UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE
CAMPUS DE SÃO CARLOS

WILSON DE OLIVEIRA RANGEL

APLICAÇÃO DE UMA ATIVIDADE EXPERIMENTAL SOBRE VAZÃO DE LÍQUIDOS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

SÃO CARLOS – SP
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

CAMPUS DE SÃO CARLOS

WILSON DE OLIVEIRA RANGEL

APLICAÇÃO DE UMA ATIVIDADE EXPERIMENTAL SOBRE VAZÃO DE LÍQUIDOS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini

SÃO CARLOS - SP

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Wilson de Oliveira Rangel, realizada em 28/06/2019:

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
UFSCar

Prof. Dr. José Luciano Santinho Lima
IFSP

Prof. Dr. Wladimir Seixas
UFSCar

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”

Cora Coralina

A todos aqueles que buscam a sabedoria e o despertar da consciência mais do que tudo e acreditam que a vida é a melhor escola para isso.

AGRADECIMENTOS

Ao Meu Pai que está em Segredo e à Minha Divina Mãe Kundalini que tudo fizeram para que eu não fracassasse nessa minha existência.

O que seria de mim sem eles? Provavelmente não teria a chance de aprender a trabalhar com os Três Fatores da Revolução da Consciência e de viver de acordo com o reto pensar, o reto sentir e o reto agir. Fatalmente ficaria perdido no caminho do materialismo e da ignorância.

Agradeço ao meu orientador Professor Roberto pelo acolhimento dado na elaboração dessa Dissertação e pela sabedoria demonstrada em todos os momentos.

Agradeço aos professores do Programa de Pós Graduação, que dedicaram partes de suas vidas em prol da Matemática. Muitos deles foram meus professores na graduação e foi um imenso prazer poder reencontrá-los.

Agradeço à minha esposa Márcia pela disposição em acompanhar todo o desenvolvimento dessa jornada.

Agradeço à minha Mãe Dona Antonia pela simplicidade em entender a importância de se continuar estudando e em memória de meu Pai Ageu que sempre buscou dar o melhor de si na educação de todos os filhos.

Agradeço aos alunos do 1º B da turma de 2018 que demonstraram enorme empenho e disposição em participar dessa experiência didática.

Agradeço à professora Renata por ter concedido um pouco do seu tempo na correção do resumo para a versão em inglês.

Agradeço também ao pessoal da Escola Maschietto que permitiram a realização desse trabalho, apoiando-me em todos os momentos.

RESUMO

Pensando no contexto escolar do ponto de vista prático, as funções servem de instrumento para o estudo de fenômenos e permitem a construção de modelos experimentais que podem ser descritos através de representações numéricas, algébricas, tabelas, gráficos, entre outras. A proposta deste trabalho é construir uma sequência didática que enfoque essas representações de uma maneira mais articulada, levando a uma compreensão mais abrangente do conteúdo por parte do estudante. Tendo como objetivo a ideia de superar as limitações de situações contextualizadas envolvendo funções, foi proposta uma sequência didática baseada em um experimento que irá permitir aos estudantes formalizarem e explorarem o conceito de função e a identificarem as suas diferentes representações e aplicações. Essa proposta teve como abordagem metodológica a Modelagem Matemática, cujas diretrizes possibilitam o estudo, a pesquisa e a problematização de uma situação real. Com os dados obtidos do experimento, os estudantes compuseram uma tabela de modo a converter esses dados em um gráfico de pontos no plano cartesiano. A partir desse gráfico foi construída uma função para modelar o fenômeno observado. Todas as tarefas propostas foram detalhadamente descritas em Folhas de Atividades, que constituem a base para o propósito desse trabalho. No total, foram confeccionadas doze Folhas de Atividades separadas em cinco blocos, incluindo o último bloco que contempla uma avaliação final com questões sobre vazão e construção de gráficos. Com a conclusão da aplicação e análise dos resultados, constatamos que a proposta pedagógica alcançou as metas desejadas, estimulando e incentivando a participação dos estudantes no desenvolvimento de sua autonomia e de seus saberes matemáticos, contribuindo decisivamente para a compreensão do significado do conceito de função.

Palavras-chave: Função. Experimento. Modelagem Matemática. Folhas de Atividades.

ABSTRACT

Considering the school context from the practical point of view, functions serve as instruments for the study of phenomena and allow the construction of experimental models that can be described through numerical, algebraic, tables, graphical representations, among others. The purpose of this work is to construct a didactic sequence that focuses these representations in a more articulated way, leading to a more comprehensive understanding of the content by the student. Aiming at overcoming the limitations of contextualized situations involving functions, a didactic sequence was proposed based on an experiment that would allow students to formalize and explore the concept of function and to identify their different representations and applications. This proposal had as methodological approach the Mathematical Modeling, whose guidelines make possible the study, the research and the problematization of a real situation. With the data obtained from the experiment, the students composed a table in order to convert this data into a dot chart in the Cartesian plane. From this graph a function was constructed to model the phenomenon observed. All the proposed tasks were described in detail in Activity Sheets, which form the basis for the purpose of this work. In total, twelve separate Activity Sheets were prepared in five blocks, including the last block that includes a final evaluation with questions about flow and construction of graphs. With the conclusion of the application and analysis of the results, we verified that the pedagogical proposal reached the desired goals, stimulating and encouraging students' participation in the development of their autonomy and their mathematical knowledge, contributing decisively to the understanding of the meaning of the concept of function.

Keywords: Function. Experiment. Mathematical Modeling. Activity Sheets.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apresentamos neste trabalho a nossa Dissertação de Mestrado Profissional junto ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).

O objetivo desta monografia é descrever as atividades desenvolvidas junto a uma turma de alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual. Essas atividades envolveram a realização de um experimento cujo objetivo é contribuir para a construção do conceito de função afim. Para isso, foi elaborada uma sequência didática que descrevemos neste trabalho.

Sou professor do Ensino Básico desde 2000, e me efetivei na carreira do Magistério em 2004. Nos últimos anos tenho me dedicado a dar aulas exclusivamente para o Ensino Médio.

Desde a graduação me chamava a atenção a maneira como os professores abordavam as suas disciplinas e como isso chegava a afetar a minha forma de aprender os conteúdos. Assim, sempre esteve nos meus pensamentos a procura por metodologias que pudessem melhorar o aprendizado de determinados temas. Acredito que seja natural nos espelharmos um pouco naquelas situações que nos fizeram ter sentimentos agradáveis, ao mesmo tempo em que buscamos afastar ou esquecer aquelas que nos fizeram sentir incomodados.

Enfim, tive a oportunidade de experimentar situações fantásticas que corroboraram em mim a vontade de ser professor de Matemática.

Na rede pública como professor, enfrentei situações desoladoras, com todos os tipos de problemas e dificuldades que hoje ainda encontramos nas escolas. Mas não deixei esmorecer minha postura assumida desde a graduação em adotar propostas de aulas que dessem aos estudantes oportunidades em experimentarem um pouco daquilo que acredito que pode contribuir para a formação de cada um. Sempre procuro ter presente em meu trabalho como professor a importância da Matemática como ferramenta para ajudar no despertar da consciência do indivíduo e no papel que ela tem desempenhado em toda a história da humanidade.

Nesse caminho, tive bons resultados no exercício da minha profissão, ouvindo diálogos de estudantes que passaram a ver a Matemática com outros olhos, demonstrando com fatos um maior interesse pelas minhas aulas e pela matéria. Mesmo assim, sentimos as dificuldades que eles têm em compreender determinados conteúdos, em consequência da falta de maturidade e dos atrasos que trazem para a série em que estão inseridos.

Como o conceito de função constitui um tema de grande importância na Matemática e no Ensino Básico, considerei relevante tratar esse tema nessa Dissertação de Mestrado, destacando o seguinte problema didático:

“Como construir o conceito de função afim no Ensino Médio de forma a ajudar os estudantes a terem um aprendizado autônomo e significativo, transcendendo a forma tradicional como esse assunto é ensinado”.

Mesmo que busquemos resultados em boas aulas expositivas, tentando “cativar” os estudantes, percebemos que essas aulas não são suficientes para que todos compreendam bem o significado do conceito de função. Isso acaba acontecendo também com aqueles poucos estudantes que sempre se destacam nas aulas de Matemática.

Assim, a meta dessa proposta pedagógica foi elaborar um experimento no qual a sua modelagem iria permitir um estudo mais profundo da caracterização de uma função afim.

Esse é o grande diferencial desse trabalho, pois, em geral, não há o costume em se realizar atividades experimentais nas aulas de Matemática.

METODOLOGIA DE NOSSA PESQUISA

Como se trata de um projeto pedagógico na área da Educação e ensino da Matemática, esse trabalho foi desenvolvido de acordo com os principais passos da metodologia conhecida como Engenharia Didática. Desse modo, os capítulos dessa dissertação foram construídos seguindo esses passos ou fases da proposta da Engenharia Didática, de forma a facilitar e adequar a organização e a pesquisa desse projeto.

Conforme algumas leituras que foram realizadas, encontramos a origem da Engenharia Didática na França dos anos 1980 e, segundo a pesquisadora e matemática francesa Michèle Artigue (1988), o termo é inspirado no trabalho do engenheiro, cujo projeto precisa se apoiar em sólido conhecimento científico, mas também precisa enfrentar problemas práticos que não são levados em conta pela ciência.

Já em Carneiro (2005), encontramos uma adaptação simplificada das quatro fases principais da Engenharia Didática proposta por Artigue, especialmente voltada para professores:

1ª) Análises prévias: Análise do funcionamento do ensino usual com propostas de intervenção que venham melhorar a sala de aula. Nessa análise também são mostrados os resultados do ensino tradicional bem como as dificuldades e barreiras que marcam a evolução das concepções dos estudantes.

2ª) Concepção e análise a *priori*: Corresponde a duas partes. Uma descritiva, que envolve a construção da proposta didática de acordo com as variáveis que podem influenciar no comportamento do estudante. A outra parte é chamada de preditiva, que trata das hipóteses que se pretende validar numa sequência de ações que ajudam a prever o comportamento do estudante, ou seja, um teste da proposta que visa distinguir as respostas e as reações esperadas, bem como a previsão do que se espera que o estudante vá aprender.

3ª) Implementação da proposta didática: Aplicação da proposta em sala de aula, tendo em vista o que foi planejado na fase de concepção. Nessa etapa deve ocorrer a apresentação detalhada dos objetivos do trabalho aos estudantes.

4ª) Análise a *posteriori* e validação da proposta: É feita utilizando-se os resultados das atividades realizadas pelos estudantes. É com base nessa produção que vamos considerar válida ou não as hipóteses que tratam do desempenho cognitivo dos estudantes. Quer dizer, temos que confrontar as hipóteses e as expectativas destacadas na análise a *priori* com os resultados obtidos, de modo a termos condições de considerar válida a nossa proposta pedagógica.

ESQUEMA DA DISSERTAÇÃO

Seguindo, então, essas quatro fases, o primeiro capítulo se refere às análises prévias. Nele comentamos as abordagens do assunto que encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, na Proposta Curricular da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e na Base Nacional Comum Curricular. Destacamos a importância que é dada ao estudo do conceito de função nesses documentos e como ele deve ser tratado. Também são feitas algumas observações sobre opiniões de alguns autores e pesquisadores que escrevem sobre o assunto.

A segunda fase da Engenharia Didática, que é a concepção e análise a *priori*, corresponde ao segundo capítulo. Aqui são descritas as justificativas e as motivações para a escolha da metodologia, bem como a solução proposta para o problema didático. É feita a descrição detalhada das Folhas de Atividades, com explicações sobre os itens na ordem em que foram elaborados e qual a expectativa nas resoluções e respostas a serem dadas pelos estudantes. No final, é feita uma análise prévia do experimento que vai ser realizado e também uma descrição detalhada da simulação antecipada que fizemos. Também são esclarecidos alguns pontos sobre a aplicação do experimento e apresentada uma proposta de planejamento para a aplicação desse projeto pedagógico.

O terceiro capítulo corresponde à terceira fase da Engenharia Didática, ou seja, a implementação da proposta, momento em que ocorreu a apresentação e a aplicação do nosso projeto. No início do capítulo descrevemos brevemente a escola e o perfil dos estudantes da turma que foi escolhida para participar das atividades. São relatadas as partes mais significativas da realização do experimento e da resolução das Folhas de Atividades, onde são comentadas as dificuldades que os grupos encontraram ou não em cada etapa e os momentos de intervenção do professor. No final discorremos sobre algumas conclusões da aplicação da proposta pedagógica.

O quarto capítulo corresponde à quarta fase ou análise a *posteriori* e validação do experimento. Aqui é feita uma apreciação da proposta didática com foco nas ideias principais e no significado do nosso produto didático. Após um resumo da análise da aplicação em cada uma das etapas, deixamos uma seção com sugestões de propostas para novos trabalhos, seguida de algumas observações pessoais e conclusão sobre o resultado alcançado.

No Apêndice A é apresentado o modelo das Folhas de Atividades que foram aplicadas em sala de aula e que também pode servir como material para que qualquer professor possa utilizá-lo em suas aulas.

No Apêndice B é apresentado o mesmo modelo com as respostas baseadas nos dados obtidos em uma simulação feita antes da aplicação da proposta pedagógica.

Nossa expectativa é que esse trabalho seja uma contribuição a mais para todos aqueles professores que estejam empenhados em melhorar a qualidade de suas aulas e, consequentemente, do ensino da Matemática.

CAPÍTULO 1

O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM NA MATEMÁTICA E NO ENSINO MÉDIO

1.1 INTRODUÇÃO

Esse capítulo é destinado ao estudo e análise da função afim sob o enfoque da sua presença e importância no ensino da Matemática.

Seguindo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e a Proposta Curricular da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, verificamos como é feito o tratamento acerca do ensino de funções, analisando as sugestões de abordagem para esse tema.

Também buscamos analisar as opiniões e posicionamentos de alguns autores especialistas da área de educação matemática ou afins sobre a maneira como o conceito de função pode ser abordado nas escolas.

De uma maneira sucinta, intentamos destacar o parecer favorável ao uso de metodologias diferenciadas que visam trazer melhorias na construção do conhecimento matemático. Concluímos que conteúdos que são trabalhados por meio de situações contextualizadas e associadas a experimentos realizados pelos próprios estudantes se caracterizam como facilitadores para a construção dos significados de conceitos matemáticos dentro do processo de ensino e de aprendizagem.

1.2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DA FUNÇÃO AFIM

Nesta seção, buscamos estabelecer as principais definições e propriedades da função afim para caracterizar a notação usualmente empregada em seu estudo no Ensino Médio e justificar alguns resultados que usamos nessa dissertação. Para isso, seguimos como referência a obra “A Matemática do Ensino Médio”, volume 1, do Prof. Elon L. de Lima e outros autores, que trata das funções afins.

> ...; as funções afins, as quadráticas, as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático adequado para representar uma situação específica.
> A fim de saber qual o tipo de função que dever ser empregado para resolver um determinado problema, é necessário comparar as características desse problema com as propriedades típicas da função que se tem em mente. Este processo requer que se conheçam os teoremas de caracterização para cada tipo de função. Sem tal conhecimento é impossível aplicar satisfatoriamente os conceitos e métodos matemáticos para resolver os problemas concretos que ocorrem, tanto no dia a dia como nas aplicações da Matemática às outras ciências e à tecnologia. (LIMA, 1997, prefácio).

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem constantes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ tais que $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

No caso de $\boldsymbol{a = 1}$ e $\boldsymbol{b = 0}$, temos a função identidade definida por $\boldsymbol{f(x) = x}$. Para $\boldsymbol{a \neq 0}$ e $\boldsymbol{b = 0}$, a função linear $\boldsymbol{f(x) = ax}$. Se $\boldsymbol{a = 0}$ e $\boldsymbol{b \neq 0}$, a função constante $\boldsymbol{f(x) = b}$. Para $\boldsymbol{a = 1}$ e $\boldsymbol{b \neq 0}$, as translações dadas por $\boldsymbol{f(x) = x + b}$.

Podemos saber se uma determinada função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é afim sem conhecermos os valores numéricos dos coeficientes $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Assim, quando $\boldsymbol{x = 0}$, obtemos o valor de $\boldsymbol{b}$, ou seja, $\boldsymbol{b = f(0)}$ que pode ser chamado de valor inicial da função $\boldsymbol{f}$.

Se conhecemos os valores de $\boldsymbol{f(x_1)}$ e $\boldsymbol{f(x_2)}$ que a função $\boldsymbol{f}$ assume em dois pontos distintos arbitrários $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$, podemos determinar o coeficiente $\boldsymbol{a}$. De fato, dados $\boldsymbol{f(x_1) = ax_1 + b}$ e $\boldsymbol{f(x_2) = ax_2 + b}$, temos que

$$\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)}, \text{ de modo que}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}}$$

Esse número é chamado de taxa de crescimento ou taxa de variação da função $\boldsymbol{f}$.

Se $\boldsymbol{a} > 0$ temos uma função crescente. Se $\boldsymbol{a} < 0$, decrescente e, quando $\boldsymbol{a} = 0$, uma função constante.

Como recurso de representação de uma função afim $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$, temos o seu gráfico, que é sempre uma linha reta. Isso pode ser verificado tomando-se três pontos quaisquer $\boldsymbol{P_1} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}))$, $\boldsymbol{P_2} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}))$, $\boldsymbol{P_3} = (\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_3}))$ pertencentes ao gráfico e mostrando que eles são colineares. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} < \boldsymbol{x_3}$. Vamos mostrar que

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_3})$$

Da Geometria Analítica, temos que a distância entre os pontos $\boldsymbol{P_1}$ e $\boldsymbol{P_2}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}) &= \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})]^2} \\
&= \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + [(\boldsymbol{ax_2} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{ax_1} + \boldsymbol{b})]^2} \\
&= \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})]^2} \\
&= \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2} \\
&= \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{a}^2)} \\
&= (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})\sqrt{\boldsymbol{1} + \boldsymbol{a}^2}
\end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}) = (\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_2})\sqrt{\boldsymbol{1} + \boldsymbol{a}^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}) &= (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_2})\sqrt{\boldsymbol{1} + \boldsymbol{a}^2} \\
&= (\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_1})\sqrt{\boldsymbol{1} + \boldsymbol{a}^2} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_3})
\end{aligned}$$

Portanto, os pontos são colineares e o gráfico de qualquer função afim é uma reta não-vertical.

No gráfico da função afim $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$, podemos ainda destacar que o coeficiente $\boldsymbol{b}$ é a ordenada do ponto $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b})$ no qual a reta intercepta o eixo OY e o coeficiente $\boldsymbol{a}$ é a inclinação ou coeficiente angular, determinado pela tangente trigonométrica do ângulo que a reta faz com o eixo OX, medido sempre no sentido anti-horário. Se $\boldsymbol{a} > 0$, temos uma reta ascendente e se $\boldsymbol{a} < 0$ temos uma reta descendente.

Para concluir, como precisamos de dois pontos para determinar uma reta no plano, é suficiente conhecermos os valores $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$ e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$ que a função afim assume para dois valores quaisquer $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ $(\boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{x_2})$.

Cabe ressaltar aqui um comentário sobre a nomenclatura que ocorre nos textos dos livros escolares, que se referem à função afim como função do 1º grau, sugerindo que função tem grau. Acreditamos que a grande maioria dos professores utiliza essa terminologia para facilitar o entendimento do assunto pelos estudantes, já que a lei de formação da função "lembra" o formato de uma equação do 1º grau. De qualquer forma, a expressão $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ também pode ser chamada de função polinomial do 1º grau, ou seja, uma função expressa por um polinômio de grau 1.

Outro recurso para a representação de uma função afim é na forma de tabela, podendo ser construída a partir de dados produzidos em um experimento. Daí, podemos localizar os pontos no plano cartesiano de forma a verificar a sua distribuição. Se os pontos se aproximarem de uma linha reta, podemos entender que a função a ser usada para representar os dados colhidos e que refletem as propriedades do experimento realizado poderá ser uma função afim. O uso da tabela consiste em ajudar o estudante a perceber o padrão de variação entre as grandezas consideradas bem como facilitar na hora da construção do gráfico.

No caso particular da função afim dada por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}$ (função linear) podemos lançar mão do Teorema Fundamental da Proporcionalidade para determinar, em qualquer situação, se uma dada função afim é ou não linear.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade: Seja $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{kx}) = \boldsymbol{kf}(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$ e todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

(2) Se $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{1})$, então $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

(3) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ para quaisquer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que (1) $\Rightarrow$ (2) e dividir a demonstração em dois casos: no primeiro mostraremos que $\boldsymbol{f(x) = ax}$ para todo $\boldsymbol{x}$ racional e, no segundo, que $\boldsymbol{f(x) = ax}$ para todo $\boldsymbol{x}$ irracional.

CASO 1: Seja um número racional. Logo, $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$, com $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ e $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^*$. Usando (1) temos que

$$\boldsymbol{n.f(r \cdot x) = f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) = m \cdot f(x)}, \text{ logo}$$

$$\boldsymbol{f(r \cdot x) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x)}$$

Seja $\boldsymbol{a = f(1)}$. Temos que para todo $\boldsymbol{r}$ racional,

$$\boldsymbol{f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = a \cdot r}$$

CASO 2: Como $\boldsymbol{f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0}$, o fato de $\boldsymbol{f}$ ser crescente no dá que $\boldsymbol{a = f(1) > f(0) = 0}$. Portanto, $\boldsymbol{a}$ é positivo. Vamos supor por absurdo que exista algum número irracional $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{f(x) \neq a\,x}$. Admitamos que $\boldsymbol{f(x)} < a\,x$ (tratamos de modo análogo o caso $\boldsymbol{f(x)} > a\,x$). Temos então que $\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{a}} < \boldsymbol{x}$. Tomemos um número racional $\boldsymbol{r}$ entre $\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{a}}$ e $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{a}} < r < \boldsymbol{x}$$

Então $\boldsymbol{f(x)} < a\,r < ax$, ou seja, $\boldsymbol{f(x)} < f(\boldsymbol{r}) < a\,x$, o que é absurdo, pois $\boldsymbol{f}$ é crescente logo, como $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{x}$, deveríamos ter $\boldsymbol{f(r)} < f(x)$. Isso completa a demonstração de que (1) $\Rightarrow$ (2).

Vamos provar agora que (2) $\Rightarrow$ (3). Partindo de (2), temos que:

$$\boldsymbol{f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)}, \text{ logo (2)} \Rightarrow \text{(3)}.$$

Para o caso (3) $\Rightarrow$ (1), verifica-se imediatamente que $\boldsymbol{f(nx) = n \cdot f(x)}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\boldsymbol{f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)}, \text{ logo } \boldsymbol{f(0) = 0}.$$

Daí resulta, para quaisquer $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, que

$$\boldsymbol{0 = f(0) = f(-n \cdot x + n \cdot x) = f(-n \cdot x) + f(n \cdot x) = n \cdot f(x)}.$$

Logo, $\boldsymbol{f(-n \cdot x) = -n \cdot f(x)}$. Segue que $\boldsymbol{f(n \cdot x) = n \cdot f(x)}$ para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, provando que (3) $\Rightarrow$ (1).

A importância do Teorema Fundamental da Proporcionalidade é que ele permite saber se uma dada função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear verificando apenas duas condições:

1ª) $\boldsymbol{f}$ deve ser crescente ou decrescente;

2ª) $\boldsymbol{f(kx) = kf(x)}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ e todo $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$.

Se $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, é suficiente verificarmos apenas a segunda condição para $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Agora, como saber se para um determinado problema, o modelo matemático a ser adotado corresponde a uma função afim?

Para isso temos um resultado que garante que em determinadas situações, caso a taxa de variação da função seja constante, então a função é uma função afim.

Teorema de Caracterização de uma Função Afim: Seja $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o valor do acréscimo $\boldsymbol{f(x+h) - f(x) = \varphi(h)}$ depender apenas de $\boldsymbol{h}$, mas não de $\boldsymbol{x}$, então $\boldsymbol{f}$ é uma função afim.

Demonstração: Suponhamos que a função $\boldsymbol{f}$ seja crescente. Então $\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é crescente, com $\boldsymbol{\varphi(0) = 0}$. Além disso, para qualquer $\boldsymbol{h, k} \in \mathbb{R}$, temos:

$$\boldsymbol{\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x) = f\big((x+k)+h\big) - f(x+k) + f(x+k) - f(x)}$$

$$\boldsymbol{= \varphi(h) + \varphi(k)}$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $\boldsymbol{a = \varphi(1)}$, tem-se $\boldsymbol{\varphi(h) = a \cdot h}$, para todo $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que

$$\boldsymbol{f(x+h) - f(x) = a \cdot h}.$$

Tomando $\boldsymbol{x = 0}$ e escrevendo $\boldsymbol{b = f(0)}$, resulta que $\boldsymbol{f(h) = a \cdot h + b}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, $\boldsymbol{f}$ é uma função afim.

Com isso, intentamos mostrar parte do conteúdo formal que trata do estudo da função afim, com destaque para a função linear que serve de modelo para problemas que envolvem proporcionalidade.

1.3 A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO DE ACORDO COM OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNEM) E AS ORIENTAÇÕES EDUCACIONAIS COMPLEMENTARES

Do ponto de vista dos saberes e dos conhecimentos disciplinares, podemos entender o Ensino Médio como a etapa final da formação básica do indivíduo.

É nessa etapa que os objetivos educacionais, na expectativa de serem alcançados, são trabalhados de forma mais ampla e profunda, buscando levar o estudante ao desenvolvimento de uma consciência mais desperta e atuante, de forma que ele possa compreender o sentido e a importância de sua presença no meio em que está inserido.

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão do mundo. (BRASIL, 2000, p.6).

Dessa forma, novos métodos de trabalho precisam ser promovidos para que essas aspirações educacionais possam ser objetivadas.

> A condução de um aprendizado com essas pretensões formativas, mais do que do conhecimento científico e pedagógico acumulado nas didáticas específicas de cada disciplina da área, depende do conjunto de práticas bem como de novas diretrizes estabelecidas no âmbito escolar, ou seja, de uma compreensão amplamente partilhada do sentido do processo educativo. (BRASIL, 2000, p.7).

Nesse contexto, a presença da Matemática se faz de suma importância, haja visto que não existe atividade da vida humana onde a Matemática não se faz necessária. É ela que permite o estabelecimento de relações entre duas ou mais variáveis quaisquer e a interpretação de fenômenos e informações presentes em nossa realidade.

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também

> desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 2000, p.40).

É claro que o papel da Matemática no Ensino Médio não se restringe apenas a formar e estruturar o pensamento e o raciocínio ou a instrumentalizar as atividades humanas. A Matemática possui características próprias onde, por meio de estruturas como definições e demonstrações, levam à construção de novos conceitos.

Podemos enfatizar também a importância da Matemática em possibilitar ao estudante a continuidade do seu aprendizado na medida em que ele toma conhecimento de novas informações e instrumentos.

> ...cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento. (BRASIL, 2000, p.41).

Aqui se torna interessante destacarmos os objetivos do ensino da Matemática no Ensino Médio de acordo com os PCNEM, para que esse ensino resulte em uma aprendizagem verdadeira e que faça sentido para o estudante:

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

> - Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> - Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2000, p.42).

Essas atitudes e habilidades descritas nos Parâmetros podem ser desenvolvidas a partir de critérios que permitem a constituição de uma sequência de temas ou pontos principais da Matemática.

Dentre esses critérios, os PCNEM dão destaque especial à contextualização no ensino da Matemática, citando como primeiro exemplo exatamente o conteúdo que é o foco dessa dissertação:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.
>
> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. (BRASIL, 2000, p. 43).

Já, sobre a importância do ensino de funções, o documento conhecido como Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), destaca que:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2002, p.121).

Além do que, é no ensino de funções que podemos constatar que esse conteúdo se mostra realmente propício para colocarmos em prática a contextualização e a interdisciplinaridade, buscando tornar a aprendizagem da

Matemática mais motivadora, além de resolver ou amenizar o grande problema dos questionamentos feitos pelos estudantes acerca da importância e da aplicabilidade do que é estudado em sala de aula, mesmo que por vezes eles não compreendam como seria essa aplicabilidade.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p.43).

Mas a contextualização na Matemática só faz sentido se for representada com um propósito determinado e não utilizada de modo dissimulado ou exagerado. Por isso, deve ser elaborada de forma planejada e sem complicações, de modo a ser compreendida pelos estudantes ao relacionarem o contexto que está sendo trabalhado com as suas realidades.

Essa temática é abordada e defendida por muitos autores como um dos caminhos para melhorar a relação entre ensino e aprendizagem da Matemática, visto que os resultados apresentados têm-se mostrado bastante eficientes e produtivos.

Estamos destacando aqui a contextualização como um recurso pedagógico que permite ao professor variar a sua metodologia em alguns momentos que se mostrem favoráveis para isso, de modo a permitir que o estudante se desloque de sua condição de espectador passivo para uma condição de construção e execução do seu próprio entendimento do que está sendo estudado em sala de aula.

A relevância da contextualização na Matemática está na quebra do mito criado sobre a dificuldade em aprendê-la, por ser uma disciplina muito abstrata e complexa, destinada a apenas um pequeno grupo de estudantes que se destacam.

Passando agora para o campo da experimentação, pois o nosso projeto pedagógico é iniciado com a realização de um experimento, encontramos também nos PCNEM alguns pontos que buscam incentivar os professores a adotarem uma abordagem mais lúdica em suas aulas:

> Se há unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno a oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nas quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes. (BRASIL, 2000, p.52).

Nessa mesma linha de aprendizado, buscando aproximar a escola do mundo real, os PCNEM ainda afirmam que tal sistema confere um sentido imediato ao conhecimento que está sendo aprendido, dando margens a um posterior aumento da abstração desse conhecimento:

> Para o aprendizado cientifico matemático e tecnológico, a experimentação, seja ela de demonstração, seja de observação e manipulação de situações e equipamentos do cotidiano do aluno e até mesmo a laboratorial, propriamente dita, é distinta daquela conduzida para a descoberta científica e é particularmente importante quando permite ao estudante diferentes e concomitantes formas de percepção qualitativa e quantitativa, de manuseio, observação, confronto, dúvida e de construção conceitual. A experimentação permite ainda ao aluno a tomada de dados significativos, com os quais possa verificar ou propor hipóteses explicativas e, preferencialmente, fazer previsões sobre outras experiências não realizadas. (BRASIL, 2000, p.52).

Durante o tempo em que esse trabalho foi desenvolvido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com a inclusão da etapa do Ensino Médio ainda não tinha sido aprovada, fato esse que ocorreu no dia 04 de Dezembro de 2018 com a homologação no dia 14 de dezembro do mesmo ano pelo Ministério da Educação e Cultura.

Como se trata de um documento norteador dos currículos a serem elaborados ou adequados pelas escolas, a BNCC busca estabelecer os objetivos de aprendizagem que se pretende alcançar através da definição de competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos componentes curriculares.

Desse modo, achamos por bem levar o produto dessa proposta pedagógica à luz da BNCC e com grande satisfação constatamos que em nenhum momento há algum tipo de comprometimento ou desvio dos propósitos pretendidos por esse nosso trabalho.

> Essa estrutura adota a **flexibilidade** como princípio de **organização curricular**, o que permite a construção de currículos e propostas pedagógicas que atendam mais adequadamente às especificidades locais e à multiplicidade de interesses dos estudantes, estimulando o exercício do **protagonismo juvenil** e fortalecendo o desenvolvimento de seus projetos de vida. (BRASIL, 2019, p.468).

Observamos também que a contextualização aplicada à realidade é um dos grandes focos das aprendizagens no Ensino Médio de modo a permitir que os estudantes formulem e resolvam problemas em diferentes contextos a partir de novos conhecimentos.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2019, p.529).

Segundo a BNCC, o trabalho com as competências e habilidades não exige que elas sejam tratadas em uma ordem predefinida, o que permite adaptar o currículo e as propostas pedagógicas que foram definidas para o ano letivo.

Dentre as cinco competências específicas para o Ensino Médio, o desenvolvimento da competência específica 3 prevê a utilização de estratégias para construir modelos que envolvam noções, conceitos e procedimentos quantitativos. No caso das habilidades relacionadas a essa competência, encontramos uma que trata especificamente do tema do nosso trabalho: Brasil (2019, p.536) “(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais”.

Logo, mesmo elaborando essa proposta pedagógica muito antes da aprovação da BNCC, cuja implantação está prevista para entrar em vigor no início do ano de 2020, verificamos que as competências e habilidades citadas são plenamente contempladas nos objetivos do nosso trabalho, contribuindo para que o estudante tenha a chance de participar de um processo diferenciado das práticas que enfatizam a ordenação e aplicação direta de regras e fórmulas.

1.4 O CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Os textos que são as bases do Currículo da Secretaria da Educação para o Ensino Fundamental - Ciclo II e o Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo deram origem aos Cadernos do Professor e do Aluno, que constituem as referências para o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP).

Esses Cadernos são, até então, organizados por disciplinas, séries e bimestres, com o intuito de orientar o professor em seu trabalho de ensinar os conteúdos de acordo com as habilidades e competências exigidas para cada ano ou série.

Todas essas competências e habilidades se encontram claramente descritas em um documento chamado Matriz de Avaliação Processual, onde estão definidas as matrizes de referência para as avaliações processuais de todos os componentes curriculares da Educação Básica, com destaque para as matrizes que deverão nortear a elaboração da Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP), que são provas realizadas bimestralmente por todos os alunos da rede pública do estado.

Vejamos então a descrição dessas competências e habilidades para o ensino de funções na 1ª série do Ensino Médio:

> Situação de Aprendizagem 5: Funções como relações de interdependência: múltiplos exemplos
> Habilidades
> 1. Compreender a ideia de proporcionalidade direta e inversa como relações de interdependência.
> 2. Expressar a interdependência entre grandezas por meio de funções.
> 3. Contextualizar a ideia de função e enfrentar situações-problema relativas ao tema.

> Situação de Aprendizagem 6: Funções polinomiais de 1º grau: significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas
> Habilidades
> 1. Compreender a função de 1º grau como expressão de uma proporcionalidade direta entre grandezas.
> 2. Expressar essa proporcionalidade por meio de gráficos.
> Situação de Aprendizagem 7: Funções polinomiais de 2º grau: significado, gráficos, interseções com os eixos, vértices e sinais
> Habilidades
> 1. Compreender a função de 2º grau como expressão de uma proporcionalidade direta com o quadrado da variável independente.
> 2. Expressar por meio de gráficos tal proporcionalidade.
> Situação de Aprendizagem 8: Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos: problemas de máximo e mínimo
> Habilidades
> 1. Compreender fenômenos que envolvem a proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra, traduzindo tal relação na linguagem matemática das funções.
> 2. Equacionar e resolver problemas que envolvem funções de 2º grau, particularmente os que envolvem otimizações (máximos ou mínimos). (Matriz de Avaliação Processual, 2016, p.35).

Sobre o Caderno do Aluno, existem muitas polêmicas a respeito de ser ou não um material adequado para ser usado nas aulas de Matemática. Nossa intenção aqui é a de apenas constatar a presença do conteúdo sobre funções e de que maneira esse conteúdo é tratado.

Conforme nota trazida no próprio Caderno do Professor, esse material traz orientações didático-pedagógicas tendo como base o Currículo Oficial do Estado de São Paulo. Além do que, as atividades propostas, conforme o planejamento do professor, podem ser complementadas para adequá-las à realidade da escola e dos alunos.

Então, o Caderno do Aluno é tão somente um material de apoio para o professor, com o objetivo de explorar as competências e habilidades requeridas conforme os PCN.

Já no 9º ano do Ensino Fundamental, temos a presença do conteúdo sobre funções no 2º bimestre, onde são tratadas as noções básicas, a ideia de interdependência e a construção de tabelas e gráficos para representar funções afins e quadráticas.

No 2º bimestre da 1ª série do Ensino Médio, o conteúdo é retomado por meio de um roteiro para apresentar a ideia de função, buscando organizar os conhecimentos que o estudante já tem sobre o tema.

Por meio de questões e tabelas, os exercícios buscam apresentar a ideia de crescimento ou decrescimento de duas grandezas, podendo haver ou não proporcionalidade direta ou inversa entre elas.

Na sequência, o material passa a tratar dos gráficos de funções, primeiramente na forma $y = f(x) = kx$. Muitos exercícios contextualizados são apresentados, onde o estudante é levado a responder questões de interpretação das funções dadas e a esboçar os gráficos das mesmas.

Vejamos uma observação deixada no Caderno do Professor sobre a apresentação da ideia de função:

> Tanto no caso de uma abordagem inicial quanto no caso de o professor notar que os alunos já conhecem os temas que estão sendo apresentados, seria interessante recorrer a tabelas e gráficos extraídos de jornais ou revistas; tal recurso tanto pode servir como uma porta de entrada facilitadora para o tema quanto para um aprofundamento neste. A escolha dos materiais em sintonia com a real condição de sua turma é sempre um desafio cuja solução depende do discernimento do professor. (Caderno do Professor, 1ª série, V.1, Ed. 2014-2017, p.64).

O principal objetivo da abordagem feita até esse ponto é que a ideia de função como interdependência entre duas grandezas seja assimilada e compreendida pelos estudantes.

Na Situação de Aprendizagem 6 é feito um aprofundamento da ideia de proporcionalidade, onde é explorado o caso especial de interdependência associada à proporcionalidade direta, ou seja, a função afim.

Vale ressaltar aqui que as Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor se iniciam com um quadro onde são destacados os conteúdos e temas para aquela situação, as competências e habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual e um item de sugestão de estratégias, que serve de orientação para o professor quanto ao modo de abordar e trabalhar o tema em questão.

Da mesma forma que foi feito na Situação de Aprendizagem 5, um roteiro para a apresentação da ideia de função afim é deixado na Situação de Aprendizagem 6, onde é trabalhado o significado dos coeficientes da função

$f(x) = ax + b$, bem como o significado de crescimento, decrescimento, taxas de variação, gráficos e inequações.

No final do volume são dadas orientações para a recuperação, e sugerido para o professor que busque outras formas de abordagem dos conceitos caso perceba que alguns estudantes não tenham conseguido acompanhar o processo de construção do conceito de função.

