UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma estimativa do tipo L^1 para potencial de Riesz

Raphael Shoji Hoshijima

São Carlos
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma estimativa do tipo L^1 para potencial de Riesz

Raphael Shoji Hoshijima
Orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Raphael Shoji Hoshijima, realizada em 13/08/2019:

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
USP

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
UFSCar

Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
USP

Dedico aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio incondicional e grande incentivo, em especial a minha avó Adélia, meus pais e meus irmãos.

Ao Prof. Dr. Tiago Henrique Picon pelo incentivo em ingressar na pós-graduação, confiança, ensinamentos e por ser uma grande inspiração como pesquisador e professor.

À todos os professores ao longo da minha formação.

Aos amigos do DM pelos momentos de estudo e descontração.

À banca de defesa do mestrado composta pelo Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie e Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva pelas correções, críticas e inúmeras contribuições propostas.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nessa dissertação apresentaremos uma estimativa do tipo L^1 para o potencial de Riesz I_α para $\alpha \in (0, n)$:

$$\|I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^{n} \|R_j u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $R_j u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$. Esta estimativa é um refinamento do resultado de Stein e Weiss que versa sobre uma limitação do potencial de Riesz em $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Tal estimativa foi estabelecida por Armin Schikorra, Daniel Spector e Jean Van Schaftingen, e se encontra no artigo *"An L^1-type estimate for Riesz potentials"*, publicado na Revista Matemática Iberoamericana em 2016.

Palavras-chaves: Potencial de Riesz, Transformada de Riesz, Estimativa L^1.

ABSTRACT

In this work we will present a L^1-type estimates for the Riesz potentials of order $\alpha \in (0, n)$:

$$\|I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^{n} \|R_j u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

for all $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that $R_j u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$. This estimate is an improvement of result due to Stein and Weiss the result of Stein and Weiss that provides Riesz potentials is bounded in $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Such estimate was proved by Armin Schikorra, Daniel Spector and Jean Van Schaftingen in the paper *"An L^1-type estimate for Riesz potentials"*, published in the Revista Matemática Iberoamericana in 2016.

Keywords: Riesz Potentials, Riesz Transform, L^1 estimate.

Sumário

1 Preliminares **2**

1.1 Teoria da Medida e Espaços de Lebesgue 2
1.2 Teoria das Distribuições 9
1.3 Convolução 12
1.4 Transformada de Fourier e Espaço de Schwartz 14

2 Tópicos em Análise Harmônica **19**

2.1 Aproximações da Identidade 19
2.2 Operador Maximal de Hardy-Littlewood 21
2.3 Decomposição de Calderón-Zygmund 34
2.4 Transformada de Hilbert 40
2.5 Potencial de Riesz 52
2.6 Transformada de Riesz 59

3 Principal Resultado **76**

3.1 Demonstração do Teorema 3.1.1 76
3.2 Contraexemplo 94

Introdução

O objetivo central dessa dissertação é estudar o artigo de Armin Schikorra, Daniel Spector e Jean Van Schaftingen, intitulado *"An L^1-type estimate for Riesz potentials"* [1], publicado na Revista Matemática Iberoamericana em 2016. O resultado principal do artigo versa sobre a limitação do operador potencial de Riesz I_α quando $0 < \alpha < n$ para funções suaves de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ cuja transformada de Riesz é limitada em norma L^1.

Um resultado clássico, chamado desigualdade fracionária de Hardy-Littlewood, afirma que se $0 < \alpha < n$ e $1 < p < n/\alpha$ então

$$\|I_\alpha u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1}$$

para toda $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, no qual p^* é o expoente de Sobolev de ordem α dado por $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$. A desigualdade (1) não é válida para $p = 1$. Dessa forma podemos questionar se a estimativa (1) para $p = 1$ é válida para algum subespaço de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Considere o conjunto $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, chamado de espaço de Hardy, das funções $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \doteq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

no qual R_j é o operador transformada de Riesz, para $j = 1, \ldots, n$. Claramente $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^1(\mathbb{R}^n)$ uma vez que o operador transformada de Riesz R_j não é limitada de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Podemos afirmar (ver [7], página 136) que a seguinte versão da desigualdade (1) é válida para $p = 1$:

$$\|I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. O principal resultado do artigo estudado é enunciado na sequência.

Teorema 3.1.1: Sejam $n \geq 2$ e $0 < \alpha < n$. Então existe uma constante $C = C(\alpha, n) > 0$ tal que

$$\|I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Ru \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar resultados preliminares como os espaços de Lebesgue e Schwartz, a teoria das distribuições, convolução e a transformada de Fourier.

1.1 Teoria da Medida e Espaços de Lebesgue

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados de Teoria da Medida, Integração e dos Espaços de Lebesgue L^p. É importante destacar que, a menos de ressalta, as integrações em todo o texto serão no sentido de Lebesgue. Além disso, se $A \subset \mathbb{R}^n$, então denotaremos a medida de Lebesgue do conjunto A por $|A|$, isto é, $|A| = \displaystyle\int_A 1\, dx$.

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **σ-álgebra** de X se:*

(i) Se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c = X \backslash A \in \mathcal{A}$;

(ii) Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$, então $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

*Dizemos que uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ é uma **medida** se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

*Dizemos que uma medida é **σ-finita** se $X = \displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ no qual $\mu(A_j) < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Denotaremos por $(X, \mathcal{A})$ um **espaço mensurável** e $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um **espaço de medida**. Quando não for necessário explicitar a σ-álgebra considerada, denotaremos apenas por (X, μ) um espaço de medida. A seguir apresentaremos algumas propriedades de uma medida.

Proposição 1.1.1. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Então*

(i) Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ são tais que $A_1 \subset A_2$, então $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$;

(ii) Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{A}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Demonstração. Ver [3], página 25. □

Definição 1.1.2. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é uma função $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$**-mensurável** se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$, no qual f^{-1} denota a imagem inversa da f.*

Definição 1.1.3. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função mensurável à Lebesgue definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável.*

*(i) Seja $p \in [1, \infty)$. Dizemos que f é p**-integrável** quando*

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço das funções p-integráveis é denotador por $L^p(\Omega)$ e a norma L^p é dada pelo funcional acima.

*(ii) Dizemos que f é **essencialmente limitada** se existir uma constante real $C > 0$ tal que:*

$$|\{x \in \Omega : |f| > C\}| = 0,$$

ou seja, $|f| \leq C$ exceto em um conjunto de medida nula. O espaço das funções essencialmente limitadas é denotado por $L^\infty(\Omega)$ e a norma $||f||_{L^\infty(\Omega)}$ é dada por

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : \mu\{|f(x)| > C\} = 0\}.$$

Notação: *Quando não houver confusão, escreveremos $L^p(\Omega) = L^p$ e $|| \cdot ||_{L^p} = || \cdot ||_p$.*

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Fubini, justifica a permutação de integrais.

Teorema 1.1.2 (Fubini). *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida σ-finitos. Se $f \in L^1(\mu \times \nu)$ então $f_x \in L^1(\nu)$ q.t.p. $x \in X$, $f_y \in L^1(\mu)$ q.t.p. $y \in Y$ e as funções definidas q.t.p. por $g(x) \in f(x,y)\,d\nu$ e $h(y) = \int f(x,y)\,d\mu$ estão em $L^1(\mu)$ e $L^1(\nu)$ respectivamente e vale a identidade*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times\nu) &= \int_X \left[\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x)\\ &= \int_Y \left[\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y).\end{aligned}$$

Demonstração. Ver [3], página 67. □

Um resultado de muita importância na estimativa para integrais é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.1.3 (Desigualdade de Minkowski para Integrais). *Sejam (X,M,μ) e (Y,N,ν) espaços mensuráveis σ-finitos e seja f uma função $M\otimes N$ mensurável sobre $X\times Y$. Se $f \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, então*

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left[\int_X f(x,y)^p\,d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

Demonstração. Ver [3], página 194. □

Quando considerado o cálculo de integrais no $\mathbb{R}^n$ para funçõess radiais, será útil um resultado que reduz esse cálculo a uma integração real.

Proposição 1.1.4. *Seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, não negativa e integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g em $(0,\infty)$, isto é, f é radial. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = |S^{n-1}| \int_0^\infty g(r)r^{n-1}\,dr,$$

no qual S^{n-1} é a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| = 1\}.$$

Demonstração. Ver [3], página 79. □

Em virtude do cálculo de $|S^{n-1}|$ definimos a seguinte função:

Definição 1.1.4. *Definimos a função **Gama** para $x > 0$ por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Fazendo a mudança de variável $t = \pi r^2$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right) = 2\pi^{\frac{b+1}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^b \, dr. \tag{1.1}$$

Proposição 1.1.5. *Se $a < 0$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} \, dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Demonstração. Podemos reesecrever a integral do enunciado como

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} \, dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_j^2} \, dx_j.$$

Então basta calcularmos a integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \, dt.$$

Elevando os dois lados da igualdade acima ao quadrado e aplicando o Teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \, dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-as^2} \, ds\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t^2+s^2)} \, dt \, ds. \end{aligned}$$

Agora fazendo a substituição de variáveis para coordenadas polares obtemos

$$I^2 = 2\pi \int_0^\infty r e^{-ar^2} \, dr = \pi \int_0^\infty e^{-au} \, du = \frac{\pi}{a},$$

no qual $u = r^2$. Portanto, $I = (\pi/a)^{1/2}$ e então

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} \, dx = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

□

Assim, justificamos a motivação inicial da definição de Γ por

Corolário 1.1.6. $|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

Demonstração. Utilizando a Proposição 1.1.5 para $a = \pi$, a mudança de variáveis em coordenadas polares e a identidade (1.1) para $b = n - 1$ obtemos

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} \, dx = \frac{1}{2\pi^{n/2}} |S^{n-1}| 2\pi^{n/2} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{n-1} \, dr = \frac{1}{2\pi^{n/2}} |S^{n-1}| \, \Gamma(n/2).$$

□

Agora enunciaremos dois resultados clássicos sobre convergência e integração.

Teorema 1.1.7 (**Convergência Dominada**). *Sejam* (X, μ) *um espaço de medida e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções em* $L^1(X)$ *tal que* $f_n \to f$ *q.t.p. e suponhamos que exista* $g \in L^1$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n. *Então* $f \in L^1(X)$ *e vale*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Demonstração. Ver [3], página 54. □

Teorema 1.1.8 (**Convergência Monótona**). *Sejam* (X, μ) *um espaço de medida e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções em* $\{f : X \to [0, \infty] \ : \ f \text{ é mensurável } \}$ *tais que* $f_j \leq f_{j+1}$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$ *e* $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j$ *pontualmente em quase todo ponto. Então*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X f_j\, d\mu.$$

Demonstração. Ver [3], página 50. □

Agora um importante lema envolvendo o Teorema da Convergência Monótona.

Lema 1.1.9 (**Fatou**). *Seja* $\{f_j : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis não-negativas. Então*

$$\int_\Omega \liminf_{j\to\infty} f_j(x)\, dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)\, dx.$$

Demonstração. Definamos $g_m(x) \doteq \inf\limits_{j\geq m} f_j(x)$ e $f(x) \doteq \lim\limits_{m\to\infty} g_m(x) = \liminf\limits_{j\to\infty} f_j(x)$. Temos que $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é um sequência não-decrescente de funções não-negativas e, portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega g_m(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Pela definição de g_m, temos ainda que

$$\int_\Omega g_m(x)\, dx \leq \int_\Omega f_j(x)\, dx,$$

para todo $m \leq j$. Tomando o ínfimo em j, obtemos

$$\int_\Omega g_m(x)\, dx \leq \inf_{j\geq m} \int_\Omega f_j(x)\, dx,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Por fim, passando o limite em m, segue que

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega g_m(x)\, dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)\, dx,$$

donde obtemos o resultado de (1.2). □

A seguir enunciaremos propriedades importantes dos espaços L^p.

Definição 1.1.5. *Sejam $1 < p, p' < \infty$. Diremos que p e p' são* ***conjugados de Lebesgue*** *quando*

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Quando $p = 1$ denotaremos $p' = \infty$.

Teorema 1.1.10 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p, p' \leq \infty$ conjugados de Lebesgue. Sejam também $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver [3], página 182. □

Teorema 1.1.11 (Representação de Riesz em $L^p(\Omega)$). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $1 < p, p' < \infty$ conjugados de Lebesgue e $f \in L^p(\Omega)$. Então*

$$||f||_p = \sup_{||\varphi||_{p'} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right|.$$

Demonstração. Por um lado, pela desigualdade de Hölder,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq ||f||_p||\varphi||_{p'}$$

para todo $\varphi \in L^{p'}$. Assim,

$$\sup_{||\varphi||_{p'} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \sup_{||\varphi||_{p'} \leq 1} ||f||_p||\varphi||_{p'} = ||f||_p.$$

Para a desigualdade inversa é suficiente mostrar que existe uma $\varphi \in L^{p'}$ com $||\varphi||_{p'} = 1$ tal que

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

De fato, se tal φ existir, então

$$\begin{aligned} ||f||_p &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \sup_{||\varphi||_{p'} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right|. \end{aligned}$$

Defina $\varphi_0(x) = sgn\,(f(x))\,|f(x)|^{p-1}$, no qual sgn é a função sinal definida por

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Assim,
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx = \int f(x)\varphi_0(x)\, dx.$$
Afirmamos que $\varphi_0 \in L^{p'}$ e $\|\varphi_0\|_{p'} = \|f\|_p^{p/p'}$. De fato,
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_0(x)|^{p'} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{(p-1)p'} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \\ &= ||f||_p^p < \infty,\end{aligned}$$
pois
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Leftrightarrow p = (p-1)p'.$$
Agora, defina $\varphi(x) = \dfrac{\varphi_0(x)}{||f||_p^{p/p'}}$. Assim, como
$$p = p'(p-1) \Longleftrightarrow (1-p) = -\frac{p}{p'},$$
temos que
$$\begin{aligned}||f||_p &= ||f||_p^{(1-p)}||f||_p^p \\ &= ||f||_p^{-p/p'} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_0(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\varphi_0(x)}{||f||_p^{p/p'}}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx.\end{aligned}$$
Portanto, segue que
$$||f||_p = \sup_{||\varphi||_{p'} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \right|.$$

□

Definição 1.1.6. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função mensurável. Diremos que f é* ***localmente integrável*** *se*
$$\int_K |f(x)|\, dx < \infty,$$
para todo $K \subset \Omega$ compacto. O conjunto das funções localmente integráveis será denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$.

Proposição 1.1.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então $L^p(\Omega)$ é um subespaço de $L^1_{loc}(\Omega)$ para qualquer $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Para $p = 1$ é imediato, pois para qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_K |f(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx < \infty.$$

Suponha $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Então pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_K |f(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_K(x)|\,dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K 1\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|f\|_p |K|^{1/p'} < \infty.
\end{aligned}$$

Para o caso $p = \infty$, temos

$$\int_K |f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_K 1\,dx = \|f\|_\infty |K| < \infty.$$

Portanto, em todos os casos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. □

1.2 Teoria das Distribuições

A formulação da Teoria das Distribuições teve origem em 1945 pelo matemático francês Laurent Schwartz e foi motivada por problemas que surgiram na Física, como por exemplo a necessidade de uma formulação matemática precisa e rigorosa para a então chamada "função" delta de Dirac.

Definição 1.2.1. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função. Denotaremos o suporte de f por*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega :\ f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 1.2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Denotaremos como $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções teste em Ω, ou seja, as funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω.*

Exemplo 1.2.1. *Um exemplo clássico de uma função teste é a função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2-1}}, & se\ |x| < 1; \\ 0, & se\ |x| \geq 1. \end{cases}$$

O próximo resultado estabelece uma conexão entre os espaços $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$ e como consequência mostraremos a invariância por translação dos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.2.1. *O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver [6], página 69. □

Proposição 1.2.2. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $1 \leq p < \infty$. *Então,*

$$\lim_{|h| \to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_p = 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.2.1, dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3}$$

Como $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, pela Desigualdade do Valor Médio obtemos

$$\begin{aligned} \|g(\cdot + h) - g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(x - h) - g(x)|^p \, dx \\ &\leq |h|^p \int_{supp(g)} \sup_{0<t<1} |g'(x + th)|^p \, dx \\ &\leq C|h|^p. \end{aligned}$$

Assim, para $|h|$ suficientemente pequeno obtemos

$$\|g(\cdot + h) - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.4}$$

Portanto, utilizando a desigualdade triangular, (1.3) e (1.4), obtemos

$$\|f(\cdot + h) - f\|_p \leq \|f(\cdot + h) - g(\cdot + h)\|_p + \|g(\cdot + h) - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Definição 1.2.3. *Dizemos que uma sequência* $\{\phi_j\}$ *em* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *converge a zero em* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *se*

(i) Existe K *compacto tal que* $supp(\phi_j) \subset K$ *para todo* $j = 1, 2, \ldots$;

(ii) Para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, $\partial^m \phi_j \to 0$ *uniformemente quando* $j \to \infty$.

Definição 1.2.4. *Seja* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *aberto. Um funcional linear contínuo* $u : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *é dito uma distribuição em* Ω. *O espaço das distribuições em* Ω *se denota por* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Quando não houver confução denotaremos* $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'$.

A definição significa que se $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\{\varphi_j\}$ é uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$, então

$$u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2) \qquad \text{(linearidade)}$$

e

$$\varphi_j \to 0 \text{ em } C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow u(\varphi_j) \to 0 = u(0) \text{ (continuidade).}$$

Por vezes é conveniente escrever $\langle u, \phi \rangle$ em vez de $u(\phi)$.

Exemplo 1.2.2. *O funcional definido por $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$, para $a \in \mathbb{R}^n$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, define uma distribuição. De fato, δ_a é linear, pois dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$\langle \delta_a, \phi_1 + \lambda\phi_2 \rangle = \phi_1(a) + \lambda\phi_2(a) = \langle \delta_a, \phi_1 \rangle + \lambda\langle \delta_a, \phi_2 \rangle.$$

Além disso, δ_a é contínua, pois dado uma sequência $\{\varphi_j\}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\varphi_j \to 0$, temos que

$$\langle \delta_a, \varphi_j \rangle = \varphi_j(a) \longrightarrow 0.$$

Esta distribuição é chamada de ***delta de Dirac*** *no ponto a.*

Dizemos que duas distribuições $u, v \in \mathcal{D}'$ são iguais se $\langle u, \phi \rangle = \langle v, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.2.3. *Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos uma distribuição associada a função f denotada por T_f como*

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, primeiro mostremos a boa definição. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $\|\varphi\|_\infty \leq M$ para algum $M > 0$, então

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_{supp(\varphi)} |f(x)||\varphi(x)|\,dx \leq M \int_{supp(\varphi)} |f(x)|\,dx < \infty.$$

Logo, $T_f(\varphi)$ está bem definida. A linearidade de T_f vem diretamente das propriedades de integração. Mostremos a continuidade. Seja $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_j \to 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $supp(\varphi_j) \subset K$ para todo j e $j_0 \in \mathbb{N}$ no qual, se $j \geq j_0$, então $|\varphi_j(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in K$. Assim,

$$|T_f(\varphi_j)| = \left| \int_{supp(\varphi_j)} f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_{K)} |f(x)||\varphi_j(x)|\,dx < \varepsilon \int_K |f(x)|\,dx$$

para todo $j \geq j_0$. Portanto, $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

A partir desse exemplo, inferimos que $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, podemos identificar as funções localmente integráveis como distribuições. À vista da Proposição 1.1.12, qualquer função f em $L^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser vista como distribuição por meio do operador T_f, mais ainda, qualquer função nos subespaços $C(\mathbb{R}^n)$; $C^k(\mathbb{R}^n)$; $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, pode ser visto como distribuição. Vale a pena ressaltar que a recíproca nem sempre é válida. Um contraexemplo é a distribuição delta de Dirac que não define uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.2.3. *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aberto e $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_f = T_g$ se, e somente se, $f = g$ q.t.p. $x \in \Omega$.*

Demonstração. Ver [4], página 11. □

A seguir iremos apresentar algumas propriedades de operações com distribuições. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'$, $\phi \in C_0^\infty$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então valem as propriedades abaixo:

(i) Soma: $\langle u_1 + u_2, \phi \rangle = \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle$;

(ii) Produto por escalar: $\langle \lambda u_1, \phi \rangle \doteq \lambda \langle u_1, \phi \rangle$;

(iii) Produto por função $f \in C_0^\infty$: $\langle f u_1, \phi \rangle = \langle u_1, f\phi \rangle$;

(iv) Derivação: $\langle \partial_{x_j} u_1, \phi \rangle \doteq -\langle u_1, \partial_{x_j} \phi \rangle$.

As demonstrações de tais propridades podem ser encontradas em [4], página 15.

1.3 Convolução

Nesta seção definiremos o conceito de convolução entre duas funções contínuas e na sequência estenderemos tal conceito para os espaços L^p.

Definição 1.3.1. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções contínuas tais que ao menos uma delas tenha suporte compacto. A **convolução** $f * g$ de f por g é definida por*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

O próximo teorema nos garante uma extenção para convolução de funções em L^p.

Teorema 1.3.1 (Desigualdade de Young). *Se $f \in L^1$ e $g \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, então $f * g \in L^p$ e*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração. Ver [2], página 104. □

Proposição 1.3.2. *Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis. Suponha que as convoluções entre elas estão bem definidas. Então*

(i) $*$ é bilinear e simétrica;

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$;

(iii) Se $w \in \mathbb{R}^n$ então $\tau_w(f * g) = (\tau_w f) * g$, no qual $\tau_w f(x) = f(x - w)$;

(iv) $supp(f * g) \subset \overline{(supp(f) + \ supp(g))}$, no qual

$$supp(f) + \ supp(g) = \{x + y \in \mathbb{R}^n \, : \, x \in supp(f), \, y \in supp(g)\}.$$

Demonstração. (i) A bilinearidade segue diretamente da linearidade da integral. Para a simetria, fazendo a substituição de variável $z = x - y$ na integral da definição, obtemos

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-z)f(z)\,dy \\ &= (g * f)(x).\end{aligned}$$

(ii) Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Pela simetria da convolução e depois pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}(f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x-y)h(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y-z)f(z)\,dz\right) h(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-z-y)h(y)\,dy\right) f(z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (g * h)(x-z)f(z)\,dz \\ &= (g * h) * f(x).\end{aligned}$$

Novamente pela simetria da convolução, concluímos que

$$(f * g) * h = (g * h) * f = f * (g * h).$$

(iii) Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\begin{aligned}\tau_w(f * g)(x) &= (f * g)(x-w) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-w-y)g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_w f(x-y)g(y)\,dy \\ &= (\tau_w f) * g(x).\end{aligned}$$

(iv) Primeiro notemos que $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ é um conjunto fechado. Seja $x \in \mathbb{R}^n$, basta mostrarmos que se $x \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ então $x \notin \operatorname{supp}(f * g)$, ou seja, $(f * g)(x) = 0$. De fato,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{(x - \operatorname{supp}(f)) \cap \operatorname{supp}(g)} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Se $x \notin \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ então $(x - \text{supp}(f)) \cap \text{ supp}(g) = \emptyset$, assim $(f * g)(x) = 0$. Portanto, $(f*g)(x) = 0$ q.t.p. em $(\text{supp}(f)+ \text{ supp}(g))^c$. Em particular, $(f*g)(x) = 0$ q.t.p. no interior de $(\text{supp}(f) + \text{ supp}(g))^c$. Donde concluímos que

$$(f * g) \subset \overline{\{\text{supp}(f) + \text{ supp}(g)\}}.$$

□

Definição 1.3.2. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos a convolução $u * \varphi$ a função definida por*

$$(u * \varphi)(x) = \langle u, \varphi(x - \cdot\,)\rangle.$$

Exemplo 1.3.1. $\delta_a * \varphi(x) := \varphi(x - a)$.

O próximo resultado mostra como a operação de derivação se comporta com relação a convolução.

Teorema 1.3.3. *Sejam $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz*

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g,$$

para qualquer multi-índice $|\alpha| \leq k$.

