_i^{-1}||^2_{W^s(\varphi_i(U_i))}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.4. *Esta definição não depende da escolha do atlas coordenado localmente finito de M, isto é, se $\{(V_j, \psi_j)\}$ é outro atlas localmente finito de M com partição da unidade $\{\mu_j\}$ então*

$$||f||^{U_i,\varphi_i,\rho_i}_{W^s} \approx ||f||^{V_j,\psi_j,\mu_j}_{W^s}.$$

Observação 1.5. *Todos os resultados da seção anterior se estende para espaços de Sobolev em variedades Riemannianas compactas.*

No que segue, falaremos sobre distribuições em variedades Riemannianas compactas.

Definição 1.12. *Defina o espaço das funções testes $D(M)$ como $C^\infty(M)$. Dizemos que uma sequencia $\{\varphi_k\}$ converge a φ em $D(M)$, se para qualquer domínio coordenado $U \subset M$ e para qualquer multi-índice α, $\partial^\alpha\varphi_k \to \partial^\alpha\varphi$ uniformemente em U.*

Denote por $D'(M)$ o espaço dual de $D(M)$, isto é, o espaço de todos os funcionais lineares contínuos em $D(M)$. Os elementos de $D'(M)$ são chamados distribuições em M.

Notação 1.1. *Denotaremos a ação de uma distribuição u por uma função teste φ como (u, φ).*

Definição 1.13. *Dizemos que u_k converge a u em $D'(M)$, se $(u_k, \varphi) \to (u, \varphi)$ para todo $\varphi \in D(M)$.*

Podemos associar qualquer $u \in L^2(M)$ com uma distribuição pela seguinte regra:

$$(u, \varphi) = \int_M u\varphi \, d\omega_g$$

para qualquer $\varphi \in D(M)$. Isto é um mergulho

$$L^2(M) \hookrightarrow D'(M). \tag{1.25}$$

Agora faremos o análogo das distribuições do espaço de função $C^\infty(M)$ para campos vetoriais suaves $\Gamma(TM)$. Denotemos $\Gamma(TM)$ por $\vec{D}(M)$.

Definição 1.14. *$v_k \to v$ em $\vec{D}(M)$, se para cada domínio coordenado U em M e cada multi-índice α, as componentes dos campos na carta satisfazem $\partial^\alpha v_{k,i} \to \partial^\alpha v_i$ uniformemente em U quando $k \to \infty$, para cada $i = 1 \dots n$.*

Novamente consideramos o espaço dual $\vec{D}'(M)$, e chamamos $u \in \vec{D}'(M)$ de campo vetorial distribucional.

Definição 1.15. *$u_k \to u$ em $\vec{D}'(M)$, se $(u_k, v) \to (u, v)$ para qualquer $v \in \vec{D}(M)$.*

Definição 1.16. *Um campo vetorial v em M é mensurável, se todas as suas componentes em qualquer carta são funções mensuráveis de Lebesgue. Defina $\vec{L}^p(M)$ como o conjunto dos campos vetoriais mensuráveis v tais que $|v| = \langle v, v\rangle_g^{1/2} \in L^p(M)$, para $p \geq 1$.*

Com a norma $||v||_{\vec{L}^p} := ||\,|v|\,||_{L^p}$, $\vec{L}^p(M)$ é um espaço de Banach completo. Para $p = 2$, $\vec{L}^2(M)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle v, w\rangle_{\vec{L}^2} = \int_M \langle v, w\rangle_g \, d\omega_g. \tag{1.26}$$

Por fim, observamos que podemos associar à um campo vetorial $v \in \vec{L}^2(M)$ um campo vetorial distribucional por

$$(v, \psi) = \int_M \langle v, \psi\rangle_g d\omega_g, \tag{1.27}$$

para toda $\psi \in \vec{D}(M)$. Isto é um mergulho $\vec{L}^2(M) \hookrightarrow \vec{D}'(M)$.

Agora estendemos a definição do Laplaciano para distribuições:

Definição 1.17. *Dada $u \in D'(M)$, seu Laplaciano distribucional $\Delta_g u \in D'(M)$ é definido por*

$$(\Delta_g u, \varphi) = (u, \Delta_g \varphi) \tag{1.28}$$

para toda $\varphi \in D(M)$.

Notamos que o lado direito de (1.28) é uma distribuição, pois $\Delta_g \varphi \in D(M)$ e se $\varphi_k \to \varphi$ em $D(M)$ então $\Delta_g \varphi_k \to \Delta_g \varphi$ em $D(M)$, donde $(u, \Delta_g \varphi_k) \to (u, \Delta_g \varphi)$.

Se u é qualquer função suave então seu Laplaciano clássico $\Delta_g u$ satisfaz a relação (1.28), pois pela fórmula de Green (Corolário 1.2) e o mergulho (1.25)

$$(\Delta_g u, \varphi) = \int_M (\Delta_g u)\varphi \, d\omega_g = \int_M u\Delta_g \varphi \, d\omega_g = (u, \Delta_g \varphi). \tag{1.29}$$

Logo o Laplaciano clássico coincide com o Laplaciano distribucional.

Definição 1.18. *Dado $u \in D'(M)$, definimos o gradiente distribucional $\nabla u \in \vec{D}'(M)$ por*

$$(\nabla_g u, \psi) = -(u, \mathrm{div}_g \psi) \tag{1.30}$$

para qualquer $\psi \in \vec{D}(M)$.

Do Corolário 1.1 segue que o gradiente clássico de uma função suave coincide com o distribucional.

Agora estamos pronto para definir outras caracterizações de importantes espaços de Sobolev e apresentar uma extensão da Fórmula de Green em funções.

Definição 1.19. *Defina o espaço 1-Sobolev*

$$W^1(M) := \{u \in L^2(M) : \nabla_g u \in \vec{L}^2(M)\} \tag{1.31}$$

Teorema 1.5 ([8], Lema 4.3, pág.100). *$W^1(M)$ com o produto interno*

$$\langle u, v\rangle_{W^1} := \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle \nabla_g u, \nabla_g v\rangle_{\vec{L}^2} = \int_M uv\,\omega_g + \int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g v\rangle_g \;\omega_g \tag{1.32}$$

e norma associada

$$||u||^2_{W^1} = ||u||^2_{L^2} + ||\nabla_g u||^2_{\vec{L}^2} = \int_M u^2\,\omega_g + \int_M |\nabla_g u|^2_g\,\omega_g \tag{1.33}$$

é um espaço de Hilbert.

Definição 1.20. *Defina o espaço 2k-Sobolev*

$$W^{2k}(M) := \{u \in L^2(M) : \Delta_g u, \ldots, \Delta_g^k u \in L^2(M)\} \tag{1.34}$$

para k inteiro não-negativo.

Com a norma

$$||u||^2_{W^{2k}} = \sum_{l=0}^{k} ||\Delta_g^l u||^2_{L^2},$$

temos que $W^{2k}(M)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.6 (Fórmula de Green). *Se $u \in W^1(M)$ e $v \in W^2(M)$ então*

$$\int_M u\Delta_g v\, \omega_g = -\int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g v\rangle_g\, \omega_g. \tag{1.35}$$

Observação 1.6. *Neste trabalho, $\Delta_g : L^2(M) \to L^2(M)$ é um operador negativo, pois*

$$\langle \Delta_g \phi, \phi\rangle_{L^2} = \int_M \phi\Delta_g\phi\, \omega_g = -\int_M \langle \nabla_g \phi, \nabla_g \phi\rangle_g\, \omega_g \leq 0.$$

1.4 O núcleo do calor em variedades compactas

Seja (M, g) variedade Riemanniana compacta sem bordo com o operador Laplaciano Δ_g associado. O operador

$$L := \Delta_g - \partial_t$$

está definido no espaço $C^\infty(M \times (0, \infty))$. A equação do calor é dada por

$$Lu(x, t) = -F(x, t) \quad (x, t) \in M \times (0, \infty) \tag{1.36}$$

Se $F \equiv 0$ então a equação é dita homogênea, e caso contrário, é dita não homogênea.

Proposição 1.8. *Seja $u(x, t)$ uma solução da equação do calor homogênea* (1.36)*. Então a aplicação $t \in (0, \infty) \to ||u(\cdot, t)||^2_{L^2(M)}$ é uma função decrescente.*

Demonstração. De fato, derivando sob o sinal da integral

$$\begin{aligned}
\partial_t ||u(\cdot, t)||^2_{L^2} = \partial_t \int_M u(x, t)^2 d\omega(x) &= \int_M 2u(x, t)\partial_t u(x, t)\ d\omega(x) \\
&= 2\int_M u(x, t)\Delta u(x, t)\ d\omega(x) \\
&= -2\int_M \langle \nabla u(x, t), \nabla u(x, t)\rangle_g\ d\omega(x) \\
&= -2||\nabla u(x, t)||^2_{L^2} \leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $t \to ||u(\cdot, t)||^2_{L^2}$ é decrescente. □

Corolário 1.4. *Dado funções contínuas $f : M \to \mathbb{R}$ e $F : M \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, existe no máximo uma função $u \in C^\infty(M \times [0, \infty))$ satisfazendo a equação* (1.36) *com dado inicial*

$$u(x, 0) = f(x) \quad x \in M. \tag{1.37}$$

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 soluções do problema (1.36) e (1.37), então $u = u_1 - u_2$ satisfaz

$$\begin{cases} Lu(x, t) = 0 & (x, t) \in M \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = 0 & x \in M. \end{cases} \tag{1.38}$$

Pela Proposição 1.8 obtemos que $||u(\cdot,t)||^2_{L^2}$ é uma função decrescente de t. Como $u(x,0)=0$ para todo $x \in M$, obtemos que

$$u(x,t) = 0$$

em $M \times [0,\infty)$. $\square$

Proposição 1.9 (Princípio de Duhamel)**.** *Sejam $u, v \in C^\infty(M \times (0,t))$. Então para todo $[\alpha,\beta] \subset (0,t)$ temos*

$$\begin{aligned} & \int_M \{u(z,t-\beta)v(z,\beta) - u(z,t-\alpha)v(z,\alpha)\}d\omega(z) \\ = & \int_\alpha^\beta \int_M \{(Lu)(z,t-\tau)v(z,\tau) - u(z,t-\tau)(Lv)(z,\tau)\}\, d\omega(z)\, d\tau. \end{aligned}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} & (Lu)(z,t-\tau)v(z,\tau) - u(z,t-\tau)(Lv)(z,\tau) \\ = & (\Delta u(z,t-\tau))v(z,\tau) - u(z,t-\tau)\Delta v(z,\tau) + \partial_\tau(u(z,t-\tau)v(z,\tau)). \end{aligned}$$

Agora, aplicando a Fórmula de Green no segundo membro da igualdade e depois integrando com respeito a τ obtemos o afirmado. $\square$

Definição 1.21. *Uma **solução fundamental** da equação do calor ou **núcleo do calor** em M é uma função $e(x,y,t) \in C^\infty(M \times M \times (0,\infty))$ que satisfaz*

$$\begin{cases} (\Delta_x - \partial_t)e(x,y,t) = 0 \\ \lim_{t\to 0} \int_M e(x,y,t)f(x)d\omega(x) = f(y), \end{cases} \tag{1.39}$$

para toda função $f \in L^2(M)$.

A existência do núcleo do calor em M pode ser vista no Teorema 3.22 [25, pág. 100] ou em [4, pág. 151]. A partir deste ponto admitimos a existência do núcleo do calor em M.

Proposição 1.10. *O núcleo do calor em M é único e simétrico no espaço $M \times M$, isto é, $e(x,y,t) = e(y,x,t)$.*

Demonstração. Suponhamos que e_1 e e_2 sejam soluções de (1.39). Fixe $x, y \in M$ e defina

$$u(z,t) = e_1(z,x,t) \quad v(z,t) = e_2(z,y,t).$$

Aplicando o Princípio de Duhamel para u e v obtemos

$$\int_M \{e_1(z,x,t-\beta)e_2(z,y,\beta) - e_1(z,x,t-\alpha)e_2(z,y,\alpha)\}d\omega(z),$$

pois $L_z e_1 = L_z e_2 = 0$. Fazendo $\alpha \to 0$ e $\beta \to t$, obtemos $e_2(x,y,t) = e_1(y,x,t)$. Em particular, escolhendo $e_1 = e_2$ obtemos que a solução fundamental é simétrica.

Como o núcleo do calor em M é simétrico obtemos que $e_2(x,y,t) = e_1(y,x,t) = e_1(x,y,t)$, que prova a unicidade. $\square$

Proposição 1.11. *Dada $f : M \to \mathbb{R}$ e $F : M \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínuas, então*

$$u(x,t) = \int_M e(x,y,t)f(y)d\omega(y) + \int_0^t \int_M e(x,y,t-s)F(y,s)\,d\omega(y)\,ds$$

é a solução do problema de valor inicial (1.36) *e* (1.37).

Demonstração. Suponhamos que damos o núcleo do calor $e(x,y,t)$ em M e que exista solução $u(x,t)$ do problema de valor inicial (1.36) e (1.37). Tome $v(z,t) = e(x,z,t)$, e substitua u e v no Princípio de Duhamel. Então

$$\int_M \{u(z,t-\beta)e(x,z,\beta) - u(z,t-\alpha)e(x,z,\alpha)\}\,d\omega(z) = \int_\alpha^\beta \int_M -F(z,t-s)e(x,z,s)\,d\omega(z)\,ds.$$

Fazendo $\beta \to t$ e $\alpha \to 0$, obtemos

$$u(x,t) = \int_M e(x,z,t)f(z)\ d\omega(z) + \int_0^t \int_M F(z,t-s)e(x,z,s)\ d\omega(z)\,ds. \tag{1.40}$$

$\square$

Observação 1.7. *A Proposição 1.11 é uma outra prova da unicidade de solução do problema de valor inicial* (1.36) *e* (1.37).

Observação 1.8. *Para todo $(x,t) \in M \times (0,\infty)$,*

$$\int_M e(x,y,t)\,d\omega(y) = 1, \tag{1.41}$$

pois $u(x,t) \equiv 1$ resolve o problema de valor inicial

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(x,0) \equiv 1. \end{cases}$$

Observação 1.9. *Para qualquer $s,t > 0$*

$$e(x,z,t+s) = \int_M e(x,y,t)e(y,z,s)\,d\omega(y), \tag{1.42}$$

pois para $y \in M$ fixo, $u(z,t) = e(z,y,s+t)$ resolve o problema $\begin{cases} Lu = 0 \\ u(\cdot,0) = e(\cdot,y,s) \end{cases}$.

Com a existência e unicidade do núcleo do calor $e(x,y,t)$, podemos definir um operador integral que desempenhará um papel importante na decomposição espectral do Laplaciano:

Definição 1.22. *Para cada $t>0$, o **Operador do Calor** $e^{t\Delta_g}: L^2(M)\to L^2(M)$ é dado por*

$$(e^{t\Delta_g}f)(x) := \int_M e(x,y,t)f(y)\; d\omega(y). \tag{1.43}$$

Observação 1.10. *Como $e(x,y,t)$ é suave em x, então para $f\in L^2(M)$ obtemos que $e^{t\Delta_g}f\in C^k(M)$ para todo t,k. Como $C^k(M)$ é denso em $W^k(M)$, obtemos que $e^{t\Delta_g}f\in W^s(M)$ para todo t,s.*

Proposição 1.12. *Se $f\in L^2(M)$, então $(e^{t\Delta_g}f)(x)$ resolve a equação do calor*

$$\begin{aligned}(\Delta_x-\partial_t)(e^{t\Delta_g}f)(x) &= 0\\ \lim_{t\to 0^+}(e^{t\Delta_g}f)(x) &= f(x).\end{aligned}$$

Demonstração. Basta usar a Definição 1.21 do núcleo do calor em M, a diferenciação de $(e^{t\Delta_g}f)(x)$ sob o sinal da integral (Veja Teorema 2.27 de [7, pág.56]) e o Teorema da convergência dominada. □

A seguir enunciamos algumas propriedades deste operador integral. Dentre elas, chamamos atenção para o item 1, que consiste da importante propriedade de semigrupo de operadores. Para uma discussão da Teoria de Semigupos de Operadores veja [9].

Proposição 1.13 (Propriedades)**.** *Para cada $t,s>0$*

1. $e^{t\Delta_g}\circ e^{s\Delta_g}=e^{(t+s)\Delta_g}$.

2. $e^{t\Delta_g}$ *é um operador auto-adjunto e positivo em* $L^2(M)$.

3. $e^{t\Delta_g}$ *é um operador compacto e limitado em* $L^2(M)$.

4. *Para $t>0$,*
$$e^{t\Delta_g}=(e^{\Delta_g})^t.$$

Demonstração. 1. Isto segue do fato que $e(x,z,t+s)=\int_M e(x,y,t)e(y,z,s)\,d\omega(y)$, conforme visto na Observação (1.9), pois

$$\begin{aligned}
(e^{(t+s)\Delta_g}f)(x) &= \int_M e(x,z,t+s)f(z)\,d\omega(z) \\
&= \int_M \left(\int_M e(x,y,t)e(y,z,s)\,d\omega(y)\right) f(z)\,d\omega(z) \\
&= \int_M \left(\int_M e(y,z,s)f(z)\,d\omega(z)\right) e(x,y,t)\,d\omega(y) \\
&= \int_M (e^{s\Delta_g}f)(y)e(x,y,t)\,d\omega(y) \\
&= (e^{t\Delta_g}\circ e^{s\Delta_g}f)(x).
\end{aligned}$$

2. Para $f,h\in L^2(M)$,

$$\begin{aligned}
\langle e^{t\Delta_g}f,h\rangle_{L^2} &= \int_M (e^{t\Delta_g}f)(x)h(x)\,d\omega(x) \\
&= \int_M \left\{\int_M e(x,y,t)f(y)\,d\omega(y)\right\} h(x)\,d\omega(x) \\
&= \int_M \left\{\int_M e(x,y,t)h(x)\,d\omega(x)\right\} f(y)\,d\omega(y) \\
&= \int_M \left\{\int_M e(y,x,t)h(x)\,d\omega(x)\right\} f(y)\,d\omega(y) \qquad (1.44) \\
&= \int_M (e^{t\Delta_g}h)(y)f(y)\,d\omega(y) \\
&= \langle f, e^{t\Delta_g}h\rangle_{L^2},
\end{aligned}$$

onde foi usado em (1.44) que $e(x,y,t)$ é simétrico em $M\times M$. Isto mostra que $e^{t\Delta_g}$ é auto-adjunto em $L^2(M)$. Do item 1, obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle e^{t\Delta_g}f,f\rangle_{L^2} &= \langle e^{\frac{t}{2}\Delta_g}e^{\frac{t}{2}\Delta_g}f,f\rangle_{L^2} \\
&= \langle e^{\frac{t}{2}\Delta_g}f, e^{\frac{t}{2}\Delta_g}f\rangle_{L^2} \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

isto é, $e^{t\Delta_g}$ é um operador positivo.

3. Da Observação 1.10 temos que $e^{t\Delta_g}$ é um operador de $L^2(M)$ em $W^1(M)$. Admitindo que $e^{t\Delta_g}: L^2(M)\to W^1(M)$ é contínuo e usando o Teorema 1.4 que garante que a inclusão $i: W^1(M)\to L^2(M)$ é um mergulho compacto, segue que $i\circ e^{t\Delta_g} = e^{t\Delta_g}: L^2(M)\to L^2(M)$ é compacto (e limitado). Pois, a composição de um operador contínuo com um operador compacto é compacto.

   Para ver que $e^{t\Delta_g}: L^2(M)\to W^1(M)$ é contínuo, basta notar que se $f_j\to 0$ em $L^2(M)$, então $||e^{t\Delta_g}f_j||_{L^2}\to 0$ e $||\partial_{x_i}e^{t\Delta_g}f_j||_{L^2}\to 0$ para todo $i=1,\ldots,n$, que é equivalente a afirmar que $e^{t\Delta_g}f_j\to 0$ em $W^1(M)$. De fato, notemos que para $t>0$

fixo, $e(x,y,t)$ é suave em $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$, onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um domínio coordenado de M. Então $f_j\to 0$ em $L^2(\Omega)$ implica

$$\partial_{x_i}\int_\Omega e(x,y,t)f_j(y)\,d\omega(y)=\int_\Omega \partial_{x_i}e(x,y,t)f_j(y)\,d\omega(y)\to 0 \tag{1.45}$$

uniformemente em $\bar{\Omega}$. Logo, segue que $||\partial_{x_i}e^{t\Delta_g}f_j||_{L^2}\to 0$ e $||e^{t\Delta_g}f_j||_{L^2}\to 0$ em cada domínio coordenado de M. Pela definição da norma Sobolev em M, e considerando a partição da unidade $\{\rho_i\}$ subordinada a cobertura $\{\Omega_i\}$, obtemos que $e^{t\Delta_g}f_j\to 0$ em $W^1(M)$.

4. Para $k\in\mathbb{N}$, isso segue imediatamente da propriedade de semigrupo. Para $q\in\mathbb{N}$, segue da propriedade de semigrupo que

$$(e^{\frac{1}{q}\Delta_g})^q=e^{\Delta_g}.$$

Logo $e^{\frac{1}{q}\Delta_g}=(e^{\Delta_g})^{\frac{1}{q}}$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, usamos a continuidade de $e^{t\Delta_g}$ com respeito a t para obter $e^{t\Delta_g}=(e^{\Delta_g})^t$ para todo $t>0$.

□

Uma das utilidades destas propriedades do operador do calor $e^{t\Delta_g}$ é que possibilita a solução do seguinte problema:

Problema de Autovalor fechado: Quais são todos os números reais λ para os quais existe uma solução não trivial $\phi\in C^\infty(M)$ do problema

$$\Delta_g\phi+\lambda\phi=0? \tag{1.46}$$

Observação 1.11. *Os λ's e os ϕ's que resolvem este problema são chamados autovalores e autofunções do operador $-\Delta_g$, respectivamente. O auto-espaço associado a λ é denotado por* $\mathrm{Aut}(\lambda)$. *O conjunto de autovalores $\{\lambda\}$ será chamado o espectro de (M,g) ou o espectro do operador $-\Delta_g$.*

A solução deste problema é dada no próximo teorema.

Teorema 1.7 (**Decomposição de Sturm-Liouville para o problema de autovalor fechado:**). *Seja (M,g) variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Então existe uma base ortonormal $\{\varphi_i\}$ de $L^2(M)$ consistindo de autofunções de $\mathcal{L}:=-\Delta_g$ com respectivos autovalores $\{\lambda_i\}$ satisfazendo*

$$0=\lambda_0<\lambda_1\leq\lambda_2\ldots\to+\infty.$$

Além disso, cada autovalor possui multiplicidade finita e $\varphi_i\in C^\infty(M)$.

Demonstração. Da Proposição 1.13, $e^{t\Delta_g}$ é um operador auto-adjunto e compacto no espaço de Hilbert $L^2(M)$ para cada $t>0$, donde do Teorema Espectral (veja [29, pág.497]) existe base ortonormal $\{\varphi_i(t)\}$ de $L^2(M)$ consistindo de autofunções de $e^{t\Delta_g}$ com respectivos autovalores reais $\{\gamma_i(t)\}$ satisfazendo

$$\gamma_0(t) \geq \gamma_1(t) \geq \ldots \geq \gamma_k(t) \to 0, \tag{1.47}$$

quando $k \to \infty$.

Como $e^{t\Delta_g}$ é um operador positivo, segue que $\gamma_i(t) \geq 0$ para todo i, pois

$$\langle e^{t\Delta_g}\varphi_i(t), \varphi_i(t)\rangle = \gamma_i(t)\langle \varphi_i(t), \varphi_i(t)\rangle.$$

Se algum $\gamma_i(t) = 0$ então existe $f \neq 0$ tal que $e^{t\Delta_g} f = 0$. Usando as Propriedades de semigrupo e auto-adjuntividade de $e^{t\Delta_g}$ obtemos

$$0 = \langle e^{t\Delta_g} f, f\rangle = \langle e^{\frac{t}{2}\Delta_g} \circ e^{\frac{t}{2}\Delta_g} f, f\rangle = \langle e^{\frac{t}{2}\Delta_g} f, e^{\frac{t}{2}\Delta_g} f\rangle, \tag{1.48}$$

do qual $e^{\frac{t}{2}\Delta_g} f = 0$. Usando um argumento indutivo, obtemos que $e^{\frac{t}{2^n}\Delta_g} f = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $f = \lim_{t\to 0} e^{t\Delta_g} f = 0$, que é uma contradição. Portanto, $\gamma_i(t) > 0$ para todo i.

Usando o item 4 da Proposição 1.13 , obtemos que para todo $t, k > 0$,

$$\gamma_i(tk) = (\gamma_i(t))^k, \quad \varphi_i(tk) = \varphi_i(t).$$

Em particular, $\gamma_i(t) = (\gamma_i(1))^t = e^{t(\ln \gamma_i(1))}$ e $\varphi_i(t) = \varphi_i(1)$ para todo $t > 0$. Como $f(x,t) = (e^{t\Delta_g}\varphi_0)(x)$ é solução da equação do calor homogênea com dado inicial $f(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot)$, segue da Proposição 1.8 que a função

$$||f(\cdot, t)||_{L^2}^2$$

é uma função decrescente em t. Logo $\gamma_0(1) \leq 1$ e consequentemente $\ln \gamma_j(1) \leq 0$. Defina

$$\lambda_j := -\ln \gamma_j(1), \quad \varphi_j := \varphi_j(1). \tag{1.49}$$

Então $e^{t\Delta_g}\varphi_j = e^{-\lambda_j t}\varphi_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $e^{t\Delta_g}\varphi_j$ é solução da equação do calor homogênea, obtemos

$$0 = L(e^{t\Delta_g}\varphi_j) = e^{-\lambda_j t}\Delta_g\varphi_j - \varphi_j\partial_t e^{-\lambda_j t} = e^{-\lambda_j t}\{\Delta_g\varphi_j + \lambda_j\varphi_j\}.$$

Logo φ_j é uma autofunção de $\mathcal{L}$ com autovalor λ_j. Como $\gamma_j(1)$ é decrescente com respeito a j e $\gamma_j(1) \to 0$ quando $j \to \infty$, segue que λ_j é crescente com respeito a j e $\lambda_j \to \infty$ quando $j \to \infty$, respectivamente.

Em particular, como $\Delta_g^k\varphi_j = (-1)^k\lambda_j^k\varphi_j \in L^2(M)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue da Definição 1.20 que $\varphi_j \in W^{2k}(M)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Da relação (1.23) da página 9, segue que

$\varphi_j \in \bigcap_{k\in\mathbb{R}} W^k(M)$, donde do Teorema de Mergulho Sobolev 1.3 $\varphi_j \in C^\infty(M)$.

Usando a Fórmula de Green, obtemos que

$$\int_M \langle \nabla_g \varphi_j, \nabla_g \varphi_j \rangle_g \ \omega_g = -\int_M \varphi_j \Delta_g \varphi_j \ \omega_g = \lambda_j \int_M \varphi_j^2 \omega_g. \tag{1.50}$$

Portanto, $\lambda_j \geq 0$ para todo j.

Agora, se $\Delta_g f = 0$ então da Fórmula de Green, segue que $\int_M |\nabla_g f|_g^2 \ \omega_g = 0$. Logo $\nabla_g f \equiv 0$, e assim $df \equiv 0$. Como M é conexa, obtemos que f é constante. Portanto, 0 é um autovalor de multiplicidade 1 de $\mathcal{L}$ e $\ker(\mathcal{L}) = \mathrm{Aut}(0) = \{f \in C^\infty(M) : f = \mathrm{cte}\}$. Como $e^{t\Delta_g}$ é compacto, segue que a multiplicidade dos seus autovalores $e^{-t\lambda_j}$ é finita, e portanto a multiplicidade dos autovalores de $\mathcal{L}$ é finita também. Desta forma podemos listar os autovalores de $\mathcal{L}$ (repetidos de acordo com a multiplicidade de cada autovalor) como

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to +\infty.$$

Isto finaliza a prova. □

Observação 1.12. *Para autofunções φ_i, φ_j de $\mathcal{L}$ correspondendo a autovalores distintos λ_i, λ_j, segue que*

$$0 = \int_M \{\varphi_i \Delta_g \varphi_j - \varphi_j \Delta_g \varphi_i\} \omega_g = (\lambda_i - \lambda_j) \int_M \varphi_i \varphi_j \ \omega_g. \tag{1.51}$$

Logo φ_i é ortogonal a φ_j em $L^2(M)$.

Portanto, $L^2(M)$ é a soma direta dos auto-espaços associados aos autovalores de $\mathcal{L}$.

Corolário 1.5. *O núcleo do calor $e(x,y,t)$ possui o seguinte desenvolvimento em série:*

$$e(x,y,t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \varphi_j(x) \varphi_j(y), \tag{1.52}$$

onde $\{\varphi_j\}$ é a base ortonormal de $L^2(M)$ e $\{\lambda_j\}$ é o espectro de (M,g) fornecido pela Decomposição de Sturm-Liouville. Além disso, a série (1.52) *converge uniformemente para cada $t > 0$.*

Demonstração. Para $x \in M$ e $t \in (0,\infty)$ fixos, $e(x,y,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \langle e(x,\cdot,t), \varphi_j \rangle_{L^2} \varphi_j(y)$ e

$$\langle e(x,\cdot,t), \varphi_j \rangle_{L^2} = (e^{t\Delta_g} \varphi_j)(x) = e^{-t\lambda_j} \varphi_j(x).$$

Então $e(x,y,t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-t\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(y)$ em $L^2(M)$ na variável y e x,t fixos. Em particular, existe uma sequência $j_k \to \infty$ tal que

$$\sum_{j=0}^{j_k} e^{-\lambda_j t} \varphi_j(x) \varphi_j(y) \to e(x,y,t),$$

pontualmente em qualquer x, t e para quase todo y. Como pela Observação 1.9,

$$\langle e(x,\cdot,t/2), e(x',\cdot,t/2)\rangle_{L^2} = e(x,x',t),$$

a série $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}\varphi_j(x)\varphi_j(x')$ converge pontualmente com limite contínuo em t, x, x'. Portanto, $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}\varphi_j(x)\varphi_j(y) \to e(x,y,t)$ pontualmente em todo lugar. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, vale a expansão (1.52) em $L^2(M\times M)$ para cada $t > 0$.

Agora, a continuidade e a simetria do núcleo do calor $e(x,y,t)$, com a positividade do operador $e^{t\Delta_g}$, implica, via Teorema de Mercer ([24, pág.245]) que a expansão (1.52) é uniformemente convergente para cada $t > 0$. □

Corolário 1.6. $\displaystyle\int_M e(x,x,t)d\omega_g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \mathrm{Tr}\,(e^{t\Delta_g}).$

Demonstração. Pelo Corolário anterior,

$$\int_M e(x,x,t)d\omega_g(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\int_M e^{-\lambda_j t}\varphi_j(x)\varphi_j(x)d\omega_g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}.$$

Como $e^{t\Delta_g}$ é um operador limitado,

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_g}) = \sum_{j=0}^{\infty}\langle e^{t\Delta_g}\varphi_j,\varphi_j\rangle_{L^2} = \sum_{j=0}^{\infty}\langle e^{-t\lambda_j}\varphi_j,\varphi_j\rangle_{L^2} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-t\lambda_j},$$

onde $\{\lambda_j\}$ é o espectro de $\mathcal{L}$ obtido na decomposição de Sturm-Liouville. □

Observação 1.13. *A definição de operadores da classe de traço pode ser vista em [14, pág.330]. Um operador $T : H \to H$ é da classe de traço, se é compacto e*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(T) < +\infty,$$

onde $\{s_j(T)\}$ são os autovalores de $(T^*\circ T)^{1/2}$, sendo T^* o adjunto de T.

Em particular, obtemos da auto-adjuntividade, positividade e compacidade em $L^2(M)$ de $e^{t\Delta_g}$ e do Corolário 1.6 que $e^{t\Delta_g}$ é um operador da classe de traço.

1.5 A expansão assintótica do núcleo do calor em M

Definição 1.23. *Escrevemos $A(t) \sim \sum_{j=j_0}^{\infty} b_j t^j$, se para todo $N \geq j_0$*

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(t) - \sum_{j=j_0}^{N} b_j t^j}{t^N} = 0. \tag{1.53}$$

Chamamos $\sum_{j=j_0}^{\infty} b_j t^j$ *de expansão assintótica de* $A(t)$*, onde* $A(t)$ *é uma função que depende de* t*.*

Teorema 1.8. $e(x,x,t)$ *tem a expansão assintótica*

$$e(x,x,t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,x) t^k, \tag{1.54}$$

onde $u_1(x,x) = P_1(R_x)$ *e* $u_k(x,x) = P_k(R_x, \nabla R_x, \nabla^2 R_x, \dots, \nabla^{2k-4} R_x)$ *para* $k \geq 2$ *são polinômios universais no tensor curvatura e nas suas derivadas covariantes.*

Demonstração. Veja Proposição 3.23 de [25, pág. 101]. □

Observação 1.14. *Conforme pode ser visto em [25, pág. 103],* $u_0(x,x) \equiv 1$ *e* $u_1(x,x) = \frac{1}{6}s(x)$*, onde* $s(x)$ *denota a curvatura escalar.*

Agora, apresentamos a importante expansão assintótica do traço do núcleo do calor:

Teorema 1.9. *Seja* $\{\lambda_i\}$ *o espectro de* (M,g) *obtido na Decomposição de Sturm-Liouville. Então*

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_g}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

onde $a_k = \int_M u_k(x,x) d\omega_g(x)$*.*

Demonstração. Consequência imediata do Corolário 1.6 e do Teorema 1.8 □

Definição 1.24. *Os* a_k*'s são chamados invariantes do calor.*

Observação 1.15. *Usando a Observação 1.14, obtemos que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left\{ V(M) + \frac{t}{6} \int_M s(x)\ d\omega(x) + O(t^2) \right\}, \tag{1.55}$$

onde $V(M) = \int_M d\omega_g(x)$*. Logo o conhecimento do espectro do Laplaciano em* (M,g) *determina o volume de* M *e o valor da curvatura escalar de* M*.*

Em particular no caso de dimensão 2, isto é, superfícies, obtemos pelo Teorema de Gauss-Bonnet e o fato que a curvatura escalar é duas vezes a curvatura Gaussiana que

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \sim \frac{V(M)}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{6} + O(t). \tag{1.56}$$

Portanto, o conhecimento do espectro do Laplaciano em superfícies determina também a característica de Euler.

Definição 1.25. *Duas variedades Riemannianas* (M,g) *e* (N,h) *são isoespectrais, se os espectros dos Laplacianos* $-\Delta_g$ *e* $-\Delta_h$*, contados com multiplicidade, coincidem.*

Com o que é discutido na Observação 1.15, segue o próximo corolário e teorema.

Corolário 1.7. *Se M e N são variedades Riemannianas compactas isoespectrais, então M e N possuem o mesmo volume e a mesma dimensão.*

Teorema 1.10. *Sejam (M, g) e (N, h) superfícies compactas isoespectrais. Então M e N são difeomorfas.*

Demonstração. Superfícies compactas e orientáveis com a mesma característica de Euler são difeomorfas. □

Em particular, o Teorema 1.10 fornece uma condição necessária para superfícies serem isoespectrais, isto é, elas devem ter a mesma característica de Euler.

O próximo teorema fornece outra forma de ver que o conhecimento do espectro de uma variedade Riemanniana compacta determina o seu volume.

Teorema 1.11 (Fórmula Assintótica de Weyl)**.** *Sejam $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots\}$ o espectro de (M, g) obtido na Decomposição de Sturm-Liouville e $N(\lambda)$ a função contagem do número de autovalores, contados com multiplicidade, $\leq \lambda$. Então*

$$N(\lambda) \sim \omega_n V(M) \lambda^{n/2}/(2\pi)^n \tag{1.57}$$

para $\lambda \to +\infty$, onde ω_n é o volume da bola unitária no $\mathbb{R}^n$, $V(M)$ é o volume de M e n é a dimensão de M. Isto implica que

$$\lambda_k^{n/2} \sim k(2\pi)^n/\omega_n V(M), \tag{1.58}$$

para $k \to +\infty$, isto é, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k k^{-\frac{2}{n}} = C(n)\{V(M)\}^{-\frac{2}{n}}$, onde $C(n) = \{\frac{(2\pi)^n}{\omega_n}\}^{\frac{2}{n}}$.