> - prepare e aplique listas de problemas com características mais pontuais, que explorem, de forma mais lenta e gradual, cada conceito;
> - recorra ao livro didático adotado e também a outros, selecionando problemas e agrupando-os de modo a formar listas de atividades em concordância com a proposta de construção conceitual desenvolvida neste Caderno;
> - forme grupos de alunos para a realização conjunta das sequências didáticas que elaborou e, se possível, convoque alunos com maior desenvoltura nos conceitos estudados para auxiliarem os grupos em recuperação. (Caderno do Professor, 1ª série, V.1, Ed. 2014-2017, p.104).

Ainda assim, se os estudantes não alcançarem os objetivos mínimos representados nas Situações de Aprendizagem, é sugerido ao professor que opte por um dos seguintes caminhos:

> - apresentar, inicialmente, os conteúdos básicos sobre funções de 1º e de 2º graus do modo esquemático como costuma ser apresentado na maioria dos materiais didáticos disponíveis, portanto, sem destacar a ideia de proporcionalidade direta de y em relação a x, ou a x^2, introduzindo paulatinamente as explicações ou as justificativas dos resultados fundamentais como foram apresentadas no presente Caderno, na medida em que tais justificativas despertem efetivamente o interesse dos alunos. Naturalmente, consideramos importante que o professor tente despertar tal interesse, mas o imprescindível é que os alunos aprendam os fatos fundamentais do tema, mesmo que tenham chegado até eles por vias distintas das aqui propostas;
> - uma vez que, de uma forma ou de outra, os conteúdos apresentados no presente Caderno já estiveram presentes na 8ª série / 9º ano do Ensino Fundamental, abordar os conteúdos referentes às funções de 1º e de 2º graus como se fosse uma recordação, por meio das atividades envolvendo problemas, invertendo a ordem em que tais temas foram expostos. Assim, a apresentação mais sofisticada, mais apropriada para o Ensino Médio, pode ser mais nitidamente apoiada em abordagens mais simples, à guisa de revisão. (Caderno do Professor, 1ª série, V.1, Ed. 2014-2017, p.104).

No final do volume são feitas algumas considerações e ressaltados os objetivos da avaliação a ser feita pelo professor, no sentido de fornecer ao estudante informações sobre seu progresso ao perceber sua capacidade de saber usar o que aprendeu, bem como dar ao professor informações que sirvam para adequar o conteúdo com novas situações.

As Situações de Aprendizagem 6 e 7 já passam a tratar de função quadrática, seguindo a mesma didática que foi dada para a função afim.

O volume 2 desse material corresponde aos 3º e 4º bimestres, onde serão estudadas as funções exponenciais e logarítmicas por meio de abordagens idênticas às das funções afins e quadráticas.

O aluno volta a ter contato com o estudo de funções no 1º bimestre da 2ª série, onde é feito o tratamento das funções trigonométricas com um destaque especial para os fenômenos periódicos. Daí, no 3º bimestre da 3ª série, de acordo com a Matriz de Avaliação Processual, as funções voltam a ser investigadas de um modo mais amplo e por meio de novos pontos de vista, passando pela construção e interpretação de gráficos, pela contextualização com fenômenos naturais, de modo a favorecerem a utilização da linguagem das funções.

Assim, de certa forma, podemos considerar esse material bem adequado para as séries que se apresentam, pois ele busca construir a ideia de função através de uma sequência didática, buscando contextualizar situações que normalmente só são estudadas nas próprias disciplinas como Química, Física, Geografia, etc., contemplando assim as exigências e necessidades presentes nos PCN. Ou seja, a proposta sugerida pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, através do programa São Paulo Faz Escola, busca tratar o tema sobre funções de maneira bem acabada, de modo a coordenar, apoiar e avaliar o desenvolvimento dos conteúdos.

A proposta desse trabalho que aqui desenvolvemos é ir além do método tradicional ao qual estamos acostumados, buscando menos dependência das aulas expositivas e outorgando mais autonomia aos estudantes, de forma a participarem mais de seu próprio aprendizado.

1.5 ANÁLISE DAS OPINIÕES DE ALGUNS AUTORES DE LIVROS DIDÁTICOS E INVESTIGADORES SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO

Essa seção é o resultado de algumas leituras sobre o posicionamento de pesquisadores da área de ensino a respeito do ensino da Matemática e de funções no ensino básico.

É fato o desinteresse em Matemática pelos estudantes, sendo a maneira como ela é tratada em sala de aula um dos fatores que contribuem para isso. Sendo assim, é uma necessidade do professor buscar novas estratégias ou metodologias de ensino que estejam de acordo com a realidade presente nos dias de hoje. Aliada a esse desinteresse, está a dificuldade advinda da deficiência na formação dos estudantes em relação aos conhecimentos desenvolvidos nas séries anteriores.

Como já destacamos, a contextualização e a interdisciplinaridade se mostram como caminhos inequívocos para amenizar os impasses do desinteresse e das dificuldades dos estudantes com a Matemática.

Se o papel da escola é formar indivíduos autônomos, conscientes e produtivos, ela precisa ir além de suas práticas descontextualizadas e baseadas em um ensino fragmentado com ênfase no acúmulo de informações, passando a ser um ambiente onde o estudante aprende a importância da construção dos significados em detrimento à supervalorização de algoritmos e regras.

> A aplicação dos aprendizados em contextos diferentes daqueles em que foram adquiridos exige muito mais que a simples decoração ou a solução mecânica de exercícios: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, capacidade de análise e abstração. Essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo, mas a falta delas, em Matemática, chama a atenção. (MICOTTI, 1999, p.154).

Como estudante da graduação, senti em muitos momentos a dificuldade em compreender certos conceitos devido à forma como alguns professores abordavam determinados conteúdos. No final das contas, acabava arrumando um jeito de estudar e buscar entender a disciplina.

Para Roque (2012), a dificuldade na compreensão de conceitos matemáticos está na forma como ela é ensinada:

> A diferença entre o modo de fazer e de escrever está também muito presente na matemática, que parece ser escrita de trás pra frente. As definições que precedem as conclusões sobre os objetos de que se está tratando explicitam, na verdade, os requisitos para que um enunciado seja verdadeiro, requisitos que foram descobertos por último, em geral, no trabalho efetivo do matemático. E esse encadeamento lógico na apresentação dos enunciados torna a matemática transcendente e desconectada de seu contexto de descoberta. (ROQUE, 2012, p.30).

Ou seja, valorizar mais o produto final que a construção dos significados ao introduzir os conceitos do ponto de vista formal, acaba afastando os conceitos do que eles mesmos significam. Se pensarmos no conceito de função, assim como em muitos outros conceitos ou definições dentro da Matemática, ele próprio foi construído ao longo de um processo histórico, passando por muitos erros, correções e conclusões, até chegar ao conceito que hoje conhecemos.

Então, nada mais justo que esse processo de construção dos significados seja estendido e aplicado também naquilo que chamamos de processo de ensino e de aprendizagem.

A visão de muitos professores que a Matemática é uma ciência exata, que muitas coisas devem ser aceitas como elas são, sem questioná-las, vai na contramão do caminho que busca dar ao estudante condições para que ele construa seu próprio entendimento a respeito da Matemática.

De acordo com Carvalho (1990, p.15) “A consequência dessa visão em sala de aula é a imposição autoritária do conhecimento matemático por um professor que, supõe-se, domina e o transmite a um aluno passivo, que deve se moldar à autoridade da perfeição científica”.

Podemos concluir aqui essa análise a favor da construção do conhecimento por parte do estudante, de modo que ele demonstre mais interesse em aprendê-la e, particularmente, acredite que está dentro de sua capacidade fazer Matemática.

Já a ideia de agregar um experimento dentro de nossa proposta de trabalho foi a de fornecer autonomia ao estudante na sua construção do conceito de função.

Assim, simplesmente levar o estudante a identificar o tema em uma situação real, com dados que não foram obtidos por ele, não seria uma boa prática da contextualização a que estamos nos referindo, impedindo a generalização e a aplicação da sua capacidade crítica, bem como a sua capacidade de abstração. Dizendo de outro modo, a intenção é despertar no estudante sua capacidade de relacionar os dados obtidos no experimento empiricamente com a formalização do conceito matemático de função que está sendo estudado.

Também, o uso de um experimento prático permite a vivência de aulas mais dinâmicas, interessantes e, principalmente, motivadoras para o aprendizado.

CAPÍTULO 2

CONCEPÇÃO E ANÁLISE DA PROPOSTA DIDÁTICA

2.1 INTRODUÇÃO

Esse capítulo trata da construção do produto didático, iniciando com a escolha da metodologia e as motivações para essa escolha. Em seguida é feita uma análise do experimento e a descrição detalhada da simulação do mesmo, com o propósito de comprovar a viabilidade de sua aplicação. Com a realização do experimento, são feitas algumas observações que foram consideradas importantes para a aplicação em sala de aula e apresentada uma proposta de planejamento para ajudar o professor na aplicação do experimento e na aplicação das Folhas de Atividades.

Trata da segunda fase da metodologia usada para a construção da proposta didática, ou seja, a concepção e análise *a priori*. Como essa proposta é baseada em um experimento que envolve uma sequência de atividades a ser realizada pelos estudantes, escolhemos a Engenharia Didática como método científico, pois é uma metodologia que permite enfrentar o nosso problema didático através da construção de uma proposta de ensino com destaque para a análise das situações envolvidas nesse processo.

O capítulo é encerrado com a descrição detalhada das Folhas de Atividades, que representam exatamente o produto didático dessa proposta pedagógica. Juntamente com a descrição são feitos alguns comentários que buscam explicar os conteúdos que estão sendo trabalhados e as expectativas das respostas e soluções encontradas pelos estudantes.

2.2 ESCOLHA DA METODOLOGIA E PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DIDÁTICO

O ensino do conceito de função de acordo com o Currículo Oficial ainda está pautado nas sequências sugeridas pelos livros didáticos adotados pelas escolas.

Nesses livros, apesar das aplicações matemáticas presentes em contextos que relacionam a ideia de função com situações reais, ainda faltam estratégias que ajudem o estudante a superar suas dificuldades na aprendizagem do conceito de função.

Como uma alternativa de apoio ao trabalho do professor em sua prática de sala de aula, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo criou o programa São Paulo Faz Escola, disponibilizando o material chamado Caderno do Aluno e Caderno do Professor, que traz muitas orientações didático-pedagógicas tendo por base o Currículo Oficial do Estado de São Paulo.

Essa Proposta Curricular, que inclui todos os anos do Ensino Fundamental II (6º ao 9º) e todas as séries do Ensino Médio do Estado de São Paulo, foi construída em consonância com os PCN e com o apoio de professores da rede pública de ensino.

Agora, mesmo sendo um material diferenciado que permite uma articulação entre o Currículo Oficial e as ações em salas de aula, esse material é proposto como um complemento à Matriz Curricular e objetiva tão somente apoiar o professor no planejamento de suas aulas de modo a desenvolver as competências e habilidades requeridas para a aprendizagem do conteúdo que está sendo estudado. Ou seja, caso o professor julgue necessário pode buscar outras propostas ou estratégias que se adequem ao seu planejamento e à realidade de suas turmas.

As estratégias indicadas para as atividades do Caderno do Aluno se resumem a fazer uso de linguagens diversas para interpretar a ideia de função e resolução de exercícios referentes a problemas que envolvem situações contextualizadas. Não fazem nenhuma referência a algum tipo de atividade experimental. O professor, caso não apele por uma metodologia diferenciada, permanecerá na dependência de aulas expositivas e precisará de muito esforço para que os objetivos da Proposta Curricular do Currículo Oficial sejam alcançados.

Como professor de Matemática sempre senti a necessidade de buscar outras formas de ensino que viessem a ultrapassar o convencional e que pudessem despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes. Nesse caminho de quase 18 anos no Magistério, já experimentei um pouco de tudo que a nossa pedagogia nos oferece para trabalhar a Matemática em sala de aula.

Aprendi que formas diferentes de ensinar o mesmo conteúdo se transformam em desafios para o professor. Construir um novo conhecimento a partir de um conhecimento já sabido pode transformar as atividades em sala de aula, criando uma nova dinâmica e um novo entendimento da matéria. Se o professor cai na rotina e na mesmice, seu prazer em ensinar também diminui e, consequentemente, suas aulas correm o risco de se tornarem improdutivas e monótonas.

Dessa forma, aliar o ensino de um conteúdo com uma metodologia diferenciada pode renovar no professor a sua vontade de ensinar e abrir um novo caminho para que os estudantes passem a ter pela Matemática um interesse mais acentuado e uma aprendizagem verdadeiramente autônoma e duradoura.

A proposta didática deste trabalho é auxiliar na construção do conceito de função através de um experimento realizado pelos próprios estudantes.

A ideia dessa proposta não surgiu por acaso nem é resultado de especulações. Na minha graduação, em uma disciplina ministrada pelo professor Roberto chamada Instrumentação Para o Ensino de Matemática (1997), tive a oportunidade de estudar o assunto sobre funções utilizando um material denominado OT (Orientação Técnica), que era uma proposta de trabalho para os futuros professores de Matemática do Ensino Médio. Esse material eu o tenho guardado até hoje, por se tratar de um material diferenciado e direcionado exatamente para nós professores que iriam trabalhar com tais conteúdos. Também na época eu não tinha os recursos que tenho hoje, como computador ou coisa parecida. A figura seguinte foi retirada da página de apresentação do material em questão.

Figura 1 — Texto extraído do material que serviu de base para essa dissertação

PROPOSTA DE O. T. PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO 2º GRAU

Prof. Roberto, Departamento de Matemática da UFSCar

1. Objetivos

Pretendemos propiciar ao professor de Matemática do 2º grau a oportunidade de refletir e atualizar-se a respeito do ensino da Matemática, tomando por base a Proposta Curricular para o Ensino da Matemática 2º grau da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Pretendemos ainda incentivar o professor a dedicar-se a atividades de estudo da Matemática e a procurar melhorar continuamente seu modo de ensinar.

Mais especificamente, pensamos instrumentalizar o professor para o ensino de funções, exponenciais e logaritmos, e habilitá-lo a reconhecer suas aplicações em situações da vida comum e nas ciências. Pretendemos ainda desenvolver um método simples para o ensino da Matemática Financeira, de acordo com a Proposta Curricular.

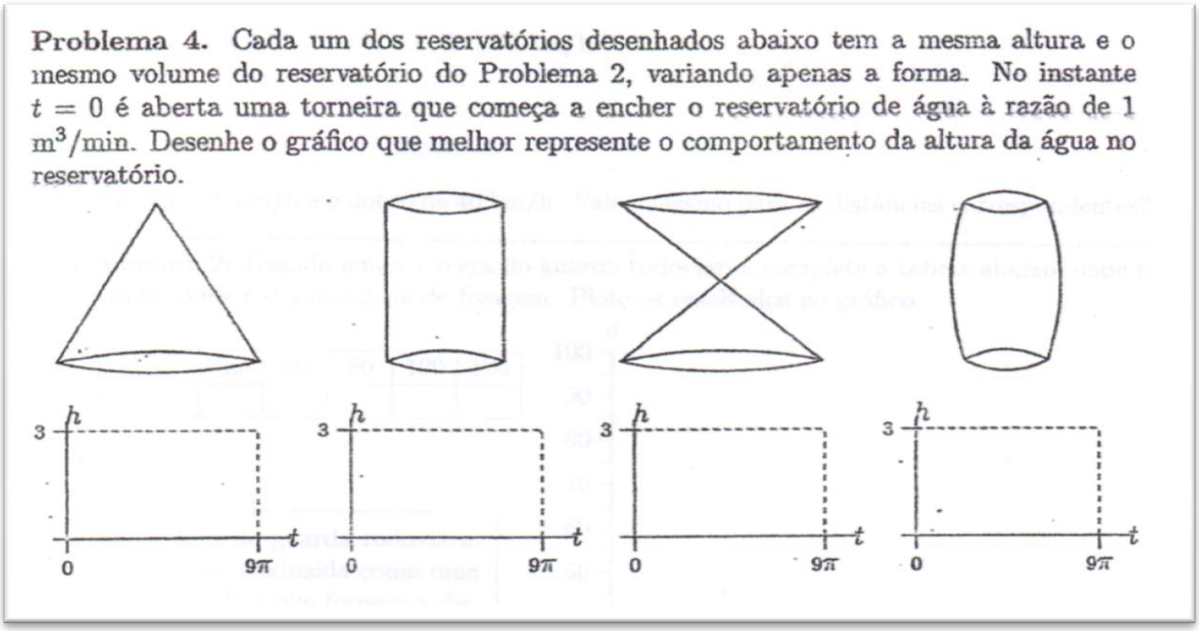
Fonte: Arquivo pessoal

O tema era apresentado de forma preliminar a partir de algumas ideias para introduzir o conceito de função. Depois, por meio de exemplos simples e atividades correspondentes, os professores tinham que fazer um estudo sobre o material do ponto de vista do conteúdo e do ponto de vista pedagógico. Esse material, na verdade, consistia em uma possibilidade de sequência didática para o ensino de funções.

Agora, a parte prática desse material eram as Folhas de Atividades, onde a turma, estudantes da graduação, resolviam os problemas fazendo o papel de estudantes, mas também tinham que analisar o material para saber se era adequado, tanto em nível de conteúdo quanto em nível pedagógico.

Esse material trazia, na parte de interpretação de gráficos, um exemplo e três problemas sobre reservatórios em formatos pouco usuais.

Figura 2 — Problema que serviu de base para a realização dessa dissertação



Problema 4. Cada um dos reservatórios desenhados abaixo tem a mesma altura e o mesmo volume do reservatório do Problema 2, variando apenas a forma. No instante $t = 0$ é aberta uma torneira que começa a encher o reservatório de água à razão de 1 m^3/min. Desenhe o gráfico que melhor represente o comportamento da altura da água no reservatório.

Fonte: Arquivo pessoal

Foi assim que, pensando nesse material, indaguei ao professor Roberto sobre a possibilidade de usar o problema dos reservatórios para construir uma atividade experimental que servisse de pretexto para contextualizar o conceito de função junto aos estudantes da atual escola onde leciono. Conforme o professor Roberto observou, no ensino atual falta um equilíbrio entre o ensino do conceito de função e suas diversas representações e o problema dos reservatórios daria sim uma boa dissertação.

Daí, no decorrer do processo de construção do tema, a solução encontrada para a aplicação da intervenção didática foi a aplicação das Folhas de Atividades que, a exemplo das OT’s, iriam conter uma sequência didática que permitisse aos estudantes construírem o conceito de função afim por meio de textos explicativos e questões que os levassem a obter um aprendizado autônomo e significativo, com o mínimo de intervenção possível do professor.

Diferentemente de outros trabalhos nos quais o foco é um experimento em si, esse trabalho usa o experimento como uma justificativa para a construção do conceito de função. Nele se pretende que o estudante desenvolva sua autonomia no decorrer das resoluções das Folhas de Atividades.

Além disso, a intenção é buscar também diminuir uma das maiores dificuldades presentes na aprendizagem do conteúdo em questão, que é a de relacionar a teoria com situações contextualizadas propostas.

De um modo geral, as Folhas de Atividades foram construídas por meio de questões e problemas que exploram o conhecimento prévio dos estudantes e buscam ser de fácil leitura e interpretação, para que os mesmos consigam converter as informações encontradas em linguagem matemática.

O ponto inicial desse trabalho ficou por conta da realização do experimento em sala de aula, permitindo que os estudantes fossem os próprios autores dos dados que iriam necessitar para dar sequência nas Folhas de Atividades.

Pesquisando sobre as origens das atividades experimentais nas escolas, descobri que essas atividades receberam um grande impulso e difusão no início dos anos 1960, sendo que Galiazzi (2001) escreve que:

> Em pesquisa realizada por Kerr (1963), época de grande difusão das atividades experimentais nas escolas no mundo todo, professores apontaram dez motivos para a realização de atividades experimentais na escola. Esses motivos vêm, repetidamente, sendo encontrados em pesquisas mais recentes (Hodson, 1998) e são:
>
> 1. estimular a observação acurada e o registro cuidadoso dos dados;
> 2. promover métodos de pensamento científico simples e de senso comum;
> 3. desenvolver habilidades manipulativas;
> 4. treinar em resolução de problemas;
> 5. adaptar as exigências das escolas;
> 6. esclarecer a teoria e promover a sua compreensão;
> 7. verificar fatos e princípios estudados anteriormente;
> 8. vivenciar o processo de encontrar fatos por meio da investigação, chegando a seus princípios;
> 9. motivar e manter o interesse na matéria;
> 10. tornar os fenômenos mais reais por meio da experiência.(Hodson, 1998c, p.630)

Apesar de muitos autores proporem o uso de experimentos no ensino de ciências como Física, Química ou Biologia, não podemos esquecer que a Matemática é considerada a base de todas as Ciências e, por consequência, são importantes para seu estudo e desenvolvimento.

É sabido que muitos fenômenos naturais podem ser transformados em modelos matemáticos em um processo chamado Modelagem Matemática. Esse processo, apesar de ser considerado como um método de pesquisa científica, passou a ser visto também como uma ferramenta pedagógica na construção do processo de ensino e aprendizagem.

Para o professor, a Modelagem Matemática exige que ele assuma e desenvolva uma postura de interdisciplinaridade, proporcionando uma formação continuada na medida em que contribui para uma compreensão mais profunda da Matemática e de seus conceitos.

Para o estudante, a Modelagem Matemática pode despertar ou aumentar o seu interesse em aprender, já que ele pode participar de forma mais ativa na construção de seu conhecimento, permitindo-lhe assumir um papel mais crítico e questionador, motivado a transformar o seu papel na escola em uma realidade diferente.

Muitos autores defendem e propõem o uso de atividades que envolvam Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica na condução e na construção do processo de ensino e aprendizagem. Também é fato que existem muitos textos no nível do trabalho aqui proposto que argumentam a favor do uso da modelagem.

Não é o foco dessa dissertação entrar detalhadamente no mérito desse assunto, mas vale a pena discorrermos um pouco sobre isso.

Para Bassanezzi, um dos precursores da Modelagem Matemática no Brasil:

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização, com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZZI, 2002, p.24).

Podemos entender então que o papel da modelagem é transformar situações do cotidiano em uma representação idealizada e simplificada.

Também, de acordo com Bassanezzi:

> No caso da Matemática, é necessário buscar estratégias alternativas de ensino-aprendizagem que facilitem sua compreensão e utilização. A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da

> realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão. (BASSANEZZI, 2002, p.17).

Ao ser transferido para o campo de ação do ensino da Matemática, o conceito de modelagem recebe novas formas, de modo a se tornar uma ferramenta que permite tomar conteúdos do currículo de Matemática e transformá-los em atividades de aplicações da Matemática.

Isso vai permitir que o estudante saia do seu ostracismo costumeiro e comece a perceber que a Matemática que ele aprende na escola pode ser relacionada com a realidade que ele vive quando está fora dela.

No caso do professor, ele deixa de ser um mero transmissor de conhecimentos e passa a ter uma posição de pesquisador. Ao mudar sua forma de interação com os estudantes, passa a fazer parte de um processo de produção de novos conhecimentos.

Agora, dada a importância dessa maneira de inovar em nossas aulas de Matemática e diante dos infindáveis argumentos favoráveis que vemos para o uso da Modelagem Matemática, fica a pergunta: por que essa ideia é tão pouco disseminada no meio escolar?

Como professor posso dizer que são inúmeras as dificuldades que enfrentamos para utilizar a modelagem em nossos cursos e acredito que muitos professores irão concordar comigo.

Somos muito cobrados no cumprimento integral do currículo, haja visto que os estudantes são submetidos a avaliações oficiais que cobram exatamente o material do Caderno do Aluno. Desse modo, sendo a Modelagem Matemática um processo que demanda tempo, o professor opta pelo Currículo Oficial. Considero que essa seja a maior dificuldade para a implementação de novas técnicas de ensino em sala de aula.

Mas é claro que existe uma infinidade de outros fatores que podem dificultar esse trabalho. Muitos professores necessitam de tempo para poder fazer o planejamento das atividades de modelagem, e acabam optando por seguir suas aulas de acordo com a tradicional sequência: conceito, exemplos de resolução e aplicação, exercícios para fixação, trabalhos e/ou a avaliações para nota.

Não queremos aqui justificar a impossibilidade de aplicação de novos métodos que buscam melhorar a qualidade de nossas aulas. Mas precisamos repensar em muito o que estamos fazendo. Mudanças são necessárias e, se essas mudanças não partem de outros, precisamos que elas comecem e se concretizem em nós. Como já foi mencionado nesse trabalho, sempre senti a necessidade de buscar outras formas de ensinar e tratar os conteúdos de Matemática. Nessa perspectiva, a oportunidade de aplicar e executar essa metodologia na escola em que leciono e tornar isso oficial através de um trabalho como esse serviu para validar minha posição de professor e satisfazer os meus anseios.

2.3 ANÁLISE DO EXPERIMENTO E CONHECIMENTOS PRÉVIOS

A motivação para a elaboração dessa proposta pedagógica foi utilizar um experimento que transformasse o problema teórico do enchimento dos reservatórios em um modelo experimental, que permitiria a construção do conceito de função afim acompanhada de um aprofundamento nesse conceito.

A base do experimento é bem simples e depende do uso de uma bombinha de aquário, dessas que são encontradas facilmente no mercado de peixes ornamentais.

A ideia inicial, para tornar o experimento mais acessível, foi fazer uso de uma pequena mangueira transparente para fazer o processo de transferência da água de um recipiente qualquer para o vaso cilíndrico, que faria o papel de reservatório. Então, nesse processo, um estudante do grupo faria a passagem da água para o vaso cilíndrico por meio de um efeito conhecido como efeito sifão. Sifão nada mais é que um mecanismo para passar um líquido de uma altura para outra mais baixa, tendo que passar por um ponto mais alto. O procedimento consiste em encher uma mangueira com água para tirar o ar que está dentro e vedar as duas extremidades com um pequeno tampão ou com os próprios dedos. Uma das extremidades da mangueira deve ser colocada até o fundo dentro do recipiente com água e a outra extremidade dentro do vaso cilíndrico. Depois é só destampar a mangueira e deixar que a água comece a passar para o vaso cilíndrico. A diferença de pressão entre os dois pontos da mangueira é o que vai ocasionar o escoamento da água do recipiente para o vaso, ou seja, a própria gravidade puxa a coluna de água do lado de fora para baixo.

Figura 3 — Imagem de como seria o experimento sem o uso da bombinha de aquário

Fonte: Arquivo Pessoal

Com o desenrolar e evolução da proposta pedagógica, o prof. Roberto achou que ficaria mais adequado para os propósitos do experimento fazer uso de uma bombinha de aquário. Assim, o experimento foi melhorado e, da mesma forma, pode ser realizado em uma sala de aula normal, mesmo que a escola não disponha de um laboratório ou ambiente similar.

As etapas da realização da simulação são descritas na seção seguinte e consiste numa prévia para a validação do experimento. Essa será a primeira tarefa dos grupos. Eles buscarão obter os valores correspondentes da altura que a água atinge no vaso cilíndrico a cada 10 segundos cronometrados.

Para a parte referente à realização do experimento, não é necessário nenhum conhecimento prévio do estudante no que diz respeito ao conteúdo que está sendo abordado. Bastam apenas algumas orientações do professor e algumas habilidades do estudante para uma atividade que exige organização, sequência e atenção.

Para o trabalho de desenvolvimento das Folhas de Atividades, espera-se que o estudante tenha compreendido a base teórica do conceito de função que foi explorada no início do bimestre em sala de aula.

A notação decimal que aparece como produto das resoluções de algumas questões não deverá ser um problema, pois o estudante provavelmente já aprendeu a representação decimal no decorrer do Ensino Fundamental. Isso também deve ter ocorrido com a representação de pontos no plano cartesiano.

Outros conhecimentos que se façam necessários podem ser expostos ou explicados pelo professor no momento em que ele perceber alguma dificuldade dos grupos ou da forma que o professor achar melhor.

2.4 DESCRIÇÃO DETALHADA E REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO

Para fins de descrição do experimento a ser realizado pelos estudantes e para termos certeza da viabilidade do mesmo, eu e o professor Roberto tratamos de fazer uma simulação criteriosa do experimento, analisando todas as possíveis variáveis envolvidas e nos colocando como se fôssemos os estudantes que iriam realizar o experimento pela primeira vez.

Seguindo a ordem lógica do processo, montamos uma cuba grande com água até pela metade, onde foi fixada a bombinha de aquário com uma mangueira de 1,5 metros que levaria a água até o vaso cilíndrico.

Essa bombinha é encontrada facilmente em estabelecimentos que lidam com o comércio de peixes ornamentais, podendo ter vários modelos de potência e vazão, dependendo do uso que se quer fazer. Da mesma forma, nesses estabelecimentos se encontra a mangueira que vai adaptada à bombinha.

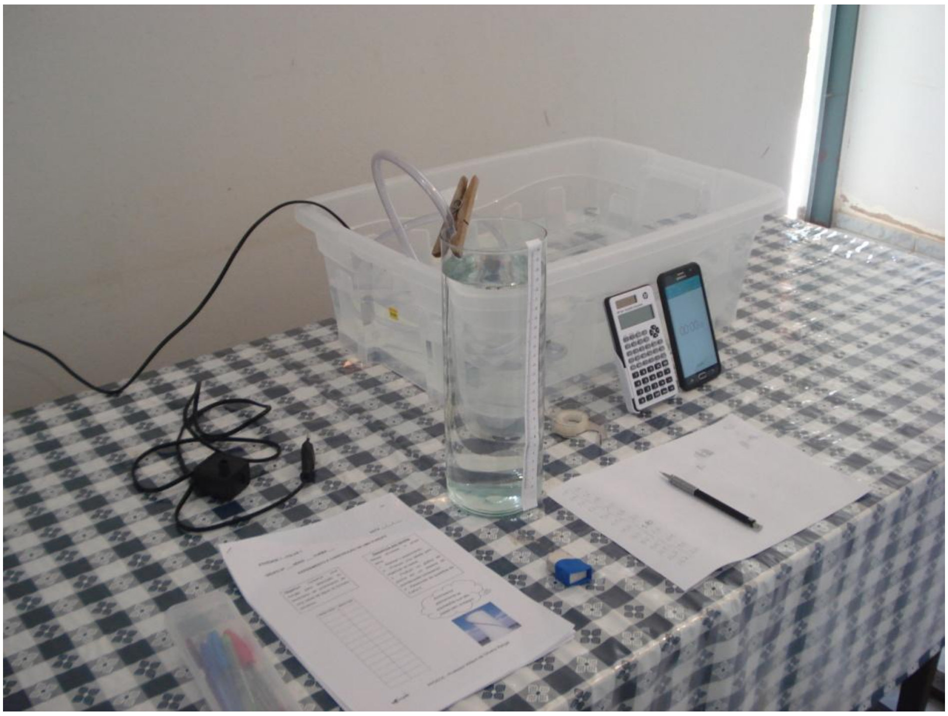
Figura 4 — Fotos da bombinha de aquário

Fonte: Arquivo Pessoal

Vale ressaltar que a cuba ou vasilha onde vai ser instalada a bombinha deve ter uma base de área grande, pois conforme verificamos durante a simulação, uma vasilha com uma base de área pequena necessariamente vai precisar ter uma altura maior, cuja coluna de água vai exercer uma pressão adicional sobre a bombinha em funcionamento, produzindo uma diferença na constância da vazão. Ou seja, quanto mais “espalhada” a água estiver na vasilha, teremos menos pressão dessa água sobre a bombinha e mais precisão para o nosso experimento.

Com essa parte resolvida, acoplamos a mangueira ao vaso cilíndrico, prendendo-a na parte superior do mesmo por meio de um simples prendedor de roupas. Aqui cabe outra observação importante: a ponta da mangueira não deve ser instalada no fundo do vaso cilíndrico. A explicação para não se fazer isso é bem simples: conforme a água vai sendo bombeada para o vaso, vai se formando a coluna de água que vai exercendo uma pressão na ponta da mangueira onde a água está saindo, comprometendo o trabalho de bombear da bombinha. Como a nossa bombinha do experimento é fabricada para fins mais elementares, no nosso caso tínhamos que tirar esse fator de interferência, bastando para isso prender a ponta da mangueira no topo do vaso cilíndrico, permitindo que a água caísse livremente dentro do vaso sem prejudicar o funcionamento da bombinha.

Figura 5 — Experimento montado para simulação



Fonte: Arquivo Pessoal

O vaso cilíndrico que foi utilizado é feito de vidro, com uma altura de 29 cm e apresentando um diâmetro de 10,3 cm. A ideia inicial era encontrar um vaso feito de plástico ou acrílico dentro dessas mesmas especificações. Como houve certa dificuldade em conseguir tal vaso, optei pelo de vidro, que foi facilmente encontrado em uma dessas casas de utilidades para o lar por um preço bem irrisório.

Figura 6 — Vaso cilíndrico de vidro

Fonte: Arquivo Pessoal

Usando o aplicativo de cronômetro do meu aparelho “smartphone”, eu e o professor Roberto demos início ao experimento. Enquanto eu observava a altura da coluna de água subindo no vaso cilíndrico, o professor ia “cantando” o tempo. Em uma escala graduada presa na parte externa do vaso eu ia marcando as alturas correspondentes ao tempo que o professor ia me dizendo.

Figura 7 — Vaso cilíndrico de vidro com a régua graduada

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 8 — Vaso cilíndrico completo até a altura da régua graduada

Fonte: Arquivo Pessoal

Repetimos esse procedimento algumas vezes, até entendermos que os resultados obtidos estavam dentro do que era esperado. Achamos por bem estipular uma marcação de tempo de 10 em 10 segundos, que permitiria aos estudantes uma margem suficiente de tempo para fazerem as marcações e não se perderem nesse processo.

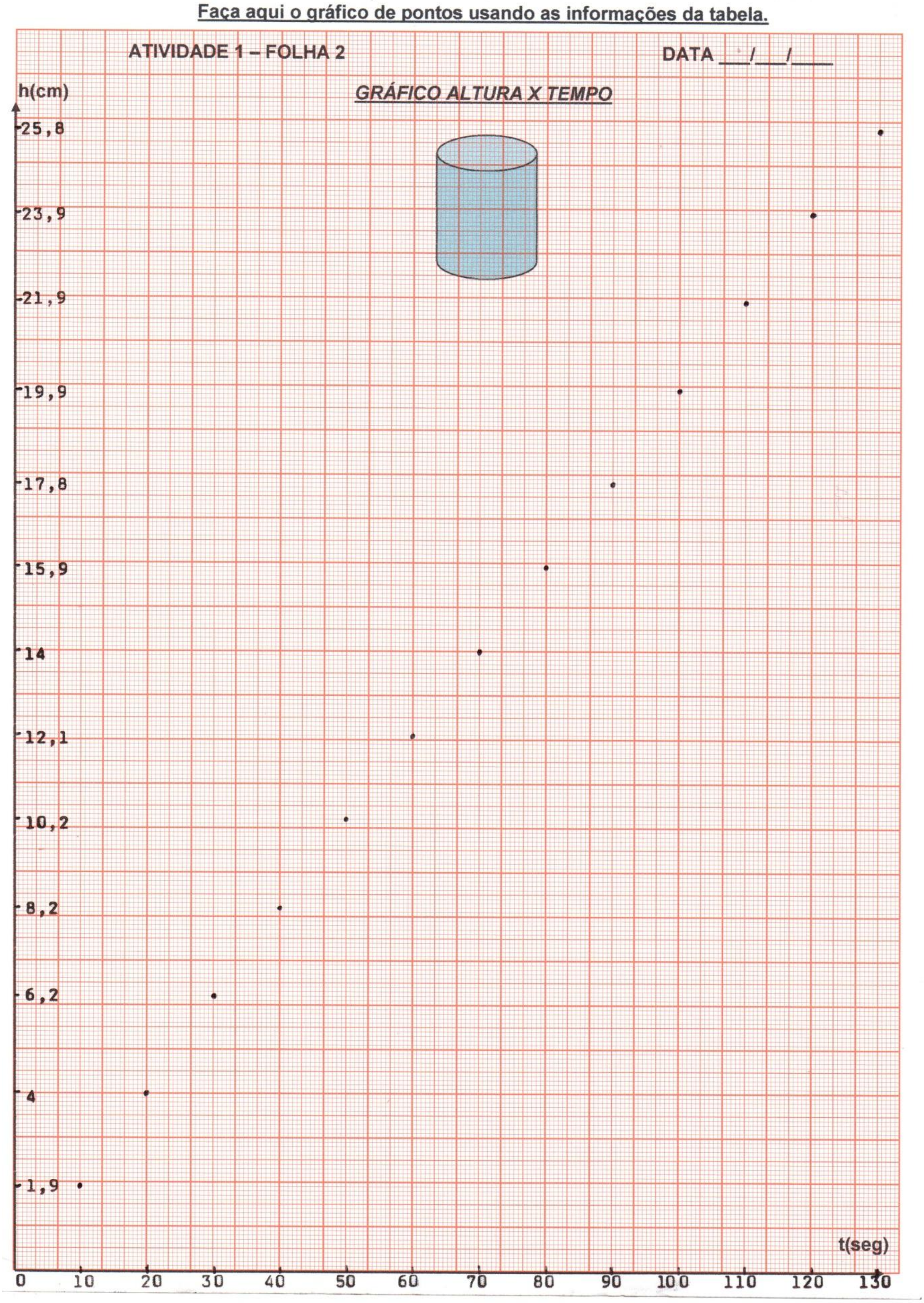
O objetivo principal dessa parte era obter uma tabela com os dados do experimento e produzir um gráfico de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas.

Figura 9 — Dados obtidos na simulação do experimento

tempo (seg)	altura (cm)
0	0,0
10	1,9
20	4,0
30	6,2
40	8,2
50	10,2
60	12,1
70	14,0
80	15,9
90	17,8
100	19,9
110	21,9
120	23,9
130	25,8

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 10 — Gráfico de pontos que foram obtidos na simulação do experimento



Fonte: Arquivo Pessoal

Assim, para examinar a relação entre a coluna do tempo e a coluna da altura, bastava colocar esses dados em um sistema de coordenadas cartesianas, onde se pode observar que os pontos vão se alinhando de forma a se aproximar de uma linha reta.

Essa simulação do experimento foi muito importante e conclusiva, pois ajudou a esclarecer vários pontos que poderiam ser levantados pelos estudantes no dia da aplicação em sala de aula.

2.5 PONTOS IMPORTANTES SOBRE A APLICAÇÃO DO EXPERIMENTO

Com base na simulação feita, foi possível observar alguns pontos que seriam de grande importância para a realização do planejamento da atividade experimental.