Demonstração. Ver [4], página 62. □

1.4 Transformada de Fourier e Espaço de Schwartz

Nesta seção iremos definir o operador Transformada de Fourier a apresentar algumas propriedades importantes da mesma. Além disso iremos apresentar o Espaço de Schwartz, que é o espaço mais conveniente para trabalhar com as transformadas de Fourier.

Definição 1.4.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a* ***transformada de Fourier*** *de f por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx.$$

Observe que a transformada de Fourier está bem definida, pois

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty,$$

já que $f \in L^1$.

Seguem algumas propriedades importantes da transformada de Fourier:

(i) $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$ (linearidade);

(ii) $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_{L^1}$ e $\widehat{f}$ é contínua;

(iii) $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$;

(iv) $(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$;

(v) Se $g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x)$ então $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi)$;

(vi) $(\widehat{\partial_{x_k} f})(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$;

(vii) $(\partial_{\xi_k} \widehat{f})(\xi) = (\widehat{-2\pi i x_k} f)(\xi)$;

(viii) se ρ é uma transformação ortogonal, então $(\widehat{f(\rho\,\cdot\,)})(\xi) = \widehat{f}(\rho\xi)$.

Teorema 1.4.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}$ é contínua e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Demonstração. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon > 0$, se $\{\xi_j\}$ é uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^n$ tal que $\xi_j \to \xi$, então pela continuidade da exponencial, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|e^{-2\pi i x \xi_j} - e^{-2\pi i x \xi}| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_1}$$

para todo $j \geq j_0$. Assim,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi_j) - \widehat{f}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{-2\pi i x \xi_j} - e^{-2\pi i x \xi}|\, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{f}$ é contínua. Para mostrarmos a estimativa

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1,$$

basta observar que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. O resultado segue da definição da norma em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. □

Exemplo 1.4.1. *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$. Temos que $f \in L^1(\mathbb{R})$, pois*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{[-1,1]} 1\, dx = 2 < \infty.$$

A transformada de Fourier de f é dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x \xi}\, dx = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_{m-1}^{m} |\widehat{f}(\xi)|\, d\xi \geq \int_{m-1}^{m} \frac{|\sin(2\pi\xi)|}{\pi m}\, d\xi = \frac{2}{\pi^2 m}.$$

Assim, como $|\widehat{f}|$ é uma função par, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|\, d\xi &= 2\int_{0}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|\, d\xi \\ &= 2\sum_{m=1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} |\widehat{f}(\xi)|\, d\xi \\ &\geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

A série da última linha acima é uma série harmônica que é divergente. Portanto, $\widehat{f}$ não pertence a $L^1(\mathbb{R})$.

O exemplo acima mostra que o espaço L^1 não é invariante pela transformada de Fourier, ou seja, se $f \in L^1$, nem sempre é verdade que $\hat{f} \in L^1$. Apresentaremos a seguir um subespaço de L^1 que é invariante pela transformada de Fourier.

Definição 1.4.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Dados $\beta \in \mathbb{N}^n$ multi-índice e $\alpha \in \mathbb{N}$, definimos*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ (1+|x|^2)^{\alpha} |\partial^{\beta} f(x)| \right\}. \tag{1.5}$$

Definimos o ***espaço de Schwartz*** *$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty, \forall \alpha, \beta \right\}.$$

Observação 1.4.1. *$C_0^{\infty} \subsetneq \mathcal{S}$. Basta considerar $\varphi(x) = e^{\frac{-|x|^2}{2}} \in \mathcal{S}$ mas $\varphi \notin C_0^{\infty}$.*

Exemplo 1.4.2. *Se $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, então $\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$. De fato, Podemos escrever φ como*

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{{x_j}^2}{2}} = \prod_{j=1}^{n} f(x_j),$$

no qual $f(x_j) = e^{-\frac{x_j^2}{2}}$. Note que f é solução da E.D.O.

$$f'(x_j) + x_j f(x_j) = 0,$$

com a condição inicial $f(0) = 1$. Tomando a transformada de Fourier na E.D.O. e usando as propriedades (vi) e (vii) da transformada de Fourier, segue que

$$2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi_j) - \frac{\widehat{f'}(\xi_j)}{2\pi i} = 0.$$

Para a condição inicial, segue da Proposição 1.1.5 que

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x_j)\, dx_j = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_j^2}{2}}\, dx_j = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

Resolvendo esta última E.D.O. com a condição inicial acima, obtemos

$$\widehat{f}(\xi_j) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi_j^2}{2}}.$$

Finalmente, como

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j),$$

então

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{f}(\xi_j) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

Teorema 1.4.2 (**Plancherel**)**.** *A transformada de de Fourier é uma isometria em $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, $||\hat{f}||_2 = ||f||_2$. Além disso,*

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$$

e

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi,$$

no qual os limites são dados em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [9], página 20. □

Teorema 1.4.3. *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx$$

e

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} dx.$$

*A segunda identidade é a **inversa** da transformada de Fourier.*

Demonstração. A primeira igualdade segue diretamente do Teorema de Fubini e o lado direito da segunda igualdade está bem definida já que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\varepsilon > 0$ e $\psi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Se $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então temos que

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) = \varepsilon^{-n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\psi(\varepsilon^{-1}\xi).$$

Portanto segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\psi_\varepsilon(\varepsilon)\widehat{f}(\xi)\,d\xi$$

está bem definida. Além disso, novamente pelo Teorema de Fubini e seguido de uma mudança de variável concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\psi_\varepsilon(\varepsilon)\widehat{f}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(z)f(x+\varepsilon z)\,dz.$$

Assim, obtemos a segunda identidade do teorema em virtude do Teorema da Convergência Dominada nesta última, quando $\varepsilon \to 0$. □

Corolário 1.4.4. *Se $f \in \mathcal{S}$ então $\hat{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi)$.*

O corolário acima também nos mostra que a transformada de Fourier tem período quatro.

Definição 1.4.3. *Um funcional linear e contínuo em $\mathcal{S}$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas será denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}'$.*

Proposição 1.4.5. *O conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Dado $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, considere $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $a(x) = 1$ para x em uma vizinhança da origem. Definindo $\phi_\varepsilon \doteq \phi(x)a(\varepsilon x)$ para $\varepsilon > 0$, temos que $\phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\varepsilon > 0$. Além disso, $\phi_\varepsilon(x)a \to \phi(x)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0$. □

Observemos que todo elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ define por restrição a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição em $\mathbb{R}^n$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $S(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado como subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dito isso, podemos definir a transformada de Fourier no sentido distribucional.

Definição 1.4.4. *Se $u \in \mathcal{S}'$, então a transformada de Fourier $\widehat{u}$ de u é definida por*

$$< \widehat{u}, \phi > = < u, \widehat{\phi} >,$$

para $\phi \in \mathcal{S}$.

Observação 1.4.2. *Vale ressaltar que as propriedades (vi) e (vii) da transformada de Fourier para funções também são válidas para distribuições.*

Exemplo 1.4.3. *Seja $u = \delta$. Para $\phi \in \mathcal{S}$, temos que*

$$< \widehat{\delta}, \phi > = < \delta, \widehat{\phi} > = \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\,dx = < 1, \phi > .$$

Portanto, $\widehat{\delta} = 1$.

Capítulo 2

Tópicos em Análise Harmônica

Neste capítulo iremos apresentar alguns conceitos e resultados em Análise Harmônica como: aproximação da identidade, o operador maximal de Hardy-Littlewood, o operador potencial de Riesz e operadores integrais singulares, em especial os operadores transformada de Hilbert e transformada de Riesz.

2.1 Aproximações da Identidade

Uma aproximação da identidade é uma família de funções suaves com certas propriedades especiais usada para aproximar funções em certos espaços funcionais, via convolução. Nesta seção iremos introduzi-la e demonstrar algumas propriedades importantes.

Definição 2.1.1. *Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1$ e para cada $t > 0$ defina $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x)$. A sequência $\{\phi_t\}_{t>0}$ é denominada* ***aproximação da identidade****.*

Proposição 2.1.1. *Se ϕ_t é uma aproximação da identidade, então $\phi_t \to \delta_0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $\langle \phi_t, \varphi\rangle \to \langle \delta_0, \varphi\rangle$ quando $t \to 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por meio de mudança de variáveis temos que

$$\langle \phi_t, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\phi(t^{-1}x)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)\varphi(tz)\, dz$$

e a afirmação segue pelo Teorema da Convergência Dominada. De fato, como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então φ é contínua e vale

$$\lim_{t\to 0} \phi(z)\varphi(tz) = \phi(z)\varphi(0),$$

para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Além disso,

$$|\phi(z)\varphi(tz)| \leq |\phi(z)|\|\varphi\|_\infty.$$

Sendo assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, obtendo

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(z)\varphi(tz)\,dz=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(z)\varphi(0)\,dz=\varphi(0)=\langle\delta_0,\varphi\rangle.$$

□

Observação 2.1.1. *Para qualquer $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\delta*\varphi=\varphi$. Assim, pela proposição anterior, para todo $x\in\mathbb{R}^n$ vale o limite pontual*

$$\lim_{t\to 0}\phi_t*\varphi(x)=\varphi(x).$$

O próximo resultado segue na mesma direção da proposição anterior e mostra que a convergência também se verifica na norma $\|\cdot\|_p$, para $1\le p<\infty$.

Proposição 2.1.2. *Sejam $\{\phi_t\}_{t>0}$ uma aproximação da identidade e $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1\le p<\infty$. Então,*

$$\lim_{t\to 0}\|\phi_t*f-f\|_p=0,$$

isto é, $\phi_t*f\to f$ na norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $t\to 0$.

Demonstração. Por meio da Proposição 1.2.2, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta=\delta(f)>0$ tal que se $|h|<\delta$, então

$$\|f(\,\cdot+h)-f\|_p<\frac{\varepsilon}{2\|\phi\|_1}.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\,dx=1$, para t suficientemente pequeno temos que

$$\int_{|z|\ge\frac{\varepsilon}{t}}\phi(z)\,dz<\frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}\phi_t*f(x)-f(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}\phi_t(x-y)f(y)\,dy-\int_{\mathbb{R}^n}\phi(z)f(x)\,dz\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(z)\left[f(x-tz)-f(x)\right]\,dz,\end{aligned}$$

utilizando a Desigualdade de Mikowski para Integrais e as duas estimativas acima, obtemos para t suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned}
\|\phi_t * f - f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t * f(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) \left[f(x - tz) - f(x) \right] \, dz \right|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)|^p |f(x - tz) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - tz) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)| \, \|f(\,\cdot - tz) - f\|_p \, dz \\
&= \int_{|z| \geq \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \, \|f(\,\cdot - tz) - f\|_p \, dz + \int_{|z| < \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \, \|f(\,\cdot - tz) - f\|_p \, dz \\
&< 2\|f\|_p \int_{|z| \geq \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \, dz + \frac{\varepsilon}{2\|\phi\|_1} \int_{|z| < \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \, dz \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que conclui o resultado. $\square$

2.2 Operador Maximal de Hardy-Littlewood

Um operador muito importante em Análise Harmônica é o chamado operador maximal de Hardy-Littlewood. Nesta seção iremos introduzi-lo e apresentar alguns resultados importantes desse operador. Além disso, vamos definir operadores sublineares do tipo forte e fraco, e ainda mostrar alguns resultados importantes envolvendo a limitação desses operadores nos espaços de Lebesgue.

Definição 2.2.1. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Definimos a **função maximal de Hardy-Littlewood** por*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy, \tag{2.1}$$

*no qual o supremo é tomado sobre todas as bolas de raio $r > 0$ e centradas em $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, chamamos de **operador maximal de Hardy-Littlewood***

$$M : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ mensuráveis}\}$$

no qual Mf é dado por (2.1).

Definição 2.2.2. *Sejam V um espaço vetorial e (X, μ) um espaço de medida. Um operador $T : V \to \{g : (X, \mu) \to \mathbb{C} \text{ mensuráveis}\}$, no qual V é um espaço vetorial, é dito **sublinear** se satisfaz:*

(i) $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$;

(ii) $T(\lambda f)(x)| = |\lambda||Tf(x)|$,

para quaisquer $f_1, f_2, f \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $x \in X$.

Exemplo 2.2.1. *O operador maximal de Hardy-Littlewood é sublinear. De fato, sejam* $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Então para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, *temos*

$$\begin{aligned} M(f+g)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) + g(y)| \, dy \\ &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| + |g(y)| \, dy \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy + \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y)| \, dy \\ &= Mf(x) + Mg(x). \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} M(\lambda f)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |\lambda f(y)| \, dy \\ &= |\lambda| \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy \\ &= |\lambda| Mf(x). \end{aligned}$$

Definição 2.2.3. *Sejam* (X, μ) *e* (Y, ν) *espaços com medida,* $1 \leq p, q \leq \infty$ *e* $T : L^p(X, \mu) \to \{g : Y \to \mathbb{C}$ *mensuráveis*$\}$ *um operador sublinear. Então:*

(i) Dizemos que T *é* ***forte*** (p, q) *se* T *é limitado de* $L^p(X, \mu)$ *em* $L^q(X, \mu)$, *isto é, se existe* $C_{p,q} > 0$ *tal que*

$$||Tf||_q \leq C_{p,q} ||f||_p$$

para toda $f \in L^p(X, \mu)$;

(ii) Para $p, q < \infty$, *dizemos que* T *é* ***fraco*** (p, q) *se existe* $C_{p,q} > 0$ *tal que*

$$\mu \{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{C_{p,q} ||f||_p}{\lambda} \right)^q$$

para toda $f \in L^p(X, \mu)$ *e* $\lambda > 0$. *Se* $p = q = \infty$, *então dizemos que* T *é fraco* (∞, ∞) *se for forte* (∞, ∞).

Proposição 2.2.1. *Sejam* (X, μ) *e* (Y, ν) *espaços com medida e* $T : L^p(X, \mu) \to \{g : Y \to \mathbb{C}$ *mensuráveis*$\}$ *um operador sublinear. Se* T *é forte* (p, q) *então* T *é fraco* (p, q).

Demonstração. Seja $S = \{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\} = \{x \in X : \frac{|Tf(x)|}{\lambda} > 1\}$. Como T é forte (p,q), obtemos

$$\mu(S) = \int_S 1\,dx = \int_S 1^q\,dx \leq \int_X \frac{|Tf(x)|^q}{\lambda^q}\,dx = \frac{1}{\lambda^q}||Tf||_q^q \leq \frac{1}{\lambda^q}C^q||f||_p^q = \left(\frac{C||f||_p}{\lambda}\right)^q.$$

□

Lema 2.2.2. *Se $f = f_1 + f_2$, $\lambda > 0$ e T é um operador sublinear, então*

$$\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\} \subset \{x \in X : |Tf_1(x)| > \lambda/2\} \cup \{x \in X : |Tf_2(x)| > \lambda/2\}.$$

Demonstração. Seja $x \in X$ tal que

$$\lambda < |Tf(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|.$$

Suponha que

$$|Tf_1(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \text{ e } |Tf_2(x)| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Então,

$$\lambda < |Tf(x)| \leq \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

o que é uma contradição. Logo,

$$|Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2} \text{ ou } |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}.$$

□

Teorema 2.2.3. *Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $||Mf||_\infty \leq ||f||_\infty$.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} |Mf(x)| &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy \\ &\leq ||f||_\infty \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} 1\,dy \\ &= ||f||_\infty. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.4. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \neq 0$, então $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Primeiro afirmamos que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \neq 0$, então existe uma bola $B(0,r) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_{B(0,r)} |f(x)|\,dx \geq \varepsilon > 0.$$

De fato, como
$$\int_{B(0,r)} |f(x)|\, dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0 \text{ q.t.p. em } B(0,r),$$
então se $\int_{B(0,r)} |f(x)|\, dx = 0$ fosse válido para todo $r > 0$, teríamos que $f(x) = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $f = 0$. Agora seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > r$, no qual $r > 0$ é tal que
$$\int_{B(0,r)} |f(x)|\, dx \geq \varepsilon > 0.$$
Temos que $B(0,r) \subset B(x, 2|x|)$. Assim,
$$\begin{aligned}
|Mf(x)| = \sup_{\delta>0} \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} |f(y)|\, dy &\geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)|\, dy \\
&\geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(0,r)} |f(y)|\, dy \\
&\geq \frac{\varepsilon}{|B(x,2|x|)|} \\
&\geq \frac{c(n)}{|x|^n}\, \varepsilon.
\end{aligned}$$
Como
$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \frac{1}{|x|^n}\, dx = |S^{n-1}| \int_r^\infty \frac{1}{s^n} s^{n-1}\, ds = |S^{n-1}| \int_r^\infty \frac{1}{s}\, ds = \infty,$$
então
$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} |Mf(x)|\, dx \geq c(n)\, \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \frac{1}{|x|^n}\, dx = \infty.$$
Portanto, $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 2.2.5. *Sejam (X,μ) um espaço de medida, $1 < p, q < \infty$ e $\{T_t\}_{t>0}$ uma família de operadores em $L^p(X,\mu)$. Defina*
$$T^* f(x) \doteq \sup_{t>0} |T_t f(x)|.$$
Se T^* é do tipo fraco (p,q) então o conjunto
$$A = \{f \in L^p(X,\mu) \,:\, \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \text{ q.t.p.}\}$$
*é fechado em $L^p(X,\mu)$. O operador T^* é chamado de **operador maximal** associado à família $\{T_t\}$.*

Demonstração. Seja $\{f_n\} \subset A$ uma sequência de funções que converge para f em $L^p(X,\mu)$. Mostremos que $f \in A$. Como $f_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que
$$\lim_{t\to t_0} T_t f_n(x) = f_n(x) \text{ q.t.p.}$$

Analisemos a medida do seguinte conjunto

$$E_\lambda = \{x \in X \,:\, \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\}.$$

Temos ainda que

$$|T_t f(x) - f(x)| \leq |T_t(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| + |T_t f_n(x) - f_n(x)|,$$

e portanto,

$$E_\lambda \subset \{x \in X \,:\, \limsup_{t\to t_0} |T_t(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| > \lambda/2\} \cup \{x \in X \,:\, \limsup_{t\to t_0} |T_t f_n(x) - f_n(x)| > \lambda/2\}.$$

Entretanto,

$$\mu\left(\{x \in X \,:\, \limsup_{t\to t_0} |T_t f_n(x) - f_n(x)| > \lambda/2\}\right) = 0,$$

pois, por hipótese, $f_n \in A$, ou seja, $\lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x)$ em quase todo ponto. Assim, como $T^* f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$ e T^* é fraco (p, q), segue que

$$\begin{aligned}
\mu(E_\lambda) &\leq \mu(\{x \in X \,:\, \limsup_{t\to t_0} |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| > \lambda\}) \\
&\leq \mu(\{x \in X \,:\, |T^*(f - f_n)(x)| > \lambda/2\}) + \mu(\{x \in X \,:\, |(f - f_n)(x)| > \lambda/2\}) \\
&\leq \left(\frac{2C}{\lambda}\|f - f_n\|_p\right)^q + \left(\frac{2}{\lambda}\|f - f_n\|_p\right)^p,
\end{aligned}$$

Por hipótese, $f_n \to f$ em L^p, segue que $\mu(E_\lambda) \to 0$ com λ uniforme. Para concluir a demonstração, consideremos $\lambda = 1/k$ com $k \in \mathbb{N}$ e notemos que

$$E_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{\frac{1}{k}} \Rightarrow \mu(E_0) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(E_{\frac{1}{k}}\right) = 0.$$

Assim,

$$\mu\left(\{x \in X \,:\, \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > 0\}\right) = 0,$$

o que implica que $\lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x)$ q.t.p. x. Portanto A é fechado. □

Lema 2.2.6 (**Recobrimento de Vitali**). *Seja $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ uma coleção finita de bolas (abertas ou fechadas) em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma subcoleção $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}\}$ de bolas disjuntas em $\mathcal{B}$ tal que*

$$\left|\bigcup_{i=1}^m B_i\right| \leq 3^n \sum_{j=1}^k \left|B_{i_j}\right|.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $|B_1| \geq |B_2| \geq \cdots \geq |B_m|$. Vamos construir a subfamília disjunta. Primeiro escolhemos $B_{i_1} = B_1$ e desconsideramos todas as bolas que interceptam B_1, formando a subcoleção $\mathcal{B}^1$. Em seguida, escolhemos B_{i_2} com

$$i_2 = \min\left\{i > i_1 = 1 : \, B_i \in \mathcal{B}^1\right\}$$

e desconsideremos todas as bolas de $\mathcal{B}^1$ que interceptam B_{i_2}, formando a subcoleção $\mathcal{B}^2$. Assim continuamos o processo, escolhendo sempre B_{i_j} com

$$i_j = \min\left\{i > i_{j-1} : \, B_i \in \mathcal{B}^{j-1}\right\}.$$

Como a coleção $\mathcal{B}$ é finita, por construção o processo é finito. Seja k o número de etapas necessários para o processo. Para cada i_j, defina $B^*_{i_j} = B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$, no qual $x_{i_j} > 0$ é o centro da bola B_{i_j} e $r_{i_j} > 0$ é o seu raio.

Afirmação: $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} B^*_{i_j}$.

De fato, se para algum i_j a bola B_i não intercepta B_{i_j}, então $i = i_\ell$ para algum $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ e então $B_i \subset B^*_{i_\ell}$. Caso contrário, temos que $B_i \subset B_{i^*_j}$.

Usando a afirmação acima, concluímos que

$$\left|\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right| \leq \left|\bigcup_{j=1}^{k} B^*_{i_j}\right| \leq \sum_{j=1}^{k} \left|B^*_{i_j}\right| = \sum_{j=1}^{k} 3^n \left|B_{i_j}\right| = 3^n \sum_{j=1}^{k} \left|B_{i_j}\right|$$

□

Proposição 2.2.7. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então Mf é contínua em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Considere $g : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, r) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

Sejam $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ e $\{(x_j, r_j)\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de pontos tal que

$$\lim_{j\to\infty} (x_j, r_j) = (x, r).$$

Uma vez que $\chi_{B(x_j, r_j)} \to \chi_{B(x,r)}$, quando $j \to \infty$, pontualmente (logo, $|B(x_j, r_j)| \to |B(x, r)|$ quando $j \to \infty$) e $\chi_{B(x_j, r_j)}$ é limitada na norma L^1 para todo $j = 1, 2, \ldots$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|B(x_j, r_j)|} \int_{B(x_j,r_j)} |f(y)| \, dy = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy.$$

Logo, g é contínua. Afirmamos que $Mf(x) = \sup_{r>0} g(x,r)$ também é contínua. De fato, sejam $x \in R^n$ e $\{x_j\}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ tal que $x_j \to x$. Para todo $r > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned}|g(x_j,r)| \leq |g(x_j,r) - g(x,r)| + |g(x,r)| &\Rightarrow |g(x_j,r)| \leq \sup_{r>0} |g(x_j,r) - g(x,r)| + \sup_{r>0} |g(x,r)| \\ &\Rightarrow \sup_{r>0} |g(x_j,r)| \leq \sup_{r>0} |g(x_j,r) - g(x,r)| + \sup_{r>0} |g(x,r)| \\ &\Rightarrow \sup_{r>0} |g(x_j,r)| - \sup_{r>0} |g(x,r)| \leq \sup_{r>0} |g(x_j,r) - g(x,r)|.\end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\sup_{r>0} |g(x,r)| - \sup_{r>0} |g(x_j,r)| \leq \sup_{r>0} |g(x_j,r) - g(x,r)|,$$

e então

$$\left|\sup_{r>0} |g(x,r)| - \sup_{r>0} |g(x_j,r)|\right| \leq \sup_{r>0} |g(x_j,r) - g(x,r)|.$$

Como g é contínua, para cada $r > 0$ fixo temos que

$$\lim_{j\to\infty} |g(x_j,r) - g(x,r)| = 0,$$

o que implica que o supremo desse termo também tende a zero e portanto

$$|Mf(x) - Mf(x_j)| = \left|\sup_{r>0} |g(x,r)| - \sup_{r>0} |g(x_j,r)|\right| \longrightarrow 0,$$

quando $j \to \infty$, o que conclui a demonstração da proposição.