Demonstração. Veja [4]. □

1.6 Curvatura geodésica sob deformação conforme em superfícies

Para tratar da expansão assintótica do traço do operador do calor em superfícies com bordo, precisamos da noção de curvatura geodésica.

Dada uma curva $\gamma : I \to S$ parametrizada pelo comprimento de arco (p.p.c.a), onde S é uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$, a projeção da derivada segunda de γ sobre o espaço normal N, permite medir a velocidade que a curva γ se afasta do espaço tangente através da curvatura normal $k_n = \langle N, \gamma'' \rangle$. Poderíamos nos perguntar que propriedade de γ obtemos se projetarmos a derivada segunda de γ sobre o espaço tangente.

Lembremos que no caso de uma imersão isométrica $f : M \to \tilde{M}$ entre variedades Riemannianas, obtemos que a conexão de Levi-Civita de M relativa a métrica induzida por f é dada por $(\tilde{\nabla})^T = \nabla$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\tilde{M}$ e ^{T} denota a projeção no espaço tangente. Assim, podemos usar a derivada covariante da superfície para a projeção da derivada segunda de γ. Veja a Figura 1.1.

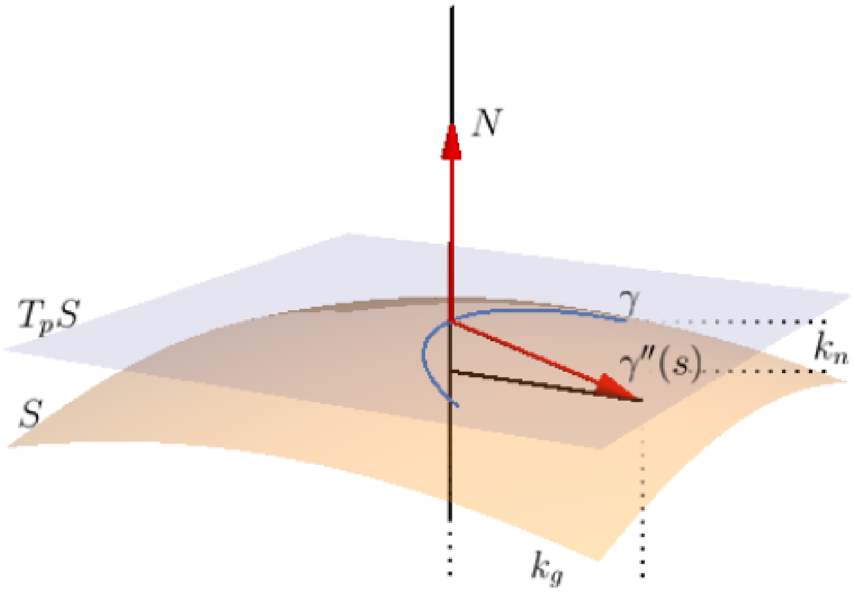


Figura 1.1: Construção da curvatura geodésica k_g

Definiremos a curvatura geodésica como segue:

Definição 1.26 ([6], Definição 4, pág. 94)**.** *Seja (M, g) uma superfície orientada e ∇ a sua conexão de Levi-Civita. Seja $\gamma : I \to M$ uma curva regular p.p.c.a. Tome um referencial ortonormal local $\{e_1, e_2\}$ na orientação de M tal que, restrita a γ, $e_1(s) = \gamma'(s)$. Defina a curvatura geodésica k_g em $\gamma(s)$ como o número*

$$k_g = g(\nabla_{\gamma'(s)} e_1, e_2). \tag{1.59}$$

Em seguida, obtemos uma interpretação geométrica da curvatura geodésica. Para realizar isso, lembramos algumas definições satisfeitas em superfícies.

Definição 1.27 ([6], Definição 2, pág.94)**.** *Uma campo vetorial Y ao longo de uma curva $\gamma : I \to M$ é dito paralelo, se a derivada covariante $\nabla_{\gamma'(s)} Y = 0$ para todo $s \in I$.*

Definição 1.28 ([6], Definição 3, pág.94)**.** *Uma curva $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, se $\gamma'(s)$ é uma campo paralelo ao longo de γ.*

Como é mostrado em [5], dado uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ e $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de γ tal que $V(t_0) = v_0$. A curvatura geodésica mede a variação do ângulo entre o vetor tangente da curva e seu campo paralelo, que permite dizer que a curvatura geodésica mede o quão longe a curva está de ser uma geodésica:

Teorema 1.12 ([5], Proposição 4. pág.95)**.** *Sejam* (M, g) *uma superfície orientada e* $\gamma : I \to M$ *uma curva regular p.p.c.a. Seja* V *o campo paralelo ao longo de* γ *e* $\phi(s) = Ang(V(s), \gamma'(s))$*. Então*

$$k_g(\gamma(s)) = \frac{d\phi}{ds}. \tag{1.60}$$

Corolário 1.8. *Uma curva* $\gamma : I \to M$ *p.p.c.a é uma geodésica se, e somente se, sua curvatura geodésica anula-se em todo lugar.*

Demonstração. Basta usar o teorema anterior com a definição de curvatura geodésica. □

Próximos exemplos serão úteis nesta dissertação.

Exemplo 1.3. *No caso do hemisfério superior, segue que o equador é uma geodésica, e portanto a curvatura geodésica do bordo é nula. No caso de um disco unitário no plano, a derivada segunda já esta plano tangente (não sendo necessário projeção), e portanto* $k_g(S^1)$ *será o produto interno usual do* $\mathbb{R}^2$ *da derivada segunda da* S^1 *com o vetor normal da derivada de* S^1*, que resulta em 1.*

Agora, estamos prontos para fornecer uma relação conforme entre a curvatura geodésica de uma curva γ em ∂M na métrica g com a métrica $\bar{g} = e^{2\varphi}g$, onde $\varphi \in C^\infty(M)$. Para realizar isso, antes faremos algumas definições e observações.

Definição 1.29 ([13], pág.118)**.** *Se* M *é uma variedade suave com bordo, uma função definidora do bordo para* M *é uma aplicação suave* $f : M \to [0, \infty)$ *tal que* $f^{-1}(0) = \partial M$ *e* $df(p) \neq 0$ *para todo* $p \in \partial M$*.*

Próxima proposição garante a existência desta função especial:

Proposição 1.14 ([13], Proposição 5.43, pág.118)**.** *Toda variedade suave* M *com bordo possui uma função definidora do bordo.*

Definição 1.30 ([13], pág.119)**.** *Seja* M *variedade suave com bordo,* f *uma função definidora do bordo e* $p \in \partial M$*. Dizemos que* $v \in T_pM$ *aponta para fora se* $vf < 0$*, aponta para dentro se* $vf > 0$ *e é tangente ao bordo* ∂M *se* $vf = 0$*.*

Proposição 1.15 ([13], Proposição 15.33, pág.391)**.** *Suponha que* (M, g) *seja uma variedade Riemanniana com bordo. Então existe um único campo suave normal unitário* N *ao longo de* ∂M *apontando para fora.*

Demonstração. N será a restrição à ∂M do campo vetorial unitário $-\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|_g}$, onde $f : M \to [0, \infty)$ é uma função definidora do bordo. □

Corolário 1.9 (Fórmula conforme)**.** *Sejam* (M, g) *uma superfície orientada e* $\{\gamma\} \subset \partial M$ *uma curva p.p.c.a. Em uma vizinhança de* $\gamma(s)$*, considere o referencial ortonormal*

$\{e_1, e_2\}$ na orientação de M, tal que restrita a γ, $e_1(s) = \gamma'(s)$ e $e_2(s) = N(\gamma(s))$, onde N é o campo normal unitário ao longo de ∂M apontando para dentro. Então

$$k_{\bar{g}} = e^{-\varphi}(k_g + \partial_n \varphi) \tag{1.61}$$

em $\gamma(s)$, onde $\partial_n \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial N} = g(\nabla\varphi, -N)$ e $\bar{g} = e^{2\varphi} g$ com $\varphi \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Notemos que

$$\begin{aligned} \bar{g}(e^{-\varphi}N, e^{-\varphi}N) &= e^{2\varphi} g(e^{-\varphi}N, e^{-\varphi}N) = g(N,N) = 1, \\ \bar{g}(e^{-\varphi}N, v) &= e^{2\varphi} g(e^{-\varphi}N, v) = e^{\varphi} g(N, v) = 0, \quad \forall v \in T_p\partial M. \end{aligned}$$

Claramente, $e^{-\varphi}N$ é suave e aponta para dentro, pois $e^{-\varphi}N(f) > 0$. Pela unicidade da Proposição 1.15, obtemos que $e^{-\varphi}N$ é o único campo suave unitário normal ao longo de ∂M apontando para dentro com respeito a métrica $\bar{g}$.

Seja γ curva p.p.c.a em ∂M, isto é, $\bar{g}(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1$, donde

$$1 = e^{2\varphi} g(\dot\gamma, \dot\gamma) = g(e^{\varphi}\dot\gamma, e^{\varphi}\dot\gamma).$$

Logo

$$\begin{aligned} k_{\bar{g}}(\gamma(s)) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma, e^{-\varphi}N\right) \\ &= \bar{g}\left(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + 2g\left(\nabla\varphi, \dot\gamma\right)\dot\gamma - g(\dot\gamma,\dot\gamma)\nabla\varphi, e^{-\varphi}N\right) \\ &= e^{2\varphi} g\left(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma - e^{-2\varphi}\nabla\varphi, e^{-\varphi}N\right) \\ &= e^{\varphi} g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, N) - e^{-\varphi} g(\nabla\varphi, N) \\ &= e^{\varphi} g\left(e^{-2\varphi}\nabla_{e^{\varphi}\dot\gamma}(e^{\varphi}\dot\gamma) - e^{-\varphi} g(\dot\gamma, \nabla e^{\varphi})\dot\gamma, N\right) - e^{-\varphi} g(\nabla\varphi, N) && (1.62) \\ &= e^{-\varphi} g\left(\nabla_{e^{\varphi}\dot\gamma}(e^{\varphi}\dot\gamma), N\right) - e^{-\varphi} g\left(\nabla\varphi, N\right) && (1.63) \\ &= e^{-\varphi} k_g(\gamma(s)) + e^{-\varphi} g\left(\nabla\varphi, -N\right) && (1.64) \\ &= e^{-\varphi} k_g + e^{-\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial N} \\ &= e^{-\varphi}\left(k_g + \partial_n\varphi\right) \end{aligned}$$

Em (1.63), como os vetores $e^{\varphi}\dot\gamma$ e $\dot\gamma$ tem a mesma direção e sentido, onde o primeiro é unitário e o segundo não, na métrica g, segue que a curvatura geodésica na direção de $e^{\varphi}\dot\gamma$ no ponto $\gamma(s)$ é dada por $k_g(\gamma(s)) = g\left(\nabla_{e^{\varphi}\dot\gamma}(e^{\varphi}\dot\gamma), N\right)$, conforme a definição de curvatura geodésica.

Em (1.64), temos $-N(f) < 0$, ou seja, o campo $-N$ aponta para fora, onde é exatamente o campo para o qual definimos a derivada normal.

Em (1.62) foi usado a seguinte conta provinda das propriedades de conexão, isto é, $\nabla_{e^{\varphi}\dot\gamma}(e^{\varphi}\dot\gamma) = e^{\varphi}\nabla_{\dot\gamma}(e^{\varphi}\dot\gamma) = e^{\varphi}\left(e^{\varphi}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + g(\dot\gamma, \nabla e^{\varphi})\dot\gamma\right).$ □

1.7 Expansão assintótica do operador do calor em superfícies com bordo

Todos os resultados da Seção 1.4 podem ser provados para o caso de variedades Riemannianas compactas com bordo, via a condição do bordo de Dirichlet, isto é, $\phi|_{\partial M} = 0$. As demonstrações decorrem de uma adaptação do Princípio de Duhamel discutido na Seção 1.4, a saber, equação (1.65) abaixo. Os detalhes das demonstrações podem ser encontradas no Capítulo VII de [4]. Nesta seção, expomos as extensões dos principais resultados da Seção 1.4, a decomposição espectral do operador Laplaciano e o traço do operador do calor em variedades compactas com bordo. Também apresentamos a expansão assintótica do operador do calor de Dirichlet no Teorema 1.15 abaixo cuja prova pode ser encontrada em [15].

Definição 1.31. *Seja (M, g) variedade Riemanniana compacta com bordo de dimensão $n \geq 2$. Definimos o* ***núcleo do calor de Dirichlet*** *em M como sendo o núcleo do calor $e(x, y, t) \in C^\infty(M \times M \times (0, \infty))$ definido na Definição 1.21 tal que*

$$e(\cdot, y, t)|_{\partial M} = 0,$$

para todo $(y, t) \in M \times (0, \infty)$.

A existência do núcleo do calor $e(x, y, t)$ é dada na seção 2 do Capítulo VII de [4].

Uma adaptação do Princípio de Duhamel (Proposição 1.9) dada por

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^\beta \int_M \{(Lu)(x, t-\tau)v(z,\tau) - u(z, t-\tau)(Lv)(z,\tau)\} d\omega(z)\, d\tau \\ = &\int_\alpha^\beta \int_{\partial M} \left\{ \frac{\partial u}{\partial N}(w, t-\tau)v(w,\tau) - u(w, t-\tau)\frac{\partial v}{\partial N}(w,\tau) \right\} d\omega(w)\, d\tau \\ + &\int_M \{u(z, t-\beta)v(z,\beta) - u(z, t-\alpha)v(z,\alpha)\} d\omega(z) \end{aligned} \tag{1.65}$$

para $u, v \in C^\infty(M \times (0, t))$ e $[\alpha, \beta] \subset (0, t)$, permite mostrar que:

Teorema 1.13 ([4], Teorema 4, pág. 167)**.** *O núcleo do calor de Dirichlet $e(x, y, t)$ é simétrico em $M \times M$ e é único.*

Assim definimos o operador do calor:

Definição 1.32 ([4], Definição 3, pág.168)**.** *Para cada $t > 0$, defina o* ***Operador do Calor de Dirichlet*** *$e^{t\Delta_g} : L^2(M) \to L^2(M)$ por*

$$(e^{t\Delta_g} f)(x) := \int_M e(x, y, t) f(y) d\omega(y).$$

Pela definição do núcleo do calor de Dirichlet em M obtemos:

Proposição 1.16 ([4], Proposição 2, pág.168). *Para cada $f \in L^2(M)$, $u(x,t) = (e^{t\Delta_g} f)(x)$ é uma solução da equação do calor*

$$\Delta_x u(x,t) - \partial_t u(x,t) = 0 \tag{1.66}$$

em $M \times (0, \infty)$.

Observação 1.16. *As propriedades da Proposição 1.13 se aplicam para o operador do calor de Dirichlet.*

PROBLEMA DE AUTOVALOR DE DIRICHLET: Seja (M, g) compacta com bordo. Quais são todos os números reais λ para os quais existe uma solução não-trivial $\phi \in C^\infty(M)$ de

$$\begin{cases} \Delta_g \phi + \lambda \phi = 0 \\ \phi|_{\partial M} = 0 \end{cases} \quad ? \tag{1.67}$$

Observação 1.17. *Os λ's e ϕ's que satisfazem este problema são chamados autovalores e autofunções de Dirichlet de $-\Delta_g$, respectivamente. O conjunto de autovalores $\{\lambda\}$ será chamado o espectro de (M, g) ou o espectro do operador $-\Delta_g$.*

Da mesma forma que na prova da Decomposição de Sturm-Liouville (Teorema 1.7) obtemos que a resposta deste problema é:

Teorema 1.14 (**Decomposição de Sturm-Liouville para o problema de autovalor de Dirichlet:**). *Existe uma base ortonormal $\{\phi_i\}$ de $L^2(M)$ consistindo de autofunções de Dirichlet de $\mathcal{L} := -\Delta_g$ com autovalores $\{\lambda_i\}$ satisfazendo*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty. \tag{1.68}$$

Além disso, cada autovalor possui multiplicidade finita e $\phi_i \in C^\infty(M)$.

Exemplo 1.4. *Se parametrizarmos um cilindro euclidiano como $S^1 \times [0, a]$, então para $\phi \in C^\infty(S^1)$ e $\varphi \in C^\infty([0, a])$,*

$$\Delta_{S^1} \phi = \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \quad e \quad \Delta_{[0,a]} \varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{1.69}$$

Para S^1 é fácil calcular que $\{e^{im\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal de autofunções de $-\Delta_{S^1}$ em $L^2(S^1)$ com autovalores $\{m^2 : m \in \mathbb{Z}\}$. E para $[0, a]$, com as condições de bordo $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$, temos que $\{\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a}) : x \in [0, a]\}_{n \in \mathbb{N}}$ constitui uma base de autofunções de $-\Delta_{[0,a]}$ em $L^2([0, a])$ com autovalores $\{(\frac{n\pi}{a})^2\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como o Laplaciano no cilindro é $\Delta = \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{d^2}{dt^2}$, segue que $\{e^{im\theta} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{a})\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}}$ constitui uma base ortonormal de autofunções de Δ em $L^2(S^1 \times [0, a])$ com autovalores $\{(\frac{n\pi}{a})^2 + m^2\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}}$.

Novamente os Corolários 1.5 e 1.6 se aplicam:

Corolário 1.10. *$e(x,y,t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}\phi_j(x)\phi_j(y)$ com convergência uniforme e absoluta para cada $t > 0$.*

Corolário 1.11. $\int_M e(x,x,t)d\omega_g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \mathrm{Tr}(e^{t\Delta_g})$.

Observação 1.18. *A fórmula assintótica de Weyl (Teorema 1.11) continua válida no caso com bordo.*

Se M é uma superfície compacta com bordo então em lugar do Teorema 1.9 temos:

Teorema 1.15.

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_g}) \sim \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j/2}, \tag{1.70}$$

onde

$$a_0 = \frac{A}{4\pi}, \quad a_1 = -\frac{L}{8\sqrt{\pi}}, \quad a_2 = \frac{\chi(M)}{6}, \tag{1.71}$$

sendo $L := \int_{\partial M} ds$ e $A := \int_M dA$ o comprimento de ∂M e a área de M, respectivamente.

No caso que M é um domínio planar com a métrica euclidiana os seguintes termos da expansão (1.70) foram calculados explicitamente em [27] e então

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2^8\sqrt{\pi}}\int_{\partial M} k^2 ds \\ a_4 &= \frac{1}{315\pi}\int_{\partial M} k^3 ds \\ a_5 &= \frac{1}{2^{15}\sqrt{\pi}}\int_{\partial M} k^4 ds - \frac{1}{2^{12}\sqrt{\pi}}\int_{\partial M} (k')^2 ds, \end{aligned} \tag{1.72}$$

onde k é a curvatura geodésica da métrica euclidiana e k' é a derivada com respeito ao comprimento de arco ∂M.

1.8 Princípio do Mini-Max

Expusemos nas seções anteriores a solução do problema de autovalores

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \tag{1.73}$$

para variedades Riemannianas compactas com ou sem bordo. No caso com bordo acrescentamos a condição $\phi|_{\partial M} = 0$ à (1.73). Chamamos a atenção que existem vários problemas de autovalores, e um que será de interesse nesta dissertação será o problema de autovalor de Neumann.

PROBLEMA DE AUTOVALOR DE NEUMANN: Quais são todos os números reais λ para os quais existe uma solução não trivial $\phi \in C^\infty(M)$ de

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial N}|_{\partial M} = 0 \end{cases} ? \tag{1.74}$$

Novamente, a resposta deste problema será uma sequencia $\{\lambda_i\}$ de autovalores de $\mathcal{L} := -\Delta$ tal que

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots \to +\infty \tag{1.75}$$

com autofunções suaves $\{\phi_i\}$ constituindo uma base ortonormal de $L^2(M)$.

Agora defina o espaço H como segue:

Definição 1.33. *1. Para o problema de autovalor fechado,*

$$H := \left\{ f \in W^1(M) : \int_M f \, d\omega_g = 0 \right\}. \tag{1.76}$$

2. Para o problema de autovalor de Dirichlet

$$H := W^1(M). \tag{1.77}$$

3. Para o problema de autovalor de Neumann

$$H := \left\{ f \in W^1(M) : \int_M f \, d\omega_g = 0 \right\}. \tag{1.78}$$

Uma ferramenta fundamental na teoria de autovalores é:

Teorema 1.16 (Princípio do Mini-Max). *Em cada um dos problemas de autovalores* (1.46), (1.67) *e* (1.74), *seja $\{\phi_i\}$ a base ortonormal suave de $L^2(M)$ constituindo autofunções de $\mathcal{L}$ com espectro $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$. Então*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} : f \in H \right\}, \tag{1.79}$$

$$\lambda_i = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} : f \in H, \int_M f\phi_j = 0, \, j = 1 \ldots, i-1 \right\} \tag{1.80}$$

Em particular, obtemos a desigualdade de Poincaré, que será muito usada neste trabalho:

Corolário 1.12 (Desigualdade de Poincaré).

$$\int_M |\nabla f|^2 \geq \lambda_1 \int_M f^2,$$

$\forall f \in H$.

Capítulo 2

O determinante do Laplaciano e seus extremais em superfícies

Neste capítulo, o principal problema discutido é: Fixada uma métrica σ_0 em uma superfície fechada M, considere a classe de todas as métricas conformes a σ_0 que possuem a mesma área, então o determinante regularizado do Laplaciano associado as métricas dessa classe atinge o valor máximo na métrica uniforme. Isto constitui o Teorema 0.1-a), dado na Introdução. Dividiremos a prova em dois casos: $\chi(M) \leq 0$ e $M = S^2$. Também mostraremos, no caso $\chi(M) \leq 0$, que esta métrica uniforme é o limite do fluxo gradiente em $W^2(M)'$ dado pela equação de evolução (2.25), sob uma condição inicial $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$. Veja Seção 2.5.

2.1 Definição do determinante regularizado

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta sem bordo de dimensão $n \geq 1$, e Δ_g o Laplaciano associado a métrica g. Pela Decomposição de Sturm-Liouville para o problema de autovalor fechado (Teorema 1.7), existe uma base ortonormal $\{\varphi_i\}$ de $L^2(M)$ consistindo de autofunções de $\mathcal{L} := -\Delta_g$ com autovalores λ_j satisfazendo $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to +\infty$. Além disso, cada $\varphi_j \in C^\infty(M)$, por regularidade elíptica.

Defina a função zeta associada a Δ_g por $\zeta(s, \Delta_g) := \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{-s}$, onde $s \in \mathbb{C}$.

Proposição 2.1. *$\zeta(s, \Delta_g)$ converge absolutamente e uniformemente em*

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq \frac{n}{2} + \varepsilon\},$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Em particular, $\zeta(s, \Delta_g)$ é analítica em $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}\}$.

Demonstração. Pela Fórmula Assintótica de Weyl, existe uma constante $B > 0$ tal que

$$|\lambda_k^{-s}| \leq B|k^{-\frac{2}{n}s}| = B(k^{-\frac{2}{n}\operatorname{Re}(s)}),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{n}{2} + \varepsilon$, então $-\frac{2}{n}\operatorname{Re}(s) \leq -1 - \frac{2}{n}\varepsilon$. Consequentemente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-s}| \leq B \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{2}{n}\operatorname{Re}(s)} \leq B \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\frac{2}{n}\varepsilon)}, \tag{2.1}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como a série do lado direito da desigualdade (2.1) é convergente, segue que $\zeta(s, \Delta_g)$ converge absolutamente e uniformemente em $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq \frac{n}{2} + \varepsilon\}$. Em particular, $\zeta(s, \Delta_g)$ é analítica em $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}\}$. □

Proposição 2.2. *$\zeta(s, \Delta_g)$ possui uma extensão meromorfa em $\mathbb{C}$, tal que $\zeta(s, \Delta_g)$ é analítica em $s = 0$.*

Demonstração. Usando a mudança de variável $t \to ax$ para $a > 0$ obtemos

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} a^{s-1}x^{s-1}e^{-ax}a\,dx = a^s \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-ax}dx.$$

Como $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ para $\operatorname{Re}(s) > 0$, temos $a^{-s} = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-ax}dx$. Portanto, $\lambda_j^{-s} = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-\lambda_j t}dt$. Para $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2} + \varepsilon$,

$$\zeta(s, \Delta_g) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_i} - 1 \right) dt, \tag{2.2}$$

onde $\sum_{i=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_i} = \operatorname{Tr}(e^{t\Delta_g})$.

Dado qualquer inteiro não negativo N, usando que a expansão assintótica do traço do operador do calor para $t \to 0^+$ é $\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_g}) \sim t^{-n/2}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ (Veja Teorema 1.9), temos para $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2} + \varepsilon$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{s-1}(\operatorname{Tr}(e^{t\Delta_g}) - 1)\,dt &= -\frac{1}{s} + \int_0^1 \left[\left\{ \sum_{k=0}^{N} a_k t^{k+s-1-n/2} \right\} + O(t^{s+N-n/2}) \right] dt \\ &= -\frac{1}{s} + \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k + s - \frac{n}{2}} + O(1).\end{aligned}$$

Agora,

$$\int_1^{\infty} t^{s-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} \right) dt \tag{2.3}$$

converge uniformemente e absolutamente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, donde será uma função inteira. Logo a equação (2.2) torna-se

$$\zeta(s, \Delta_g) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ -\frac{1}{s} + \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k + s - \frac{n}{2}} + f(s) \right\}, \tag{2.4}$$

onde $f(s)$ é analítica em $\mathrm{Re}(s) \geq n/2+1-N$. Da equação (2.4), temos que $\Gamma(s)\zeta(s,\Delta_g)$ possui uma extensão meromorfa em $\mathbb{C}$, com polos simples em $s=0$ e $s=\frac{n}{2}-k$ para $k=0,1,2,\ldots,N$.

Agora, o polo em $s=0$ de $\Gamma(s)\zeta(s,\Delta_g)$ cancela-se com o zero simples de $\frac{1}{\Gamma(s)}$, pois

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s + O(s^2)$$

próximo de $s=0$. Desta forma, obtemos uma extensão meromorfa de $\zeta(s,\Delta_g)$ em $\mathbb{C}$ que é analítica em $s=0$. □

Definição 2.1. *O determinante regularizado do Laplaciano é definido como*

$$\det \Delta_g = \exp\left(-\frac{d}{ds}\zeta(s,\Delta_g)|_{s=0}\right).$$

2.2 Fórmula de Polyakov

Seja M uma superfície fechada. Para provar o Teorema 0.1-a), nos concentramos nesta seção em provar uma fórmula para $\log\det\Delta_\varphi$ em $[\sigma_0] := \{e^{2\varphi}\sigma_0 : \varphi \in C^\infty(M)\}$. Esta fórmula é conhecida como a fórmula de variação conforme de Polyakov [22].

Defina a variação de $\zeta(s,\Delta_h)$ com respeito a $\varphi \in C^\infty(M)$ na direção de $\psi \in C^\infty(M)$ por

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\zeta(s,\Delta_h) := \frac{\partial}{\partial u}\zeta(s,\Delta_u)|_{u=0} = \lim_{u\to 0}\frac{\zeta(s,\Delta_u)-\zeta(s,\Delta_h)}{u},$$

onde $h=e^{2\varphi}\sigma_0$, $h_u = e^{2(\varphi+u\psi)}\sigma_0 = e^{2u\psi}h$, $\Delta_u := \Delta_{h_u} = e^{-2u\psi}\Delta_h$ e $u\in\mathbb{R}$.

Um passo importante na obtenção da Fórmula de Polyakov é que podemos comutar o traço com a derivada do operador do calor, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_u})|_{u=0} = \mathrm{Tr}(\frac{\partial}{\partial u}e^{t\Delta_u}|_{u=0}).$$

Isto será feito no Lema 2.2. Mas antes, provamos o seguinte lema que será necessário no Lema 2.2.

Lema 2.1. $\Delta_u e^{t\Delta_u}$ *é limitado em* $L^2(M)$ *para cada* $t>0$.

Demonstração. Pela Decomposição de Sturm-Liouville, existem autovalores $0=\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to +\infty$ de $-\Delta_u$ com autofunções associadas $\{\varphi_i\}_i$ em $L^2(M)$. Lembremos que para $f\in L^2(M)$, $f(t,x)=e^{t\Delta_u}f(x)$ satisfaz $\begin{cases}\frac{d}{dt}f(t,x)-\Delta_u f(t,x)=0\\ f(0,x)=f(x)\end{cases}$. Logo

$$f(t,x) = \sum_{j=0}^{+\infty}\langle f(t,x),\varphi_j\rangle_{L^2}\varphi_j$$

para todo $t \geq 0$. Denote $f_j(t,x) = \langle f(t,x), \varphi_j \rangle$, e notemos que usando a Fórmula de Green

$$\frac{d}{dt} f_j(t,x) = \int_M \frac{d}{dt} f(x,t)\varphi_j(x) dA_0 = \int_M f(t,x)\Delta_u \varphi_j(x) dA_0 = -\lambda_j f_j(t,x).$$

Portanto, $f_j(t,x) = e^{-\lambda_j t} f_j(0,x)$ para todo j. Assim, $f(t,x) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda_j t} f_j(0,x)\varphi_j(x)$ e

$$\begin{aligned}
\Delta_u f(t,x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \langle \Delta_u f(t,x), \varphi_j \rangle_{L^2} \varphi_j(x) &= -\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j f_j(t,x)\varphi_j(x) \\
&= -\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-\lambda_l t} f_l(0,x) \langle \varphi_l, \varphi_j \rangle \varphi_j \\
&= -\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j e^{-\lambda_j t} f_j(0,x)\varphi_j.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
||\frac{d}{dt} f(t,x)||^2_{L^2} = ||\Delta_u f(t,x)||^2_{L^2} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j^2 t^2 e^{-2\lambda_j t} \frac{1}{t^2} \langle f(x), \varphi_j(x) \rangle^2_{L^2} \\
&\leq \sup(\lambda_j^2 t^2 e^{-2\lambda_j t}) \frac{1}{t^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \langle f(x), \varphi_j \rangle^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Notemos que $C^2 = \sup_{j,t}(\lambda_j^2 t^2 e^{-2\lambda_j t}) < +\infty$, pois aplicando a regra de L' Hospital mostra-se que $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-2x} = 0$. Assim,

$$||\frac{d}{dt} f(x,t)||^2_{L^2} \leq C^2 \frac{1}{t^2} ||f(x)||^2_{L^2}.$$

Daí,

$$||\Delta_u e^{t\Delta_u} f(x)|| = ||\Delta_u f(t,x)||_{L^2} = ||\frac{d}{dt} f(t,x)||_{L^2} \leq \frac{C}{t} ||f(x)||_{L^2},$$

ou seja,

$$||\Delta_u e^{t\Delta_u}|| \leq \frac{C}{t}$$

para todo $t > 0$. $\square$

Lema 2.2. $\frac{\partial}{\partial u} \mathrm{Tr}(e^{t\Delta_u})|_{u=0} = t\mathrm{Tr}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\Delta_u|_{u=0}\right) e^{t\Delta_h}\right)$, *onde* $\frac{\partial}{\partial u}\Delta_u|_{u=0} = -2\psi\Delta_h$.

Demonstração. Primeiro, notemos que

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathrm{Tr}\left(e^{t\Delta_u}\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial u} e^{t\Delta_u}\right).$$

De fato, como o funcional linear Tr sobre os operadores da classe de traço é contínuo, pois

$|\mathrm{Tr}(T)| \leq ||T||_{tr}$ (veja Teorema 4 de [14, pág. 333]), segue

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_u})|_{u=u_1} = \lim_{u\to u_1} \mathrm{Tr}\left(\frac{e^{t\Delta_u} - e^{t\Delta_{u_1}}}{u-u_1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial u}e^{t\Delta_u}\right)|_{u=u_1}.$$

Sejam $u_1 > u_2 > 0$, então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(e^{t\Delta_{u_1}} - e^{t\Delta_{u_2}}\right) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Tr}\left(e^{s\Delta_{u_1}}e^{(t-s)\Delta_{u_2}}\right) ds \\
&= \int_0^t \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial s}e^{s\Delta_{u_1}}e^{(t-s)\Delta_{u_2}}\right) ds \\
&= \int_0^t \mathrm{Tr}\left(e^{s\Delta_{u_1}}\Delta_{u_1}e^{(t-s)\Delta_{u_2}} - e^{s\Delta_{u_1}}\Delta_{u_2}e^{(t-s)\Delta_{u_2}}\right) ds \\
&= \int_0^t \mathrm{Tr}\left(e^{s\Delta_{u_1}}\left(\Delta_{u_1} - \Delta_{u_2}\right)e^{(t-s)\Delta_{u_2}}\right) ds.
\end{aligned}$$

Dividindo por $u_1 - u_2$,

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{e^{t\Delta_{u_1}} - e^{t\Delta_{u_2}}}{u_1-u_2}\right) = \int_0^t \mathrm{Tr}\left(e^{s\Delta_{u_1}}\left(\frac{\Delta_{u_1} - \Delta_{u_2}}{u_1-u_2}\right)e^{(t-s)\Delta_{u_2}}\right) ds,$$

e fazendo $u_2 \to u_1$ na expressão anterior, segue

$$\begin{aligned}
\lim_{u_2\to u_1} \mathrm{Tr}\left(\frac{e^{t\Delta_{u_1}} - e^{t\Delta_{u_2}}}{u_1-u_2}\right) &= \int_0^t \mathrm{Tr}\left(e^{s\Delta_{u_1}}\left(\frac{d}{du}\Delta_u|_{u=u_1}\right)e^{(t-s)\Delta_{u_1}}\right) ds \\
&= \int_0^t \mathrm{Tr}\left(\left(\frac{d}{du}\Delta_u|_{u=u_1}\right)e^{t\Delta_{u_1}}\right) ds \qquad (2.5) \\
&= t\mathrm{Tr}\left(\left(\frac{d}{du}\Delta_u|_{u=u_1}\right)e^{t\Delta_{u_1}}\right),
\end{aligned}$$

onde a igualdade em (2.5) segue da propriedade de semigrupo (Proposição 1.13), e da observação que

$$\left(\frac{d}{du}\Delta_u|_{u=u_1}\right)e^{(t-s)\Delta_{u_1}}$$

é limitado e $e^{s\Delta_{u_1}}$ é da classe de traço (veja Teorema 4 de [14, pág.334]). Portanto,

$$\frac{d}{du}\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_u}) = t\mathrm{Tr}\left(\left(\frac{d}{du}\Delta_u\right)e^{t\Delta_u}\right) = t\mathrm{Tr}\left(-2\psi e^{-2u\psi}\Delta_h e^{t\Delta_u}\right) = t\mathrm{Tr}(-2\psi\Delta_u e^{t\Delta_u}).$$

Assim,

$$\frac{d}{du}\mathrm{Tr}\left(e^{t\Delta_u}\right)|_{u=0} = -t\mathrm{Tr}(2\psi\Delta_h e^{t\Delta_h}).$$

Finalizamos a prova mostrando que $\left(\frac{d}{du}\Delta_u\right)e^{t\Delta_u} = -2\psi\Delta_u e^{t\Delta_u}$ é limitado. Defina $M_\psi : L^2(M) \to L^2(M)$ por

$$M_\psi f = f\psi.$$

Logo

$$||M_\psi|| = \sup_{||f||_{L^2}\leq 1} ||f\psi||_{L^2} < +\infty,$$

pois como $\psi \in C^\infty(M)$ e M é compacta existe C tal que $|\psi(x)| \leq C$ para todo x. Pelo Lema 2.1 temos que $\psi\Delta_u e^{t\Delta_u} = M_\psi \circ \Delta_u e^{t\Delta_u}$ é limitado. □

Para o que segue introduzimos a projeção ortogonal sobre o núcleo do Laplaciano:

Definição 2.2. *Seja (M, g) superfície fechada. Chamamos projeção ortogonal sobre* $\ker\Delta_g$, *o operador $P : L^2(M) \to L^2(M)$ tal que*

$$P(f) = \frac{1}{A_g}\int_M f dA_g, \tag{2.6}$$

onde A_g é a área de (M, g).