Primeiramente, por se tratar de um recipiente de vidro, os estudantes teriam que ser bem orientados quanto ao manuseio do vaso cilíndrico. Então, caso fosse necessário reiniciar ou refazer o experimento, seria preciso ter muito cuidado no momento de devolver a água do vaso para a vasilha onde estaria instalada a bombinha de aquário. Pensando também nesse cuidado, achei melhor deixar a régua graduada de papel já presa no cilindro de vidro, o que também pouparia tempo na realização do experimento, pois assim os estudantes teriam que se ocupar somente com as medições. Dessa forma inclui no roteiro do planejamento a montagem antecipada de todo o experimento no laboratório, para fins de evitar qualquer tipo de surpresa no dia da aplicação.

Agora, uma das partes mais importantes desse planejamento seriam as orientações que os estudantes teriam que receber para a realização do experimento propriamente dito. Como o experimento iria ser realizado por grupos de três estudantes cada, era necessário saber se pelo menos um de cada grupo teria posse de um celular tipo “smartphone”. Como já era sabido, esse não seria um empecilho para a realização do experimento, pois a grande maioria tem e sempre carrega um consigo. Assim, marcar o tempo fazendo uso de um cronômetro precisaria estar bem resolvido, para que a aplicação do experimento pudesse ser bem efetuada.

Havia outras opções de cronômetro que poderiam ser utilizadas. Uma delas seria verificar com o professor de Educação Física se ele possuía um para tomar emprestado, já que tais professores costumam utilizar, na grande maioria das vezes, um cronômetro para a realização das atividades físicas junto aos estudantes. Por outro lado, o uso de um aparelho do tipo “smartphone” poderia tornar a realização do experimento muito mais interessante, pois os estudantes iriam ter a chance de fazer uso de um dispositivo que normalmente não é utilizado para fins pedagógicos em uma aula de Matemática.

A ideia inicial que tive para a construção desse projeto pedagógico era fazer uso de outros vasos além do vaso cilíndrico. Nos primeiros encontros com o professor Roberto, discutimos o experimento fazendo uso de vasos que apresentavam outros formatos, como o vaso cônico e o vaso na forma de barril. No transcorrer desse processo, o professor Roberto entendeu que o uso apenas do vaso cilíndrico seria suficiente para atingirmos os objetivos a que se propunha esse projeto.

Tendo em vista que para realizar as atividades com os outros formatos de vasos, os estudantes teriam que construir os gráficos respectivos e ainda dar conta das Folhas de Atividades, o tempo para a realização do projeto pedagógico excederia em muito o número de aulas que poderiam ser utilizadas. Então, optar pelo uso apenas do vaso cilíndrico nesse primeiro momento foi uma decisão bem acertada.

Para concluir essa parte que trata do planejamento do projeto pedagógico, as atividades ficaram divididas do seguinte modo:

- 1 aula onde eu iria fazer a apresentação do projeto, dar as orientações necessárias e fazer uma pequena simulação para mostrar o encaminhamento que os estudantes terão que dar para iniciar os trabalhos.
- 2 aulas para a realização do experimento.
- 2 aulas para a construção do gráfico e para responder às questões da Folha 3.
- 2 aulas para encontrar a função que descreve o fenômeno de enchimento de uma caixa d’água cilíndrica e para obter o valor de **a** que melhor descreve o experimento.

- 1 aula para obtenção da função com o método dos mínimos quadrados usando uma planilha eletrônica.
- 1 aula para a obtenção da vazão da bombinha de água usada no experimento e para obter a relação entre V(t) e h(t).
- 2 aulas para a realização da avaliação sobre problemas de vazão e para fazer os esboços dos gráficos que descrevem o enchimento de vasos em diferentes formatos.

2.6 PROPOSTA DE PLANEJAMENTO PARA A APLICAÇÃO DO EXPERIMENTO E DAS FOLHAS DE ATIVIDADES

2.6.1 Etapa 1

Essa etapa consiste na preparação e montagem do experimento pelo professor, com o intuito de evitar contratempos na hora em que os grupos já estejam instalados para desenvolver a atividade. O professor deverá montar os recipientes onde ficarão instaladas as bombinhas, enchendo-os com água conforme foi descrito na simulação.

Com relação ao número de estações que o professor vai montar, poderá depender do número de estudantes da turma. Uma turma muito grande poderá estender por mais tempo a realização do experimento caso o professor resolva montar apenas uma estação. No meu caso, achei por bem montar três estações no laboratório disponível na escola, pois tinha a preocupação de não deixar os grupos esperando por muito tempo a hora de realizarem o experimento criando, talvez, uma certa ansiedade ou nervosismo no ambiente. Então, essa é uma questão que fica a critério do professor, lembrando apenas que no planejamento foram disponibilizadas 2 aulas para a realização do experimento pelos grupos.

2.6.2 Etapa 2

Essa etapa consiste em apresentar aos estudantes o experimento que irão realizar, explicando com detalhes a sequência das tarefas e o objetivo que se espera alcançar.

Assim, o grupo deverá realizar o experimento, produzir uma tabela com os dados que foram obtidos, construir um gráfico de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas em uma folha de papel milimetrado e responder às questões das Folhas de Atividades que serão entregues ao longo de todo o processo de desenvolvimento do projeto.

Dentre os objetivos do experimento, o professor deve esclarecer que a meta principal é encontrar uma função que consiga descrever de forma adequada o fenômeno de enchimento de uma caixa d'água no formato cilíndrico e que isso será feito através de uma sequência didática apresentada nas Folhas de Atividades.

O professor pode complementar essa parte, dizendo para os grupos que no final dos trabalhos deverão obter a vazão da bombinha de aquário que foi utilizada no experimento, de forma a comparar o resultado que cada grupo obteve com a especificação técnica trazida na bombinha.

Além disso, para concluir esse trabalho, os grupos deverão estar cientes de que na última atividade que irão desenvolver será apresentada uma série de problemas sobre vazão e que esses problemas constituirão uma auto-avaliação qualitativa para cada grupo.

Assim, depois de todas as orientações e explicações para a realização e conclusão do experimento, o ideal é que o professor realize uma simulação da parte experimental, para que os grupos possam observar e refletir sobre os diversos passos que terão que seguir para poderem efetuar o experimento na próxima aula.

A previsão de tempo para essa etapa é de 1 aula de 50 minutos.

2.6.3 Etapa 3

Nesta etapa, os grupos de três integrantes realizarão o experimento fazendo uso da bombinha e do cronômetro para acompanhar a subida da água no vaso cilíndrico e poder registrar o nível de 10 em 10 segundos, conforme as orientações que foram dadas.

Como serão montadas três estações de experimentos, o papel do professor aqui será observar em cada grupo se os procedimentos para a marcação do nível de água na régua graduada estão sendo feitos de maneira correta, pois é com a posse dessa régua com as devidas marcações que o grupo dará prosseguimento aos trabalhos, colocando os valores em uma tabela e construindo o gráfico de pontos no papel milimetrado.

Caso o professor perceba alguma anormalidade ou irregularidade que possa comprometer o experimento de algum grupo, deverá interagir com o mesmo, explicando o motivo da intervenção e orientando o grupo a repetir o experimento. É importante que o professor observe se cada membro do grupo está fazendo a sua parte de acordo com o que foi estabelecido nas orientações para a formação dos grupos.

Nessa etapa ainda não serão entregues aos grupos os blocos das Folhas de Atividades, já que durante o experimento podem ocorrer “acidentes” com a água, podendo ocasionar respingos ou mesmo derramamento de água sobre as folhas.

A previsão de tempo para essa etapa são de 2 aulas de 50 minutos cada.

2.6.4 Etapa 4

Com o experimento realizado e de posse da régua graduada, nessa etapa do planejamento os grupos deverão completar a tabela apresentada na Folha de Atividades 1, relacionando o tempo de 10 em 10 segundos com a respectiva altura das marcações que foram feitas na régua de papel.

Com a tabela completada, os grupos construirão o gráfico de pontos na Folha 2, onde os eixos cartesianos já estão colocados. Ficará a critério dos grupos a divisão dos eixos nas unidades que acharem mais adequadas para as duas grandezas envolvidas.

Localizados os pontos, provavelmente os grupos irão perceber que os pontos tendem a um alinhamento de forma a se aproximarem de uma linha reta. Os grupos que forem terminando a construção do gráfico já poderão passar para a Folha 3, onde deverão responder a algumas questões relacionadas ao gráfico e à função que descreve o comportamento dos pontos apresentados pelo experimento.

A previsão de tempo para essa etapa são de 2 aulas de 50 minutos cada.

2.6.5 Etapa 5

A Folha de Atividades 2 conduzirá os grupos a encontrarem a função que mais se aproxima do fenômeno de enchimento do vaso cilíndrico.

Com a fórmula algébrica da função do 1º grau já definida, os grupos precisarão estabelecer os valores do coeficiente linear $\boldsymbol{b}$ e do coeficiente angular $\boldsymbol{a}$ na função $\boldsymbol{h(t) = at + b}$.

O significado desses valores já foi visto e trabalhado no início do semestre. Então os grupos deverão atentar para o que foi explicado em sala de aula. Nada impede que pesquisem ou consultem o caderno onde o assunto foi tratado.

Por outro lado, a 2ª questão da Folha 1 busca levar o estudante a interpretar o problema e concluir que no instante em que é acionado o cronômetro, a altura da coluna de água é considerada igual a zero. Na função, isso quer dizer que $\boldsymbol{h(0) = 0}$. Assim, se $\boldsymbol{h(0) = 0}$, isso implica que $\boldsymbol{h(0) = a.0 + b = 0.}$ Logo, $\boldsymbol{b}$ deve ser igual a zero e $\boldsymbol{h(t) = at.}$ Essa parte da atividade foi elaborada sem considerar a possibilidade de se iniciar o experimento com certo volume de água no vaso cilíndrico, de modo que $\boldsymbol{b}$ fosse diferente de zero.

Para as folhas 2 e 3 da Atividade 2 o professor, se assim achar melhor, poderá fazer alguns comentários sobre o objetivo dessa parte. O texto deixado nas folhas é bem explicativo, mas trata-se de um assunto onde provavelmente os grupos farão muitas perguntas.

A parte do planejamento da atividade experimental propriamente dita pode ser encerrada aqui. Como o experimento é a base da nossa proposta didática, fizemos esse planejamento com o fim específico de orientar o professor na realização do mesmo. A preparação e a instalação dos materiais é algo bem simples e deve ser feita com antecedência. O uso da bombinha torna o experimento mais sofisticado e permite uma precisão maior na coleta dos dados do que o uso apenas de mangueirinhas para fazer a transferência da água de um recipiente para outro.

2.7 DESCRIÇÃO DETALHADA DAS FOLHAS DE ATIVIDADES

De acordo com os conteúdos programáticos propostos para a disciplina de Matemática, o ensino de funções está previsto para ocorrer no 2º bimestre da 1ª série do Ensino Médio.

FUNÇÕES

- Relação entre duas grandezas.
- Proporcionalidades: direta, inversa e direta com o quadrado.
- Função afim.
- Função quadrática.

Assim, a aplicação da proposta desse trabalho pedagógico se daria na 2ª parte desse bimestre, dando tempo ao professor de estabelecer as bases dos conteúdos que a turma iria precisar para poder seguir com as tarefas que estariam presentes nas Folhas de Atividades.

As seções que se seguem foram elaboradas de acordo com cada atividade que os grupos iriam realizar. São cinco Folhas de Atividades preparadas em blocos que contemplam toda a construção do conceito de função afim, encerrando com uma avaliação para reforçar a aprendizagem e verificar se os conteúdos foram de fato compreendidos. No total, o trabalho apresenta treze folhas sequenciais, incluindo as folhas nas quais os grupos terão que construir os gráficos solicitados. Essas folhas podem ser visualizadas integralmente e na ordem em que foram aplicadas no Apêndice A. No Apêndice B se encontram essas mesmas folhas com as resoluções prontas.

Para uma descrição e análise mais detalhada, as Folhas de Atividades foram seccionadas em trechos com alguns comentários que pudessem esclarecer ou explicar os conteúdos abordados juntamente com as expectativas das soluções a serem dadas pelos estudantes.

2.8 FOLHA DE ATIVIDADES 1

A Folha de Atividades 1 é composta por três folhas diretamente relacionadas ao experimento que os grupos irão realizar. Constitui a primeira parte da proposta didática e traz o objetivo do experimento e uma sequência de tarefas que o grupo deve seguir.

Figura 11 — Trecho extraído da Folha de Atividades 1

Objetivo: Construir uma função para descrição do fenômeno de enchimento de uma caixa de água no formato cilíndrico.

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 12 — Texto da Folha de Atividades 1

Sequência das tarefas

Nessa atividade, o grupo deve:

1 - Realizar o experimento;

2 - Produzir uma tabela para organizar os dados;

3 - Produzir um gráfico de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas;

4 - Responder às questões da Folha 3.

Fonte: Arquivo Pessoal

Realizado o experimento, o grupo deve completar uma tabela em anexo fazendo uso dos dados que ele obteve através das marcações feitas na régua graduada que vai fixada na face do vaso cilíndrico. Essa parte marca o início da Modelagem Matemática, onde os grupos passarão a fazer uso dos dados numéricos colhidos no experimento para construir o conceito de função afim.

Figura 13 — Tabela a ser preenchida pelos grupos

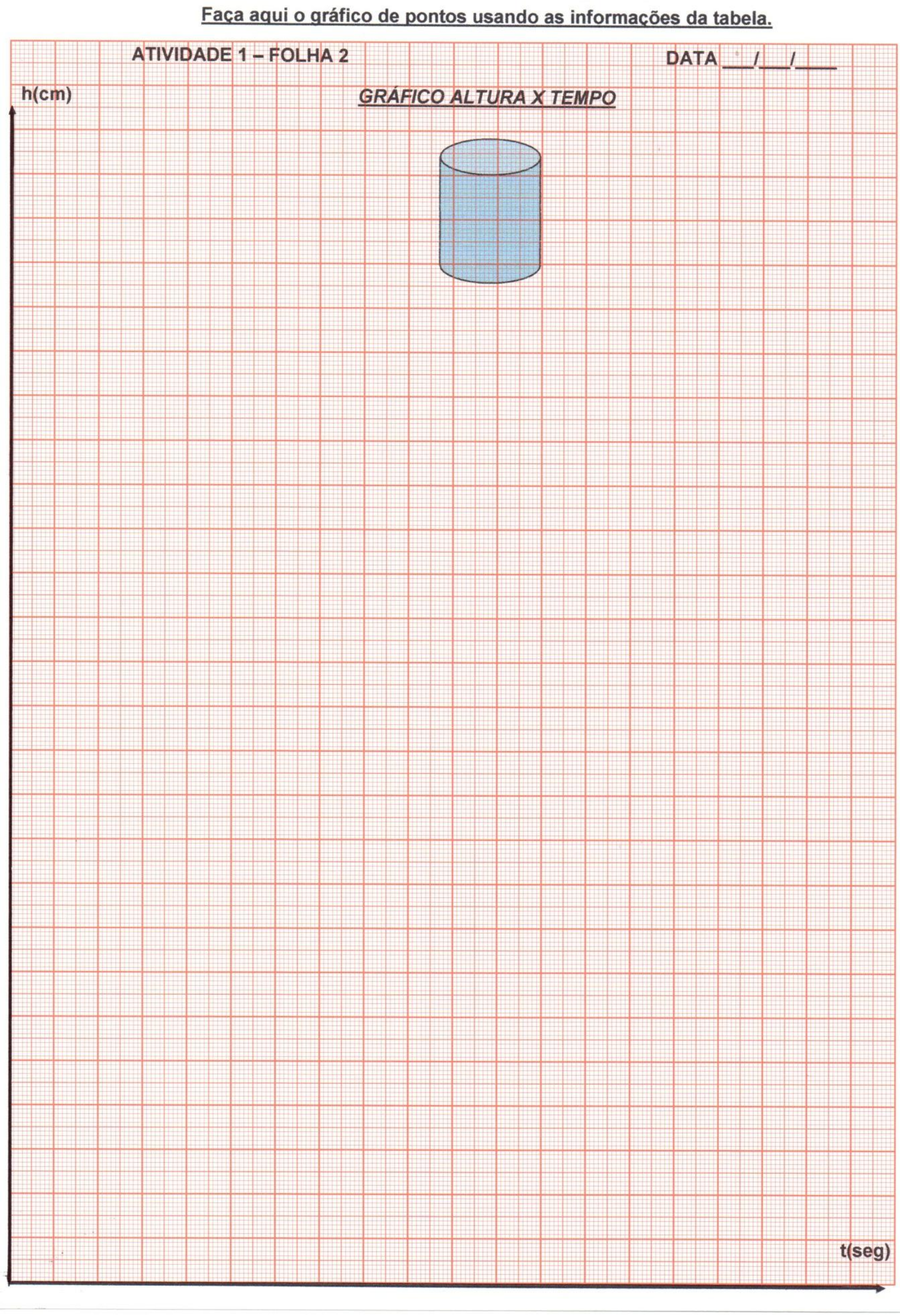
Complete essa tabela com os dados de seu experimento.

tempo (seg)	altura (cm)

Fonte: Arquivo Pessoal

Completada a tabela, o grupo deve passar para a Folha 2, onde deverá produzir um gráfico de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas, onde os eixos estão devidamente colocados em uma folha de papel milimetrado.

Figura 14 — Papel milimetrado com o sistema de coordenadas cartesianas



Fonte: Arquivo Pessoal

Espera-se que os grupos preencham corretamente a tabela e marquem os pontos na Folha 2, de forma a perceber que esses pontos se aproximam de uma linha reta e devem induzir que a situação pode ser modelada por uma função afim.

Na Folha 3, os grupos deverão então responder a cinco questões que relacionam o experimento com o conceito de função estudado em sala de aula.

Figura 15 — Questões 1, 2, 3, 4 e 5 da Folha 3 da Atividade 1

Q1. 1. Você observa algum padrão no gráfico de pontos que o grupo produziu com o experimento?

Q1. 2. O padrão observado no gráfico de pontos é indicativo de algum tipo de função? Qual é o nome dessa função?

Q1. 3. Qual é a forma algébrica geral desse tipo de função?

h(t) = ____________________

Q1. 4. Como a caixa d'água está enchendo, a função h(t) é crescente ou decrescente?

Q1. 5. Sendo assim, o coeficiente angular de h(t) é ( ) positivo ( ) negativo.

Fonte: Arquivo Pessoal

Espera-se que os estudantes não tenham dificuldades em completar essa parte e encontrem a forma algébrica geral da função que descreve o enchimento do vaso cilíndrico. Assim, para a Q1.1 espera-se que os grupos percebam que o padrão que foi produzido no gráfico de pontos aproxima-se de uma linha reta.

Para a Q1.2, espera-se que os grupos associem o padrão observado no gráfico com a função afim.

Para a Q1.3, espera-se que os grupos encontrem a forma algébrica geral dada por $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}$ para a função correspondente.

Na questão Q1.4, os grupos devem deduzir que a função $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$ é crescente, já que o nível da água está subindo conforme o tempo que está sendo cronometrado vai passando.

Na questão Q1.5, espera-se que os grupos associem a inclinação representativa da reta formada pelos pontos marcados no papel milimetrado com o coeficiente angular estudado em sala de aula, e que o assinalem como positivo.

A Q1.6 poderá servir de parâmetro para o professor corrigir ou aperfeiçoar alguns pontos relacionados à parte prática do experimento em aplicações futuras.

Figura 16 — Última questão da Folha de Atividades 1

Q1. 6. Descreva as dificuldades que o grupo encontrou para realizar o experimento.

Fonte: Arquivo Pessoal

2.9 FOLHA DE ATIVIDADES 2

Depois que os grupos conseguirem escrever a forma algébrica da função tomando por base o padrão observado no gráfico de pontos, terão que encontrar uma função que descreva de forma adequada o processo de enchimento de uma caixa d'água na forma cilíndrica. Esse pode ser considerado o ponto alto da Modelagem Matemática e vai exigir muito cuidado e paciência dos grupos. A partir dos conceitos estudados em sala de aula e de algumas técnicas de cálculo, o professor deverá estar atento a possíveis dificuldades que os grupos apresentem nessa hora, buscando dar autonomia aos estudantes e a oportunidade de interpretarem e resolverem os problemas em companhia dos colegas do grupo.

Assim, reforçando o que os grupos já fizeram na última Folha da Atividade 1, nessa segunda parte os grupos deverão, em um primeiro momento, escrever a função algébrica $\boldsymbol{h(t) = at}$ partindo do princípio que na função $\boldsymbol{h(t) = at + b}$ temos que $\boldsymbol{h(0) = 0}$, ou seja, a altura inicial da coluna de água no vaso cilíndrico é zero quando $\boldsymbol{t = 0}$. Logo, espera-se que os grupos concluam que o valor de $\boldsymbol{b}$ terá que ser zero.

Figura 17 — Questões da Folha de Atividades 2

Q2. 1. Escreva a fórmula algébrica geral da função afim h(t).

(Sugestão: use letras como a, b, c, ...).

h(t) = _______________

Q2. 2. No gráfico, vimos que h(0) = 0. A escolha do tempo inicial t = 0 é arbitrário, mas o valor de h(0) é exato. Explique por que.

____

____

____

Q2. 3. Considerando que nossa função h(t) é afim e que h(0) = 0, sua fórmula algébrica é

h(t) =_______________

Fonte: Arquivo Pessoal

Em um segundo momento, os grupos terão que encontrar o valor de $\boldsymbol{a}$ de duas maneiras:

1ª: (Q2. 4) Dada uma função $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, usar o quociente $\boldsymbol{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$ que define a taxa de variação de uma função $\boldsymbol{f(x)}$;

2ª: (Q2. 5) Escolher quatro valores da tabela que cada grupo achar mais adequado para calcular o valor numérico de $\boldsymbol{a}$.

Figura 18 — Questão da Folha de Atividades 2

Q2. 4. Dada uma função afim geral f(x) = ax + b, calcule sua taxa de variação entre x_1 e x_2:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\square} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\square} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{\square} =$$

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 19 — Questão da Folha de Atividades 2

Q2. 5. Escolha quatro valores da tabela que você acha que estão melhor posicionados na linha do gráfico e calcule:

$$a_1 = \frac{h(t_1)}{t_1} = \frac{\_\_\_}{\square} = \qquad a_2 = \frac{h(t_2)}{t_2} = \frac{\_\_\_}{\square} =$$

$$a_3 = \frac{h(t_3)}{t_3} = \frac{\_\_\_}{\square} = \qquad a_4 = \frac{h(t_4)}{t_4} = \frac{\_\_\_}{\square} =$$

Calcule a média aritmética desses valores:

$$a = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\square} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{\square} = \_\_\_\_\_.$$

Fonte: Arquivo Pessoal

Para concluir essa etapa, os grupos deverão calcular a média aritmética dos valores encontrados e usar esse resultado para escrever a função que melhor descreve o experimento.

Figura 20 — Questão da Folha de Atividades 2

Q2. 6. Proponha a função que melhor descreve o experimento:

h(t) =

Fonte: Arquivo Pessoal

Possivelmente os grupos poderão encontrar certa dificuldade nessa parte, pois a Q2.4 trata de uma questão que envolve cálculo algébrico. Já nos cálculos numéricos, espera-se que os grupos não encontrem dificuldades.

Na última parte dessa atividade, os grupos são desafiados a encontrar um valor numérico mais "refinado" para a taxa de variação.

Usando os dados do experimento, os grupos irão calcular a 1ª variação por meio da fórmula $\frac{\boldsymbol{h(t_{i+1}) - h(t_i)}}{\boldsymbol{t_{i+1} - t_i}}$. Como os pontos construídos no gráfico não são perfeitamente alinhados, os grupos deverão perceber que os valores da 1ª variação apresentam pequenas diferenças. Dessa forma, para que o valor de $\boldsymbol{a}$ seja o mais adequado possível, cada grupo deverá calcular a média aritmética dos valores da 3ª coluna da tabela, de modo a determinar o valor de $\boldsymbol{a}$ solicitado.

Figura 21 — Texto e questão da Folha de Atividades 2

Outra forma de se obter o valor de a na expressão h(t) = at é completar a tabela do experimento. Copie aqui os dados do experimento e complete a terceira coluna.

Q2. 7.

tempo (seg)	*altura (cm)*	*1ª variação*

Os dados da 3ª coluna chamam-se "1ª variação". São calculados pela fórmula $\frac{h(t_{i+1}) - h(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$. Faça você os cálculos lembrando que $t_{i+1} - t_i$ = 10 segundos.

Devido aos erros do experimento, é pouco provável que os valores da 1ª variação sejam constantes. Mas você pode fazer sua média aritmética e obter o valor de **a**:

a = $\boxed{}$

Fonte: Arquivo Pessoal

Espera-se que os grupos consigam determinar esse novo valor de $\boldsymbol{a}$ para que possam compará-lo com o valor de $\boldsymbol{a}$ obtido na questão Q2.5 e busquem explicar, caso sejam diferentes, o motivo da diferença entre eles.

Figura 22 — Questão da Folha de Atividades 2

Q2. 8. Compare os valores de **a** obtidos anteriormente. Se são diferentes, a que você atribui a diferença?

____

____

____

Fonte: Arquivo Pessoal

A questão Q2.9 encerra a Folha de Atividades 2 e permite aos grupos a chance de expressarem suas opiniões a respeito da realização das atividades.

Figura 23 — Questão da Folha de Atividades 2

Q2. 9. O grupo está achando o trabalho interessante? Explique porque sim ou porque não.

____

____

____

Fonte: Arquivo Pessoal

2.10 FOLHA DE ATIVIDADES 3

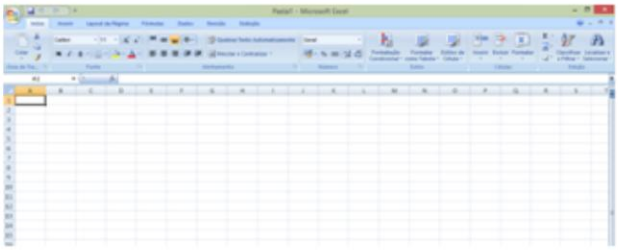
Para essa atividade, o professor deverá verificar a possibilidade do uso da Sala de Informática na sua escola.

Fazendo uso de um aplicativo computacional, os grupos buscarão obter a função $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$ que modela o fenômeno de enchimento do vaso cilíndrico utilizado no experimento.

Figura 24 — Texto da Folha de Atividades 3

OBTENÇÃO DA FUNÇÃO COM O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Tarefa de hoje: Obter a função h(t) usando uma planilha eletrônica.



Nessa parte, o grupo deverá fazer uso de um aplicativo computacional para obter:

(i) O gráfico que foi construído no papel milimetrado.

(ii) A expressão algébrica da reta aproximada por meio da ferramenta linha de tendência.

Fonte: Arquivo Pessoal

Existem vários softwares disponíveis na internet que poderão ser utilizados sem problemas para atingir o objetivo proposto nessa atividade. Como uma das intenções dessa proposta didática é interferir o menos possível na realização das atividades pelos grupos, essa folha de atividades traz o procedimento que os grupos deverão adotar para realizar a tarefa. Sendo assim, o aplicativo indicado para essa parte foi o Excel, por se tratar de um aplicativo bastante usual.

Figura 25 — Texto da Folha de Atividades 3

PROCEDIMENTO:

- Transfira a tabela do experimento para uma planilha eletrônica.
- Aplique o recurso inserir gráfico por meio da opção que dispersa os pontos no plano cartesiano.
- Ligue os pontos obtidos através do recurso "formatar série de dados".
- Insira a linha de tendência linear fazendo uso da ferramenta "layout rápido", onde o aplicativo vai apresentar a expressão algébrica correspondente.
- Envie o arquivo para o professor.

Fonte: Arquivo Pessoal

Essa atividade pode ser considerada um complemento para a proposta de trabalho aqui apresentada. Caso haja dificuldades no uso da Sala de Informática, o professor poderá pensar em outros recursos. No caso do Excel, é um aplicativo que pode ser encontrado em aparelhos como tablets ou “smartphones”.

A intenção do uso da planilha eletrônica é que o estudante perceba que o Excel faz uso de todos os pontos através do Método dos Mínimos Quadrados, mostrando que o gráfico e a função foram obtidos por meio de um processo de aproximação dos valores que o grupo havia encontrado na realização do experimento. Dessa forma, espera-se que a função obtida pelo aplicativo represente de forma mais precisa e real a modelagem que foi realizada.

Na questão Q3.1, cada grupo deverá comparar as duas expressões e justificar o motivo da diferença entre elas.

Figura 26 — Questão da Folha de Atividades 3

Q3. 1. Comparando a expressão obtida no aplicativo com a obtida no experimento, elas são semelhantes? Justifique a sua resposta.

Fonte: Arquivo Pessoal

2.11 FOLHA DE ATIVIDADES 4

A atividade 4 é composta de 2 folhas onde os grupos trabalharão para obter a vazão da bombinha de aquário usada no experimento.

Através de um texto explicativo, é definida a vazão de um dispositivo.

Figura 27 — Texto da Folha de Atividades 4

Definição: Vazão de um dispositivo como uma torneira ou uma bomba d'água, por exemplo, é a quantidade de líquido que é disponibilizada por unidade de tempo.
Ela pode ser variável. Assim, a princípio, é uma função $Q(t)$. No caso da bombinha do nosso experimento, a vazão é constante, de modo que:

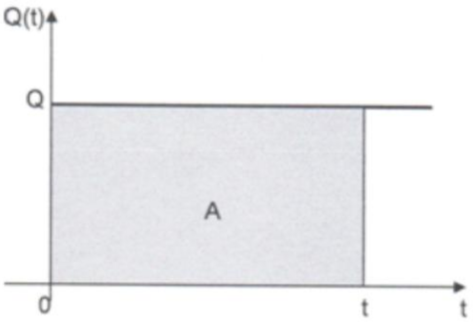
$$Q(t) = Q$$

Fonte: Arquivo Pessoal

Nessa parte os grupos terão apenas que interpretar o gráfico dado e completar as questões pedidas.

Figura 28 — Texto e gráfico da Folha de Atividades 4

Queremos descobrir o valor de Q. Como o gráfico de Q(t) é horizontal, temos a figura:



A quantidade de água liberada pelo dispositivo de 0 a t é a área do retângulo.

Fonte: Arquivo Pessoal

Por meio das questões Q4.1 e Q4.2, os grupos deverão concluir que o volume de água presente em um recipiente em certo intervalo de tempo considerado é igual à área do retângulo no mesmo intervalo de tempo.

Figura 29 — Questões 4.1 e 4.2 da Folha de Atividades 4

Q4. 1. A área do retângulo é ___________________

Q4. 2. A área do retângulo é o volume de água que entra no recipiente de 0 a t.

Logo:

V(t) = ____________________

Fonte: Arquivo Pessoal

Na última folha dessa atividade cada grupo deverá estabelecer a relação entre o volume $\boldsymbol{V(t)}$ determinado na questão Q4.2 e a altura expressa pela função $\boldsymbol{h(t)}$ resultante do experimento realizado.

Partindo do vaso cilíndrico utilizado no experimento, cada grupo fará a medição do diâmetro do vaso para estabelecer a medida do raio que será usada para calcular a vazão da bombinha.

Figura 30 — Questão 4.3 da Folha de Atividades 4

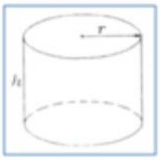
Vamos, agora, ver a relação entre V(t) e a função h(t) obtida no experimento.

Q4. 3. Meça o raio do recipiente cilíndrico do experimento.

r = ______cm.

LEMBRETE

Volume de um cilindro circular reto de raio r e altura h:



V = $\boldsymbol{\pi r^2 h}$

Fonte: Arquivo Pessoal

Para facilitar o trabalho dos grupos na determinação da expressão que define o volume do vaso cilíndrico em um instante $\boldsymbol{t}$ qualquer, a questão Q4.4 junta as três informações que os grupos irão precisar: raio, altura e volume.

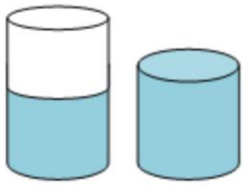
Figura 31 — Questão 4.4 da Folha de Atividades 4

Q4. 4. Você concorda que a água no reservatório cilíndrico em qualquer instante t é também um cilindro? Sobre esse cilindro de água podemos afirmar que:

(i) Seu raio é r = _____cm.

(ii) Sua altura no instante t é h(t) = **a**t.

(iii) Seu volume no instante t é V(t) = _____



Fonte: Arquivo Pessoal

Assim, relacionando as expressões $\boldsymbol{V(t) = Qt}$, $\boldsymbol{h(t) = at}$ e a fórmula do volume de um cilindro circular reto de raio $\boldsymbol{r}$ e altura $\boldsymbol{h}$, espera-se que os grupos encontrem a expressão final $\boldsymbol{V(t) = \pi r^2 h(t)}$.

Figura 32 — Questão 4.5 da Folha de Atividades 4

Q4. 5. Na última fórmula, você já sabe que V(t) = Qt e h(t) = **a**t e, também, já conhece o valor de **a**. Então a fórmula **V =** $\boldsymbol{\pi}$**r²h** fica:

____

____

____

____

Fonte: Arquivo Pessoal

Já, na questão Q4.6, é solicitado ao grupo que encontre o valor da vazão da bombinha de aquário em cm^3/s e, na questão Q4.7, em l/s.

Figura 33 — Questões 4.6 e 4.7 da Folha de Atividades 4

Q4. 6. Ache o valor de Q em cm^3/s:

____

____

____

LEMBRETE

1 litro = $1000cm^3$

Q4. 7. Ache o valor de Q em l/s:

____

____

Fonte: Arquivo Pessoal

Como $\boldsymbol{Q}$ é uma constante e aparece na expressão $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Qt}$, o cálculo que vai definir a expressão para a vazão pode ser realizado de diversas maneiras. Uma dessas maneiras é deixada como exemplo no Apêndice B, onde as Folhas de Atividades se encontram resolvidas para servir de guia ao professor.

Por último, cada grupo deverá verificar na bombinha que utilizou no experimento a vazão especificada pela fábrica do produto e comparar essa vazão com o resultado que obteve em seus cálculos. Pela especificação técnica presente na etiqueta da bombinha, sabemos que a vazão é dada em l/h. Então, espera-se que cada grupo perceba essa diferença nas unidades e faça a conversão correta para que possa responder a essa última questão de forma adequada.

Figura 34 — Questão 4.8 da Folha de Atividades 4

Q4. 8. Procure a especificação técnica da bomba d'água que você usou no experimento e compare com seu resultado:

____

Fonte: Arquivo Pessoal

2.12 FOLHA DE ATIVIDADES 5

Essa parte encerra as atividades da proposta pedagógica aqui desenvolvida e corresponde a avaliação que os grupos terão que realizar. Essa avaliação tem por objetivo atingir alguns pontos no processo ensino-aprendizagem do estudante.

Um desses pontos é possuir características contextuais apoiadas em temas práticos, pois o estudante, ao relacionar os conteúdos que aprendeu a contextos que estejam em seu nível de compreensão, terá uma nova percepção do assunto que foi trabalhado e, consequentemente, poderá dar um novo sentido para a Matemática.

Também podemos entender a contextualização presente na avaliação como uma estratégia de trabalho para melhorar a aprendizagem do estudante, já que a maior parte dos problemas que foram colocados pode ser facilmente aplicada à realidade, facilitando a compreensão dos conteúdos.

A primeira questão possui três itens, sendo que o item (i) pode ser facilmente resolvido com uma regra de três simples.

Figura 35 — Primeira questão da Folha de Atividades 5

Q5. 1. Uma torneira tem vazão constante de 5 l/min.

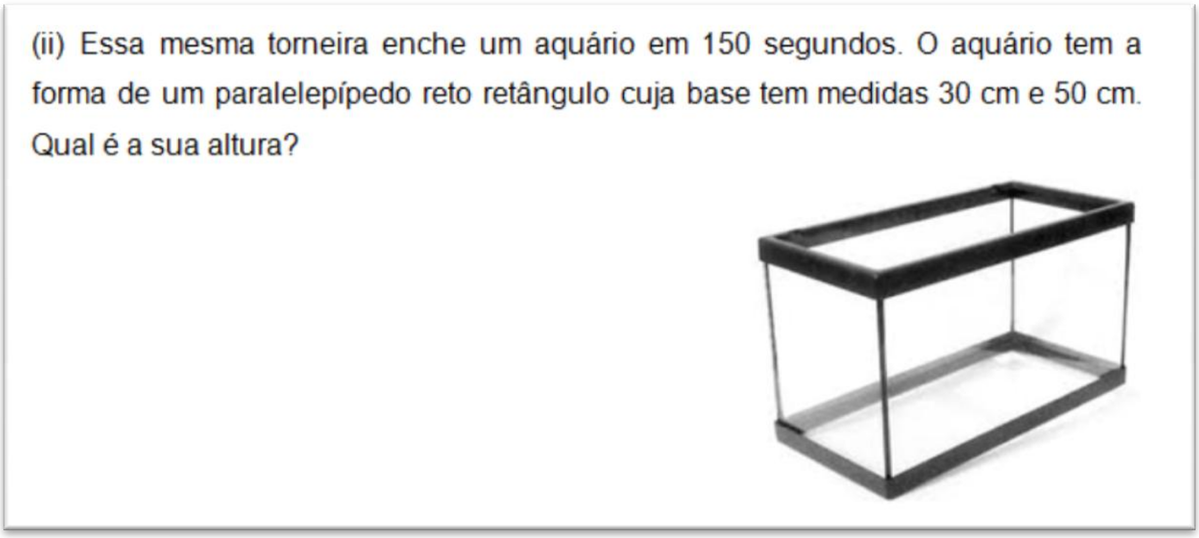
(i) Qual é a vazão em cm^3/s?

Fonte: Arquivo Pessoal

No item (ii) espera-se que o estudante consiga resolver o problema de enchimento de um aquário que tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo fazendo uso da expressão do volume que ele obteve na questão Q4.2. Como o problema pede a altura do aquário de base retangular de medidas 30 cm e 50 cm, o grupo pode pensar em outros caminhos para resolvê-lo como, por exemplo, obter o volume associando a vazão da torneira encontrada no item (i) com o tempo que ela leva para encher o aquário. Assim, basta uma regra de três simples para que o grupo possa encontrar o volume total do aquário.

Para calcular a altura, o grupo vai precisar recorrer à fórmula do volume de um prisma, e será deixado a cargo dos grupos encontrarem essa fórmula e resolver o problema.