□

Teorema 2.2.8. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$. Então*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \, Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{3^n}{\lambda} ||f||_1,$$

ou seja, M é fraco $(1,1)$.

Demonstração. Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e para $t > 0$ considere

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > t\}.$$

Notemos que E_t é aberto, pois $E_t = (Mf)^{-1}(]t, \infty[)$ e a Proposição 2.2.7 nos diz que Mf é contínua. Para cada $x \in E_t$, existe uma bola B_x centrada em x tal que

$$\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)| \, dy > t.$$

Logo,

$$|B_x| < \frac{1}{t}\int_{B_x} |f(y)|\,dy.$$

Seja $K \subset E_t$ compacto. Como $K \subset \bigcup_{x\in E_t} B_x$, então pela compacidade existem $x_1, \ldots, x_m \in E_t$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{x_j}.$$

Pelo Lema de Recobrimento de Vitali 2.2.6, existem bolas $B_{x_{j_1}}, \ldots, B_{x_{j_k}}$ disjuntas tais que

$$\begin{aligned}
|K| &\leq \left|\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right| \\
&\leq 3^n \sum_{\ell=1}^{k} |B_{x_{j_\ell}}| \\
&\leq \frac{3^n}{t}\sum_{\ell=1}^{k}\int_{B_{x_{j_\ell}}} |f(y)|\,dy \\
&= \frac{3^n}{t}\int_{\bigcup_{\ell=1}^{k} B_{x_{j_\ell}}} |f(y)|\,dy \\
&\leq \frac{3^n}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy \\
&= \frac{3^n}{t}||f||_1.
\end{aligned}$$

Como

$$|E_t| = \sup\{|K| : K \subset E_t \text{ compacto}\}$$

já que a medida de Lebesgue é regular, então

$$|E_t| \leq \frac{3^n}{t}||f||_1.$$

Portanto, M é fraco $(1,1)$. □

Definição 2.2.4. *Sejam (X,μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função mensurável Definimos a sua função distribuição ω_f em $[0,\infty)$ como*

$$\omega_f(t) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > t\}\right).$$

Proposição 2.2.9. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mensurável. Suponhamos $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ diferenciável, $\varphi' \geq 0$ (crescente) e tal que $\varphi(0) = 0$. Então*

$$\int_X \varphi(|f(x)|)\,dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\omega_f(t)\,dt.$$

Demonstração. Sejam f e φ como no enunciado. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\varphi(|f(x)|) = \int_0^{|f(x)|} \varphi'(t)\, dt = \int_0^{\infty} \varphi'(t)\chi_{\{x\in X:|f(x)|>t\}}(x)\, dt.$$

Agora, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_X \varphi(|f(x)|)\, dx &= \int_0^{\infty} \varphi'(t) \left(\int_X \chi_{\{x\in X:|f(x)|>t\}}(x)\, dx\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \varphi'(t) \left(\int_{\{x\in X:|f(x)|>t\}} 1\, dx\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \varphi'(t)\omega_f(t)\, dt.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.10 (Interpolação de Marcinkiewiscz). *Dados (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida com $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ e $T : L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) \to \{g : Y \to \mathbb{C}$ mensuráveis$\}$ um operador sublinear. Se T é do tipo fraco (p_0,p_0) e fraco (p_1,p_1) então T é do tipo forte (p,p) para todo $p_0 < p < p_1$.*

Antes de iniciarmos a demonstração, definiremos alguns conceitos. Dizemos que $f \in L^{p_0} + L^{p_1}$ se $f = f_0 + f_1$ para algum $f_0 \in L^{p_0}$ e $f_1 \in L^{p_1}$. Além disso, uma norma de f nesse espaço pode ser definida por

$$||f|| = \inf_{f=f_0+f_1} \{||f_0||_{p_0} + ||f_1||_{p_1}\}.$$

Demonstração do Teorema de Interpolação de Marcinkiewiscz. Sejam $t > 0$ e $f \in L^p$ para $p_0 < p < p_1$. Considere

$$f_0(x) = f(x)\chi_{X_0}$$

e

$$f_1(x) = f(x)\chi_{X_1},$$

no qual $X_0 = \{x \in X : |f(x)| > ct\}$, $X_1 = \{x \in X : |f(x)| \le ct\}$ e $c > 0$ é uma constante a ser determinada. Claramente $f = f_1 + f_2$.
Afirmação 1: $f_0 \in L^{p_0}$.
De fato, como

$$\{x \in X : |f(x)| > ct\} = \left\{x \in X : \frac{|f(x)|}{ct} > 1\right\},$$

e $p > p_0$, então

$$\begin{aligned}\int_X |f_0(x)|^{p_0}\, dx &= \int_{X_0} |f(x)|^{p_0}\, 1^{p-p_0}\, dx \\ &\le \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\frac{|f(x)|}{ct}\right)^{p-p_0} dx \\ &= (ct)^{p_0-p} \int_X |f(x)|^p\, dx < \infty.\end{aligned}$$

Afirmação 2: $f_1 \in L^{p_1}$.
De fato, como

$$\{x \in X : |f(x)| \leq ct\} = \left\{x \in X : \frac{|f(x)|}{ct} \leq 1\right\},$$

e $p < p_1$, então

$$\begin{aligned}\int_X |f_1(x)|^{p_1}\,dx &= \int_{X_1} |f(x)|^{p_1}\, 1^{p-p_1}\,dx\\ &\leq \int_X |f(x)|^{p_1}\left(\frac{|f(x)|}{ct}\right)^{p-p_1}\,dx\\ &= (ct)^{p_1-p}\int_X |f(x)|^p\,dx < \infty.\end{aligned}$$

Agora pelo Lema 2.2.2, temos que

$$\begin{aligned}\omega_{Tf}(t) &= \mu\{x \in X : |Tf(x)| > t\}\\ &\leq \mu\{x \in X : |Tf_0(x)| > t/2\} + \mu\{x \in X : |Tf_1(x)| > t/2\}\\ &= \omega_{Tf_0}(t/2) + \omega_{Tf_1}(t/2).\end{aligned}$$

Dividamos a demonstração em dois casos.
Caso 1: $p_1 = \infty$.
Por hipótese, T é fraco (∞, ∞), isto é, forte (∞, ∞). Seja $a > 0$ tal que $||Tf||_\infty \leq a||f||_\infty$ para todo $f \in L^\infty$. Considere $c = \dfrac{1}{2a}$. Mostremos que $\omega_{Tf_1}(t/2) = 0$. Segue da definição que

$$|f_1(x)| = |f(x)\chi_{X_1}| \leq ct = \frac{t}{2a}.$$

Assim,

$$||Tf_1||_\infty \leq a||f_1||_\infty \leq a\,\frac{t}{2a} = \frac{t}{2}.$$

Logo,

$$|Tf_1(x)| \leq ||Tf_1||_\infty \leq \frac{t}{2}$$

em quase todo $x \in X$. Portanto,

$$\omega_{Tf_1}(t/2) = \mu\{x \in X : |Tf_1(x)| > t/2\} = 0.$$

Por hipótese, T é fraco (p_0, p_0), ou seja, existe $k > 0$ tal que

$$\omega_{Tf_0}(t/2) \leq \left(\frac{2k}{t}||f_0||_{p_0}\right)^{p_0}.$$

Finalmente, da Proposição 2.2.9 com $\varphi(t) = t^p$ para $t > 0$ e $\varphi(0) = 0$ (que é crescente e diferenciável) e pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
||Tf||_p^p &\leq p \int_0^\infty t^{p-1} \omega_{Tf_0}(t/2)\, dt \\
&\leq (2k)^{p_0} p \int_0^\infty t^{p-p_0-1} \left(\int_{X_0} |f(x)|^{p_0}\, dx \right) dt \\
&= (2k)^{p_0} p \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} t^{p-p_0-1}\, dt \right) dx \\
&= \frac{(2k)^{p_0} p}{p-p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\frac{|f(x)|}{c} \right)^{p-p_0} dx \\
&= C \int_X |f(x)|^p\, dx \\
&= C||f||_p^p,
\end{aligned}$$

no qual C é uma constante positiva. Portanto T é forte (p, p) para $p_0 < p < \infty$.
Caso 2: $p_1 < \infty$.
Já temos que

$$\omega_{Tf}(t) = \omega_{Tf_0}(t/2) + \omega_{Tf_1}(t/2)\,.$$

Além disso, por hipótese, T é fraco (p_0, p_0) e fraco (p_1, p_1). Sendo assim, valem

$$\omega_{Tf_0}(t/2) \leq \left(\frac{2c_0}{t} ||f_0||_{p_0} \right)^{p_0}$$

e

$$\omega_{Tf_1}(t/2) \leq \left(\frac{2c_1}{t} ||f_1||_{p_1} \right)^{p_1}$$

nos quais c_0 e c_1 são constantes positivas. Novamente pela Proposição 2.2.9 e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
||Tf||_p^p &= \int_X |Tf(x)|^p\, dx \\
&\leq p\int_0^\infty t^{p-1}\omega_{Tf_0}\left(t/2\right)\, dt + p\int_0^\infty t^{p-1}\omega_{Tf_1}\left(t/2\right)\, dt \\
&\leq (2c_0)^{p_0} p\int_0^\infty t^{p-p_0-1}\left(\int_{X_0} |f(x)|^{p_0}\, dx\right) dt \\
&\quad + (2c_1)^{p_1} p\int_0^\infty t^{p-p_1-1}\left(\int_{X_1} |f(x)|^{p_1}\, dx\right) dt \\
&\leq (2c_0)^{p_0} p\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} t^{p-p_0-1}\, dt\right) dx \\
&\quad + (2c_1)^{p_1} p\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\int_{\frac{|f(x)|}{c}}^\infty t^{p-p_1-1}\, dt\right) dx \\
&\leq \frac{(2c_0)^{p_0} p}{p-p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\frac{|f(x)|}{c}\right)^{p-p_0} dx \\
&\quad + \frac{(2c_1)^{p_1} p}{p_1-p}\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\frac{|f(x)|}{c}\right)^{p-p_1} dx \\
&= \frac{(2c_0)^{p_0} p}{c^{p-p_0}(p-p_0)}\int_X |f(x)|^p\, dx + \frac{(2c_0)^{p_0} p}{c^{p-p_1}(p_1-p)}\int_X |f(x)|^p\, dx \\
&= C||f||_p^p,
\end{aligned}$$

no qual C é uma constante positiva. Portanto T é forte (p,p) para $p_0 < p < p_1$. □

Proposição 2.2.11. *Seja $1 < p \leq \infty$. Então o operador maximal de Hardy-Littlewood é forte (p,p), isto é, existe $C_p = C > 0$ tal que*

$$\|Mf\|_p \leq C\|f\|_p,$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.3 temos que M é forte (∞,∞). Temos também, pelo Teorema 2.2.8, que M é fraco $(1,1)$. Logo, usando o Teorema de Interpolação de Marcinkiewiscz (Teorema 2.2.10), segue que M é forte (p,p), para $1 < p \leq \infty$. □

Proposição 2.2.12. *Se φ é uma função positiva, radial e decrescente (com respeito ao raio) e integrável, então*

$$\sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| \leq ||\varphi||_1 Mf(x).$$

Na demonstração da proposição acima vamos denotar $\varphi(r) = \varphi(x)$ no qual $r = |x|$. Tal abuso de notação é conveniente já que a função φ é radial.

Demonstração da Proposição 2.2.12. Seja φ uma função como no enunciado. Precisamos mostrar que

$$\varphi_t * f(x) \leq \|\varphi\|_1 Mf(x),$$

para todo $t > 0$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, com $f \geq 0$. Como a desigualdade acima é invariante por translação (com respeito a f) e invariante por dilatação (com respeito a φ), então é suficiente mostrar que

$$\varphi * f(0) \leq \|\varphi\|_1 Mf(0). \tag{2.2}$$

Se $Mf(0) = \infty$ então a desigualdade (2.2) é válida. Suponhamos $Mf(0) < \infty$. Definamos $\Phi(r) \doteq \int_{S^{n-1}} f(rx')\, dx'$ e $\Psi(r) \doteq \int_{B(0,r)} f(x)\, dx$, então usando coordenadas polares obtemos

$$\Psi(r) = \int_0^r \int_{S^{n-1}} t^{n-1} f(tx')\, dx' d_t = \int_0^r t^{n-1}\Phi(t)\, dt.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
f * \varphi(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx \\
&= \int_0^\infty \Phi(r)\varphi(r) r^{n-1}\, dr \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\lim_{N\to\infty}\int_t^N \Phi(r) r^{n-1}\varphi(r)\, dr\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left[\lim_{N\to\infty}\left([\Psi(r)\varphi(r)]_t^N - \int_t^N \Psi(r)\partial_r\varphi(r)\, dr\right)\right].
\end{aligned}$$

A última igualdade é consequência direta da integração por partes. Observe que o termo $[\Psi(r)\varphi(r)]_t^N$ tende a zero quando $t \to 0$ e $N \to \infty$. De fato, como φ é integrável e decrescente com respeito ao raio, então

$$\int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \varphi(x)\, dx \geq \varphi(r)\int_{\frac{r}{2}<|x|<r} 1\, dx = C(n)\varphi(r) r^n.$$

Logo,

$$\varphi(r) \leq C(n)^{-1}\|\varphi\|_1 r^{-n} \to 0,$$

e $\varphi(r) \to 0$ quando $r \to \infty$. Além disso, temos que

$$\Psi(r) = \int_{B(0,r)} f(x)\, dx = |B(0,r)|\frac{1}{|B(0,r)|} r^n \int_{B(0,r)} f(x)\, dx \leq |B(0,1)| r^n Mf(0),$$

e portanto $\Psi(r) \to 0$ quando $r \to 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\varphi * f(0) = -\int_0^\infty \Psi(r)\,\partial_r\varphi(r)\,dr &\leq |B(0,1)|Mf(0)\int_0^\infty r^n\partial_r(-\varphi(r))\,dr\\ &= n|B(0,1)|Mf(0)\int_0^\infty r^{n-1}\varphi(r)\,dr\\ &= Mf(0)|S^{n-1}|\int_0^\infty r^{n-1}\varphi(r)\,dr\\ &= Mf(0)\|\varphi\|_1.\end{aligned}$$

Assim, provamos (2.2) e portanto a proposição. □

2.3 Decomposição de Calderón-Zygmund

Nosso objetivo nesta seção será apresentar o Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund, ferramenta importante para o estudo da limitação de operadores integrais singulares nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Em $\mathbb{R}^n$ definimos um cubo unitário, aberto à direita, como sendo o conjunto $[0,1)^n$. Seja $\mathcal{Q}_0$ a coleção de cubos em $\mathbb{R}^n$ que são congruentes ao cubo $[0,1)^n$ e nos quais suas vértices estão na rede $\mathbb{Z}^n$. Se dilatarmos essa família de cubos em um fator 2^{-k}, obtemos a coleção $\mathcal{Q}_k$, para $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $\mathcal{Q}_k$ é a família de cubos, abertos à direita, nos quais seus vértices são pontos adjacentes à rede $\left(2^{-k}\mathbb{Z}\right)^n$. Os cubos em $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{Q}_k$ são chamados de **cubos diádicos**. Dessa construção, seguem diretamente algumas propriedades:

(i) Dado $x \in \mathbb{R}^n$, em cada família $\mathcal{Q}_k$ existe um único cubo que contém x;

(ii) Dados dois cubos diádicos, ou eles são disjuntos, ou um está contido no outro;

(iii) Um cubo diádico em $\mathcal{Q}_k$ está contido em um único cubo da família $\mathcal{Q}_j$, $j < k$, e contém 2^n cubos diádicos da família $\mathcal{Q}_{k+1}$.

Definição 2.3.1. *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos a **esperança condicional** de f com relação a família de cubos diádicos $\mathcal{Q}_k$ por*

$$E_kf(x) \doteq \sum_{Q\in\mathcal{Q}_k}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx\right)\chi_Q(x).$$

Observação 2.3.1. *Note que a soma da expressão de $E_kf(x)$ está bem definida uma vez que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe apenas um cubo diádico da família $\mathcal{Q}_k$ que o contém.*

Proposição 2.3.1. *Se $\Omega = \displaystyle\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} Q_{k,\ell}$, no qual cada $Q_{k,\ell}$ é um cubo diádico da família $\mathcal{Q}_k$, e $f \in L^1(\Omega)$ então*

$$\int_\Omega E_kf(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Demonstração. Primeiro, como $\Omega = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} Q_{k,\ell}$, então

$$\chi_\Omega(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \chi_{Q_{k,\ell}}(x).$$

Deste modo, como os cubos são disjuntos, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega E_k f(x)\, dx &= \int_{\bigcup Q_{k,\ell}} E_k f(x)\, dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{Q_{k,\ell}} E_k f(x)\, dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} E_k f(x) \chi_{Q_{k,\ell}}(x)\, dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q_{k,\ell}|} \int_{Q_{k,\ell}} f(y)\, dy \right) \chi_{Q_{k,\ell}}(x)\, dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{|Q_{k,\ell}|} \int_{Q_{k,\ell}} f(y)\, dy \right) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_{k,\ell}}(x)\, dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{Q_{k,\ell}} f(y)\, dy \\
&= \int_\Omega f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.2. *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\lim_{k \to -\infty} E_k f(x) = 0.$$

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ existe um único cubo diádico $Q_{k,\ell_0} \in \mathcal{Q}_k$ tal que $x \in Q_{k,\ell_0}$. Assim,

$$E_k f(x) = \frac{1}{|Q_{k,\ell_0}|} \int_{Q_{k,\ell_0}} f(x)\, dx \leq 2^{kn} \|f\|_1 \longrightarrow 0,$$

quando $k \to -\infty$. □

Definição 2.3.2. *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos a* ***função maximal diádica*** *por*

$$M_d f(x) \doteq \sup_{k \in \mathbb{Z}} |E_k f(x)|.$$

Proposição 2.3.3. *Valem as afirmações:*

(i) O operador $M_d f$ é do tipo fraco $(1,1)$;

(ii) Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x)$$

em quase todo ponto.

Demonstração. Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Podemos assumir que $f \geq 0$. De fato, se f é real, então podemos decompor em parte positiva e parte negativa. Se f é complexo, então decompomos em parte real e imaginária.

Dado $\lambda > 0$, considere para cada $k \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, E_k f(x) > \lambda \text{ e } E_j f(x) \leq \lambda, \text{ se } j < k\},$$

isto é, $x \in \Omega_k$ se $E_k f(x)$ for a primeira esperança condicional de f maior que λ. Defina

$$F_\lambda \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, M_d f(x) > \lambda\}.$$

Desta forma segue que

$$F_\lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k. \tag{2.3}$$

De fato, diretamente da definição temos que $\Omega_k \subset F_\lambda$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, donde segue que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k \subset F_\lambda.$$

Por outro lado, se $x \in F_\lambda$ então da definição de supremo existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $E_{k_0} f(x) > \lambda$. Como $\lim\limits_{k\to-\infty} E_k f(x) = 0$ (pelo Lema 2.3.2), existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_1 < k_2 \leq k_0$ tal que

$$E_{k_2} f(x) > \lambda \text{ e } E_j f(x) \leq \lambda, \forall j < k_2.$$

Assim, temos que $F_\lambda \subset \Omega_{k_2}$, o que conclui a igualdade (2.3).

Notemos que, pela definição dos conjuntos Ω_k, temos:

(i) $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ são conjuntos disjuntos;

(ii) Ω_k pode ser escrito como uma união de cubos diádicos da família $\mathcal{Q}_k$.

De fato, para a primeira afirmação, sejam $k, k' \in \mathbb{Z}$. Suponha $k < k'$. Então para $x \in \Omega_k$ temos que

$$E_j f(x) \leq \lambda,$$

para todo $j < k$ e, em particular, para $j = k'$. Logo, $x \notin \Omega_{k'}$ e então os conjuntos Ω_k são disjuntos. Para a segunda afirmação, seja $x \in \Omega_k$. Existe um único cubo $Q_x \in \mathcal{Q}_k$ tal que $x \in Q_x$. Logo,

$$\Omega_k \subset \bigcup_{x\in\Omega_k} Q_x.$$

Mostremos que vale a igualdade. Sejam $x \in \Omega_k$ e $y \in Q_x$. Pela definição da esperança condicional, como $Q_x \in \mathcal{Q}_k$, temos que

$$E_k f(y) = \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} f(z)\, dz = E_k f(x) > \lambda.$$

Além disso, para $j < k$, pela definição dos cubos diádicos, existe um único $Q_x^j \in \mathcal{Q}_j$ tal que $x \in Q_x^j \supset Q_x$. Temos que y também pertence unicamente ao cubo Q_x^j em relação à família $\mathcal{Q}_j$. Deste modo, como $x \in \Omega_k$, obtemos

$$E_j f(y) = \frac{1}{|Q_x^j|} \int_{Q_x^j} f(z)\, dz = E_j f(x) \le \lambda.$$

Portanto, $Q_x \subset \Omega_k$ para todo $x \in \Omega_k$ e concluimos a segunda afirmação. Vale a pena observar que muitos dos cubos da união descrita acima na verdade se repetem e que na realidade obtemos uma união enumerável de cubos diádicos distintos da família $\mathcal{Q}_k$.

Assim, das afirmações obtemos

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| = |F_\lambda| &= \sum_k |\Omega_k| \\ &\le \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} E_k f(x)\, dx \\ &\le \frac{1}{\lambda} \|f\|_1, \end{aligned}$$

o que conclui a primeira afirmação da proposição.

Agora vamos demonstrar a segunda afirmação da proposição. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então pelo Teorema 2.2.5 o limite do item (ii) da proposição é válido. Para completar a demonstração, notemos que se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então $f\chi_Q \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $Q \in \mathcal{Q}_0$. Logo, o limite do item (ii) vale q.t.p. em Q e portanto vale q.t.p. em $\mathbb{R}^n$.

□

Por fim, obtemos o resultado conhecido como Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund.

Teorema 2.3.4 (Decomposição de Calderón-Zygmund). *Seja $\lambda > 0$. Se $f \ge 0$ é integrável, então existe uma família de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) $f(x) \le \lambda$ *para quase todo* $x \notin \bigcup_j Q_j$,

(ii) $\left|\bigcup_j Q_j\right| \le \frac{1}{\lambda}||f||_1$,

(iii) $\lambda < \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} f(x)\,dx \leq 2^n\lambda$.

Demonstração. Dado $\lambda > 0$, considere os conjuntos F_λ e Ω_K como na demonstração da Proposição 2.3.3. Conforme visto, $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ é uma família enumerável de cubos diádicos e desta forma obtemos a sequência $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ exigida pelo teorema.

Da Proposição 2.3.3 item (i) e da igualdade (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right| &= |\{x\in\mathbb{R}^n \,:\, M_d f(x) > \lambda\}| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1,\end{aligned}$$

donde segue a parte (ii) do teorema.

Se $x \notin \displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ então $x \notin F_\lambda$ e da igualdade (2.3) temos que $x \notin \Omega_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e portanto $E_k f(x) \leq \lambda$. Da Proposição 2.3.3 item (ii) segue que

$$f(x) \leq \lambda$$

em quase todo ponto, o que demonstra a parte (i) do teorema.