Observação 2.1. *Seja $\{\lambda_i\}$ o espectro de (M, g) associado as autofunções $\{\varphi_i\}$ que constituem base de $L^2(M)$. Como observado na prova do Teorema 1.7,* $\ker\Delta_g = \mathrm{Aut}(\lambda_0 = 0)$ *e* $\dim\ker\Delta_g = 1$. *Agora, se f é ortogonal a uma função constante em $L^2(M)$ então $P(f) = 0$, e se $f = c$ então $P(f) = c$. Como a autofunção $\varphi_0 \in \ker\Delta_g$ é constante, obtemos que*

$$\begin{aligned} P(\varphi_0) &= \left(\frac{1}{A_g}\int_M dA_g\right)\varphi_0 = 1\varphi_0 \\ P(\varphi_i) &= 0.\varphi_i \quad se \quad i \neq 0, \end{aligned}$$

pois como mostrado na Observação 1.12, $L^2(M)$ é a soma direta dos auto-espaços $\mathrm{Aut}(\lambda_i)$ *para todo $i \geq 0$. Assim* $\mathrm{Tr}(P) = 1$. *Logo, podemos re-escrever a expressão de $\zeta(s, \Delta_g)$ dada em* (2.2) *como*

$$\zeta(s, \Delta_g) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_g} - P)dt. \tag{2.7}$$

Desta forma para $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\psi}\zeta(s, \Delta_h) := \frac{\partial}{\partial u}\zeta(s, \Delta_u)|_{u=0} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(e^{t\Delta_u} - P_{\ker\Delta_u}\right)dt\right)|_{u=0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Tr}\left(e^{t\Delta_u} - P_{\ker\Delta_u}\right)|_{u=0}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s}\mathrm{Tr}(-2\psi\Delta_h e^{t\Delta_h})dt. \end{aligned}$$

Como o funcional Tr é contínuo sobre operadores da classe de traço e o operador do calor $e^{t\Delta_h}$ satisfaz a equação do calor $\partial_t u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = 0$, segue

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Tr}(\psi e^{t\Delta_h}) = \mathrm{Tr}(\psi\partial_t e^{t\Delta_h}) = \mathrm{Tr}(\psi(\Delta_h e^{t\Delta_h})) = \mathrm{Tr}(\psi\Delta_h e^{t\Delta_h}).$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\zeta(s,\Delta_h) = -\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^s \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Tr}(\psi e^{t\Delta_h})dt = -\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^s \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Tr}(\psi(e^{t\Delta_h} - P_{\ker\Delta_h}))dt.$$

Usando integração por partes,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\psi}\zeta(s,\Delta_h) &= \frac{2s}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(\psi(e^{t\Delta_h} - P_{\ker\Delta_h})\right)dt \\
&= \frac{2s}{\Gamma(s)}\int_0^{1} t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(\psi(e^{t\Delta_h} - P_{\ker\Delta_h})\right)dt \\
&+ \frac{2s}{\Gamma(s)}\int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(\psi(e^{t\Delta_h} - P_{\ker\Delta_h})\right)dt \\
&=: \frac{\partial}{\partial\psi}\zeta_1(s,\Delta_h) + \frac{\partial}{\partial\psi}\zeta_2(s,\Delta_h).
\end{aligned}$$

Lema 2.3. *O traço do operador $\psi(e^{t\Delta_h} - P_{\ker\Delta_h})$ tem a seguinte expansão assintótica:*

$$\mathrm{Tr}\left(\psi(e^{t\Delta_h} - P_{\ker\Delta_h})\right) = \int_M \psi(z)\left(\frac{1}{4\pi t} + \frac{K_h(z)}{12\pi} - \frac{1}{A_h}\right)dA_h(z) + O(t)$$

quando $t \to 0^+$.

Demonstração. Como $\psi e^{t\Delta_h}$ e $\psi P_{\ker_{\Delta_h}}$ são operadores limitados, temos

$$\mathrm{Tr}(\psi(e^{t\Delta_h} - P_{\ker_{\Delta_h}})) = \sum_{i=0}^{+\infty}\langle \psi e^{t\Delta_h}\varphi_i - \psi P_{\ker\Delta_h}\varphi_i, \varphi_i\rangle_{L^2} < +\infty,$$

onde $\{\varphi_i\}$ é a base ortonormal de $L^2(M)$ de autofunções de $-\Delta_h$ e $\{\lambda_i\}$ é o espectro de (M,h). Pelo Corolário 1.5, $\displaystyle\int_M e(x,x,t)dx = \sum_{i=0}^{+\infty}\int_M e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)\varphi_i(x)\,dx.$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\psi(e^{t\Delta_h} - P_{\ker\Delta_h})) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\int_M \psi(z)\left(e^{t\Delta_h}\varphi_i(z)\varphi_i(z) - P_{\ker_{\Delta_h}}\varphi_i(z)\varphi_i(z)\right)dA_h(z) \\
&= \int_M \psi(z)\sum_{i=0}^{+\infty}(e^{-t\lambda_i}\varphi_i(z)\varphi_i(z) - P_{\ker\Delta_h}\varphi_i(z)\varphi_i(z))\,dA_h(z) \\
&= \int_M \psi(z)e(z,z,t)dA_h(z) - \int_M \psi(z)P_{\ker\Delta_h}\varphi_0(z)\varphi_0(z)\,dA_h(z) \\
&= \int_M \psi(z)e(z,z,t)dA_h(z) - \int_M \psi(z)\frac{1}{A_h}\int_M \varphi_0(z)\varphi_0(z)\,dA_h(z)\,dA_h(z) \\
&= \int_M \psi(z)e(z,z,t)\,dA_h(z) - \int_M \psi(z)\frac{1}{A_h}\,dA_h(z).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 1.8 com a Observação 1.14, e que a curvatura escalar é duas vezes a curvatura Gaussiana, obtemos $e(z,z,t) \sim \dfrac{1}{4\pi t} + \dfrac{K_h(z)}{12\pi} + O(t)$ para $t \to 0^+$. □

Tomando-se a correspondente extensão meromorfa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\psi}\zeta_1(s,\Delta_h) &= \frac{2s}{\Gamma(s)}\int_0^1 t^{s-1}\left\{\int_M \psi(z)\left(\frac{1}{4\pi t}+\frac{K_h(z)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)dA_h + O(t)\right\}dt\\
&= \frac{2s}{\Gamma(s)}\left\{\frac{1}{4\pi(s-1)}\int_M \psi(z)dA_h + \frac{1}{s}\int_M \psi(z)\left(\frac{K_h(z)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)dA_h\right\}\\
&+ \frac{2s}{\Gamma(s)}\int_0^1 t^{s-1}O(t)\,dt\\
&= \frac{2s}{\Gamma(s)}\left\{\frac{1}{s}\int_M \psi(z)\left(\frac{K_h(z)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)dA_h + \text{analítica em } s\in B(0,\delta)\right\},
\end{aligned}$$

onde $0<\delta<1$. Consideremos a derivada de $\frac{\partial}{\partial\psi}\zeta_1(s,\Delta_h)$ com respeito a s em $s=0$, e como próximo de $s=0$,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s + O(s^2), \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial\psi}\zeta_1(s,\Delta_h)|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\frac{s}{\Gamma(s)}\left\{\frac{1}{s}\int_M 2\psi(z)\left(\frac{K_h(z)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)dA_h + \text{analítica em s}\right\}|_{s=0}\\
&= \frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int_M 2\psi(z)\left(\frac{K_h(z)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)dA_h + s\sum_{n=0}^{+\infty}a_n s^n\right)|_{s=0}\\
&= \frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}|_{s=0}\int_M 2\psi(z)\left(\frac{K_h(z)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)dA_h + \frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}(a_0 s + a_1 s^2\ldots)|_{s=0}\\
&= \int_M 2\psi(z)\left(\frac{K_h(z)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)dA_h
\end{aligned}$$

Pela relação (2.8) e como $F(s) = \int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(\psi(e^{t\Delta_h}-P_{\ker\Delta_h})\right)dt$ pode ser estendida para uma função analítica em $\mathbb{C}$, obtemos

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial\psi}\zeta_2(s,\Delta_h)|_{s=0} = \left(\left(\frac{d}{ds}\frac{2s}{\Gamma(s)}\right)F(s) + \frac{2s}{\Gamma(s)}F'(s)\right)|_{s=0} = 0.$$

Portanto, usando a fórmula conforme entre curvaturas Gaussianas e elementos área da Proposição 1.5,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\psi}\log\det\Delta_h &= -\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{d}{ds}\zeta(s,\Delta_h)|_{s=0}\\
&= -\int_M 2\psi(z)\left(\frac{K_h(z)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)dA_h\\
&= -\int_M 2\psi(z)\left(\frac{e^{-2\varphi}(-\Delta_0\varphi+K_0)}{12\pi}-\frac{1}{A_h}\right)e^{2\varphi}dA_0 \qquad (2.9)\\
&= -\frac{1}{6\pi}\int_M \psi(z)(-\Delta_0\varphi+K_0)dA_0 + \frac{1}{A_h}\int_M 2\psi(z)e^{2\varphi}dA_0\\
&= -\frac{1}{6\pi}\int_M \psi(z)(-\Delta_0\varphi+K_0)dA_0 + \frac{\partial}{\partial\psi}\log A_h,
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{\partial}{\partial\psi}\log A_h = \dfrac{\partial}{\partial u}\log A_{h_u}|_{u=0} = \left\{\dfrac{1}{A_{h_u}}\displaystyle\int_M \dfrac{\partial}{\partial u}e^{2u\psi}e^{2\varphi}dA_0\right\}_{u=0} = \dfrac{1}{A_h}\displaystyle\int_M 2\psi(z)e^{2\varphi}dA_0$.
Usando a Fórmula de Green e a diferenciação sob o sinal da integral, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\int_M |\nabla_0(\varphi+u\psi)|_0^2\,dA_0|_{u=0} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\int_M (\varphi+u\psi)\Delta_0(\varphi+u\psi)dA_0|_{u=0}\\
&= -\frac{1}{2}\int_M \frac{\partial}{\partial u}(\varphi+u\psi)\Delta_0(\varphi+u\psi)dA_0|_{u=0}\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_M (\varphi+u\psi)\frac{\partial}{\partial u}\Delta_0(\varphi+u\psi)dA_0|_{u=0}\\
&= -\frac{1}{2}\left\{\int_M \psi\Delta_0\varphi\,dA_0 + \int_M \varphi\Delta_0\psi\,dA_0\right\}\\
&= -\int_M \psi\Delta_0\varphi\,dA_0,
\end{aligned}$$

e além disso, $\dfrac{\partial}{\partial u}\displaystyle\int_M K_0(\varphi+u\psi)dA_0|_{u=0} = \int_M K_0\psi dA_0$. Integrando (2.9) em u e depois fazendo $u=0$, obtemos

$$\log\det\Delta_h = -\frac{1}{6\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|_0^2 dA_0 + \int_M K_0\varphi dA_0\right\} + \log A_h + C, \tag{2.10}$$

onde C é uma constante independente de φ. Tomando-se $\varphi = 0$, então $C = \log\det\Delta_0 - \log A_0$. A Fórmula (2.10) é conhecida como a fórmula de variação conforme dada por Polyakov para superfícies fechadas.

2.3 Funcional relacionado a fórmula de Polyakov

Considere o seguinte funcional definido no espaço de funções tal que faça sentido a expressão a direita,

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0\varphi dA_0 - \pi\chi(M)\log\left(\int_M e^{2\varphi}dA_0\right). \tag{2.11}$$

Usando o Teorema de Gauss-Bonnet, segue que F é invariante por funções constantes, isto é, $F(\varphi + a) = F(\varphi)$. Usando a Fórmula de Polyakov,

$$F(\varphi) = -6\pi\log\det\Delta_\varphi + \pi(6-\chi(M))\log A_\varphi \tag{2.12}$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$, onde $\det\Delta_\varphi$ e $A_\varphi := \int_M dA_\varphi$ são o determinante regularizado do Laplaciano e a área de M com respeito a métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$.

Supondo que $A_\varphi = 1$, segue que $F(\varphi) = -6\pi\log\det\Delta_\varphi$. Assim se conclui que maximizar o $\log\det\Delta_\varphi$ é o mesmo que minimizar F.

Proposição 2.3. $A_\varphi = 1$ *se, e somente se,* $\int_M \varphi\, dA_0 = 0$ *para todo* $\varphi \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Suponhamos que $A_\varphi = 1$ para toda $\varphi \in C^\infty(M)$. Para $u \in \mathbb{R}$, usando a diferenciação sob o sinal da integral, obtemos

$$1 = A_u = \int_M e^{2u\varphi} dA_0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{du}\int_M e^{2u\varphi} dA_0 \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_M 2\varphi e^{2u\varphi} dA_0|_{u=0} = \int_M \varphi dA_0. \tag{2.14}$$

Se $\int_M \varphi dA_0 = 0$ para toda $\varphi \in C^\infty(M)$, em particular para $\varphi - \frac{1}{2}\log\left(\int_M e^{2\varphi} dA_0\right) \in C^\infty(M)$ obtemos

$$0 = \int_M \varphi dA_0 = \frac{1}{2}\int_M \log\left(\int_M e^{2\varphi} dA_0\right) dA_0 \tag{2.15}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\int_M e^{2\varphi} dA_0\right)\int_M dA_0. \tag{2.16}$$

Como M é compacta, segue da definição da medida Riemanniana em (M, σ_0) que $\int_M dA_0$ é finita e não nula. Logo $1 = e^0 = \int_M e^{2\varphi} dA_0 = A_\varphi$. □

2.4 Teorema de uniformização para M fechada: caso $\chi(M) \leq 0$.

Dizemos que uma métrica σ em M é uniforme, se M tem curvatura Gaussiana constante. Enunciaremos novamente o Teorema 0.1-a) como:

Teorema 2.1. *Se (M, σ_0) é uma superfície fechada, então dentre todas as métricas conformes a σ_0 de mesma área, a métrica uniforme possui determinante máximo. Além disso, a métrica uniforme é única, a menos de isometria na classe conforme.*

Nesta seção provaremos este teorema para o caso que $\chi(M) \leq 0$. Esta prova é uma consequência direta da convexidade estrita de F, que será provada agora.

Normalizamos $A_0 = 1$, e então consideramos todas as métricas conformes a σ_0 de área 1. Como vimos no final da seção anterior, podemos trocar $A_\varphi = 1$ por $\int_M \varphi\, dA_0 = 0$.

Notação 2.1. *Se φ satisfaz $\int_M \varphi\, dA_0 = 0$, então dizemos que φ possui valor médio nulo. Se φ pertence a um espaço de funções H e possui valor médio nulo, escreveremos $\varphi \in H'$.*

Para provar o próximo lema necessitaremos de uma estimativa para $\int_M e^{2\varphi}\, dA_0$ sob toda $\varphi \in C^\infty(M)$ de valor médio nulo. Para fazer isso enunciaremos a Desigualdade de Jensen que pode ser encontrada em [7].

Proposição 2.4 (Desigualdade de Jensen). *Se (X, M, μ) é um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, $g : X \to (a, b)$ é $L^1(M)$ e S é convexa em (a, b), então $S\left(\int g\, d\mu\right) \leq \int S \circ g\, d\mu$.*

Como $A_0 = 1$, isto é, $\mu(M) = \int_M \chi_M dA_0 = 1$, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é convexa e $\varphi \in C^\infty(M) \subset L^1(M)$, segue que $1 = e^0 = \exp\left(\int_M 2\varphi\, dA_0\right) \leq \int_M e^{2\varphi}\, dA_0$.

Lema 2.4. *F é estritamente convexa em funções f que satisfazem $\int_M f dA_0 = 0$.*

Demonstração. Defina $G(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2\, dA_0$, para funções de valor médio nulo. Mostremos que G é estritamente convexa, para fazer isso tomemos $\varphi \neq \psi$ e $\alpha \in (0,1)$. Temos que $G(\alpha\varphi + (1-\alpha)\psi)$ é dada por

$$\frac{1}{2}\left(\alpha^2 \int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 + 2\alpha(1-\alpha)\int_M \langle\nabla_0\varphi, \nabla_0\psi\rangle\, dA_0 + (1-\alpha)^2 \int_M |\nabla_0\psi|^2 dA_0\right).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\int_M \langle\nabla_0\varphi, \nabla_0\psi\rangle\, dA_0 \leq ||\nabla_0\varphi||_{L^2}||\nabla_0\psi||_{L^2} < \frac{1}{2}\left(||\nabla_0\varphi||_{L^2}^2 + ||\nabla_0\psi||_{L^2}^2\right).$$

Portanto, $G(\alpha\varphi+(1-\alpha)\psi) < \frac{1}{2}\left(\alpha||\nabla_0\varphi||_{L^2}^2 + (1-\alpha)||\nabla_0\psi||_{L^2}^2\right)$. Usando a Desigualdade de Holder,

$$\int_M e^{\alpha\varphi+(1-\alpha)\psi} dA_0 \leq \left(\int_M (e^{\alpha\varphi})^{\frac{1}{\alpha}} dA_0\right)^\alpha \left(\int_M (e^{(1-\alpha)\psi})^{\frac{1}{1-\alpha}} dA_0\right)^{1-\alpha}.$$

Logo, $\log\left(\int_M e^{2\alpha\varphi+2(1-\alpha)\psi} dA_0\right) \leq \alpha\log\left(\int_M e^{2\varphi} dA_0\right) + (1-\alpha)\log\left(\int_M e^{2\psi} dA_0\right)$. Notemos a importância de $\chi(M) \leq 0$ e as funções possuírem valor médio nulo, pois assim, a desigualdade anterior é preservada quando multiplicada por $-\pi\chi(M)$. Segue de tudo que foi feito, que F é estritamente convexa para funções de valor médio nulo. □

Para provar o Teorema 2.1 no caso $\chi(M) \leq 0$, conforme foi visto na seção anterior, basta mostrar a existência de uma função minimizante suave ψ para o funcional F no espaço das funções de valor médio nulo, e que $e^{2\psi}\sigma_0$ é uma métrica uniforme. A unicidade da métrica $e^{2\psi}\sigma_0$ decorre da convexidade estrita de F, pois toda função convexa possui um único mínimo global.

Na prova do Teorema 2.1 a seguir usaremos o conceito de convergência fraca, que definimos agora.

Definição 2.3. *Uma sequencia $\{u_n\}$ em um espaço de Hilbert H converge fraco a u, se $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ para cada $v \in H$. Denotamos a convergência fraca por $u_n \rightharpoonup u$.*

Prova do Teorema 2.1 (caso $\chi(M) \leq 0$): Escolha sequência minimizante $\{\varphi_n\} \in C^\infty(M)'$ para F, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} F(\varphi_n) = \alpha = \inf_{\varphi\in W^1(M)'} F(\varphi). \tag{2.17}$$

Vejamos que o ínfimo do conjunto $\{F(\varphi) : \varphi \in W^1(M)'\}$ existe. Usando a Desigualdade de Holder e a Desigualdade de Poincaré (veja Corolário 1.12),

$$\left|\int_M K_0 \varphi dA_0\right| \leq \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M K_0^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor não-nulo de Δ_0.

Seja $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon = \delta C$, onde $C = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}$. Usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, com $a = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\int_M K_0^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \sqrt{\delta} \left(\int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}}$ e $C_1 = \frac{C^2}{2} \int_M K_0^2 dA_0$ então

$$\left|\int_M K_0 \varphi dA_0\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0 + \frac{C_1}{\varepsilon} \tag{2.18}$$

Usando a Desigualdade de Jensen e que $\chi(M) \leq 0$, segue que $-\pi\chi(M) \log\left(\int_M e^{2\varphi} dA_0\right) \geq 0$. Assim usando a limitação anterior para $\varepsilon = 1$, segue que

$$F(\varphi) \geq \frac{1}{2} \int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0 - \frac{1}{2} \int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0 - C_1 = -C_1 > -\infty$$

para toda $\varphi \in W^1(M)'$. Portanto $\alpha \in \mathbb{R}$.

Mostremos que a sequencia minimizante satisfazendo (2.17) existe. Da definição de ínfimo e que $C^\infty(M)'$ é denso em $W^1(M)'$, existe $\varphi_n \in C^\infty(M)'$ tal que

$$\alpha \leq F(\varphi_n) \leq \alpha + \frac{1}{n}, \tag{2.19}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Passando-se o limite na desigualdade (2.19) tem-se o desejado.

Usando a limitação (2.18) com $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e a convergência da sequência minimizante, concluímos que $\{\varphi_n\}$ é limitada em $W^1(M)'$. De fato,

$$F(\varphi_n) \geq \frac{1}{4} \int_M |\nabla_0 \varphi_n|^2 dA_0 - 2C_1$$

e como existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $F(\varphi_n) \leq \alpha + 1$, segue que $\int_M |\nabla_0 \varphi_n|^2 dA_0$ é limitada. Usando a Desigualdade de Poincaré, concluí-se que φ_n é limitada em $L^2(M)$. Assim, $\{\varphi_n\}$ e $\{\nabla_0 \varphi_n\}$ são limitadas em $L^2(M)$ e $\vec{L}^2(M)$, que pela definição da norma no Teorema 1.5 é equivalente a dizer que $\{\varphi_n\}$ é limitada em $W^1(M)'$. Pela compacidade fraca de bolas em L^2, existe subsequencia $\{\varphi_n\}$ que converge fracamente em L^2, e também $\nabla_0 \varphi_n$ converge fracamente em $\vec{L}^2$, isto é,

$$\varphi_n \rightharpoonup \psi \quad \text{e} \quad \nabla_0 \varphi_n \rightharpoonup \varphi. \tag{2.20}$$

Agora, usaremos alguns resultados sobre distribuições da Seção 1.3. Como $L^2(M) \hookrightarrow D'(M)$, segue que $(\varphi_n, u) = \int_M \varphi_n u \, dA_0 = \langle \varphi_n, u \rangle_{L^2} \to \langle \psi, u \rangle_{L^2} = (\psi, u)$, para toda

$u \in D(M) = C^\infty(M)$, isto é, $\varphi_n \to \psi$ em $D'(M)$. Logo

$$(\nabla_0\varphi_n, v) = -(\varphi_n, \mathrm{div} v) \to -(\psi, \mathrm{div} v) = (\nabla_0\psi, v)$$

para toda $v \in \vec{D}(M) = \Gamma(TM)$, do qual $\nabla_0\varphi_n \to \nabla_0\psi$ em $\vec{D}'(M)$. Da mesma forma, usando que $\vec{L}^2 \hookrightarrow \vec{D}'$, se conclui que $\nabla_0\varphi_n \to \varphi$ em $\vec{D}'(M)$. Portanto $\nabla_0\psi = \varphi$. Agora, usando (2.20)

$$\langle\varphi_n, u\rangle_{L^2} + \langle\nabla_0\varphi_n, \nabla_0 u\rangle_{\vec{L}^2} \to \langle\psi, u\rangle_{L^2} + \langle\nabla_0\psi, \nabla_0 u\rangle_{\vec{L}^2},$$

para toda $u \in W^1(M)$. Portanto, $\varphi_n \rightharpoonup \psi$ em W^1.

Usando o Teorema de Rellich-Kondarachov (Teorema 1.4), segue que passando a subsequência $\varphi_n \to \psi$ em $L^2(M)$, e em particular segue que passando a subsequencia, se necessário, φ_n converge à ψ em quase todo ponto (veja Teorema de [8, pág.441]). Vale a pena notar que $\psi \in W^1(M)'$, pois $\int_M \varphi_n dA_0 \to \int_M \psi dA_0$ e $\int_M \varphi_n dA_0 = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usando a Desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned}\int_M |K_0(\varphi_n - \psi)| dA_0 &\leq \left(\int_M K_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M (\varphi_n - \psi)^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_M K_0^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}} ||\varphi_n - \psi||_{L^2(M)}.\end{aligned}$$

Como $||\varphi_n - \psi||_{L^2} \to 0$, segue $||K_0\varphi_n - K_0\psi||_{L^1} \to 0$ se $n \to \infty$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int_M K_0\varphi_n dA_0 = \int_M K_0\psi dA_0.$$

Entretanto, usando o Lema de Fatou (Veja [7]),

$$\int_M e^{2\psi} dA_0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_M e^{2\varphi_n} dA_0 \quad \text{e} \quad \int_M |\nabla_0\psi|^2 dA_0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_M |\nabla_0\varphi_n|^2 dA_0.$$

Logo $F(\psi) \leq \lim F(\varphi_n) = \alpha$. Por definição de ínfimo $F(\psi) = \alpha$, isto é, ψ é um mínimo global de $F : W^1(M)' \to \mathbb{R}$. Sendo assim, para $\varphi \in C^\infty(M)'$, $g(t) = F(\psi + t\varphi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, admite mínimo em $t = 0$, donde

$$0 = g'(0) = \int_M \langle\nabla_0\varphi, \nabla_0\psi\rangle dA_0 + \int_M K_0\varphi dA_0 - \frac{\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0} \int_M 2\varphi e^{2\psi} dA_0. \tag{2.21}$$

Agora, para todo $\varphi \in C^\infty(M)$ temos $\int_M \varphi dA_0 = a_\varphi$. Logo $\varphi - a_\varphi$ possui valor médio nulo. Aplicando $\varphi - a_\varphi$ na equação (2.21) e usando a Fórmula de Gauss-Bonnet, segue

$$0 = \int_M \langle\nabla_0\varphi, \nabla_0\psi\rangle dA_0 + \int_M K_0\varphi\, dA_0 - \frac{\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0} \int_M 2\varphi e^{2\psi}\, dA_0, \tag{2.22}$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$.

Para toda $\varphi \in C^\infty(M) \subset W^2(M)$ e $\psi \in W^1(M)'$, segue da Fórmula de Green que a equação (2.22) torna-se

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_M \psi \Delta_0 \varphi \, dA_0 + \int_M K_0 \varphi \, dA_0 - \frac{\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi}\, dA_0} \int_M 2\varphi e^{2\psi}\, dA_0 \\ &= -(\Delta_0 \psi, \varphi) + (K_0, \varphi) + \left(-\frac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi}\, dA_0} e^{2\psi}, \varphi \right), \end{aligned} \tag{2.23}$$

no sentido distribucional, ou seja, $-\Delta_0\psi + K_0 - \dfrac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0} e^{2\psi} = 0$.

Como $e^{2\psi} \in L^2(M)$, segue da equação anterior que $\psi \in W^2(M)'$. Notando que as derivadas fracas de e^ψ são $\partial_i e^\psi = e^\psi \partial_i \psi$ e $\partial_i\partial_j e^\psi = e^\psi(\partial_i\partial_j\psi + \partial_i\psi\partial_j\psi)$, concluímos que $e^\psi \in W^2$, ou seja, $\Delta_0^2 \psi \in L^2(M)$. Logo $\psi \in W^4(M)'$. Usando um argumento indutivo, concluí-se que $\psi \in W^{2k}(M)'$ para todo $k \geq 1$. Por (1.23) da página 9, segue que $\psi \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}} W^r(M)$. Pelo Teorema de Mergulho Sobolev (Teorema 1.3), segue $\psi \in C^\infty(M)'$.

Anteriormente, em (1.29) da página 12, vimos que para funções suaves o Laplaciano distribucional coincide com o Laplaciano clássico, então

$$-\Delta_0\psi + K_0 - \frac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0} e^{2\psi} = 0$$

no sentido clássico.

Usando a fórmula conforme entre curvaturas Gaussianas (Corolário 1.5), segue que $e^{2\psi}K_\psi - \dfrac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0} e^{2\psi} = 0$, ou seja, $K_\psi = \dfrac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0}$. Portanto, a curvatura Gaussiana associada a métrica $e^{2\psi}\sigma_0$ é constante negativa.

Agora ψ minimizar F é equivalente à ψ maximizar $\log\det\Delta_\varphi$ sob a condição $A_\varphi = 1$ (veja Seção 2.3), e como F possui um único ponto de mínimo global, então $\log\det\Delta_\varphi$ considerado como uma função sobre as métricas conformes a σ_0 sob a condição $A_\varphi = 1$ para toda $\varphi \in C^\infty(M)$, possui um único máximo global na métrica de curvatura constante $e^{2\psi}\sigma_0$.

Além disso, se $\sigma = e^{2\varphi}\sigma_0$ é uma métrica uniforme, isto é, $K_\varphi = \text{cte}$, então da Fórmula de Gauss Bonnet, $2\pi\chi(M) = K_\varphi A_\varphi$. Para $\theta \in W^1(M)'$, $\dfrac{d}{dt}F(\varphi + t\theta)|_{t=0} = 0$, isto é, φ é um ponto crítico de F. Como F é estritamente convexa, $\varphi = \psi$. Portanto, isso mostra que a existência da métrica uniforme na classe conforme $[\sigma_0]$ sob a condição área constante é única. Isso finaliza a prova do Teorema 2.1. □

2.5 Fluxo Gradiente

Esta seção consiste em mostrar que o limite em $W^2(M)'$ do fluxo gradiente (2.25) associado a F é a função minimizante ψ de F tal que $e^{2\psi}\sigma_0$ é a métrica uniforme na classe conforme de métricas de área unitária.

Definição 2.4. *O gradiente do funcional F em $\varphi \in W^1(M)$ é definido como a aplicação $\nabla F \in L^2(M, dA_0)$ tal que satisfaz*

$$\langle \nabla F, h \rangle_{L^2(M,dA_0)} = \frac{d}{dt} F(\varphi + th)|_{t=0},$$

para todo h em $W^1(M)$.

No caso de $\varphi, h \in C^\infty(M)$, segue da Fórmula de Green que

$$\langle \nabla F, h \rangle = -\int_M (\Delta_0 \varphi) h \, dA_0 + \int_M K_0 h \, dA_0 - 2\pi\chi(M) \frac{\int_M e^{2\varphi} h \, dA_0}{\int_M e^{2\varphi} \, dA_0}.$$

Logo, como $C^\infty(M)$ é denso em $L^2(M)$,

$$\nabla F = -\Delta_0 \varphi + K_0 - 2\pi\chi(M) \frac{e^{2\varphi}}{\int_M e^{2\varphi} dA_0}. \tag{2.24}$$

Assim, o **fluxo gradiente** é definido pela equação de evolução

$$\frac{d}{dt} \varphi(x,t) = -\nabla F(x). \tag{2.25}$$

Se fixamos o dado inicial $\varphi_0(x) = \varphi(x,0)$ com valor médio nulo, então qualquer solução da equação de evolução (2.25) também possui valor médio nulo para cada $t > 0$. De fato, usando a mudança conforme entre curvaturas Gaussianas e elementos área (Corolário 1.5),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M \varphi(x,t) dA_0 &= \int_M \frac{d}{dt} \varphi(x,t) dA_0 \\ &= \int_M (\Delta_0 \varphi - K_0) dA_0 + \frac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\varphi} dA_0} \int_M e^{2\varphi} dA_0 \\ &= -\int_M K e^{2\varphi} dA_0 + 2\pi\chi(M) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_M \varphi(x,t) \, dA_0 = 0$$

para cada $t > 0$, por causa do dado inicial φ_0.

O principal objetivo desta seção é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Dado $\varphi_0 \in W^2(M)'$, existe uma única solução $\varphi(\cdot, t) \in W^2(M)'$ da equação (2.25) definida para todo $t > 0$ com $\varphi(x,0) = \varphi_0(x)$, e tal que $\varphi(\cdot,t) \to \varphi_\infty(\cdot)$ em $W^2(M)'$ quando $t \to \infty$, onde $e^{2\varphi_\infty}\sigma_0$ é a métrica uniforme na classe de métricas conformes a σ_0 de área constante.*

2.5.1 Solução da Equação do Calor em $W^4(M)'$

Esta seção se resume a resolver o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(x,t) = A\varphi(x,t) & t > 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \in W^2(M)' \end{cases},$$

onde $A := \Delta_0 : W^4(M)' \subset W^2(M)' \to W^2(M)'$.

Para resolver isso, usaremos a teria de semigrupos de operadores que pode ser vista em [9]. Para construir a solução do problema de Cauchy, usaremos o Teorema de Hille e Yosida que fornece a existência de gerador infinitesimal. Por questões de referência, enunciamos este teorema que pode ser encontrado em [9, pág.413].

Teorema 2.3 (Hille-Yosida)**.** *Se B é um operador densamente definido e fechado em X, com $\mathbb{R}_+ \subset \rho(B)$ (conjunto resolvente de B) e*

$$||(\alpha I - B)^{-1}||_X \leq \alpha^{-1}$$

para cada $\alpha > 0$, então B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ fortemente contínuos de contrações em X.

Vejamos que A satisfaz as hipóteses deste teorema. Antes, lembramos as seguintes caracterizações dos espaços de Sobolev $W^2(M) = \{u \in L^2(M) : \Delta_0 u \in L^2(M)\}$ e $W^4(M) = \{u \in L^2(M) : \Delta_0 u, \Delta_0^2 u \in L^2(M)\}$, da Seção 1.3. Em $W^2(M)'$ usamos a seguinte norma

$$||u||^2_{W^2(M)'} = ||\Delta_0 u||^2_{L^2}, \tag{2.26}$$

associada ao produto interno $\langle u, v\rangle_{W^2(M)'} = \langle \Delta_0 u, \Delta_0 v\rangle_{L^2}$, que pela Desigualdade de Poincaré (Corolário 1.12) é equivalente a norma usual de $W^2(M)$ definida em cartas por

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} ||\partial^\alpha u||^2_{L^2}.$$

Quando estiver claro o uso da norma em $W^2(M)'$, representaremos a sua norma por $||\cdot||$ ao invés de $||\cdot||_{W^2(M)'}$.

Lema 2.5. *A é fechado e densamente definido.*

Demonstração. Seja $\{\varphi_n\}$ uma sequencia em $W^4(M)'$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ em $W^2(M)'$ e $\Delta_0\varphi_n \to \psi$ em $W^2(M)'$. Logo, $\Delta_0\varphi_n \to \Delta_0\varphi$ em $L^2(M)$. Como $i : W^2 \hookrightarrow L^2$ é um mergulho, segue da limitação $||\cdot||_{L^2} \leq ||\cdot||_{W^2}$, que $\Delta_0\varphi_n \to \psi$ em $L^2(M)'$. Logo $\Delta_0\varphi = \psi \in W^2(M)'$, e portanto $\varphi \in W^4(M)'$.

Como $C^\infty(M)' \subset W^4(M)' \subset W^2(M)'$, segue que tomando o fecho em $W^2(M)'$, temos que $W^4(M)'$ é denso em $W^2(M)'$. □

Observação 2.2. *Segue do Teorema do Gráfico Fechado que A é um operador contínuo.*

Lema 2.6. $A : W^4(M)' \subset W^2(M)' \to W^2(M)'$ *é simétrico em* $W^2(M)'$.

Demonstração. Segue da Fórmula de Green 1.6. □

Lema 2.7. *A é auto-adjunto em $W^2(M)'$.*

Demonstração. Seja $\psi \in D(A^*)$, isto é, existe único $f \in W^2(M)'$ tal que

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, f \rangle,$$

para todo $\varphi \in W^4(M)'$, e denotamos $A^*\psi = f$. Como $W^4(M)'$ é denso em $W^2(M)'$, e $\psi \in W^2(M)'$, existe uma sequência $\{\psi_n\}_n \in W^4(M)'$ tal que $\psi_n \to \psi$ em $W^2(M)'$.

Para $\varphi \in W^4(M)'$, $\langle A\varphi, \psi_n \rangle = \langle \varphi, A\psi_n \rangle$, pois A é simétrico em $W^2(M)'$. Fazendo $n \to +\infty$, $\langle \varphi, A^*\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \lim A\psi_n \rangle$, para toda $\varphi \in W^4(M)'$. Como $W^4(M)'$ é denso em $W^2(M)'$, segue que $\lim A\psi_n = A^*\psi$. Mas sendo A fechado, então $\psi \in W^4(M)'$ e $A^*\psi = A\psi$. Como A é simétrico em $W^2(M)'$ então $W^4(M)' \subset D(A^*)$.

Portanto, $D(A^*) = W^4(M)'$ e $A^* = A$. □

Teorema 2.4. *Para todo $\alpha > 0$, o resolvente $R_\alpha = (-A + \alpha I)^{-1}$ do operador A existe em $W^2(M)'$.*

Demonstração. Mostremos que para $f \in W^2(M)'$, existe único $u \in W^4(M)'$ tal que $(-\Delta_0 + \alpha I)u = f$, isto é, $-\Delta_0 u + \alpha u = f$. Isto mostrará que o resolvente R_α existe e $R_\alpha f = u$.