Figura 36 — Item (ii) da questão 1 da Folha de Atividades 5



(ii) Essa mesma torneira enche um aquário em 150 segundos. O aquário tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo cuja base tem medidas 30 cm e 50 cm. Qual é a sua altura?

Fonte: Arquivo Pessoal

O item (iii) tem por objetivo verificar se o grupo consegue encontrar a função de enchimento do aquário tendo por base o procedimento que fizeram para encontrar a função $\boldsymbol{h(t)}$ no experimento de enchimento do vaso cilíndrico do experimento. Então, o desafio para o grupo é encontrar o valor da taxa de variação na função $\boldsymbol{h(t) = at}$.

Espera-se que os grupos, caso tenham dificuldades no entendimento desse item, recorram à Folha de Atividades 2, onde a questão Q2.4 explica de forma detalhada como calcular o valor de $\boldsymbol{a}$.

Figura 37 — Item (iii) da questão 1 da Folha de Atividades 5

(iii) Um grupo de estudantes fez um experimento para achar a função h(t) que mede a altura da água nesse aquário no instante t. Calcule essa função, sem fazer o experimento.

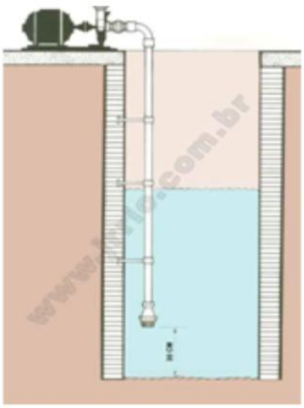
Fonte: Arquivo Pessoal

A questão Q5.2 traz um problema que pode ser encontrado nos livros didáticos adotados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) direcionado para as escolas públicas.

É um problema que envolve, de maneira muito parecida, uma situação prática da vida real com a situação do experimento que os grupos realizaram. Trata-se de uma bomba elétrica que retira água potável de um poço para encher um reservatório. Nesse caso, a bomba possui um dispositivo que a aciona toda vez que o nível de água no reservatório cai para 250 litros. Aqui, o problema não faz menção ao formato do reservatório e espera-se que o aluno perceba que a falta dessa informação não vai interferir na resolução do problema.

Figura 38 — Questão 2 da Folha de Atividades 5

Q5. 2. A água potável usada em propriedades rurais, de um modo geral, é retirada de poços com o auxílio de uma bomba d'água elétrica. Em um sítio, para abastecer o reservatório de água, é utilizada uma bomba com capacidade para bombear 15 litros por minuto. Essa bomba se liga automaticamente quando o reservatório está com 250 litros de água e se desliga ao enchê-lo. Com base nessas informações:



(i) Escreva a função que permite calcular a quantidade de água no reservatório em função do tempo em que a bomba permanece ligada indicando o significado de cada termo. Considere que não houve consumo de água durante esse processo.

Fonte: Arquivo Pessoal

Ao contrário do que foi feito no experimento, onde o volume inicial de água era considerado zero no instante em que a bombinha de aquário entrava em funcionamento, nesse problema, quando a bomba é acionada, já vai existir um volume inicial de 250 litros de água no reservatório. Assim, o grupo terá que escrever a função que descreve o enchimento do reservatório buscando encontrar os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ na função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{at} + \boldsymbol{b}$. Também é solicitado ao grupo que indique o significado de cada termo na função encontrada.

No item (ii), espera-se que o grupo encontre a quantidade de água no reservatório após 25 minutos de funcionamento da bomba elétrica. Se o grupo conseguir escrever a função no item (i), não terá problemas para resolver esse item. Mas nada impede que o grupo busque resolver por outros métodos e encontre a resposta solicitada. Isso também vale para os itens (iii) e (iv) do problema em questão.

Figura 39 — Item (ii) da questão 2 da Folha de Atividades 5

> (ii) Determine a quantidade de água no reservatório 25 minutos após a bomba entrar em funcionamento.

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 40 — Item (iii) da questão 2 da Folha de Atividades 5

> (iii) Após a bomba entrar em funcionamento, qual será o tempo necessário para o reservatório atingir 730 litros de água?

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 41 — Item (iv) da questão 2 da Folha de Atividades 5

> (iv) Sendo a capacidade máxima do reservatório de 1750 litros, qual o tempo necessário de funcionamento da bomba para enchê-lo?

Fonte: Arquivo Pessoal

A exemplo do gráfico que os grupos construíram no experimento, o item (v) pede a construção do gráfico que representa o enchimento do reservatório com o auxílio da bomba elétrica.

Figura 42 — Item (v) da questão 2 da Folha de Atividades 5

(v) Represente graficamente essa situação.

Fonte: Arquivo Pessoal

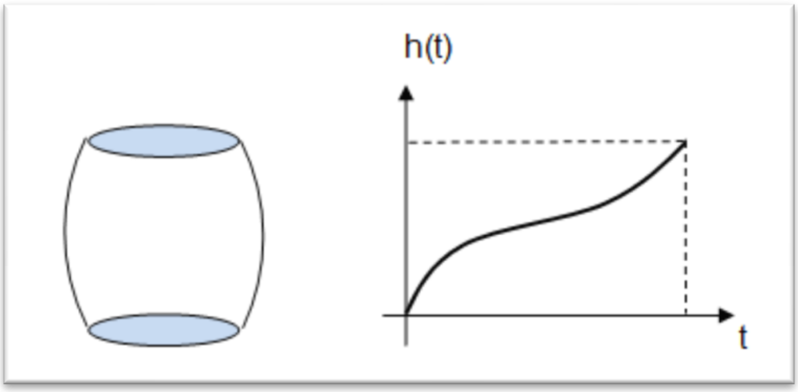
A questão Q5.3 remonta à questão trabalhada na Orientação Técnica (OT) mencionada no início deste capítulo. Com reservatórios em vários formatos, os grupos são desafiados a esboçarem o gráfico que melhor representa a variação da altura da água em função do tempo para cada um dos reservatórios dados. Como estímulo, o primeiro gráfico é deixado como exemplo, acompanhado de uma dica para que o grupo compreenda o raciocínio.

Figura 43 — Enunciado da questão 3 da Folha de Atividades 5

Q5. 3. Os reservatórios das figuras abaixo têm a mesma altura e o mesmo volume do reservatório utilizado no experimento que o grupo fez. Estando inicialmente vazio, uma torneira é aberta no instante t = 0, começando a enchê-lo a uma razão constante. Desenhe o gráfico que melhor representa a variação da altura da água em cada reservatório.

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 44 — Exercício deixado como exemplo na Folha de Atividades 5



Fonte: Arquivo Pessoal

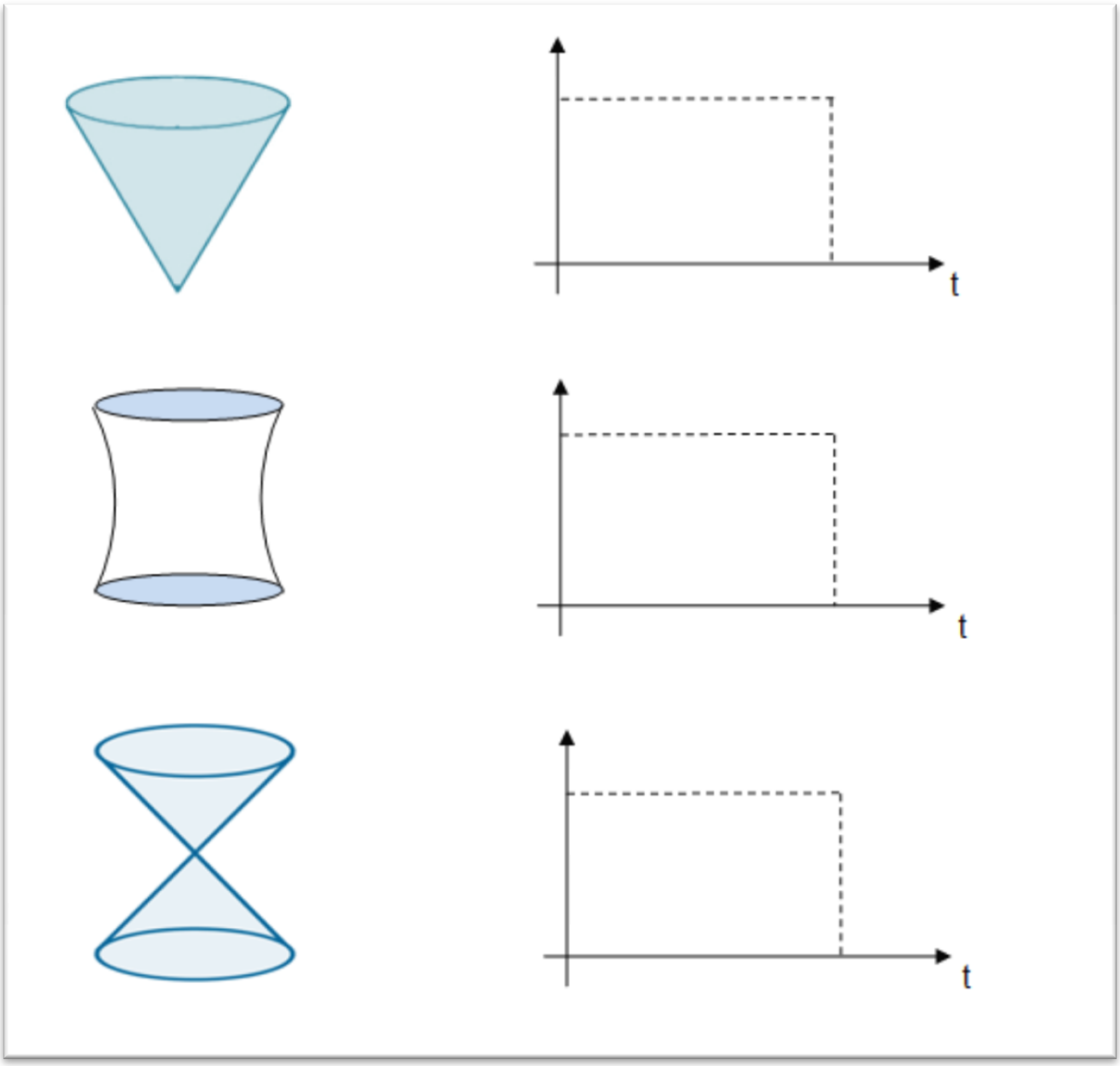
Figura 45 — Texto deixado como dica para a resolução dos problemas da questão 3

> Observe como o gráfico do primeiro reservatório foi construído: na altura em que o raio do recipiente é menor, a água sobe mais rápido, assim nesse instante o gráfico cresce mais rápido.

Fonte: Arquivo Pessoal

Com essa última questão elaborada para a avaliação, espera-se que os grupos consigam tirar algumas conclusões que irão ajudar no esboço de cada gráfico. Naturalmente, à medida que o tempo aumenta a altura também aumenta. Desse modo, os gráficos devem representar funções crescentes e, de maneira intuitiva, os grupos deverão analisar a rapidez com que o nível de água sobe conforme o diâmetro do recipiente vai aumentando ou diminuindo de medida.

Figura 46 — Problema dos reservatórios da questão 3 da Folha de Atividades 5



Fonte: Arquivo Pessoal

CAPÍTULO 3

IMPLEMENTAÇÃO DA PROPOSTA PEDAGÓGICA

3.1 INTRODUÇÃO

Esse capítulo trata de descrever o ambiente da escola onde o experimento foi realizado, destacando o perfil dos estudantes e como foi o desenvolvimento das aulas durante a aplicação da proposta didática. Corresponde à terceira fase da Engenharia Didática, ou seja, a aplicação de uma sequência didática. Nessa aplicação ocorreu: a apresentação do projeto pedagógico pelo professor, salientando as tarefas e os estudos que iriam realizar; a produção das tarefas pelos estudantes, respeitando as escolhas e resoluções feitas por eles, visando o desenvolvimento de suas capacidades e a superação das dificuldades encontradas; uma avaliação final, para verificar o que aprenderam no desenvolvimento da sequência didática, buscando comparar o produto inicial com o produto final dessa aprendizagem.

3.2 A ESCOLA

A escola Professor João Pessoa Maschietto fica localizada na cidade de Mogi Guaçu, interior do Estado de São Paulo, sendo uma escola da rede pública estadual.

Como a grande maioria das escolas públicas, o “Maschietto” tem passado por constantes transformações ao longo dos sucessivos períodos letivos, buscando sempre se adequar da melhor forma possível às dificuldades e adversidades que vão surgindo.

Do final de 2017 para o início do ano de 2018, essa escola passou por uma reforma completa, que incluiu poda de árvores, pintura de todas as salas de aula e dependências, instalação de novos ventiladores, reorganização de alguns espaços, instalação de sistema de segurança com câmeras e alarmes, melhora da sala de vídeo com novas cadeiras e ar condicionado.

Toda essa reforma foi feita por iniciativa própria, sem contar com recursos do Estado. Assim, graças à atuação do diretor, vice-diretora, coordenadora, funcionários, professores e alguns voluntários da comunidade, a escola conseguiu iniciar o ano letivo de 2018 com uma nova aparência.

Figura 47 — Foto do Laboratório de Matemática

Fonte: Arquivo Pessoal

3.3 A TURMA

A turma escolhida para a aplicação da proposta foi uma turma do 1º ano do Ensino Médio.

Essa turma era formada inicialmente por estudantes advindos do 9º ano do período da tarde da própria escola. Era considerada uma turma muito boa, bastante focada nas aulas e muito participativa. Antes do encerramento do 1º bimestre, começaram a chegar alguns estudantes que vieram transferidos de outras escolas. Conversando com outros professores, era senso comum entre eles que esses estudantes demonstravam pouco interesse nas aulas e traziam muitas defasagens em conteúdos que já tinham sido vistos nos anos anteriores. Isso ficou comprovado ao longo dos bimestres. Dessa forma, a turma dessa classe passou a ser uma classe que é qualificada como heterogênea e que exige dos professores formas diferentes de abordar e trabalhar os conteúdos das matérias. Para a aplicação da proposta, em momento algum isso foi considerado um ponto negativo, haja visto que uma vez ou outra somos surpreendidos por estudantes que saem do anonimato e da passividade e começam a demonstrar real interesse pelas aulas e pela Matemática.

Conhecendo o meu trabalho frente às turmas que leciono, o diretor, a vice-diretora e a coordenadora pedagógica me deram total liberdade e autonomia para a aplicação da proposta pedagógica.

3.4 ETAPA 1 — MONTAGEM DO EXPERIMENTO

Para poder apresentar o experimento para os estudantes, deixei o laboratório preparado com antecedência, montando os recipientes onde seriam instaladas as bombinhas, enchendo-os com água. Para facilitar a visualização do nível de água no vaso cilíndrico e também deixar o experimento mais atrativo e interessante, adicionei um corante na água. Foram montados três experimentos separados, onde tive que ter o cuidado de fixar as extensões dos fios, que ligariam as bombinhas, com fita adesiva, desde o chão até os pés das mesas. Essa medida foi muito importante, pois a turma inteira estaria no laboratório e um tropeço em um dos fios poderia ser um desastre. Assim, as três estações ficaram devidamente montadas, com o recipiente com água colorida e a bombinha já presa no fundo. A mangueira foi ligada no vaso cilíndrico presa com um prendedor de roupa na parte superior e a fita graduada de papel foi fixada na lateral do vaso cilíndrico com pequenos pedaços de fita adesiva transparente.

Figura 48 — Foto do Laboratório montado para o experimento

Fonte: Arquivo Pessoal

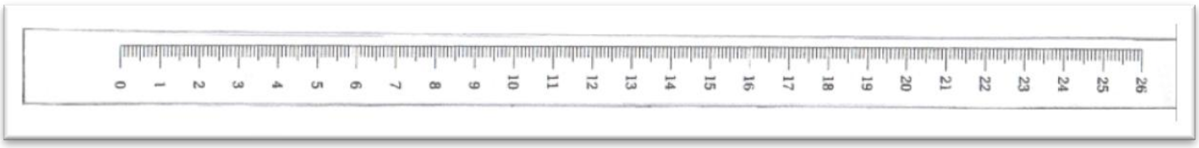
3.5 ETAPA 2 — APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE EXPERIMENTAL

Com o laboratório já preparado no dia anterior, levei os estudantes para lá e aguardei que todos se acomodassem. Muito curiosos e atentos, passei a orientá-los sobre os procedimentos que teriam que fazer para dar início ao experimento.

Pedi para que verificassem dentro do grupo quem ficaria responsável por cada uma das tarefas necessárias para a realização da atividade. Um estudante teria que cuidar do cronômetro, marcando o tempo de 10 em 10 segundos e avisando esse tempo para o colega que iria observar e marcar na régua graduada a altura que a coluna de água fosse atingindo. O terceiro componente do grupo tomaria conta da bombinha, acionando-a para dar início ao experimento e desligando-a assim que fosse marcada a última observação da coluna de água na régua graduada, tomando muito cuidado para não deixar a água subir demais e transbordar.

Expliquei ainda nessa parte que a régua era graduada igualzinha a uma régua comum escolar, ou seja, que a escala estava em centímetros. O zero não estava marcado no comecinho da régua pelo seguinte motivo: ao se ligar a bombinha, ela levava um tempinho até que a água começasse a sair pela mangueira, o que poderia comprometer o início da contagem do tempo. Também havia o problema do fundo do vaso cilíndrico não ser plano, devido à própria confecção do vaso, acarretando uma subida mais rápida da água nesses 10 primeiros segundos. Dessa forma, o zero da régua começava um pouquinho mais para cima do início do papel, o que daria o tempo necessário para que todos se preparassem e o estudante que fosse fazer as marcações na régua com o lápis pudesse dar o primeiro aviso ao colega com o cronômetro assim que o nível da água estivesse exatamente na altura do zero. Daí em diante, era só ir marcando na régua a altura que a água ia atingindo a cada 10 segundos.

Figura 49 — Modelo da régua graduada usada no experimento



Fonte: Arquivo Pessoal

Pedi para que tomassem cuidado ao precisar manusear o vaso de vidro caso fosse necessário repetir o experimento e ter que devolver a água para a vasilha com a bombinha. Esclareci que poderiam repetir o experimento quantas vezes fossem necessárias.

Fiz uma pequena simulação para a turma, ligando a bombinha e deixando o vaso cilíndrico ir enchendo, para que todos pudessem observar o comportamento da água nessa parte e, assim que o nível da água passou a última marcação da régua, desliguei a bombinha.

Neste ponto cabe ressaltar um detalhe importante que foi incorporado ao experimento. Quando se compra a bombinha de aquário, a mesma não vem com uma chave liga/desliga, sendo ligada direto na tomada através do "plug". Prevendo que isso poderia atrapalhar a realização do experimento com os estudantes, pois teriam que ficar colocando e tirando a bombinha da tomada quando quisessem ligá-la ou desligá-la, adaptei um interruptor tipo liga/desliga em um trecho do fio entre a bombinha e o "plug" que vai à tomada. Isso mostrou ser muito prático na hora em que o grupo realizou o experimento.

Figura 50 — Foto mostrando o detalhe do interruptor que foi adaptado à bombinha

Fonte: Arquivo Pessoal

Para encerrar essa parte, reforcei algumas observações que já havia feito, esclareci algumas dúvidas que levantaram e mostrei para a turma as Folhas de Atividades que cada grupo iria receber ao longo dos trabalhos, explicando em detalhes o objetivo do experimento e o que eles teriam que conseguir atingir em cada uma das cinco atividades relacionadas ao experimento e que, dentro do que fosse possível, eu estaria orientando-os e esclarecendo as dúvidas que pudessem ocorrer no desenvolvimento das Folhas de Atividades.

3.6 ETAPA 3 — REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO PELOS GRUPOS

Na aula seguinte daquele mesmo dia, após o intervalo do recreio, descemos ao laboratório e 3 grupos já foram se adiantando e se acomodaram nas mesas onde estavam postos os experimentos. A divisão da turma em grupos já havia sido feita em aulas anteriores, onde ressaltei que cada grupo poderia ser formado por no máximo 3 alunos e que em cada grupo alguém teria que ter ou pegar emprestado um “smartphone” com algum colega da sala ou da escola. Foram então montados 6 grupos com 3 integrantes e 2 grupos com 4 integrantes.

Enquanto os demais grupos ficaram aguardando, os 3 grupos que já estavam posicionados nas “estações” deram início ao experimento.

As duas aulas colocadas no planejamento foram suficientes para que todos os grupos fizessem as suas medições. Houve a necessidade da minha intervenção em alguns casos. Um dos grupos usou uma caneta tipo marca texto para fazer a marcação na régua graduada, dificultando a leitura na escala, pois o risco ficava muito grosso e não se podia definir bem qual era o valor das medidas assinaladas. Orientei-os a usar um lápis bem apontado ou uma caneta comum e repetiram o experimento.

Outro grupo achou que tinha que desligar a bombinha a cada 10 segundos para poderem fazer a marcação do nível da água. Expliquei que esse procedimento acarretaria muita imprecisão nos dados que fossem obtidos, de modo que não serviria para o propósito do experimento e que a bombinha tinha que permanecer ligada até a água atingir a última marcação da régua onde o grupo tinha que ir acompanhando a subida da água de 10 em 10 segundos, marcando na régua a altura equivalente.

Um grupo precisou me chamar, pois mesmo a bombinha estando ligada, a água não subia pela mangueira. Após algumas tentativas junto com o grupo, um estudante indagou se não seria o caso de algum problema de ar na mangueira. Expliquei que esse tipo de bombinha usa um sistema de hélices para empurrar a água para a mangueira e que o ar na tubulação não poderia ser o problema. Com mais algumas tentativas, conseguiu-se que a bombinha funcionasse corretamente e o grupo pôde dar andamento ao experimento.

Apesar de ser uma classe bastante heterogênea, com estudantes que vieram de outras escolas trazendo muitas defasagens para a série que se encontravam, todos os grupos conseguiram completar o experimento de forma muito satisfatória, obtendo a régua graduada com todas as marcações necessárias.

As imagens a seguir mostram alguns grupos no processo de realização do experimento. Apesar de alguns estudantes apresentarem autorização assinada pelos pais ou responsáveis para uso da imagem, algumas dessas imagens foram seccionadas e redimensionadas com o intuito de preservar as identidades de todos os estudantes que participaram do projeto.

Figura 51 — Grupo se preparando para iniciar o experimento

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 52 — Grupo realizando o experimento

Fonte: Arquivo Pessoal

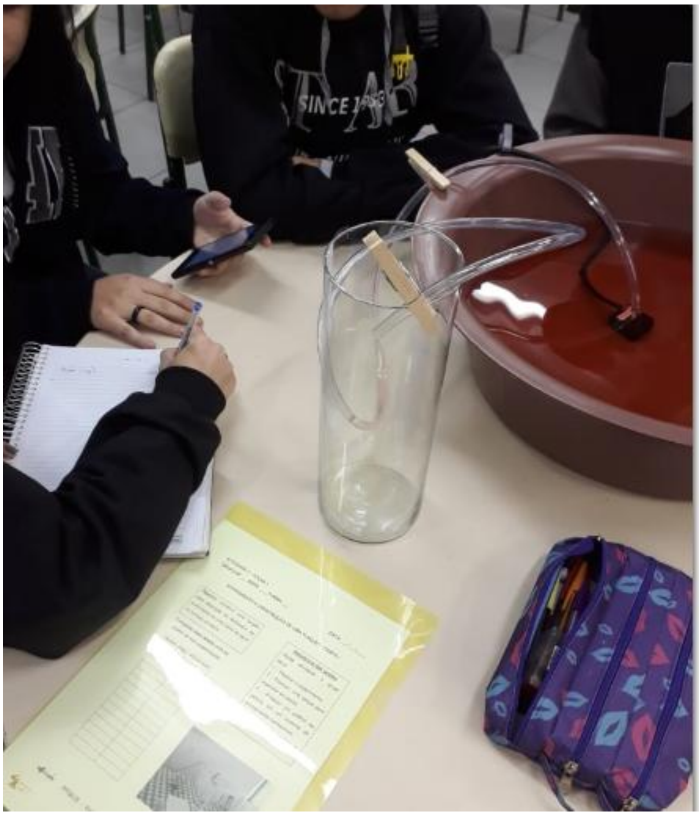
Figura 53 — Grupo realizando o experimento

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 54 — Grupo realizando o experimento

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 55 — Grupo iniciando o experimento



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 56 — Grupo realizando o experimento

Fonte: Arquivo Pessoal

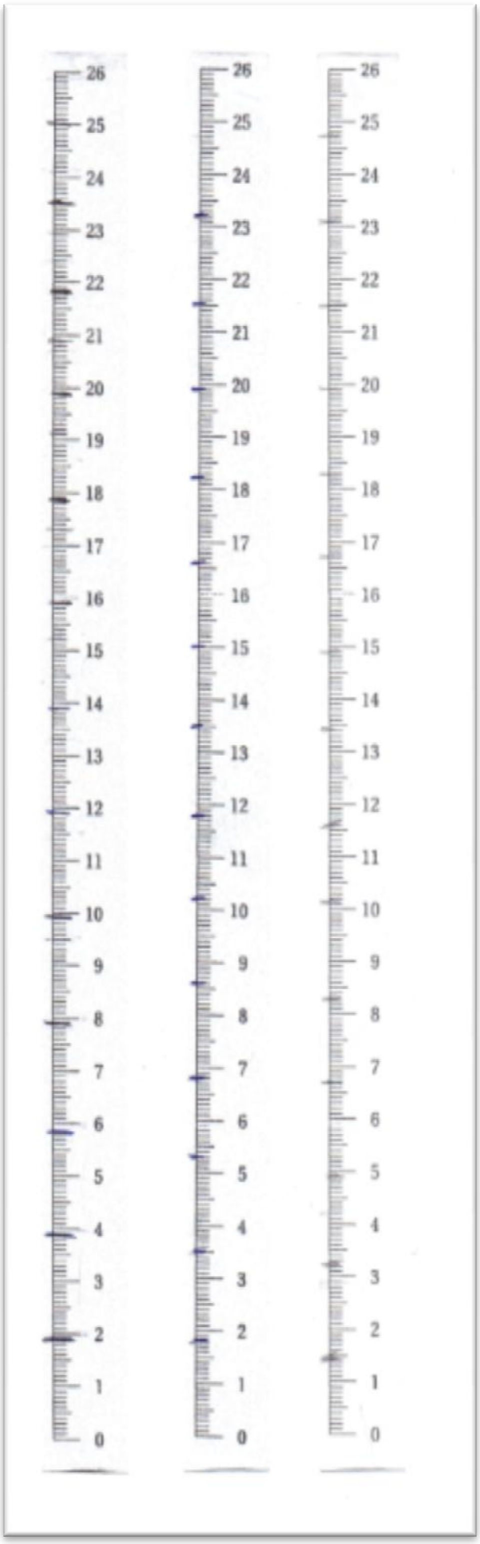
Figura 57 — Grupo concluindo o experimento

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 58 — Grupo conferindo a régua graduada

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 59 — Exemplos de réguas que foram obtidas por alguns dos grupos



Fonte: Material produzido pelos estudantes

A figura anterior mostra como os estudantes fizeram as marcações na régua graduada. Esses valores foram transferidos para uma tabela que serviu de base para a construção do gráfico de pontos.

3.7 ETAPA 4 — PRODUÇÃO DA TABELA E DO GRÁFICO DE PONTOS EM UM SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Na aula seguinte ao do experimento, os grupos se reuniram no Laboratório para completarem as tabelas com os dados que tinham obtidos no experimento e para produzirem o gráfico de pontos no papel milimetrado, assinalando os pontos que representavam o tempo em segundos e a altura em centímetros.

A diferença entre os intervalos da coluna da altura na comparação das duas tabelas que se seguem se deve ao uso de duas bombinhas de aquário diferentes para a realização do experimento. Uma das bombinhas foi fornecida pelo professor Roberto e as outras duas foram adquiridas por mim sendo, então, três bombinhas com duas especificações técnicas diferentes.

Figura 60 — Exemplos de tabelas construídas corretamente pelos grupos

tempo (seg)	altura (cm)
0	0
10	1,4
20	3,2
30	4,9
40	6,7
50	8,3
60	10,2
70	11,6
80	13,4
90	14,9
100	16,7
110	18,3
120	19,9
130	21,5
140	23,1

tempo (seg)	altura (cm)
0	0
10	2,2
20	4,1
30	6,1
40	8,2
50	10,4
60	12,3
70	14,8
80	17,2
90	19,1
100	20,9
110	22,7
120	24,5
130	26,7

Fonte: Material produzido pelos estudantes

As duas tabelas seguintes mostram valores bem próximos ao se comparar as colunas da altura. Os dois grupos responsáveis por essas tabelas usaram a mesma bombinha na realização do experimento. Isso vem a mostrar uma uniformidade na obtenção dos dados que favoreceram a validação do experimento.

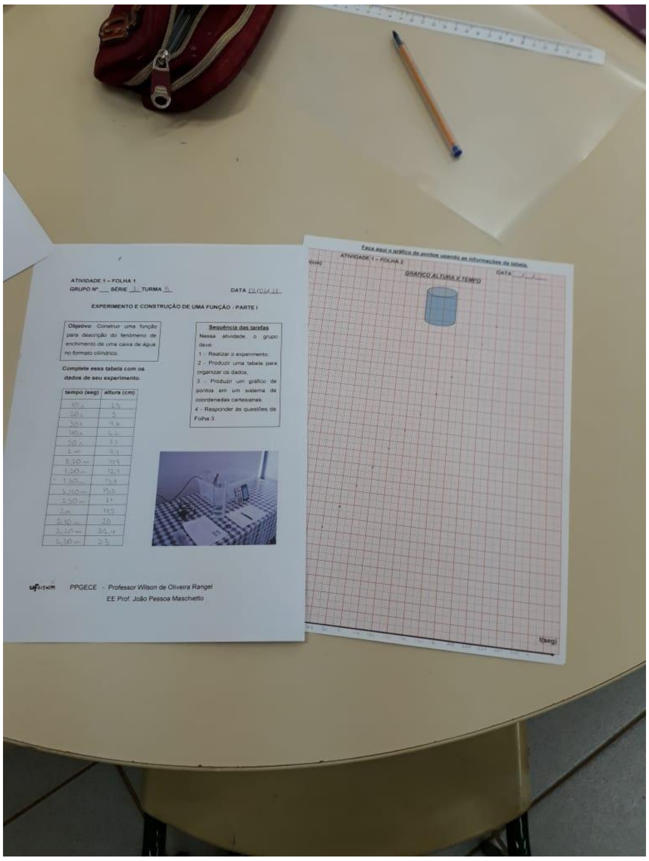
Figura 61 — Tabelas construídas corretamente pelos grupos

tempo (seg)	altura (cm)
0	0
10	2
20	3,8
30	5,6
40	7,3
50	9,2
60	10,8
70	12,5
80	14,3
90	16
100	17,7
110	19,6
120	21,2
130	22,7
140	24,4

tempo (seg)	altura (cm)
0	0
10	1,8
20	3,6
30	5,3
40	7,1
50	8,8
60	10,5
70	12,3
80	13,9
90	15,5
100	17,2
110	18,9
120	20,5
130	22,1
140	23,8

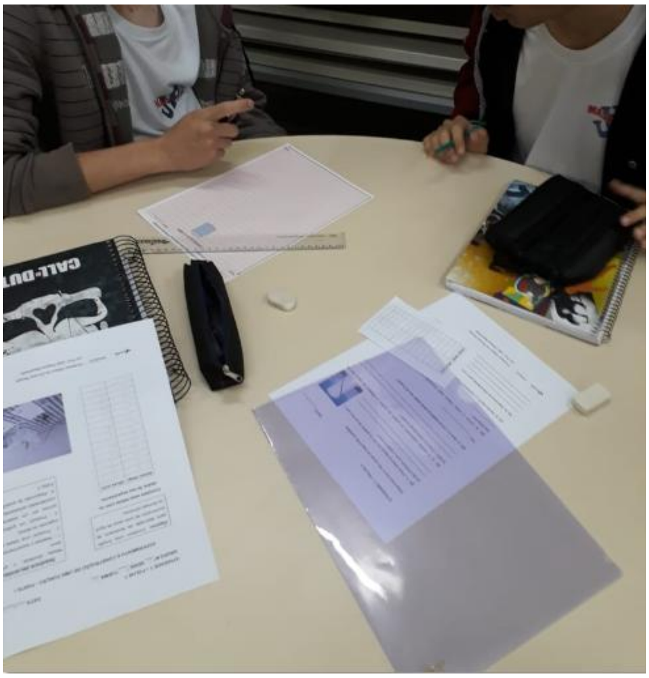
Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 62 — Tabela e gráfico já construídos



Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 63 — Grupo discutindo a construção do gráfico



Fonte: Arquivo Pessoal

Dos oito grupos formados, seis conseguiram preencher corretamente a tabela e representar os pontos no plano cartesiano. Um grupo esqueceu-se de considerar o tempo inicial de 0 segundo, iniciando a tabela em 10 segundos. Consequentemente, esse grupo acabou não marcando o ponto (0,0) no plano cartesiano. O outro grupo associou o tempo de 0 segundo na tabela com a primeira altura que a água atingiu. Provavelmente entendeu que só fazia sentido associar o tempo inicial de 0 segundo com a primeira altura que a água atingiu depois de 10 segundos. No gráfico, porém, o grupo assinalou corretamente o ponto (0,0).

Figura 64 — Tabelas construídas incorretamente pelos grupos

tempo (seg)	altura (cm)
10 s	1,5
20 s	3
30 s	4,6
40 s	6,2
50 s	7,8
1 m	9,4
1,10 m	10,9
1,20 m	12,4
1,30 m	13,9
1,40 m	15,3
1,50 m	17
2 m	18,5
2,10 m	20
2,20 m	21,4
2,30 m	23

tempo (seg)	altura (cm)
0	1,2
10	2,7
20	3,6
30	5,3
40	6,6
50	8,2
60	9,7
70	11
80	12,7
90	14,4
100	16
110	17,9
120	19,4
130	21,4
140	23,2

Fonte: Material produzido pelos estudantes

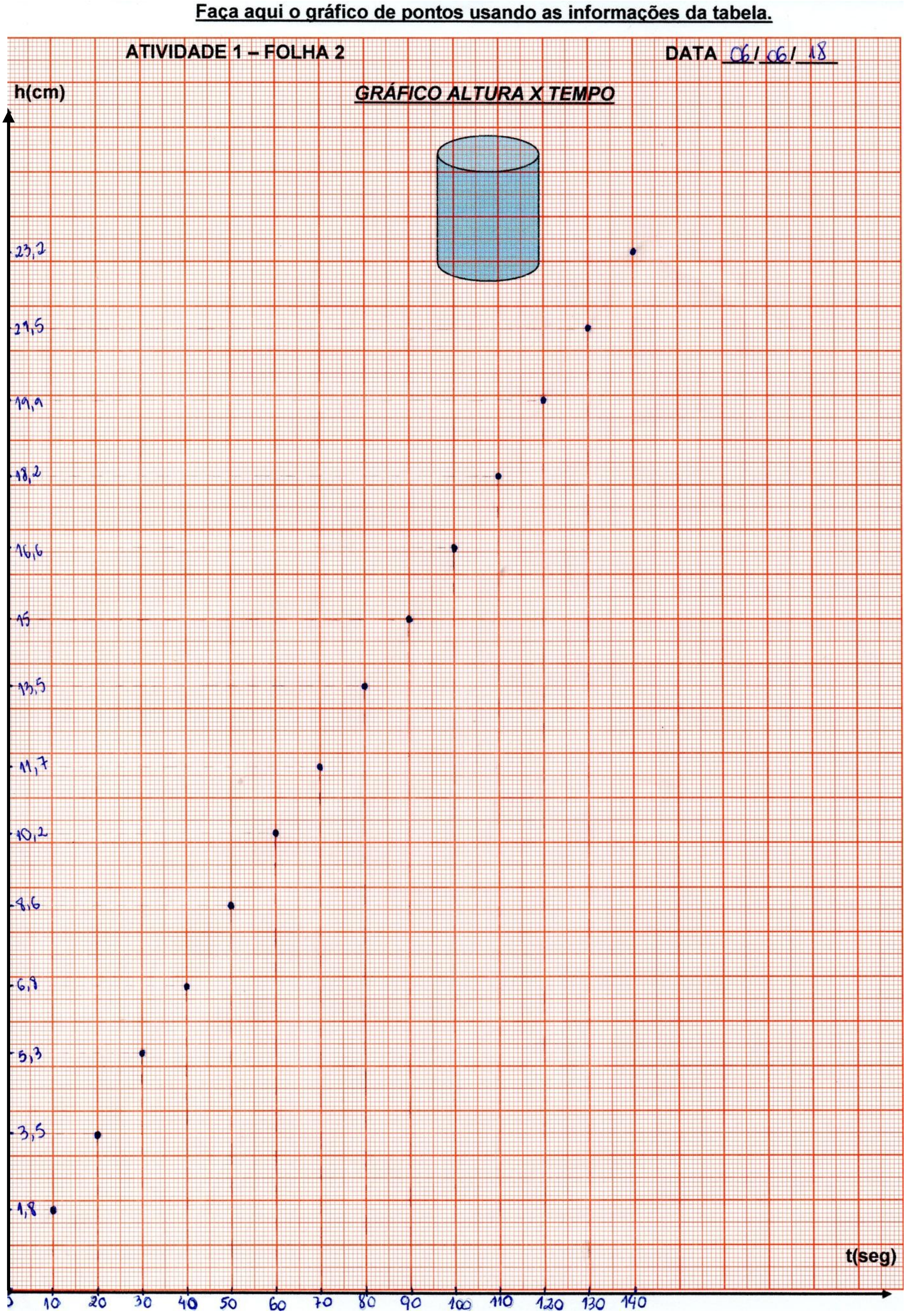
Uma das dúvidas que surgiu entre alguns grupos era saber em qual dos eixos iriam representar o tempo e a altura. Um grupo ou outro apenas queria que eu confirmasse se o eixo horizontal era para representar o tempo. Sugeri a todos os grupos que parassem para pensar na ideia de função que tinha sido trabalhada em sala de aula: qual das grandezas estava em função da outra? Conforme foram analisando, perceberam que a altura estava em função do tempo e daí concluíram que o tempo teria que ser colocado no eixo horizontal e a altura no eixo vertical.