Por fim, seja $x \in Q_j \in \Omega_{k_0}$ para algum $k_0 \in \mathbb{Z}$. Diretamente da definição do conjunto Ω_{k_0} temos que

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx = E_{k_0} f(x) > \lambda,$$

donde segue a primeira desigualdade do item (iii) do teorema. Para cada $j\in\mathbb{N}$, considere $\tilde{Q}_j$ o cubo concêntrico a Q_j cujo lado é duas vezes maior. Note que como $\tilde{Q}_j$ contém Q_j, então ele pertence (ou é comparável) a um cubo de uma família Ω_k com $k < k_0$. Logo, pela definição de Ω_{k_0} temos que a média de f no cubo $\tilde{Q}_j$ é no máximo λ. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx &\leq \frac{|\tilde{Q}_j|}{|Q_j|}\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j} f(x)\,dx \\ &= 2^n\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j} f(x)\,dx \\ &< 2^n\lambda,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Observação 2.3.2. *Podemos reescrever as consequências do teorema acima da seguinte forma. Dado $\lambda > 0$, definimos*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \notin \bigcup Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx, & se\ x \in Q_j \end{cases}.$$

Denotemos $f(x) = g(x) + (f - g)(x) = g(x) + b(x)$ *no qual* $b(x) = \sum b_j(x)$ *e cada* b_j *é dado por*

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x)\, dx \right) \chi_{Q_j}(x).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_j} b_j(x)\, dx &= \int_{Q_j} f(x)\, dx - \frac{1}{|Q_j|} \left(\int_{Q_j} f(x)\, dx \right) \int_{Q_j} 1\, dx \\
&= \int_{Q_j} f(x)\, dx - \frac{1}{|Q_j|} \left(\int_{Q_j} f(x)\, dx \right) |Q_j| \\
&= \int_{Q_j} f(x)\, dx - \int_{Q_j} f(x)\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Além disso, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$*. De fato,*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\, dx &= \int_{(\bigcup Q_j)^c} |f(x)|^2\, dx + \sum_j \int_{Q_j} |g(x)|^2\, dx \\
&\leq \lambda \int_{(\bigcup Q_j)^c} |f(x)|\, dx + \sum_j \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \right)^2 |Q_j| \\
&\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx + \sum_j \left(\int_{Q_j} |f(x)|\, dx \right) \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \right) \\
&\leq \lambda \|f\|_1 + \sum_j 2^n \lambda \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \\
&= \lambda \|f\|_1 + 2^n \lambda \int_{\bigcup Q_j} |f(x)|\, dx \\
&\leq \lambda \|f\|_1 + 2^n \lambda \|f\|_1 \\
&= (1 + 2^n) \lambda \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Observação 2.3.3. *Sejam* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*,* $f \geq 0$ *e* b *como na observação anterior. Temos* *que* $\sum_j b_j \to b$ *em* $L^2(\mathbb{R})$. *De fato, como os cubos* Q_j *são disjuntos, temos que*

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{m} b_j - b\right\|_2^2 &= \left\|\sum_{j=m+1}^{\infty} b_j\right\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} b_j(x)\right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=m+1}^{\infty} |b_j(x)|^2\, dx.\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *então existe* $M > 0$ *tal que* $|f(x)| \leq M$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$. *Do item (iii) da decomposição de Calderón-Zygmund, obtemos*

$$\left| f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\, dx \right| \leq M + 2\lambda = N > 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=m+1}^{\infty} |b_j(x)|^2\, dx &\leq N^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=m+1}^{\infty} \chi_{Q_j}(x)\, dx \\ &= N^2 \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\bigcup_{j=m+1}^{\infty} Q_j}(x)\, dx \\ &= N^2 \left| \bigcup_{j=m+1}^{\infty} Q_j \right| \\ &= N^2 \left| \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} Q_j \right) \right| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $m \to \infty$ *e então* $\sum_j b_j \to b$ *em* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.4 Transformada de Hilbert

Inicialmente vamos motivar a definição da Transformada de Hilbert. Dado $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que $u(x,t) = P_t * f(x)$ é solução de

$$\begin{cases} \Delta_{x,t} u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{2.4}$$

no qual P_t é o núcleo de Poisson dado por

$$P_t(x) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{2.5}$$

com $\widehat{P}_t(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$. De fato, tomando a transformada de Fourier com respeito a x em (2.4) obtemos

$$\begin{cases} \partial_t^2\widehat{u} - (2\pi|\xi|)^2\widehat{u} = 0, \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi). \end{cases}$$

O problema de valor inicial acima tem solução dada por

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-2\pi|\xi|t}\widehat{f}(\xi).$$

Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $e^{-2\pi|\xi|t}$ tem decaimento rápido em $|\xi|$ se $t > 0$, então $\widehat{u}(\,\cdot\,,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para $t > 0$ e podemos aplicar a transformada de Fourier inversa, obtendo

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}e^{-2\pi|\xi|t}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi|\,\cdot\,|t}\right) * f(x) \\ &= P_t * f(x), \end{aligned}$$

no qual $\mathcal{F}^{-1}$ é a transformada de Fourier inversa e P_t é tal que $\widehat{P}_t(\xi) = e^{-2\pi|\xi|t}$. Para mostrarmos a representação de P_t, usaremos as seguintes identidades:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iyx}e^{-\pi\delta|x|^2}\,dx = \delta^{-\frac{n}{2}}e^{-\pi|y|^2/\delta} \tag{2.6}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\gamma^2}{4u}}\,du = e^{-\gamma}, \tag{2.7}$$

para $\gamma > 0$. A identidade (2.6) segue usando o mesmo raciocínio do Exemplo 1.4.2. Mostremos então a identidade (2.7). Primeiro, pelo Teorema dos Resíduos para integral de função de uma variável complexa, obtemos

$$\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\gamma x}}{1+x^2}\,dx = e^{-\gamma}.$$

Além disso, por um cálculo simples, também temos que

$$\int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du = \frac{1}{1+x^2}.$$

Assim, pelo Teorema de Fubini e aplicando (2.6) para $n = 1$, $\delta = u/\pi$ e $y = -\gamma/(2\pi)$, temos

$$\begin{aligned} e^{-\gamma} &= \pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x}\left(\int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)u}\,du\right)dx \\ &= \pi^{-1}\int_0^{\infty} e^{-u}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x}e^{-ux^2}\,dx\right)du \\ &= \pi^{-1}\int_0^{\infty} e^{-u}\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma^2}{4u}}\,du \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\gamma^2}{4u}}\,du, \end{aligned}$$

que é a identidade (2.7).

Agora estamos aptos para calcular a representação de P_t. Primeiro, aplicando as identidade (2.7) com $\gamma = 2\pi|\xi|t$, o Teorema de Fubini e depois a identidade (2.6) com $\delta = \pi t^2/u$, obtemos

$$\begin{aligned} P_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}e^{-2\pi|\xi|t}\,d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}\left(\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{\frac{-\pi^2|\xi|^2t^2}{u}}\,du\right)d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x}e^{\frac{-\pi^2|\xi|^2t^2}{u}}\,d\xi\right)du \\ &= \frac{t^{-n}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-u}e^{-\frac{|x|^2u}{t^2}}u^{\frac{n-1}{2}}\,du \\ &= \frac{t^{-n}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{|x|^2+t^2}{t^2}\right)u}u^{\frac{n-1}{2}}\,du. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $v = \left(\dfrac{|x|^2+t^2}{t^2}\right)u$ no último termo da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} P_t(x) &= \frac{t^{-n}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-v}\left(\frac{|x|^2+t^2}{t^2}\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} v^{\frac{n-1}{2}}\frac{t^2}{|x|^2+t^2}\,dv \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-v}v^{\frac{n-1}{2}}\,dv \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \end{aligned}$$

que é (2.5).

Para $n = 1$ podemos escrever $u(x,t) = u(z)$ com $z = x + it$ da forma

$$u(z) = \int_0^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi iz\xi}\,d\xi + \int_{-\infty}^{0}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\xi}\,d\xi.$$

De fato, usando a transformada de Fourier inversa,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi,t)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{P}_t(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi \\
&= \int_0^{\infty} e^{-2\pi t\xi}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi t\xi}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi \\
&= \int_0^{\infty} e^{2\pi i(x+it)\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi i(x-it)\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi iz\xi}\,d\xi + \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\xi}\,d\xi.
\end{aligned}$$

Se definirmos

$$iv(z) = \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi iz\xi}\,d\xi - \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\xi}\,d\xi$$

temos que v é harmônica em $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, ou seja, $\Delta_{x,t}v = 0$. Além disso, se f tem valores reais então u e v tem valores reais e como

$$\partial_x u = \partial_t v \text{ e } \partial_t u = -\partial_x v,$$

segue que $u+iv$ é analítica em $\mathbb{C}^+$ $(Im(z)>0)$. Logo, v é conjugada harmônica de u. Seguem dois lemas envolvendo v:

Lema 2.4.1. $v(z) = \int_{\mathbb{R}} -isgn(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi.$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
v(z) &= -i\int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i(x+it)\xi}\,d\xi + i\int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i(x-it)\xi}\,d\xi \\
&= \int_0^{\infty} -i\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}e^{-2\pi t\xi}\,d\xi + \int_{-\infty}^0 i\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}e^{-2\pi t|\xi|}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} -isgn(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,d\xi.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.4.2. $v(x,t) = Q_t * f(x)$, *no qual* $\widehat{Q_t}(\xi) = -isgn(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
v(x,t) = Q_t * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} Q_t(x-y) f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{Q_t}(\xi) e^{2\pi i (x-y)\xi}\, d\xi \right) f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y \xi} f(y)\, dy \right) - isgn(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \xi}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} -isgn(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi.
\end{aligned}$$

□

Pela transformada de Fourier inversa temos que

$$\begin{aligned}
Q_t(x) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{Q_t}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} -isgn(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \xi}\, d\xi \\
&= \int_0^{\infty} -ie^{-2\pi t \xi} e^{2\pi i x \xi}\, d\xi + \int_{-\infty}^0 ie^{2\pi t \xi} e^{2\pi i x \xi}\, d\xi \\
&= -i \int_0^{\infty} e^{2\pi (ix-t)\xi}\, d\xi + i \int_{-\infty}^0 e^{2\pi (ix+t)\xi}\, d\xi \\
&= \frac{i}{2\pi(ix-t)} + \frac{i}{2\pi(ix+t)} \\
&= \frac{i}{2\pi} \left[\frac{-t-ix+t-ix}{t^2+x^2} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{x}{t^2+x^2}.
\end{aligned}$$

Denominamos $Q_t(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{x}{t^2+x^2}$ como núcleo conjugado de Poisson. Facilmente vemos que $P_t + iQ_t = \dfrac{i}{\pi z}$ é analítica em $Im(z) > 0$. No entanto, temos que $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$ já que P_t é uma aproximação da identidade.

Observação 2.4.1. *Q_t não é uma aproximação da identidade, pois Q_t não é integrável para $t > 0$.*

Formalmente temos que $\lim_{t\to 0} Q_t(x) = \dfrac{i}{\pi x}$. Assim, definimos a distribuição temperada, chamada valor principal de $1/x$, determinada por $v.p.\left(\dfrac{1}{x}\right)$ por

$$v.p.\left(\frac{1}{x}\right)(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Desta definição, segue que:

Proposição 2.4.3. *$Q_t \to \pi^{-1} v.p. \left(\frac{1}{x}\right)$ quando $t \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Dado $t > 0$ definimos $\psi_t(x) = \frac{1}{x}\chi_{\{|x|>t\}}$ que é limitada e portanto uma distribuição temperada dada por

$$\psi_t(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \psi_t(x)\phi(x)\,dx = \int_{|x|>t} \frac{\phi(x)}{x}\,dx$$

com $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Facilmente vemos que

$$\lim_{t\to 0} \psi_t(\phi) = v.p. \left(\frac{1}{x}\right)(\phi).$$

Para obtermos o resultado é suficiente demonstrarmos que $Q_t - \pi^{-1}\psi_t \to 0$ quando $t \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\pi(Q_t - \pi^{-1}\psi_t)(\phi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{t^2+x^2}\phi(x)\,dx - \int_{|x|>t} \frac{\phi(x)}{x}\,dx \\
&= \int_{|x|<t} \frac{x}{t^2+x^2}\phi(x)\,dx + \int_{|x|>t} \left[\frac{x}{t^2+x^2} - \frac{1}{x}\right]\phi(x)\,dx \\
&= \int_{|y|<1} \frac{y}{1+y^2}\phi(ty)\,dy + \int_{|y|>1} \left[\frac{y}{1+y^2} - \frac{1}{y}\right]\phi(ty)\,dy \\
&= \int_{|y|<1} \frac{y}{1+y^2}\phi(ty)\,dy - \int_{|y|>1} \frac{1}{y(1+y^2)}\phi(ty)\,dy \\
&= \int_{|y|<1} \frac{y}{1+y^2}\phi(ty)\,dy - \int_{|\tilde{y}|<1} \frac{\tilde{y}}{1+\tilde{y}^2}\phi(t/\tilde{y})\,d\tilde{y}
\end{aligned}$$

com $y = x/t$ e $\tilde{y} = 1/y$. Pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{t\to 0}(Q_t - \pi^{-1}\psi_t)(\phi) = \pi^{-1}\int_{|y|<1} \frac{y}{1+y^2}\phi(0)\,dy - \pi^{-1}\int_{|y|<1} \frac{y}{1+y^2}\phi(0)\,dy = 0.$$

□

Observação 2.4.2. *Em virtude da proposição acima segue que*

$$\lim_{t\to 0} Q_t * f(x) = \pi^{-1}\left\langle v.p. \left(\frac{1}{x}\right)(\,\cdot\,), f(x-\,\cdot\,)\right\rangle = \pi^{-1}\lim_{t\to 0}\int_{|y|>t} \frac{f(x-y)}{y}\,dy.$$

Pela continuidade da transformada de Fourier em $\mathbb{R}$ e pelo fato que

$$\widehat{Q_t}(\xi) = -isgn(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}$$

temos que

$$\pi^{-1}\left[v.p. \left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\widehat{}}(\xi) = \lim_{t\to 0}\widehat{Q_t}(\xi) = -isgn(\xi).$$

Definição 2.4.1. *Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definimos a* ***transformada de Hilbert*** *por*

$$Hf(x) = \pi^{-1} \lim_{t \to 0} \int_{|y|>t} \frac{f(x-y)}{y}\, dy.$$

Assim, podemos redefinir a transformada de Hilbert pelas seguintes equivalências:

(i) $Hf = \lim_{t \to 0} Q_t * f$;

(ii) $Hf = \pi^{-1} v.p. \left(\frac{1}{x}\right) * f$;

(iii) $\widehat{Hf}(\xi) = -isgn(\xi)\widehat{f}(\xi)$.

Segue pelo Teorema de Plancharel e da expressão (iii) acima que a transformada de Hilbert está bem definida para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e além disso,

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2; \tag{2.8}$$

$$H(Hf) = -f; \tag{2.9}$$

$$\int Hf \cdot g = -\int f \cdot Hg. \tag{2.10}$$

O próximo teorema nos mostra que a transformada de Hilbert pode ser estendida para funções em $L^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.4.4. *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ seguem as afirmações:*

(i) (Kolmogorov) H é fraco $(1,1)$;

(ii) (M. Riesz) H é forte (p,p) para $1 < p < \infty$.

Demonstração. Sejam $\lambda > 0$ e $f \geq 0$.
(i) Podemos escrever $f = g + b$ como na Observação 2.3.2, nos quais os cubos Q_j são denotados por intervalos I_j. Temos que $Hf = Hg + Hb$, logo

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R} : |Hb(x)| > \lambda/2\}|.$$

Para estimar a primeira parcela da direita, usaremos (2.8) e o item (iii) do Teorema 2.3.4:

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > \lambda/2\}| &\leq \frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} |Hg(x)|^2\, dx \\
&\leq \frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} g(x)^2\, dx \\
&\leq \frac{8}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx \\
&= \frac{8}{\lambda} \left[\int_{(\bigcup_j I_j)^c} f(x)\, dx + \sum_j \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f(y)\, dy \right) \int_{I_j} 1\, dx \right] \\
&= \frac{8}{\lambda} \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Para a segunda parcela temos que

$$
\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R} : |Hb(x)| > \lambda/2\}| &= \left|\left\{x \in \bigcup_j I_j^* : |Hb(x)| > \lambda/2\right\}\right| + \left|\left\{x \in \left(\bigcup_j I_j^*\right)^c : |Hb(x)| > \lambda/2\right\}\right| \\
&\leq \left|\bigcup_j I_j^*\right| + \left|\left\{x \in \left(\bigcup_j I_j^*\right)^c : |Hb(x)| > \lambda/2\right\}\right|,
\end{aligned}
$$

no qual I_j^* é o intervalo de mesmo centro que I_j e com o dobro de tamanho, ou seja, $|I_j^*| = 2|I_j|$. Da construção dos novos intervalos e do item (ii) do Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund temos que

$$
\left|\bigcup_j I_j^*\right| \leq \sum_j |I_j^*| = 2\sum_j |I_j| = 2\left|\bigcup_j I_j\right| \leq \frac{2}{\lambda}\|f\|_1.
$$

Da Observação 2.3.3, temos que $\sum_j b_j \to b$ em $L^2(\mathbb{R})$. Assim, $|Hb(x)| \leq \sum_j |Hb_j(x)|$. De fato, se a soma for finita, então a desigualdade segue diretamente. Caso contrário, como $\sum_j b_j(x) \to b$ em $L^2(\mathbb{R})$, então

$$
\left\|H\left(\sum_{j=1}^n b_j - b\right)\right\|_2 = \left\|\sum_{j=1}^n b_j - b\right\|_2 \longrightarrow 0,
$$

quando $n \to \infty$, logo $H\left(\sum_{j=1}^n b_j\right) \to Hb$ em $L^2(\mathbb{R})$. Portanto, existe uma subsequência $\{n_k\}$ tal que $H\left(\sum_{j=1}^{n_k} b_j\right) \to Hb$ em quase todo ponto. Então,

$$
\begin{aligned}
|Hb(x)| &= \left|\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} Hb_j(x)\right| \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} |Hb_j(x)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} |Hb_j(x)|.
\end{aligned}
$$

Assim, como

$$
\left(\bigcup_j I_j\right)^c = \bigcap_j I_j^c,
$$

temos que

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \left(\bigcup_j I_j^*\right)^c : |Hb(x)| > \lambda/2\right\}\right| &= \int_{\left\{x\in\left(\bigcup_j I_j^*\right)^c : |Hb(x)|>\lambda/2\right\}} 1\, dx \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\int_{\left(\bigcup_j I_j^*\right)^c} |Hb(x)|\, dx \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\sum_j \int_{(I_j^*)^c} |Hb_j(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Para completar a demonstração de (i), basta mostrar que

$$\sum_j \int_{(I_j^*)^c} |Hb_j(x)|\, dx \leq C\|f\|_1.$$

Denotaremos o centro de I_j por c_j. Como $\int b_j = 0$, então pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{(I_j^*)^c} |Hb_j(x)|\, dx &= \int_{(I_j^*)^c} \left|\int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y}\, dy\right| dx \\
&= \int_{(I_j^*)^c} \left|\int_{I_j} b_j(y)\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j}\right) dy\right| dx \\
&\leq \int_{I_j} |b_j(y)| \left(\int_{(I_j^*)^c} \frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|}\, dx\right) dy \\
&\leq \int_{I_j} |b_j(y)| \left(\int_{(I_j^*)^c} \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\, dx\right) dy.
\end{aligned}$$

A última desigualdade vem do fato de que $|y-c_j| \leq |I_j|/2$ e $|x-y| > |x-c_j|/2$. Para a integral de dentro do último termo, sendo r_j o raio do intervalo I_j, temos

$$\begin{aligned}
\int_{(I_j^*)^c} \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\, dx &= \int_{-\infty}^{c_j-2r_j} \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\, dx + \int_{c_j+2r_j}^{\infty} \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\, dx \\
&= |I_j|\left(\frac{1}{2r_j} + \frac{1}{2r_j}\right) \\
&= |I_j|\frac{2}{|I_j|} = 2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_j \int_{(I_j^*)^c} |Hb_j(x)|\,dx &\leq 2\sum_j \int_{I_j} |b_j(x)|\,dx \\
&\leq 2\sum_j \left[\int_{I_j} |f(x)|\,dx + \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |f(y)|\,dy\right)\int_{I_j} 1\,dx\right] \\
&\leq 4\int_{\bigcup I_j} |f(x)|\,dx \\
&\leq 4\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{8}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{2}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{8}{\lambda}\|f\|_1 = \frac{18}{\lambda}\|f\|_1$$

e portanto H é fraco $(1,1)$.

(ii) Já temos que H é fraco $(1,1)$ e forte $(2,2)$. Pelo Teorema de Interpolação 2.2.10 temos que H é forte (p',p') para $1 < p' \leq 2$. Para $p > 2$, aplicando (2.10), o Teorema de Representação de Riesz e a desigualdade de Hölder para $p' < 2$ e $1/p + 1/p' = 1$ (ou seja, $2 < p < \infty$), obtemos

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_p &= \sup_{\|\varphi\|_{p'} \leq 1} \left|\int_{\mathbb{R}} Hf(x)\varphi(x)\,dx\right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{p'} \leq 1} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)H\varphi(x)\,dx\right| \\
&\leq \|f\|_p \sup_{\|\varphi\|_{p'} \leq 1} \|H\varphi\|_{p'} \\
&\leq C\|f\|_p \sup_{\|\varphi\|_{p'} \leq 1} \|\varphi\|_{p'} \\
&= C\|f\|_p,
\end{aligned}$$

e portanto H é forte (p,p) para $1 < p < \infty$. □

Vale ressaltar que (ii) do Teorema 2.4.4 é falso para $p = 1$ e $p = \infty$. De fato, os próximos dois exemplos mostram essa afirmação.

Exemplo 2.4.1. *Seja* $f = \chi_{[0,1]}$*. Temos que*

$$Hf(x) = \pi^{-1}\log\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

que não é limitada. Portanto H não é forte (∞,∞).

Para o caso $p = 1$ enunciaremos o seguinte resultado:

Lema 2.4.5. *Se* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *então* $H\phi \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \widehat{\phi}(0) = 0$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ então $\widehat{\phi}$ é contínua e

$$\widehat{H\phi}(\xi) = -isgn(\xi)\widehat{\phi}(\xi).$$

Pela hipótese $H\phi \in L^1$, então $\widehat{(H\phi)}$ é contínua. Logo, pela expressão anterior $\widehat{H\phi}$ é contínua na origem se, e somente se, $\widehat{\phi}(0) = 0$.
($\Leftarrow$) Primeiro, notemos que $(1+|x|)^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$, pois

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^2 dx = 2\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^2 dx = 2$$

Note que se ϕ, $x\phi \in L^2(\mathbb{R})$ então $\phi \in L^1(\mathbb{R})$. De fato, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+|x|}{1+|x|}|\phi(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\phi(x)|}{1+|x|}\, dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{|x||\phi(x)|}{1+|x|}\, dx \\
&\leq \|\phi\|_2\|(1+|x|)^{-1}\|_2 + \|x\phi\|_2\|(1+|x|)^{-1}\|_2 \\
&= (\|\phi\|_2 + \|x\phi\|_2)\,\|(1+|x|)^{-1}\|_2 < \infty.
\end{aligned}$$

Seja $I =]-1,1[$ e escreva

$$H\phi = \chi_I H\phi + (1-\chi_I)H\phi.$$

Temos que $\chi_I \in L^2(\mathbb{R})$ e de (2.8), $H\phi \in L^2(\mathbb{R})$ para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Assim, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_I(x)H\phi(x)|\, dx \leq \|\chi_I\|_2\|H\phi\|_2 < \infty,$$

ou seja, $\chi_I H\phi \in L^1(\mathbb{R})$. Temos também que $(1-\chi_I)H\phi \in L^1(\mathbb{R})$. De fato, como por hipótese

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\, dy = \widehat{\phi}(0) = 0,$$

então para $x \in I^c$,

$$\begin{aligned}
H\phi(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\phi(y)}{x-y}\, dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} \left(\frac{\phi(y)}{x-y} - \frac{\phi(y)}{x}\right) dy \\
&= \frac{1}{x}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{y\phi(y)}{x-y}\, dy \\
&= \frac{1}{x}H\psi(x),
\end{aligned}$$

no qual $\psi(y) = y\phi(y)$. Temos que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, pois $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Temos também que

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1-\chi_I(x)}{x}\right|^2 dx = \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2}\, dx = 2\int_{x>1} \frac{1}{x^2}\, dx = 2,$$

ou seja, $(1-\chi_I)x^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$. Assim, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(1-\chi_I(x))H\phi(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left|(1-\chi_I(x))\frac{H\psi(x)}{x}\right| dx \\ &\leq \|(1-\chi_I)x^{-1}\|_2 \|H\psi\|_2 < \infty.\end{aligned}$$

Logo, $(1-\chi_I)H\phi \in L^1(\mathbb{R})$, e como $\chi_I H\phi \in L^1(\mathbb{R})$, concluímos que $H\phi \in L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Exemplo 2.4.2. *Se considerarmos*

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

temos que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *e ainda, como no Exemplo 1.4.2,*

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Como $\widehat{f}(0) = \sqrt{2\pi} \neq 0$, *então pelo Lema 2.4.5,* $Hf \notin L^1(\mathbb{R})$ *e portanto* H *não é forte* $(1,1)$.