Podemos supor $u \in W^2(M)'$, pois $\Delta_0 u = \alpha u - f$ implica $\Delta_0^2 u = \alpha \Delta_0 u - \Delta f \in L^2(M)$, ou seja, $u \in W^4(M)'$.

Além disso, podemos supor ainda, $u \in W^1(M)'$, pois $\Delta_0 u = \alpha u - f \in L^2(M)$, ou seja, $u \in W^2(M)'$.

Segue disto que basta resolver a equação $-\Delta_0 u + \alpha u = f$ para $u \in W^1(M)'$.

Usando a definição do Laplaciano e do gradiente, ambos no sentido distribucional (veja Definição 1.17 e 1.18), obtemos $(\nabla_0 u, \nabla_0 \varphi) + \alpha(u, \varphi) = (f, \varphi)$ para todo $\varphi \in C^\infty(M)'$. Como $u \in W^1(M)'$, podemos olhar essa última equação em $L^2(M)$, pois $L^2(M) \hookrightarrow D'(M)$.

Como $C^\infty(M)'$ é denso em $W^1(M)'$, para qualquer $\varphi \in W^1(M)'$ existe uma sequencia $\{\varphi_n\} \in C^\infty(M)'$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ em $W^1(M)'$, ou seja, $\nabla_0 \varphi_n \to \nabla_0 \varphi$ em $\vec{L}^2(M)'$ e $\varphi_n \to \varphi$ em $L^2(M)'$. Logo

$$\langle \nabla_0 u, \nabla_0 \varphi_n \rangle_{L^2} + \alpha \langle u, \varphi_n \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi_n \rangle_{L^2} \to \langle \nabla_0 u, \nabla_0 \varphi \rangle_{L^2} + \alpha \langle u, \varphi \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}.$$

Para ver essa convergência, basta fazer a diferença entre os respectivos produtos internos e aplicar a desigualdade de Holder.

Portanto, basta encontrar único $u \in W^1(M)'$ tal que

$$\langle \nabla_0 u, \nabla_0 \varphi \rangle_{L^2} + \alpha \langle u, \varphi \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \tag{2.27}$$

para todo $\varphi \in W^1(M)'$.

Denote por $[u,\varphi]_\alpha := \langle \nabla_0 u, \nabla_0 \varphi \rangle_{L^2} + \alpha \langle u, \varphi \rangle_{L^2}$ e note que isso é um produto interno em $W^1(M)'$. Se $\alpha = 1$ temos o produto interno usual de $W^1(M)'$. Agora, para qualquer $\alpha > 0$ e $u \in W^1(M)'$,

$$\min(\alpha,1)||u||^2_{W^1} \leq [u,u]_\alpha \leq \max(\alpha,1)||u||^2_{W^1}.$$

Portanto, $(W^1(M)', [\cdot,\cdot]_\alpha)$ é um espaço de Hilbert.

Retomando, (2.27) é equivalente à $[u,\varphi]_\alpha = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}$ para toda $\varphi \in W^1(M)'$. Defina $l_\alpha : W^1(M)' \to \mathbb{R}$ por

$$l_\alpha(\varphi) = [u,\varphi]_\alpha.$$

Mostremos que l_α é limitada. De fato, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\langle f,\varphi\rangle_{L^2}| \leq ||f||_{L^2}||\varphi||_{L^2}$, e que $[\varphi,\varphi]_\alpha \geq \min(\alpha,1)||\varphi||^2_{W^1} \geq \min(\alpha,1)||\varphi||^2_{L^2}$, segue que

$$|l_\alpha(\varphi)| \leq \alpha^{-\frac{1}{2}}||f||_{L^2}[\varphi,\varphi]_\alpha^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad |l_\alpha(\varphi)| \leq ||f||_{L^2}[\varphi,\varphi]_\alpha^{\frac{1}{2}}, \tag{2.28}$$

se $\min(\alpha,1) = \alpha$ ou $\min(\alpha,1) = 1$, respectivamente, que justifica que l_α é limitada. Pelo Teorema da Representação de Riez, existe único $u \in W^1(M)'$ tal que

$$l_\alpha(\varphi) = [u,\varphi]_\alpha,$$

para qualquer $\varphi \in W^1(M)'$. Isto finaliza a existência do resolvente R_α tal que $R_\alpha f = u$. □

Como $\langle A\varphi, \varphi \rangle_{W^2(M)'} = -\int_M \langle \nabla_0 \Delta_0 \varphi, \nabla_0 \Delta_0 \varphi \rangle \, dA_0 = ||\nabla_0 \Delta_0 \varphi||^2_{\vec{L}^2} \leq 0$ para toda $\varphi \in W^4(M)'$, segue que se $\alpha > 0$ então

$$\langle (\alpha I - A)\varphi, \varphi \rangle_{W^2} = \alpha \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq \alpha \langle \varphi, \varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in W^4(M)'$. Daí,

$$\begin{aligned}
\alpha||\varphi||^2 &\leq |\langle (\alpha I - A)\varphi, \varphi \rangle| \leq ||(\alpha I - A)\varphi||.||\varphi|| \\
&\Rightarrow \alpha||\varphi|| \leq ||(\alpha I - A)\varphi|| \quad \forall \varphi \in W^4(M)' \\
&\Rightarrow ||(\alpha I - A)^{-1}\varphi|| \leq \alpha^{-1}||\varphi|| \quad \forall \varphi \in W^2(M)' \\
&\Rightarrow ||(\alpha I - A)^{-1}|| \leq \alpha^{-1},
\end{aligned} \tag{2.29}$$

para todo $\alpha > 0$.

Como $i : W^4(M)' \to W^2(M)'$ é compacto e $R_\alpha : W^2(M)' \to W^4(M)' \subset W^2(M)'$ é contínuo então $R_\alpha = i \circ R_\alpha : W^2(M)' \to W^2(M)'$ é compacto. Além disso, o resolvente R_α será auto-adjunto e não-negativo, pois $-A$ é. Logo existe base ortonormal $\{\psi_i\}$ de

$W^2(M)'$ por autofunções de $-A$ com respectivos autovalores $\{\lambda_i\}$ satisfazendo

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to +\infty. \tag{2.30}$$

Logo $\mathbb{R}^+$ está contido no resolvente de A. Assim da desigualdade (2.29) e do Lema 2.5, segue do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.3) que $A = \Delta_0 : W^4(M)' \subset W^2(M)' \to W^2(M)'$ é o gerador infinitesimal do semigrupo de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ fortemente contínuos de contrações em $W^2(M)'$.

Em particular, usando a caracterização de semigrupo analítico (ver [26, pág.413]), segue que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo analítico. Logo satisfaz $S(t)W^2(M)' \subset W^4(M)'$ para todo $t > 0$.

Teorema 2.5. *Fixando $\varphi_0 \in W^2(M)'$, $u(t) = S(t)\varphi_0$ é uma solução continuamente diferenciável de*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) \quad t > 0 \\ u(0) = \varphi_0 \end{cases}. \tag{2.31}$$

Demonstração. A continuidade de $u(t) = S(t)\varphi_0$ para $t \geq 0$ decorre da definição de semigrupo. Para $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) &= \frac{1}{h}(S(t+h)\varphi_0 - S(t)\varphi_0) \\ &= \frac{S(h) - I}{h} S(t)\varphi_0. \end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0^+$, $\dfrac{d}{dt}^+ u(t) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) = AS(t)\varphi_0 = Au(t)$, para todo $t > 0$. Pela Observação 2.2, $Au(t)$ é contínua em $\mathbb{R}_+$, donde $u(t) = \varphi_0 + \displaystyle\int_0^t \frac{d}{dt}^+ u(s)ds$. Logo u é uma solução continuamente diferenciável do problema de Cauchy. □

Em vista da solução do problema de Cauchy, podemos construir uma estimativa para $AS(t)$ para cada $t > 0$.

Corolário 2.1. *Existe uma constante C_0 tal que $||AS(t)|| \leq \dfrac{C_0}{t}$, para todo $t > 0$.*

Demonstração. A partir da base $\{\psi_i\}$ de $W^2(M)'$ constituindo autofunções $-A$, a solução do problema (2.31) é escrita na forma $u(t) = S(t)\varphi_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \langle u(t), \psi_i\rangle \psi_i$. Chamando $u_i(t) = \langle u(t), \psi_i\rangle_{W^2(M)'}$, segue da Fórmula de Green, que $\dfrac{d}{dt}u_i(t) = -\lambda_i u_i(t)$.

Portanto, tomando o produto interno do problema (2.31) com cada ψ_i em $W^2(M)'$, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) \\ u(0) = \varphi_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}u_i(t) = -\lambda_i u_i \quad t > 0 \\ u_i(0) = \langle \varphi_0, \psi_i\rangle = \varphi_0^i \end{cases}.$$

Logo $u_i(t) = e^{-\lambda_i t}\varphi_0^i$, para todo $i \geq 0$. Assim, $u(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda_i t}\varphi_0^i \psi_i$. Como $\langle Au(t), \psi_j \rangle = \frac{d}{dt}u_j(t)$, segue que $Au(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} -\lambda_j e^{-\lambda_j t}\varphi_0^j \psi_j$. Então,

$$||u^{'}(t)||^2 = ||Au(t)||^2 \quad = \quad \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j^2 t^2 e^{-2\lambda_j t}\frac{1}{t^2}(\varphi_0^j)^2. \tag{2.32}$$

Como $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-2x} = 0$, segue que $C_0^2 = \sup_{j,t}(\lambda_j^2 t^2 e^{-2\lambda_j t}) < \infty$. Logo

$$||AS(t)\varphi_0|| = ||Au(t)|| = ||u'(t)|| \leq \frac{C_0}{t}||\varphi_0||. \tag{2.33}$$

Portanto,

$$||AS(t)|| \leq \frac{C_0}{t}$$

para cada $t > 0$. □

2.5.2 Solução para o fluxo gradiente

A prova do Teorema 2.2, se divide essencialmente em três partes. Primeiro provamos a existência do fluxo gradiente em um intervalo limitado, após isso, usamos a teoria de semigrupos para estender a solução para todo $t > 0$, e por final mostramos a convergência do fluxo gradiente para a métrica uniforme em $W^2(M)'$.

Os próximos Lemas 2.8 e 2.9 constituem as ferramentas básicas para se provar o Teorema 2.2. Dados I intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e X espaço de Banach, é possível definir integral de uma função vetorial contínua $v : I \to X$ da mesma forma que no caso real ou complexo, trocando a norma de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pela norma de X. Logo as propriedades usuais de integrais reais são validas em v, em particular,

$$\frac{1}{\delta}\int_c^{c+\delta} v(t)\, dt \to v(c) \tag{2.34}$$

quando $\delta \to 0$. Usaremos a propriedade 2.34 para $v = S(t)\varphi : [0, \infty) \to W^2(M)'$, onde $\varphi \in W^2(M)'$.

Lema 2.8. *Seja $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to W^2(M)'$ contínua em $t = 0$ e Lipschitz contínua em $t > 0$, então $u(t) = S(t)\varphi_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\, ds$ é uma solução continuamente diferenciável para $t > 0$ do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t) & t > 0 \\ u(0) = \varphi_0 \in W^2(M)' \end{cases} .$$

Em particular, $u(t) \in D(A) = W^4(M)'$ para todo $t > 0$.

Demonstração. Decorre da definição de semigrupo que $u(t) = S(t)\varphi_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$ é contínuo para todo $t \geq 0$. Agora, escreva

$$\begin{aligned} \frac{u(t+\delta)-u(t)}{\delta} &= \frac{S(\delta)-I}{\delta}\left(S(t)\varphi_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds\right) \\ &+ \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} S(t+\delta-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0^+$, segue

$$\frac{d}{dt}^{+} u(t) = AS(t)\varphi_0 + A\left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right) + f(t) = Au(t) + f(t), \tag{2.35}$$

desde que $\int_0^t S(t-s)f(s)ds \in D(A)$. De fato, tome $0 < b < t$ e então usando o Teorema de mudança de variável temos

$$\begin{aligned} \frac{S(\delta)-I}{\delta}\int_0^t S(t-s)f(s)ds &= \int_0^t \frac{S(t+\delta-s)-S(t-s)}{\delta}f(s)ds \\ &= \int_0^b \frac{S(t+\delta-s)-S(t-s)}{\delta}f(s)ds \\ &+ \int_b^t S(t-s)\frac{f(s+\delta)-f(s)}{\delta}ds \\ &- \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} S(t+\delta-s)f(s)ds \\ &+ \frac{1}{\delta}\int_b^{b+\delta} S(t+\delta-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0^+$,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0^+}\frac{S(\delta)-I}{\delta}\int_0^t S(t-s)f(s)ds &= \int_0^b AS(t-s)f(s)ds \\ &+ \int_b^t S(t-s)\frac{d}{ds}f(s)ds \\ &- f(t) + S(t-b)f(b), \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde usamos o fato que como $W^2(M)'$ é um espaço de Hilbert, então toda função Lipschitz contínua implica diferenciabilidade forte em quase todo ponto.

Como o limite anterior existe, segue que $\int_0^t S(t-s)f(s)ds \in D(A)$ para cada $t > 0$, e então $\frac{d}{dt}^{+} u(t)$ existe e é contínua para cada $t > 0$. Em particular, $u(t) \in D(A)$ para cada $t > 0$.

Logo $u(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{d}{dt}^{+} u(s)ds$ é uma solução continuamente diferenciável do problema de Cauchy não-homogêneo. □

Lema 2.9. *Sejam $a > 2$ e $f : W^2(M)' \to W^2(M)'$ tal que $||f(\varphi)||_{W^2(M)'} \leq C_a$ e*

$$||f(\varphi) - f(\psi)||_{W^2(M)'} \leq C_a||\varphi - \psi||_{W^2(M)'}$$

para $||\varphi||, ||\psi|| \leq a$, onde C_a é uma constante que depende de a. Então para $||\varphi_0|| \leq \frac{a}{2}$, o problema

$$\begin{cases} \varphi'(t) = A\varphi(t) + f(\varphi(t)) & t > 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases} \tag{2.37}$$

possui uma única solução continuamente diferenciável para $t \in (0, T_a]$, onde $T_a = C_a^{-1} \log \frac{a}{2}$, que converge para φ_0 quando $t \to 0$. Além disso, $\varphi(t) \in W^4(M)'$ para todo $t \in (0, T_a]$.

Demonstração. Defina $\varphi_0(t) = S(t)\varphi_0$ e, indutivamente,

$$\varphi_n(t) = S(t)\varphi_0 + \int_0^t S(t-s)f(\varphi_{n-1}(s))ds,$$

para $n \geq 1$. Então, usando que o semigrupo $S(t)$ é uma contração,

$$||\varphi_0(t)|| \leq ||S(t)||||\varphi_0|| \leq ||\varphi_0|| \leq \frac{a}{2}.$$

Para $n = 1$, $||\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|| \leq \int_0^t ||f(\varphi_0(s))||ds \leq C_a \int_0^t ds = C_a t$. Logo, indutivamente

$$||\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)|| \leq C_a \int_0^t ||\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)||ds,$$

desde que $||\varphi_k(t)|| \leq a$ para $k \leq n-1$.

Vejamos para quais valores de t devemos ter $||\varphi_k(t)|| \leq a$. Note que, por indução, $||\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)|| \leq C_a^n \frac{t^n}{n!}$, para todo $n \geq 1$. Logo,

$$||\varphi_n(t)|| \leq \sum_{k=1}^{n} ||\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)|| + ||\varphi_0(t)|| \leq e^{C_a t} + \frac{a}{2}.$$

Assim $||\varphi_n(t)|| \leq a$ para $n \geq 1$, se $e^{C_a t} \leq \frac{a}{2}$, ou seja, $t \leq \frac{1}{C_a} \log \frac{a}{2}$. Daí $t \in [0, T_a]$, onde $T_a = \frac{1}{C_a} \log \frac{a}{2}$.

Portanto, $||\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)|| \leq \frac{(C_a T_a)^n}{n!}$ para $n \geq 1$ e $t \in [0, T_a]$. Como $\frac{(C_a T_a)^n}{n!} \to 0$, pois é o termo geral da serie exponencial, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que

$$||\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)|| \leq \varepsilon$$

se $n, n-1 \geq n_0$, para todo $t \in [0, T_a]$, isto é, $||\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|| \leq \varepsilon$ se $n > m \geq n_0$, para todo $t \in [0, T_a]$. Logo $\{\varphi_n(t)\}$ é uma sequência de Cauchy em $W^2(M)'$ para todo $t \in [0, T_a]$. Assim, existe $\varphi_\infty(t) \in W^2(M)'$ tal que $\varphi_n(t) \to \varphi_\infty(t)$ para cada $t \in [0, T_a]$.

Fazendo $n \to +\infty$ e mantendo $m \geq n_0$ e $t \in [0, T_a]$ fixos, segue que

$$||\varphi_m(t) - \varphi_\infty(t)|| \leq \varepsilon$$

se $m \geq n_0$, para todo $t \in [0, T_a]$, isto é, $\varphi_n(t)$ converge uniformemente para $\varphi_\infty(t)$ em $[0, T_a]$. Logo

$$\varphi_\infty(t) = S(t)\varphi_0 + \int_0^t S(t-s)f(\varphi_\infty(s))ds, \tag{2.38}$$

para todo $t \in [0, T_a]$.

Pelo Lema 2.8, cada φ_n é contínua em $[0, T_a]$ e continuamente diferenciável em $(0, T_a]$. Tomando $b = \frac{t}{2}$ na relação (2.36) e usando a relação (2.35) do Lema 2.8, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_n'(t) = AS(t)\varphi_0 \quad &+ \quad \int_{\frac{t}{2}}^t S(t-s)\frac{d}{ds}f(\varphi_{n-1}(s))ds \\ &+ \quad \int_0^{\frac{t}{2}} AS(t-s)f(\varphi_{n-1}(s))ds \\ &+ \quad S(t/2)f(\varphi_{n-1}(t/2)). \end{aligned}$$

Usando o Corolário 2.1

$$\begin{aligned} ||\varphi_0'(t)|| &= ||AS(t)\varphi_0|| \leq \frac{C_0}{t}||\varphi_0||. \\ ||\varphi_1'(t) - \varphi_0'(t)|| &\leq \int_{\frac{t}{2}}^t ||\frac{d}{ds}f(\varphi_0(s))||ds + \int_0^{\frac{t}{2}} ||AS(t-s)f(\varphi_0(s))||ds + ||S(t/2)f(\varphi_0(t/2))|| \\ &\leq C_a \int_{\frac{t}{2}}^t ||\varphi_0'(s)||ds + \int_0^{\frac{t}{2}} ||AS(t)(S(s))^{-1}f(\varphi_0(s))||ds + ||S(t/2)f(\varphi_0(t/2))|| \\ &\leq C_aC_0||\varphi_0|| \log 2 + \frac{C_0C_a}{2} + C_a = C. \end{aligned}$$

Indutivamente, $||\varphi_n'(t) - \varphi_{n-1}'(t)|| \leq C^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, para todo $t \in [0, T_a]$. Logo, como antes, $\varphi_n'(t)$ converge uniformemente em $[0, T_a]$. Em particular, $\varphi_\infty(t)$ é continuamente diferenciável em $(0, T_a]$, pois φ_n o é. Do Lema 2.8, $\varphi_\infty(t)$ é solução do problema (2.37).

Agora provaremos a unicidade. Suponha que φ_1 e φ_2 são duas soluções continuamente diferenciáveis do problema (2.37), tais que $||\varphi_1||, ||\varphi_2|| \leq a$ para $0 \leq t \leq T_a$. Então ambas satisfazem a expressão (2.38) e

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_0^t S(t-s)(f(\varphi_1(s)) - f(\varphi_2(s)))\, ds.$$

Em particular,

$$||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|| \leq C_a \int_0^t ||\varphi_1(s) - \varphi_2(s)||ds$$

do qual $\varphi_1 = \varphi_2$. □

Lema 2.10. *Para* $\varphi \in W^2(M)'$,

$$f(\varphi) := -K_0 + 2\pi\chi(M)\frac{e^{2\varphi}}{\int_M e^{2\varphi} dA_0},$$

satisfaz as hipóteses do Lema 2.9.

Demonstração. Notemos que f é uma função de $W^2(M)'$ em $W^2(M)'$. De fato, usando a Fórmula de Gauss Bonnet, $\int_M f(\varphi) dA_0 = 0$, ou seja, $f(\varphi)$ possui valor médio nulo. Além disso, como as derivadas fracas $\partial_i e^{\varphi} = e^{\varphi}\partial_i\varphi$ e $\partial_i\partial_j e^{\varphi} = e^{\varphi}(\partial_i\partial_j\varphi + \partial_i\varphi\partial_j\varphi)$ estão em $L^2(M)$, segue que $f(\varphi) \in W^2(M)'$.

Pela desigualdade de Jensen, $\int_M e^{2\varphi} dA_0 \geq 1$ para toda $\varphi \in W^2(M)'$, e como K_0 não depende de φ, segue que para obtermos $||f(\varphi)|| \leq C_a$ em $W^2(M)'$ é suficiente limitar $e^{2\varphi}$ em $W^2(M)'$ para toda $||\varphi|| \leq a$ com $a > 2$.

De fato, de [12, pág. 21-22], temos a seguinte estimativa Sobolev,

$$\sup_M |\varphi(x)| \leq c_1 ||\varphi|| \tag{2.39}$$

onde c_1 depende de σ_0. Assim, para $||\varphi|| \leq a$, segue que

$$e^{\varphi} \leq e^{c_1 a}.$$

Daí

$$||\partial_i e^{\varphi}||_{L^2}^2 = \int_M (e^{\varphi}\partial_i\varphi)^2 dA_0 \leq e^{2c_1 a}||\partial_i\varphi||_{L^2}^2 \leq a^2 e^{2c_1 a}.$$

Como

$$\begin{aligned}
||\partial_i\partial_j e^{\varphi}||_{L^2} &\leq ||e^{\varphi}\partial_i\partial_j\varphi||_{L^2} + ||e^{\varphi}\partial_i\varphi\partial_j\varphi||_{L^2} \\
&\leq e^{c_1 a}||\partial_i\partial_j\varphi||_{L^2} + e^{c_1 a}||\partial_i\varphi\partial_j\varphi||_{L^2} \\
&\leq e^{c_1 a} a + e^{c_1 a}||\partial_i\varphi\partial_j\varphi||_{L^2},
\end{aligned}$$

basta limitar $||\partial_i\varphi\partial_j\varphi||_{L^2}$ por uma constante dependendo de a, para obtermos uma limitação de $||\partial_i\partial_j e^{\varphi}||_{L^2}$ por uma constante dependendo de a. Note que pela desigualdade de Holder

$$||\partial_i\varphi\partial_j\varphi||_{L^2}^2 \leq \left(\int_M (\partial_i\varphi)^4 dA_0\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M (\partial_j\varphi)^4 dA_0\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela Desigualdade Sobolev de [12, p. 21-22],

$$||\varphi||_{L^p} \leq c_2 p^{1/2}(||\varphi||_{L^2} + ||\nabla_0\varphi||_{L^2}), \tag{2.40}$$

onde c_2 depende de σ_0, obtemos $||\partial_i\varphi||_{L^4} \leq C||\varphi|| \leq Ca$. Logo

$$||\partial_i\varphi\partial_j\varphi||_{L^2}^2 \leq C^4 a^4.$$

Portanto,

$$||e^{2\varphi}||^2 = \sum_{|\alpha|\leq 2} ||\partial^\alpha e^{2\varphi}||_{L^2}^2 \leq C_a,$$

onde C_a é uma constante que depende de a.

Para verificar a condição Lipschitz para f do Lema 2.9, defina

$$\theta_t = \psi + t(\varphi - \psi) \in W^2(M)'$$

para todo $t \in [0,1]$ com $||\varphi||, ||\psi|| \leq a$. Notemos que $||\theta_t|| \leq a$ para todo $t \in [0,1]$, donde usando a estimativa Sobolev (2.39) concluímos que

$$\sup_{\substack{t\in[0,1]\\ x\in M}} e^{\theta_t} \leq e^{c_1 a}. \tag{2.41}$$

Como

$$\begin{aligned} f(\varphi) - f(\psi) &= 2\pi\chi(M)\int_0^1 \frac{d}{dt}\frac{e^{2\theta_t}}{\int_M e^{2\theta_t} dA_0} dt \\ &= 4\pi\chi(M)\int_0^1 \left(\frac{e^{2\theta_t}(\varphi-\psi)}{\int_M e^{2\theta_t} dA_0} - \frac{e^{2\theta_t}\int_M e^{2\theta_t}(\varphi-\psi) dA_0}{(\int_M e^{2\theta_t} dA_0)^2}\right) dt \end{aligned}$$

Da desigualdade (2.41) as normas L^2 das derivadas de $f(\varphi) - f(\psi)$ de ordem menor ou igual que 2 são limitadas por $C_a||\varphi - \psi||$, onde C_a é diferente em cada derivada. Portanto, $||f(\varphi) - f(\psi)|| \leq C(a)||\varphi - \psi||$ para toda φ, ψ em $W^2(M)'$, com $||\varphi||, ||\psi|| \leq a$. □

Segue do Lema 2.9, que existe uma única solução continuamente diferenciável $\varphi(x,t) \in W^2(M)'$ para $t \in (0, T_a]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \Delta_0\varphi(x,t) + f(\varphi(x,t)) = -\nabla F \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \in W^2(M)' \end{cases}, \tag{2.42}$$

onde f é dada no Lema 2.10 e $||\varphi_0|| \leq \dfrac{a}{2}$ para algum $a > 2$. Além disso, $\varphi(x,t) \in W^4(M)'$, para $t \in (0, T_a]$.

Lema 2.11. *A solução do problema* (2.42) *estende-se para uma única solução continuamente diferenciável para todo* $t > 0$.

Demonstração. Basta mostrar que $||\varphi(x,t)|| \leq b$ em $[0, T_a]$, onde b é uma constante dependendo apenas de φ_0 e σ_0, pois assim o Lema 2.9 garante que a solução estende-se para $[0, T_a + T_b]$, $T_b > 0$. Repetindo este argumento, a solução estende-se para todo $t > 0$.

Para fazer isso, defina $N(t) = ||\Delta_0\varphi(t)||_{L^2}^2$ e suponha por contradição que $N(t)$ não é limitada em $[0, T_a]$.

Primeiramente, mostramos que $||\nabla_0\varphi(t)||_{L^2}$ é limitada em $[0,T_a]$. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) &= \langle \nabla F, \varphi^{'}(t)\rangle_{L^2}\\ &= -\langle \varphi^{'}(t), \varphi^{'}(t)\rangle_{L^2}\\ &= -\int_M (\varphi^{'}(t))^2 dA_0 \leq 0.\end{aligned}$$

Portanto, $F(\varphi(t))$ é decrescente em t. Como $\chi(M)\leq 0$ e $\int_M e^{2\varphi}dA_0 \geq 1$ para $0<t\leq T_a$

$$F(\varphi_0) \geq F(\varphi(t)) \geq \frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2\, dA_0 + \int_M K_0\varphi\, dA_0.$$

Usando as desigualdades de Poincaré e Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}||\nabla_0\varphi(t)||^2_{L^2} &\leq 2F(\varphi(t)) - 2\int_M K_0\varphi(t)dA_0\\ &\leq |2F(\varphi_0)| + 2\int_M |K_0\varphi(t)|dA_0\\ &\leq a + 2\left(\int_M |K_0|^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M |\varphi(t)|^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq a + c||\nabla_0\varphi(t)||_{L^2}.\end{aligned}$$

Portanto, $||\nabla_0\varphi(t)||_{L^2}$ é limitado em $[0,T_a]$.

Agora, vamos concluir que $N^{'}(t)\leq 0$ em $[0,T_a]$. Como $\Delta_0 : W^4(M)' \subset W^2(M)' \to W^2(M)'$ é contínuo, segue que $\frac{d}{dt}\Delta_0\varphi(t) = \Delta_0\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)$. Logo, usando a Fórmula de Green e notando a importância de $\varphi(t)\in W^4(M)'$ para $t\in(0,T_a]$,

$$\begin{aligned}N^{'}(t) &= 2\langle \Delta_0\varphi(t), \Delta_0\varphi^{'}(t)\rangle_{L^2}\\ &= 2\langle \Delta_0^2\varphi(t), \varphi^{'}(t)\rangle_{L^2}\\ &= 2\left\langle \Delta_0^2\varphi(t), \Delta_0\varphi(t) - K_0 + 2\pi\chi(M)\frac{e^{2\varphi(t)}}{\int_M e^{2\varphi(t)}dA_0}\right\rangle_{L^2} \qquad (2.43)\\ &= -2||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||^2_{L^2} - 2\langle \Delta_0^2\varphi(t), K_0\rangle_{L^2} + 4\pi\chi(M)\left\langle \Delta_0^2\varphi(t), \frac{e^{2\varphi(t)}}{\int_M e^{2\varphi(t)}dA_0}\right\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Agora estimamos cada parcela de (2.43). Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré novamente

$$\begin{aligned}|\langle \Delta_0^2\varphi(t), K_0\rangle_{L^2}| &= |\langle \varphi(t), \Delta_0^2 K_0\rangle_{L^2}| \qquad (2.44)\\ &\leq ||\varphi(t)||_{L^2}||\Delta_0^2 K_0||_{L^2}\\ &\leq b||\nabla_0\varphi(t)||_{L^2}.\end{aligned}$$

Logo, como $||\nabla_0\varphi(t)||_{L^2}$ é limitado em $[0,T_a]$, segue que (2.44) é limitado em $[0,T_a]$.

Partimos agora para a limitação do último termo de (2.43). De fato, usando a regra da cadeia para ∇_0 em W^1 na relação (2.45) abaixo (Veja Lema 5.1 de [8, p.123]) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \Delta_0^2\varphi(t), \frac{e^{2\varphi(t)}}{\int_M e^{2\varphi(t)} dA_0} \right\rangle_{L^2} \right| &\leq |\langle \Delta_0^2\varphi(t), e^{2\varphi(t)}\rangle_{L^2}| \\ &= |\langle \Delta_0(\Delta_0\varphi(t)), e^{2\varphi(t)}\rangle_{L^2}| \\ &= |\langle \nabla_0\Delta_0\varphi(t), \nabla_0 e^{2\varphi(t)}\rangle_{L^2}| \\ &= |\langle \nabla_0\Delta_0\varphi(t), e^{2\varphi(t)}\nabla_0 2\varphi(t)\rangle_{L^2}| \qquad (2.45) \\ &\leq 2||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||_{L^2}||e^{2\varphi(t)}\nabla_0\varphi(t)||_{L^2} \end{aligned}$$

Para prosseguir com a estimativa necessitamos da Desigualdade de Trudinger, isto é, se $\int_M \varphi(t) dA_0 = 0$ então

$$\int_M e^{\varphi(t)} dA_0 \leq a \exp(b||\nabla_0\varphi(t)||^2_{\vec{L}^2}) \qquad (2.46)$$

(veja [31]). Além disso,

$$||\partial_i\varphi||_{L^4} \leq c||\varphi|| = c||\Delta_0\varphi(t)||_{L^2}, \qquad (2.47)$$

como pode ser vista por substituição de $\partial_i\varphi$ na relação (2.40) do Lema 2.10. Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Trundiger para $||e^{4\varphi(t)}||_{L^4}$, a limitação de $||\nabla_0\varphi(t)||_{L^2}$ e a desigualdade (2.47) para $||\nabla_0\varphi(t)||_{L^4}$, segue que

$$\begin{aligned} ||e^{2\varphi(t)}\nabla_0\varphi(t)||^2_{L^2} &\leq ||e^{4\varphi(t)}||_{L^4}||\nabla_0\varphi(t)||_{\vec{L}^4}||\nabla_0\varphi(t)||_{\vec{L}^2} \\ &\leq d||\Delta_0\varphi(t)||_{L^2} \\ &\leq c||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||_{\vec{L}^2}. \qquad (2.48) \end{aligned}$$

Combinando (2.45) com (2.48), obtemos

$$\left| \left\langle \Delta_0^2\varphi(t), \frac{e^{2\varphi(t)}}{\int_M e^{2\varphi(t)} dA_0} \right\rangle_{L^2} \right| \leq 2c^{1/2}||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||^{3/2}_{\vec{L}^2}. \qquad (2.49)$$

Substituindo (2.44) e (2.49) em (2.43) obtemos

$$\begin{aligned} N'(t) &\leq -2||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||^2_{\vec{L}^2} + a + d||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||^{3/2}_{\vec{L}^2} \\ &= ||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||^{3/2}_{\vec{L}^2}\left(-2||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||^{1/2}_{\vec{L}^2} + d\right) + a. \end{aligned}$$

Como estamos supondo $N(t)$ não limitada em $[0, T_a]$, segue da Desigualdade de Poincaré que $||\nabla_0\Delta_0\varphi(t)||_{\vec{L^2}}$ não é limitado em $[0, T_a]$. Logo $N'(t) \leq 0$ em $[0, T_a]$. Contradição, pois desta forma $N(t)$ será decrescente e limitada por $N(0)$.

Portanto, $N(t)$ é limitada por uma constante dependendo apenas de $\varphi_0 = \varphi(0)$ e σ_0. □

Já mostramos que existe uma única solução $\varphi(x,t) \in W^2(M)'$ de $\dfrac{d\varphi}{dt} = -\nabla F$ para todo $t > 0$ com $\varphi(x,0) = \varphi_0 \in W^2(M)'$. Resta mostrar que $\varphi(\cdot,t) \to \varphi_\infty(\cdot)$ em $W^2(M)'$ quando $t \to +\infty$, onde $e^{2\varphi_\infty}\sigma_0$ é a métrica uniforme que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano nas métricas conformes a σ_0 de área unitária (veja Teorema 2.1).

O próximo lema é um fato essencial para se provar essa convergência.

Lema 2.12. *$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0\varphi dA_0 - \pi\chi(M)\log\left(\int_M e^{2\varphi}dA_0\right)$ é contínua na topologia de $W^1(M)'$.*

Demonstração. É fácil ver que $H(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0$ e $T(\varphi) = \int_M K_0\varphi dA_0$ são contínuas na topologia de $W^1(M)'$, pois se $\varphi_n \to \varphi$ em $W^1(M)'$ então, por definição da norma $W^1(M)'$, $H(\varphi_n) \to H(\varphi)$ e pela Desigualdade de Holder $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$.

Vejamos que $\int_M e^{2\varphi_n}dA_0 \to \int_M e^{2\varphi}dA_0$. Para $\varphi, \psi \in W^1(M)'$ e $s \in [0,1]$, escreva $\theta_s = \psi + s(\varphi - \psi)$ e então $e^\varphi - e^\psi = \int_0^1 \frac{d}{ds}e^{\theta_s}ds = \int_0^1 e^{\theta_s}(\varphi-\psi)ds$.