Outra dúvida que surgiu foi com relação à divisão dos eixos nas duas escalas. Lembrei-os de que o papel milimetrado tinha esse nome exatamente porque as divisões estavam em milímetros, tanto no sentido da largura da folha como no sentido do comprimento e que o grupo teria que refletir na melhor maneira de fazer a divisão, mas salientei que as divisões nos eixos não precisavam ser iguais, já que as duas grandezas representavam unidades diferentes. Reforcei que seria interessante se eles dividissem os eixos de forma a conseguirem marcar todos os pontos obtidos no experimento.

Um estudante de um grupo percebeu que a régua de papel obtida do experimento tinha as mesmas escalas de uma régua escolar comum. Sem perder tempo, ao invés de tentar encontrar uma escala para dividir o eixo vertical do plano cartesiano para marcar os valores da altura, como a maioria dos grupos estava fazendo, pegou a régua de papel e a posicionou do lado do eixo vertical no papel milimetrado. Dessa forma, ele só tinha que transferir as marcações para o eixo das alturas.

Alguns grupos, após marcarem os pontos, perguntaram se não podiam passar uma reta com a régua pelos pontos obtidos. Expliquei que dificilmente conseguiriam passar uma reta que “pegasse” todos os pontos e que a ideia, por enquanto, era observar o padrão do gráfico e analisar esse padrão.

Figura 65 — Gráfico produzido pelo Grupo 2



Fonte: Material produzido pelos estudantes

3.8 ETAPA 5 — RESPONDENDO ÀS QUESTÕES DA FOLHA 3

Nessa etapa, os grupos tinham que responder às questões apresentadas na folha 3 da Atividade 1.

Como são questões ligadas ao conteúdo que foi tratado em sala de aula sobre os conceitos e noções de função, a maioria dos grupos não apresentou dificuldades para respondê-las.

Figura 66 — Resposta da Q1.1 dada pelo Grupo 1

Q1. 1. Você observa algum padrão no gráfico de pontos que o grupo produziu com o experimento?

Sim o padrão é os pontos do gráfico que formam uma linha reta.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 67 — Resposta da Q1.2 dada pelo Grupo 1

Q1. 2. O padrão observado no gráfico de pontos é indicativo de algum tipo de função? Qual é o nome dessa função?

Sim função afim

Fonte: Material produzido pelos estudantes

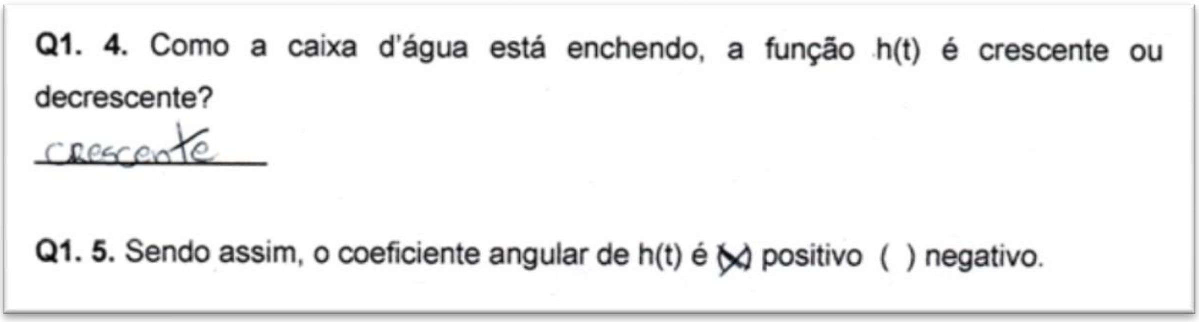
Figura 68 — Resposta da Q1.3 dada pelo Grupo 1

Q1. 3. Qual é a forma algébrica geral desse tipo de função?

h(t) = a.t+b

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 69 — Respostas da Q1.4 e da Q1.5 dadas pelo Grupo 1



Q1. 4. Como a caixa d'água está enchendo, a função h(t) é crescente ou decrescente?

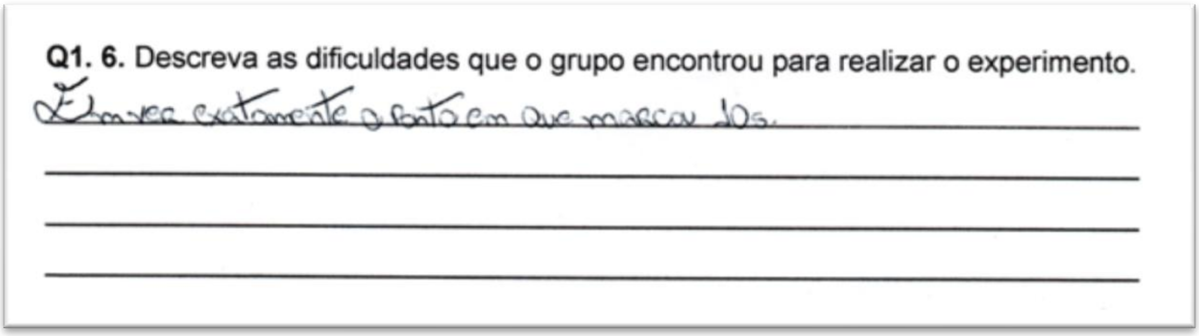
crescente

Q1. 5. Sendo assim, o coeficiente angular de h(t) é (X) positivo ( ) negativo.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Dentre as dificuldades relatadas pelos grupos para realizar o experimento, a dificuldade mais sentida foi em acompanhar a subida da água no vaso cilíndrico para poder assinalar na régua de papel a altura correspondente. Um dos grupos relatou dificuldades em interpretar as perguntas da Folha de Atividades.

Figura 70 — Resposta da Q1.6 dada pelo Grupo 1

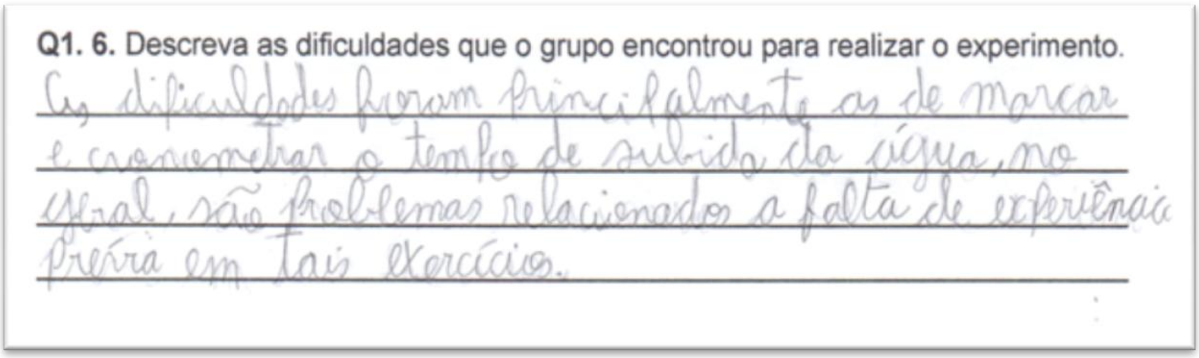


Q1. 6. Descreva as dificuldades que o grupo encontrou para realizar o experimento.

Em ver exatamente o ponto em que marcávamos.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 71 — Resposta da Q1.6 dada pelo Grupo 8



Q1. 6. Descreva as dificuldades que o grupo encontrou para realizar o experimento.

As dificuldades foram principalmente as de marcar e cronometrar o tempo de subida da água, no geral, são problemas relacionados a falta de experiência prévia em tais exercícios.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 72 — Resposta da Q1.6 dada pelo Grupo 2

Q1. 6. Descreva as dificuldades que o grupo encontrou para realizar o experimento.
Marcar correto as linhas da régua devido ao tempo corrido.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

A figura seguinte mostra todas as respostas dadas pelo Grupo 7 nas questões da folha 3.

Figura 73 — Folha de Atividades construída pelo Grupo 7

ATIVIDADE 1 – FOLHA 3 **DATA** 07/06/18

Responda com o seu grupo às seguintes questões:

Q1. 1. Você observa algum padrão no gráfico de pontos que o grupo produziu com o experimento?
forma-se uma linha aproximando-se de uma reta

Q1. 2. O padrão observado no gráfico de pontos é indicativo de algum tipo de função? Qual é o nome dessa função?
função do 1º grau, sendo crescente

Q1. 3. Qual é a forma algébrica geral desse tipo de função?

h(t) = a.t + b

Q1. 4. Como a caixa d'água está enchendo, a função h(t) é crescente ou decrescente?
crescente

Q1. 5. Sendo assim, o coeficiente angular de h(t) é (X) positivo ( ) negativo.

Q1. 6. Descreva as dificuldades que o grupo encontrou para realizar o experimento.
interpretação das perguntas

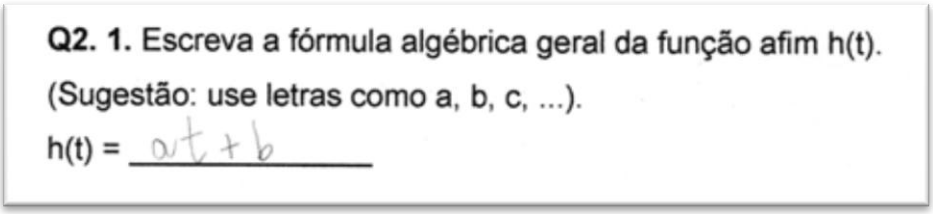
Fonte: Material produzido pelos estudantes

3.9 ETAPA 6 — ENCONTRAR A FUNÇÃO QUE MELHOR DESCREVE O EXPERIMENTO

Nessa etapa, os estudantes já perceberam que o gráfico que representa o enchimento do vaso cilíndrico do experimento é uma reta e sabem que a função cujo gráfico é uma linha reta é a função afim.

Partindo agora da forma algébrica geral da função afim, os grupos tinham que obter a fórmula algébrica do experimento, levando em conta que quando se iniciou a contagem dos tempos (t = 0), a altura da coluna de água considerada era $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$, ou seja, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

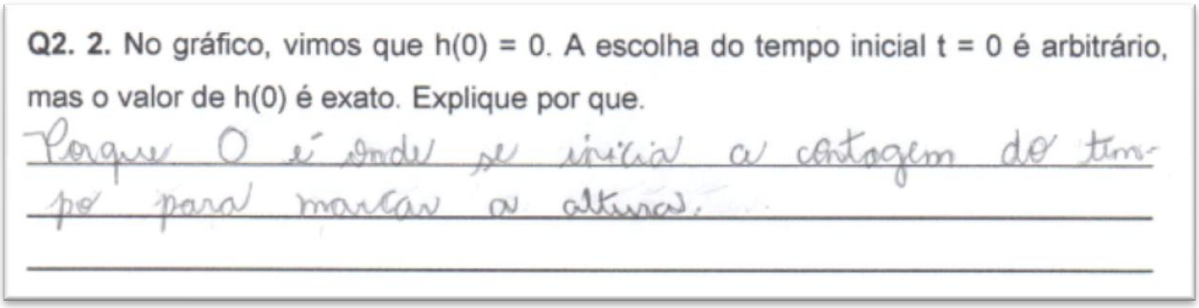
Figura 74 — Resposta da Q2.1 dada pelo Grupo 2


Q2. 1. Escreva a fórmula algébrica geral da função afim h(t). (Sugestão: use letras como a, b, c, ...).

h(t) = at + b

Fonte: Material produzido pelos estudantes

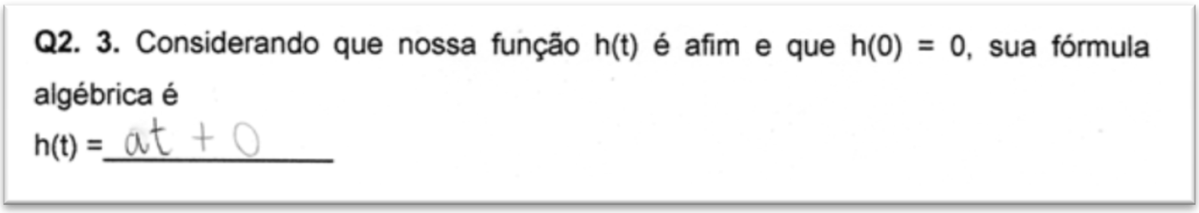
Figura 75 — Resposta da Q2.2 dada pelo Grupo 2


Q2. 2. No gráfico, vimos que h(0) = 0. A escolha do tempo inicial t = 0 é arbitrário, mas o valor de h(0) é exato. Explique por que.

Porque 0 é onde se inicia a contagem do tem-po para marcar a altura.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 76 — Resposta da Q2.3 dada pelo Grupo 2


Q2. 3. Considerando que nossa função h(t) é afim e que h(0) = 0, sua fórmula algébrica é

h(t) = at + 0

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Alguns grupos acharam que tinham que encontrar o valor numérico de $\boldsymbol{a}$ para poderem representar a função. Lembrando que o valor de $\boldsymbol{a}$ está relacionado com a taxa de variação, um grupo arriscou a escrever esse valor como sendo aproximadamente 2, pois verificou na tabela que a variação da altura, de 10 em 10 segundos, estava bem próxima de 2. Pedi que repensassem melhor nesse valor, pois ele só contemplava a coluna da altura da tabela e que a taxa de variação tinha que relacionar duas grandezas como, por exemplo, km/h. Completei dizendo para não se preocuparem com o valor de $\boldsymbol{a}$ nessa parte, e que eles teriam a oportunidade de determinar esse valor logo mais adiante.

Encerrada essa atividade da Folha 1, os grupos passaram para as questões da Folha 2, onde tinham que calcular a taxa de variação de uma função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ entre dois valores de $\boldsymbol{x}$. Como se tratava de um cálculo algébrico, a maioria dos grupos teve dificuldade nessa parte. Percebi que a dificuldade não era apenas na interpretação da função afim geral $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$, mas também no processo de resolução, pois envolvia operações com parênteses, jogo de sinais, fatoração e simplificação. Dessa forma, tive que intervir várias vezes com os grupos, buscando explicar por meio de gráficos na lousa e lembrando-os que já tinham feito algo parecido em sala de aula, quando foram dados vários exemplos de gráficos e eles tiveram que encontrar as funções que representavam cada gráfico.

Essa dificuldade por parte da sala é bastante compreensível. Lidar com grandezas algébricas sempre foi um dos grandes dilemas presente no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Devido ao formalismo que a Álgebra apresenta em sua linguagem, o estudante vai perdendo o interesse na medida em que não consegue fazer a ligação dos conteúdos que ele estudou com a sua realidade. Segundo Carrasco (2000, p.192):

> A dificuldade de ler e escrever em linguagem matemática, onde aparece uma abundância de símbolos, impede muitas pessoas de compreenderem o conteúdo do que está escrito, de dizerem o que sabem de matemática e, pior ainda, de fazerem matemática.

Agora, apesar das dificuldades nessa questão, os grupos demonstraram interesse em conseguir calcular a taxa de variação e se esforçaram bastante. Apenas dois grupos encontraram maiores dificuldades nessa tarefa e não conseguiram desenvolver a questão de forma adequada, o que corresponde a 25% do total dos grupos.

Figura 77 — Resposta correta dada pelo Grupo 7

Q2. 4. Dada uma função afim geral f(x) = ax + b, calcule sua taxa de variação entre x_1 e x_2:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{ax_2+\cancel{b}-ax_1-\cancel{b}}{x_2-x_1} = \frac{a(\cancel{x_2-x_1})}{\cancel{x_2-x_1}} = a$$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Já na questão 5, os grupos tinham que escolher, dentre os valores da tabela obtidos do experimento, quatro valores que achassem que estivessem melhor posicionados na linha do gráfico para que pudessem encontrar o valor numérico de $\boldsymbol{a}$. Essa questão foi deixada a critério de cada grupo na escolha desses valores, sem a intervenção do professor. Como se tratava de apenas um cálculo numérico, quase todos os grupos obtiveram o valor de $\boldsymbol{a}$ e encontraram a função que melhor descrevia o experimento que cada grupo realizou.

Figura 78 — Resolução feita pelo Grupo 8

Q2. 5. Escolha quatro valores da tabela que você acha que estão melhor posicionados na linha do gráfico e calcule:

$a_1 = \frac{h(t_1)}{t_1} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ $a_2 = \frac{h(t_2)}{t_2} = \frac{3{,}8}{20} = 0{,}19$

$a_3 = \frac{h(t_3)}{t_3} = \frac{5{,}6}{30} \cong 0{,}18$ $a_4 = \frac{h(t_4)}{t_4} = \frac{17{,}7}{100} = 0{,}177$

Calcule a média aritmética desses valores:

$$a = \frac{0{,}2 + 0{,}18 + 0{,}19 + 0{,}177}{4} = \frac{0{,}747}{4} = 0{,}18$$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 79 — Função encontrada pelo Grupo 8

Q2. 6. Proponha a função que melhor descreve o experimento:

h(t) = 0,18t + 0

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 80 — Resolução feita pelo Grupo 2

Q2. 5. Escolha quatro valores da tabela que você acha que estão melhor posicionados na linha do gráfico e calcule:

$a_1 = \frac{h(t_1)}{t_1} = \frac{3,5}{20} = 0,175$

$a_2 = \frac{h(t_2)}{t_2} = \frac{13,5}{80} = 0,17$

$a_3 = \frac{h(t_3)}{t_3} = \frac{15}{90} = 0,166$

$a_4 = \frac{h(t_4)}{t_4} = \frac{21,5}{130} = 0,165$

Calcule a média aritmética desses valores:

$a = \frac{0,175 + 0,17 + 0,166 + 0,165}{4} = \frac{0,676}{4} = \underline{0,169}.$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

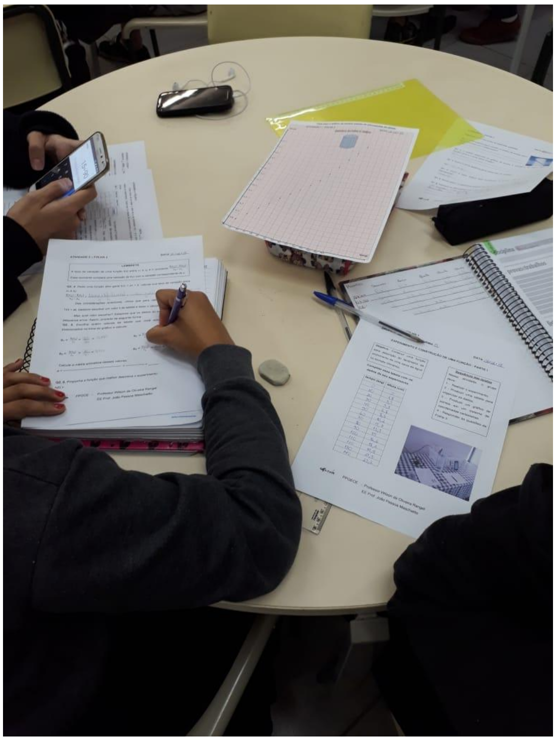
Figura 81 — Função encontrada pelo Grupo 2

Q2. 6. Proponha a função que melhor descreve o experimento:

h(t) = 0,169×t .

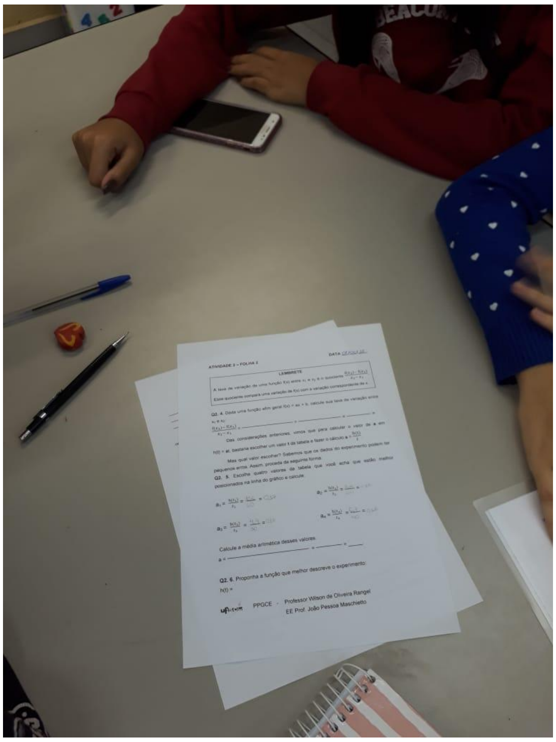
Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 82 — Grupo calculando a taxa de variação da Q2.5



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 83 — Grupo com a Folha de Atividades pronta.



Fonte: Arquivo Pessoal

Os grupos encontraram um pouco de dificuldade para entender a questão 7, mais especificamente na interpretação da fórmula $\frac{\boldsymbol{h(t_{i+1}) - h(t_i)}}{\boldsymbol{t_{i+1} - t_i}}$, onde eles teriam que obter um valor mais apurado da taxa de variação. Alguns grupos fizeram apenas a diferença entre as alturas da tabela, usando essa diferença para completar a tabela na coluna “1ª variação”. Busquei intervir da melhor maneira possível, sem mostrar diretamente como eles teriam que fazer o cálculo. Pedi para que comparassem o valor de $\boldsymbol{a}$ que eles calcularam na questão 5 com o valor de $\boldsymbol{a}$ que obtiveram na questão 7 e verificassem o que poderia estar errado. Daí perceberam que no cálculo que fizeram, tinham dividido o valor da altura escolhido pelo tempo correspondente e nesse novo cálculo se esqueceram de fazer a mesma coisa, ou seja, dividir a diferença das alturas pela diferença dos tempos correspondentes. Após esse impasse, apenas dois grupos não conseguiram realizar a tarefa de forma adequada e encontrar o valor da 1ª variação para determinar o valor de $\boldsymbol{a}$.

Figura 84 — Tabela construída pelo Grupo 2

Q2. 7.

tempo (seg)	*altura (cm)*	*1ª variação*
0	0	
10	1,8	0,18
20	3,5	0,17
30	5,3	0,18
40	6,8	0,15
50	8,6	0,18
60	10,2	0,16
70	11,7	0,15
80	13,5	0,18
90	15	0,15
100	16,6	0,16
110	18,2	0,16
120	19,9	0,17
130	21,5	0,16
140	23,2	0,17

Os dados da 3ª coluna chamam-se “1ª variação”. São calculados pela fórmula $\frac{h(t_{i+1}) - h(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$. Faça você os cálculos lembrando que $t_{i+1} - t_i$ = 10 segundos.

Devido aos erros do experimento, é pouco provável que os valores da 1ª variação sejam constantes. Mas você pode fazer sua média aritmética e obter o valor de **a**:

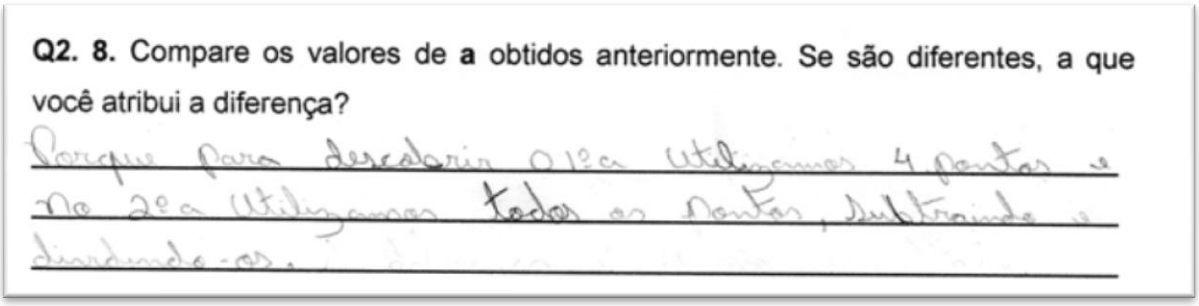
a = $\boxed{0,165}$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Comparando os dois valores de $\boldsymbol{a}$ obtidos pelo Grupo 2, observamos que os valores estão bem próximos. No primeiro cálculo, obtiveram $\boldsymbol{a = 0,169}$ e no segundo cálculo, $\boldsymbol{a = 0,165.}$

Como os grupos entenderam como o valor de $\boldsymbol{a}$ foi obtido na questão 7, conseguiram responder a questão 8 sem problemas, justificando o fato dos valores serem diferentes.

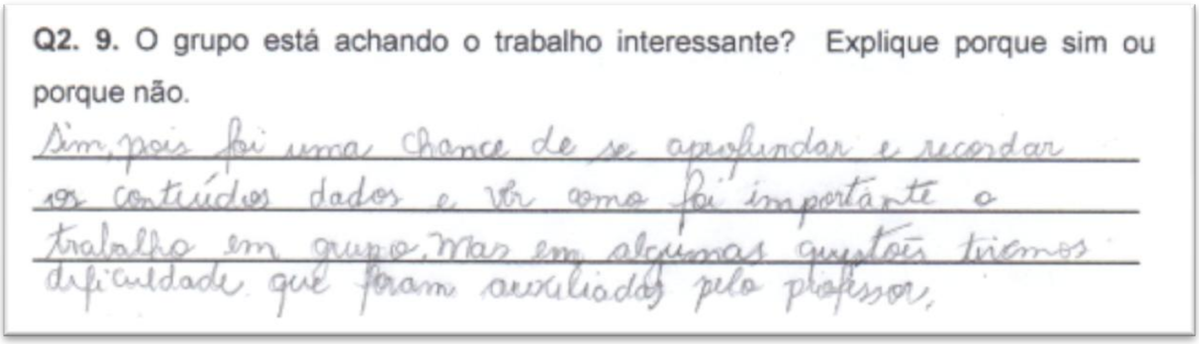
Figura 85 — Resposta da Q2.8 dada pelo Grupo 2


Q2. 8. Compare os valores de **a** obtidos anteriormente. Se são diferentes, a que você atribui a diferença?

Porque para descobrir o 1ºa utilizamos 4 pontos e no 2ºa utilizamos todos os pontos, subtraindo e dividindo-os.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 86 — Resposta da Q2.9 dada pelo Grupo 2


Q2. 9. O grupo está achando o trabalho interessante? Explique porque sim ou porque não.

Sim, pois foi uma chance de se aprofundar e recordar os contiúdos dados e ver como foi importante o trabalho em grupo. Mas em algumas questões tivemos dificuldade que foram auxiliadas pelo professor.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Da mesma forma que o Grupo 2, comparando os valores de $\boldsymbol{a}$ que foram calculados, o Grupo 8 obteve $\boldsymbol{a = 0,18}$ e $\boldsymbol{a = 0,175}$, valores esses bem próximos e que condizem com a realidade do experimento.

Figura 87 — Tabela construída pelo Grupo 8

ATIVIDADE 2 – FOLHA 3 **DATA** 11/06/18

Outra forma de se obter o valor de a na expressão h(t) = at é completar a tabela do experimento. Copie aqui os dados do experimento e complete a terceira coluna.

Q2. 7.

tempo (seg)	*altura (cm)*	*1ª variação*
0	0	0,2
10	2	0,18
20	3,8	0,18
30	5,6	0,17
40	7,3	0,19
50	9,2	0,16
60	10,8	0,17
70	12,5	0,16
80	14,3	0,17
90	16	0,17
100	17,7	0,19
110	19,6	0,16
120	21,2	0,15
130	22,7	0,17
140	24,4	

Os dados da 3ª coluna chamam-se "1ª variação". São calculados pela fórmula $\frac{h(t_{i+1}) - h(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$. Faça você os cálculos lembrando que $t_{i+1} - t_i$ = 10 segundos.

Devido aos erros do experimento, é pouco provável que os valores da 1ª variação sejam constantes. Mas você pode fazer sua média aritmética e obter o valor de **a**:

a = $\boxed{0,175}$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

O Grupo 1 encontrou $\boldsymbol{a = 0,16}$ para a 1ª variação, valor esse que coincidiu com o valor de $\boldsymbol{a}$ calculado sobre a média dos quatro valores que haviam escolhido da tabela.

Figura 88 — Resposta da Q2.8 dada pelo Grupo 1

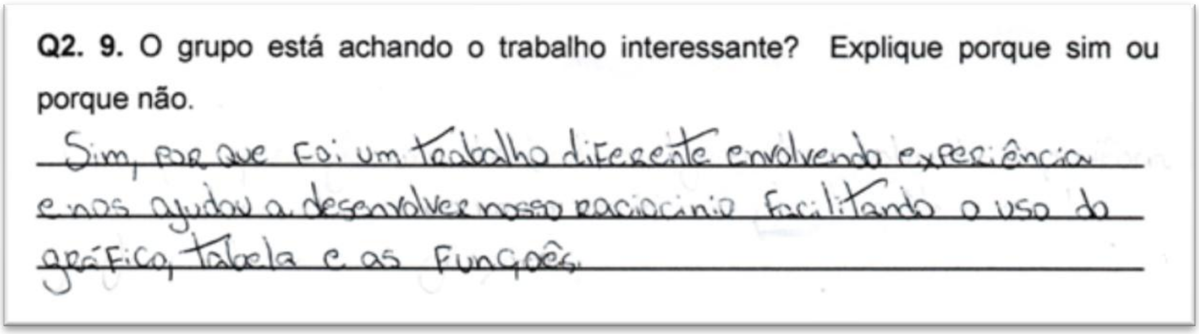
Q2. 8. Compare os valores de **a** obtidos anteriormente. Se são diferentes, a que você atribui a diferença?

Não houve diferença.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Encerrada essa atividade, os grupos foram questionados sobre a experiência que estavam passando. Os grupos se mostraram satisfeitos em poderem participar de uma atividade diferente e nova, que estava contribuindo para entenderem melhor a Matemática e os conceitos que foram estudados.

Figura 89 — Resposta da Q2.9 dada pelo Grupo 1

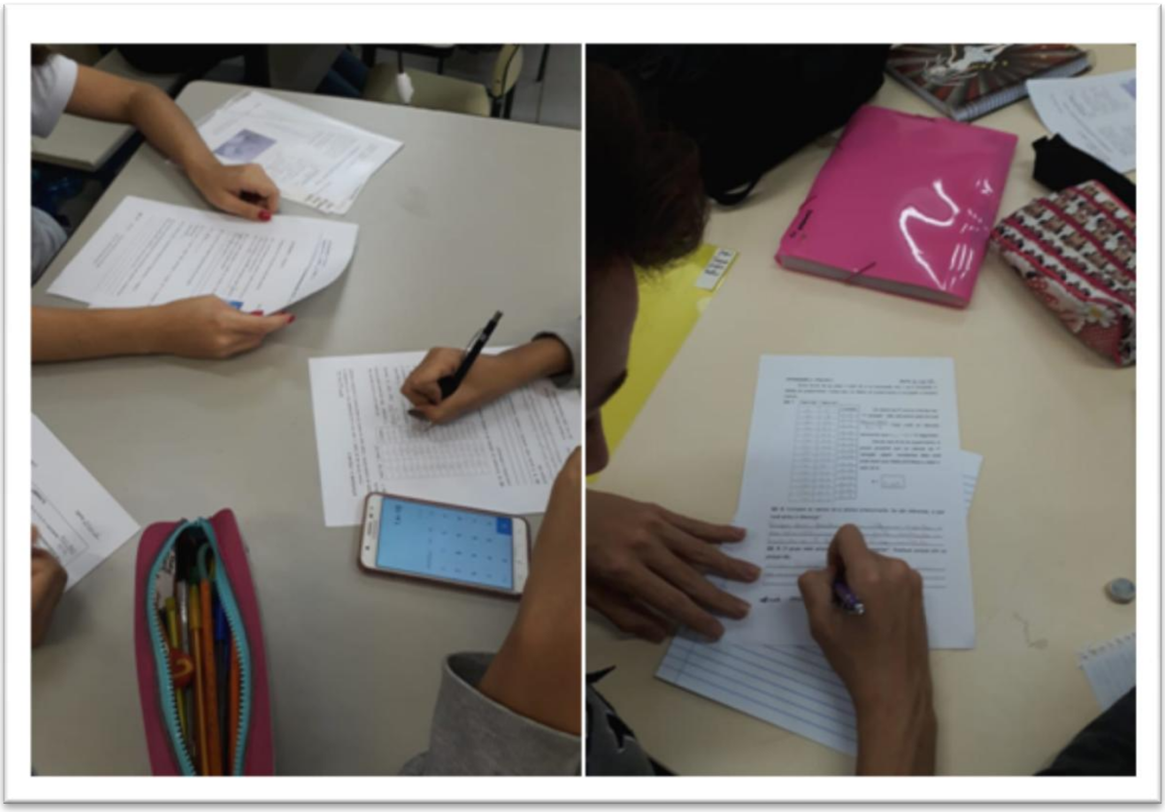


Q2. 9. O grupo está achando o trabalho interessante? Explique porque sim ou porque não.

Sim, por que foi um trabalho diferente envolvendo experiência e nos ajudou a desenvolver nosso raciocinio facilitando o uso do gráfico, tabela e as funçoês.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 90 — Grupos resolvendo a Folha de Atividades 2



Fonte: Arquivo Pessoal

3.10 ETAPA 7 — OBTENÇÃO DA FUNÇÃO USANDO UMA PLANILHA ELETRÔNICA

Essa etapa consistiu na utilização de um recurso do Excel para a obtenção da expressão algébrica que relaciona a variação da altura da coluna de água com o tempo decorrido conforme os dados que cada grupo obteve no experimento. Em um primeiro momento, a ideia era fazer uso da Sala de Informática da escola, onde os grupos poderiam ter acesso aos computadores e então realizar essa atividade. Infelizmente isso não pôde acontecer, pois ao fazer uma checagem nos computadores dessa sala antes de levar os grupos para lá, me deparei com a impossibilidade de abrir o recurso do software Excel por problemas de validade do mesmo. Como não havia muito tempo hábil para corrigir esse problema, conversei com os grupos sobre essa situação e combinamos em realizar essa atividade através do “smartphone” para aqueles alunos que não tinham computador em casa. Dessa forma, esclareci aos grupos que essa atividade iria depender da boa vontade de todos em realizá-la e que poderiam fazê-la fora do horário de aula, ou seja, ficaria como uma atividade opcional com a única exigência de enviarem para o meu e-mail a apresentação do que conseguiram fazer. Naquele mesmo dia dois grupos conseguiram me enviar a tarefa solicitada. Outros dois grupos me enviaram nos dias seguintes. Achei que foi muito responsável da parte deles, mostrando comprometimento com as tarefas que foram pedidas.

Agora, antes da realização dessa atividade, os grupos foram orientados sobre os procedimentos que teriam que seguir para poder completar essa parte. A Folha de Atividade 3, que trata da obtenção da função com o Método dos Mínimos Quadrados, traz o roteiro da sequência de passos para o grupo conseguir obter no aplicativo a expressão algébrica correspondente ao experimento que realizaram.

De forma breve expliquei aos grupos que o Método dos Mínimos Quadrados tem por objetivo buscar uma função matemática que representa com uma boa aproximação a função obtida com os valores tabelados a partir do experimento. A intenção de utilizar esse método era, então, obter uma função cuja curva não ia passar necessariamente pelos pontos que eles haviam obtidos, mas sim minimizar a distância entre essa curva e o conjunto de pontos que representavam o experimento através de um processo chamado de otimização. Dessa forma, o erro entre a função que eles obtiveram e a verdadeira equação da curva deveria ser bem pequeno.

A figura seguinte mostra o texto da Folha 1 da Atividade 3 com o procedimento para obter o gráfico e a função usando o Excel.

Figura 91 — Instruções para a obtenção do gráfico e da função usando uma planilha eletrônica

Nessa parte, o grupo deverá fazer uso de um aplicativo computacional para obter:

(i) O gráfico que foi construído no papel milimetrado.

(ii) A expressão algébrica da reta aproximada por meio da ferramenta linha de tendência.

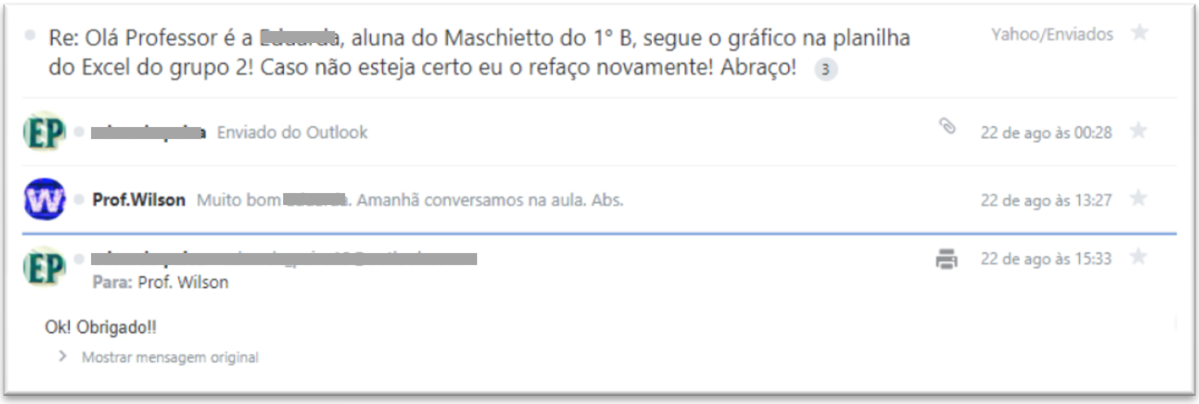
PROCEDIMENTO:

- Transfira a tabela do experimento para uma planilha eletrônica.
- Aplique o recurso inserir gráfico por meio da opção que dispersa os pontos no plano cartesiano.
- Ligue os pontos obtidos através do recurso “formatar série de dados”.
- Insira a linha de tendência linear fazendo uso da ferramenta “layout rápido”, onde o aplicativo vai apresentar a expressão algébrica correspondente.
- Envie o arquivo para o professor.

Fonte: Arquivo Pessoal

O Grupo 2 foi o primeiro grupo a me enviar a tarefa pelo e-mail. Segundo o grupo, não houve dificuldades na realização da tarefa. No total, cinco grupos conseguiram realizar e me enviar a atividade, obtendo o gráfico e a função representativa determinada pelo aplicativo. Como não houve interferência do professor na elaboração das tabelas e dos gráficos, os grupos tiveram liberdade de personalizar as tabelas e os gráficos da forma como quisessem. Sendo assim, dois grupos acabaram exagerando um pouco nessa personalização e, para melhorar a visualização dos trabalhos, tomei a liberdade de modificar o plano de fundo sem prejuízo aos resultados que esses grupos tinham obtido.