Mostremos agora como podemos estender a transformada de Hilbert para funções em L^p para $1 \leq p < \infty$. Para $p = 1$, seja $f \in L^1(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Então existe uma sequência $\{f_j\}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $f_j \to f$ em $L^1(\mathbb{R})$. Temos que $\{f_j\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\mathbb{R})$. Do item (i) do teorema acima,

$$|\{x \in \mathbb{R} : |H(f_j - f_k)(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f_j - f_k\|_1.$$

Logo, $H(f_j - f_k)$ é de Cauchy em medida e então $\{f_j\}$ converge em medida, digamos, $Hf_j \to g$ em medida. Definamos $Hf \doteq g$. Temos que

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R} : |(g - Hf_j)(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R} : |Hf_j(x)| > \lambda/2\}|,$$

no qual a primeira parcela converge a zero em medida. Para a segunda parcela, temos que

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf_j(x)| > \lambda/2\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f_j\|_1 \longrightarrow \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

Portanto,

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

Para $1 < p < \infty$, seja $f \in L^p(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Então existe uma sequência $\{f_j\}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $f_j \to f$ em $L^p(\mathbb{R})$. Temos que $\{f_j\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R})$. Do item (ii) do teorema acima,

$$\|H(f_j - f_k)\|_p \leq C\|f_j - f_k\|_p.$$

Logo, $H(f_j - f_k)$ é de Cauchy em $L^p(\mathbb{R})$ e então $\{f_j\}$ converge em $L^p(\mathbb{R})$, digamos, $Hf_{j_m} \to g$ em $L^p(\mathbb{R})$. Definindo $Hf \doteq g \in L^p(\mathbb{R})$, temos que

$$\|Hf\|_p \leq \|g - Hf_j\|_p + \|Hf_j\|_p \leq \|g - Hf_j\|_p + C\|f_j\|_p.$$

Como $\|g - Hf_j\|_p \to 0$ e $\|f_j\|_p \to \|f\|_p$, concluímos que

$$\|Hf\|_p \leq C\|f\|_p.$$

2.5 Potencial de Riesz

Esta seção está destinada para definir o operador potencial de Riesz, que, de certo modo, define o inverso para uma potência do operador de Laplace no espaço euclidiano. Além disso, vamos enunciar e demonstrar o teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev, que tem como principal resultado a limitação do operador em L^p.

Definição 2.5.1. *Sejam $0 < \alpha < n$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Definimos o **potencial de Riesz** como sendo o operador I_α dado por*

$$I_\alpha f(x) = \gamma(\alpha, n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy,$$

no qual $\gamma(\alpha, n)$ é dada por

$$\gamma(\alpha, n) = \frac{\pi^{\alpha - \frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{2.11}$$

no qual Γ é a função Gama dada pela Definição 1.1.4.

Nosso objetivo agora é encontrar uma representação da transformada de Fourier de $I_\alpha f$, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para isso, enunciaremos um importante resultado preliminar.

Proposição 2.5.1. *Seja $\varphi(x) = |x|^{-\alpha}$ para $0 < \alpha < n$. Então*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \gamma(\alpha, n) \frac{1}{|\xi|^{n-\alpha}}$$

com $\gamma(\alpha, n)$ dado por (2.11).

Demonstração. Podemos separar φ em duas partes:

$$\varphi(x) = |x|^{-\alpha} \chi_{\{|x| \leq 1\}} + |x|^{-\alpha} \chi_{\{|x| > 1\}} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Para φ_1 temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_1(x)| \, dx = \int_{|x| \leq 1} |x|^{-\alpha} \, dx = |S^{n-1}| \int_0^1 r^{n-1-\alpha} \, dr < \infty,$$

pois $\alpha < n$. Para φ_2, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_2(x)|^p \, dx = \int_{|x| > 1} |x|^{-p\alpha} \, dx = |S^{n-1}| \int_1^\infty r^{n-1-p\alpha} \, dr < \infty$$

para $p > n/\alpha$. Assim, temos que $\varphi \in S'(\mathbb{R}^n)$ para $0 < \alpha < n$ e está bem definida pontualmente. Como φ é homogênea de ordem $-\alpha$, pelo Teorema 2.6.3, $\hat{\varphi} = \widehat{(|x|^{-\alpha})}$ é homogênea de ordem $-n + \alpha$. Porém, ainda nada podemos afirmar sobre a representação de $\widehat{\varphi}$. Mas, como no Exemplo 1.4.2, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \delta |x|^2} \widehat{f}(x) \, dx = \delta^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\pi |x|^2}{\delta}} f(x) \, dx,$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Multiplicando os dois lados por $\delta^{\frac{n-\alpha}{2}-1}$, obtemos

$$\delta^{\frac{n-\alpha}{2}-1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\delta|x|^2} \widehat{f}(x)\, dx = \delta^{-\frac{\alpha}{2}-1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}} f(x)\, dx.$$

Integrando os dois lados em relação a δ e usando o Teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \left(\int_0^\infty \delta^{\frac{n-\alpha}{2}-1} e^{-\pi\delta|x|^2}\, d\delta \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_0^\infty \delta^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}\, d\delta \right) dx. \tag{2.12}$$

Para a integral em δ do lado esquerdo da igualdade (2.12), usando a definição da função Gama com a substituição $\tilde{\delta} = \pi|x|^2\delta$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \delta^{\frac{n-\alpha}{2}-1} e^{-\pi\delta|x|^2}\, d\delta &= \left(\pi|x|^2\right)^{-\frac{n-\alpha}{2}} \int_0^\infty \tilde{\delta}^{\frac{n-\alpha}{2}-1} e^{-\tilde{\delta}}\, d\tilde{\delta} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-\alpha}{2}} |x|^{n-\alpha}}.\end{aligned}$$

Logo, o lado esquerdo de (2.12) é igual a

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-\alpha}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\, dx.$$

Para a integral em δ do lado direito de (2.12), fazendo $\tilde{\delta} = \frac{\pi|x|^2}{\delta}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \delta^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}\, d\delta &= \left(\pi|x|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty \tilde{\delta}^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{\tilde{\delta}}\, d\tilde{\delta} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{\alpha}{2}} |x|^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Logo, o lado direito de (2.12) é igual a

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{\alpha}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{1}{|x|^{\alpha}}\, dx.$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{1}{|x|^\alpha}\, dx &= \frac{\pi^{\alpha-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\, dx \\ &= \gamma(\alpha, n) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\, dx\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, a igualdade acima nos diz que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)}(\xi) = \gamma(\alpha, n) \frac{1}{|\xi|^{n-\alpha}}.$$

$\square$

Proposição 2.5.2. *Sejam $0 < \alpha < n$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de $I_\alpha f$ é dada por*

$$\widehat{I_\alpha f}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^\alpha}\widehat{f}(\xi).$$

Demonstração. Da Proposição 2.5.1 temos que

$$\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \gamma(\alpha, n)\frac{1}{|\xi|^{n-\alpha}}.$$

Agora pelo Corolário 1.4.4, obtemos

$$\frac{1}{|x|^\alpha} = \gamma(\alpha, n)\left(\frac{1}{|\xi|^{n-\alpha}}\right)^{\widehat{}}(x).$$

Assim, dado $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pela propriedade (iv) da transformada de Fourier obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{I_\alpha f}(\xi) &= \gamma(\alpha, n)\left[\left(\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\right) * f\right]^{\widehat{}}(\xi) \\
&= \gamma(\alpha, n)\left(\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\right)^{\widehat{}}(\xi)\widehat{f}(\xi) \\
&= \frac{1}{|\xi|^\alpha}\widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

O próximo lema é uma consequência direta do Teorema de Fubini.

Lema 2.5.3. *Sejam $0 < \alpha < n$ e $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) I_\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha f(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\gamma(\alpha, n)\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy\right)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\gamma(\alpha, n)\frac{\varphi(x)}{|y-x|^{n-\alpha}}\,dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) I_\alpha\varphi(y)\,dy.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.5.4. ***(Hardy-Littlewood-Sobolev)*** *Sejam $0 < \alpha < n$, $1 \le p < n/\alpha$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Valem as seguintes afirmações:*

(i) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então $I_\alpha f$ converge absolutamente q.t.p. em x.

(ii) Se $1 < p < \infty$, então existe $C_{p,q}(\alpha, n) > 0$ tal que

$$||I_\alpha f||_q \leq C_{p,q}||f||_p,$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Se $p = 1$, então existe $C(\alpha, n) > 0$ tal que

$$\mu \{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{C(\alpha, n)||f||_1}{\lambda} \right)^q,$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$.

O teorema anterior nos mostra que I_α é um operador forte (p, q) para $1 < p < \infty$ e fraco $(1, q)$.

Demonstração do Teorema 2.5.4. Definamos $K(x) = \dfrac{\gamma(\alpha, n)}{|x|^{n-\alpha}}$. Para $R > 0$, temos que

$$K_1(x) = K(x)\chi_{B(0;R)}(x) \;\text{ e }\; K_2(x) = K(x) - K_1(x).$$

Assim, $K = K_1 + K_2$.

(i) Afirmamos que $K_1 \in L^1$. De fato, usando coordenadas polares temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x)| \, dx = \int_{|x|<R} \frac{\gamma(\alpha, n)}{|x|^{n-\alpha}} \, dx &= |S^{n-1}|\gamma(\alpha, n) \int_0^R \frac{1}{r^{n-\alpha}} r^{n-1} \, dr \\ &= C(\alpha, n)R^\alpha, \end{aligned}$$

já que $0 < \alpha$. Portanto, $K_1 \in L^1$. Agora, usando a desigualdade de Young, obtemos

$$||K_1 * f||_p \leq ||K_1||_1||f||_p < \infty.$$

Além do mais, $K_1 * f$ está bem definida em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Seja agora p' tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Usando coordenadas polares,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_2(x)|^{p'} \, dx = \gamma(\alpha, n)|S^{n-1}| \int_R^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{(n-\alpha)p'}} \, dr = C_2(\alpha, n)R^{n-(n-\alpha)p'},$$

pois

$$\begin{aligned} n - (n - \alpha)p' < 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{p'} < 1 - \frac{\alpha}{n} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p'} < \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{q} > 0. \end{aligned}$$

Agora pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$||K_2 * f||_\infty \leq ||K_2||_{p'} \|f\|_p < (C_2(\alpha, n))^{1/p'} R^{-\alpha} \|f\|_p.$$

Logo, $K_2 * f$ está bem definida em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $I_\alpha f = K * f = K_1 * f + K_2 * f$ está bem definida em quase todo ponto, ou seja $I_\alpha f$ converge absolutamente em quase todo ponto.

(iii) Precisamos mostrar que I_α é um operador fraco $(1, q)$, para $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{\alpha}{n}$ e $0 < \alpha < n$. Pela Proposição 2.2.1 e repetindo as contas feitas em (i), temos

$$\begin{aligned} \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : |K_1 * f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} = \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{2}{\lambda}|K_1 * f(x)| > 1\right\} &\leq \frac{2}{\lambda}||K_1 * f||_1 \\ &\leq \frac{2}{\lambda}||K_1||_1||f||_1 \\ &\leq \frac{C_1(\alpha, n)}{\lambda} R^\alpha ||f||_1. \end{aligned}$$

Além disso, como

$$K_2(x) = \frac{\gamma(\alpha, n)}{|x|^{n-\alpha}} \chi_{|x| \geq R} \leq \gamma(\alpha, n) R^{\alpha - n}$$

e pela desigualdade de Young,

$$||K_2 * f||_\infty \leq ||K_2||_\infty ||f||_1 \leq C_2(\alpha, n) R^{\alpha-n} ||f||_1 = C_2(\alpha, n) R^{-\frac{n}{q}} ||f||_1.$$

Escolhendo

$$R = \left(\frac{2C_2(\alpha, n)||f||_1}{\lambda}\right)^{\frac{q}{n}}$$

temos que

$$|K_2 * f(x)| < \frac{\lambda}{2} \text{ q.t.p. em x } \Rightarrow \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : |K_2 * f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} = 0.$$

Logo, para tal R, usando o Lema 2.2.2, temos

$$\begin{aligned} \mu\left\{x : |K * f(x)| > \lambda\right\} &\leq \mu\left\{x : |K_1 * f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} + \mu\left\{x : |K_2 * f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \\ &\leq \frac{C_1(\alpha, n) R^\alpha}{\lambda} \|f\|_1 \\ &= \frac{C_1(\alpha, n)}{\lambda} ||f||_1 \left(\frac{2C_2(\alpha, n)||f||_1}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha}{n}} \\ &= \left(\frac{C(\alpha, n)||f||_1}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha}{n}+1} \\ &= \left(\frac{C(\alpha, n)||f||_1}{\lambda}\right)^{q}, \end{aligned}$$

pois

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n} \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{\alpha q}{n} = q.$$

Portanto, I_α é fraco $(1, q)$.

(ii) Sejam $R > 0$, K_1 e K_2 como no item (i). Podemos escrever

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K_1(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K_2(y)\, dy.$$

Para a primeira integral, como K_1 é uma função radial, decrescente e integrável, pela Proposição 2.2.12 e usando as contas feitas em (i) temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K_1(y)\, dy \right| &= |K_1 * f(x)| \\ &\leq \gamma(\alpha, n) M f(x) \int_{|y|<R} |y|^{\alpha-n}\, dy \\ &= c R^\alpha M f(x), \end{aligned}$$

no qual $c = \gamma(\alpha, n)|S^{n-1}|$. Para a segunda integral, usamos a desigualdade de Hölder e obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K_2(y)\, dy \right| = \left| \int_{|y|\geq R} f(x-y) \gamma(\alpha, n) |y|^{\alpha-n}\, dy \right| \leq ||f||_p ||K_2||_{p'}.$$

Como no item (i), temos que de fato $K_2 \in L^{p'}$ e ainda

$$||K_2||_{p'}^{p'} \leq \gamma(\alpha, n)|S^{n-1}| R^{n-(n-\alpha)p'} = c R^{-\frac{n}{q} p'}.$$

Assim,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K_2(y)\, dy \right| \leq c R^{-\frac{n}{q}} ||f||_p.$$

Agora considerando

$$R = \left(\frac{||f||_p}{M f(x)} \right)^{\frac{p}{n}}$$

obtemos

$$|I_\alpha f(x)| \leq c [M f(x)]^{\frac{p}{q}} ||f||_p^{1-\frac{p}{q}}.$$

Como a função maximal de Hardy-Littlewood é limitada em L^p (pela Proposição

2.2.11), concluímos que

$$
\begin{aligned}
||I_\alpha f||_q &\leq c||f||_p^{1-\frac{p}{q}}||[Mf]^{\frac{p}{q}}||_q \\
&= c||f||_p^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Mf(x)^{\frac{p}{q}}|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= c||f||_p^{1-\frac{p}{q}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Mf(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} \\
&= c||f||_p^{1-\frac{p}{q}}\left[||Mf||_p\right]^{\frac{p}{q}} \\
&\leq c||f||_p^{1-\frac{p}{q}}\tilde{c}||f||_p^{\frac{p}{q}} \\
&= C||f||_p,
\end{aligned}
$$

no qual C é uma constante positiva.

□

Observação 2.5.1 (Motivação para definir o expoente de Sobolev)**.** *Seja* $u \in L^P(\mathbb{R}^n)$*. Para* $\lambda > 0$*, definamos*

$$u_\lambda(x) \doteq u(\lambda x).$$

Temos que $u_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^n)$*. De fato, para* $y = \lambda x$ *temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u_\lambda(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}|u(\lambda x)|^p\,dx = \lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|(y)|^p\,dy = \lambda^{-n}\|u\|_p^p < \infty.$$

Ainda,

$$\|u_\lambda\|_p = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|u\|_p$$

Notemos que para $\lambda y = z$*, obtemos*

$$
\begin{aligned}
I_\alpha u_\lambda(x) &= \gamma(\alpha,n)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(\lambda y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&= \gamma(\alpha,n)\lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(z)}{\left|x-\frac{z}{\lambda}\right|^{n-\alpha}}\,dz \\
&= \gamma(\alpha,n)\lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(z)}{|\lambda x - z|^{n-\alpha}}\,dz \\
&= \lambda^{-\alpha}I_\alpha u(\lambda x).
\end{aligned}
$$

Além disso, para $\lambda x = y$*,*

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha u_\lambda(x)|^q\,dx &= \lambda^{-\alpha q}\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha u(\lambda x)|^q\,dx \\
&= \lambda^{-\alpha q}\lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha u(y)|^q\,dy \\
&= \left(\lambda^{-\alpha-\frac{n}{q}}\|I_\alpha u\|_q\right)^q,
\end{aligned}
$$

e então,

$$\|I_\alpha u_\lambda\|_q = \lambda^{-\alpha-\frac{n}{q}}\|I_\alpha u\|_q.$$

Do Teorema 2.5.4, temos que

$$\|I_\alpha u_\lambda\|_q \leq C\|u_\lambda\|_p \Longrightarrow \lambda^{-\alpha-\frac{n}{q}}\|I_\alpha u\|_q \leq \lambda^{-\frac{n}{p}}\|u\|_p.$$

A última estimativa vale para todo $\lambda > 0$. Sendo assim, é necessário que os expoentes de λ sejam iguais, isto é,

$$-\alpha - \frac{n}{q} = -\frac{n}{p} \Longleftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Por fim, observemos que como $q > 0$, então $p < n/\alpha$, que é uma das condições do Teorema 2.5.4.

Na introdução desse texto afirmamos que o item (ii) do Teorema 2.5.4 é falso para $p = 1$, ou seja, não é verdade que o operador potencial de Riesz é forte $(1, q)$ para $q = n/(n-\alpha)$. Vejamos a seguir um contraexemplo.

Exemplo 2.5.1. *Seja $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uma aproximação da identidade. Sendo $K(x) = \gamma(n,\alpha)|x|^{\alpha-n}$, temos que*

$$I_\alpha u_\varepsilon(x) = K * u_\varepsilon(x) \longrightarrow K(x),$$

quando $\varepsilon \to 0$. Suponhamos que o resultado (ii) do Teorema 2.5.4 seja válido para $p = 1$. Então,

$$\|I_\alpha u_\varepsilon(x)\|_q \leq C\|u_\varepsilon\|_1 = C,$$

o que implica que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha u_\varepsilon(x)|^q\, dx < \infty.$$

Mas pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |K(x)|^q\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{\varepsilon\to 0} |I_\alpha u_\varepsilon(x)|^q\, dx \\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha u_\varepsilon(x)|^q\, dx < \infty.\end{aligned}$$

Contradição, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x)|^q\, dx = \gamma(n,\alpha)^q \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\right)^q dx = \gamma(n,\alpha)^q \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^n}\, dx = \infty.$$

2.6 Transformada de Riesz

Como visto na Seção 2.4, o operador transformada de Hilbert atua em funções definidas em $\mathbb{R}$. Nesta seção, o principal objetivo é introduzir o operador transformada de Riesz, que é uma generalização da transformada de Hilbert atuando em funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Também iremos apresentar alguns resultados importantes, como a limitação da transformada de Riesz em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$.

Definição 2.6.1. *Dizemos que uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é homogênea de ordem k quando, para todo $t > 0$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, valer*

$$T(\varphi_t) = t^k T(\varphi),$$

no qual

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n}\varphi\left(t^{-1}x\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De modo análogo definimos distribuição homogênea de ordem k em $S'(\mathbb{R}^n)$.

Para $x \neq 0$, denotaremos $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = |x|x'$, no qual $x' \in S^{n-1}$.

Proposição 2.6.1. *Seja Ω uma função definida em S^{n-1}, integrável e de média nula, ou seja,*

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')dx' = 0.$$

Então, para $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$v.p.\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\varphi(y)\, dy$$

define uma distribuição temperada.

Demonstração. Seja $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$v.p.\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\varphi(x)\, dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\varphi(x)\, dx.$$

O segundo termo do lado direito da igualdade pode ser estimado por

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|x|\geq 1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\varphi(x)\, dx\right| &\leq \int_{|x|\geq 1} \frac{|\Omega(x')|}{|x|^n}\frac{(1+|x|^2)^k}{(1+|x|^2)^k}|\varphi(x)|\, dx \\
&\leq \rho_{k,0}(\varphi)\int_{|x|\geq 1} \frac{|\Omega(x')|}{|x|^n(1+|x|^2)^k}\, dx \\
&= \rho_{k,0}(\varphi)||\Omega||_{L^1(S^{n-1})}\int_1^\infty \frac{1}{r(1+r^2)^k}\, dr,
\end{aligned}$$

no qual $\rho_{k,0}(\varphi)$ é uma seminorma de φ em $S(\mathbb{R}^n)$ dada por (1.5). Em particular, para $k = 1$ temos

$$\left|\int_{|x|\geq 1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\varphi(x)\, dx\right| \leq \rho_{1,0}(\varphi)||\Omega||_{L^1(S^{n-1})}.$$

Para a primeira parcela, como a média de Ω é zero em S^{n-1}, temos que

$$\left|\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\, dx\right| = \left(\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\, dx'\right)\int_\varepsilon^1 \frac{1}{r}\, dr = 0,$$

e portanto, podemos escrever

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]\,dx.$$

Segue pela desigualdade do valor médio que

$$\left|\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\varphi(x)\,dx\right| \leq \left|\sup_{|s|\leq 1}\{|\nabla\varphi(s)|\}\right| ||\Omega||_{L^1(S^{n-1})} \leq \|\nabla\varphi\|_\infty \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}.$$

Isso vale para todo $\varepsilon < 1$. Assim, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\varphi(x)\,dx \leq ||\Omega||_{L^1(S^{n-1})}\sum_{|\beta|=1}\rho_{1,\beta}(\varphi).$$

Logo, como $v.p.\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)$ é um funcional linear, segue que esta distribuição é temperada. $\square$

Da posse desta proposição, podemos definir uma classe especial de operadores integrais singulares da forma

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)\,dy, \tag{2.13}$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e Ω como na proposição anterior. De fato, podemos escrever que

$$Tf = v.p.\left(\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\right) * f,$$

o que mostra que (2.13) está bem definida.

Exemplo 2.6.1. $\Omega_j(x') = \dfrac{x_j}{|x|}$ *para* $j = 1, \ldots, n$ *tem média nula. Para mostrar tal propriedade usaremos as coordenadas polares, ou seja,*

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{cases}$$

com $|x| = r \geq 0$, $\theta_1, \ldots, \theta_{n-2} \in [0, \pi[$ *e* $\theta_{n-1} \in [0, 2\pi[$. *Assim, para* $j = 1$ *temos*

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} x_1'\,dx' &= \underbrace{\left(\int_0^\pi \cos\theta_1\sin^{n-2}\theta_1\,d\theta_1\right)}_{0}\left(\int_0^\pi \sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2\right)\ldots\left(\int_0^\pi \sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Para $j = 2$, temos

$$\int_{S^{n-1}} x_2'\, dx' = \left(\int_0^{\pi} \sin^{n-1}\theta_1\, d\theta_1\right) \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \cos\theta_2 \sin^{n-3}\theta_2\, d\theta_2\right)}_{0} \cdots \left(\int_0^{\pi} \sin\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2}\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}\right)$$
$$= 0.$$

Seguindo de maneira análoga, para $j = 1, \ldots, n-2$, temos que

$$\int_{S^{n-1}} x_j'\, dx' = C \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \cos\theta_j \sin^{n-(j+1)}\theta_j\, d\theta_j\right)}_{0} = 0,$$

no qual C é o número resultante da multiplicação das outra integrais. Para $j = n-1$, obtemos

$$\int_{S^{n-1}} x_{n-1}'\, dx' = C \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta_{n-1}\, d\theta_{n-1}\right)}_{0} = 0,$$

Finalmente, para $j = n$, temos

$$\int_{S^{n-1}} x_n'\, dx' = C \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta_{n-1}\, d\theta_{n-1}\right)}_{0} = 0.$$

Portanto, para todo $j = 1, \ldots, n$, Ω_j tem média nula.