Usando a Desigualdade de Trudinger (2.46) obtemos

$$\begin{aligned} ||e^\varphi - e^\psi||_{L^2} &\leq \int_0^1 ||e^{\theta_s}(\varphi-\psi)||_{L^2}ds \\ &\leq \int_0^1 ||e^{\theta_s}||_{L^2}||\varphi-\psi||_{L^2}dt \\ &\leq a\exp(b(||\nabla_0\varphi||_{L^2} + ||\nabla_0\psi||_{L^2}))||\varphi-\psi||_{L^2}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Portanto, $\varphi_n \to \varphi$ em $W^1(M)'$, isto é, $\varphi_n \to \varphi$ em $L^2(M)'$ e $\nabla_0\varphi_n \to \nabla_0\varphi$ em $\vec{L^2}(M)'$, implica

$$||e^{\varphi_n} - e^\varphi||_{L^2} \to 0,$$

que era o que queríamos mostrar. □

Teorema 2.6. *A solução $\varphi(x,t) \in W^2(M)'$ para $t > 0$ de $\dfrac{d\varphi}{dt} = -\nabla F$ com dado inicial $\varphi_0 \in W^2(M)'$ converge para φ_∞ em $W^2(M)'$, onde $e^{2\varphi_\infty}\sigma_0$ é a métrica uniforme que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano na classe conforme de métricas de área unitária.*

Demonstração. Notamos que $\dfrac{d}{dt}F(\varphi(t)) = -||\varphi'(t)||^2_{L^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} ||\varphi'(t)||^2_{L^2}dt &= \lim_{s\to+\infty}\int_0^s ||\varphi'(t)||^2_{L^2}dt \\ &= -\lim_{s\to+\infty}(F(\varphi(s)) - F(\varphi_0)) \\ &= F(\varphi_0) - \lim_{s\to+\infty}F(\varphi(s)). \end{aligned}$$

Como o fluxo $\varphi(x,t)$ existe para todo $t>0$ e F é contínua em $W^1(M)'$, então $\lim\limits_{s\to+\infty} F(\varphi(s))$ existe. Assim, existe uma sequencia $t_n \to +\infty$ tal que $||\varphi^{'}(t_n)||_{L^2} \to 0$, pois se qualquer sequencia $t_n \to +\infty$, $||\varphi^{'}(t_n)||_{L^2} \nrightarrow 0$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, $||\varphi^{'}(t_n)||_{L^2} > n$. Então $F(\varphi_0) \geq \lim\limits_{t_n\to+\infty} \int_0^{t_n} ||\varphi^{'}(t)||^2_{L^2} dt > \lim\limits_{t_n\to+\infty} n^2 t_n = +\infty$, que é uma contradição.

Como vimos na prova do Lema 2.11, $||\varphi(t_n)||_{W^2} = ||\Delta_0\varphi(t_n)||_{L^2}$ é limitado para $t_n \to +\infty$, donde da compacidade fraca da bola fechada em $L^2(M)$, passando a subsequencia, $\Delta_0\varphi(t_n) \rightharpoonup \psi$ em $L^2(M)$. Por outro lado, como $i : W^2(M) \to W^1(M)$ é um mergulho compacto, passando a subsequencia, $\varphi(t_n) \to \varphi^*$ em $W^1(M)$, ou seja,

$$\varphi(t_n) \to \varphi^* \quad \text{e} \quad \nabla_0\varphi(t_n) \to \nabla_0\varphi^* \quad \text{em} \quad L^2(M). \tag{2.51}$$

Agora, da convergência fraca de $\Delta_0\varphi(t_n)$, obtemos $\Delta_0\varphi(t_n) \to \psi$ em $D^{'}(M)$. Mas como $L^2(M) \hookrightarrow D^{'}(M)$ então

$$(\Delta_0\varphi(t_n), u) = (\varphi(t_n), \Delta_0 u) = \int_M \varphi(t_n)\Delta_0 u\, dA_0 \to \int_M \varphi^*\Delta_0 u\, dA_0 = (\varphi^*, \Delta_0 u) = (\Delta_0\varphi^*, u),$$

para toda $u \in D(M) = C^\infty(M)$, isto é,

$$\Delta_0\varphi(t_n) \to \Delta_0\varphi^*, \tag{2.52}$$

em $D^{'}(M)$. Por unicidade, $\Delta_0\varphi^* = \psi$, e então $\Delta_0\varphi(t_n) \rightharpoonup \Delta_0\varphi^*$ em $L^2(M)$. Portanto,

$$\varphi(t_n) \rightharpoonup \varphi^*, \tag{2.53}$$

em $W^2(M)'$.

Como $\varphi^{'}(t_n) \to 0$ em $L^2(M)$ e φ satisfaz a equação de evolução $\dfrac{d\varphi}{dt} = -\nabla F$ para todo $t > 0$, segue

$$\Delta_0\varphi(t_n) - K_0 + 2\pi\chi(M)\frac{e^{2\varphi(t_n)}}{\int_M e^{2\varphi(t_n)} dA_0} \to 0$$

em $L^2(M)$, quando $t_n \to +\infty$. Das relações (2.50) e (2.51), segue que $e^{\varphi(t_n)} \to e^{\varphi^*}$ em $L^2(M)$, donde do mergulho $i : L^2(M) \to D^{'}(M)$, segue que

$$e^{\varphi(t_n)} \to e^{\varphi^*} \tag{2.54}$$

em $D^{'}(M)$.

Das relações (2.52) e (2.54) segue que

$$\Delta_0\varphi(t_n) - K_0 + 2\pi\chi(M)\frac{e^{2\varphi(t_n)}}{\int_M e^{2\varphi(t_n)} dA_0} \to \Delta_0\varphi^* - K_0 + 2\pi\chi(M)\frac{e^{2\varphi^*}}{\int_M e^{2\varphi^*} dA_0} = 0$$

em $D'(M)$, isto é, φ^* é solução fraca de

$$\Delta_0 u - K_0 + 2\pi\chi(M)\frac{e^{2u}}{\int_M e^{2u} dA_0} = 0,$$

que é a equação variacional de F provinda do fato que sua solução é ponto crítico de F (veja equação (2.23)). De fato, por regularidade elíptica, $\varphi^* \in C^\infty(M)$, e então usando a fórmula conforme envolvendo a curvatura Gaussiana, segue que $e^{2\varphi^*}\sigma_0$ é uma métrica uniforme de M. Logo, usando a Formula de Gauss-Bonnet, φ^* é um ponto crítico de F. Porém como F é estritamente convexa, F possui um único ponto critico. Logo $\varphi^* = \varphi_\infty$, onde φ_∞ é o único mínimo global de F, que é equivalente a dizer que $e^{2\varphi_\infty}\sigma_0$ é a métrica uniforme que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano nas métricas conformes a σ_0 de área unitária (esta argumentação já foi feita no final da Seção 2.4).

Como $F(\varphi(t))$ é monótona decrescente em t, segue da continuidade de F em $W^1(M)'$ e da convergência $\varphi(t_n) \to \varphi_\infty$ em $W^1(M)'$ que $\lim_{t\to\infty} F(\varphi(t)) = F(\varphi_\infty)$. Disto e da convergência fraca (2.53) obtemos que $\varphi(t_n) \rightharpoonup \varphi_\infty$ em $W^2(M)'$ para toda sequência $t_n \to \infty$. Agora, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, fixando t_n e fazendo $t_m \to \infty$, obtemos $\langle \varphi(t_n), \varphi(t_m)\rangle \to \langle \varphi(t_n), \varphi_\infty\rangle$. Depois fazendo $t_n \to \infty$ obtemos $||\varphi(t_n)|| \to ||\varphi_\infty||$, que implica que

$$\varphi(t) \to \varphi_\infty,$$

fortemente em $W^2(M)'$ quando $t \to \infty$. A prova do teorema esta completa. □

2.6 Teorema de uniformização na esfera.

Pelo Teorema de Classificação de Superfícies Compactas orientadas, para finalizar a prova do Teorema 2.1, falta provar o caso $M = S^2$. Lembramos que a característica de Euler da esfera é dois. Seja σ_0 a métrica induzida de $\mathbb{R}^3$ pela inclusão, isto é, σ_0 é a restrição do produto interno em $\mathbb{R}^3$ aos vetores do espaço tangente a esfera. Para esta métrica, a curvatura Gaussiana é 1.

Neste caso, o teorema de uniformização diz que considerando métricas $\sigma = e^{2\varphi}\sigma_0$ com área $A_\varphi = A_0 = 4\pi$, existe uma única métrica uniforme (a menos de isometria na classe) que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano. Como σ_0 é uma métrica uniforme, para provar este teorema é suficiente mostrar que para métricas conformes a σ_0 sob a limitação $A_\varphi = 4\pi$, temos que $\log\det\Delta_\varphi$ é máximo se, e somente se, $(S^2, e^{2\varphi}\sigma_0)$ é isométrica a (S^2, σ_0).

Analisaremos o comportamento extremal do funcional $F(\varphi)$, definido em (2.11). Para ser mais preciso, observamos que substituindo $u = 2\varphi$ em F, obtemos que $\varphi = 0$ é mínimo de F se, e somente se,

$$\frac{1}{4}\int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu + \int_{S^2} u d\mu - \log\left(\int_{S^2} e^u d\mu\right) \geq 0 \tag{2.55}$$

para todo u, onde $d\mu = \dfrac{dA_0}{4\pi}$.

Logo, sob a condição

$$\int_{S^2} u d\mu = 0, \tag{2.56}$$

a relação (2.55) é equivalente a

$$G(u) = \frac{1}{4}\int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu - \log\left(\int_{S^2} e^u d\mu\right) \geq 0. \tag{2.57}$$

Para provar (2.57), basta mostrar a Proposição 2.5. Mas antes, precisamos da Desigualdade de Moser, que afirma que sujeito a condição (2.56) existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $G(u) \geq C$. (veja Teorema 2 em [17, pág.1078]).

Proposição 2.5. *Para cada $\varepsilon > 0$,*

$$G_\varepsilon(u) = \frac{1+\varepsilon}{4}\int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu - \log\left(\int_{S^2} e^u d\mu\right) \geq 0, \tag{2.58}$$

para toda $u \in W^1(S^2)'$.

Demonstração. Escolha uma sequencia minimizante $\{u_n\} \in C^\infty(S^2)'$ tal que

$$G_\varepsilon(u_n) \to \inf_{u\in W^1(S^2)'} G_\varepsilon(u) = \alpha.$$

Notamos que $\alpha \in \mathbb{R}$, pois pela Desigualdade de Moser

$$G_\varepsilon(u) \geq \frac{\varepsilon}{4}\int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu + G(u) \geq C.$$

Por densidade de $C^\infty(S^2)'$ em $W^1(S^2)'$ e definição de ínfimo, o limite existe. Logo $\{G_\varepsilon(u_n)\}_n$ é limitada em $\mathbb{R}$, isto é, existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $G_\varepsilon(u_n) \leq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Desigualdade de Moser, $\frac{\varepsilon}{4}\int_{S^2} |\nabla_0 u_n|^2 d\mu + C \leq G_\varepsilon(u_n) \leq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\int_{S^2} |\nabla_0 u_n|^2 d\mu \leq \frac{(A-C)4}{\varepsilon}.$$

Pela Desigualdade de Poincaré (Corolário 1.12), $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(S^2)$. Portanto, $\{u_n\}$ é limitada em $W^1(S^2)'$. Como na prova do Teorema 2.1, usando o argumento de compacidade, concluímos que passando a subsequencia $u_n \rightharpoonup \psi$ em $W^1(S^2)'$, $u_n \to \psi$ em $L^2(S^2)$ e em quase todo ponto. Logo pelo Lema de Fatou (veja [7])

$$\lim_{n\to\infty}\int_{S^2} |\nabla_0 u_n|^2 d\mu \geq \int_{S^2} |\nabla_0 \psi|^2 d\mu. \tag{2.59}$$

Pela Desigualdade de Moser novamente, $||e^{u_n}||_{L^1} \leq B$. Logo $|e^{u_n(x)}| \leq D$ em quase todo ponto, pois se $|e^{u_n(x)}| > n$ em quase todo ponto, então $||e^{u_n}||_{L^1(S^2)} \to +\infty$. Como

$\lim_{n\to\infty} e^{u_n(x)} = e^{\psi(x)}$ em quase todo ponto, segue do Teorema da Convergência Dominada (veja [7])

$$\int_{S^2} \lim_{n\to\infty} e^{u_n} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{S^2} e^{u_n} d\mu. \tag{2.60}$$

Combinado as relações (3.8) e (2.60) obtemos que $G_\varepsilon(\psi) \leq \alpha$. Por definição de ínfimo, $\alpha = G_\varepsilon(\psi)$, ou seja, ψ é mínimo global de $G_\varepsilon : W^1(S^2)' \to \mathbb{R}$.

Como ψ é mínimo de G_ε,

$$\frac{d}{dt} G_\varepsilon(\psi + tu)|_{t=0} = 0 \tag{2.61}$$

para toda $u \in C^\infty(S^2)'$. Logo a relação (2.61) é equivalente a

$$\frac{1+\varepsilon}{2} \int_{S^2} \langle \nabla_0 u, \nabla_0 \psi \rangle d\mu - \frac{1}{\int_{S^2} e^\psi d\mu} \int_{S^2} u e^\psi d\mu = 0. \tag{2.62}$$

Usando a Fórmula de Green

$$-\frac{1+\varepsilon}{2} \int_{S^2} (\Delta_0 u) \psi d\mu - \int_{S^2} \frac{e^\psi}{\int_{S^2} e^\psi d\mu} u d\mu = 0. \tag{2.63}$$

Seja $u \in C^\infty(S^2)$ e considere $\int_{S^2} u d\mu = a_u$. Daí aplicando a relação (2.63) a $u - a_u \in C^\infty(S^2)'$, obtemos

$$-\frac{1+\varepsilon}{2} \int_{S^2} (\Delta_0 u) \psi d\mu - \frac{1}{\int_{S^2} e^\psi d\mu} \int_{S^2} e^\psi u d\mu + \int_{S^2} u d\mu = 0 \tag{2.64}$$

para toda $u \in C^\infty(S^2)$. Pela definição do Laplaciano distribucional,

$$\left(-\frac{1+\varepsilon}{2} \Delta_0 \psi - \frac{e^\psi}{\int_{S^2} e^\psi d\mu} + 1, u \right) = 0 \tag{2.65}$$

para todo $u \in C^\infty(S^2)$. Por regularidade elíptica $\psi \in C^\infty(S^2)$.

Agora usamos o processo de simetrização de domínios euclidianos para obter propriedades de ψ. Para isso, seja g_{S^2} a métrica usual em S^2 e considere a carta local $T : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S^2$,

$$T(\theta, \phi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta). \tag{2.66}$$

Nesta carta a métrica usual é dada por

$$g_{S^2}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}.$$

Logo o elemento área é dado por $d\mu = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta d\phi = \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$.

Como $\int_{S^2} |\nabla_0 \psi|^2 d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\psi_\theta^2 + (\operatorname{sen}\theta)^{-2} \psi_\phi^2) \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$, segue que os resultados de simetrização em domínios (veja [17, pág. 1079]) se aplicam na esfera, e assim

$$\begin{aligned} \int_{S^2} |\nabla_0 \psi|^2 d\mu &\geq \int_{S^2} |\nabla_0 \psi^*|^2 d\mu \\ \int_{S^2} e^{\psi} d\mu &= \int_{S^2} e^{\psi^*} d\mu \\ \int_{S^2} \psi d\mu &= \int_{S^2} \psi^* d\mu, \end{aligned} \tag{2.67}$$

onde ψ^* é o rearranjamento decrescente simétrico de ψ, isto é, $\psi^* = (\psi \circ T)^* \circ T^{-1}$. Logo simetrização na esfera se reduz a simetrização em domínios. Assim

- ψ^* é radial com respeito a $N = (0,0,1)$, isto é,

  $$\psi^*(x) = \psi(||x - N||),$$

  pois por definição de rearranjamento simétrico no domínio $[0,\pi) \times [0,2\pi)$, $(\psi \circ T)^*$ é radial com respeito a $(0,0)$ e $T(0,0) = N$.

- ψ^* é monótona, pois por definição em domínios, $(\psi \circ T)^*$ é decrescente no domínio $(0,\pi) \times (0,2\pi)$.

- Pelas estimativas (2.67), obtemos que ψ^* é um mínimo global de $G_\varepsilon : W^1(S^2)' \to \mathbb{R}$, e além disso, ψ^* é monótona e axialmente simétrica no eixo $N - S$.

- Portanto, podemos supor que ψ é axialmente simétrica no eixo $N - S$ e monótona no ângulo azimutal θ.

Defina $\psi = \psi_1 + a$ com $a = \log\left(\int_{S^2} e^{\psi} d\mu\right)$. Como ψ é monótona em θ e axialmente simétrica no eixo $N - S$ então ψ_1 também é. Aplicando o Laplaciano em coordenadas esféricas (na carta (2.66)) à ψ, obtemos $\Delta_0 \psi_1 = \dfrac{1}{\text{sen}\theta} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} \psi_1 \right)$ para $\theta \in (0,\pi)$, pois ψ_1 não depende do ângulo longitudinal ϕ (veja equação (1.13)). Logo segue disto e (2.65) que

$$-\frac{1+\varepsilon}{2} \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_1 \right) = e^{\psi_1} - 1, \tag{2.68}$$

para $\theta \in (0,\pi)$. Como $\frac{2}{1+\varepsilon} \neq 2$, segue da relação (2.68) e do Lema 2.13 seguinte que ψ_1 é constante. Daí ψ é constante, e como $\int_{S^2} \psi d\mu = 0$ segue que $\psi = 0$. Portanto, $G_\varepsilon(u) \geq 0$ para toda $u \in W^1(S^2)'$. □

Lema 2.13. *Seja u uma solução monótona em $[0,\pi]$ de*

$$-\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{du}{d\theta} \right) = C(e^u - 1). \tag{2.69}$$

Se $C \neq 2$ então u é constante.

Demonstração. Diferenciando ambos os lados da equação (2.69) obtemos

$$-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{du}{d\theta}\right)\right) = Ce^u\frac{du}{d\theta}. \tag{2.70}$$

Substituindo a equação (2.69) em (2.70) obtemos

$$-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{du}{d\theta}\right)\right) = \left(-\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{du}{d\theta}\right)+C\right)\frac{du}{d\theta}. \tag{2.71}$$

Seja $v = \text{sen}\theta\dfrac{du}{d\theta}$. Então $v(0) = v(\pi) = 0$ e podemos supor que $v \geq 0$ pois u é monótona.

De (2.71) obtemos

$$-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{dv}{d\theta}\right) = -\frac{v}{\text{sen}^2\theta}\frac{dv}{d\theta}+\frac{Cv}{\text{sen}\theta}. \tag{2.72}$$

Logo

$$-\text{sen}^2\theta\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{dv}{d\theta}\right) = -v\frac{dv}{d\theta}+Cv\,\text{sen}\theta. \tag{2.73}$$

Agora integrando a equação (2.73) de 0 a π obtemos

$$-\int_0^\pi \text{sen}^2\theta\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{dv}{d\theta}\right)d\theta = C\int_0^\pi v\,\text{sen}\theta d\theta. \tag{2.74}$$

Integrando o lado esquerdo por partes duas vezes obtemos

$$2\int_0^\pi v\,\text{sen}\theta d\theta = C\int_0^\pi v\,\text{sen}\theta d\theta$$

ou

$$(C-2)\int_0^\pi v\,\text{sen}\theta d\theta = 0.$$

Se $C \neq 2$ então como $v \geq 0$, segue que $v\,\text{sen}\theta = 0$ em $(0,\pi)$. Logo, $v = 0$ em $[0,\pi]$, e consequentemente, u é constante. □

Como provamos (2.57), obtemos que $\varphi = 0$ é minimo de F, ou equivalentemente, sob a limitação das métricas de área constante 4π obtemos que σ_0 maximiza o determinante regularizado do Laplaciano. Agora devemos verificar quando a igualdade é satisfeita em (2.57), pois desta forma obteremos a unicidade do Teorema de uniformização na esfera. Notemos que $u = 0$ e a família de métricas isométricas obtidas pela ação do grupo de Mobius em S^2 sob σ_0, isto é, métricas da forma $\sigma = e^u\sigma_0$, onde $u = 2\log|\tau'| - 2\int_{S^2}\log|\tau'|d\mu$, nos fornecem a igualdade em (2.57). De fato, como uma transformação de Mobius $\tau : S^2 \to S^2$ é um difeomorfismo, segue que o pullback de τ por σ_0 fornece uma métrica isométrica a σ_0. Vale a pena lembrar que o pullback de τ por σ_0 é definido como $\tau^*(\sigma_0) = |\tau'|^2\sigma_0$, onde $|\tau'|$ é o Jacobiano de τ. Do Corolário 1.7 e como $\det\Delta_\sigma$ é dado puramente em função do espectro de (M,σ), temos que $\log\det\Delta_\sigma$ e a Área(σ) são invariantes espectrais. Logo pela expressão (2.12), $u = 2\log|\tau'| - 2\int_{S^2}\log|\tau'|\,d\mu$ minimiza F, pois $e^u\sigma_0$ é isométrica a σ_0 via τ, e assim $u = 2\log|\tau'| - 2\int_{S^2}\log|\tau'|d\mu$ dá igualdade em (2.57).

Devemos verificar que $u = 0$ e $u = 2\log|\tau^{'}| - 2\int_{S^2}\log|\tau'|d\mu$ são as únicas funções que nos fornecem igualdade em (2.57). De fato, se $G(\psi) = 0$ então $\psi \in W^1(S^2)'$ é mínimo de G. Daí ψ satisfaz a equação variacional

$$-\frac{\Delta_0\psi}{2} + 1 - \frac{e^{\psi}}{\int_{S^2} e^{\psi}d\mu} = 0. \tag{2.75}$$

Fazendo $\varphi = \frac{\psi}{2}$, então

$$-\Delta_0\varphi + 1 - \frac{e^{2\varphi}}{\int_{S^2} e^{2\varphi}d\mu} = 0.$$

Daí por regularidade elíptica $\varphi \in C^{\infty}(S^2)'$ e usando a fórmula conforme entre curvaturas, obtemos $K_{\varphi} =$ constante. Portanto, $\sigma = e^{2\varphi}\sigma_0$ é uma métrica uniforme. Mas como σ_0 é a única métrica de curvatura Gaussiana constante em S^2, a menos de isometria (veja Teorema 4.1 de [5, pág.181]), segue que $\varphi = \log|\tau'| + \beta$, pois $(S^2, |\tau'|^2\sigma_0)$ é isométrica a (S^2, σ_0). Além disso, como o valor médio de φ é zero, segue que $\beta = -\int_{S^2}\log|\tau'|d\mu$. Isto finaliza a prova do Teorema de uniformização na esfera.

2.6.1 Aplicação do Teorema de uniformização na esfera

Corolário 2.2. *Para todas as métricas σ conformes a σ_0 em S^2 de área 4π,*

$$\det\Delta_{\sigma} \leq \exp\left(\frac{1}{2} - 4\zeta_R'(-1)\right). \tag{2.76}$$

A igualdade vale se, e somente se, $\sigma = \sigma_0$, a métrica usual em S^2, e onde ζ_R é a Função Zeta de Riemann.

Demonstração. Pelo Teorema de uniformização na esfera obtemos

$$\det\Delta_{\sigma} \leq \det\Delta_{\sigma_0}, \tag{2.77}$$

para toda métrica σ conforme a σ_0. Portanto, basta mostrar que

$$\det\Delta_{\sigma_0} = \exp\left(\frac{1}{2} - 4\zeta_R'(-1)\right). \tag{2.78}$$

É conhecido que os autovalores de Δ_{σ_0} são os números $n(n+1)$ com multiplicidade $2n+1$ para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Logo para calcular o determinante de Δ_{σ_0} é suficiente derivar a função zeta espectral em $s = 0$,

$$\zeta(s, \Delta_{\sigma_0}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n(n+1))^s}. \tag{2.79}$$

Como $\zeta(s,\Delta_{\sigma_0})$ é analítica para $\mathrm{Re}(s)>1$, obtemos que $\dfrac{d}{ds}\zeta(s,\Delta_{\sigma_0})$ é

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{n\geq 1}(2n+1)n^{-s}(\log n)(n+1)^{-s} - \sum_{n\geq 1}(2n+1)n^{-s}(n+1)^{-s}\log(n+1)\\
&= -\sum_{n\geq 1}(2n+1)n^{-s}\log n\sum_{j\geq 0}\binom{-s}{j}n^{-s-j} - \sum_{n\geq 2}(2(n-1)+1)(n-1)^{-s}n^{-s}\log n\\
&= -\sum_{\substack{j\geq 0\\ n\geq 1}}\binom{-s}{j}(2n^{-2s-j+1}\log n + n^{-2s-j}\log n) - \sum_{\substack{j\geq 0\\ n\geq 2}}\binom{-s}{j}(2n-1)n^{-2s-j}(-1)^j\log n\\
&= \sum_{j\geq 0}\binom{-s}{j}(2\zeta_R'(2s+j-1)+\zeta_R'(2s+j)) + \sum_{j\geq 0}\binom{-s}{j}(-1)^j(2\zeta_R'(2s+j-1)-\zeta_R'(2s+j))\\
&= \sum_{j\geq 0}\binom{-s}{j}\left(2\left[\zeta_R'(2s+j-1)+(-1)^j\zeta_R'(2s+j-1)\right]+\zeta_R'(2s+j)+(-1)^{j+1}\zeta_R'(2s+j)\right).
\end{aligned}$$

Como a Função Zeta de Riemann é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com pólo simples em $s=1$, obtemos que

- para $j=2$ em $\zeta_R'(2s+j-1)$ obtemos um pólo simples em $s=0$.
- para $j=1$ em $\zeta_R'(2s+j)$ obtemos um pólo simples em $s=0$.

Logo, temos que estudar estes casos a parte.

Primeiramente, expandimos $\dbinom{-s}{j}$ em torno de $s=0$ para $j>0$. De fato, fazendo a expansão em série de Taylor de $\dfrac{\Gamma(s+j)}{\Gamma(j+1)}$ em torno de $s=0$, obtemos

$$\frac{\Gamma(s+j)}{\Gamma(j+1)} = \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+1)} + \frac{\Gamma'(j)}{\Gamma(j+1)}s + O(s^2) = \frac{1}{j} + \frac{\psi(j)}{j}s + O(s^2), \tag{2.80}$$

onde $\psi(j) := \frac{\Gamma'(j)}{\Gamma(j)}$. Como $\frac{1}{\Gamma(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k = s + \gamma s^2 + O(s^3)$ (veja equação 5.7.1 de [21, pág.139]), onde γ é a constante de Euler, obtemos

$$\frac{\Gamma(s+j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(s)} = \frac{s}{j} + \left(\frac{\gamma+\psi(j)}{j}\right)s^2 + O(s^3). \tag{2.81}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\binom{-s}{j} &:= (-1)^j\frac{\Gamma(s+j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(s)}\\
&= (-1)^j\frac{s}{j} + (-1)^j\left(\frac{\psi(j)\Gamma(j)+\Gamma(j)\gamma}{\Gamma(j+1)}\right)s^2 + O(s^3).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\zeta_R'(2s+1) = -\frac{1}{4s^2} + a_0 + O(s).$$

Daí para $j = 2$

$$\binom{-s}{j}\zeta_R'(2s+j-1) \;=\; (-1)\frac{1}{8s} + (-1)\frac{1}{4}\left(\frac{\psi(2)\Gamma(2)+\Gamma(2)\gamma}{\Gamma(3)}\right) + O(s). \quad (2.82)$$

Como $\psi(j) = \psi(j-1) + \frac{1}{j-1} \Rightarrow \psi(2) = \psi(1) + 1 = -\gamma + 1$. Portanto,

$$\binom{-s}{2}\zeta_R'(2s+1) = -\frac{1}{8s} - \frac{1}{8} + O(s). \quad (2.83)$$

Para $j = 1$,

$$\begin{aligned}\binom{-s}{j}\zeta_R'(2s+j) \;&=\; \left[(-1)\left(\frac{\psi(1)\Gamma(1)+\Gamma(1)\gamma}{\Gamma(2)}\right)s^2 + (-1)\frac{s}{1} + O(s^3)\right] && (2.84)\\ &\quad (-\frac{1}{4s^2} + a_0 + O(s)) = \frac{1}{4s} + O(s). && (2.85)\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\zeta(s,\Delta_{\sigma_0}) \;&=\; 2\binom{-s}{1}\zeta_R'(2s+1) + 2\binom{-s}{2}(2\zeta_R'(2s+1))\\ &+\; \sum_{\substack{j=0\\ j>2}}\binom{-s}{j}(2\left[\zeta_R'(2s+j-1) + (-1)^j\zeta_R'(2s+j-1)\right]\\ &+\; \zeta_R'(2s+j) + (-1)^{j+1}\zeta_R'(2s+j))\\ &=\; 2\left(\frac{1}{4s} + O(s)\right) + 4\left(-\frac{1}{8s} - \frac{1}{8} + O(s)\right)\\ &+\; \sum_{\substack{j=0\\ j>2}}\binom{-s}{j}(2\left[\zeta_R'(2s+j-1) + (-1)^j\zeta_R'(2s+j-1)\right]\\ &+\; \zeta_R'(2s+j) + (-1)^{j+1}\zeta_R'(2s+j)).\end{aligned}$$

Para $s = 0 \Rightarrow j = 0$. Assim,

$$\frac{d}{ds}\zeta(s,\Delta_{\sigma_0})|_{s=0} = -\frac{1}{2} + 4\zeta_R'(-1). \quad (2.86)$$

Portanto, $\det\Delta_{\sigma_0} = \exp(\frac{1}{2} - 4\zeta_R'(-1))$. □

Capítulo 3

Extremais do determinante do Laplaciano em superfícies com bordo

Neste capítulo estudaremos as propriedades extremais do determinante regularizado do Laplaciano para superfícies compactas com bordo. Demonstraremos o Teorema 0.1-b) e c) da Introdução.

3.1 Extremais do determinante do Laplaciano

Tornemos mais precisa esta discussão. Fixemos uma métrica σ_0 em uma superfície compacta M com bordo $\partial M \neq \varnothing$.

Definição 3.1. *Dizemos que σ é uma métrica uniforme de M, se satisfaz um dos seguintes itens:*

I) (M, σ) possui curvatura Gaussiana constante e a curvatura geodésica do ∂M é nula.

II) (M, σ) possui curvatura Gaussiana nula e a curvatura geodésica do ∂M é constante.

Dizemos que a métrica uniforme é do tipo I ou II, conforme qual caso seja satisfeito.

Além disso, consideramos duas condições na classe conforme $[\sigma_0]$, a saber

$$\int_{\partial M} k_\varphi \, ds \geq 0 \quad \text{ou} \quad \int_M K_\varphi \, dA \leq 2\pi\chi(M) \tag{CI}$$

e

$$\int_{\partial M} k_\varphi \, ds \geq 2\pi\chi(M) \quad \text{ou} \quad \int_M K_\varphi \, dA \leq 0, \tag{CII}$$

onde k_φ é a curvatura geodésica, K_φ é a curvatura Gaussiana, ds é a medida Riemanniana do ∂M e dA é a medida Riemanniana de M associado a métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$. A equivalência entre as desigualdades envolvendo curvatura geodésica e Gaussiana segue da Fórmula de Gauss-Bonnet.

Finamente, sob essas condições reescrevemos os Teoremas 0.1-b) e c) como:

Teorema 3.1. *Em uma classe conforme de métricas* $[\sigma_0]$, *sob a condição área constante e (CI), o máximo do determinante regularizado do Laplaciano é atingido em uma métrica uniforme do tipo I. Além disso, essa métrica é única, a menos de isometria na classe.*

Teorema 3.2. *Em uma classe conforme de métricas* $[\sigma_0]$, *sob a condição comprimento do bordo constante e (CII), o máximo do determinante regularizado do Laplaciano é atingido em uma métrica uniforme do tipo II. Além disso, essa métrica é única, a menos de isometria na classe.*

As condições área constante e comprimento do bordo constante significam, $\int_M dA =$ cte e $\int_{\partial M} ds =$ cte, para toda métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$.

3.2 Fórmula para $\log\det\Delta_\varphi$ em superfícies com bordo

Pela Decomposição de Sturm-Liouville para o problema de autovalor de Dirichlet (Teorema 1.14), o espectro de Dirichlet de (M, g) é

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \to +\infty.$$

Então da mesma forma que na Seção 2.1, definimos a função zeta espectral por

$$\zeta(s, \Delta_g) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{-s}$$

para $\mathrm{Re}(s) > \frac{\dim M}{2}$. Como a expansão assintótica do traço do operador do calor para superfícies com bordo tem expressão similar ao caso sem bordo (veja Teoremas 1.9 e 1.15), segue da mesma forma que na Seção 2.1, que $\zeta(s, \Delta_g)$ será uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ que é analítica em $s = 0$. Logo o determinante regularizado do Laplaciano é definido por

$$\det\Delta_g = \exp\left(-\frac{d}{ds}\zeta(s, \Delta_g)\right)|_{s=0}.$$

Realizando um argumento similar ao da Seção 2.2 (veja [1]), segue que obtemos a equação análoga à equação (2.10), a saber

$$\begin{aligned}\log\det\Delta_\varphi = & -\frac{1}{6\pi}\left(\frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2\, dA_0 + \int_M K_0\,\varphi\, dA_0 + \int_{\partial M} k_0\,\varphi\, ds_0\right)\\ & -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial M} k\, ds + C,\end{aligned} \tag{3.1}$$

para toda métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$, onde C é uma constante independente de φ, k é a curvatura geodésica associada a métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$ e K_0, k_0 são as curvaturas Gaussianas e geodésicas da métrica σ_0, respectivamente. Fazendo $\varphi = 0$ na equação (3.1), obtemos

$$C = \log\det\Delta_0 + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial M} k_0 ds_0. \tag{3.2}$$

Como $ds = e^\varphi ds_0$, obtemos da fórmula conforme do Corolário 1.9 que

$$\int_{\partial M} k\ ds = \int_{\partial M} \partial_n\varphi\ ds_0 + \int_{\partial M} k_0\ ds_0. \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) em (3.1) obtemos

$$\begin{aligned}\log\det\Delta_\varphi = &- \frac{1}{6\pi}\left(\frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2\ dA_0 + \int_M K_0\varphi\, dA_0 + \int_{\partial M} k_0\varphi\, ds_0\right)\\ &- \frac{1}{4\pi}\int_{\partial M}\partial_n\varphi\, ds_0 + \log\det\Delta_0,\end{aligned} \tag{3.4}$$

para toda métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$.

3.3 Funcional relacionado à $\log\det\Delta_\varphi$: área constante

O objetivo desta seção é definir um funcional F_1 que sob a condição área fixada em uma classe conforme $[\sigma_0]$, maximiza o $\log\det\Delta_\varphi$ em $[\sigma_0]$ é equivalente a minimizar F_1.

No caso de área fixada em $[\sigma_0]$, admitimos que

$$k_0 = 0. \tag{3.5}$$

De fato, se k_0 não é nula, qualquer solução $\varphi \in C^\infty(M)$ de

$$\partial_n\varphi = -k_0 \quad \text{em} \quad \partial M, \tag{3.6}$$

fornece uma métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$ de curvatura geodésica $k_\varphi = 0$, em vista da fórmula conforme envolvendo as curvaturas geodésicas (veja Corolário 1.9). Logo, trocamos σ_0 por $e^{2\varphi}\sigma_0$, que ainda esta na classe conforme de σ_0. Usando uma partição da unidade, vemos que é suficiente resolver a equação (3.6) localmente em ∂M. Tomando uma carta coordenada preservando a direção normal, segue que representamos φ como $\varphi(x, y) = \varphi(x, 0) - k_0(x, 0)y$, que é uma solução localmente suave da equação (3.6).

Observação 3.1. *$\int_{\partial M} k_\varphi\, ds$ é desprezível durante o processo de maximização de $\log\det\Delta_\varphi$ em $[\sigma_0]$, pois admitimos que*

$$\int_{\partial M} k_\varphi ds = constante \tag{3.7}$$

em toda métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$.

Demonstração. Tomemos $U := \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| \leq 1\}$ com a métrica euclidiana σ_0. Aqui usaremos a representação do número complexo z em coordenadas polares, isto é, $z = re^{i\theta}$, onde $r = |z|$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Considere a função radial

$$\varphi(r, \theta) = -\log r,$$

onde $0 < r \leq 1$. No que segue dA_0 denota a fórmula volume nas coordenadas r e θ, enquanto ds_0 denota a forma volume em $\partial U = S^1$ na coordenada θ.