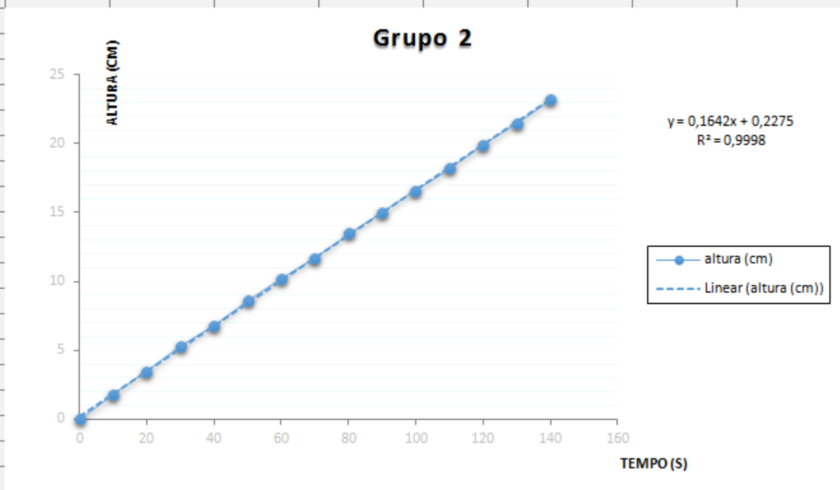
Figura 92 — E-mail enviado pelo Grupo 2



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 93 — Tabela, gráfico e função enviados pelo Grupo 2

tempo (seg)	altura (cm)
0	0
10	1,8
20	3,5
30	5,3
40	6,8
50	8,6
60	10,2
70	11,7
80	13,5
90	15
100	16,6
110	18,2
120	19,9
130	21,5
140	23,2

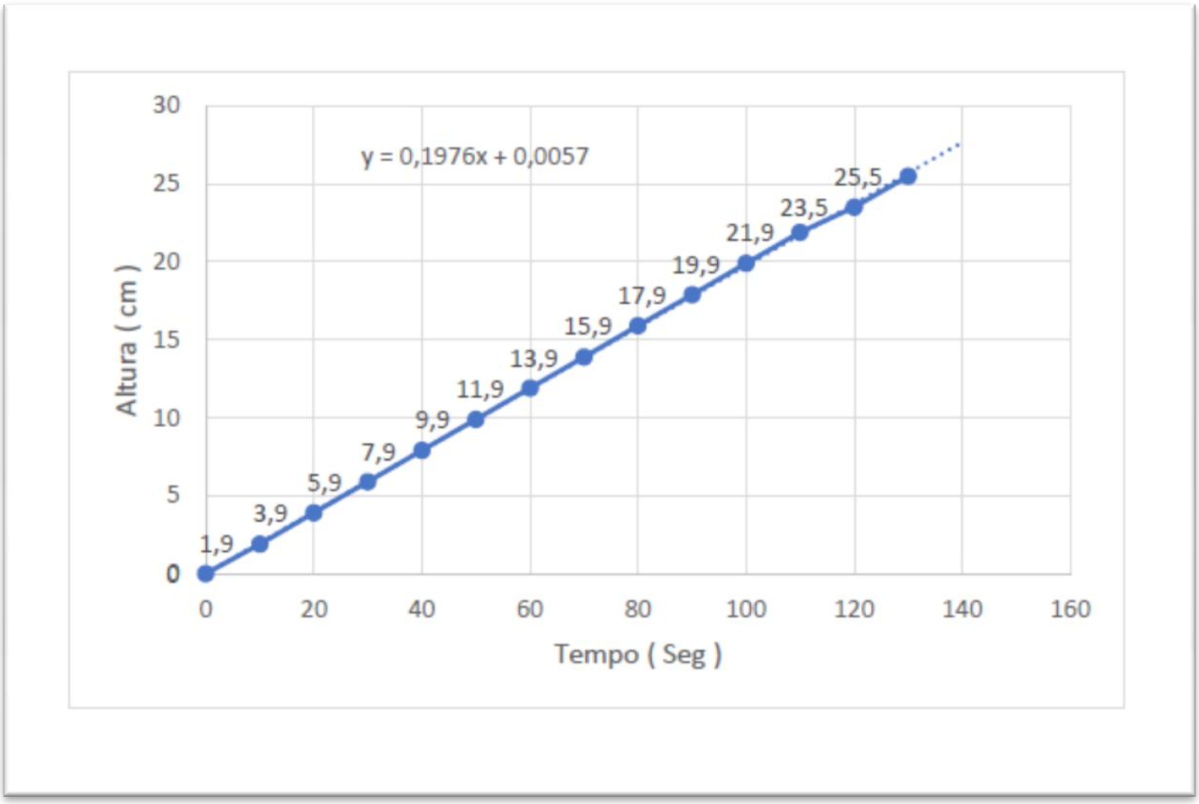


Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 94 — E-mail enviado pelo Grupo 7

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 95 — Gráfico e função enviados pelo Grupo 7



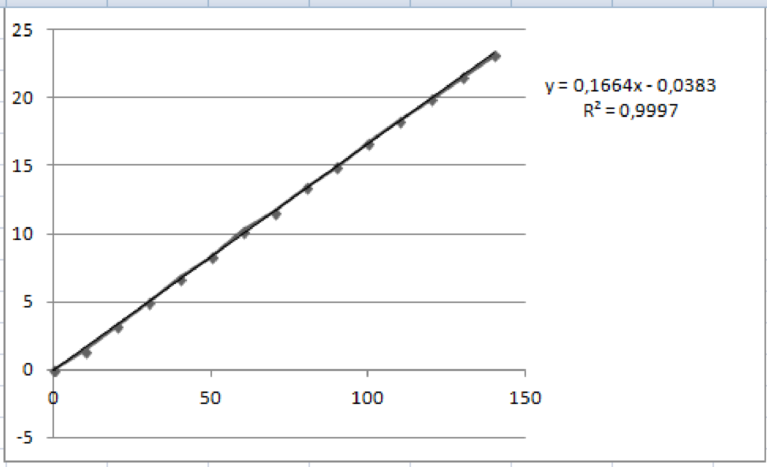
Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 96 — E-mail enviado pelo Grupo 1

Fonte: Arquivo Pessoal

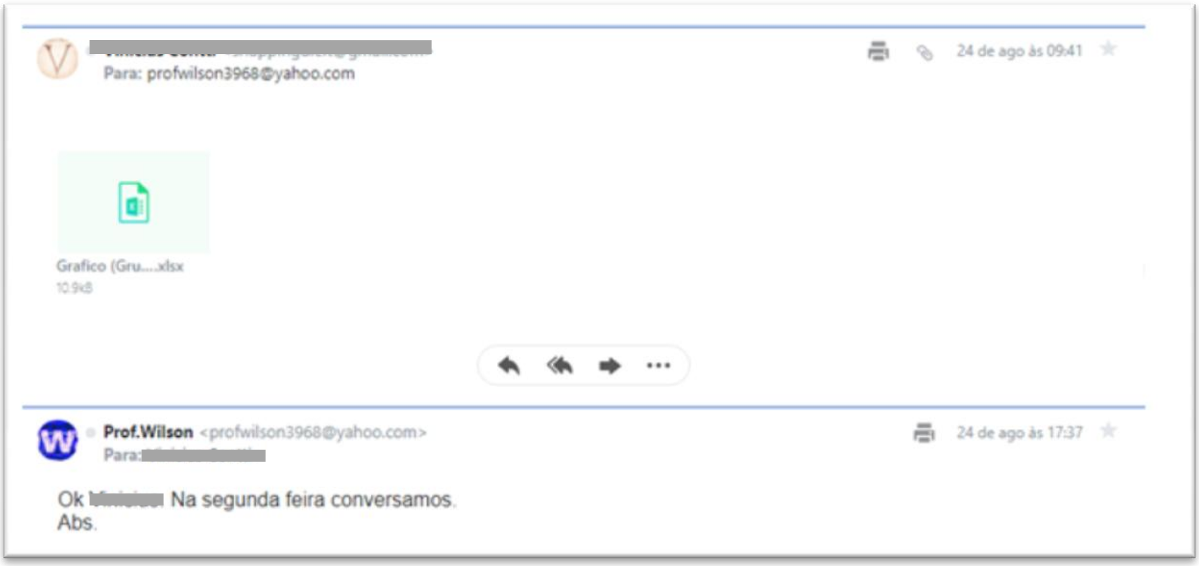
Figura 97 — Tabela, gráfico e função enviados pelo Grupo 1

temp(seg)	altura(cm)
0	0
10	1,4
20	3,2
30	4,9
40	6,7
50	8,3
60	10,2
70	11,6
80	13,4
90	14,9
100	16,7
110	18,3
120	19,9
130	21,5
140	23,1



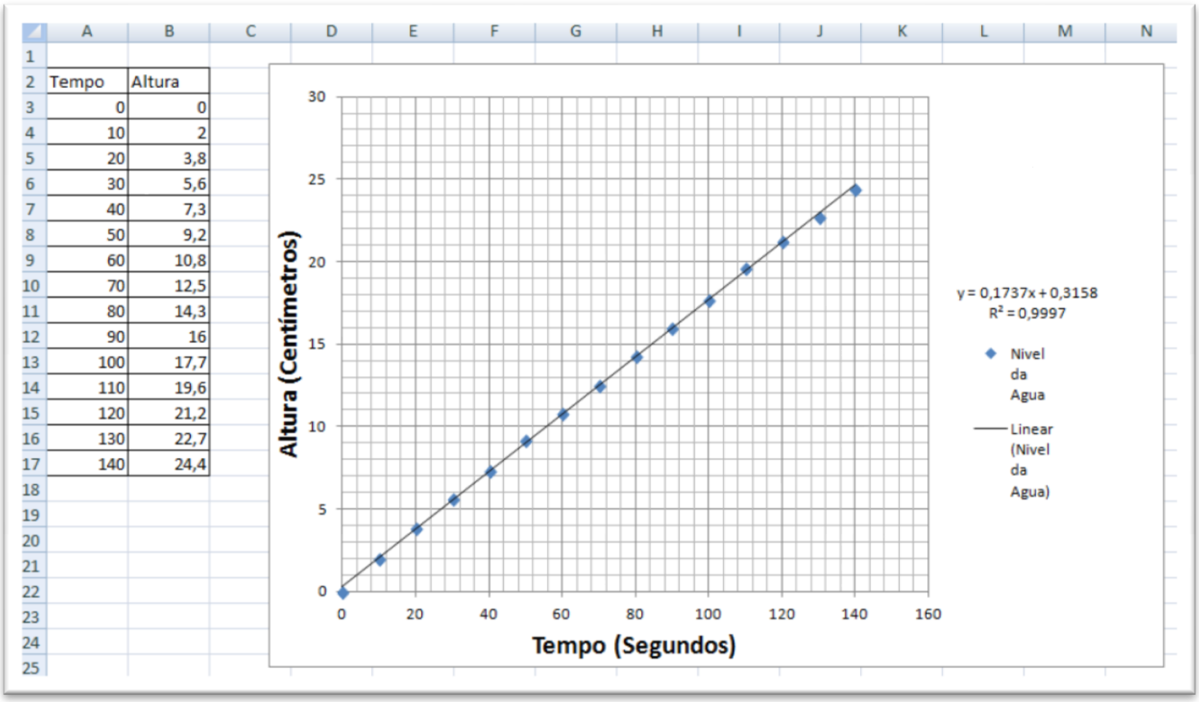
Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 98 — E-mail enviado pelo Grupo 8



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 99 — Tabela, gráfico e função enviados pelo Grupo 8



Tempo	Altura
0	0
10	2
20	3,8
30	5,6
40	7,3
50	9,2
60	10,8
70	12,5
80	14,3
90	16
100	17,7
110	19,6
120	21,2
130	22,7
140	24,4

Fonte: Material produzido pelos estudantes

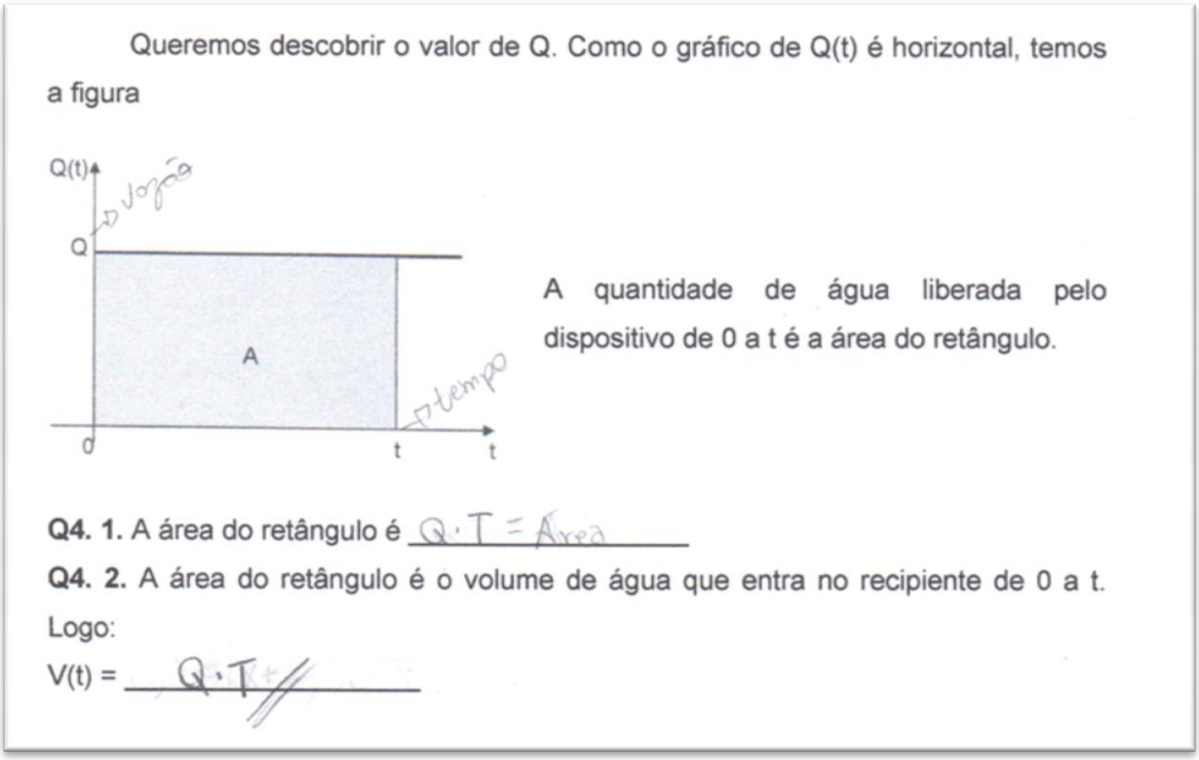
Como era de se esperar, as funções obtidas com o aplicativo computacional apresentavam a taxa de variação bem próxima do valor encontrado pelos grupos. Observamos que a discrepância começa a partir da 3ª casa decimal e, levando-se em conta o valor do coeficiente linear dado pelo aplicativo mostrando que a intersecção do gráfico com o eixo vertical não ocorreu no ponto (0,0), podemos considerar esses resultados altamente satisfatórios.

3.11 ETAPA 8 — OBTENÇÃO DA VAZÃO DA BOMBINHA DE ÁGUA USADA NO EXPERIMENTO

Nessa etapa, através de uma sequência didática bem definida, os grupos tinham que calcular a vazão da bombinha de água que foi utilizada no experimento. Definindo a vazão como uma função $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})$, isto é, como a quantidade de líquido que a bombinha conseguiu fornecer por unidade de tempo, os grupos precisavam concluir que o volume de água presente no vaso cilíndrico do experimento em qualquer instante $\boldsymbol{t}$ era igual ao produto da vazão da bombinha pelo tempo correspondente, ou seja, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}$. Dos oito grupos formados, seis conseguiram completar essa atividade.

A figura seguinte mostra a atividade feita pelo Grupo 7.

Figura 100 — Resposta dada pelo Grupo 7


Queremos descobrir o valor de Q. Como o gráfico de Q(t) é horizontal, temos a figura

A quantidade de água liberada pelo dispositivo de 0 a t é a área do retângulo.

Q4. 1. A área do retângulo é Q · T = Área

Q4. 2. A área do retângulo é o volume de água que entra no recipiente de 0 a t. Logo:

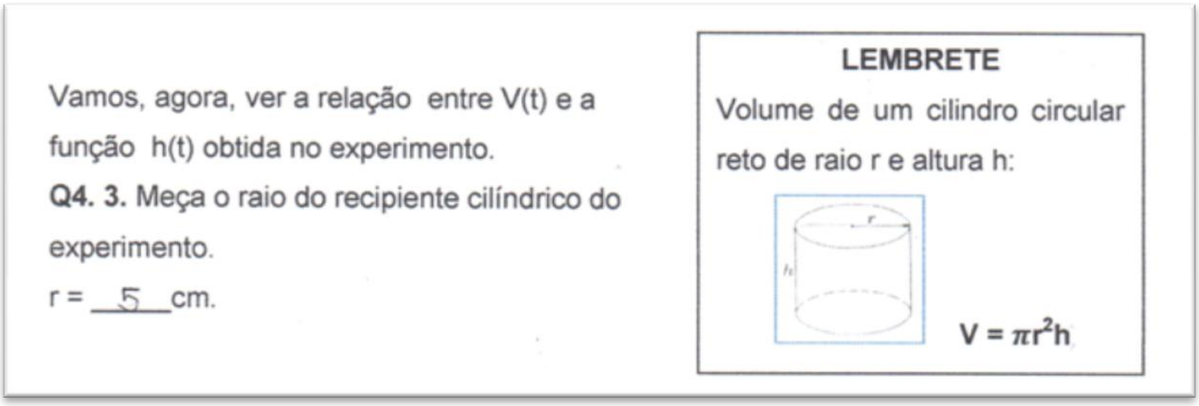
V(t) = Q · T

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Assim, observando o gráfico dado, os grupos tinham que perceber que a vazão volumétrica no decorrer do tempo é constante, resultando em uma reta paralela ao eixo dos tempos ao se construir o gráfico $\boldsymbol{Q\,x\,t}$. Além disso, a área limitada pelo gráfico fornece o volume de água no vaso cilíndrico em um instante t qualquer.

Lembrando que a conclusão dessa atividade era obter o valor de $\boldsymbol{Q}$ e comparar esse valor com a especificação técnica trazida na bombinha, os grupos passaram para a Folha 2, onde foi pedido que medissem o raio do vaso cilíndrico utilizado no experimento. Com essa informação, tinham que estabelecer uma relação entre o volume e a altura da coluna de água.

Figura 101 — Resposta da Q4.3 dada pelo Grupo 1



Vamos, agora, ver a relação entre V(t) e a função h(t) obtida no experimento.

Q4. 3. Meça o raio do recipiente cilíndrico do experimento.

r = 5 cm.

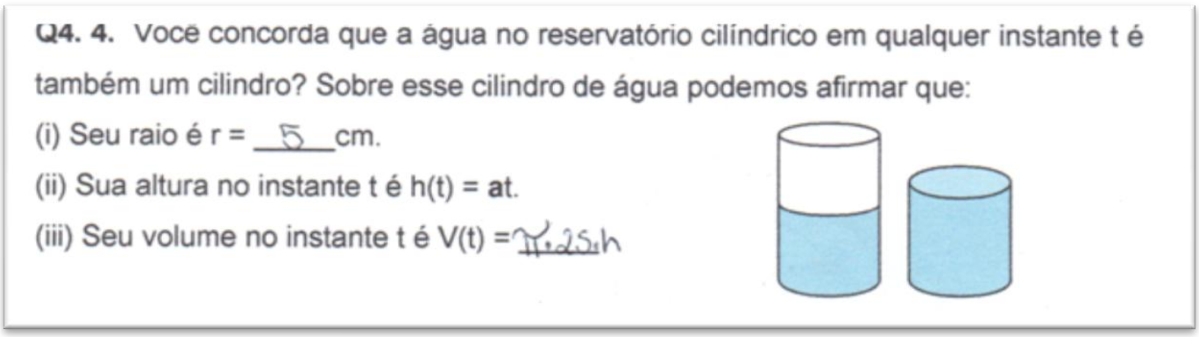
LEMBRETE

Volume de um cilindro circular reto de raio r e altura h:

V = πr²h

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 102 — Respostas dadas aos itens da Q4.4 pelo Grupo 1



Q4. 4. Voce concorda que a água no reservatório cilíndrico em qualquer instante t é também um cilindro? Sobre esse cilindro de água podemos afirmar que:

(i) Seu raio é r = 5 cm.

(ii) Sua altura no instante t é h(t) = **at**.

(iii) Seu volume no instante t é V(t) = π.25.h

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Como já sabiam que a altura em um instante $\boldsymbol{t}$ é $\boldsymbol{h(t) = at}$ e o volume $\boldsymbol{V(t) = Qt}$, cada grupo precisava encontrar a expressão que fornecesse a vazão obtida no experimento. Da mesma forma que aconteceu no cálculo da taxa de variação da questão Q2.4, os grupos apresentaram algumas dificuldades para estabelecer a relação entre o volume e a altura que já eram conhecidos. Sendo assim, precisei intervir várias vezes com os grupos, buscando orientá-los da melhor maneira possível para que pudessem encontrar o valor de $\boldsymbol{Q}$. Depois de alguns erros de percurso e várias labutas, seis grupos conseguiram chegar na expressão $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\pi r^2 a}$ e calcular o valor numérico de $\boldsymbol{Q}$.

Figura 103 — Fórmula correta encontrada pelo Grupo 1

Q4. 5. Na última fórmula, você já sabe que V(t) = Qt e h(t) = **at** e, também, já conhece o valor de **a**. Então a fórmula **V = $\boldsymbol{\pi r^2 h}$** fica:

$V(t) = \pi . R^2 \, h(t).$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 104 — Respostas encontradas pelo Grupo 1

Q4. 6. Ache o valor de Q em cm^3/s:

$Q = \pi . R^2 . a$ $\quad Q = 12,56$

$Q = 3,14 . 5 . a$

$Q = 3,14 . 25 . 0,16$

LEMBRETE

1 litro = $1000 cm^3$

3,6 — 120 l

1s — x

$3,6x = 120 . 1$

$x = \frac{120}{3600}$

$x = 0,03$

Q4. 7. Ache o valor de Q em l/s:

$Q = 0,01256 \, l/s$ $\quad Q = 12,56 \div 1000$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 105 — Resposta da Q4.8 dada pelo Grupo 1

Q4. 8. Procure a especificação técnica da bomba d'água que você usou no experimento e compare com seu resultado:

Houve uma diferença de 0,012 l/s.

Fonte: Material produzido pelos estudantes

A foto a seguir mostra a especificação técnica que aparece em uma das bombinhas de água usada pelos grupos.

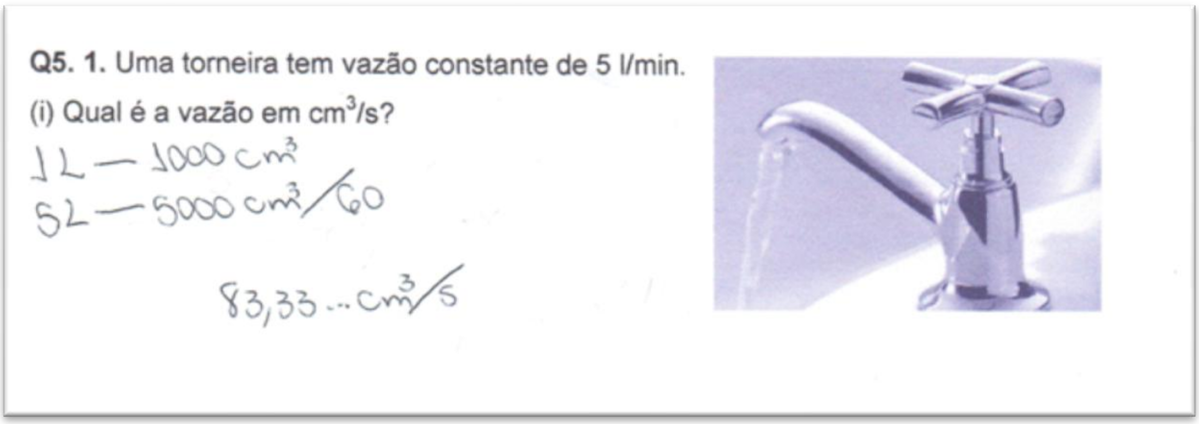
Figura 106 — Foto mostrando a especificação da vazão de uma das bombinhas

Fonte: Arquivo Pessoal

3.12 ETAPA 9 — REALIZAÇÃO DA AVALIAÇÃO PELOS GRUPOS

Nessa etapa, os grupos iriam concluir os trabalhos desse projeto pedagógico, realizando uma avaliação com problemas sobre vazão que contemplavam as questões que foram trabalhadas durante todo o desenvolvimento das Folhas de Atividades.

Figura 107 — Resolução do item (i) da Q5.1 dada pelo Grupo 1



Q5. 1. Uma torneira tem vazão constante de 5 l/min.

(i) Qual é a vazão em cm^3/s?

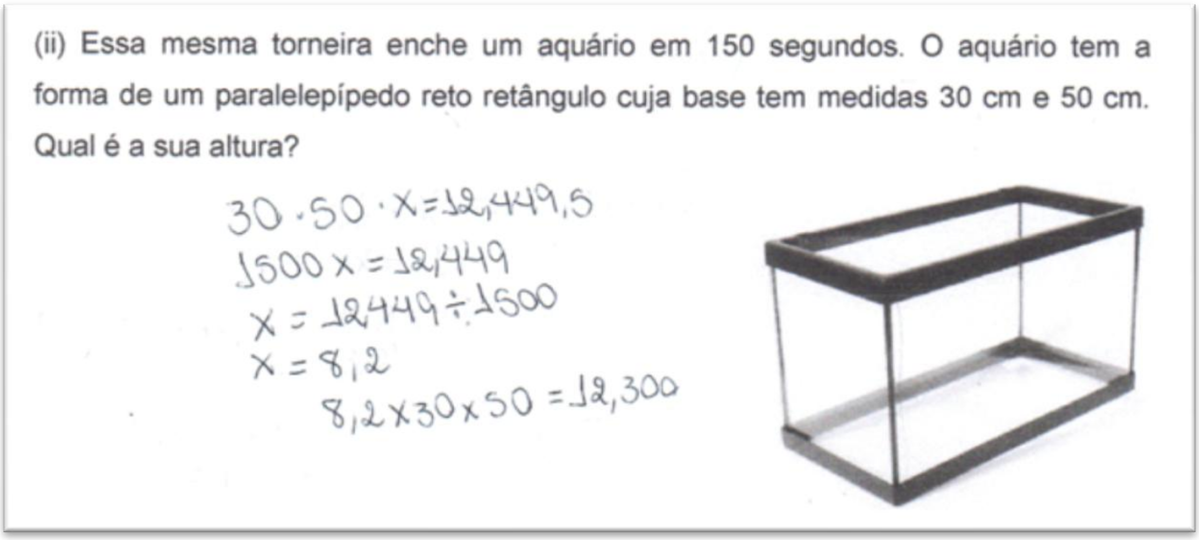
1L — 1000 cm^3

5L — 5000 cm^3/60

83,33... cm^3/s

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 108 — Resolução do item (ii) da Q5.1 dada pelo Grupo 1



(ii) Essa mesma torneira enche um aquário em 150 segundos. O aquário tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo cuja base tem medidas 30 cm e 50 cm. Qual é a sua altura?

$30 \cdot 50 \cdot x = 12{,}449{,}5$

$1500x = 12{,}449$

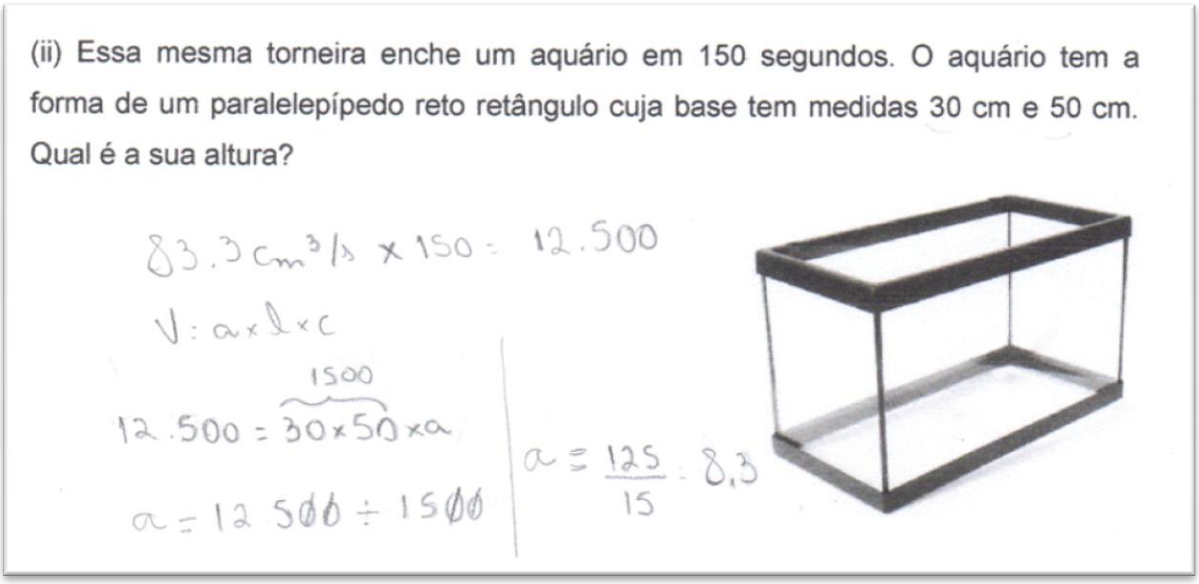
$x = 12449 \div 1500$

$x = 8{,}2$

$8{,}2 \times 30 \times 50 = 12{,}300$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 109 — Resolução do item (ii) da Q5.1 dada pelo Grupo 2



(ii) Essa mesma torneira enche um aquário em 150 segundos. O aquário tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo cuja base tem medidas 30 cm e 50 cm. Qual é a sua altura?

$83.3\ cm^3/s \times 150 = 12.500$

$V: a \times l \times c$

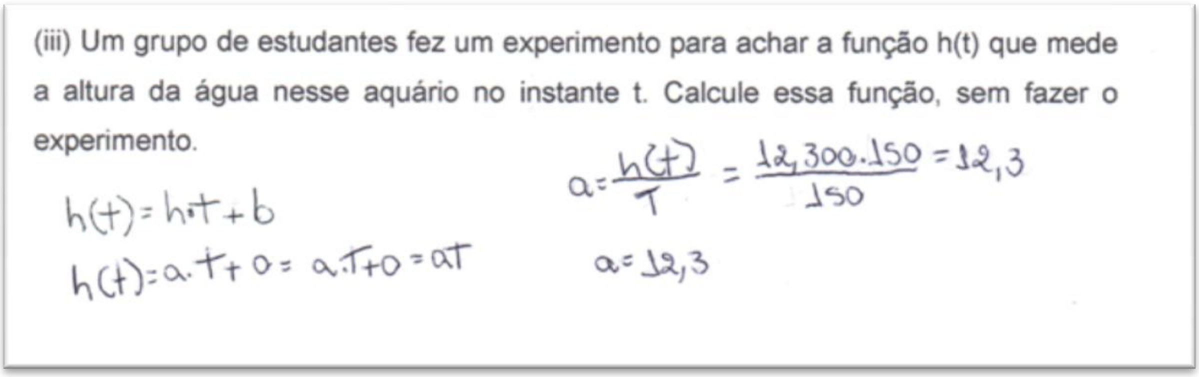
$12.500 = \overbrace{30 \times 50}^{1500} \times a$

$a = 12\,5\cancel{0}\cancel{0} \div 15\cancel{0}\cancel{0}$

$a = \frac{125}{15} = 8{,}3$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 110 — Resolução incorreta do item (iii) da Q5.1 encontrada pelo Grupo 1


(iii) Um grupo de estudantes fez um experimento para achar a função h(t) que mede a altura da água nesse aquário no instante t. Calcule essa função, sem fazer o experimento.

$h(t) = h \cdot t + b$

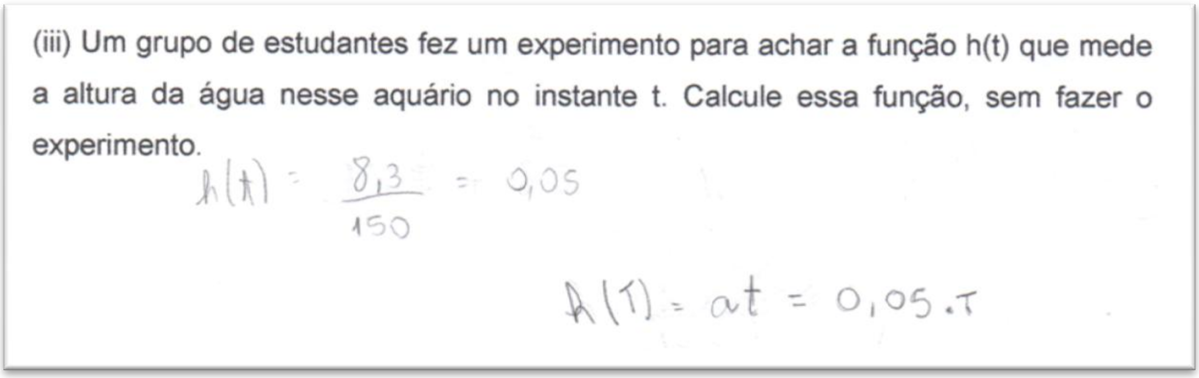
$h(t) = a \cdot t + 0 = a \cdot T + 0 = aT$

$a = \frac{h(t)}{T} = \frac{12,300.150}{150} = 12,3$

$a = 12,3$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 111 — Resposta correta do item (iii) da Q5.1 encontrada pelo Grupo 2


(iii) Um grupo de estudantes fez um experimento para achar a função h(t) que mede a altura da água nesse aquário no instante t. Calcule essa função, sem fazer o experimento.

$h(t) = \frac{8,3}{150} = 0,05$

$h(t) = at = 0,05 . t$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

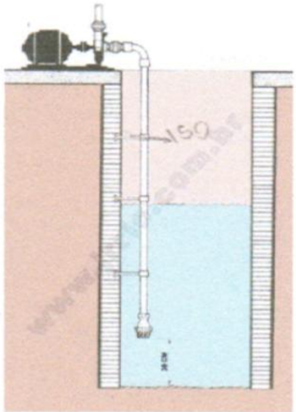
Na segunda questão, o grupo tinha que escrever a função que permitia determinar a quantidade de água em um reservatorio de acordo com o tempo em que a bomba elétrica permanecesse ligada. Diferente da função encontrada no experimento, nesse problema o parâmetro $\boldsymbol{b}$ não é igual a zero, ou seja, os estudantes tinham que perceber que no momento em que a bomba era ligada, o reservatório já possuía 250 litros de água. Dessa forma, tinham que acrescentar esse valor ao escreverem a função. Nenhum dos grupos atentou para o complemento da questão que era para indicar o significado de cada termo. Mas, no decorrer das atividades, quando os grupos vinham tirar alguma dúvida com relação aos cálculos que tinham que fazer, percebia-se que a grande maioria dos grupos tinha entendido o significado dos parâmetros na expressão encontrada.

Essa questão precisou ser reformulada após uma análise da mesma. A figura colocada como ilustração do problema não estava correta e o enunciado dava motivos para alguns questionamentos de interpretação do problema. Também, após a correção dessa atividade, constatou-se que houve um índice baixo de realização pelos grupos (37,5%), o que contribuiu para se buscar uma melhora no enunciado da questão. No Apêndice A, página 167, o problema foi colocado devidamente corrigido.

Figura 112 — Resposta do item (i) da questão 2 da Folha de Atividades 5 dada pelo Grupo 2

ATIVIDADE 5 – FOLHA 2

Q5. 2. A água potável usada em propriedades rurais, de um modo geral, é retirada de poços com o auxílio de uma bomba d'água elétrica. Em um sítio, para abastecer o reservatório de água, é utilizada uma bomba com capacidade para bombear 15 litros por minuto. Essa bomba se liga automaticamente quando o reservatório está com 250 litros de água e se desliga ao enchê-lo. Com base nessas informações:



(i) Escreva a função que permite calcular a quantidade de água no reservatório em função do tempo em que a bomba permanece ligada indicando o significado de cada termo. Considere que não houve consumo de água durante esse processo.

$Q(t) = 15t + 250$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

O que se observa nas questões seguintes é que os grupos optaram por resolver os problemas usando raciocínio lógico ao invés de utilizar a função que representa o problema.

Figura 113 — Resolução do item (ii) da questão 2 da Folha de Atividades 5 dada pelo Grupo 2

(ii) Determine a quantidade de água no reservatório 25 minutos após a bomba entrar em funcionamento. $15 \cdot 25 = 375$

$$\begin{array}{r} 375 \; + \\ 250 \\ \hline 625 \end{array}$$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 114 — Resolução do item (iii) da questão 2 da Folha de Atividades 5 dada pelo Grupo 2

(iii) Após a bomba entrar em funcionamento, qual será o tempo necessário para o reservatório atingir 730 litros de água?

$$\begin{array}{r} 730 \\ -\,250 \\ \hline 480 \end{array} \qquad \frac{480}{15} = 32\text{ min}$$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

Figura 115 — Resolução do item (iv) da questão 2 da Folha de Atividades 5 dada pelo Grupo 2

(iv) Sendo a capacidade máxima do reservatório de 1750 litros, qual o tempo necessário de funcionamento da bomba para enchê-lo?