Definição 2.6.2. *Definimos as **Transformadas de Riesz** R_j, $j = 1, \ldots, n$, como sendo*

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\, dy,$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, no qual

$$c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{2.14}$$

e Γ é a função Gama dada pela Definição 1.1.4.

Em particular, $\Omega_j(x') = x_j/|x|$ tem média nula e então R_j está bem definida para $j = 1, \ldots, n$.

Observação 2.6.1. *Denotaremos $R = (R_1, \ldots, R_n)$. Quando $R_j f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $j = 1, \ldots, n$, então a norma L^p de Rf é dada por*

$$\|Rf\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_p.$$

Observação 2.6.2. *A transformada de Hilbert é um caso particular da transformada de Riesz. De fato, quando $n = 1$, temos que*

$$R_1 f(x) = c_1 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{y}{|y|^2} f(x-y)\, dy = \pi^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = Hf(x).$$

Proposição 2.6.2. *Seja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\lim_{x \to \infty} R_j f(x) = 0,$$

para todo $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Seja $\Omega_j(x') = c_n x_j/|x|$. Para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever

$$R_j f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<|y|<1} \frac{\Omega_j(y')}{|y|^n} f(x-y)\, dy + \int_{|y|>1} \frac{\Omega_j(y')}{|y|^n} f(x-y)\, dy.$$

Como f tem suporte compacto, podemos supor que o suporte da f está contido em $B(0,R)$, para algum $R > 0$. Para $|x| > R+1$ e $|y| < 1$ temos que

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq R + 1 - |y| \geq R.$$

Logo, $f(x-y) = 0$, para todo $|x| < R+1$ e $|y| < 1$. Então, para $|x|$ suficientemente grande, temos que

$$\int_{\varepsilon<|y|<1} \frac{\Omega_j(y')}{|y|^n} f(x-y)\, dy = 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Assim,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<|y|<1} \frac{\Omega_j(y')}{|y|^n} f(x-y)\, dy = 0.$$

Para $|y| > 1$, fazendo a substituição de variável $z = x - y$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|>1} \frac{\Omega_j(y')}{|y|^n} f(x-y)\, dy \right| &= \left| \int_{|x-z|>1} \frac{\Omega_j(x'-z')}{|x-z|^n} f(z)\, dz \right| \\
&\leq \int_{|z|<R} \frac{|\Omega_j((x-z)')|}{|x-z|^n} |f(z)|\, dz \\
&\leq \|f\|_\infty \frac{1}{(|x|-R)^n} |B(0,R)| \\
&= C \frac{R^n}{(|x|-R)^n},
\end{aligned}$$

no qual o último termo tende a zero quando $|x| \to \infty$, o que conclui a demonstração. □

Teorema 2.6.3. *Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é homogênea de ordem k, então $\widehat{T} \in S'(\mathbb{R}^n)$ é homogênea de ordem $-n-k$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Para $x = ty$,

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi}\varphi_t(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i yt\xi}\varphi(y)\,dy \\ &= \widehat{\varphi}(t\xi) \\ &= \frac{t^{-n}}{t^{-n}}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{t^{-1}}\right) \\ &= t^{-n}\widehat{\varphi}_{t^{-1}}(\xi).\end{aligned}$$

Como T é homogênea de ordem k, então

$$\begin{aligned}\widehat{T}(\varphi_t) = T(\widehat{\varphi}_t) &= T(t^{-n}\widehat{\varphi}_{t^{-1}}) \\ &= t^{-n}T(\widehat{\varphi}_{t^{-1}}) \\ &= t^{-n-k}T(\widehat{\varphi}) \\ &= t^{-n-k}\widehat{T}(\varphi).\end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{T}$ é homogênea de ordem $-n-k$. □

Observe que podemos denotar a transformada de Riesz por

$$R_j f(x) = K_j * f(x),$$

no qual

$$K_j = v.p.\left(\frac{\Omega_j(x)}{|x|^n}\right)$$

com $\Omega_j(x) = c_n\dfrac{x_j}{|x|}$. Como K_j é homogênea de ordem $-n$, então $\widehat{K_j}$ é homogênea de ordem 0. Isso nos leva a questionar qual é a representação de $\widehat{K_j}$. Para responder esta questão precisaremos do seguinte resultado preliminar:

Proposição 2.6.4. $\partial_{x_j}|x|^{1-n} = v.p.\left(\dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)(1-n)$ *em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando integral por partes e o Teorema de Divergência, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}|x|^{1-n}(\varphi) &= -|x|^{1-n}(\partial_{x_j}\varphi) \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{1}{|y|^{n-1}}\partial_{y_j}\varphi(y)\,dy \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|y|>\varepsilon}\partial_{y_j}\left(\frac{1}{|y|^{n-1}}\right)\varphi(y)\,dy - \int_{|y'|=1}\varepsilon^{-n+1}\varphi(\varepsilon y')v_j(y')\varepsilon^n\,dy'\right],\end{aligned}$$

no qual $v_j(y')$ é o vetor normal à superfície $|y'| = 1$ no ponto y'. Pelo Teorema da Convergência Dominada, a segunda integral da última linha tende a zero. Assim,

$$\partial_{x_j}|x|^{1-n}(\varphi) = (1-n)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)\,dy.$$

□

Como consequência do resultado acima, juntamente com a Proposição 2.5.1 obtemos:

Proposição 2.6.5. $\widehat{K_j}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}$.

Demonstração. Das Proposições 2.5.1 e 2.6.4, temos

$$\begin{aligned} v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)^{\widehat{}}(\xi) &= \frac{2\pi i}{1-n}\xi_j(\widehat{|x|^{1-n}})(\xi) \\ &= \frac{2\pi}{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(-i)\frac{\xi_j}{|\xi|} \\ &= \frac{1}{c_n}(-i)\frac{\xi_j}{|\xi|}, \end{aligned}$$

no qual c_n é dado por (2.14). Portanto,

$$\widehat{K_j}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}.$$

□

Proposição 2.6.6. $\widehat{(R_jf)}(\xi) = -i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)$ *para toda* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Como na demonstração da proposição anterior,

$$v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \frac{1}{c_n}(-i)\frac{\xi_j}{|\xi|}.$$

Agora se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então pela Propriedade (iv) da transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \widehat{(R_jf)}(\xi) &= c_n\left[v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right) * f\right]^{\widehat{}}(\xi) \\ &= c_n\left[v.p.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)\right]^{\widehat{}}(\xi)\widehat{f}(\xi) \\ &= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Agora como $\mathcal{S}$ é denso em L^2, segue diretamente do Teorema de Plancherel que o resultado também é válido para L^2. □

Corolário 2.6.7. *Seja $f \in L^2$. Então $R_j f \in L^2$.*

Demonstração. De fato, usando Plancharel duas vezes obtemos

$$||R_j f||_2 = ||\widehat{R_j f}||_2 = \left|\left|\left|\frac{\xi_j}{|\xi|}\right|\widehat{f}\right|\right|_2 \leq ||\widehat{f}||_2 = ||f||_2.$$

□

Corolário 2.6.8. *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} R_j^2 f = -f$.*

Demonstração. Aplicando a transformada de Fourier em $R_j^2 f$ obtemos

$$[\widehat{R_j(R_j f)}](\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{(R_j f)}(\xi) = -\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\widehat{f}(\xi).$$

Como soma das transformadas é a transformada da soma,

$$\left[\widehat{\sum_{j=1}^{n} R_j^2 f}\right](\xi) = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\widehat{f}(\xi) = -\widehat{f}(\xi).$$

Assim, como a transformada de Fourier é isometria em L^2 (por Teorema de Plancherel), obtemos o resultado. □

Observação 2.6.3. *O corolário anterior mostra que $\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = -I$, no qual I é o operador identidade em L^2. Como $\mathcal{S}$ é denso em L^p para $p > 1$, segue que o resultado também é válido para L^p.*

Proposição 2.6.9. *Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\partial_{x_k} R_j u = \partial_{x_j} R_k u$, para todo $i, k = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Pela Propriedade (vi) da transformada de Fourier e pelo Corolário 2.6.8, temos

$$\begin{aligned}
(\widehat{\partial_{x_k} R_j u})(\xi) &= 2\pi i\xi_k\widehat{(R_j u)}(\xi)\\
&= 2\pi i\xi_k\left[-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{u}(\xi)\right]\\
&= 2\pi i\xi_j\left[-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\widehat{u}(\xi)\right]\\
&= 2\pi i\xi_j\widehat{(R_k u)}(\xi)\\
&= (\widehat{\partial_{x_j} R_k u})(\xi).
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa na igualdade acima obtemos o resultado. □

Lema 2.6.10. *Sejam* $1 < \alpha < n$ *e* $u, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} R_j I_\alpha u(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha R_j u(x)\psi(x)\,dx.$$

Demonstração. Pelas Proposições 2.6.5 e 2.5.2 obtemos

$$\begin{aligned}
(\widehat{R_j I_\alpha u})(\xi) &= [\widehat{R_j(I_\alpha u)}](\xi) \\
&= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{(I_\alpha u)}(\xi) \\
&= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}|\xi|^{-\alpha}\widehat{u}(\xi) \\
&= |\xi|^{-\alpha}\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\widehat{u}(\xi) \\
&= |\xi|^{-\alpha}\widehat{(R_j u)}(\xi) \\
&= (\widehat{I_\alpha R_j u})(\xi).
\end{aligned}$$

Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\varphi} = \psi$. Então pela identidade acima temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} R_j I_\alpha u(x)\psi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} R_j I_\alpha u(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{R_j I_\alpha u}(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{I_\alpha R_j u}(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha R_j u(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha R_j u(x)\psi(x)\,dx
\end{aligned}$$

□

O próximo teorema é uma generalização do Teorema 2.4.4.

Teorema 2.6.11 (Calderón-Zygmund). *Seja* $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *satisfazendo:*

(i) $|\widehat{K}(\xi)| \leq A$, *para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\displaystyle\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq B$, *para todo* $y \in \mathbb{R}^n$.

Então o operador T *definido por* $Tf = K * f$ *é forte* (p,p) *para* $1 < p < \infty$ *e fraco* $(1,1)$.

Como resultado direto do teorema acima, temos que a transformada de Riesz é forte (p,p) para $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$. De fato, se $K_j(x) = v.p.\left(\dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}\right)$ com $\Omega_j(x') = c_n \dfrac{x_j}{|x|}$ e c_n dado por (2.14), então $R_j f = K_j * f$. Pela Proposição 2.6.1 e pelo Exemplo 2.6.1, temos que $K_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ainda, pela Proposição 2.6.5 temos que

$$\left|\widehat{K_j}(\xi)\right| = \left|\frac{\xi_j}{|\xi|}\right| \leq 1,$$

ou seja, o item (i) do Teorema 2.6.11 é satisfeita. Além disso, afirmamos que se

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}},$$

então K satisfaz o item (ii) do teorema. Com efeito, seja $|x| \geq 2|y|$. Pela Desigualdade do Valor Médio, temos

$$|K(x-y) - K(x)| \leq |y| \sup_{z \in [x, x-y]} |\nabla K(z)| \leq C|y| \left(\sup_{z \in [x, x-y]} \frac{1}{|z|^{n+1}} \right).$$

Fazendo $z = x - ty$, para $t \in [0,1]$, temos que

$$|z| \geq |x| - t|y| \geq |x| - \frac{t}{2}|x| = \left(1 - \frac{t}{2}\right)|x| \geq \frac{1}{2}|x|,$$

e então,

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C|y| \frac{2^{n+1}}{|x|^{n+1}} = 2^{n+1} C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, dx &\leq 2^{n+1} C |y| \int_{|x| \geq 2|y|} \frac{1}{|x|^{n+1}} \, dx \\
&= 2^{n+1} C |S^{n-1}| |y| \int_{2|y|}^{\infty} \frac{1}{r^2} \, dr \\
&= 2^n C |S^{n-1}|.
\end{aligned}$$

Mostremos então que $K_j(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$ satisfaz

$$|\nabla K_j| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

Para $j \neq k$, temos que

$$\partial_{x_k} K_j(x) = c_n \partial_{x_k} \left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right) = -(n+1) \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \frac{x_k}{|x|^2},$$

e então
$$|\partial_{x_k} K_j(x)| \leq (n+1)\frac{1}{|x|^{n+1}}\left|\frac{x_j x_k}{|x|^2}\right| \leq \frac{n+1}{|x|^{n+1}}.$$
Para $j = k$, temos
$$|\partial_{x_j} K_j(x)| = \left|\frac{1}{|x|^{n+1}} - (n+1)\frac{x_j^2}{|x|^2}\frac{1}{|x|^{n+1}}\right| \leq \frac{n+2}{|x|^{n+1}}.$$
Logo,
$$|\nabla K_j(x)| \leq \frac{n+2}{|x|^{n+1}}$$
e então K_j satisfaz o item (ii) do Teorema 2.6.11. Concluímos então que R_j é forte (p,p) para $1 < p < \infty$ e fraco $(1,1)$.

Demonstremos agora o Teorema de Caldeirón-Zygmund:

Demonstração do Teorema 2.6.11. Vamos assumir que T é fraco $(1,1)$. Pela hipótese (i) e usando Plancharel, temos que T é forte $(2,2)$. De fato,
$$\begin{aligned}\int |Tf(x)|^2\,dx = \int |K * f(x)|^2\,dx &= \int |\widehat{(K * f)}(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \int |\widehat{K}(\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\leq A^2 \int |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi \\ &= A^2 \int |f(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$
Assim, pelo Teorema 2.2.10 (Interpolação de Marcinkiewiscz), T é forte (p,p) para $1 < p \leq 2$. Defina
$$K^*(x) \doteq K(-x).$$
Temos que K^* satisfaz as hipóteses do teorema. De fato, da hipótese (i) para K temos
$$\begin{aligned}\left|\widehat{K^*}(\xi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K(-x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K(y)e^{-2\pi i y(-\xi)}\,dy\right| \\ &= \left|\widehat{K}(-\xi)\right| \leq A,\end{aligned}$$
para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Logo, K^* satisfaz a hipótese (i). Além disso, da hipótese (ii) para K, temos
$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 2|y|} |K^*(x-y) - K^*(x)|\,dx &= \int_{|x|\geq 2|y|} |K(-x+y) - K(-x)|\,dx \\ &= \int_{|z|\geq 2|-y|} |K(z-(-y)) - K(z)|\,dz \leq B,\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Portanto, K^* também satisfaz a hipótese (ii). Assim, novamente aplicando Plancharel e a hipótese (i) para K^*, temos que T^* dada por $T^*f = K^* * f$ é forte (p,p) para $1 < p \leq 2$. Afirmamos que T é forte (p,p) para $2 < p < \infty$. De fato, usando o fato de que T^* é forte (p',p') para $1 < p' \leq 2$, segue pelo Teorema de Fubini e pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\varphi(x)\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K * f(x)\varphi(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy\right)\varphi(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy\right)\varphi(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\varphi(x)\,dx\right)\,dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} K^*(y-x)\varphi(x)\,dx\right)\,dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)K^* * \varphi(y)\,dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)T^*\varphi(y)\,dy\right| \\
&\leq \|f\|_p\|T^*\varphi\|_{p'} \\
&\leq C\|f\|_p\|\varphi\|_{p'},
\end{aligned}$$

nos quais $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, com $2 < p < \infty$ (ou seja, $1 < p' < 2$), e $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, pelo Teorema de Representação de Riesz,

$$\|Tf\|_p = \sup_{\|\varphi\|_{p'}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq C\|f\|_p \sup_{\|\varphi\|_{p'}\leq 1}\|\varphi\|_{p'} = C\|f\|_p,$$

para $2 < p < \infty$. Portanto, T é forte (p,p) para $1 < p < \infty$. Basta provarmos então que T é fraco $(1,1)$.

Sejam $\lambda > 0$ e $f \geq 0$. Podemos escrever $f = g + b$ nos quais g e b são como na Observação 2.3.2. Note que, como $|T|$ é sublinear, então

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Para a primeira parcela, como T é forte $(2,2)$ (pela hipótese (i) + Plancharel) e usando a

Observação 2.3.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &= \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|Tg(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}} 1\,dx \\
&< \frac{4}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^n} |Tg(x)|^2\,dx \\
&\leq \frac{4}{\lambda^2}A^2\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\,dx \\
&\leq \frac{4A^2(1+2^n)}{\lambda}|f\|_1.
\end{aligned}$$

Para a segunda parcela, como $b(x) = \sum_j b_j(x)$, então

$$Tb(x) = \sum_j Tb_j(x).$$

De fato, se a soma for finita então a igualdade é direta. Caso contrário, da Observação 2.3.3, temos que $\sum_j b_j \to b$ em $L^2(\mathbb{R})$. Assim, como T é forte $(2,2)$, obtemos

$$\left\|T\left(\sum_{j=1}^{n} b_j - b\right)\right\|_2 \leq A\left\|\sum_{j=1}^{m} b_j - b\right\|_2 \longrightarrow 0,$$

quando $m \to \infty$, e portanto $T\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) \to Tb$ em $L^2(\mathbb{R})$.

Temos também que

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| = \left|\left\{x \in \left(\bigcup Q_j^*\right)^c : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \bigcup Q_j^* : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|,$$

no qual Q_j^* é o cubo Q_j “engordado” com a aresta de tamanho $\ell_j^* = 2\sqrt{n}\ell_j$, sendo ℓ_j o tamanho da aresta do cubo Q_j. Temos que

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \bigcup Q_j^* : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &\leq \left|\bigcup Q_j^*\right| \\
&\leq \sum |Q_j^*| \\
&= (2\sqrt{n})^n \sum |Q_j| \\
&= (2\sqrt{n})^n \left|\bigcup Q_j\right| \\
&\leq \frac{(2\sqrt{n})^n}{\lambda}\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \left(\bigcup Q_j^*\right)^c : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &= \int_{\left\{x \in \left(\bigcup Q_j^*\right)^c : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}} 1\, dx \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \int_{\left(\bigcup Q_j^*\right)^c} |Tb(x)|\, dx \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{\left(Q_j^*\right)^c} |Tb_j(x)|\, dx.\end{aligned}$$

Se mostrarmos que

$$\int_{\left(Q_j^*\right)^c} |Tb_j(x)|\, dx \leq B \int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx \tag{2.15}$$

terminamos a demonstração. De fato, como

$$\int_{Q_j} |b_j(x)|\, dx \leq \int_{Q_j} |f(x)|\, dx + \frac{1}{|Q_j|}\left(\int_{Q_j} |f(x)|\, dx\right) \int_{Q_j} 1\, dx = 2\int_{Q_j} |f(x)|\, dx,$$

então se (2.15) for válido, teremos

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \left(\bigcup Q_j^*\right)^c : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &\leq \frac{4B}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \\ &= \frac{4B}{\lambda} \int_{\bigcup Q_j} |f(x)|\, dx \\ &\leq \frac{4B}{\lambda} \|f\|_1.\end{aligned}$$

Mostremos então a desigualdade (2.15). Como $\displaystyle\int_{Q_j} b_j(y)\, dy = 0$, temos que

$$Tb_j(x) = K * b_j(x) = \int_{Q_j} K(x-y) b_j(y)\, dy = \int_{Q_j} \left[K(x-y) - K(x-c_j)\right] b_j(y)\, dy,$$

no qual c_j é o centro do cubo Q_j. Pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\left(Q_j^*\right)^c} |Tb_j(x)|\, dx &= \int_{\left(Q_j^*\right)^c} \left|\int_{Q_j} \left[K(x-y) - K(x-c_j)\right] b_j(y)\, dy\right| dx \\ &\leq \int_{Q_j} |b_j(y)| \left(\int_{\left(Q_j^*\right)^c} |K(x-y) - K(x-c_j)|\, dx\right) dy.\end{aligned}$$

Como

$$|x - c_j| > \sqrt{n}\ell_j = 2\frac{\sqrt{n}\ell_j}{2} \geq 2|y - c_j|$$

para $y \in Q_j$, então pela hipótese (ii),

$$\int_{(Q_j^*)^c} |K(x-c_j+c_j-y)-K(x-c_j)|\,dx$$
$$\leq \int_{|x-c_j|\geq 2|y-c_j|} |K(x-c_j-(y-c_j))-K(x-c_j)|\,dx \leq B.$$

Logo,

$$\left|\left\{x \in \left(\bigcup Q_j^*\right)^c : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{4B}{\lambda}\|f\|_1,$$

e portanto,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(4A^2(1+2^n)+(2\sqrt{n})^n+4B\right)\frac{\|f\|_1}{\lambda},$$

ou seja, T é fraco $(1,1)$. $\square$

A seguir vamos apresentar o que é conhecido como **Método das Rotações**, que tem como aplicação mostrar, de outra maneira, que a transformada de Riesz é forte (p,p) para $1<p<\infty$.

Seja T um operador unidimensional limitado de $L^p(\mathbb{R})$ em $L^p(\mathbb{R})$. A partir de T, estamos interessados em definir um operador T_u limitado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $u \in S^{n-1}$. Seja $L_u = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $L_u^\perp$ seu subespaço ortogonal em $\mathbb{R}^n$. Assim, dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe único $x_1 \in \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in L_u^\perp$ tal que $x = x_1 u + \bar{x}$. Definimos

$$T_u f(x) \doteq T(f(\,\cdot\, u+\bar{x}))(x_1) \tag{2.16}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ q.t.p x. Dessa forma por uma mudança de variáveis e o Teorema de Fubini segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |T(f(\,\cdot\, u+\bar{x}))(x_1)|^p\,dx\\ &= \int_{L_u^\perp}\left(\int_{\mathbb{R}} |T(f(\,\cdot\, u+\bar{x}))(x_1)|^p\,dx_1\right)d\bar{x}\\ &\leq C_p^p \int_{L_u^\perp}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(\,\cdot\, u+\bar{x})(x_1)|^p\,dx_1\right)d\bar{x}\\ &= C_p^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx,\end{aligned}$$

e portando T_u é limitado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. A seguir alguns exemplos especiais de operadores da forma T_u.

Exemplo 2.6.2. *A função maximal de Hardy-Littlewood direcional*

$$M_u f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x-tu)|\,dt.$$

Exemplo 2.6.3. *A transformada de Hilbert direcional*

$$H_u f(x) = \pi^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(x-tu)}{t}\, dt.$$

O próximo resultado que iremos mostrar é uma consequência direta da desigualdade de Minkowski para integrais.

Proposição 2.6.12. *Dado um operador unidimensional T limitado em $L^p(\mathbb{R})$ com norma C_p, seja T_u um operador definido como em (2.16). Então para toda $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ com média nula, o operador T_Ω definido por*

$$T_\Omega f(x) \doteq \int_{S^{n-1}} \Omega(u) T_u f(x)\, du$$

é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pela desigualdade de Minkowski para integrais obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\Omega f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{S^{n-1}} |\Omega(u)|\, |T_u f(x)|\, du\right]^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Omega(u)|^p\, |T_u f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} du \\
&= \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} du \\
&\leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}.
\end{aligned}$$

□

Podemos aplicar a proposição anterior para operadores da forma (2.13) quando Ω é uma função ímpar. De fato, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\begin{aligned}
Tf(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\Omega(u)}{r} f(x-ru)\, dr\, du \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{|r|>\varepsilon} \frac{f(x-ru)}{r}\, dr\right) du.
\end{aligned}$$

A última igualdade decorre simplesmente do fato que Ω é ímpar. Além disso temos que

$$\begin{aligned}
Tf(x) =& \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{1>|r|>\varepsilon} \frac{f(x-ru)-f(x)}{r}\, dr\right) du \\
&+ \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\int_{|r|\geq 1} \frac{f(x-ru)}{r}\, dr\right) du,
\end{aligned}$$

já que Ω tem média nula. Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ segue pelo Teorema da Convergência Dominada na expressão acima que

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|r|>\varepsilon} \frac{f(x-ru)}{r}\, dr \right) du.$$

Pelo Exemplo 2.6.3 concluímos que

$$Tf(x) = \frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(u) H_u f(x)\, du.$$

Em vista da expressão acima podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário 2.6.13. *Seja Ω uma função ímpar como na Proposição 2.6.1. Se $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ com média nula então o operador definido em* (2.13) *é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Decorre imediatamente da proposição anterior e do Teorema 2.4.4. □

Como $\Omega_j(x') = \dfrac{x_j}{|x|}$ é uma função ímpar, então segue do corolário anterior que a transformada de Riesz é forte (p,p) para $1 < p < \infty$.