Notemos que $\partial_n \varphi = -\frac{1}{r}$. Portanto,

$$\int_{\partial U} \partial_n \varphi \, ds_0 = -\frac{1}{r} \int_{\partial U} ds_0 = -\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} ds_0 = -\frac{1}{r} 2\pi \to -\infty \tag{3.8}$$

quando $r \to 0^+$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U} k_0 \, \varphi \, ds_0 &= \int_{\partial U} -\log r \, ds_0 = -\log r \int_{\partial U} ds_0 = -2\pi \log r \\
\int_U |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0 &= -\int_U \varphi \, \Delta_0 \varphi \, dA_0 + \int_{\partial U} \varphi \, \partial_n \varphi \, ds_0 \\
&= \int_{\partial U} \varphi \, \partial_n \varphi \, ds_0 = 2\pi \frac{\log r}{r},
\end{aligned}$$

pois da expressão do Laplaciano em coordenadas polares,

$$\Delta_0 \varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Fazendo $r \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
\log \det \Delta_\varphi &= -\frac{1}{6\pi} \left(\frac{1}{2} 2\pi \frac{\log r}{r} - 2\pi \log r \right) \\
&\quad -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \partial_n \varphi \, ds_0 + \log \det \Delta_0 \\
&= -\frac{1}{6\pi} \left(2\pi \log r \left(\frac{1}{2r} - 1 \right) \right) \\
&\quad -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \partial_n \varphi \, ds_0 + \log \det \Delta_0 \\
&= \frac{1}{6\pi} \left(2\pi \log r \left(-\frac{1}{2r} + 1 \right) \right) \\
&\quad -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \partial_n \varphi \, ds_0 + \log \det \Delta_0 \to +\infty,
\end{aligned}$$

pois cada termo da última expressão converge para $+\infty$. Além disso, para $r \to 0^+$

$$\int_{\partial U} k_\varphi \, ds = \int_{\partial U} k_0 \, ds_0 + \int_{\partial U} \partial_n \varphi \, ds_0 = 2\pi + \int_{\partial U} \partial_n \varphi \, ds_0 \to -\infty,$$

pois $ds = e^{\varphi} ds_0$ e $k_\varphi = e^{-\varphi}(k_0 + \partial_n \varphi)$.

Portanto, $\log\det\Delta_\varphi$ não será limitado superiormente e $\int_{\partial U} k_\varphi\, ds$ não será constante na classe conforme $[\sigma_0]$. □

Substituindo as condições (3.5) e (3.7) na fórmula (3.1), naturalmente o funcional adequado a ser definido é

$$F_1(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0\, \varphi\, dA_0 - \pi\chi(M)\log\left(\int_M e^{2\varphi}\, dA_0\right),$$

que é idêntico ao funcional (2.11). A condição área unitária em $[\sigma_0]$ pode ser vista como $\int_M \varphi\, dA_0 = 0$, conforme a Proposição 2.3.

Da equação (3.1) obtemos que

$$F_1(\varphi) = -6\pi \log\det\Delta_\varphi - \pi\chi(M)\log A_\varphi, \tag{3.9}$$

donde concluímos que minimizar $F_1(\varphi)$ é equivalente a maximizar $\log\det\Delta_\varphi$ para métricas $e^{2\varphi}\sigma_0$ de área constante $A_\varphi = 1$.

3.3.1 Prova do Teorema 3.1 para o caso $\chi(M) \leq 0$

Lembramos que sujeito a condição $\int_M \varphi\, dA_0 = 0$, segue da mesma forma que na Seção 2.4, que usando a Desigualdade de Jensen (Proposição 2.4), obtemos $\int_M e^{2\varphi} dA_0 \geq 1$. Do Lema 2.4, obtemos que F_1 é estritamente convexa para funções de valor médio nulo.

Para provar o Teorema 3.1 no caso $\chi(M) \leq 0$, sob as hipóteses impostas, é suficiente mostrar a existência de uma função minimizante suave ψ para F_1 no espaço H das funções de valor médio nulo sob a condição do bordo de Neumann, $\partial_n\varphi|_{\partial M} = 0$, e mostrar que $e^{2\psi}\sigma_0$ é uma métrica uniforme do tipo I. Pois neste espaço H, obtemos da fórmula conforme do Corolário 1.9, que $k_\varphi \equiv 0$ em ∂M, e portanto, $\log\det\Delta_\psi$ é máximo na classe conforme $[\sigma_0]$ de métricas de área unitária sob a condição (CI). A unicidade da função minimizante ψ, decorre da convexidade estrita de F_1 no espaço H, pois se uma função estritamente convexa possui mínimo então esse mínimo é único e global.

Prova do Teorema 3.1: Da mesma forma que na prova do Teorema 2.1, considere uma sequência minimizante $\{\varphi_n\} \in C^\infty(M)'$ sob a condição do bordo de Neumann, tal que

$$F_1(\varphi_n) \to \inf_H F_1(\varphi),$$

onde $H = \{\varphi \in W^1(M)' : \partial_n\varphi = 0\}$ e $W^1(M)'$ é o espaço de Sobolev das funções de valor médio nulo.

Como a desigualdade de Poincaré é válida em H (veja Corolário 1.12), segue por repetindo a argumentação da prova do Teorema 2.1, que existe $\psi \in H$, mínimo de $F_1 : H \to \mathbb{R}$. Além disso, é único pela convexidade estrita de F_1.

Logo, definindo $g(t) = F_1(\psi + t\varphi)$, com $\varphi \in C^\infty(M)'$ sob a condição de Neumann, segue que $t = 0$ é mínimo global de g. Usando a Fórmula de Green no caso com bordo, temos que

$$0 = -\int_M (\Delta_0\varphi)\,\psi\,dA_0 + \int_M K_0\,\varphi\,dA_0 - \frac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi}\,dA_0}\int_M e^{2\psi}\,\varphi\,dA_0. \tag{3.10}$$

Dada $\varphi \in C^\infty(M)$ com condição do bordo de Neumann ($\partial_n\varphi = 0$), sob a normalização $\varphi^* = \varphi - a_\varphi$, onde $a_\varphi = \int_M \varphi dA_0$, recuperamos uma função de valor médio nulo, isto é, $\int_M \varphi^* dA_0 = 0$, sob a condição de bordo de Neumann. Aplicando φ^* em (3.10), segue que (3.10) é válida para $\varphi \in C^\infty(M)$ sob a condição de Neumann.

Usando a definição do Laplaciano distribucional, segue que

$$0 = (-\Delta_0\psi, \varphi) + (K_0, \varphi) + \left(\frac{-2\pi\chi(M)e^{2\psi}}{\int_M e^{2\psi}dA_0}, \varphi\right),$$

para qualquer $\varphi \in C^\infty(M)$ com $\partial_n\varphi = 0$. Logo $-\Delta_0\psi + K_0 - \dfrac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi}dA_0}e^{2\psi} = 0$, no sentido distribucional. Usando o mesmo argumento de regularidade elíptica da prova do Teorema 2.1, segue que $\psi \in C^\infty(M)'$ com $\partial_n\psi = 0$.

Logo

$$K_\psi = \frac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi}dA_0} = \text{cte} \leq 0 \qquad \text{e} \qquad k_\psi = 0,$$

pelas fórmulas conformes entre curvaturas Gaussianas e geodésicas (veja Proposição 1.5 e Corolário 1.9, respectivamente), isto é, $e^{2\psi}\sigma_0$ é uma métrica uniforme do tipo I.

Além disso, para $\varphi \in C^\infty(M)$, segue que $\log\det\Delta_\varphi$ sujeito a condição $A_\varphi = 1$ e $\int_{\partial M} k_\varphi\,ds = 0$, admite único máximo global na métrica uniforme do tipo I, $e^{2\psi}\sigma_0$, pois F sujeito a condição $\int_M \varphi\,dA_0 = 0$ e $\partial_n\varphi = 0$, admite único mínimo global em ψ. Isto finaliza o Teorema 3.1 no caso $\chi(M) \leq 0$. □

3.4 Funcional relacionado à $\log\det\Delta_\varphi$: comprimento do bordo constante

Primeiramente, fixamos o comprimento do bordo em $[\sigma_0]$. Então podemos assumir que σ_0 é plana, isto é, $K_0 = 0$. Pois caso contrário, qualquer solução suave φ de $-\Delta_0\varphi + K_0 = 0$ (tal solução existe, veja Proposição 1.7 de [30, p.112]) fornece, em vista da Proposição 1.5, uma métrica $e^{2\varphi}\sigma_0$ cuja curvatura $K_\varphi = 0$. Assim, trocamos σ_0 por $e^{2\varphi}\sigma_0$, que ainda está na classe conforme $[\sigma_0]$.

Pela Observação 3.1 e assumindo $K_0 = 0$, definimos o funcional

$$F_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 + \int_{\partial M} k_0\varphi ds_0 - 2\pi\chi(M)\log\left(\int_{\partial M} e^{\varphi} ds_0\right), \tag{3.11}$$

donde usando a Fórmula de Gauss-Bonnet no caso de superfícies compactas com bordo,

$$\int_M K\,dA + \int_{\partial M} k\,ds = 2\pi\chi(M), \tag{3.12}$$

segue que F é invariante por translações, isto é,

$$F(\varphi + a) = F(\varphi),$$

onde a é uma função constante.

Proposição 3.1 (Princípio de Dirichlet)**.** $\begin{cases} \Delta_0 u = 0 \\ u = \varphi \quad em \quad \partial M \end{cases} \Leftrightarrow u \in W^1(M)$ *minimiza a integral de Dirichlet,* $E(v) = \int_M |\nabla_0 v|^2 dA_0$*, para todo* $v \in W^1(M)$*, tal que* $v = \varphi$ *em* ∂M*.*

Demonstração. Se $\Delta_0 u = 0$ e $u \in W^1(M)$, então $\int_M (u - v)\Delta_0 u\, dA_0 = 0$ para todo $v \in W^1(M)$ com $v = \varphi$ em ∂M. Utilizando a Fórmula de Green no caso com bordo, segue do fato que $u - v = 0$ em ∂M, que $0 = \int_M (u - v)\Delta_0 u\, dA_0 = \int_M \langle \nabla_0(u - v), \nabla_0 u\rangle_0\, dA_0$. Portanto, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz $\frac{1}{2}||\nabla_0 u||^2_{L^2(M)} \leq \frac{1}{2}||\nabla_0 v||^2_{L^2(M)}$, ou seja, $E(u) \leq E(v)$, para todo $v \in W^1(M)$ com $v = \varphi$ em ∂M.

Reciprocamente, seja $u \in W^1(M)$ tal que $u = \varphi$ em ∂M e u minimiza E. Para qualquer $v \in C^\infty(M)$, tal que $v|_{\partial M} = 0$, defina $g(t) = E(u + tv)$ em $\mathbb{R}$. Logo $t = 0$ é mínimo de g, donde $\frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = 0$. Como

$$g(t) = \int_M |\nabla_0 u|^2 dA_0 + 2t \int_M \langle \nabla_0 u, \nabla_0 v\rangle_0\, dA_0 + t^2 \int_M |\nabla_0 v|^2 dA_0,$$

$0 = g'(0) = \int_M \langle \nabla_0 u, \nabla_0 v\rangle_0\, dA_0 = -\int_M v\Delta_0 u\, dA_0 + \int_{\partial M} v\partial_n u\, ds_0 = -\int_M v\Delta_0 u\, dA_0$. Como a medida Riemanniana $\mu(\partial M) = 0$, segue que $\Delta_0 u = 0$. □

Segue do Princípio de Dirichlet, que sob a condição do bordo de Dirichlet, ou seja, $\varphi|_{\partial M} = f$ para toda $\varphi \in W^1(M)$, F_2 é minimizada por funções harmônicas.

Usando o mesmo raciocínio da Proposição 2.3, segue que podemos considerar a condição comprimento do bordo unitário, isto é, $l_\varphi(\partial M) := \int_{\partial M} ds = 1$ para toda métrica $= e^{2\varphi}\sigma_0$, como sendo $\int_{\partial M} \varphi\, ds_0 = 0$, onde ds e ds_0 são os elementos de comprimento de arco em ∂M associado as métricas $e^{2\varphi}\sigma_0$ e σ_0.

Notação 3.1. *Se* φ *satisfaz* $\int_{\partial M} \varphi\, ds_0 = 0$*, dizemos que* φ *possui valor médio nulo no bordo. Se* φ *pertence à um espaço de funções* H *e possui valor médio nulo no bordo, escrevemos* $\varphi \in H'$*.*

Agora se φ é harmônica, da Proposição 1.5 temos $e^{2\varphi}\sigma_0$ plana. Segue da Fórmula de Gauss-Bonnet 3.12 que

$$\int_{\partial M} k_\varphi\, ds = 2\pi\chi(M).$$

Consequentemente da equação (3.1),

$$F_2(\varphi) = -6\pi \log\det \Delta_\varphi - 2\pi\chi(M)\log l_\varphi(\partial M), \tag{3.13}$$

e portanto, minimizar $F_2(\varphi)$ sob as harmônicas de valor médio nulo no bordo, é equivalente a maximizar $\log\det\Delta_\varphi$ nas métricas $e^{2\varphi}\sigma_0$ que possuem comprimento do bordo unitário e satisfazem (CII).

3.4.1 Prova do Teorema 3.2 para o caso $\chi(M) \leq 0$

Nesta seção, trabalharemos com algumas normas de espaços de Sobolev em M e em ∂M. Aqui $|\cdot|_t$ denota a t-norma do espaço de Sobolev $W^t(\partial M)$ e $||\cdot||_t$ denota a t-norma do espaço de Sobolev $W^t(M)$, para $t \geq 0$. Denotaremos os subespaços das funções de valor médio nulo destes espaços de Sobolev por $W^t(\partial M)'$ e $W^t(M)'$, como anteriormente.

Resolvemos este teorema sob a limitação do comprimento do bordo normalizado por 1. Da mesma forma que na Seção 2.4, usando a desigualdade de Jensen, segue que $\int_{\partial M} e^\varphi \, ds_0 \geq 1$ para todo fator conforme e^φ. Além disso, para funções ψ no domínio de F_2 com valor médio nulo no bordo, F_2 será estritamente convexa (A prova deste fato é o Lema 2.4).

Como vimos na seção anterior, mantendo as funções fixadas no bordo, obtemos que F_2 é minimizada por funções harmônicas. Isto sugere que procuremos o mínimo de F_2 no conjunto das funções harmônicas. Logo, usando a Fórmula de Green, podemos escrever F_2 em função apenas de ∂M, para φ harmônica como

$$F_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\partial M} (\partial_n\varphi)\varphi \, ds_0 + \int_{\partial M} k_0\varphi \, ds_0 - 2\pi\chi(M)\log\left(\int_{\partial M} e^\varphi \, ds_0\right). \tag{3.14}$$

Seja T o operador linear nas funções do ∂M definido por $T\varphi = \partial_n\varphi$, que é obtido estendendo φ de forma única em M como uma função harmônica e tomando a derivada normal da função estendida. O primeiro objetivo é definir T em um espaço de funções de modo que seja auto-adjunto.

Da teoria de espaços de Sobolev é conhecido que a função traço natural $\tau\varphi = \varphi|_{\partial M}$ é um operador linear, contínuo e sobrejetivo

$$\tau : W^1(M) \to W^{1/2}(\partial M),$$

veja [28, p. 27]. Como o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_0\varphi = 0 \\ \varphi|_{\partial M} = f \in W^{1/2}(\partial M) \end{cases}, \tag{3.15}$$

possui uma única solução, segue que restringindo o domínio de τ para funções em $W^1(M)$

e harmônicas, e denotando este conjunto por $W^1(M)'' = \{\varphi \in W^1(M) : \Delta_0\varphi = 0\}$, obtemos que

$$\tau : W^1(M)'' \to W^{1/2}(\partial M) \tag{3.16}$$

é uma bijeção contínua.

Lema 3.1. *τ^{-1} é contínua.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema do Gráfico Fechado que basta provar que τ^{-1} é fechada. De fato, seja $\{\varphi_n\} \in W^{1/2}(\partial M)$ uma sequencia tal que $\varphi_n \to \varphi$ em $W^{1/2}(\partial M)$ e $\tau^{-1}\varphi_n \to \psi$ em $W^1(M)''$. Como τ é contínua, segue que $\varphi_n \to \tau\psi$ em $W^{1/2}(\partial M)$. Assim, $\tau\psi = \varphi$, ou seja, $\tau^{-1}(\varphi) = \psi$. □

Portanto, τ é um homeomorfismo linear, isto é, existem constantes $c, d > 0$ tais que

$$|\varphi|_{1/2} \leq c||\varphi||_1 \quad \text{e} \quad ||\varphi||_1 \leq d|\varphi|_{1/2}$$

para qualquer $\varphi \in W^1(M)''$. Desta forma, $D(\varphi,\psi) = \int_M \langle\nabla_0\varphi, \nabla_0\psi\rangle\, dA_0$ é uma forma quadrática positiva definida em $W^{1/2}(\partial M)'$, pois a integral a direita é bem definida pelo fato de φ e ψ serem únicas extensões harmônicas em $W^1(M)'$ de φ e ψ.

No que segue usaremos a Extensão de Friedrichs para obter o espaço no qual T será auto-adjunto. De fato, defina $L : W^{3/2}(\partial M)' \subset L^2(\partial M)' \to L^2(\partial M)'$ por meio de D, isto é,

$$(L\varphi, \psi)_0 = D(\varphi, \psi),$$

para toda $\varphi, \psi \in W^{3/2}(\partial M)'$. Segue da definição de D que L é um operador simétrico densamente definido e positivo, e além disso, pela desigualdade de Poincaré (veja Corolário 1.12) e pelo fato de τ ser um homeomorfismo, $(L\varphi,\varphi)_0 = ||\nabla_0\varphi||_0^2 \geq c|\varphi|_{1/2}^2 > c|\varphi|_0^2$ para alguma constante c e todo $\varphi \in W^{3/2}(\partial M)'$. Redefinindo L por $\dfrac{1}{c}L$, podemos supor que $c = 1$.

Definimos em $W^{3/2}(\partial M)'$ um novo produto escalar por $(\varphi,\psi)_L = (\varphi, L\psi)_0$, com norma $|\varphi|_L = (\varphi,\varphi)_L^{1/2}$. Em particular,

$$|\varphi|_L \geq |\varphi|_0. \tag{3.17}$$

Denote por $W_L^{3/2}$ o completamento de $W^{3/2}(\partial M)'$ com respeito a norma L, isto é, $W_L^{3/2}$ consiste das classes de equivalência de sequencias de Cauchy na norma L, onde duas sequencias de Cauchy são equivalentes se possuem o mesmo limite na norma L.

Sendo assim, pela relação (3.17) uma sequencia de Cauchy na norma L é também uma sequência de Cauchy na norma de $L^2(\partial M)'$. Como $L^2(\partial M)'$ é completo, tal sequencia de Cauchy possui limite em $L^2(\partial M)'$. Portanto, temos uma aplicação natural de $W_L^{3/2}$ em $L^2(\partial M)'$.

Lema 3.2. *A aplicação natural de $W_L^{3/2}$ em $L^2(\partial M)'$ é injetora.*

Demonstração. Seja $\{\varphi_n\}$ uma sequencia de Cauchy na norma L de vetores em $W^{3/2}(\partial M)'$ que tende a φ^L em $W_L^{3/2}$. Como visto acima, $\{\varphi_n\}$ é uma sequencia de Cauchy na norma $L^2(\partial M)'$, e denotamos seu limite em $L^2(\partial M)'$ por φ. Pela definição do produto escalar na norma L, para cada $\psi \in W^{3/2}(\partial M)'$,

$$(\varphi_n, \psi)_L = (\varphi_n, L\psi)_0.$$

Fazendo $n \to +\infty$,

$$(\varphi^L, \psi)_L = (\varphi, L\psi)_0.$$

Isto mostra que o produto escalar em $W_L^{3/2}$ de φ^L com qualquer $\psi \in W^{3/2}(\partial M)'$ é unicamente determinado por φ. Como $W^{3/2}(\partial M)'$ é denso em $W_L^{3/2}$, segue que φ^L é unicamente determinado por φ. □

Portanto a função natural $W_L^{3/2} \to L^2(\partial M)'$ é um mergulho, e então visualizamos $W_L^{3/2}$ como um subespaço de $L^2(\partial M)'$. Assim, temos $W^{3/2}(\partial M)' \subset W_L^{3/2} \subset L^2(\partial M)'$.

Agora definiremos a extensão de Friedrichs de L, que denotaremos por T. Tome qualquer $\psi \in L^2(\partial M)'$, e para todo $\varphi \in L^2(\partial M)'$ defina

$$l(\varphi) = (\varphi, \psi)_0,$$

que é um funcional linear limitado em $L^2(\partial M)'$, pois $|l(\varphi)| \leq |\varphi|_0 |\psi|_0$.

Pela relação (3.17), para qualquer $\varphi \in W_L^{3/2}$ temos $|l(\varphi)| \leq |\varphi|_L |\psi|_0$, isto é, l é um funcional linear limitado em $W_L^{3/2}$. Pelo Teorema da Representação de Riez, existe único $\omega_\psi \in W_L^{3/2}$, tal que $l(\varphi) = (\varphi, \omega_\psi)_L$ para qualquer $\varphi \in W_L^{3/2}$.

Logo temos um operador linear invertível bem definido $T\omega = \psi$, onde

$$T : D(T) \subset L^2(\partial M)' \to L^2(\partial M)'.$$

Além disso,

$$(\varphi, \omega)_L = l(\varphi) = (\varphi, \psi)_0 = (\varphi, T\omega)_0, \tag{3.18}$$

para todo $\omega \in D(T)$ e todo $\varphi \in W_L^{3/2}$.

Teorema 3.3. *$W^{3/2}(\partial M)'$ é um subespaço de $D(T)$, e T é uma extensão auto-adjunta e positiva de L em $L^2(\partial M)'$.*

Demonstração. Tome $\psi = L\varphi \in L^2(\partial M)'$, para algum $\varphi \in W^{3/2}(\partial M)'$. Então para todo $u \in W^{3/2}(\partial M)'$, $l(u) = (u, \psi)_0 = (u, L\varphi)_0 = (u, \varphi)_L$. Como vimos acima pelo Teorema da Representação de Riez, $l(u) = (u, \omega)_L$, donde $\varphi = \omega \in D(T)$ e além disso $T\omega = L\varphi$, ou seja, $L = T|_{W^{3/2}(\partial M)'}$. Claramente, T é positivo pela relação (3.18).

Finalizamos com a prova que T é auto-adjunto em $L^2(\partial M)'$. Primeiramente, notamos que T é simétrico. Restringindo a relação (3.18) para $\varphi \in D(T)$ e intercalando φ e ω, segue que $(\omega, T\varphi)_0 = (\omega, \varphi)_L$, donde segue da simetria do produto interno e da relação

(3.18) que T é simétrico. Denotemos por $S : L^2(\partial M)' \to D(T) \subset L^2(\partial M)'$ a inversa de T. Logo S é simétrica em $L^2(\partial M)'$.

Afirmamos que S é limitada, para isto é suficiente usar o Teorema do Gráfico Fechado, isto é, mostrar que S é fechada. De fato, seja $\{\varphi_n\}$ sequencia em $L^2(\partial M)'$, tal que $\varphi_n \to \varphi$ e $S\varphi_n \to \psi$. Logo $(S\varphi_n, y)_0 = (\varphi_n, Sy)_0$, e tomando $n \to +\infty$, segue que $(\psi, y)_0 = (\varphi, Sy)_0$ para todo $y \in L^2(\partial M)'$. Como S é simétrico, $(\psi, y)_0 = (S\varphi, y)_0$, ou seja, $S\varphi = \psi$.

Como S é simétrico e limitado em $L^2(\partial M)'$, segue que o espectro de S é real (veja Teorema 2 de [14, pág.356]). Logo todo número complexo não real z pertence ao conjunto resolvente de S. A fórmula $z^{-1}I - S^{-1} = S^{-1}(S - zI)z^{-1}$ mostra que z^{-1} pertence ao conjunto resolvente de S^{-1}. Pelo Teorema 2 de [14, pág.396], $S^{-1} = T$ é auto-adjunto em $L^2(\partial M)'$. □

Usando a relação (3.18), segue que $\omega \in D(T)$ se, e somente se, $(\varphi, T\omega)_0 = (\varphi, \omega)_L = D(\varphi, \omega)$ para qualquer $\varphi \in W^{3/2}(\partial M)'$. Em [19, pág.200] é mostrado que $D(T) = W^1(\partial M)'$, donde usando a fórmula de Green e o fato que toda função em $D(T) \subset W^{1/2}(\partial M)'$ se estende de maneira única para uma função harmônica em $W^1(M)'$,

$$(\varphi, T\omega)_0 = (\varphi, \partial_n\omega)_0,$$

para todo $\varphi \in W^{3/2}(\partial M)'$. Como $W^{3/2}(\partial M)'$ é denso em $L^2(\partial M)'$, segue que $T\omega = \partial_n\omega$.

Como $T : W^1(\partial M)' \subset L^2(\partial M)' \to L^2(\partial M)'$ é auto-adjunto, em particular, fechado, e $W^1(\partial M)'$ é denso em $W^{1/2}(\partial M)'$, segue que T se estende para $W^{1/2}(\partial M)'$, isto é, $f \in W^{1/2}(\partial M)'$, então existe uma sequencia $f_n \in W^1(\partial M)'$ tal que $Tf = \lim_{n\to+\infty} Tf_n$. Portanto $\varphi \in D(T)$ se, e somente se, $D(\varphi, \psi) = (T\varphi, \psi)_0$ para todo $\psi \in W^{1/2}(\partial M)'$, e além disso,

$$D(\varphi, \varphi) = |T^{1/2}\varphi|_0^2 = (T\varphi, \varphi)_0 \tag{3.19}$$

para todo $\varphi \in W^{1/2}(\partial M)'$.

Formalizado a definição de $T\varphi = \partial_n\varphi$, mostraremos que podemos construir uma norma em função de T equivalente a norma usual em $W^{1/2}(\partial M)'$.

Lema 3.3. *Para φ harmônica em $W^1(M)'$, $|\varphi|_{1/2}^2 \approx D(\varphi, \varphi) = |T^{1/2}\varphi|_0^2$.*

Demonstração. Como vimos acima $\tau : W^1(M)'' \to W^{1/2}(\partial M)$ é um homeomorfismo linear. Agora para φ harmônica em $W^1(M)'$, usando a estimativa,

$$||\varphi||_0^2 \le a(||\nabla_0\varphi||_0^2 + |\varphi|_0^2),$$

temos que $|\varphi|_{1/2}^2 \le c(||\nabla_0\varphi||_0^2 + ||\varphi||_0^2) \le d(||\nabla_0\varphi||_0^2 + |\varphi|_0^2)$. Logo

$$|\varphi|_{1/2}^2 \approx ||\nabla_0\varphi||_0^2 + |\varphi|_0^2 = D(\varphi, \varphi) + |\varphi|_0^2. \tag{3.20}$$

Pelo Critério de Compacidade de Rellich, a inclusão natural $i : W^{1/2}(\partial M) \to L^2(\partial M)$ é compacta, então como $S = T^{-1} : L^2(\partial M)' \to W^1(\partial M)' \subset L^2(\partial M)'$ é contínua, segue que $T^{-1} = i \circ S : L^2(\partial M)' \to L^2(\partial M)'$ é compacto. Como $T : W^1(\partial M)' \subset L^2(\partial M)' \to L^2(\partial M)'$ é auto-adjunto e positivo em $L^2(\partial M)'$ com T^{-1} compacta, segue que existe base ortonormal $\{\varphi_i\}$ de $L^2(\partial M)'$ constituindo autofunções de T com respectivos autovalores satisfazendo $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \to +\infty$.

Como $\{\varphi_i\}$ são harmônicas, segue da Fórmula de Green que

$$||\nabla_0\varphi_i||_0^2 = \int_M |\nabla_0\varphi_i|^2 dA_0 = \int_{\partial M} (\partial_n\varphi_i)\varphi_i ds_0 = \lambda_i|\varphi_i|_0^2,$$

donde $\lambda_i \geq 0$ para todo i. Agora se φ é harmônica e $T\varphi = 0$, segue da Fórmula de Green que $||\nabla_0\varphi||_0^2 = 0$, donde $d\varphi \equiv 0$. Como M é conexa, segue que φ é constante em M. Portanto, $\lambda_0 = 0$ é um autovalor simples de T. Logo $\lambda_1 > 0$ e, além disso, $D(\varphi_i, \varphi_i) = \lambda_i|\varphi_i|_0^2 \geq \lambda_1|\varphi_i|_0^2$. Escrevendo φ harmônica em $W^1(M)'$ na base $\{\varphi_i\}$ de $L^2(\partial M)'$, $D(\varphi, \varphi) \geq \lambda_1|\varphi|_0^2$. Daí, segue da relação (3.20) que

$$|\varphi|_{1/2}^2 \approx D(\varphi, \varphi).$$

Isto finaliza a prova. □

Prova do Teorema 3.2: Escolha uma sequencia minimizante $\{\varphi_n\} \in C^\infty(\partial M)'$ tal que

$$F_2(\varphi_n) \to \inf_{\varphi \in W^{1/2}(\partial M)'} F_2(\varphi). \tag{3.21}$$

Neste caso pela relação (3.19), podemos escrever o funcional F_2 em (3.14) como

$$F_2(\varphi) = \frac{1}{2}|T^{1/2}\varphi|_0^2 + \int_{\partial M} k_0\varphi ds_0 - 2\pi\chi(M)\log(\int_{\partial M} e^\varphi ds_0). \tag{3.22}$$

Assim, pelo Lema 3.3

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial M} k_0\varphi ds_0\right| &\leq \left(\int_{\partial M} |k_0|^2 ds_0\right)^{1/2} \left(\int_{\partial M} |\varphi|^2 ds_0\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\partial M} |k_0|^2 ds_0\right)^{1/2} |\varphi|_{1/2} \\ &\leq c\left(\int_{\partial M} |k_0|^2 ds_0\right)^{1/2} |T^{1/2}\varphi|_0. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$, escolha δ tal que $c\delta = \varepsilon$. Assim usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, onde $a = \sqrt{\delta}|T^{1/2}\varphi|_0$ e $b = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\int_{\partial M} |k_0|^2 ds_0\right)^{1/2}$, temos

$$\left|\int_{\partial M} k_0\varphi ds_0\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|T^{1/2}\varphi|_0^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\varepsilon}\int_{\partial M} |k_0|^2 ds_0. \tag{3.23}$$

Logo para $\varepsilon = 1$,

$$F_2(\varphi) \geq -\frac{c^2}{2}\int_{\partial M}|k_0|^2 ds_0 - 2\pi\chi(M)\log\left(\int_{\partial M} e^{\varphi} ds_0\right) \geq -\frac{c^2}{2}\int_{\partial M}|k_0|^2 ds_0 > -\infty,$$

isto é, existe $\inf\limits_{\varphi \in W^{1/2}(\partial M)'} F_2(\varphi) = \alpha$. Como $C^\infty(\partial M)'$ é denso em $W^{1/2}(\partial M)'$, a sequencia minimizante existe e consequentemente o limite (3.21) é bem definido. Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, $F_2(\varphi_n) \leq \alpha + 1$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ em (3.23), segue

$$F_2(\varphi_n) \geq \frac{1}{4}|T^{1/2}\varphi_n|_0^2 + c^2\int_{\partial M}|k_0|^2 ds_0.$$

Assim, $|T^{1/2}\varphi_n|_0^2 \leq C$, se $n \geq n_0$. Pelo Lema 3.3, $\{\varphi_n\}$ é limitada em $W^{1/2}(\partial M)'$.

Como a função traço τ em (3.16) é um homeomorfismo, segue $\{\varphi_n\}$ é limitada em $W^1(M)''$. Seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 2.1, pela compacidade fraca de bolas em $W^1(M)'$, passando a subsequencia,

$$\varphi_n \rightharpoonup \psi$$

em $W^1(M)'$, e do Critério de Compacidade de Rellich (Teorema 1.4) $\varphi_n \to \psi$ em $L^2(M)$ e em quase todo ponto. Assim, segue do Lema de Fatou e do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{n\to\infty}|T^{1/2}\varphi_n|_0^2 = \lim_{n\to\infty}\int_M |\nabla_0\varphi_n|^2 dA_0 \geq \int_M |\nabla_0\psi|^2 dA_0 = |T^{1/2}\psi|_0^2 \quad (3.24)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial M} e^{2\varphi_n} ds_0 \geq \int_{\partial M} e^{2\psi} ds_0 \quad (3.25)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial M} k_0\varphi_n ds_0 = \int_{\partial M} k_0\psi ds_0. \quad (3.26)$$

Portanto, de (3.24), (3.25) e (3.26), a desigualdade de Jensen e $\chi(M) \leq 0$, temos que $\psi \in W^{1/2}(\partial M)'$ é o mínimo de $F_2 : W^{1/2}(\partial M)' \to \mathbb{R}$.

Assim, seja $\varphi \in C^\infty(\partial M)'$ e defina $g(t) = F_2(\psi + t\varphi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí usando a Fórmula de Green com bordo e o fato que ψ é harmônica obtemos

$$0 = g'(0) = \int_{\partial M}(\partial_n\psi)\varphi\, ds_0 + \int_{\partial M} k_0\psi\, ds_0 - \frac{2\pi\chi(M)}{\int_{\partial M} e^{\psi}\, ds_0}\int_{\partial M} e^{\psi}\varphi\, ds_0, \quad (3.27)$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\partial M)'$. Para $\varphi \in C^\infty(\partial M)$, defina $\tilde{\varphi} = \varphi - a_\varphi$ onde $a_\varphi = \int_{\partial M}\varphi ds_0$. Assim, pela Formula de Gauss-Bonnet obtemos a equação válida para φ. Segue da densidade $C^\infty(\partial M)$ em $L^2(\partial M)$, segue que

$$T\psi + k_0 - \frac{2\pi\chi(M)}{\int_{\partial M} e^{\psi} ds_0} e^{\psi} = 0.$$

Logo usando a fórmula conforme entre curvaturas geodésicas (veja Corolário 1.9) que

$$k_\psi = \frac{2\pi\chi(M)}{\int_{\partial M} e^{\psi} ds_0}.$$

Como $K_\psi = 0$, pois estamos supondo $K_0 = 0$ (veja seção 3.4) e ψ é harmônica, então $e^{2\psi}\sigma_0$ é uma métrica uniforme do tipo II, e além disso, $\int_{\partial M} k_\psi ds = 2\pi\chi(M)$. Como F é estritamente convexa, segue que possui um único ponto critico. Portanto, $e^{2\psi}\sigma_0$ é a única métrica uniforme que maximiza $\log\det\Delta_\varphi$ em $[\sigma_0]$ sob as condições comprimento do bordo unitário e (CII). Isto finaliza a prova do Teorema 3.2 para o caso comprimento do bordo constante em $[\sigma_0]$ e $\chi(M) \leq 0$. $\square$

3.5 Casos do teorema de uniformização para superfícies com bordo

Nas próximas duas subseções finalizaremos as provas dos Teoremas 3.1 e 3.2 no caso restante de uma superfície simplesmente conexa com uma única curva bordante. No caso do Teorema 3.1 veremos que a prova é uma consequência direta da desigualdade (2.57). No caso do Teorema 3.2, a prova será similar ao caso da esfera, onde usaremos a Desigualdade Beurling e o Lema 3.6 no lugar da Desigualdade de Moser e do Lema 2.13, respectivamente. No Lema 3.6, usaremos um pouco da teoria de séries de Fourier em S^1, cujos resultados podem ser encontrados no Capítulo 3 de [29, pág.177].

3.5.1 M simplesmente conexa com comprimento do bordo constante

O caso restante da prova do Teorema 3.2, consiste em maximizar $\log\det\Delta_\varphi$ para uma superfície compacta simplesmente conexa com uma única curva bordante sob as condições comprimento do bordo constante, (CII) e $\int_{\partial M} k_\varphi\, ds$ constante em $[\sigma_0]$. Sob estas condições pelo Teorema de Classificação de Superfícies Compactas com Bordo, podemos tomar M como sendo o disco unitário U com $\partial U = S^1$ e considerar a classe de métricas planas, isto é, curvatura Gaussiana nula, em U conformes a métrica euclidiana σ_0. Pela fórmula conforme entre curvaturas (veja Proposição 1.5), obtemos que estas métricas planas fornecem funções harmônicas em U.