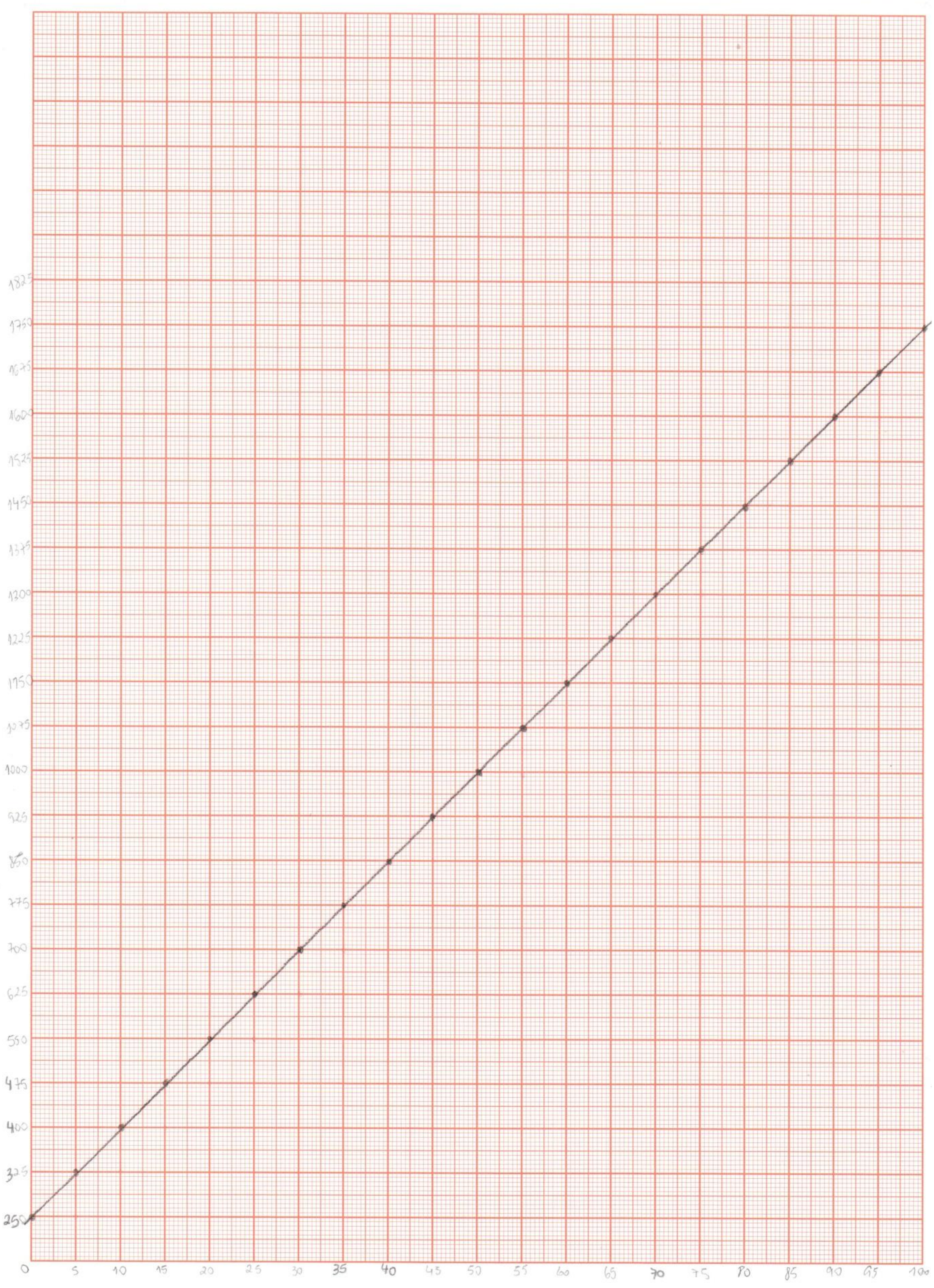
$$\begin{array}{r} 1750 \\ -\,250 \\ \hline 1.500 \end{array} \qquad \frac{1500}{15} = 100\text{ min. ou } 1h\ 40\text{ min.}$$

Fonte: Material produzido pelos estudantes

O item (v) pedia a representação gráfica que descrevia a situação do problema.

Os grupos que conseguiram construir o gráfico esqueceram-se de atentar para a graduação do eixo vertical que representaria a quantidade de água no reservatório de acordo com o tempo em que a bomba permaneceu ligada. Iniciaram corretamente a construção no ponto (0,250), pois a bomba só entrava em funcionamento quando a reservatório passava a ter 250 litros de água. Provavelmente, com a intenção de representar a capacidade máxima do reservatório enunciada no item (iv), os grupos tentaram “espremer” o intervalo [250,1750] no eixo vertical, o que os levou a desconsiderar a divisão do eixo no intervalo [0,250]. O professor achou por bem não interferir nessa atividade, mas conforme os grupos iam entregando a tarefa pronta, esse detalhe foi esclarecido com os mesmos.

Figura 116 — Gráfico de pontos produzido pelo Grupo 2



Fonte: Material produzido pelos estudantes

A questão Q5.3 encerra a avaliação e o fechamento da nossa proposta de trabalho. Com reservatórios em vários formatos, os grupos precisavam construir o gráfico que melhor representasse a variação da altura da água em função do tempo. Essa questão trazia o gráfico de um reservatório na forma de barril já construído acompanhado de uma observação, de forma a ajudar os grupos a interpretar o raciocínio envolvido nessa construção.

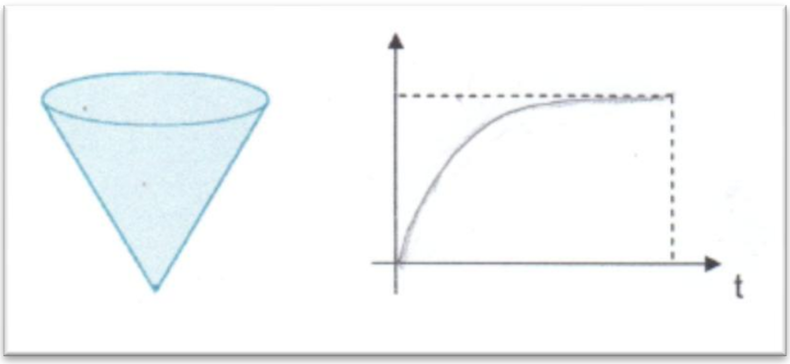
Figura 117 — Enunciado da questão 3 da Folha de Atividades 5

Q5. 3. Os reservatórios das figuras abaixo têm a mesma altura e o mesmo volume do reservatório utilizado no experimento que o grupo fez. Estando inicialmente vazio, uma torneira é aberta no instante t = 0, começando a enchê-lo a uma razão constante. Desenhe o gráfico que melhor representa a variação da altura da água em cada reservatório.

Fonte: Arquivo Pessoal

Para o reservatório na forma de cone, inicialmente a altura começa a aumentar muito rapidamente, já que há pouco volume no bico do cone para ser preenchido. Conforme o tempo vai passando, a altura continua aumentando, mas de forma mais lenta, pois o volume a ser preenchido pela água aumenta.

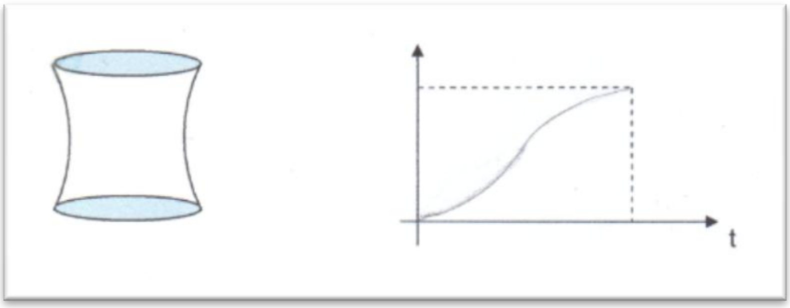
Figura 118 — Gráfico (a) produzido pelo Grupo 8



Fonte: Material produzido pelos estudantes

O reservatório com a face lateral côncava tem o processo inverso ao do reservatório cônico, ou seja, até a metade do reservatório a altura vai aumentando muito devagar e depois continua aumentando de forma um pouco mais rápida. Ao atingir a metade do reservatório, o processo inverte.

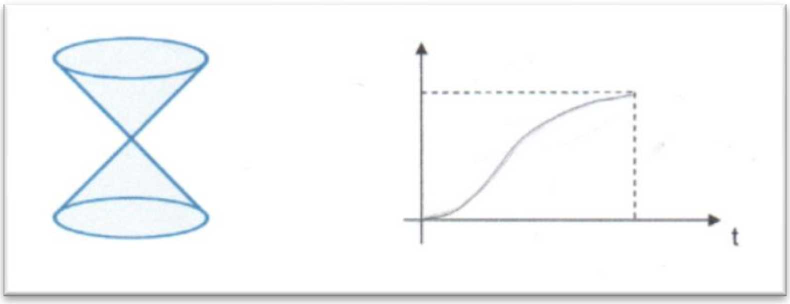
Figura 119 — Gráfico (b) produzido pelo Grupo 8



Fonte: Material produzido pelos estudantes

Para o reservatório na forma de ampulheta, até a metade a altura começa a aumentar vagarosamente e vai aumentando de forma mais rápida. No meio do reservatório a altura aumenta rapidamente e depois tem o processo igual ao do reservatório na forma de cone.

Figura 120 — Gráfico (c) produzido pelo Grupo 8



Fonte: Material produzido pelos estudantes

3.13 CONCLUSÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Encerrados os trabalhos com os grupos, avisei-os que iria chamá-los um a um para comentar o desempenho e as resoluções que foram dadas nas Folhas de Atividades. Isso seria feito fora dos horários de aula que eu tinha com essa turma, aproveitando uma “janela” no meu horário de terça-feira e também a minha saída mais cedo na quarta-feira, onde eu tinha apenas a 1ª aula e ficaria na escola um período a mais para poder atendê-los.

Então, de acordo com essa dinâmica, cada grupo foi sendo chamado na sala dos professores, onde comentei sobre todas as tarefas que foram desenvolvidas pelo grupo, indagando de vez em quando sobre alguns pontos onde percebi que o grupo apresentou dificuldades.

Ressaltei que cada grupo iria receber uma nota de participação e desempenho nas atividades, e que essa nota iria contribuir na média daquele bimestre.

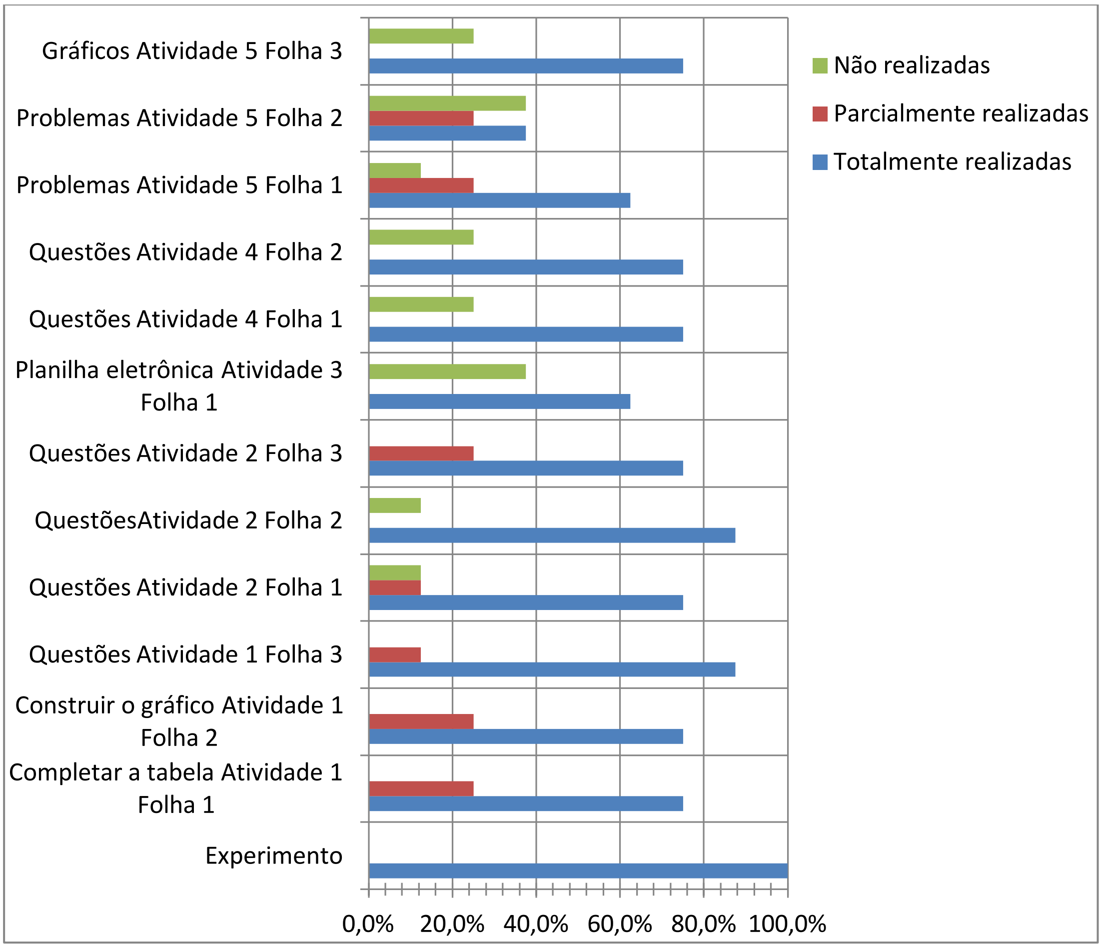
Para facilitar a análise do desempenho geral dessa proposta de trabalho, a tabela e o gráfico seguintes mostram as informações do levantamento que fiz para podermos dar um parecer sobre os resultados alcançados pelos estudantes.

Tabela 1 — Resultados do desempenho da proposta didática

Tarefas	Totalmente realizadas	Parcialmente realizadas	Não realizadas
Experimento	100%	0%	0%
Completar a tabela Atividade 1 Folha 1	75%	25%	0%
Construir o gráfico Atividade 1 Folha 2	75%	25%	0%
Questões Atividade 1 Folha 3	87,5%	12,5%	0%
Questões Atividade 2 Folha 1	75%	12,5%	12,5%
Questões Atividade 2 Folha 2	87,5%	0%	12,5%
Questões Atividade 2 Folha 3	75%	25%	0%
Planilha eletrônica Atividade 3 Folha 1	62,5%	0%	37,5%
Questões Atividade 4 Folha 1	75%	0%	25%
Questões Atividade 4 Folha 2	75%	0%	25%
Problemas Atividade 5 Folha 1	62,5%	25%	12,5%
Problemas Atividade 5 Folha 2	37,5%	25%	37,5%
Gráficos Atividade 5 Folha 3	75%	0%	25%

Fonte: Material produzido pelo professor

Figura 121 — Gráfico do desempenho da aplicação da proposta didática



Fonte: Material produzido pelo professor

Levando-se em conta que essa proposta é um material que foi elaborado e construído em sua quase totalidade, ou seja, não há precedentes de sua aplicação da forma como foi feita em sala de aula e, pensando na minha experiência como professor já a um bom tempo, acredito sinceramente que os resultados foram muito satisfatórios e que essa atividade contribuiu de forma real para o crescimento da autoestima dos estudantes no que diz respeito à vontade de aprender e compreender melhor a Matemática e seus conceitos.

Os estudantes se sentiram muito motivados a participar das aulas, pois foi dado a eles o papel de intérpretes de seus próprios conhecimentos, livres para pensarem da forma que quisessem.

Dificilmente o professor de Matemática coloca os estudantes para realizarem atividades em grupos. Sendo essa uma atividade diferenciada e focada em alguns objetivos, o trabalho em grupo se mostrou bastante produtivo, ajudando a promover discussões mais elevadas, compartilhamento de conhecimentos e mudanças de atitudes favoráveis ao processo de ensino e de aprendizagem.

Recordando todos os passos que foram dados, desde a apresentação da proposta didática para a turma até a resolução da última questão das Folhas de Atividades, com todos os problemas e dificuldades que costumeiramente enfrentamos em sala de aula, me sinto muito gratificado por ter sido o responsável pela condução da aplicação desse trabalho na escola em que leciono. A postura dos estudantes, as dúvidas que surgiram, os questionamentos que fizeram, o interesse demonstrado, a saída da rotina, demonstraram e confirmaram o verdadeiro significado dos termos estudar e aprender.

CAPÍTULO 4

VALIDAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA E CONCLUSÃO

4.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo buscamos fazer o fechamento daquilo que foi o nosso projeto pedagógico. Corresponde à 4ª fase da metodologia adotada para a aplicação, desenvolvimento e consolidação desse projeto. Inicialmente faremos uma breve apreciação do método escolhido para essa intervenção, destacando as ideias principais juntamente com os objetivos e preocupações desse trabalho. Em seguida é feita uma análise resumida das etapas de aplicação da proposta pedagógica acompanhada de observações sobre alguns aspectos que ocorreram durante a aplicação.

Dada a riqueza do material presente nas Folhas de Atividades, que dão base e motivação para novas propostas de trabalho, deixamos acesas algumas sugestões que podem permitir a continuidade desse trabalho, de modo a contemplar outros conteúdos ao estender, por exemplo, o experimento para recipientes de outros formatos.

Para encerrar esse capítulo, colocamos algumas observações pessoais sobre o significado desse projeto e, na sequência, a sua conclusão.

4.2 APRECIAÇÃO DO MÉTODO ESCOLHIDO

Pensando em desenvolver uma atividade diferenciada para tratar e ensinar um conteúdo específico de Matemática no Ensino Médio, surgiu a ideia de explorar um material que eu tinha estudado no meu tempo de graduação e que envolvia o conceito de função.

Esse material partia de problemas práticos cujo objetivo principal, presente nas Folhas de Atividades, era solidificar o conceito de função após a formalização do mesmo, levando o estudante a exercitar o reconhecimento e o uso das funções.

Assim, ao se trabalhar com as aplicações nas quais o conceito de função está implícito, buscava-se desenvolver a autonomia e a criatividade do estudante, fatores esses que normalmente não são levados em consideração quando pensamos nos materiais didáticos tradicionais.

Como existem vários níveis de formalização para o ensino de função no Ensino Médio, é possível pensarmos em formas de adaptar esse ensino à realidade dos estudantes.

Nos livros didáticos, mesmo encontrando problemas de aplicação que buscam contextualizar a ideia de função, o estudante ainda continua sendo um agente passivo nesse processo, pois acaba tendo de lidar com dados numéricos e informações que não foram por ele obtidos, promovendo tão somente a manutenção das teorias que ele aprendeu.

Daí, usar uma atividade experimental realizada pelo próprio estudante, associada a uma metodologia didática diferenciada, constituíram a grande motivação para a elaboração e aplicação desse projeto.

Para tornar esse projeto válido e mais organizado, recorremos às fases sugeridas pela Engenharia Didática.

4.3 RESUMO DA ANÁLISE DA APLICAÇÃO

Para facilitar a aplicação dessa proposta, ela foi organizada em etapas, perfazendo um total de nove. A ideia era que cada etapa concluída fornecesse ao estudante recursos para que ele pudesse passar para a etapa seguinte, de modo a ir construindo suas próprias bases para o entendimento e significado do conceito de função.

A primeira etapa foi destinada à montagem com antecedência dos três experimentos no laboratório pelo professor, visando evitar contratempos ou surpresas no momento em que os grupos já estivessem realizando o experimento.

Na segunda etapa, os estudantes foram levados até o laboratório e instruídos de forma detalhada sobre os cuidados que deveriam de ter no momento de fazer as marcações de modo a conseguirem obter, da forma mais precisa possível, os dados numéricos que seriam usados para poderem trabalhar com as Folhas de Atividades.

Também foi feita uma rápida simulação para que todos se sentissem mais à vontade e tivessem mais segurança na hora que fossem dar início ao experimento.

A terceira etapa consistiu na realização do experimento pelos grupos, que se mostraram bastante entusiasmados e interessados em poderem participar de uma atividade diferente. Apesar de algumas pequenas ocorrências na realização do experimento por alguns grupos, quando o professor teve que intervir, os oito grupos formados lograram obter os dados numéricos assinalados na régua graduada, de modo a poderem dar continuidade às próximas atividades.

Na quarta etapa, os grupos se reuniram para produzirem as tabelas e os gráficos de pontos da Folha de Atividades 1. Dois grupos acabaram preenchendo incorretamente a tabela. Um grupo iniciou a coluna do tempo em 10 segundos, esquecendo-se de que o início da contagem dos tempos também tinha que ser considerado. O outro grupo iniciou o tempo em zero segundo, mas relacionou esse tempo inicial com a primeira marcação da régua. Mesmo assim, os dois grupos não apresentaram problemas ao construírem o gráfico de pontos, assinalando os pontos de forma correta.

A quinta etapa foi destinada aos grupos para responderem às questões da Folha 3. Analisando o gráfico de pontos, os grupos perceberam que os pontos se apresentavam quase em linha reta e que esse padrão era característico de uma função afim.

Na sexta etapa, os grupos tiveram que associar a fórmula algébrica da função afim com a expressão que viria a representar o fenômeno de enchimento do vaso cilíndrico utilizado no experimento. Nessa parte os grupos apresentaram muitas dúvidas de como proceder para obter a taxa de variação entre dois valores de $\boldsymbol{x}$, dada a função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$. Isso tomou boa parte do tempo que estava previsto na proposta de planejamento. Sem buscar pressioná-los e orientando-os na condução dos cálculos, um grupo de fato não achou meios de resolver a questão. Para encerrar essa etapa, os grupos determinaram o valor numérico de $\boldsymbol{a}$ definindo a função que descrevia o experimento.

Na sétima etapa, a atividade deixada para os grupos foi obter a função com a utilização do aplicativo Excel através do Método dos Mínimos Quadrados. Os cinco grupos que conseguiram completar a tarefa não apresentaram muitas dificuldades em utilizar o aplicativo. Apenas foram esclarecidos sobre o que era o método em questão e o que eles iriam conseguir obter com tal método. Essa atividade foi deixada como opcional para os grupos em virtude da dificuldade em se usar a Sala de Informática

A oitava etapa consistiu na obtenção da vazão da bombinha que cada grupo utilizou no experimento. Determinando a expressão do volume em função do tempo e usando a medida do raio do vaso cilíndrico, seis grupos conseguiram encontrar a fórmula que definia a vazão da bombinha e calcular essa vazão, comparando-a com a vazão trazida nas especificações técnicas da bombinha.

Na etapa nove, os grupos realizaram uma avaliação geral, com problemas envolvendo vazão e construção de gráficos. Nessa etapa, os grupos demonstraram uma maior segurança e autonomia ao resolverem os problemas. Com exceção da questão 5 da Folha 2, não apresentaram muitas dúvidas ou dificuldades, mostrando uma maior afinidade com os cálculos e com a Matemática.

Para encerrar as atividades desenvolvidas pela turma, achei por bem chamar os grupos individualmente para uma conversa sobre todas as etapas pelas quais passaram, buscando dar a eles uma visão geral de todo o processo de construção e contextualização do conceito de função que foi feito através do experimento.

4.4 PROPOSTAS PARA NOVOS TRABALHOS

A ideia de utilizar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino para tratar um assunto tão importante como o conceito de função surgiu da vontade de se quebrar a forte divisão que existe entre a matemática que é ensinada formalmente na escola e a matemática que pode ser encontrada na vida real.

Assim, a nossa expectativa para essa proposta de intervenção pedagógica era promover uma aproximação entre o conteúdo escolar oficial com uma situação real, que levasse o estudante a perceber a presença e a importância da Matemática no seu dia a dia.

Normalmente, ao ensinarmos Matemática, buscamos converter a linguagem da Matemática para a linguagem da vida real. Ensinamos o conteúdo, explicando os conceitos e significados, para depois passarmos exemplos e uma quantidade de exercícios de modo que os estudantes acabam por resolvê-los repetindo o que fizemos sem muitas vezes entender o que estão fazendo ou qual o significado dos mesmos.

Com essa proposta de trabalho onde a Modelagem Matemática está presente, acreditamos que podemos fazer o caminho inverso, ou seja, converter problemas da vida real para a linguagem matemática, possibilitando ao estudante novas formas de pensar ao contribuir para o desenvolvimento de novas capacidades adquiridas quando o estudante tem a chance de participar de um processo de problematização de uma situação real.

Com todo esse impacto que o uso da Modelagem Matemática pode causar nos alicerces de nossa tradicional forma de ensinar, não podemos deixar de pensar em novas propostas de trabalho que venham a seguir os mesmos passos dessa nossa proposta de dissertação.

Como este projeto já está pronto, tenho a intenção de desenvolvê-lo com outras turmas e em outras séries. Qualquer outro professor tem a liberdade de fazer o mesmo e verificar a mudança na dinâmica de sua aula, passando a ser um orientador dos estudos na sala de aula a partir do momento que faz a interação dos conteúdos com a atividade que está sendo trabalhada na Modelagem escolhida.

Vale ressaltar que esse material é muito rico no que diz respeito às suas potencialidades. Muitos conteúdos da Matemática acabam por ser contemplados ao se trabalhar com as Folhas de Atividades.

Aqui, pensamos tão somente em fazer uso de um vaso cilíndrico que estaria representando um reservatório nesse mesmo formato. Mas podemos extrapolar a geometria do vaso e estender o problema para experimentos com vasos em formatos não tão usuais, como é o caso de reservatórios cônicos. Com isso, temos uma nova proposta de trabalho no qual as Folhas de Atividades podem ser reformuladas de modo a atingir outros conteúdos que precisam ser aprendidos.

4.5 OBSERVAÇÕES PESSOAIS

Desenvolver um trabalho diferenciado em sala de aula buscando promover a motivação dos estudantes para uma aprendizagem mais efetiva não é uma tarefa simples, mas vai de encontro aos anseios da grande maioria dos professores que anelam fazer a diferença em suas aulas.

Turmas heterogêneas, estudantes desinteressados, escolas com uma estrutura organizacional que não apoia ou reprime a vontade do professor que aspira trabalhar em uma perspectiva diferente, cobranças no cumprimento do currículo, constituem grandes desafios para a implementação de ferramentas alternativas para o ensino da Matemática.

Da minha parte, tenho que confessar que durante a aplicação dessa proposta didática fui assombrado algumas vezes pela preocupação em não conseguir cumprir com o currículo da turma. Há de se entender que a Modelagem Matemática é um processo demorado e que o professor precisa ter paciência e sangue frio para que a atividade envolvida na modelagem não seja comprometida em seus principais objetivos. Também, como o estudante passa a ser o responsável pelos produtos do seu trabalho e pelo avanço do processo, a aula tende a caminhar em uma cadência mais lenta do que a aula habitual.

Mas, no final das contas, tudo isso são desafios para o professor, que podem ser superados com dedicação e comprometimento com a profissão, já que todos os obstáculos que se apresentam são ultrapassados pelas vantagens que essa metodologia oferece para o crescimento do estudante.

Falando francamente e sem rodeios, não tenho intenção alguma em parar por aqui ou continuar a ministrar as minhas aulas da mesma forma como eu vinha fazendo. Mesmo buscando dar uma aula motivadora, o amadurecimento que veio com esse trabalho me deu uma nova perspectiva e me fez ganhar ânimo para pensar em novas propostas. Afinal de contas, essa é a minha vida. Foi o que eu escolhi fazer e se eu não buscar fazer o melhor, serei mais um professor no rol dos professores que esperam que as coisas mudem ou melhorem, mas temem em serem os responsáveis pela provocação dessas mudanças.

Vem-me à mente agora a frase de um famoso poeta americano, ganhador do Prêmio Nobel de Literatura em 1948, chamado Thomas Stearns Eliot (Wikiquote, 2019): “Só os que se arriscam a ir longe demais são capazes de descobrir o quão longe se pode ir”.

4.6 CONCLUSÃO

Posso afirmar de modo enfático que os resultados conseguidos com o desenvolvimento desse trabalho com os estudantes foram muito satisfatórios. Permitir que eles desempenhassem um novo papel dentro da sala de aula, deixando de serem meros copiadores e repetidores de conteúdos para se transformarem nos responsáveis pelos seus próprios desenvolvimentos, ajudando-os a despertarem suas vontades em aprender e em raciocinar constituíram o produto principal dessa proposta pedagógica.

Esse material, assim como muitos outros, está pronto e disponível para que outros professores tenham a chance de acrescentar algo novo em seus planejamentos escolares, desenvolvendo uma atividade que busca apoiar o ensino da Matemática de modo a envolver os estudantes em propósitos até então inalcançáveis pelos métodos tradicionais.

As Folhas de Atividades que aqui elaboramos não precisaram ser modificadas durante a aplicação. Foram sendo melhoradas durante a fase de construção das mesmas, buscando deixá-las em um nível considerado o mais adequado possível para a sua aplicação e entendimento pelos estudantes. No entanto, a questão 5 da Folha 2 da Atividade 5, que trata do problema do enchimento de um reservatório por meio de uma bomba d’água instalada em um poço, precisou ser reformulada após a aplicação, pois deixava margens para alguns questionamentos de interpretação do problema.

No Apêndice A estão disponibilizadas as Folhas de Atividades que constituem o material a ser desenvolvido pelos estudantes no processo da modelagem já com as correções que foram feitas posteriormente. A seção 2.6 pode ser utilizada como roteiro para a realização do experimento. No Apêndice B o professor tem acesso aos resultados obtidos com a simulação do experimento e que servem como guia para acompanhar as respostas dadas pelos estudantes. O ideal é que o professor faça uma simulação antecipada do experimento. Caso seja necessário, algumas adaptações ou modificações podem ser efetuadas, tomando-se os devidos cuidados para não comprometer os resultados que são esperados na modelagem.

Para mim, que já tenho um pouco da prática pela aplicação primeira dessa proposta, as coisas ficam mais fáceis e sei onde posso melhorar em alguns detalhes. Assim, pretendo sempre que possível estar utilizando essa proposta em minhas turmas, buscando adequá-las à realidade das mesmas. Também já tenho os meus pensamentos pairando em outros projetos que envolvem outros conteúdos e que com certeza irão fazer parte dos meus planejamentos escolares daqui em diante.

Finalmente, agradeço enormemente a Deus e a toda equipe gestora da escola “Maschietto”, que me deu apoio incondicional para a realização dessa proposta de trabalho ao entender que um projeto desse nível só poderia trazer benefícios para os alunos e para a escola.

REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BRASIL, 2019. Base Nacional Comum Curricular. Brasília. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 01 de Maio de 2019.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **PCN+ ensino médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília. MEC, 2002.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília. MEC, 2000.

Caderno do Professor: matemática, ensino médio - 1ª série, volume 1 / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Nílson José Machado, Roberto Perides Moisés, Ruy César Pietropaolo, Walter Spinelli. São Paulo: SEE, 2014 - 2017.

CARRASCO, Lucia H.M. Leitura e escrita matemática. In: NEVES, Iara CBet al. (orgs). **Ler e escrever: Compromisso de todas as áreas**. Porto alegre: Editora da Universidade, UFRGS, 2000.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike, Campinas - UNICAMP, v.13, n.23, 2005, p. 85-118.

CARVALHO, Dione Lucchesi De. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 2ª Ed. São Paulo. Editora Cortez, 1991.

GALIAZZI, Maria do Carmo et al. **Objetivos das atividades experimentais no ensino médio: a pesquisa coletiva como modo de formação de professores de ciências.** *Ciência & Educação*, vol.7, n.2, p.249-263, 2001.

GRAVINA, Maria Alice. Um Estudo de Funções. **Revista do Professor de Matemática**, nº 20, págs. 33 a 38. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1994.

LIMA, Elon Lages. A Matemática do ensino médio – volume 1 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. – 9ª. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 1997.

Matriz de Avaliação Processual: matemática; encarte do professor / secretaria da Educação; coordenação, Ghisleine Trigo Silveira, Regina Aparecida Resek Santiago; elaboração, equipe curricular de matemática. São Paulo: SE, 2016.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. **O ensino e as propostas pedagógicas**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1.ed. Rio de Janeiro; Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SOUZA, Joamir Roberto de. # Contato Matemática, 1º ano / Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. - 1.ed. - São Paulo: FTD, 2016. - (Coleção #contato matemática). Disponível em <https://issuu.com/editoraftd/docs/contato_matematica_1/76>. Acesso em 05 de Julho de 2019.

Wikiquote. Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. Apresenta conteúdo enciclopédico. Disponível em: <//pt.wikiquote.org/w/index.php?title=T._S._Eliot&oldid=158608>. Acesso em 01 de Maio de 2019.

APÊNDICE A

MODELO DAS FOLHAS DE ATIVIDADES QUE FORAM APLICADAS EM SALA DE AULA

ATIVIDADE 1 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ **DATA ___/___/____**

EXPERIMENTO E CONSTRUÇÃO DE UMA FUNÇÃO - PARTE I

Objetivo: Construir uma função para descrição do fenômeno de enchimento de uma caixa de água no formato cilíndrico.

Sequência das tarefas

Nessa atividade, o grupo deve:

1 - Realizar o experimento;

2 - Produzir uma tabela para organizar os dados;

3 - Produzir um gráfico de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas;

4 - Responder às questões da Folha 3.

Complete essa tabela com os dados de seu experimento.

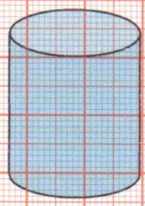
tempo (seg)	altura (cm)

Faça aqui o gráfico de pontos usando as informações da tabela.

ATIVIDADE 1 – FOLHA 2 **DATA ___/___/____**

h(cm)

GRÁFICO ALTURA X TEMPO



t(seg)

ATIVIDADE 1 – FOLHA 3 **DATA ___/___/____**

Responda com o seu grupo às seguintes questões:

Q1. 1. Você observa algum padrão no gráfico de pontos que o grupo produziu com o experimento?

____

____

Q1. 2. O padrão observado no gráfico de pontos é indicativo de algum tipo de função? Qual é o nome dessa função?

____

____

Q1. 3. Qual é a forma algébrica geral desse tipo de função?

h(t) = ____________________

Q1. 4. Como a caixa d'água está enchendo, a função h(t) é crescente ou decrescente?

____

Q1. 5. Sendo assim, o coeficiente angular de h(t) é ( ) positivo ( ) negativo.

Q1. 6. Descreva as dificuldades que o grupo encontrou para realizar o experimento.

____

____

____

____

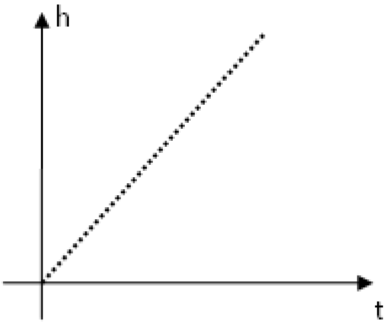
ATIVIDADE 2 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ **DATA ___/___/____**

EXPERIMENTO E CONSTRUÇÃO DE UMA FUNÇÃO - PARTE II

Objetivo: Encontrar uma função que descreva adequadamente o fenômeno do enchimento de uma caixa d’água cilíndrica.

Na Atividade 1, o grupo fez o gráfico de pontos dos dados do experimento. Foi perguntado o padrão desse gráfico, e a resposta correta era: os pontos do gráfico formam uma linha reta com boa aproximação.



Lembre-se que a função cujo gráfico é uma linha reta chama-se função afim.

Responda às seguintes questões com o seu grupo:

Q2. 1. Escreva a fórmula algébrica geral da função afim h(t).

(Sugestão: use letras como a, b, c, ...).

h(t) = ______________

Q2. 2. No gráfico, vimos que h(0) = 0. A escolha do tempo inicial t = 0 é arbitrário, mas o valor de h(0) é exato. Explique por que.

____

____

____

Q2. 3. Considerando que nossa função h(t) é afim e que h(0) = 0, sua fórmula algébrica é

h(t) =______________

ATIVIDADE 2 – FOLHA 2 **DATA ___/___/____**

LEMBRETE
A taxa de variação de uma função f(x) entre x_1 e x_2 é o quociente $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Esse quociente compara uma variação de f(x) com a variação correspondente de x.

Q2. 4. Dada uma função afim geral f(x) = ax + b, calcule sua taxa de variação entre x_1 e x_2:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} =$$

Das considerações anteriores, vimos que para calcular o valor de **a** em h(t) = **a**t, bastaria escolher um valor **t** da tabela e fazer o cálculo **a** = $\frac{h(t)}{t}$.

Mas qual valor escolher? Sabemos que os dados do experimento podem ter pequenos erros. Assim, proceda da seguinte forma:

Q2. 5. Escolha quatro valores da tabela que você acha que estão melhor posicionados na linha do gráfico e calcule:

$a_1 = \frac{h(t_1)}{t_1} = \frac{\quad}{\quad} =$ $a_2 = \frac{h(t_2)}{t_2} = \frac{\quad}{\quad} =$

$a_3 = \frac{h(t_3)}{t_3} = \frac{\quad}{\quad} =$ $a_4 = \frac{h(t_4)}{t_4} = \frac{\quad}{\quad} =$

Calcule a média aritmética desses valores:

$a = \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} =$ _____.

Q2. 6. Proponha a função que melhor descreve o experimento:

h(t) =

ATIVIDADE 2 – FOLHA 3 **DATA ___/___/____**

Outra forma de se obter o valor de a na expressão h(t) = at é completar a tabela do experimento. Copie aqui os dados do experimento e complete a terceira coluna.

Q2. 7.

tempo (seg)	*altura (cm)*	*1ª variação*

Os dados da 3ª coluna chamam-se "1ª variação". São calculados pela fórmula $\frac{h(t_{i+1}) - h(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$. Faça você os cálculos lembrando que $t_{i+1} - t_i$ = 10 segundos.

Devido aos erros do experimento, é pouco provável que os valores da 1ª variação sejam constantes. Mas você pode fazer sua média aritmética e obter o valor de **a**:

a = $\boxed{}$

Q2. 8. Compare os valores de **a** obtidos anteriormente. Se são diferentes, a que você atribui a diferença?

____

____

____

Q2. 9. O grupo está achando o trabalho interessante? Explique porque sim ou porque não.

____

____

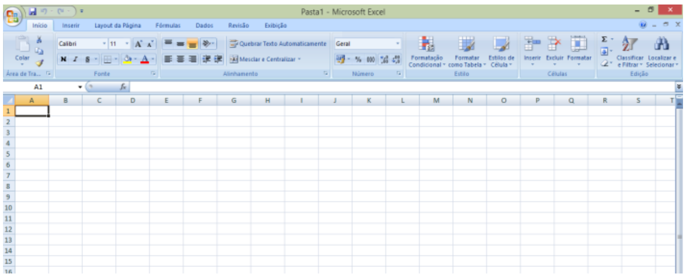
____

ATIVIDADE 3 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ DATA ___/___/____

OBTENÇÃO DA FUNÇÃO COM O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Tarefa de hoje: Obter a função h(t) usando uma planilha eletrônica.



Nessa parte, o grupo deverá fazer uso de um aplicativo computacional para obter:

(i) O gráfico que foi construído no papel milimetrado.

(ii) A expressão algébrica da reta aproximada por meio da ferramenta linha de tendência.