Capítulo 3

Principal Resultado

Nesse capítulo apresentamos a demonstração do resultado principal do artigo [1]. Além disso, versamos sobre um contraexemplo para o caso $n = 1$.

3.1 Demonstração do Teorema 3.1.1

Por um abuso de notação iremos denotar por C como uma constante positiva que depende de n e α, e seu valor pode ser alterado no decorrer das manipulações algébricas.

Teorema 3.1.1. *Sejam $n \geq 2$ e $0 < \alpha < n$. Então existe uma constante $C = C(\alpha, n) > 0$ tal que*

$$\|I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}, \tag{3.1}$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Ru \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Ru \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Afirmamos que é suficiente demonstrarmos que, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe uma constante $C = C(\alpha, n) > 0$ tal que, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} R_j u I_\alpha \varphi(x)\, dx \right| \leq C \|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.2}$$

De fato, para demonstrar (3.1), provaremos as seguintes desigualdades

$$\|I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^{n} \|R_j I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.3}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} \|R_j I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}, \tag{3.4}$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Ru \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Inicialmente vamos demonstrar a estimativa (3.3). Pelo Corolário 2.6.8, desigualdade de Hölder e usando o fato de que o operador R_j é auto-adjunto e limitado em $L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (pelo Teorema 2.6.11), obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha u(x)\varphi(x)\,dx\right| &= \left|-\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha u(x)R_j(R_j\varphi(x))\,dx\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} R_j(I_\alpha u(x))R_j\varphi(x)\,dx\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |R_j(I_\alpha u(x))|\,|R_j\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|R_j(I_\alpha u)\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}\|R_j\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\left(\sum_{j=1}^n \|R_j(I_\alpha u)\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)}\right)\|\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Agora pelo Teorema de Representação de Riesz 1.1.11,

$$\|I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\sum_{j=1}^n \|R_j I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e assim obtemos a desigualdade desejada.

Para provarmos a estimativa (3.4) é suficiente demonstrar que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} R_j I_\alpha u(x)\varphi(x)dx\right| \leq C\|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}\|\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.5}$$

para cada $j = 1, \ldots, n$, e para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então vamos demonstrar a estimativa (3.5). Primeiro, pelos Lemas 2.5.3 e 2.6.10 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} R_j I_\alpha u(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha R_j u(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} R_j u(x) I_\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Agora, da desigualdade (3.2), temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} R_j I_\alpha u(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} R_j u(x) I_\alpha\varphi(x)dx\right| \leq C\|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}\|\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)},$$

e assim obtemos a estimativa (3.5). A desigualdade (3.4) segue diretamente do Teorema de Representação de Riesz 1.1.11. Dessa forma, assumindo as desigualdades (3.3) e (3.4), obtemos

$$\|I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\sum_{j=1}^n \|R_j I_\alpha u\|_{L^{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)},$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Ru \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Assim, provamos a desigualdade (3.1) do Teorema 3.1.1.

Todo nosso trabalho se resume em demonstrar a estimativa (3.2). Sem perda de generalidade, consideremos $j = 1$ e escrevamos $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Considere também $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que supp$\rho \subset B(0,1)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1.$$

Definamos $\rho_\varepsilon = \rho(x/\varepsilon)\varepsilon^{-n}$ e $\varphi_\varepsilon(x) = (\varphi * \rho_\varepsilon)(x)$ para $\varepsilon > 0$ fixo. Escrevamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} R_j u(x) I_\alpha \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_j u(x', x_n) I_\alpha \varphi(x', x_n)\, dx' \right) dx_n$$

e destacamos a integral em $\mathbb{R}^{n-1}$. Podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_1 u(x', x_n) I_\alpha \varphi(x', x_n)\, dx' &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_1 u(x', x_n)[I_\alpha \varphi(x', x_n) - I_\alpha \varphi_\varepsilon(x', x_n)]\, dx' \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_1 u(x', x_n) I_\alpha \varphi_\varepsilon(x', x_n)\, dx' \\ &= \mathrm{I}(\varepsilon) + \mathrm{II}(\varepsilon).\end{aligned}$$

Para o primeiro termo iniciamos com a seguinte desigualdade

$$|\mathrm{I}(\varepsilon)| \le \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |R_1 u(x', x_n)||I_\alpha \varphi(x', x_n) - I_\alpha \varphi_\varepsilon(x', x_n)|\, dx' \tag{3.6}$$

Agora, vamos estimar o termo $I_\alpha \varphi(x', x_n) - I_\alpha \varphi_\varepsilon(x', x_n)$ em $\mathbb{R}^{n-1}$. Iniciaremos com o seguinte lema.

Lema 3.1.2. *$I_\alpha \varphi_\varepsilon(x) - I_\alpha \varphi_\delta(x) = \int_\delta^\varepsilon \frac{\partial}{\partial r} [\rho_r * I_\alpha \varphi(x)]\, dr$, para $0 < \delta < \varepsilon$.*

Demonstração do Lema 3.1.2. Lembrando que $I_\alpha \varphi_r = K * \varphi_r$, no qual $K(x) = \gamma(\alpha, n)|x|^{\alpha - n}$, temos, pelo Teorema de Fubini,

$$I_\alpha \varphi_r = K * \varphi * \rho_r = \rho_r * K * \varphi = \rho_r * I_\alpha \varphi \in C^\infty((0,\infty))$$

na variável r. Assim, dado $x \in \mathbb{R}^n$, do Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$\begin{aligned} I_\alpha \varphi_\varepsilon(x) - I_\alpha \varphi_\delta(x) &= \rho_\varepsilon * I_\alpha \varphi(x) - \rho_\delta * I_\alpha \varphi(x) \\ &= \int_\delta^\varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_r * I_\alpha \varphi(x)\right] dr. \end{aligned}$$

□

Então podemos escrever

$$I_\alpha \varphi_\varepsilon(x) - I_\alpha \varphi_\delta(x) = \int_\delta^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y) I_\alpha \varphi(y) dy \right) dr$$

no qual

$$\begin{aligned} \sigma_r(z) = \frac{\partial}{\partial r}\rho_r(z) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^n}\rho\left(\frac{z}{r}\right)\right] \\ &= -n\frac{1}{r^{n+1}}\rho\left(\frac{z}{r}\right) - \frac{1}{r^n}\nabla\rho\left(\frac{z}{r}\right)\cdot\frac{z}{r^2} \\ &= -\frac{1}{r^n}\left[\frac{n}{r}\rho\left(\frac{z}{r}\right) + \nabla\rho\left(\frac{z}{r}\right)\cdot\frac{z}{r^2}\right]. \end{aligned}$$

Lema 3.1.3. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\alpha \varphi_\varepsilon(x) = I_\alpha \varphi(x)$.

Demonstração do Lema 3.1.3. De fato, usando o fato de que $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma aproximação da identidade, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\alpha\varphi_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon * I_\alpha\varphi(x) = \delta_0 * I_\alpha \varphi(x) = I_\alpha\varphi(x),$$

no qual δ_0 é a distribuição delta de Dirac centrada na origem. □

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue

$$\int_\delta^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y) I_\alpha \varphi(y) dy \right) dr \longrightarrow \int_0^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y) I_\alpha \varphi(y) dy \right) dr$$

quando $\delta \to 0$. Agora, pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y) I_\alpha \varphi(y)\, dy \right) dr &= \int_0^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y)(K*\varphi)(y)\, dy \right) dr \\ &= \int_0^\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(y-z)\varphi(z)\, dz \right) dy \right] dr \\ &= \int_0^\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y) K(y-z)\varphi(z)\, dy\, dz \right] dr \\ &= \int_0^\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y) K(y-z)\, dy \right) dz \right] dr. \end{aligned}$$

Para $z \in \mathbb{R}^n$, fazendo a substituição de variável $\tilde{y} = y - z$,

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-y) I_\alpha \varphi(y)\, dy \right) dr &= \int_0^\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_r(x-z-\tilde{y}) K(\tilde{y})\, d\tilde{y} \right) dz \right] dr \\ &= \int_0^\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) I_\alpha \sigma_r(x-z)\, dz \right] dr \\ &= \int_0^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha \sigma_r(x-y)\varphi(y)\, dy \right) dr. \end{aligned}$$

Lema 3.1.4. *$|I_\alpha \sigma_r(z)| \leq C/(r+|z|)^{n-\alpha+1}$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.*

Demonstração do Lema 3.1.4. Separemos em dois casos: $|z| \leq 2r$ e $|z| > 2r$. Quando $|z| \leq 2r$, temos

$$\begin{aligned}
|I_\alpha \sigma_r(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\gamma(n,\alpha)}{|z-y|^{n-\alpha}} \frac{(-1)}{r^n} \left[\frac{n}{r}\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \frac{y}{r^2} \right] dy \right| \\
&\leq \frac{C}{r^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left| \frac{n}{r}\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \frac{y}{r^2} \right|}{|z-y|^{n-\alpha}} \, dy.
\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, faremos duas observações.

(i) Como o suporte de ρ está em $B(0,1)$, então o suporte de $\rho\left(\frac{\cdot}{r}\right)$ está em $B(0,r)$. De fato,

$$\frac{x}{r} \in B(0,1) \Rightarrow \left|\frac{x}{r}\right| \leq 1 \Rightarrow |x| \leq r \Rightarrow x \in B(0,r).$$

Portanto, o suporte de $\nabla\rho\left(\frac{\cdot}{r}\right)$ está em $B(0,r)$.

(ii) Para $y \in B(0,r)$ temos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{n}{r}\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \frac{y}{r^2} \right| &\leq \frac{n}{r} \left|\rho\left(\frac{y}{r}\right)\right| + \left|\nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right)\right| \left|\frac{y}{r^2}\right| \\
&\leq \frac{n}{r} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \left|\frac{y}{r^2}\right| \|\nabla\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{n}{r} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{r} \|\nabla\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{C}{r}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo usando as observações, obtemos

$$\begin{aligned}
|I_\alpha \sigma_r(z)| &\leq \frac{C}{r^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left| \frac{n}{r}\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \frac{y}{r^2} \right|}{|z-y|^{n-\alpha}} \, dy \\
&= \frac{C}{r^n} \int_{B(0,r)} \frac{\left| \frac{n}{r}\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \frac{y}{r^2} \right|}{|z-y|^{n-\alpha}} \, dy \\
&\leq \frac{C}{r^{n+1}} \int_{B(0,r)} \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \, dy \\
&= \frac{C}{r^{n+1}} \int_{B(z,r)} \frac{1}{|\tilde{y}|^{n-\alpha}} \, d\tilde{y},
\end{aligned}$$

com $\tilde{y} = y - z$. Para $\delta = \min\{|z|/2, r - |z|/2\} = cr$ $(0 < c < 1)$, temos que

$$\int_{B(z,r)} \frac{1}{|\tilde{y}|^{n-\alpha}} \, d\tilde{y} = \int_{B(z,r) \cap B(0,\delta)} \frac{1}{|\tilde{y}|^{n-\alpha}} \, d\tilde{y} + \int_{B(z,r) \cap B(0,\delta)^c} \frac{1}{|\tilde{y}|^{n-\alpha}} \, d\tilde{y},$$

e podemos limitar a primeira integral da direita da igualdade acima por

$$\begin{aligned}\int_{B(z,r)\cap B(0,\delta)} \frac{1}{|\tilde{y}|^{n-\alpha}}\,d\tilde{y} &\leq \int_{B(0,\delta)} \frac{1}{|\tilde{y}|^{n-\alpha}}\,d\tilde{y}\\ &= |S^{n-1}| \int_0^\delta \frac{R^{n-1}}{R^{n-\alpha}}\,dR\\ &= C\delta^\alpha\\ &= Cr^\alpha.\end{aligned}$$

Para a segunda integral, como

$$\tilde{y} \notin B(0,\delta) \Rightarrow |\tilde{y}| > \delta = cr \Rightarrow \frac{1}{|\tilde{y}|^{n-\alpha}} \leq \frac{C}{r^{n-\alpha}}$$

então podemos limitá-lo por

$$\begin{aligned}\int_{B(z,r)\cap B(0,\delta)^c} \frac{1}{|\tilde{y}|^{n-\alpha}}\,d\tilde{y} &\leq \frac{C}{r^{n-\alpha}} \int_{B(z,r)\cap B(0,\delta)^c} 1\,d\tilde{y}\\ &= \frac{C}{r^{n-\alpha}}|B(z,r)\cap B(0,\delta)^c|\\ &\leq \frac{C}{r^{n-\alpha}}|B(z,r)|\\ &= \frac{C|S^{n-1}|r^n}{r^{n-\alpha}}\\ &= Cr^\alpha.\end{aligned}$$

Concluímos que

$$|I_\alpha\sigma_r(z)| \leq C\frac{r^\alpha}{r^{n+1}} = \frac{C}{r^{n-\alpha+1}}$$

para $|z| \leq 2r$. Para terminarmos a demonstração do Lema 3.1.4 (para $|z| \leq 2r$), basta observar que

$$\begin{aligned}|z| \leq 2r &\Rightarrow (|z|+r)^{n-\alpha+1} \leq (3r)^{n-\alpha+1} = 3^{n-\alpha+1}r^{n-\alpha+1}\\ &\Rightarrow \frac{1}{r^{n-\alpha+1}} \leq \frac{C}{(|z|+r)^{n-\alpha+1}},\end{aligned}$$

e então

$$|I_\alpha\sigma_r(z)| \leq \frac{C}{(|z|+r)^{n-\alpha+1}}$$

para todo $|z| \leq 2r$. Agora, para $|z| > 2r$, observemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y}{r}\right) &= \operatorname{div}\left(\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_1}{r}, \ldots, \rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_n}{r}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \partial_{y_j}\left(\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_j}{r}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{y_j}{r}\partial_{y_j}\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{1}{r} + \rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{1}{r}\right] \\
&= \rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{n}{r} + \sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{r^2}\partial_{y_j}\rho\left(\frac{y}{r}\right) \\
&= \frac{n}{r}\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right)\cdot\frac{y}{r^2}.
\end{aligned}$$

Assim, da integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}
I_\alpha\sigma_r(z) &= \frac{C}{r^n}\int_{B(0,r)} \frac{\nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right)\cdot\frac{y}{r^2} + \frac{n}{r}\rho\left(\frac{y}{r}\right)}{|z-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&= \frac{C}{r^n}\int_{B(0,r)} \frac{\operatorname{div}\left[\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y}{r}\right]}{|z-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&= \frac{C}{r^n}\int_{B(0,r)} \frac{\sum_{j=1}^{n}\partial_{y_j}\left[\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_j}{r}\right]}{|z-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{C}{r^n}\int_{B(0,r)} \frac{\partial_{y_j}\left[\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_j}{r}\right]}{|z-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\frac{C}{r^n}\int_{B(0,r)} \partial_{y_j}\left[\frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}}\right]\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_j}{r}\,dy + \frac{C}{r^n}\int_{\partial B(0,r)} \frac{\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_j}{r}}{|z-y|^{n-\alpha}}\,dy.
\end{aligned}$$

Como o suporte de $\rho\left(\frac{\cdot}{r}\right)$ está em $B(0,r)$, temos que $\rho\left(\frac{y}{r}\right) = 0$ para $|y| = r$. Logo a última integral da última igualdade acima é igual a zero. Além disso, a derivada parcial na primeira integral do último termo acima é dada por

$$\begin{aligned}
\partial_{y_j}\left[\frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}}\right] &= \partial_{y_j}\left[(z_1-y_1)^2 + \cdots + (z_n-y_n)^2\right]^{\frac{-n+\alpha}{2}} \\
&= \frac{-n+\alpha}{2}\left[(z_1-y_1)^2 + \cdots + (z_n-y_n)^2\right]^{\frac{-n+\alpha}{2}-1}(-2)(z_j-y_j) \\
&= (n-\alpha)|z-y|^{-n+\alpha-2}(z_j-y_j) \\
&= (n-\alpha)\frac{1}{|z-y|^{n-\alpha+1}}\frac{z_j-y_j}{|z-y|}.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo a substituição de variável $w = y/r \Leftrightarrow y = wr$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_\alpha \sigma_r(z) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{r^n} \int_{B(0,r)} \partial_{y_j} \left[\frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} \right] \rho\left(\frac{y}{r}\right) \frac{y_j}{r} \, dy \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{r^n} \int_{B(0,r)} \frac{\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_j}{r}}{|z-y|^{n-\alpha}} \frac{z_j - y_j}{|z-y|} \, dy \\
&= \frac{C}{r^n} \int_{B(0,r)} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y_j}{r}}{|z-y|^{n-\alpha}} \frac{z_j - y_j}{|z-y|} \right] dy \\
&= \frac{C}{r^n} \int_{B(0,r)} \frac{\rho\left(\frac{y}{r}\right)\frac{y}{r}}{|z-y|^{n-\alpha}} \cdot \frac{z-y}{|z-y|} \, dy \\
&= \frac{C}{r^n} \int_{B(0,1)} \frac{\rho(w) w}{|z-wr|^{n-\alpha}} \cdot \frac{wr - z}{|wr - z|} r^n \, dw \\
&= C \int_{B(0,1)} \frac{\rho(w) w}{|z-wr|^{n-\alpha}} \cdot \frac{wr - z}{|wr - z|} \, dw.
\end{aligned}
$$

Como $|\rho(w)w| \leq \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |w| \leq \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, temos que

$$
\begin{aligned}
|I_\alpha \sigma_r(z)| &\leq C \int_{B(0,1)} \frac{|\rho(w) w|}{|z-wr|^{n-\alpha}} \cdot \frac{|wr - z|}{|wr - z|} \, dw \\
&\leq C \int_{B(0,1)} \frac{1}{|z-wr|^{n-\alpha}} \, dw \\
&= \frac{C}{|z|^{n-\alpha+1}} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\left| \frac{z}{|z|} - w\frac{r}{|z|} \right|^{n-\alpha}} \, dw.
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
|z| > 2r \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{r}{|z|} \Rightarrow \left| w \frac{r}{|z|} \right| = |w| \frac{r}{|z|} \leq 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},
$$

então

$$
\left| \frac{z}{|z|} - w \frac{r}{|z|} \right| \geq \left| \frac{z}{|z|} \right| - \left| w \frac{r}{|z|} \right| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},
$$

e portanto

$$
\frac{1}{\left| \frac{z}{|z|} - w\frac{r}{|z|} \right|^{n-\alpha}} \leq 2^{n-\alpha+1}.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} \frac{1}{\left| \frac{z}{|z|} - w\frac{r}{|z|} \right|^{n-\alpha}} \, dw &\leq 2^{n-\alpha+1} \int_{B(0,1)} dw \\
&= 2^{n-\alpha+1} |B(0,1)|,
\end{aligned}
$$

ou seja, a integral é limitada por uma constante independente de z. Portanto, obtemos

$$|I_\alpha \sigma_r(z)| \leq \frac{C}{|z|^{n-\alpha+1}}.$$

Para concluir a demonstração do Lema 3.1.4 (para $|z| > 2r$) basta observarmos que

$$\begin{aligned} r < \frac{|z|}{2} &\Rightarrow |z| + r < |z| + \frac{|z|}{2} = \frac{3}{2}|z| \\ &\Rightarrow \frac{1}{|z|} < \frac{3}{2}\frac{1}{|z|+r} \\ &\Rightarrow \frac{1}{|z|^{n-\alpha+1}} < \left(\frac{3}{2}\right)^{n-\alpha+1} \frac{1}{(|z|+r)^{n-\alpha+1}}, \end{aligned}$$

e consequentemente,

$$|I_\alpha \sigma_r(z)| \leq \frac{C}{(|z|+r)^{n-\alpha+1}}$$

para todo $|z| > 2r$. Como a desigualdade é válida para todo $|z| \leq 2r$ e $|z| > 2r$, então ela é válida para todo $z \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. $\square$

Voltemos à estimativa do termo $I_\alpha\varphi(x', x_n) - I_\alpha\varphi_\varepsilon(x', x_n)$. Dos Lemas 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.4, temos que

$$\begin{aligned} |I_\alpha\varphi(x', x_n) - I_\alpha\varphi_\varepsilon(x', x_n)| &= \left| \int_0^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha\sigma_r(x-y)\varphi(y)\, dy \right) dr \right| \\ &\leq \int_0^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha\sigma_r(x-y)||\varphi(y)|\, dy \right) dr \\ &\leq C \int_0^\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(y)|}{(r+|x-y|)^{n-\alpha+1}}\, dy \right) dr \\ &= C \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\varphi(y', y_n)|}{(r+|(x', x_n)-(y', y_n)|)^{n-\alpha+1}}\, dy' \right) dy_n dr. \end{aligned}$$

Nosso próximo passo é estimar

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\varphi(y', y_n)|}{(r+|(x', x_n)-(y', y_n)|)^{n-\alpha+1}}\, dy' \right) dy_n dr.$$

Inicialmente, da desigualdade de Hölder em $\mathbb{R}^{n-1}$ com $p = n/\alpha$ e $p' = n/(n-\alpha)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\varphi(y)|}{(r+|x-y|)^{n-\alpha+1}}\,dy' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{n-\alpha+1}} |\varphi(y',y_n)|\,dy'$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{(n-\alpha+1)\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy'\right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y',y_n)|^{\frac{n}{\alpha}}\,dy'\right)^{\frac{\alpha}{n}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy'\right)^{1-\frac{\alpha}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y',y_n)|^{\frac{n}{\alpha}}\,dy'\right)^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Agora definamos

$$\Phi(y_n) \doteq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y',y_n)|^{\frac{n}{\alpha}}\,dy'\right)^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Temos que

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} |I_\alpha\varphi(\cdot,x_n) - I_\alpha\varphi_\varepsilon(\cdot,x_n)|$$

$$\leq C \sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(y_n) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy'\right)^{1-\frac{\alpha}{n}} dy_n dr.$$

Lema 3.1.5. *Temos que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy'\right)^{1-\frac{\alpha}{n}} \leq \frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{2-\frac{n}{\alpha}}}.$$

Demonstração do Lema 3.1.5. Como $a^2+b^2 \geq 2ab$ para todo $a, b \geq 0$, então

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \leq a^2+b^2+(a^2+b^2) = 2(a^2+b^2)$$
$$\Rightarrow a+b \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

para todo $a, b \geq 0$. Usando este fato com $a = |x'-y'|$ e $b = |x_n+y_n|$, obtemos

$$|x'-y'|+|x_n-y_n| \leq \sqrt{2}\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}$$
$$\Rightarrow r+|x'-y'|+|x_n-y_n| \leq \sqrt{2}\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{r+|x'-y'|+|x_n-y_n|}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}} \leq \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}{(r+|x'-y'|+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}},$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy' \leq C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(r+|x'-y'|+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy'$$

$$\leq \frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{|x'-y'|}{r+|x_n-y_n|}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy'.$$

Para prosseguir, faremos três mudanças de variável. Primeiro, para $z'=y'-x'$, obtemos

$$\frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{|z'|}{r+|x_n-y_n|}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dz'.$$

Agora fazemos a mudança de variável para coordenadas polares. Para $|z'|=tw'$, nos quais $t\geq 0$ e $w'\in S^{n-2}$, obtemos

$$\frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\int_0^\infty\int_{S^{n-2}} \frac{t^{n-2}}{\left(1+\frac{t}{r+|x_n-y_n|}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dw'dt,$$

no qual a função integrada não depende de w'. Então a integral se resume a

$$\frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\int_0^\infty \frac{t^{n-2}}{\left(1+\frac{t}{r+|x_n-y_n|}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dt.$$