Como explicado na Seção 3.4, é suficiente minimizar o funcional F_2 sobre as funções harmônicas φ em U que possuem valor médio nulo no bordo. Já notamos que σ_0 é uma métrica uniforme do tipo II, pois $K_0 = 0$ e $k_0 = 1$. Como $\varphi = 0$ é mínimo de F_2 se, e somente se,

$$\frac{1}{4}\int_U |\nabla_0\varphi|^2 \frac{dA_0}{\pi} + \int_{\partial U} \varphi d\mu - \log\left(\int_{\partial U} e^{\varphi} d\mu\right) \geq 0 \tag{3.28}$$

para todas as harmônicas, onde $d\mu = \dfrac{d\theta}{2\pi}$ e $\chi(U) = 1$, segue que a estratégia em estudar o comportamento extremal de F_2 sob a condição

$$\int_{\partial U} \varphi d\mu = 0, \tag{3.29}$$

é verificar (3.28), e após isso verificar que as funções que fornecem igualdade em (3.28) produzem métricas isométricas a σ_0. Defina

$$G(\varphi) = \frac{1}{4}\int_U |\nabla_0 \varphi|^2 \frac{dA_0}{\pi} - \log\left(\int_{\partial U} e^{\varphi} d\mu\right). \tag{3.30}$$

Como no caso da esfera, mostrar que $G(\varphi) \geq 0$ sobre as harmônicas com valor médio nulo é equivalente a mostrar que

$$G_\varepsilon(\varphi) = \frac{1+\varepsilon}{4}\int_U |\nabla_0 \varphi|^2 \frac{dA_0}{\pi} - \log\left(\int_{\partial U} e^{\varphi} d\mu\right) \geq 0 \tag{3.31}$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Lema 3.4 (Desigualdade de Beurling)**.** *Se $f(z)$ é analítica em U com $f(0) = 0$ e $\int_U |f'(z)|^2 dA_0 \leq \pi$ então*

$$medida(\{\theta; |f(e^{i\theta})| > s\}) \leq 2\pi e^{1-s^2}. \tag{3.32}$$

Demonstração. Veja [2, pág. 34]. □

Para aplicarmos o lema anterior usaremos o conceito de conjugada harmônica de uma função harmônica e portanto definimos:

Definição 3.2 (pág.40, [3])**.** *Sejam G um domínio em $\mathbb{C}$ e $u : G \to \mathbb{R}$ harmônica. Se existe uma função harmônica $v : G \to \mathbb{R}$ tal que $u + iv$ é analítica em G, dizemos que v é uma conjugada harmônica de u.*

Além disso, no Teorema 2.30 de [3] é mostrado que se G é o disco aberto então existe uma conjugada harmônica v de u tal que $v(0) = 0$.

Agora aplicando o lema anterior para a função $f = \dfrac{1}{a}(\varphi + i\psi)$, onde φ é harmônica com valor médio nulo, $\psi : U \to \mathbb{R}$ é uma conjugada harmônica de φ com $\psi(0) = 0$ e

$$a^2 = \frac{1}{\pi}\int_U |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0,$$

obtemos de (3.32) que

$$\int_{\partial U} e^{\varphi} d\mu \leq 2\pi e + \pi e \left(\int_U |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{1}{4\pi}\int_U |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0\right). \tag{3.33}$$

Lema 3.5. *Se $G_\varepsilon(\varphi) \leq A$ então $\int_U |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 \leq B$, para toda φ harmônica de valor médio nulo.*

Demonstração. Observe que definindo $a_\varphi^2 = \displaystyle\int_U |\nabla_0\varphi|^2 \frac{dA_0}{\pi}$ e usando (3.33), obtemos

$$G_\varepsilon(\varphi) = \frac{1+\varepsilon}{4} a_\varphi^2 - \log 2\pi e - \log a_\varphi - \frac{a_\varphi^2}{4} - \log\left(\frac{1}{a_\varphi e^{\frac{a_\varphi^2}{4}}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right). \tag{3.34}$$

Portanto, $G_\varepsilon(\varphi) = \frac{\varepsilon}{4} a_\varphi^2 \left(1 - \frac{4\log a_\varphi}{a_\varphi^2 \varepsilon}\right) - \log\left(\frac{1}{a_\varphi e^{\frac{a_\varphi^2}{4}}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) - \log 2\pi e$. Por contradição, se $a_\varphi \to +\infty$ então $G_\varepsilon(\varphi) \to +\infty$, e o resultado segue. □

Proposição 3.2. *$G_\varepsilon(\varphi) \geq 0$ sob as harmônicas de valor médio nulo, para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Escolha uma sequencia minimizante de funções harmônicas $\{\varphi_n\} \in C^\infty(U)'$ tal que $G_\varepsilon(\varphi_n) \to \inf_A G_\varepsilon(\varphi)$, onde $A = \{\varphi \in W^1(U)'; \Delta_0\varphi = 0\}$. Como antes, segue do fato que $C^\infty(U)'$ é denso em $W^1(U)'$, que a sequencia minimizante existe, e além disso, o ínfimo existe em vista da prova do lema anterior.

Portanto, como $\{G_\varepsilon(\varphi_n)\}$ é limitada, existe A tal que $G_\varepsilon(\varphi_n) \leq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo lema anterior, existe B tal que $\int_U |\nabla_0\varphi_n|^2 dA_0 \leq B$, e consequentemente, pela Desigualdade de Poincaré $\{\varphi_n\}$ é limitada em $L^2(U)$. Usando o argumento de compacidade da prova do Teorema 2.1, obtemos que $\varphi_n \rightharpoonup \psi$ em $W^1(U)'$, $\varphi_n \to \psi$ em $L^2(U)$ e em quase todo ponto.

Pelo Lema de Fatou $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_U |\nabla_0\varphi_n|^2 \frac{dA_0}{\pi} \geq \int_U |\nabla_0\psi|^2 \frac{dA_0}{\pi}$. Como a função traço natural $\tau : A \to W^{1/2}(\partial U)'$ é um homeomorfismo (veja Lema 3.1), obtemos que $\psi \in W^{1/2}(\partial U)' \subset L^2(\partial U)'$. Logo $\varphi_n(x) \to \psi(x)$ em quase todo ponto de ∂U. Além disso, pela estimativa (3.33) obtemos que $\{e^{\varphi_n}\}$ é limitado por uma constante em quase todo ponto. Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos que $\int_{\partial U} e^{\varphi_n(x)} d\mu \to \int_{\partial U} e^{\psi(x)} d\mu$. Logo, segue da definição de ínfimo sobre o conjunto A que ψ é mínimo global de G_ε em A.

Assim, se $\varphi \in A$, segue que 0 é mínimo global de $g(t) = G_\varepsilon(\psi + t\varphi)$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = g'(0) &= \frac{1+\varepsilon}{4} 2 \int_U \langle \nabla_0\psi, \nabla_0\varphi\rangle \frac{dA_0}{\pi} - \frac{\int_{\partial U} e^\psi \varphi d\mu}{\int_{\partial U} e^\psi d\mu} && (3.35)\\ &= (1+\varepsilon) \int_{\partial U} (\partial_n\psi)\varphi d\mu - \frac{\int_{\partial U} e^\psi \varphi d\mu}{\int_{\partial U} e^\psi d\mu} + \int_{\partial U} \varphi d\mu. && (3.36)\end{aligned}$$

Dada função harmônica $\varphi \in W^1(U)$, aplique $\varphi - a_\varphi \in A$ à (3.35), onde $a_\varphi = \int_U \varphi d\mu$, para obter

$$0 = (1+\varepsilon) \int_{\partial U} (\partial_n\psi)\varphi d\mu - \frac{\int_{\partial U} e^\psi \varphi d\mu}{\int_{\partial U} e^\psi d\mu} + \int_{\partial U} \varphi d\mu. \tag{3.37}$$

Como a função traço natural τ é um homeomorfismo das harmônicas em $W^1(U)$ sobre

$W^{1/2}(\partial U)$, segue que $\varphi \in W^{1/2}(\partial U)$. Sendo $W^{1/2}(\partial U)$ denso em $L^2(\partial U)$, obtemos

$$0 = (1+\varepsilon)\partial_n \psi + 1 - \frac{e^{\psi}}{\int_{\partial U} e^{\psi} d\mu}. \tag{3.38}$$

Definindo $\psi = u + a$ onde $e^a = \int_{\partial U} e^{\psi} d\mu$, então u satisfaz

$$\partial_n u = \frac{1}{1+\varepsilon}(e^u - 1) \tag{3.39}$$

com $\int_{\partial U} e^u d\mu = 1$.

Agora provaremos que $\psi \in W^1(\partial U)'$. Pelo Teorema 3.3 sabemos que $T : W^1(\partial U)' \subset L^2(\partial U)' \to L^2(\partial U)'$ dada por

$$T(\varphi) = \partial_n \varphi$$

é auto-adjunta. Como T é densamente definido em $L^2(\partial U)'$ e contínuo, segue que T se estende para $W^{1/2}(\partial U)'$. Na construção do operador auto-adjunto T, foi mostrado que existe a inversa $T^{-1} : L^2(\partial U)' \to W^1(\partial U)' \subset L^2(\partial U)'$, e como $T\psi \in L^2(\partial U)'$, então existe $\omega \in W^1(\partial U)'$ tal que $\omega = T^{-1}(T(\psi))$. Logo

$$\langle \psi - \omega, Tf \rangle_{L^2} = \langle T\psi - T\omega, f \rangle_{L^2} = \langle T\psi - T\psi, f \rangle_{L^2} = 0$$

para toda $f \in W^1(\partial U)'$. Assim $\psi - \omega = 0$, pois $\mathrm{Im} T = L^2(\partial U)'$. Portanto, $\psi = \omega \in W^1(\partial U)'$.

Daí como $\frac{1}{1+\varepsilon} \notin \mathbb{Z}$ para todo $\varepsilon > 0$, segue do lema seguinte que u é constante. Em particular ψ é constante, mas como $\int_{\partial U} \psi d\mu = 0$, segue que $\psi = 0$.

Portanto,

$$G_\varepsilon(\varphi) \geq G_\varepsilon(\psi) = 0$$

para toda φ harmônica de valor médio nulo no bordo e todo $\varepsilon > 0$. □

Lema 3.6. *Se u pertence a $W^1(S^1)$ e satisfaz a equação*

$$\partial_n u = C(e^u - 1) \tag{3.40}$$

onde $C \notin \mathbb{Z}$, então u é constante.

Demonstração. Escrevemos a função $\partial_n u$ em termos da série de Fourier de u. A série de Fourier de u é

$$u(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{in\theta},$$

e a soma de Abel é

$$J_r u(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) r^{|n|} e^{in\theta}, \tag{3.41}$$

com $r \in [0,1)$ e $\theta \in S^1$. Como a soma de Abel converge absolutamente, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial r} J_r u(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n)|n| r^{|n|-1} e^{in\theta}.$$

Considere a série de Fourier, $Nu(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n)|n|e^{in\theta}$. Como a série de Fourier de u é absolutamente convergente,

$$L^1(S^1) \ni \frac{du}{d\theta}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) ine^{in\theta} \tag{3.42}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{u}(n) ine^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}(-n) i(-n) e^{-in\theta}. \tag{3.43}$$

Logo

$$\int_{S^1} |\sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}(n) ine^{in\theta}| d\theta \leq \int_{S^1} \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{u}(n) n| d\theta \leq \int_{S^1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}(n)||n| d\theta < \infty. \tag{3.44}$$

Mesmo raciocínio implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}(-n) i(-n) e^{-in\theta} \in L^1(S^1)$. Portanto,

$$Nu(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n)|n|e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}(n) ne^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}(-n)(-n)e^{-in\theta} \tag{3.45}$$

está em $L^1(S^1)$ e assim $J_r(Nu)$ está bem definida. Logo

$$\frac{1}{r} \partial_r J_r u(\theta) = J_r(Nu) \to Nu \tag{3.46}$$

em $L^2(S^1)$ para $r \to 1$. Como $\partial_r J_r u(\theta) \to \partial_n u(\theta)$ em $L^2(S^1)$, pois $J_r u(\theta) \to u(\theta)$ em $L^2(S^1)$, segue da unicidade que

$$Nu(\theta) = \partial_n u(\theta). \tag{3.47}$$

Defina a transformada de Hilbert,

$$Hu(\theta) = -i \sum \operatorname{sgn}(n) \hat{u}(n) e^{in\theta}$$

para toda $u \in L^2(S^1)$, e note que esta série é absolutamente convergente, pois $\sum \hat{u}(n)e^{in\theta}$ o é. Notemos que de (3.42) temos

$$H\left(\frac{du}{d\theta}\right) = \sum \hat{u}(n)|n|e^{in\theta} = \partial_n u(\theta).$$

Portanto, da equação (3.40) obtemos

$$H\left(\frac{du}{d\theta}\right) = C(e^u - 1). \tag{3.48}$$

Primeiramente, notamos que $H : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$, pois

$$\begin{aligned}\int_{S^1} |Hu(\theta)|^2 d\theta &= \int_{S^1} |-i\sum \operatorname{sgn}(n)\hat{u}(n)e^{in\theta}|^2 d\theta \\ &\leq \int_{S^1} \left(\sum |\hat{u}(n)|\right)^2 d\theta = \left(\sum |\hat{u}(n)|\right)^2 2\pi < \infty.\end{aligned}$$

Além disso, fazendo uso do Teorema de Plancherel, que garante que a transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : L^2(S^1) \to l^2(\mathbb{Z}) \qquad \text{(veja [29, pág.183])}$$

é uma isometria unitária, mostraremos que $H : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ é invertível. Pelo Teorema de Plancherel, $\mathcal{F}u = \hat{u} \in l^2(\mathbb{Z})$ (espaços das funções de quadrado somável). Novamente pelo Teorema de Plancherel, existe único $v \in L^2(S^1)$ tal que $\hat{v}(n) = -\dfrac{\hat{u}(n)}{i\operatorname{sgn}(n)}$. Logo

$$Hv(\theta) = -i\sum \operatorname{sgn}(n)\frac{-\hat{u}(n)}{i\operatorname{sgn}(n)}e^{in\theta} = \sum \hat{u}(n)e^{in\theta} = u(\theta), \tag{3.49}$$

donde H é bijetora. Agora, mostraremos que $u \in C^\infty(S^1)$. De fato, como $u \in W^1(S^1)$ obtemos

$$\frac{du}{d\theta} \in L^2(S^1) \Rightarrow \frac{d}{d\theta}C(e^u - 1) = Ce^u\frac{du}{d\theta} \in L^2(S^1). \tag{3.50}$$

É um cálculo simples mostrar que $\frac{d}{d\theta}H^{-1}(v) = H^{-1}\left(\frac{dv}{d\theta}\right)$, para $v \in L^2(S^1)$. Portanto,

$$\begin{aligned}H^{-1}(C(e^u - 1)) = \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}H^{-1}(C(e^u - 1)) \\ &= H^{-1}\left(\frac{d}{d\theta}(C(e^u - 1))\right) \in L^2(S^1).\end{aligned}$$

Consequentemente, $u \in W^2(S^1)$. Novamente,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = \frac{d}{d\theta}H^{-1}\left(\frac{d}{d\theta}(C(e^u - 1))\right) = H^{-1}\left(\frac{d}{d\theta}\left(Ce^u\frac{du}{d\theta}\right)\right). \tag{3.51}$$

Logo $\dfrac{d^3u}{d\theta^3} \in L^2(S^1)$ e indutivamente $\dfrac{d^nu}{d\theta^n} \in L^2(S^1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $u \in W^n(S^1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como existe o mergulho $W^n \hookrightarrow W^r$ para $r \in \mathbb{R}$ e $n \geq r$, segue que $u \in W^r(S^1)$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema de Mergulho Sobolev 1.3, $u \in C^\infty(S^1)$. Em particular podemos diferenciar no sentido clássico a equação (3.48) para obter

$$H\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = Ce^u\frac{du}{d\theta} = \left(H\left(\frac{du}{d\theta}\right) + C\right)\frac{du}{d\theta}. \tag{3.52}$$

Defina $v = \frac{du}{d\theta}$, então

$$H\left(\frac{dv}{d\theta}\right) = vHv + Cv, \quad \int_{\partial U} v\, d\mu = 0. \tag{3.53}$$

Afirmamos que $\hat{v}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam

$$v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{v}(n)e^{in\theta}, \quad Hv = -i\sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n)\hat{v}(n)e^{in\theta}. \tag{3.54}$$

Logo

$$vHv = -i\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k+m=r}\operatorname{sgn}(m)\hat{v}(m)\hat{v}(k)\right)e^{ir\theta}.$$

Se $n = 0$ então

$$\widehat{vHv}(0) = -i\sum_{k+m=0}\operatorname{sgn}(m)\hat{v}(m)\hat{v}(k) = 0. \tag{3.55}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\theta} = \sum \hat{v}(n)ine^{in\theta} \quad &\Rightarrow \quad \widehat{\frac{dv}{d\theta}}(n) = in\hat{v}(n)\\
&\Rightarrow \quad H\left(\frac{dv}{d\theta}\right) = -i\sum \operatorname{sgn}(n)\widehat{\frac{dv}{d\theta}}(n)e^{in\theta}\\
&\Rightarrow \quad \widehat{H\left(\frac{dv}{d\theta}\right)}(0) = -i\operatorname{sgn}(0)\widehat{\frac{dv}{d\theta}}(0) = 0. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Portanto combinando (3.55) e (3.56) em (3.53) obtemos $\hat{v}(0) = 0$.

Suponha que $\hat{v}(m) = 0$ para todo m com $|m| < n$. Então

$$\widehat{vHv}(r) = -i\sum_{\substack{k+m=r\\|k|,|m|\geq n}}\operatorname{sgn}(m)\hat{v}(m)\hat{v}(k). \tag{3.57}$$

Se $r = \pm n$ então

$$\widehat{vHv}(\pm n) = -i\sum_{\substack{k+m=\pm n\\|k|,|m|\geq n}}\operatorname{sgn}(m)\hat{v}(m)\hat{v}(k) = 0. \tag{3.58}$$

Portanto, segue de (3.53) que para $r = \pm n$

$$C\hat{v}(r) = \widehat{H\left(\frac{dv}{d\theta}\right)}(r) = -i\operatorname{sgn}(r)ir\hat{v}(r) = |r|\hat{v}(r). \tag{3.59}$$

Logo $|r|\hat{v}(r) = C\hat{v}(r)$ para $r = \pm n$. Como $C \notin \mathbb{Z}$, $(|r| - C)\hat{v}(r) = 0$ implica $\hat{v}(\pm n) = 0$. Por indução, $\hat{v}(r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Portanto, segue de (3.54) que $\frac{du}{d\theta} = v = 0$ e em particular u é constante. □

Para finalizar a prova do Teorema 3.2, falta encontrar as funções φ's harmônicas de valor médio nulo tal que $G(\varphi) = 0$. Já mostramos que $\psi = 0$ é mínimo global de G. Logo, como na equação (3.38), a equação variacional para φ em ∂U é

$$\partial_n\varphi + 1 - \frac{2\pi e^{\varphi}}{\int_{S^1} e^{\varphi}d\theta} = 0. \tag{3.60}$$

Pela fórmula conforme $k_\varphi = e^{-\varphi}(1 + \partial_n\varphi)$ do Corolário 1.9, obtemos

$$k_\varphi = \frac{2\pi}{\int_{S^1} e^{\varphi} d\theta} = \text{constante}, \tag{3.61}$$

isto é, $e^{2\varphi}\sigma_0$ é uniforme. Seja $f = \varphi + i\psi$, onde ψ é a conjugada harmônica de φ. Se

$$H(z) = \int_\gamma e^{f(\zeta)} d\zeta \tag{3.62}$$

onde γ é o caminho retilíneo ligando 0 à z, então do Teorema Fundamental do Cálculo obtemos $|H'(z)|^2 = e^{2\varphi(z)}$ em U. Em particular, H é uma aplicação conforme de $(U, e^{2\varphi}\sigma_0)$ sobre um domínio (D, σ_0) de $\mathbb{C}$. Como H preserva ângulo, obtemos que $H(\partial U)$ é um círculo.

Lema 3.7. *As únicas funções meromorfas em $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ são as racionais.*

Demonstração. Obviamente, se f é racional então f é meromorfa. Reciprocamente, se f é meromorfa em $\hat{\mathbb{C}}$, então como $\hat{\mathbb{C}}$ é compacto e o conjunto dos polos de f é discreto, obtemos que o conjunto de polos é finito.

Se $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ são polos de f de graus $d_1, \ldots, d_n$ então $p = f \prod (z - z_i)^{d_i}$ não possui polos em $\mathbb{C}$, e tem no máximo um polo no infinito. Logo, p é uma função polinomial e consequentemente

$$f = \frac{p}{\prod (z - z_i)^{d_i}}$$

é racional. □

Lema 3.8. *Se f é analítica e conforme em $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, com $|f(z)| = 1$ para todo $|z| = 1$ então f é racional.*

Demonstração. Defina a Transformada de Cayley, $T(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$.

Mostraremos que T mapeia bijetivamente o semi-plano superior fechado sob o disco unitário fechado menos $z = 1$ com inversa $T^{-1}(z) = i(\frac{1+z}{1-z})$.

Se $x \in \mathbb{R}$ então $|T(x, 0)| = 1$. Se $z = a + ib$ com $b > 0$, então $T(a, b) \in D((0, 0), 1) - S^1$. Portanto T mapeia o eixo real sob à S^1 e o interior do semi-plano superior sob o interior do disco unitário.

Agora, seja $z = a + ib \in D((0, 0), 1) - \{1\}$, então $T^{-1}(z) = \frac{-2b + i(1 - a^2 - b^2)}{(1-a)^2 + b^2}$, donde $\mathrm{Im} T^{-1}(z) \geq 0$. Em particular, se $z = a + ib \in S^1 - \{1\}$ então $\mathrm{Im} T^{-1}(z) = 0$. Portanto, T^{-1} mapeia $S^1 - \{1\}$ no eixo real e o interior do disco unitário menos $z = 1$ no semi-plano superior aberto.

Vejamos onde faz sentido definir a composição

$$g(z) = (T^{-1} \circ f \circ T)(z) = T^{-1}\left(f\left(\frac{z - i}{z + i}\right)\right) = i\left(\frac{1 + f(z - i/z + i)}{1 - f(z - i/z + i)}\right),$$

pois se $x \in \mathbb{R}$ então $T(x) \in S^1$, que por sua vez, $\left|f(\frac{x-i}{x+i})\right| = 1$. Logo $f(\frac{x-i}{x+i})$ pode assumir o valor 1 e então a função g não estará definida em todo semi-plano superior fechado.

Se f não é constante então f assumirá o valor 1 em finitos pontos de S^1, pois como $f : U \to U$ é conforme, é impossível que f assuma o valor 1 em infinitos pontos de S^1. Logo g terá finitos polos em $\mathbb{R}$. Em cada intervalo entre dois polos aplicamos o Princípio da Reflexão de Scharwz. Logo g se estenderá para uma função meromorfa em $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que pelo Lema 3.7 será racional.

Como T e T^{-1} são transformações de Mobius de grau 1, então $f = T \circ g \circ T^{-1}$ será racional de grau 1 e em particular um transformação de Mobius de U em U. □

Como $|H(\partial U)| = a$ então $\left|\frac{H(z)}{a}\right| = 1$ para todo $z \in S^1$. Tome $\tau = \frac{H}{a}$, que pelo Lema 3.8, obtemos que τ é um transformação de Mobius de U em U. Portanto

$$|a\tau'(z)|^2 = e^{2\varphi} \Rightarrow \varphi = \log|\tau'(z)| + \log|a| \tag{3.63}$$

para $a \in \mathbb{R}$.

Logo $\varphi = 0$ e $\varphi = \log|\tau'| + \beta$ são as únicas funções que minimizam G. Como $(U, |\tau'|^2\sigma_0)$ é isométrico à (U, σ_0) via τ, segue que σ_0 é a única métrica uniforme do tipo II que maximiza $\log\det\Delta_\varphi$ em $[\sigma_0]$, sob as condições comprimento do bordo fixado e (CII).

3.5.2 M simplesmente conexa com área constante

O último caso da prova do Teorema 3.1 consiste em maximizar $\log\det\Delta_\varphi$ para M simplesmente conexa com uma única curva bordante sujeita as condições $A_\varphi =$ constante, (CI) e equação (3.7) em $[\sigma_0]$. Pelo Teorema de Classificação de Superfícies Compactas com Bordo podemos considerar M como o hemisfério superior H^2 e considerar a classe de métricas conformes a métrica euclidiana σ_0 sob a condição $A_\varphi = 2\pi$. Já notamos que σ_0 é uma métrica uniforme do tipo I, pois $K_0 = 1$ em H^2 e $k_0 = 0$ em S^1. Mostraremos que esta métrica é a única (a menos de isometria na classe) que maximiza $\det\Delta_\varphi$ em $[\sigma_0]$ sob as condições mencionadas.

Definindo $u = 2\varphi$ e notando que $\chi(H^2) = 1$ vemos que $F_1(\varphi)$ possui mínimo em $\varphi = 0$ se, e somente se,

$$\frac{1}{4}\int_{H^2} |\nabla_0 u|^2 \frac{dA_0}{2\pi} + \int_{H^2} u\frac{dA_0}{2\pi} - \log\left(\int_{H^2} e^u \frac{dA_0}{2\pi}\right) \geq 0. \tag{3.64}$$

Como foi feito na Proposição 2.3, temos que $A_\varphi = 2\pi$ é equivalente à

$$\int_{H^2} udA_0 = 0. \tag{3.65}$$

Logo sob a condição (3.65), à desigualdade (3.64) é equivalente à

$$0 \leq G(u) = \frac{1}{4}\int_{H^2} |\nabla_0 u|^2 \frac{dA_0}{2\pi} - \log\left(\int_{H^2} e^u \frac{dA_0}{2\pi}\right) \tag{3.66}$$

para toda $u \in W^1(H^2)'$.

Usando a carta local T de (2.66), estendemos u em H^2 para uma função par no ângulo azimutal θ, isto é,

$$\tilde{u}(\theta,\omega) = \begin{cases} u(\theta,\omega) & \text{se } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ u(\pi-\theta,\omega) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}. \tag{3.67}$$

Então usando a carta local T, verificamos que $\tilde{u} \in W^1(S^2)'$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \tilde{u}^2 dA_0 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \tilde{u}^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\omega \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \tilde{u}^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\omega + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \tilde{u}^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\omega \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} u^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\omega \\ &= 2\int_{H^2} u^2 dA_0 < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{u} \in L^2(S^2)$. Analogamente

$$\begin{aligned} \int_{S^2} |\nabla_0 \tilde{u}|^2 dA_0 &= 2\int_{H^2} |\nabla_0 u|^2 dA_0 < +\infty \\ \int_{S^2} \tilde{u} dA_0 &= 2\int_{H^2} u dA_0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{u} \in W^1(S^2)'$.

Assim, a desigualdade (3.66) é equivalente à

$$0 \leq G(\tilde{u}) = \frac{1}{4}\int_{S^2} |\nabla_0 \tilde{u}|^2 \frac{dA_0}{4\pi} - \log\left(\int_{S^2} e^{\tilde{u}} \frac{dA_0}{4\pi}\right) \tag{3.68}$$

que já foi provado no caso da esfera na Proposição 2.5.

Agora, devemos determinar quando a igualdade é satisfeita na equação (3.66). Notamos que $u = 0$ e $u = 2\log|\tau'| - 2\int_{H^2} \log|\tau'| \frac{dA_0}{2\pi}$, para toda $\tau \in SU(1,1)$ (grupo de mobius fixando o disco unitário) fornece a igualdade na equação (3.66). De fato, da definição do Laplaciano e do Corolário 1.7 temos que $\det \Delta_\varphi$ e A_φ são invariantes espectrais. Então da expressão (3.9), $u = 2\log|\tau'| - 2\int_{H^2} \log|\tau'| \frac{dA_0}{2\pi}$ também minimiza F_1, pois a função identicamente nula também minimiza F_1 e $|\tau'|^2\sigma_0$ é isométrica a σ_0 via τ. Consequentemente,

$$u = 2\log|\tau'| - 2\int_{H^2} \log|\tau'| \frac{dA_0}{2\pi} \tag{3.69}$$

fornece a igualdade em (3.66).

Devemos verificar que estas $u's$ são as únicas funções que fornecem a igualdade na equação (3.66). De fato, dado $\tau \in SU(1,1)$ podemos construir, como em (3.67), $\tilde{\tau} : S^2 \to S^2$ transformação de Mobius par. Mas na prova do Teorema de uniformização da esfera, obtemos que $2\log|\tilde{\tau}'| - 2\int_{S^2} \log|\tilde{\tau}'|\frac{dA_0}{4\pi}$ é a única função que dá igualdade na equação (3.68). Portanto, $u = 2\log|\tau'| - 2\int_{H^2} \log|\tau'|\frac{dA_0}{2\pi}$ para toda $\tau \in SU(1,1)$ são as únicas funções que dão igualdade na equação (3.66). Isto finaliza a prova do Teorema 3.1 neste caso.

Capítulo 4

Aplicações

Este capítulo se resume a aplicações dos Teoremas 2.1, 3.1 e 3.2. Começamos as aplicações com um problema espectral (veja Corolário 4.1) relacionado ao Teorema 3.2. Trabalharemos com domínios em $\mathbb{R}^2$ e métricas conformes a euclidiana. Relacionado a questão "Hearing the shape of a drum", veja Kac [11], podemos pensar nisso como definindo um tambor D (domínio planar) de densidade variável, onde a função densidade é o fator conforme $\rho > 0$ da métrica $\rho|dz|^2$ e $|dz|^2$ denota a métrica euclidiana. Se o fator conforme ρ for constante, chamamos ρ de densidade uniforme.

Definição 4.1. *Um domínio planar é audível em uma classe conforme, se o espectro do Laplaciano determina o domínio a menos de isometria na classe, isto é, D é audível se todo domínio Ω que pertence à classe conforme de D e é isoespectral a D é isométrico a D.*

Corolário 4.1. *Um domínio circular de densidade uniforme é audível na classe de todos os domínios de densidade variável Ω satisfazendo*

$$\int_\Omega \Delta_0 \log\rho \; dxdy \geq 0, \tag{4.1}$$

onde ρ é a densidade, $dxdy$ é a medida Riemanniana da métrica euclidiana $|dz|^2$ e Δ_0 é o Laplaciano euclidiano.

Demonstração. Sejam Ω um domínio com uma função densidade $\rho > 0$, e D um domínio circular de densidade uniforme ρ_0 e raio R. Em vista da Definição 4.1, para provar o corolário, basta mostrar que se $(\Omega, \rho|dz|^2)$ é isoespectral a $(D, \rho_0|dz|^2)$ então $(\Omega, \rho|dz|^2)$ é isométrico a $(D, \rho_0|dz|^2)$.

O problema de autovalor para o domínio $(\Omega, \rho|dz|^2)$ é

$$\begin{cases} \Delta_\rho u + \lambda u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{4.2}$$

A solução deste problema de Dirichlet fornece o espectro $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ de $(\Omega, \rho|dz|^2)$ que completamente determina $\mathrm{Tr}(e^{t\Delta_\rho})$. Usando a expansão assintótica do traço do operador do calor (Teorema 1.15) e a definição do determinante do Laplaciano, segue do fato que $(\Omega, \rho|dz|^2)$ é isoespectral à $(D, \rho_0|dz|^2)$ que

$$\text{comprimento}(\partial\Omega) = 2\pi R, \quad \chi(\Omega) = 1, \quad \det \Delta_\rho = \det \Delta_{\rho_0}. \tag{4.3}$$

Como $\chi(\Omega) = 1$ e $\partial\Omega \neq \varnothing$, segue que Ω é simplesmente conexo. Assim, pelo Teorema da Aplicação de Riemann existe $f : (\Omega, \rho) \to (D, \rho_0)$ conforme, isto é, (Ω, ρ) é conforme a (D, ρ_0). Agora, pela desigualdade (4.1) e para $\theta = e^{2\varphi}$, segue das Fórmulas Conformes (veja Proposição 1.5) que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\Omega \Delta_0 \log\theta \, dxdy &= 2\int_\Omega \Delta_0\varphi \, dxdy \\ &= -2\int_\Omega e^{2\varphi} K_\varphi \, dxdy \\ &= -2\int_\Omega K_\varphi \, dA_\varphi, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde dA_φ é a medida Riemanniana da métrica $e^{2\varphi}|dz|^2$. Assim a condição (CII) do Teorema 3.2 é satisfeita.

Fixando o comprimento do bordo igual a $2\pi R$ em todas as métricas $e^{2\varphi}|dz|^2$ em Ω que satisfazem (4.4), segue de $\det \Delta_\rho = \det \Delta_{\rho_0}$ que

$$(\Omega, \rho) \quad \text{é isométrico à} \quad (D, \rho_0),$$

pois da unicidade do Teorema 3.2 o máximo de $\det \Delta_\Omega$ em $[|dz|^2]$ é assumido em $\rho_0|dz|^2$, que possui $K_{\rho_0} = 0$ e $k_{\rho_0} = \frac{1}{R}$. □

Corolário 4.2. *Para todas as métricas em um anel M tal que $\int_M K dA \leq 0$, o cilindro euclidiano cuja relação do comprimento com o raio dos círculos bordantes é* 6.0008833511233... *possui determinante máximo.*

Demonstração. Seja M um anel satisfazendo as condições do corolário. Como $\chi(M) = 0$, segue da Fórmula de Gauss-Bonnet e da fórmula conforme entre curvaturas geodésicas que a equação (3.1) para $\log\det \Delta_\varphi$ é um invariante translacional em φ, isto é, se $a \in \mathbb{R}$, então $\log\det \Delta_{\varphi+a} = \log\det \Delta_\varphi$. Em particular, $\log\det \Delta_\varphi$ é um invariante escalar para a métrica, isto é, ρ e $a\rho$ possuem o mesmo determinante. Assim, para o cilindro euclidiano, o $\det \Delta_\varphi$ depende apenas da relação do comprimento com o raio dos círculos bordantes. Agora, maximizar $\det \Delta_\varphi$ sob uma classe conforme com área constante e satisfazendo (CI), ou comprimento do bordo constante e satisfazendo (CII), conduz, em ambos os casos, a um cilindro euclidiano. De fato, pelos Teoremas 3.1 e 3.2, obtemos $k = 0$ e $K =$ constante ou $K = 0$ e $k =$ constante, para uma métrica $e^{2\varphi}|dz|^2$ que maximiza o determinante regularizado do Laplaciano na classe de métricas conformes a $|dz|^2$. Pela

Fórmula de Gauss-Bonnet e que $\chi(M) = 0$, obtemos $k = 0 = K$. Usando o mesmo argumento da Proposição 4.1, obtemos que o anel maximal é isométrico a um cilindro euclidiano. Pois fixando a métrica (4.10) definida na Proposição 4.1 em M, que é do tipo I e II, obtemos por unicidade que a métrica maximal é isométrica à da Proposição 4.1. Consequentemente a maximal é isométrica ao cilindro euclidiano C mencionado na Proposição 4.1.

Portanto, maximizemos $\det \Delta$ sob todos os cilindros euclidianos com raio fixado. Tome $r = 1$ e parametrize um cilindro de comprimento a por $0 < x < a$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. O Laplaciano nesse caso é dado por

$$\Delta = \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{d^2}{dx^2}.$$

Como no Exemplo (1.4), as autofunções para um tal cilindro são

$$\operatorname{sen}(n\pi x/a)e^{im\theta}, \quad n > 0 \text{ e } m \in \mathbb{Z}, \tag{4.5}$$

com respectivos autovalores

$$\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + m^2 = |m + zn|^2, \quad z = \frac{i\pi}{a}. \tag{4.6}$$

A correspondente função zeta associada ao respectivo cilindro para $\operatorname{Re}(s) > 1$ é

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|m + zn|^{2s}} \\ &= \frac{1}{2} \sum \frac{1}{|m + zn|^{2s}} - \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} \\ &= \frac{1}{2} \sum \frac{1}{|m + zn|^{2s}} - \frac{1}{2} \zeta_R(2s), \end{aligned}$$

onde ζ_R é a função zeta de Riemann.

Defina

$$G(s) := \sum \frac{1}{|m + zn|^{2s}}.$$

Então $G(s)$ é a função $G(s, 1)$ para $u = 1$ na notação de Weil (veja [33, pág.73]). Agora pela Fórmula Limite de Kronecker (veja [33, pág.75]), obtemos que a expansão de $G(s)$ em torno de $s = 0$ é

$$G(s) = -1 - \frac{s}{12} \log((2\pi)^{24}(\eta\bar{\eta})^{24}) + O(s^2), \tag{4.7}$$

onde $\eta(z)$ é a função eta de Dedekind. Do qual, $G'(0) = -\frac{1}{12} \log\left((2\pi)^{24}(\eta\bar{\eta})^{24}\right)$.