PROCEDIMENTO:

- Transfira a tabela do experimento para uma planilha eletrônica.
- Aplique o recurso inserir gráfico por meio da opção que dispersa os pontos no plano cartesiano.
- Ligue os pontos obtidos através do recurso “formatar série de dados”.
- Insira a linha de tendência linear fazendo uso da ferramenta “layout rápido”, onde o aplicativo vai apresentar a expressão algébrica correspondente.
- Envie o arquivo para o professor.

Q3. 1. Comparando a expressão obtida no aplicativo com a obtida no experimento, elas são semelhantes? Justifique a sua resposta.

____

____

____

____

ATIVIDADE 4 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ **DATA ___/___/____**

OBTENÇÃO DA VAZÃO

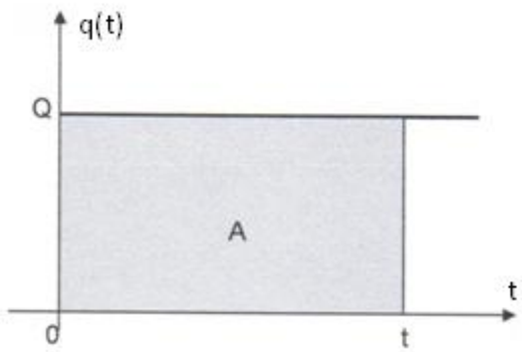
Objetivo: Calcular a vazão da bombinha de água usada no experimento

Definição: Vazão de um dispositivo como uma torneira ou uma bomba d'água, por exemplo, é a quantidade de líquido que é disponibilizada por unidade de tempo.

Ela pode ser variável. Assim, a princípio, é uma função q(t). No caso da bombinha do nosso experimento, a vazão é constante, de modo que:

$$q(t) = Q$$

Queremos descobrir o valor de Q. Como o gráfico de q(t) é horizontal, temos a figura:



A quantidade de água liberada pelo dispositivo de 0 a t é a área do retângulo.

Q4. 1. A área do retângulo é ___________________

Q4. 2. A área do retângulo é o volume de água que entra no recipiente de 0 a t. Logo:

V(t) = ____________________

ATIVIDADE 4 – FOLHA 2

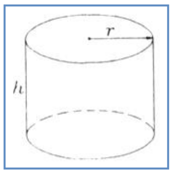
Vamos, agora, ver a relação entre V(t) e a função h(t) obtida no experimento.

Q4. 3. Meça o diâmetro do recipiente cilíndrico do experimento e obtenha o raio.

r = _____cm.

LEMBRETE

Volume de um cilindro circular reto de raio r e altura h:



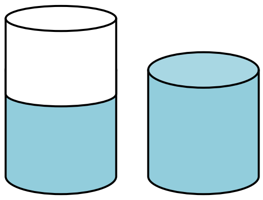
$\mathbf{V = \pi r^2 h}$

Q4. 4. Você concorda que a água no reservatório cilíndrico em qualquer instante t é também um cilindro? Sobre esse cilindro de água podemos afirmar que:

(i) Seu raio é r = _____cm.

(ii) Sua altura no instante t é h(t) = **a**t.

(iii) Seu volume no instante t é V(t) = _____



Q4. 5. Na última fórmula, você já sabe que V(t) = Qt e h(t) = **a**t e, também, já conhece o valor de **a**. Então a fórmula $\mathbf{V = \pi r^2 h}$ fica:

____

Q4. 6. Ache o valor de Q em cm^3/s:

____

____

____

LEMBRETE

1 litro = $1000cm^3$

Q4. 7. Ache o valor de Q em l/s:

____

____

Q4. 8. Procure a especificação técnica da vazão da bomba d’água que você usou no experimento e compare com seu resultado:

____

____

ATIVIDADE 5 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ **DATA ___/___/____**

PROBLEMAS SOBRE VAZÃO

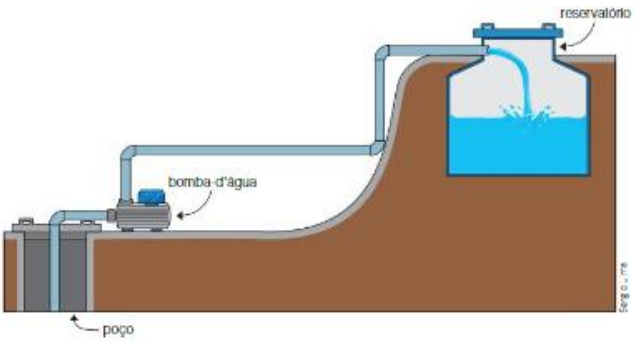
Q5. 1. Uma torneira tem vazão constante de 5 l/min.

(i) Qual é a vazão em cm^3/s?

(ii) Essa mesma torneira enche um aquário em 150 segundos. O aquário tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo cuja base tem medidas 30 cm e 50 cm. Qual é a sua altura?

(iii) Um grupo de estudantes fez um experimento para achar a função h(t) que mede a altura da água nesse aquário no instante t. Calcule essa função, sem fazer o experimento.

ATIVIDADE 5 – FOLHA 2



Q5. 2. A água potável usada em propriedades rurais, de um modo geral, é retirada de poços com o auxílio de uma bomba d'água elétrica. Em um sítio, para abastecer o reservatório de água, é utilizada uma bomba com capacidade para bombear 15 litros por minuto. Essa bomba se liga automaticamente quando o reservatório está com 250 litros de água e se desliga ao enchê-lo, sendo a capacidade máxima do reservatório de 1750 litros.

Com base nessas informações:

(i) Escreva a função q(t) que permite calcular a quantidade de água no reservatório em função do tempo em que a bomba permanece ligada indicando o significado de cada termo. Considere que não houve consumo de água durante esse processo.

(ii) Determine a quantidade de água no reservatório 25 minutos após a bomba entrar em funcionamento.

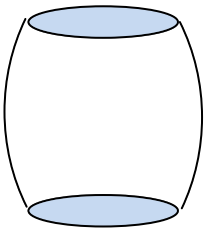
(iii) Após a bomba entrar em funcionamento, qual será o tempo necessário para o reservatório atingir 730 litros de água?

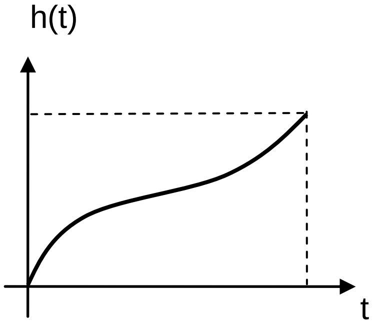
(iv) Lembrando que a capacidade máxima do reservatório é de 1750 litros e que a bomba é ligada quando a quantidade de água no reservatório é de 250 litros, qual o tempo necessário para enchê-lo a partir do momento em que a bomba é ligada? Suponha que durante o enchimento não existe consumo de água.

(v) Represente o gráfico da função q(t). O que é a sua inclinação e quanto vale? Especifique as unidades de medida da inclinação.

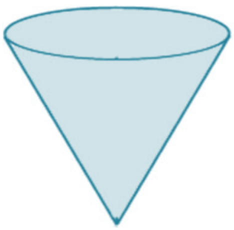
ATIVIDADE 5 – FOLHA 3

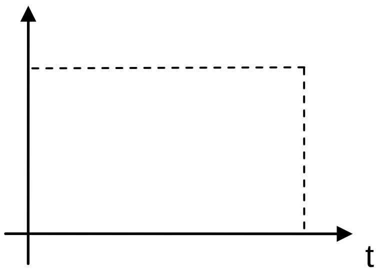
Q5. 3. Os reservatórios das figuras abaixo têm a mesma altura e o mesmo volume do reservatório utilizado no experimento que o grupo fez. Estando inicialmente vazio, uma torneira é aberta no instante t = 0, começando a enchê-lo a uma razão constante. Desenhe o gráfico que melhor representa a variação da altura da água em cada reservatório.

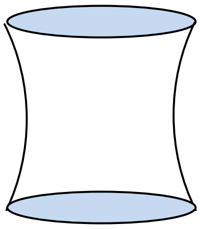


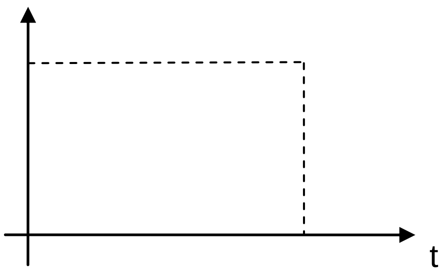


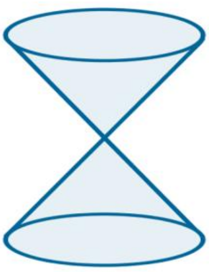
Observe como o gráfico do primeiro reservatório foi construído: na altura em que o raio do recipiente é menor, a água sobe mais rápido, assim nesse instante o gráfico cresce mais rápido.

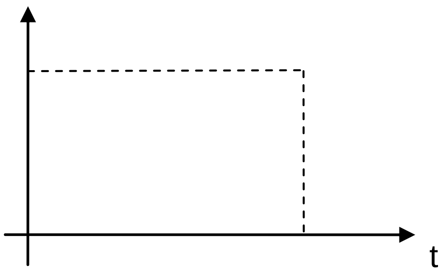












APÊNDICE B

FOLHAS DE ATIVIDADES RESPONDIDAS PELO PROFESSOR DE ACORDO COM OS DADOS DO EXPERIMENTO FEITO NA SIMULAÇÃO.

ATIVIDADE 1 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ **DATA ___/___/____**

EXPERIMENTO E CONSTRUÇÃO DE UMA FUNÇÃO - PARTE I

Objetivo: Construir uma função para descrição do fenômeno de enchimento de uma caixa de água no formato cilíndrico.

Sequência das tarefas

Nessa atividade, o grupo deve:

1 - Realizar o experimento;

2 - Produzir uma tabela para organizar os dados;

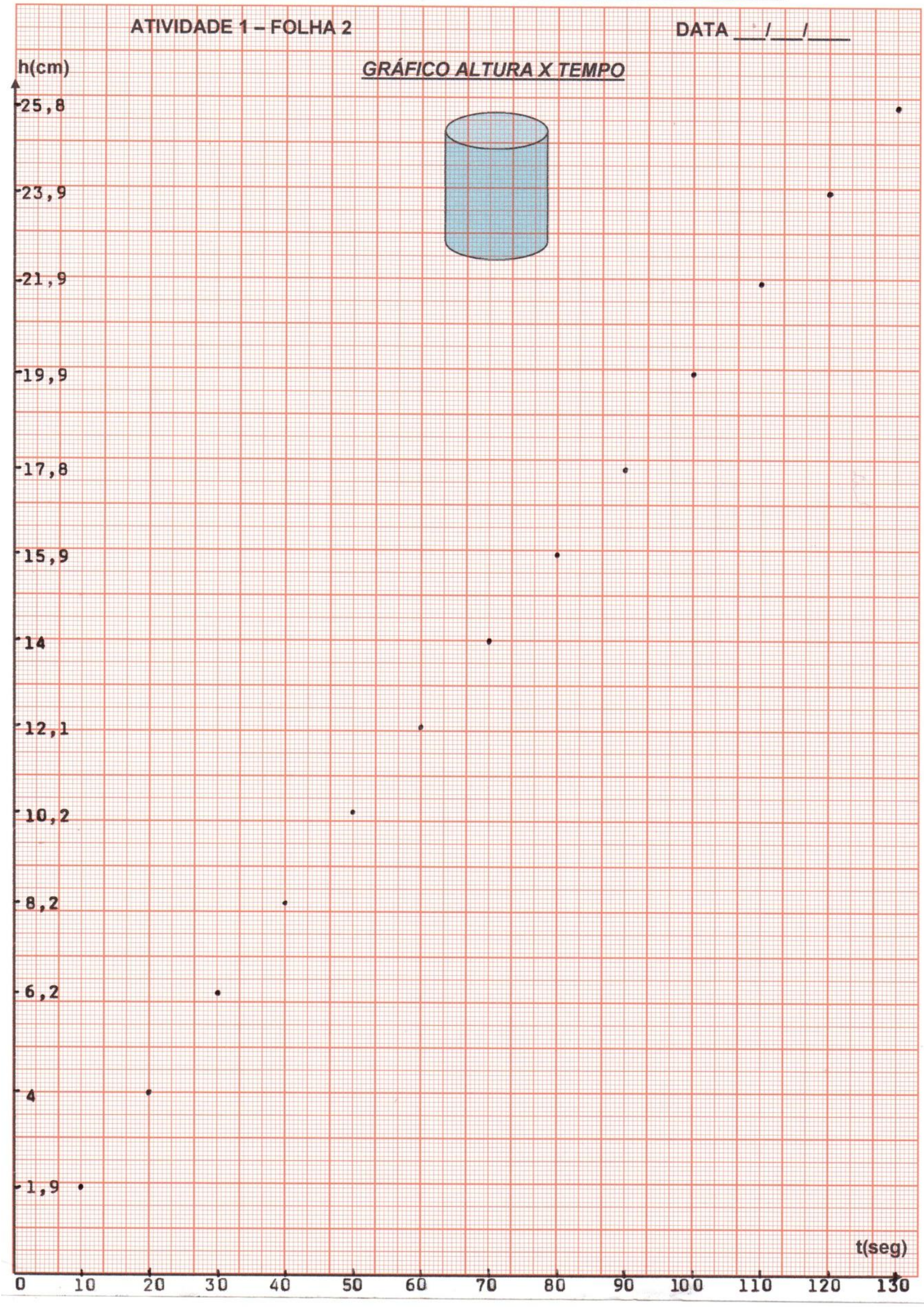
3 - Produzir um gráfico de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas;

4 - Responder às questões da Folha 3.

Complete essa tabela com os dados de seu experimento.

tempo (seg)	altura (cm)
0	*0,0*
10	*1,9*
20	*4,0*
30	*6,2*
40	*8,2*
50	*10,2*
60	*12,1*
70	*14,0*
80	*15,9*
90	*17,8*
100	*19,9*
110	*21,9*
120	*23,9*
130	*25,8*

Faça aqui o gráfico de pontos usando as informações da tabela.



ATIVIDADE 1 – FOLHA 3 **DATA ___/___/____**

Responda com o seu grupo às seguintes questões:

Q1. 1. Você observa algum padrão no gráfico de pontos que o grupo produziu com o experimento?

Os pontos do gráfico se aproximam de uma linha reta.

Q1. 2. O padrão observado no gráfico de pontos é indicativo de algum tipo de função? Qual é o nome dessa função?

Sim. O nome dessa função é função polinomial do 1º grau ou função afim.

Q1. 3. Qual é a forma algébrica geral desse tipo de função?

h(t) = *at + b*.

Q1. 4. Como a caixa d'água está enchendo, a função h(t) é crescente ou decrescente?

Crescente.

Q1. 5. Sendo assim, o coeficiente angular de h(t) é (X) positivo ( ) negativo.

Q1. 6. Descreva as dificuldades que o grupo encontrou para realizar o experimento.

____

____

____

____

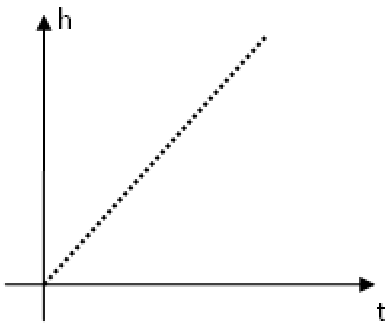
ATIVIDADE 2 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ DATA ___/___/____

EXPERIMENTO E CONSTRUÇÃO DE UMA FUNÇÃO - PARTE II

Objetivo: Encontrar uma função que descreva adequadamente o fenômeno do enchimento de uma caixa d'água cilíndrica.

Na Atividade 1, o grupo fez o gráfico de pontos dos dados do experimento. Foi perguntado o padrão desse gráfico, e a resposta correta era: os pontos do gráfico formam uma linha reta com boa aproximação.



Lembre-se que a função cujo gráfico é uma linha reta chama-se função afim.

Responda às seguintes questões com o seu grupo:

Q2. 1. Escreva a fórmula algébrica geral da função afim h(t).

(Sugestão: use letras como a, b, c, ...).

h(t) = *at + b*.

Q2. 2. No gráfico, vimos que h(0) = 0. A escolha do tempo inicial t = 0 é arbitrário, mas o valor de h(0) é exato. Explique por que.

Ao fazer o experimento, foi acionado o cronômetro no momento em que a altura da água estava na marcação zero. Por isso h(0) = 0.

Q2. 3. Considerando que nossa função h(t) é afim e que h(0) = 0, sua fórmula algébrica é

h(t) = ***at***

ATIVIDADE 2 – FOLHA 2 **DATA ___/___/____**

LEMBRETE
A taxa de variação de uma função f(x) entre x_1 e x_2 é o quociente $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Esse quociente compara uma variação de f(x) com a variação correspondente de x.

Q2. 4. Dada uma função afim geral f(x) = ax + b, calcule sua taxa de variação entre x_1 e x_2:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2+b - ax_1-b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2-x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Das considerações anteriores, vimos que para calcular o valor de **a** em h(t) = **a**t, bastaria escolher um valor **t** da tabela e fazer o cálculo **a** = $\frac{h(t)}{t}$.

Mas qual valor escolher? Sabemos que os dados do experimento podem ter pequenos erros. Assim, proceda da seguinte forma:

Q2. 5. Escolha quatro valores da tabela que você acha que estão melhor posicionados na linha do gráfico e calcule:

$a_1 = \frac{h(t_1)}{t_1} = \frac{4{,}0}{20} = 0{,}2$

$a_2 = \frac{h(t_2)}{t_2} = \frac{15{,}9}{80} = 0{,}198$

$a_3 = \frac{h(t_3)}{t_3} = \frac{14{,}0}{70} = 0{,}2$

$a_4 = \frac{h(t_4)}{t_4} = \frac{19{,}9}{100} = 0{,}199$

Calcule a média aritmética desses valores:

$$a = \frac{0{,}2+0{,}198+0{,}2+0{,}999}{4} = \frac{0{,}797}{4} = 0{,}199.$$

Q2. 6. Proponha a função que melhor descreve o experimento:

h(t) = **0,199t**.

ATIVIDADE 2 – FOLHA 3 **DATA ___/___/____**

Outra forma de se obter o valor de a na expressão h(t) = at é completar a tabela do experimento. Copie aqui os dados do experimento e complete a terceira coluna.

Q2. 7.

tempo (seg)	altura (cm)	1ª variação
0	0,0	0,19
10	1,9	0,21
20	4,0	0,22
30	6,2	0,20
40	8,2	0,20
50	10,2	0,19
60	12,1	0,19
70	14,0	0,19
80	15,9	0,19
90	17,8	0,21
100	19,9	0,20
110	21,9	0,20
120	23,9	0,19
130	25,8	

Os dados da 3ª coluna chamam-se “1ª variação”. São calculados pela fórmula $\frac{\mathrm{h}(t_{i+1}) - \mathrm{h}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$. Faça você os cálculos lembrando que $t_{i+1} - t_i$ = 10 segundos.

Devido aos erros do experimento, é pouco provável que os valores da 1ª variação sejam constantes. Mas você pode fazer sua média aritmética e obter o valor de **a**:

a = $\boxed{0{,}198}$

Q2. 8. Compare esse resultado com os valores de **a** obtidos anteriormente. Se são diferentes, a que você atribui a diferença?

<u>*A diferença é que esse valor de **a** foi obtido levando-se em conta todos os valores da tabela, enquanto que o valor anterior foi obtido com quatro pontos apenas.*</u>_________

____

Q2. 9. O grupo está achando o trabalho interessante? Explique porque sim ou porque não.

____

____

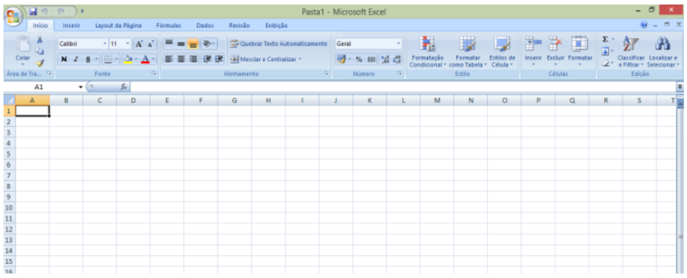
____

ATIVIDADE 3 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ **DATA ___/___/____**

OBTENÇÃO DA FUNÇÃO COM O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Tarefa de hoje: Obter a função h(t) usando uma planilha eletrônica.



Nessa parte, o grupo deverá fazer uso de um aplicativo computacional para obter:

(i) O gráfico que foi construído no papel milimetrado.

(ii) A expressão algébrica da reta aproximada por meio da ferramenta linha de tendência.

PROCEDIMENTO:

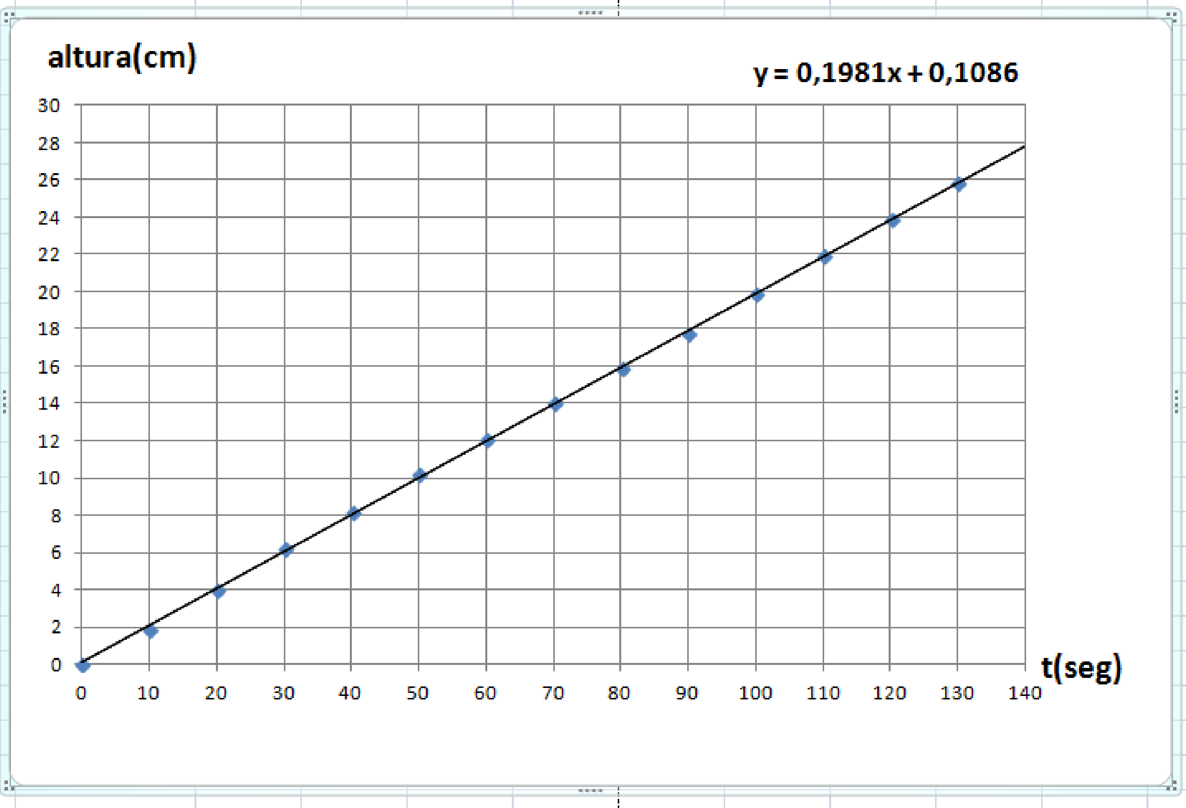
- Transfira a tabela do experimento para uma planilha eletrônica.
- Aplique o recurso inserir gráfico por meio da opção que dispersa os pontos no plano cartesiano.
- Ligue os pontos obtidos através do recurso “formatar série de dados”.
- Insira a linha de tendência linear fazendo uso da ferramenta “layout rápido”, onde o aplicativo vai apresentar a expressão algébrica correspondente.
- Envie o arquivo para o professor.

Q3. 1. Comparando a expressão obtida no aplicativo com a obtida no experimento, elas são semelhantes? Justifique a sua resposta.

*Não. A função **y = 0,199t** foi obtida usando os pontos que representam o experimento. Já a função **y = 0,1981x + 0,1086** foi obtida por meio de uma aproximação dos valores tabelados.*

OBTENÇÃO DA FUNÇÃO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS ATRAVÉS DO EDITOR DE PLANILHAS EXCEL.

tempo(seg)	altura(cm)
0	0
10	1,9
20	4
30	6,2
40	8,2
50	10,2
60	12,1
70	14
80	15,9
90	17,8
100	19,9
110	21,9
120	23,9
130	25,8
140	



ATIVIDADE 4 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ DATA ___/___/____

OBTENÇÃO DA VAZÃO

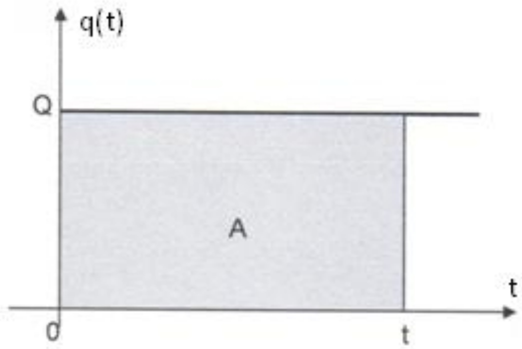
Objetivo: Calcular a vazão da bombinha de água usada no experimento

Definição: Vazão de um dispositivo como uma torneira ou uma bomba d'água, por exemplo, é a quantidade de líquido que é disponibilizada por unidade de tempo.

Ela pode ser variável. Assim, a princípio, é uma função q(t). No caso da bombinha do nosso experimento, a vazão é constante, de modo que:

$$q(t) = Q$$

Queremos descobrir o valor de Q. Como o gráfico de q(t) é horizontal, temos a figura:



A quantidade de água liberada pelo dispositivo de 0 a t é a área do retângulo.

Q4. 1. A área do retângulo é <u>*Q.t*</u>

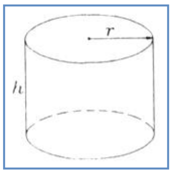
Q4. 2. A área do retângulo é o volume de água que entra no recipiente de 0 a t. Logo:

V(t) = <u>*Q.t*</u>

ATIVIDADE 4 – FOLHA 2

LEMBRETE

Volume de um cilindro circular reto de raio r e altura h:



$V = \pi r^2 h$

Vamos, agora, ver a relação entre V(t) e a função h(t) obtida no experimento.

Q4. 3. Meça o diâmetro do recipiente cilíndrico do experimento e obtenha o raio.

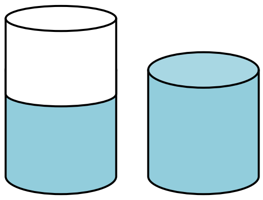
r = *5,15* cm.

Q4. 4. Você concorda que a água no reservatório cilíndrico em qualquer instante t é também um cilindro? Sobre esse cilindro de água podemos afirmar que:

(i) Seu raio é r = *5,15* cm.

(ii) Sua altura no instante t é h(t) = **a**t.

(iii) Seu volume no instante t é V(t) = *Q.t.*



Q5. 5. Na última fórmula, você já sabe que V(t) = Qt e h(t) = **a**t e, também, já conhece o valor de **a**. Então a fórmula $\mathbf{V = \pi r^2 h}$ fica:

$V(t) = \pi\, r^2\, h(t) = \pi\, r^2\, at$ *(ou* $V(t) = \pi \times (5{,}15)^2 \times 0{,}198t$*)*

Q4. 6. Ache o valor de Q em cm^3/s:

$V(t) = Q.t \Rightarrow Q = V(t)/t \Rightarrow Q = \pi\, r^2\, at/t \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = \pi\, r^2\, a$ *. Logo,* $Q = 3{,}14 \times (5{,}15)^2 \times 0{,}198 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \cong 16{,}49\ cm^3/s.$

LEMBRETE

1 litro = $1000 cm^3$

Q4. 7. Ache o valor de Q em l/s:

$Q = (16{,}49/1000) l/s \Rightarrow Q \cong 0{,}0165\ l/s.$

Q4. 8. Procure a especificação técnica da vazão da bomba d'água que você usou no experimento e compare com seu resultado:

$Q_{max} = 250 l/h \cong 0{,}069 l/s$*. Como essa é a vazão máxima da bombinha, vemos que o valor de* $Q \cong 0{,}0165\ l/s$ *está dentro do limite da sua especificação técnica.*

ATIVIDADE 5 – FOLHA 1

GRUPO Nº ___ SÉRIE ____TURMA ___ DATA ___/___/____

PROBLEMAS SOBRE VAZÃO

Q5. 1. Uma torneira tem vazão constante de 5 l/min.

(i) Qual é a vazão em cm^3/s?

1 min ------ 5 litros

60 seg ---- 5000 cm^3

1 seg ------ Q

$\Rightarrow Q = \frac{5000}{60}\ cm^3/s \Rightarrow Q = \frac{250}{3}\ cm^3/s\ (\cong 83{,}3\ cm^3/s)$

(ii) Essa mesma torneira enche um aquário em 150 segundos. O aquário tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo cuja base tem medidas 30 cm e 50 cm. Qual é a sua altura?

Como V = Q.t, temos que:

$V = \frac{250}{3} \cdot \frac{cm^3}{s} \cdot 150s \Rightarrow V = 12.500\ cm^3.$

Mas $V = A_b \times h \Rightarrow h = \frac{12.500}{30 \times 50} \cdot \frac{cm^3}{cm^2} \Rightarrow h = \frac{25}{3}\ cm$

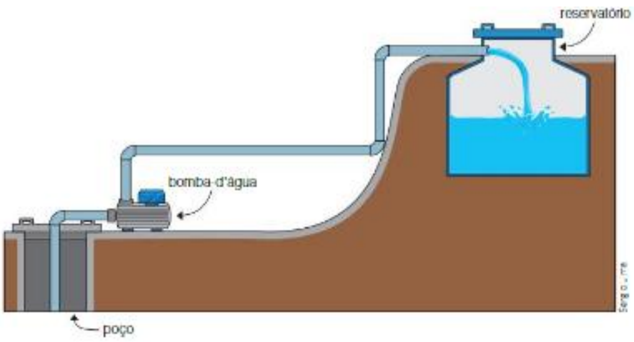
$\Rightarrow h \cong 8{,}33\ cm$

(iii) Um grupo de estudantes fez um experimento para achar a função h(t) que mede a altura da água nesse aquário no instante t. Calcule essa função, sem fazer o experimento.

Sendo h(t) = $\boldsymbol{a}t$, *temos que* $\boldsymbol{a} = \frac{h(t)}{t} = \frac{h(150)}{150} = \frac{25/3}{150/1} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{25}{450} = \frac{1}{18}\ (\cong 0{,}05).$

Logo, $h(t) = \frac{1}{18}\ t.$

ATIVIDADE 5 – FOLHA 2



Q5. 2. A água potável usada em propriedades rurais, de um modo geral, é retirada de poços com o auxílio de uma bomba d'água elétrica. Em um sítio, para abastecer o reservatório de água, é utilizada uma bomba com capacidade para bombear 15 litros por minuto. Essa bomba se liga automaticamente quando o reservatório está com 250 litros de água e se desliga ao enchê-lo, sendo a capacidade máxima do reservatório de 1750 litros.

Com base nessas informações:

(i) Escreva a função q(t) que permite calcular a quantidade de água no reservatório em função do tempo em que a bomba permanece ligada indicando o significado de cada termo. Considere que não houve consumo de água durante esse processo.

Sendo q(t) = at + b, temos que:

tempo em que a bomba permanece ligada

quantidade de litros de água

q(t) = 15 t + 250

quantidade inicial de litros de água no reservatório

litros de água bombardeados por minuto

(ii) Determine a quantidade de água no reservatório 25 minutos após a bomba entrar em funcionamento.

Após 25 minutos: q = 15x25 + 250 ⇒ q = 625 litros.

(iii) Após a bomba entrar em funcionamento, qual será o tempo necessário para o reservatório atingir 730 litros de água?

Para um volume de 730 litros, teremos:

730 = 15 t + 250 ⇒ 15 t = 730 - 250 ⇒ t = 480/15 ⇒ t = 32 minutos.

(iv) Lembrando que a capacidade máxima do reservatório é de 1750 litros e que a bomba é ligada quando a quantidade de água no reservatório é de 250 litros, qual o tempo necessário para enchê-lo a partir do momento em que a bomba é ligada? Suponha que durante o enchimento não existe consumo de água.

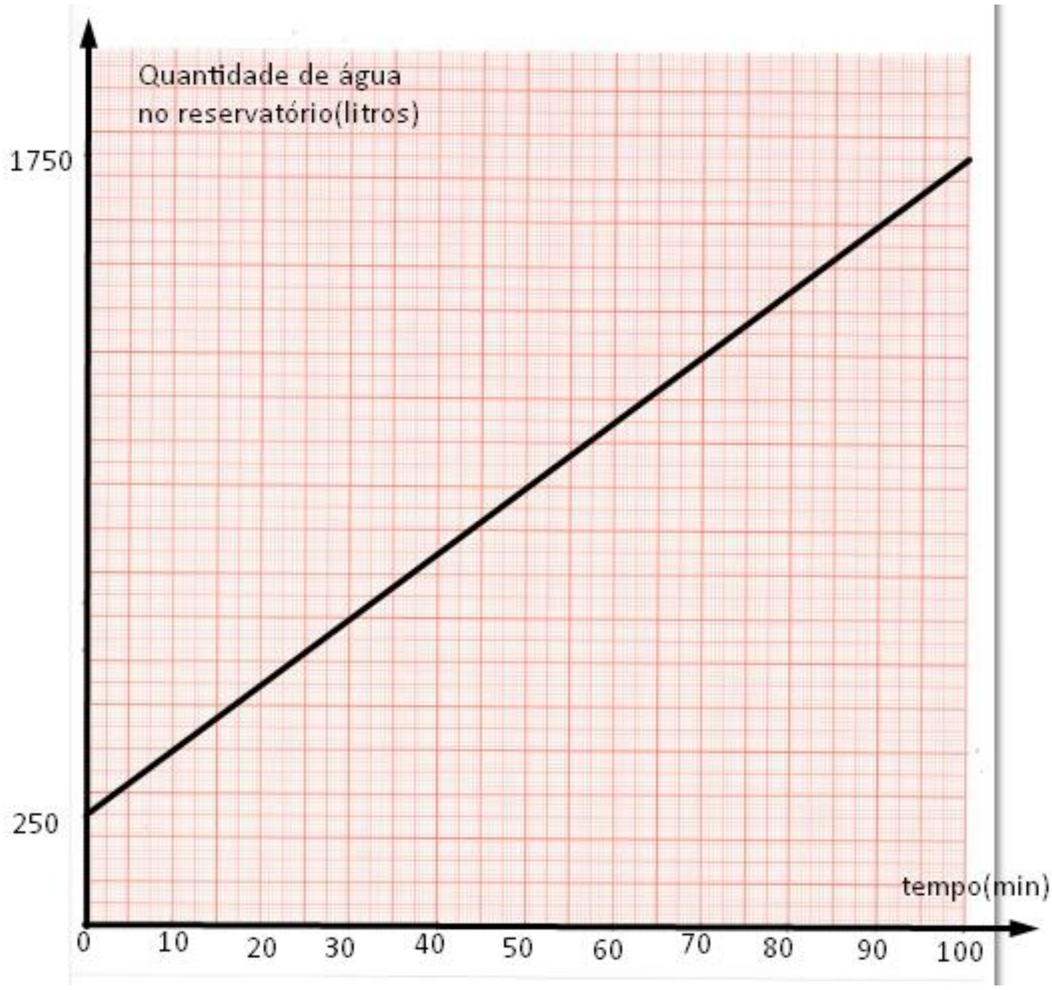
Para um volume de 1750 litros, teremos:

1750 = 15 t + 250 ⇒ 15 t = 1750 - 250 ⇒ t = 1500/15 ⇒ t = 100minutos = 1h40min.

(v) Represente o gráfico da função q(t). O que é a sua inclinação e quanto vale? Especifique as unidades de medida da inclinação.

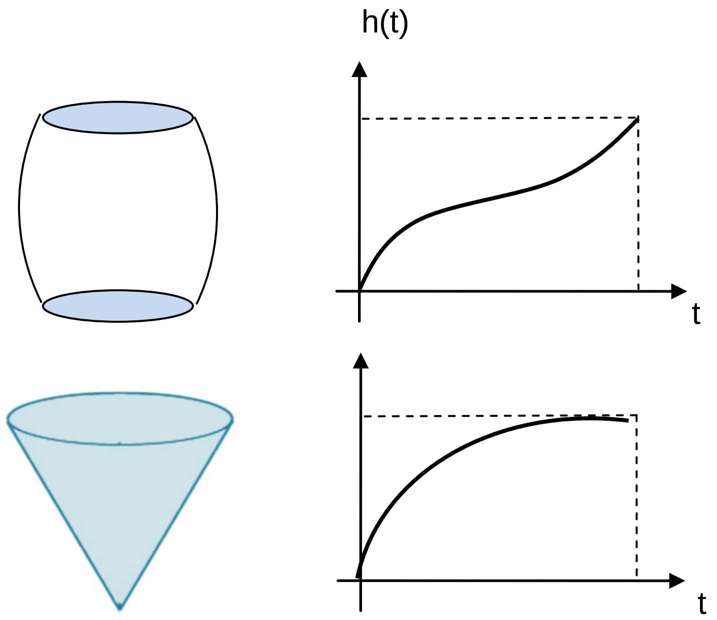
A inclinação é determinada pelo coeficiente angular (a), cujo valor é a tangente do ângulo (α) de inclinação, ou seja, tg α = a = 15. As unidades de medida da inclinação são dadas por litros/min.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA QUANTIDADE DE ÁGUA NO RESERVATÓRIO EM FUNÇÃO DO TEMPO EM QUE A BOMBA PERMANECE LIGADA



ATIVIDADE 5 – FOLHA 3

Q5. 3. Os reservatórios das figuras abaixo têm a mesma altura e o mesmo volume do reservatório utilizado no experimento que o grupo fez. Estando inicialmente vazio, uma torneira é aberta no instante t = 0, começando a enchê-lo a uma razão constante. Desenhe o gráfico que melhor representa a variação da altura da água em cada reservatório.



Observe como o gráfico do primeiro reservatório foi construído: na altura em que o raio do recipiente é menor, a água sobe mais rápido, assim nesse instante o gráfico cresce mais rápido.