Por fim, fazendo a substituição $t'=t/(r+|x_n-y_n|)$, obtemos

$$\frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\int_0^\infty (r+|x_n-y_n|)^{n-1}\frac{t'^{n-2}}{(1+t')^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dt'$$

$$= \frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{1+\frac{n}{n-\alpha}}}\int_0^\infty \frac{t'^{n-2}}{(1+t')^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dt'.$$

Afirmamos que a integral restante é limitada. De fato, a função integrada é contínua no compacto $[0,1]$, logo é limitada em $[0,1]$ por uma constante $M>0$ e, além disso,

$$t'>1 \Rightarrow \frac{1}{1+t'}<\frac{1}{t'} \Rightarrow \frac{1}{(1+t')^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}<\frac{1}{t'^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}.$$

Logo, temos que

$$\int_0^\infty \frac{t'^{n-2}}{(1+t')^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dt = \int_0^1 \frac{t'^{n-2}}{(1+t')^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dt + \int_1^\infty \frac{t'^{n-2}}{(1+t')^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dt$$

$$\leq \int_0^1 M\,dt + \int_1^\infty \frac{t'^{n-2}}{t'^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dt$$

$$= M + \int_1^\infty t'^{\left(-2-\frac{n}{n-\alpha}\right)}\,dt$$

$$= M + \left(-1-\frac{n}{n-\alpha}\right)^{-1} = C.$$

Portanto,

$$\frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{1}{\left(1+\frac{|x'-y'|}{r+|x_n-y_n|}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy' \leq \frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{1+\frac{n}{n-\alpha}}}.$$

Para concluir a demonstração do Lema 3.1.5, basta observarmos que

$$\left(1+\frac{n}{n-\alpha}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)=\left(\frac{2n-\alpha}{n-\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{n}\right)=\frac{2n-\alpha}{n}=2-\frac{\alpha}{n},$$

e assim

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{1}{\left(r+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\,dy'\right)^{1-\frac{\alpha}{n}} &\leq \left(\frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{1+\frac{n}{n-\alpha}}}\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}\\ &= \frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{2-\frac{\alpha}{n}}}.\end{aligned}$$

□

Do Lema 3.1.5, segue que

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}|I_\alpha\varphi(\cdot,x_n)-I_\alpha\varphi_\varepsilon(\cdot,x_n)|\leq C\int_0^\varepsilon\int_{\mathbb{R}}\frac{\Phi(y_n)}{(r+|x_n-y_n|)^{2-\frac{\alpha}{n}}}\,dy_n dr.$$

O próximo passo é estimar esta integral do lado direito da igualdade acima. Podemos reescrevê-la como

$$\int_0^\varepsilon\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{A_j}\frac{\Phi(y_n)}{(r+|x_n-y_n|)^{2-\frac{\alpha}{n}}}\,dy_n dr,$$

no qual $A_j = B(x_n,2^{j+1}r)\backslash B(x_n,2^j r)$, para todo $j\in\mathbb{Z}$. Por construção os A_j's são disjuntos e $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A_j=\mathbb{R}$ a menos de um conjunto de medida nula, logo a integral está bem definida. Para cada A_j, temos

$$2^j r+r<r+|x_n-y_n|<2^{j+1}r+r\Rightarrow\frac{1}{r(2^{j+1}+1)}<\frac{1}{r+|x_n-y_n|}<\frac{1}{r(2^j+1)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{A_j}\frac{\Phi(y_n)}{(r+|x_n-y_n|)^{2-\frac{\alpha}{n}}}\,dy_n &= \int_{A_j}\frac{\Phi(y_n)}{|B(x_n,2^{j+1}r)|}\frac{|B(x_n,2^{j+1}r)|}{(r+|x_n-y_n|)^{2-\frac{\alpha}{n}}}\,dy_n\\ &\leq \int_{A_j}\frac{\Phi(y_n)}{|B(x_n,2^{j+1}r)|}\frac{2^{j+1}r}{[r(2^j+1)]^{2-\frac{\alpha}{n}}}\,dy_n\\ &\leq \frac{2^{j+1}r}{[r(2^j+1)]^{2-\frac{\alpha}{n}}}\frac{1}{|B(x_n,2^{j+1}r)|}\int_{B(x_n,2^{j+1}r)}\Phi(y_n)\,dy_n\\ &= \frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{n}{\alpha}}}\frac{r}{r^{2-\frac{\alpha}{n}}}\frac{1}{|B(x_n,2^{j+1}r)|}\int_{B(x_n,2^{j+1}r)}\Phi(y_n)\,dy_n.\end{aligned}$$

Sendo M o operador maximal de Hardy-Littlewood, por definição temos que

$$\frac{1}{|B(x_n, 2^{j+1}r)|}\int_{B(x_n,2^{j+1}r)} \Phi(y_n)\, dy_n \leq M\Phi(x_n).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{A_j}\frac{\Phi(y_n)}{(r+|x_n-y_n|)^{2-\frac{\alpha}{n}}}\, dy_n dr &\leq M\Phi(x_n)\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{\alpha}{n}}}\left(\int_0^{\varepsilon} r^{-1+\frac{\alpha}{n}}\, dr\right)\\ &\leq C\varepsilon^{\frac{\alpha}{n}}M\Phi(x_n).\end{aligned}$$

A estimativa acima segue de dois fatos. Para $0<\alpha<n$, temos:

(i) $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} r^{-1+\frac{\alpha}{n}}\, dr = \frac{n}{\alpha}\varepsilon^{\frac{\alpha}{n}}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{\alpha}{n}}}$ converge.

O fato (i) segue de um cálculo simples. Para demonstrar o fato (ii), inicialmente observemos que $2-\frac{\alpha}{n}>0$, pois

$$2-\frac{\alpha}{n}>0 \Longleftrightarrow 2n-\alpha>0 \Longleftrightarrow \alpha<2n,$$

sendo a última parte verdadeira, já que $0<\alpha<n$ por hipótese. Para todo $j\geq 0$, temos que

$$\frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{\alpha}{n}}} \leq \frac{2^{j+1}}{(2^j)^{2-\frac{\alpha}{n}}} = \frac{2\cdot 2^j}{\left(2^{2-\frac{\alpha}{n}}\right)^j} = 2\left(2^{-1+\frac{\alpha}{n}}\right)^j.$$

Como

$$\alpha<n \Rightarrow \frac{\alpha}{n}<1 \Rightarrow -1+\frac{\alpha}{n}<0 \Rightarrow 2^{-1+\frac{\alpha}{n}}<1,$$

então a série

$$\sum_{j\geq 0} 2\left(2^{-1+\frac{\alpha}{n}}\right)^j = 2\sum_{j\geq 0}\left(2^{-1+\frac{\alpha}{n}}\right)^j$$

é geométrica de razão menor que um, logo converge. Então pelo critério da comparação, a série

$$\sum_{j\geq 0}\frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{\alpha}{n}}}$$

também converge.

Para $j<0$, temos que

$$\frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{\alpha}{n}}} \leq 2^{j+1}.$$

A série

$$\sum_{j<0} 2^{j+1} = \sum_{k>0}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2\sum_{k>0}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

é geométrica de razão menor que um, logo converge. Novamente, pelo critério da comparação, a série

$$\sum_{j<0} \frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{\alpha}{n}}}$$

também converge. Assim concluímos o fato (ii).

Voltando à demonstração do teorema, já temos que

$$\|I_\alpha\varphi(\cdot,x_n) - I_\alpha\varphi_\varepsilon(\cdot,x_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\varepsilon^{\frac{\alpha}{n}} M\Phi(x_n).$$

Portanto, da desigualdade (3.6), obtemos a estimativa

$$|\mathrm{I}(\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{\frac{\alpha}{n}} M\Phi(x_n) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |R_1 u(x',x_n)|\, dx' = C\varepsilon^{\frac{\alpha}{n}} M\Phi(x_n)\|R_1 u(\cdot,x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{3.7}$$

O próximo passo é estimar $\mathrm{II}(\varepsilon)$. Temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_1 u(x',x_n) I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)\, dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(-\int_{x_n}^{\infty} \partial_{x_n} R_1 u(x',t)\, dt\right) I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)\, dx',
\end{aligned}$$

pois pela Proposição 2.6.2,

$$\lim_{t\to\infty} R_1 u(x',t) = 0.$$

Agora pela Proposição 2.6.9 e pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(-\int_{x_n}^{\infty} \partial_{x_n} R_1 u(x',t)\, dt\right) I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)\, dx' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_n}^{\infty} \partial_{x_1}\left[R_n u(x',t)\right] I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)\, dt dx' \\
&= -\int_{x_n}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_1}\left[R_n u(x',t)\right] I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)\, dx' dt.
\end{aligned}$$

Como $n \geq 2$, podemos usar a integração por partes, obtendo

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(\varepsilon) &= -\int_{x_n}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_1}\left[R_n u(x',t)\right] I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)\, dx' dt \\
&= \int_{x_n}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_n u(x',t)\ \partial_{x_1}\left[I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)\right]\, dx' dt,
\end{aligned}$$

pois pela Proposição 2.6.2,

$$\lim_{s\to\infty} R_n u(s,x_2,\ldots,x_{n-1},t) = 0.$$

Assim, podemos estimar $\mathrm{II}(\varepsilon)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}|\mathrm{II}(\varepsilon)| &= \left|\int_{x_n}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_n u(x',t)\ \partial_{x_1}\left[I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)\right]\ dx'dt\right| \\ &\leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\left\{|\partial_{x_1}I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)|\right\}\int_{x_n}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|R_n u(x',t)|\ dx'dt \\ &\leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\left\{|\partial_{x_1}I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)|\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|R_n u(x',t)|\ dx'dt \\ &= \sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\left\{|\partial_{x_1}I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)|\right\}\int_{\mathbb{R}^n}|R_n u(x)|\ dx \\ &= \sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\left\{|\partial_{x_1}I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)|\right\}\|R_n u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Por fim, iremos estimar

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\left\{|\partial_{x_1}I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n)|\right\}.$$

Como feito anteriormente, pelo Teorema de Fubini,

$$I_\alpha\varphi_\varepsilon(x',x_n) = K*\rho_\varepsilon*\varphi(x',x_n) = \rho_\varepsilon*K*\varphi(x',x_n) = \rho_{\varepsilon*}I_\alpha\varphi(x',x_n).$$

Assim, novamente pelo Teorema de Fubini,

$$\partial_{x_1}I_\alpha\varphi_\varepsilon = \partial_{x_1}\left(\rho_\varepsilon*I_\alpha\varphi\right) = \left(\partial_{x_1}\rho_\varepsilon\right)*I_\alpha\varphi = I_\alpha\left(\partial_{x_1}\rho_\varepsilon\right)*\varphi.$$

Observemos que

$$\partial_{x_1}\rho_\varepsilon(x) = \partial_{x_1}\left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon^n}\right) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\partial_{x_1}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

De modo análogo ao caso de $\mathrm{I}(\varepsilon)$, definamos

$$\sigma_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\partial_{x_1}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Pelo Lema 3.1.4, temos que

$$\begin{aligned}\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}|I_\alpha\partial_{x_1}\rho_\varepsilon*\varphi(x',x_n)| &= \sup_{x'\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}I_\alpha\partial_{x_1}\rho_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\,dy\right| \\ &\leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha\partial_{x_1}\rho_\varepsilon(x-y)||\varphi(x)|\,dy \\ &\leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\varphi(y)|}{(\varepsilon+|x-y|)^{n-\alpha+1}}\,dy \\ &= \sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|\varphi(y',y_n)|}{\left(\varepsilon+\sqrt{|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2}\right)^{n-\alpha+1}}\,dy'dy_n.\end{aligned}$$

Para estimar a integral em $\mathbb{R}^{n-1}$, primeiro usamos a desigualdade de Hölder em $\mathbb{R}^{n-1}$ com $p = n/\alpha$ e $p' = n/(n-\alpha)$.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\varphi(y)|}{(\varepsilon + |x-y|)^{n-\alpha+1}}\, dy' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(\varepsilon + \sqrt{|x'-y'|^2 + |x_n - y_n|^2}\right)^{n-\alpha+1}} |\varphi(y', y_n)|\, dy'$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(\varepsilon + \sqrt{|x'-y'|^2 + |x_n - y_n|^2}\right)^{(n-\alpha+1)\frac{n}{n-\alpha}}}\, dy' \right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y', y_n)|^{\frac{n}{\alpha}}\, dy' \right)^{\frac{\alpha}{n}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(\varepsilon + \sqrt{|x'-y'|^2 + |x_n - y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-\alpha}}}\, dy' \right)^{1-\frac{\alpha}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y', y_n)|^{\frac{n}{\alpha}}\, dy' \right)^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Agora usando o Lema 3.1.5 e lembrando que

$$\Phi(y_n) = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y', y_n)|^{\frac{n}{\alpha}}\, dy' \right)^{\frac{\alpha}{n}},$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\varphi(y', y_n)|}{\left(\varepsilon + \sqrt{|x'-y'|^2 + |x_n - y_n|^2}\right)^{n-\alpha+1}}\, dy' \leq C \frac{\Phi(y_n)}{(\varepsilon + |x_n - y_n|)^{2-\frac{\alpha}{n}}}$$

e então

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} |I_\alpha \partial_{x_1} \rho_\varepsilon * \varphi(x', x_n)| \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi(y_n)}{(\varepsilon + |x_n - y_n|)^{2-\frac{\alpha}{n}}}\, dy_n.$$

Para estimar esta integral, usaremos o mesmo método já usado anteriormente. Podemos reescrevê-la como

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{A_j} \frac{\Phi(y_n)}{(\varepsilon + |x_n - y_n|)^{2-\frac{n}{\alpha}}}\, dy_n,$$

no qual $A_j = B(x_n, 2^{j+1}\varepsilon)/B(x_n, 2^j r)$. Por construção os A_j's são disjuntos e $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j = \mathbb{R}$ a menos de um conjunto de medida nula, logo a integral está bem definida. Para cada A_j, temos

$$2^j\varepsilon + \varepsilon < \varepsilon + |x_n - y_n| < 2^{j+1}\varepsilon + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon(2^{j+1}+1)} < \frac{1}{\varepsilon + |x_n - y_n|} < \frac{1}{\varepsilon(2^j + 1)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{A_j} \frac{\Phi(y_n)}{(\varepsilon+|x_n-y_n|)^{2-\frac{n}{\alpha}}}\,dy_n &= \int_{A_j} \frac{\Phi(y_n)}{|B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)|}\frac{|B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)|}{(\varepsilon+|x_n-y_n|)^{2-\frac{n}{\alpha}}}\,dy_n \\
&\leq \int_{A_j} \frac{\Phi(y_n)}{|B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)|}\frac{2^{j+1}\varepsilon}{[\varepsilon(2^j+1)]^{2-\frac{n}{\alpha}}}\,dy_n \\
&\leq \frac{2^{j+1}\varepsilon}{[\varepsilon(2^j+1)]^{2-\frac{n}{\alpha}}}\frac{1}{|B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)|}\int_{B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)} \Phi(y_n)\,dy_n \\
&= \frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{n}{\alpha}}}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{2-\frac{\alpha}{n}}}\frac{1}{|B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)|}\int_{B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)} \Phi(y_n)\,dy_n
\end{aligned}$$

De modo análogo ao caso anterior, temos que

$$\frac{1}{|B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)|}\int_{B(x_n,2^{j+1}\varepsilon)} \Phi(y_n)\,dy_n \leq M\Phi(x_n),$$

e então

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{A_j} \frac{\Phi(y_n)}{(\varepsilon+|x_n-y_n|)^{2-\frac{n}{\alpha}}}\,dy_n &\leq M\Phi(x_n)\varepsilon^{-1+\frac{\alpha}{n}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{n}{\alpha}}} \\
&\leq C\varepsilon^{-1+\frac{\alpha}{n}}M\Phi(x_n),
\end{aligned}$$

pois já vimos que a série

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{2^{j+1}}{(2^j+1)^{2-\frac{n}{\alpha}}}$$

converge. Portanto,

$$|\mathrm{II}(\varepsilon)| \leq C\|R_n u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\varepsilon^{-1+\frac{\alpha}{n}}M\Phi(x_n). \tag{3.8}$$

Lembrando que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_1u(x',x_n)I_\alpha\varphi(x',x_n)\,dx' = \mathrm{I}(\varepsilon)+\mathrm{II}(\varepsilon),$$

para $\varepsilon>0$ fixado arbitrariamente. Podemos escolher

$$\varepsilon = \frac{\|R_n u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\|R_1u(\cdot,x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}}.$$

Assim, das estimativas (3.7) e (3.8) e com $\varepsilon>0$ escolhido acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_1u(x',x_n)I_\alpha\varphi(x',x_n)\,dx'\right| \leq |\mathrm{I}(\varepsilon)|+|\mathrm{II}(\varepsilon)| \\
&\qquad \leq C\|R_1u(\cdot,x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}M\Phi(x_n)\varepsilon^{\frac{\alpha}{n}} + C\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\varepsilon^{-1+\frac{\alpha}{n}}M\Phi(x_n) \\
&\qquad = C\|R_1u(\cdot,x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1-\frac{\alpha}{n}}\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}}M\Phi(x_n).
\end{aligned}$$

Agora podemos finalmente estimar

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} R_1u(x) I_\alpha\varphi(x)\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_1u(x',x_n) I_\alpha\varphi(x',x_n)\,dx'\right)dx_n\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R_1u(x',x_n) I_\alpha\varphi(x',x_n)\,dx'\right|dx_n \\ &\le C\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}}\int_{\mathbb{R}}\|R_1u(\cdot,x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1-\frac{\alpha}{n}} M\Phi(x_n)\,dx_n.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder com $p = n/(n-\alpha)$ e

$$\frac{1}{p'} = 1 - \frac{n-\alpha}{n} = 1 - 1 + \frac{\alpha}{n} \Leftrightarrow p' = \frac{n}{\alpha},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} R_1u(x) I_\alpha\varphi(x)\,dx\right| &\le C\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}}\int_{\mathbb{R}}\|R_1u(\cdot,x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1-\frac{\alpha}{n}} M\Phi(x_n)\,dx_n \\ &\le C\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\|R_1u(\cdot,x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}dx_n\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}}|M\Phi(x_n)|^{\frac{n}{\alpha}}\,dx_n\right)^{\frac{\alpha}{n}} \\ &\le C\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}}\|R_1u(\cdot,x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}\,dx_n\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}\|M\Phi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R})} \\ &= C\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|R_1u(x',x_n)|\,dx'\,dx_n\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}\|M\Phi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R})} \\ &= C\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|R_1u(x)|\,dx\right)^{1-\frac{\alpha}{n}}\|M\Phi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R})} \\ &= C\|R_nu\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}}\|R_1u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{\alpha}{n}}\|M\Phi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2.11, a função maximal de Hardy-Littlewood é limitada em $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p \le \infty$. Logo, em especial para $p = n/\alpha > 1$,

$$\|M\Phi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R})} \le C\|\Phi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R})}.$$

Lembrando que

$$\Phi(x_n) = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(y',x_n)|^{\frac{n}{\alpha}}\,dy'\right)^{\frac{\alpha}{n}},$$

então temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\Phi(x_n)|^{\frac{n}{\alpha}} \, dx_n \right)^{\frac{\alpha}{n}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y', x_n)|^{\frac{n}{\alpha}} \, dy' \right| \, dx_n \right)^{\frac{\alpha}{n}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(y', x_n)|^{\frac{n}{\alpha}} \, dy' \, dx_n \right)^{\frac{\alpha}{n}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{\frac{n}{\alpha}} \, dx \right)^{\frac{\alpha}{n}} \\
&= \|\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Logo, como

$$
\|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \|R_j u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},
$$

concluímos que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} R_1 u(x) I_\alpha \varphi(x) \, dx \right| &\leq C \|R_n u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}} \|R_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{\alpha}{n}} \|M\Phi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R})} \\
&\leq C \|R_n u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}} \|R_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{\alpha}{n}} \|\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}} \|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{\alpha}{n}} \|\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)} \\
&= C \|Ru\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{n}} \|\varphi\|_{L^{n/\alpha}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $Ru \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Assim, demonstramos a estimativa (3.2) e portanto o Teorema 3.1.1. $\square$

3.2 Contraexemplo

Uma observação importante é que o Teorema desconsidera o caso em que $n = 1$. De fato, para este caso a desigualdade não é válida. Temos que a transformada de Hilbert é a transformada de Riesz quando $n = 1$. Como H é auto-adjunta, limitada em $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$ e $H^2 = -Id$, no qual Id é o operador identidade, supondo o Teorema verdadeiro, temos que

$$
\begin{aligned}
\|I_\alpha u\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R})} &= \|H\left(HI_\alpha u\right)\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R})} \\
&\leq C \|I_\alpha H u\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R})} \\
&\leq C \|H^2 u\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= C \|u\|_{L^1(\mathbb{R})},
\end{aligned}
$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $Hu \in L^1(\mathbb{R})$.

Para $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, tal que supp $\rho \subset]-1,1[$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$, definamos

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x+1}{\varepsilon}\right),$$

para $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 2.4.5 temos que $u_\varepsilon \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, pois

$$\int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \rho(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \rho(z)\,dz = 0.$$

Observemos que u_ε é a diferença de duas translações de aproximações da identidade, logo

$$u_\varepsilon \to \delta_{-1} - \delta_1,$$

quando $\varepsilon \to 0$. Sendo $K(x) = \gamma(\alpha,1)|x|^{\alpha-1}$, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\alpha u_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} K * u_\varepsilon(x) = K(x-1) - K(x+1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se o Teorema 3.1.1 for válido para $n = 1$, então

$$\|I_\alpha u_\varepsilon\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R})} \leq C\|u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2C < \infty.$$

Pelo Lema de Fatou, isso implica que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{|x-1|^{1-\alpha}} - \frac{1}{|x+1|^{1-\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha)} dx\right)^{1-\alpha} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|I_\alpha u_\varepsilon\|_{L^{1/(1-\alpha)}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Além disso,

$$\left(\int_0^2 \left(\frac{1}{|x+1|^{1-\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha)} dx\right)^{1-\alpha} = \left(\int_1^3 \frac{1}{r}\,dr\right)^{1-\alpha} < \infty.$$

Pela desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned}\left(\int_0^2 \left(\frac{1}{|x-1|^{1-\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha)} dx\right)^{1-\alpha} &\leq \left(\int_0^2 \left(\frac{1}{|x-1|^{1-\alpha}} - \frac{1}{|x+1|^{1-\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha)} dx\right)^{1-\alpha} \\ &\qquad + \left(\int_0^2 \left(\frac{1}{|x+1|^{1-\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha)} dx\right)^{1-\alpha} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois

$$\left(\int_0^2 \left(\frac{1}{|x-1|^{1-\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha)} dx\right)^{1-\alpha} = \left(2\int_0^1 \frac{1}{r}\,dr\right)^{1-\alpha} = \infty.$$

Referências Bibliográficas

[1] Armin Schikorra, Daniel Spector and Jean Van Schaftingen - **An L^1-type estimate for Riesz potentials**, Rev. Mat. Iberoam. 33 (2017), nº1, $291 - 304$.

[2] Brezis, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Equations Differential.** Editora Springer, 2010.

[3] FOLLAND, G. B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.** 2nd Edition, New York: Jhon Wiley e Sons, 1999.

[4] HOUNIE, J., **Teoria Elementar das Distribuições**, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[5] DUOANDIKOETXEA, J. **Fourier Analysis**. American Mathematical Society. 2000

[6] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis.** McGraw-Hill, Third Edition, 1987.

[7] STEIN, E.M. **Harmonic Analysis: Real-Variables Methods, Orthogonality and Oscilatory Integrals**, Princeton, New Jersew: Princeton University Press, 1993.

[8] Stein, E. M.; **Singular Integral and Differentiability Properties of Functions**, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[9] WONG, M. W. **An Introduction to Pseudo-Differential Operators.** World Scientific, 1991.