Logo

$$\begin{aligned}\log\det\Delta = -\zeta'(0) &= \log(2\pi|\eta(z)|^2) + \zeta_R'(0)\\ &= \log(2\pi|\eta(z)|^2) - \frac{1}{2}\log 2\pi = \log\left(\sqrt{2\pi}|\eta(z)|^2\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como $\eta(i/y) = y^{1/2}e^{-\pi y/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi n y})$, obtemos que maximizar $\eta(\pi i/a)$ é equivalente a maximizar $I(a) = a^{1/2}e^{-a/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2na})$. Como $\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2na})$ é próximo de 1, o máximo de $I(a)$ é principalmente determinado pelo máximo de $f(a) = a^{1/2}e^{-a/12}$, que é em $a = 6$. Disto, podemos calcular o valor máximo de $I(a)$ de forma iterada. De fato,

$$0 = \frac{d}{da}\log I(a) = \frac{1}{2a} - \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2ne^{-2na}}{1-e^{-2na}}, \tag{4.9}$$

então a solução desta equação pode ser calculada iterando a expressão

$$a_m = 6 + 24a_{m-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-2na_{m-1}}}{1-e^{-2na_{m-1}}},$$

com dado inicial $a_0 = 6$. Depois de cinco iterações obtemos $a_5 = 6.0008833511233\ldots$. Isto prova o corolário. □

Proposição 4.1. *Para todos os anéis planares sob a condição $\int_M KdA \leq 0$, o único anel com módulo $p = 3.078733161882\ldots$ possui determinante máximo na métrica euclidiana.*

Demonstração. Considere o anel M, $r_1 < |z| < r_2$ com a métrica

$$\sigma = |z|^{-2}|dz|^2, \tag{4.10}$$

onde $|dz|^2 = \sigma_0$ é a métrica euclidiana. Afirmamos que σ é uma métrica do tipo II com ambas as curvas do bordo possuindo curvatura geodésica nula. Como $k_\sigma = e^{-\varphi}(k_0 + \partial_n\varphi)$ onde $\varphi = \log|z|^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}k_1 = |z|\left(k_0 + \partial_n\log|z|^{-1}\right) &= r_1\left(-\frac{1}{r_1} - \partial_n\log\frac{1}{r_1}\right)\\ &= r_1\left(-\frac{1}{r_1} - r_1\left(-\frac{1}{r_1^2}\right)\right)\\ &= -1 + r_1^2\frac{1}{r_1^2} = 0,\end{aligned}$$

para o círculo $S(0,r_1)$. Analogamente, respeitando a direção do campo normal, $k_2 = r_2\left(\frac{1}{r_2} + r_2\left(-\frac{1}{r_2^2}\right)\right) = 0$ para o círculo $S(0,r_2)$. Portanto $k_\sigma = k_1 + k_2 = 0$.

Como $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\sqrt{x^2+y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log\sqrt{x^2+y^2}$ onde $z = x+iy$, obtemos que o Laplaciano euclidiano

$$\Delta_0 \log |z|^{-1} = 0.$$

Segue da fórmula conforme entre curvaturas (veja Proposição 1.5) que

$$K = e^{-2\varphi}(-\Delta_0\varphi + K_0) = -e^{-2\varphi}\Delta_0\varphi = 0.$$

Portanto σ é uma métrica uniforme do tipo II. Em particular, esta métrica é do Tipo I também.

Notamos que em $(M, r^{-2}\sigma_0)$, o comprimento

$$l(S(0,r_1)) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(\theta)| d\theta = 2\pi,$$

pois $|\gamma'(\theta)| = \sqrt{r_1^{-2}\sigma_0(\gamma'(\theta), \gamma'(\theta))} = \sqrt{r_1^{-2}r_1^2} = 1$ onde $\gamma(\theta) = r_1 e^{i\theta}$. Analogamente $l(S(0,r_2)) = 2\pi$. Além disso, o comprimento do segmento ligando r_1 a r_2 é dado por $\int_{r_1}^{r_2} |\gamma'(r)| dr$, onde γ é um segmento p.p.c.a ligando r_1 a r_2. Assim,

$$|\gamma'(r)| = \sqrt{r^{-2}\sigma_0(\gamma'(r), \gamma'(r))} = r^{-1}|\gamma'(r)|_0 = r^{-1}.$$

Portanto, $\int_{r_1}^{r_2} |\gamma'(r)| dr = \log(r_2/r_1)$,

Seja (C, σ_0) o cilindro euclidiano, $C = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r) : \theta \in [0, 2\pi) \text{ e } r \in [0, \log(r_2/r_1)]\}$. Defina $f : (C, \sigma_0) \to (M, r^{-2}\sigma_0)$ por $f(r, \theta) = (r_1 e^r \cos\theta, r_1 e^r \operatorname{sen}\theta)$. Logo f é um difeomorfismo de C em M. Como

$$df(r,\theta) = \begin{bmatrix} r_1 e^r \cos\theta & -r_1 e^r \operatorname{sen}\theta \\ r_1 e^r \operatorname{sen}\theta & r_1 e^r \cos\theta \end{bmatrix},$$

obtemos que

$$r^{-2}\sigma_0(df(e_i), df(e_j)) \;\; = \;\; r^{-2}r_1^2 e^{2r}\sigma_0(e_i, e_j)$$

para $i, j = 1, 2$, isto é, f é uma aplicação conforme. Assim, fixando a área ou o comprimento do bordo sob a condição $\int_M K dA \leq 0$ em $[\sigma_0]$, segue do fato que (C, σ_0) e (M, σ) são do tipo I e II, e da unicidade dos Teoremas 3.1 e 3.2 que (C, σ_0) é isométrico a (M, σ).

Agora, para $\varphi = \log |z|^{-1}$, um simples cálculo usando a equação (3.4) implica

$$\log\det\Delta_\varphi = \frac{1}{6}a + \log\det\Delta_0,$$

onde $a = \log(r_2/r_1)$. Assim da relação (4.8) do Corolário 4.2 obtemos

$$\log\det\Delta_0 = -\frac{1}{6}a + \log(\sqrt{2\pi}|\eta(i\pi/a)|^2) = \log(\sqrt{2\pi}|e^{-a/12}\eta(i\pi/a)|^2). \tag{4.11}$$

Portanto, maximizar $\log\det\Delta_0$ é equivalente a maximizar $|e^{-a/12}\eta(i\pi/a)|$. Como na prova do Corolário 4.2, isto é equivalente a maximizar $J(a) = a^{1/2}e^{-a/6}\prod(1-e^{-2na})$. Como $\prod(1-e^{-2na})$ é próximo de 1, segue que o máximo de $J(a)$ é principalmente determinado pelo máximo de $f(a) = a^{1/2}e^{-a/6}$. Fazendo $f'(a) = 0$ obtemos $a = 3$.

Agora, derivando

$$0 = \frac{d}{da}\log J(a) = \frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\log a - \frac{a}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\log(1-e^{-2na})\right) = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2ne^{-2na}}{1-e^{-2na}} - \frac{1}{6},$$

obtemos a solução desta equação através do processo indutivo

$$a_m = 3 + 12a_{m-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ne^{-2na_{m-1}}}{1-e^{-2na_{m-1}}}$$

com $a_0 = 3$. Depois de 15 iterações, obtemos o valor afirmado p na proposição. □

Continuando com as aplicações, mostraremos que entre a família de domínios planares duplamente conexo (domínio que possui um único furo) em uma dada classe conforme, um anel possui o determinante máximo.

Proposição 4.2. *Se Ω é um domínio planar duplamente conexo com a métrica euclidiana, que é conforme à $A = \{z : 1 < |z| < R\}$, então $\det\Delta_\Omega \leq \det\Delta_A$. Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, Ω é uma composição de movimentos rígidos de A.*

Demonstração. Seja $F(z)$ uma aplicação conforme de A em Ω, e defina $u(z) = \log|F'(z)|$. Afirmamos que $\int_\gamma \partial_n u|dz| = 0$ para qualquer círculo γ de raio $1 \leq r \leq R$, onde $\partial_n u$ é a derivada normal ao longo de γ.

Fazendo o pullback da métrica euclidiana $|dz|^2$ por F, obtemos que F é uma isometria de $(A, e^{2u}|dz|^2)$ em $(\Omega, |dz|^2)$.

Para $e^{2u}|dz|^2$, segue que $k_u = e^{-u}(k_0 + \partial_n u)$. Logo

$$\begin{aligned}\int_\gamma k_u ds &= \int_\gamma k_0 e^{-u} ds + \int_\gamma (\partial_n u)e^{-u} ds \\ &= \int_\gamma k_0|dz| + \int_\gamma \partial_n u|dz| \\ &= \int_\gamma \frac{1}{r}|dz| + \int_\gamma \partial_n u|dz| \\ &= 2\pi + \int_\gamma \partial_n u|dz|\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $ds = e^u|dz|$.

Como $F : A \to \Omega$ é conforme, segue que $F(\gamma) := \Gamma$ terá curvatura geodésica constante no plano, e em particular será um círculo, donde $k = \dfrac{1}{\text{raio}\Gamma}$. Logo $\int_\Gamma k ds = \frac{1}{\text{raio}\Gamma}\int_\Gamma ds = \frac{1}{\text{raio}\Gamma}2\pi(\text{raio}\Gamma) = 2\pi$. Como F é um difeomorfismo, segue do Teorema de Mudança de

Variáveis que

$$2\pi = \int_{\Gamma} kds = \int_{\gamma} (k \circ F)|F^{'}||dz| = \int_{\gamma} k_u ds. \tag{4.13}$$

Substituindo (4.13) em (4.12) obtemos que

$$\int_{\gamma} \partial_n u|dz| = 0. \tag{4.14}$$

Portanto, para provar o lema basta procurar o máximo do determinante do Laplaciano nas métricas da forma $e^{2u}|dz|^2$ em A, onde u é harmônica e satisfaz $\int_{\gamma} \partial_n u|dz| = 0$ para qualquer círculo γ com raio $1 \le r \le R$.

Usando a equação (3.1) e que $K_0 = 0 = K_u$ para tais métricas, obtemos

$$\log \det \Delta_u = -\frac{1}{6\pi}\left(\frac{1}{2}\int_A |\nabla_0 u|^2\, dxdy + \int_{\partial A} k_0 u\,|dz|\right) + C. \tag{4.15}$$

Afirmamos que $\int_{\partial A} k_0 u\,|dz| = 0$. De fato, usando (4.14)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A (\Delta_0 u)\log r\, dxdy - \int_A u\Delta_0 \log r\, dxdy \\ &= \int_{\partial A} (\partial_n u)\log r\,|dz| - \int_{\partial A} u\,\partial_n \log r\,|dz| \\ &= 0 - \int_{\partial A} u\frac{1}{r}|dz| \\ &= \int_{\partial A} u\, k_0\,|dz|. \end{aligned}$$

Assim, de (4.15) concluímos que $-\log\det\Delta_u$ é minimizado por funções constantes u. Portanto, $\det\Delta_\Omega \le \det\Delta_u$ onde u é constante. Além disso, a igualdade é satisfeita, se a aplicação conforme F de A em Ω possui derivada constante. Então $F(z) = az + b$ $(a \neq 0)$, e portanto Ω será nada mais do que uma homotetia ou rotação seguida por uma translação. □

Corolário 4.3. *O anel com módulo* $p = 3.078733161882\ldots$ *possui determinante máximo entre todos os domínios planares duplamente conexo munidos da métrica euclidiana.*

Demonstração. Como todo domínio planar duplamente conexo munido da métrica euclidiana é conforme a um anel, segue das Proposições 4.1 e 4.2 o afirmado.

De fato, pela Proposição 4.1, o anel com módulo $p = 3.078\ldots$ possui determinante máximo na métrica euclidiana entre todos os anéis planares. Pela Proposição 4.2, entre todos os domínios planares duplamente conexo munidos da métrica euclidiana, o anel com módulo $p = 3.078\ldots$ maximiza $\det\Delta$. □

Corolário 4.4. *Um domínio anelar planar de módulo* $p = 3.078\ldots$ *é audível na classe de todos os domínios planares.*

O corolário anterior fornece um exemplo de um domínio planar que não é simplesmente conexo, mas é audível na classe de todos os domínios planares.

Capítulo 5

Compacidade de conjuntos isoespectrais

Estudamos compacidade de conjuntos isoespectrais de domínios planares simplesmente conexos com bordo suave munidos da métrica euclidiana em uma topologia natural C^∞, todos com condição do bordo de Dirichlet. A seguir tornaremos mais preciso o que seria essa compacidade nesta topologia suave. A prova da compacidade desta família isoespectral de domínios seguirá dos invariantes do calor (veja Teorema 1.70 e os outros invariantes (1.72)) e do determinante regularizado do Laplaciano.

5.1 Domínios Planares Simplesmente Conexos

Seja D um domínio planar simplesmente conexo com bordo suave. Pelo Teorema da Aplicação de Riemann, existe $F : U \to D$ uma aplicação conforme, onde U é o disco unitário. Logo obtemos que $(U, e^{2\varphi}|dz|^2)$ é isométrico a $(D, |dz|^2)$ via F, onde $\varphi(z) = \log|F'(z)|$ e $|dz|^2$ é a métrica euclidiana. Portanto, usamos o disco unitário como superfície modelo e parametrizamos os domínios planares simplesmente conexos por métricas planas (curvatura Gaussiana nula) em U conformes a métrica euclidiana.

Seja $\mathcal{F}$ o espaço de todas as métricas planas em U conformes a métrica euclidiana. Usando a fórmula conforme entre curvaturas Gaussianas da Proposição 1.5, obtemos que $\mathcal{F}$ pode ser identificado como o conjunto de todas as funções harmônicas φ em U, onde a correspondente métrica no $\partial U = S^1$ é

$$ds = e^{\varphi}|dz|.$$

Em todo este capítulo usaremos o espaço de Sobolev $W^k(\partial U)$ com a norma caracterizada pela transformada de Fourier de φ

$$||\varphi||_k^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|^2(1+|n|^2)^k, \tag{5.1}$$

para $k \geq \frac{1}{2}$ (veja [28, pág. 25]).

Proposição 5.1. *O conjunto de métricas em $\mathcal{F}$ correspondendo a domínios planares simplesmente conexos é fechado em $W^k(\partial U)$ para $k \geq \frac{1}{2}$. Além disso, sempre recuperamos a função conforme de Riemann correspondendo a um domínio planar simplesmente conexo em $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Se φ corresponde a um domínio planar simplesmente conexo em $\mathcal{F}$ então considerando a conjugada harmônica ψ de φ obtemos que

$$F(z) = \int_0^z e^{(\varphi+i\psi)(\zeta)}d\zeta \tag{5.2}$$

é uma aplicação conforme do disco U sobre o respectivo domínio planar simplesmente conexo D, pois $|F'(z)| = e^{\varphi}$. Portanto, recuperamos a função conforme de Riemann $F : U \to D$, onde D é o domínio correspondendo a métrica $e^{2\varphi}|dz|^2$ em U.

Agora, seja $\{\varphi_n\}$ uma sequencia em $\mathcal{F}$ correspondendo a domínios planares simplesmente conexo convergindo a φ em $W^k(\partial U)$. Tomando a extensão harmônica de φ em U, que denotamos por φ, e considerando a conjugada harmônica ψ de φ, obtemos da relação (5.2) que φ corresponde a um domínio planar simplesmente conexo em $\mathcal{F}$. Isto prova a proposição. □

Considere o grupo de Mobius $SU(1,1)$ fixando o disco unitário. Este grupo age naturalmente em $\mathcal{F}$ por pullback, produzindo classes de métricas isométricas. Em termos do fator conforme e^{φ}, a ação em $\varphi|\partial U$ por $V \in SU(1,1)$ é dado por

$$(V \cdot \varphi)(e^{i\theta}) = \varphi(Ve^{i\theta}) + \log|V'(e^{i\theta})|, \tag{5.3}$$

ou mais geralmente para $\lambda > 0$ em $C^\infty(\partial U)$ por

$$(V \cdot \lambda)(e^{i\theta}) = \lambda(Ve^{i\theta})|V'(e^{i\theta})|, \tag{5.4}$$

onde a métrica é $ds = \lambda|dz|$. Como $e^{\varphi}|dz|$ e $e^{V\cdot\varphi}|dz|$ são métricas isométricas, $\mathcal{F}$ decompõe-se em classes de métricas isométricas, e portanto, consideramos o espaço quociente

$$M^k(\partial U) = W^k(\partial U)/SU(1,1). \tag{5.5}$$

Denotamos um elemento de $M^k(\partial U)$ por $[\varphi]$, onde $[\varphi]$ é a classe isométrica de $e^{\varphi}|dz|$. Como métricas isométricas são isoespectrais, o que é de interesse em nosso problema de determinar compacidade de uma família isoespectral de domínios são as classes de métricas isométricas. Portanto, definimos a topologia em $M^k(\partial U)$ como:

Definição 5.1. *Uma sequencia de classes de equivalência $\{[\varphi_n]\}$ em $M^k(\partial U)$ converge a $[\varphi]$ em $M^k(\partial U)$, se existem representantes $\varphi_n \in [\varphi_n]$ e $\varphi \in [\varphi]$ tal que $||\varphi_n - \varphi||_k \to 0$.*

O problema isoespectral consiste em mostrar que um conjunto isoespectral $\{[\varphi]\}$ em $M^\infty(\partial U)$ correspondendo a domínios planares simplesmente conexos é sequencialmente compacto em $M^\infty(\partial U)$. De acordo com a Definição 5.1 é suficiente mostrar que $\{\varphi\}$ é sequencialmente compacto em $W^\infty(\partial U)$. Para provar isso, é importante saber escolher o representante φ de cada classe isométrica $[\varphi]$.

Definição 5.2. *Uma métrica $e^\varphi|dz|$ (não necessariamente plana) é balanceada se*

$$\int_0^{2\pi} e^\varphi e^{i\theta} d\theta = 0. \tag{5.6}$$

Agora, mostraremos a existência de uma métrica balanceada em cada classe $[\varphi]$. A escolha do representante em $[\varphi]$ para provar a compacidade da família isoespectral $\{[\varphi]\}$ é a métrica balanceada.

Proposição 5.2. *Em cada classe isométrica $[\varphi]$ existe um representante balanceado, ou mais geralmente, para qualquer $\lambda > 0$ em $L^2(\partial U)$ existe $V \in SU(1,1)$ tal que*

$$\int_0^{2\pi} (V.\lambda)(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta = 0.$$

Demonstração. Represente $V \in SU(1,1)$ por

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Como $V : U \to U$ é um difeomorfismo que fixa o disco unitário U com $V(S^1) = S^1$, obtemos do Teorema de mudança de variáveis e do fato que $e^{i\theta} = V^{-1}(e^{it}) = \dfrac{\bar{a}e^{it} - b}{-\bar{b}e^{it} + a}$, que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (V \cdot \lambda)(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \lambda(Ve^{i\theta})|V'(e^{i\theta})|e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \lambda(e^{it}) \frac{\bar{a}e^{it} - b}{-\bar{b}e^{it} + a} dt. \end{aligned}$$

Dado $a \in \mathbb{R}$ com b escolhido tal que $|b|^2 = |a|^2 - 1$, podemos construir $V \in SU(1,1)$. Definindo $z = -\frac{b}{a}$ então $|z| < 1$. Para $z = re^{i\theta}$

$$2\pi H(z) := \int_0^{2\pi} \lambda(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{\bar{z}e^{it} + 1} dt = e^{i\theta} \int_0^{2\pi} \lambda(e^{it}) \frac{e^{i(t-\theta)} + r}{re^{i(t-\theta)} + 1} dt. \tag{5.7}$$

Denotando o valor médio de λ em S^1 por λ_0, isto é, $\lambda_0 = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(e^{it})dt$ obtemos que

$$H(re^{i\theta}) \to \lambda_0 e^{i\theta}, \tag{5.8}$$

uniformemente em θ quando $r \to 1$, pois $\left|\frac{e^{i(t-\theta)}+r}{re^{i(t-\theta)}+1} - 1\right| \leq \frac{2|r-1|}{r}$. Além disso, como o integrando da relação (5.7) possui módulo $\lambda(e^{it})$, segue que $|H(z)| < \lambda_0$ se $|z| < 1$. Portanto, H é uma função contínua de $|z| < 1$ em $|w| < \lambda_0$, que pela convergência (5.8) estende de forma contínua de $|z| \leq 1$ em $|w| \leq \lambda_0$. Em particular, existe um z_0 com $|z_0| < 1$ tal que $H(z_0) = 0$. Isto prova a proposição. □

Seja $\{\varphi\}$ a família de representantes balanceados de cada classe isométrica do conjunto isoespectral $\{[\varphi]\}$ em $M^\infty(\partial U)$ correspondendo a domínios planares simplesmente conexos. É suficiente mostrar que $\{\varphi\}$ é sequencialmente compacto em $W^k(\partial U)$ para todo $k \geq \frac{1}{2}$. Pelo Teorema de Compacidade de Rellich-Kondarachov (veja Teorema 1.4) é suficiente mostrar os seguintes passos: para toda φ balanceada

1. Limitação uniforme em $W^{1/2}(\partial U)$ usando o determinante do Laplaciano.

2. Limitação uniforme em $W^2(\partial U)$ usando os primeiros invariantes do calor.

3. Limitação uniforme em $W^k(\partial U)$ para todo k, usando os invariantes do calor de ordem superior.

Prova do passo 1. Observamos que o primeiro invariante do calor (veja (1.71) no Teorema 1.15) fornece o comprimento do bordo do domínio, e portanto, é o mesmo para todos os elementos de um conjunto isoespectral. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$\int_0^{2\pi} e^\varphi d\theta = 2\pi \tag{5.9}$$

para todas as φ balanceadas.

Agora, da equação (3.1) segue que para qualquer métrica plana $e^{2\varphi}|dz|^2$ em U obtemos

$$\log\det \Delta_\varphi = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\int_{S^1} \varphi\partial_n\varphi d\mu + \int_{S^1} \varphi d\mu\right) + C, \tag{5.10}$$

onde $d\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$, C é uma constante independente de φ e $\partial_n u$ é a derivada normal exterior após u ser estendida de forma harmônica em U.

Em termos da série de Fourier de φ

$$\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)e^{in\theta}.$$

Logo, conforme visto na relação (3.47), a derivada normal de φ é dada por

$$\partial_n\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)|n|e^{in\theta}. \tag{5.11}$$

Portanto pela definição do produto interno $L^2(S^1)$,

$$\int_{S^1} \varphi \partial_n \varphi \, d\mu = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)|n|\bar{\widehat{\varphi}}(m) \int_{S^1} e^{in\theta} e^{-im\theta} \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|^2 |n|. \tag{5.12}$$

Como $\det \Delta_\varphi$ é dado em função do espectro de Δ_φ, segue que é um invariante espectral para todas as φ's balanceadas. Logo de (5.10)

$$\frac{1}{2}\int_{S^1} \varphi \partial_n \varphi d\mu + \int_{S^1} \varphi d\mu = C_1, \tag{5.13}$$

para todas as φ's balanceadas e alguma constante C_1, que sem perda de generalidade suponhamos suficientemente pequena. Agora, como φ é balanceada satisfaz a desigualdade de Lebedev-Milin

$$0 \leq \frac{1}{4}\int_{S^1} \varphi \partial_n \varphi d\mu + \int_{S^1} \varphi d\mu - \log \int_{S^1} e^{\varphi} d\mu, \tag{5.14}$$

que é provada em [19, pág.172] (veja equação (5)), do qual, pela relação (5.9) obtemos

$$\int_{S^1} \varphi \partial_n \varphi \, d\mu \leq 4C_1 \ll 1. \tag{5.15}$$

Usaremos o símbolo "$a \ll b$" para dizer que a é "muito menor" que b. Logo, da relação (5.12) e da definição da norma Sobolev (5.1) obtemos que

$$||\varphi||^2_{1/2} \ll 1,$$

ou seja, $\{\varphi\}$ é uniformemente limitado em $W^{1/2}(\partial U)$. $\square$

Prova do passo 2. Primeiro mostraremos que o conjunto $\{\varphi\}$ é uniformemente limitado em $C(\partial U)$. Os primeiros invariantes do calor (veja (1.72) na página 29) implicam que para qualquer φ balanceada

$$\begin{aligned} \int_{S^1} k \; ds &= C_2 \\ \int_{S^1} k^2 \; ds &= C_3 \\ \alpha_1 \int_{S^1} k^4 \; ds - \alpha_2 \int_{S^1} (k')^2 \; ds &= C_4 \end{aligned} \tag{5.16}$$

onde k é a curvatura geodésica do ∂U na métrica $ds = e^{\varphi}|dz|$, k' é a derivada com respeito ao comprimento de arco de S^1 e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Pela fórmula conforme do Corolário 1.9,

$$k = e^{-\varphi}(1 + \partial_n \varphi), \tag{5.17}$$

obtemos

$$\int_0^{2\pi} e^{-\varphi}(1+\partial_n\varphi)^2 d\theta = C_3.$$

Aplicando a desigualdade triangular obtemos

$$\int_0^{2\pi} e^{-\varphi}(\partial_n\varphi)^2 d\theta \leq 2C_3 + 2\int_0^{2\pi} e^{-\varphi} d\theta. \tag{5.18}$$

Usando a Desigualdade de Trudinger, que afirma que

$$\int_{S^1} e^{-\varphi} d\theta \leq c_1 \exp\left(c_0 \int_{S^1} \varphi\partial_n\varphi d\theta\right),$$

para $\varphi \in W^{1/2}(\partial U)'$ (cuja prova pode ser vista em Lema 3.9.a de [19, pág.202]), junto com a desigualdade (5.15) obtemos que a desigualdade (5.18) torna-se

$$\int_0^{2\pi} e^{-\varphi}(\partial_n\varphi)^2 d\theta \ll 1. \tag{5.19}$$

Seja $\psi = \varphi - \varphi(0)$, onde

$$\varphi(0) = \int_{S^1} \varphi(e^{i\theta}) d\mu. \tag{5.20}$$

Então, usando que

$$\partial_n\psi(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(m)|m|e^{im\theta}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} N(x,y)\partial_n\psi(y)\ d\mu(y) &= \int_{S^1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in(x-y)}}{|n|} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(m)|m|e^{imy}\ d\mu(y) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(n)e^{inx} \\
&= \psi(x),
\end{aligned}$$

onde

$$N(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in(x-y)}}{|n|} = -\log(2 - 2\cos(x-y)).$$

Para estimar ψ, usamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz junto com a desigualdade (5.19), a Desigualdade de Trudinger e a limitação (5.15) para obter

$$\begin{aligned}
|\psi(x)|^2 &\leq \int_{S^1} N^2(x,y)e^{\psi(y)}\ d\mu(y) \int_{S^1} e^{-\psi(y)}(\partial_n\psi(y))^2\ d\mu(y) \\
&\ll \left(\int_{S^1} N^4(x,y)\ d\mu(y)\right)^{1/2} \left(\int_{S^1} e^{2\psi(y)}\ d\mu(y)\right)^{1/2} \ll 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{\psi\}$ é uniformemente limitado em $C(\partial U)$. Agora, das equações (5.14), (5.13) e

(5.9) obtemos

$$\left|\int_{S^1} \varphi \; d\mu\right| \leq C_1 \ll 1, \tag{5.21}$$

do qual, pela relação (5.20) obtemos que $\{\varphi\}$ é uniformemente limitado em $C(\partial U)$. Usando isto na desigualdade (5.19) obtemos da relação (5.11) que

$$||\varphi||_1^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|^2|n|^2 = \int_0^{2\pi} (\partial_n\varphi)^2 \; d\mu \ll 1. \tag{5.22}$$

Portanto, $\{\varphi\}$ é uniformemente limitado em $W^1(\partial U)$. Agora, mostraremos que $\{\varphi\}$ é uniformemente limitado em $W^2(\partial U)$. Seja k_0 o valor médio de $k(s)$ em S^1. Então, usando Cauchy-Schwarz em (5.23),

$$\begin{aligned}
k(s)^2 &\leq 2(k(s)-k_0)^2 + 2k_0^2 \leq 2\int_{S^1} \frac{d}{ds}(k(s)-k_0)^2 \; ds + 2k_0^2 \\
&\leq 4\int_{S^1} k'(s)(k(s)-k_0) \; ds + 2k_0^2 \\
&\leq \varepsilon\int_{S^1} k'(s)^2 \; ds + \frac{4}{\varepsilon}\int_{S^1} (k(s)-k_0)^2 \; ds + 2k_0^2 \\
&\leq \varepsilon\int_{S^1} k'(s)^2 \; ds + \left(\frac{4}{\varepsilon}+2\right)\int_{S^1} k(s)^2 \; ds,
\end{aligned} \tag{5.23}$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Daí

$$\int_{S^1} k(s)^4 \; ds \leq \varepsilon \int_{S^1} k(s)^2 \; ds \int_{S^1} k'(s)^2 \; ds + \left(\frac{4}{\varepsilon}+2\right)\int_{S^1} k(s)^2 \; ds \int_{S^1} k(s)^2 \; ds,$$

e usando a relação (5.16) obtemos

$$\int_{S^1} k'(s)^2 \; ds \ll 1, \tag{5.24}$$

para ε suficientemente pequeno. Pela Desigualdade de Poincaré (Corolário 1.12) e Teorema 1.5 , k é uniformemente limitado sobre o conjunto isoespectral de representantes balanceados $\{\varphi\}$ em $W^1(\partial U) = \{u \in L^2(S^1) \; ; \; \frac{du}{d\theta} \in L^2(S^1)\}$ e em particular em $C(\partial U)$. Pela relação (5.17), obtemos

$$\partial_\theta\partial_n\varphi = e^{\varphi}k' + ke^{\varphi}\varphi'. \tag{5.25}$$

Como φ e k são uniformemente limitados em $C(\partial U)$, segue das estimativas (5.22) e (5.24) que

$$||\varphi||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|^2|n|^4 = \int_{S^1} (\partial_\theta\partial_n\varphi)^2 \; d\theta \ll 1, \tag{5.26}$$

ou seja, φ é uniformemente limitado em $W^2(\partial U)$. □

Prova do passo 3. Para finalizar a prova usamos o resultado de Richard Melrose [18], que mostrou que o $2j+1$ invariante do calor, que é uma integral de um polinômio universal em $k^{(j)}(s)$ e suas derivadas de ordem inferior, é da forma

$$c_{2j+1}\int_{S^1}|k^{(j)}(s)|^2\;ds+\int_{S^1}(\text{derivadas de ordem inferior de } k)\;ds,$$

onde $c_{2j+1}\neq 0$. Disto, ele conclui que $k(s)$ e todas as suas derivadas são uniformemente limitadas sobre o conjunto isoespectral $\{\varphi\}$.

Derivando a equação (5.25), obtemos

$$\partial_\theta\partial_\theta\partial_n\varphi = e^\varphi k'' + k'e^\varphi\varphi' + ke^\varphi(\varphi')^2 + ke^\varphi\varphi'' + k'e^\varphi\varphi'.$$

Usando a conclusão de Melrose e que as φ's balanceadas são uniformemente limitadas em $C(\partial U)$ e $W^2(\partial U)$, obtemos da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$||\varphi||_3^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(n)|^2(|n|^2)^3=\int_{S^1}(\partial_\theta\partial_\theta\partial_n\varphi)^2\;d\theta\ll 1, \tag{5.27}$$

isto é, as φ's são uniformemente limitadas em $W^3(\partial U)$. Repetindo este argumento, segue que as φ's balanceadas são uniformemente limitadas em $W^k(\partial U)$ para todo $k\geq\frac{1}{2}$. $\square$

Portanto, o conjunto isoespectral de classes isométricas de métricas $\{[\varphi]\}$ em $M^\infty(\partial U)$ correspondendo a domínios planares simplesmente conexos é sequencialmente compacto na topologia de $M^\infty(\partial U)$.

Como mostrado em (5.2), podemos recuperar a aplicação conforme de Riemann $F: U\to D$ da métrica $e^{2\varphi}|dz|^2$ em U correspondendo ao domínio D. Assim podemos refrasear a conclusão acima da seguinte forma, se $\{[D_n]\}$ é uma sequencia isoespectral de classes de métricas isométricas de domínios planares simplesmente conexos, então existe subsequência $\{[D_n]\}$ e funções conformes $F_n: U\to D_n$ que converge em $W^\infty(U)$ para uma função conforme de U, em vista da Proposição 5.1.

Referências Bibliográficas

[1] O. Alvarez, Theory of strings with Boundary, Nucl. Phys. B 216 (1983), 125-184.

[2] A. Beurling, "Études sur un problème majoration", Thèse, Almquist and Wiksell, Uppsala, 1933.

[3] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable, second ed., vol. 11 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1973.

[4] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1984.

[5] M. P. do Carmo, Geometria riemanniana, 5º edition, Coleção projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[6] M. P. do Carmo, Differential forms and applications, Universitext. Springer- Verlag, Berlin, 1994. Translated from the 1971 Portuguese original.

[7] G. B. Folland, Real analysis: modern techniques and their applications, Second ed., (Pure and applied mathematics) "A Wiley-Interscience publication.", 1999.

[8] A. Grigor'yan, Heat Kernel and Analysis on Manifolds, American Mathematical Society/International Press - Studies in Advanced Mathematics, Vol. 47, 2009.

[9] G. Grubb, Distributions and Operators, vol. 252 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, Copenhagen, 2008.

[10] C. Gordon, D. L. Webb, and S. Wolpert, One cannot hear the shape of a drum, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), no. 1, 134–138.

[11] M. Kac, Can one hear the shape of a drum?, Amer. Math. Monthly 73 (1966), no. 4, part II, 1–23.

[12] J. L. Kazdan and F. W. Warner, Curvature functions for 2-manifolds, Ann. of Math. 99 (1974), 14-47.

[13] J. M. Lee, Introduction to smooth manifolds, second ed., vol. 218 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013.

[14] P. D. Lax; Functional Analysis; Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts; New York; 2001.

[15] H. P. McKean, Jr., and I. M. Singer, Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, J. Differential Geom. 1 (1967), 1077-1092.

[16] J. Milnor, Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 51 (1964), 542.

[17] J. Moser, A sharp form of an inequality by N. Trudinger, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 1077-1092.

[18] R. Melrose, Isospectral drumheads are compact in C^∞, preprint.

[19] B. Osgood, R. Phillips, and P. Sarnak, Extremals of determinants of Laplacians, Journal of Functional Analysis 80 (1988), 148-211.

[20] B. Osgood, R. Phillips and P. Sarnak, Compact Isospectral sets of surfaces, Journal Functional Analysis 80 (1988), 212-234.

[21] Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, Charles W. Clark, NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, 2010.

[22] A. Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings, Phys. Lett. B 103 (1981), 207-210.

[23] D. B. Ray and I. M. Singer, R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, Advances in Math. 7 (1971), 145–210.

[24] F. Riesz and B. SZ. Nagy, "Functional Analysis"(transl. by L. F. Boron), Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1955.

[25] S. Rosenberg, The Laplacian on a Riemannian Manifold: An Introduction to Analysis on Manifolds. London Mathematical Society Student Texts 31.

[26] Michael Renardy; Robert C. Rogers, An introduction to partial differential equations, Texts in Applied Mathematics 13 (Second ed.), New York: Springer-Verlag, 2004.

[27] L. Smith, The asymptotics of the heat equation for a boundary value problem, Invent. Math. 63 (1981), 467-493.

[28] M. E. Taylor, Pseudodifferential Operators, Princeton University Press, Princeton, New Jersey; 1981.

[29] M. E. Taylor, Partial Differential Equations I: Basic theory, Applied Mathematical Sciences-115, Springer-Verlag, New York, 1996.

[30] M. E. Taylor, Partial Differential Equations III: Nonlinear Equations, Second Edition, Applied Mathematical Sciences-117, Springer-Verlag, New York, 2011.

[31] N. S. Trudinger, On imbedding into Orlicz spaces and some applications, J. Math. Mech. 17 (1967), 473-484.

[32] H. Weyl, Über die Asymptotische Verteilung der Eigenwerte, Nachr. Konigl. Ges. Wiss. Göttingen (1911), 110-117.

[33] A. Weil, "Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker", Springer-Verlag, New York, 1976.