

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL - PROFMAT**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS**

**DIAGNÓSTICO MÉDICO POR MEIO DE RELAÇÕES FUZZY: DENGUE,  
CHIKUNGUNYA OU ZIKA**

**LAZARO RODRIGO DE MARINS**

**Sorocaba**

**2016**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL - PROFMAT**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS**

**DIAGNÓSTICO MÉDICO POR MEIO DE RELAÇÕES FUZZY: DENGUE,  
CHIKUNGUNYA OU ZIKA**

**LAZARO RODRIGO DE MARINS**  
**ORIENTADORA: PROF<sup>a</sup>. DR<sup>a</sup>. MAGDA DA SILVA PEIXOTO**

**Sorocaba**  
**2016**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL - PROFMAT**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS**

**DIAGNÓSTICO MÉDICO POR MEIO DE RELAÇÕES FUZZY: DENGUE,  
CHIKUNGUNYA OU ZIKA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação da Professora Doutora Magda da Silva Peixoto.

**Sorocaba**  
**2016**

Marins, Lázaro Rodrigo de

Diagnóstico Médico por meio de Relações Fuzzy: Dengue, Chikungunya  
ou Zika / Lázaro Rodrigo de Marins. -- 2016.

119 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus  
Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Magda da Silva Peixoto

Banca examinadora: Magda da Silva Peixoto, Antonio César Germano  
Martins, Silvia Maria Simões de Carvalho

Bibliografia

1. Relações Fuzzy. 2. Diagnóstico Médico. 3. Aedes aegypti. I.  
Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

**Folha de Aprovação**

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Lazaro Rodrigo de Marins, realizada em 07/07/2016:

*Magda Peixoto*

---

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto  
UFSCar

*Antônio César Germano Martins*

---

Prof. Dr. Antônio César Germano Martins  
UNESP

*Silvia Maria Simões de Carvalho*

---

Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho  
UFSCar

À Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia e socorro presente nas dificuldades; ao meu pai Lázaro e minha mãe Neusa, por sempre me incentivar e apoiar em todos os momentos; aos meus irmãos, que assim como eu, nunca desistiram de seus ideais.

## AGRADECIMENTOS

Eternamente a Deus, fonte de toda sabedoria e vida, por me conceder a vida, me presentear com minha família, meus amigos e meus mestres, me proteger e iluminar em todos os momentos, inclusive os de dificuldade.

Aos meus pais Neusa e Lázaro, pelo incentivo, pelo amor incondicional, pela dedicação, pela confiança e pelo apoio enorme que tem me dado.

Ao meu irmão Marcelo, pela amizade, pela ajuda, pelo apoio e compreensão, um verdadeiro líder.

Ao meu irmão Cristiano, pelos momentos de descontração, um brincalhão que não se preocupa com os problemas, pois sua fala é: "Vivo hoje, amanhã a Deus pertence".

Ao meu irmão Flávio, pelos vários momentos de longas conversas sobre qualquer assunto, sabe colocar as palavras e incentivar, de extrema inteligência.

Ao meu irmão Rafael, pelos momentos de descontração e longos assuntos, em especial sobre as Teorias do Universo e Alienígenas do passado. Super inteligente.

Ao meu irmão Fabrício, o "meninão mimado", o caçula da família, pelo amor que esse menino demonstra ter por mim. Amo esse moleque.

À minha cunhada Sueli, por estar sempre presente em minha família.

À minha sobrinha Marcela, pelos vários momentos de risos e conversas descontraídas. É maravilhosa essa "ruivinha".

À minha esposa Renata, pela paciência nos momentos de desespero e dificuldades, pela compreensão, pelo apoio, incentivo, carinho e amor. Não foi fácil esses longos anos de estudo, que devido à complexidade não pude dar total atenção e uma sala e quarto sem livros espalhados. Sempre estive ao meu lado.

Aos meus enteados: Victor, um menino super inteligente que não mede consequências para ajudar um amigo; Carlos Otávio, super intelectual, um menino que com poucas palavras diz tudo; Mariane, a caçula, e portanto, a "protegida", minha "filha" que amo de coração.

À minha orientadora Professora Doutora Magda da Silva Peixoto pelos ensinamentos e orientações que, com sua paciência, dedicação e companheirismo me conduziram nessa pesquisa. Enorme é minha admiração por tamanha capacidade.

À especialista anônima, uma enfermeira padrão e excelente profissional da saúde, que tem prestado grande ajuda para início dessa pesquisa.

À mestre Liliam Aparecida, grande amiga, por ter me fornecido diversos materiais incluindo livros e apostilas, os quais me ajudaram muito nesta jornada.

A todos meus queridos amigos e familiares de quem, nos últimos anos, me ausentei de seus convívios para desenvolver esta pesquisa.

A todos os professores do programa de mestrado que me acompanharam nessa caminhada e contribuíram para meu aprendizado, em especial Magda, Silvia, Venezuela e Paulo.

A todos os colegas de curso que foram muito importantes durante minha caminhada, cada um a sua maneira, nos momentos de estudo, discussões e brincadeiras.

À equipe gestora da Escola Estadual Professor Wilson Ramos Brandão, especialmente à Zurssa, pela confiança, incentivo e apoio nesta jornada.

Aos meus alunos, pelo carinho e pela admiração.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), por contribuir com minha formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que permitiu a realização deste trabalho, concedendo-me bolsa de estudos.

Agradeço a todos que, em algum momento, passaram por minha vida e contribuíram com suas experiências para o resultado desta pesquisa.



“Ninguém ignora tudo.  
Ninguém sabe tudo. Todos  
nós sabemos alguma  
coisa. Todos nós  
ignoramos alguma coisa.  
Por isso aprendemos  
sempre.”

Paulo Freire

## RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo principal utilizar as relações fuzzy para diagnosticar pacientes infectados com o vírus transmitido pelo mosquito *Aedes aegypti*, os quais podem ser diagnosticados com dengue, chikungunya ou zika. Para isso utilizamos equações relacionais fuzzy para propor um modelo de diagnóstico médico. A ideia básica é relacionar os sintomas ou sinais de pacientes com essas três doenças. Inicialmente, estudamos conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, por meio de definições, teoremas e exemplos.

Palavras-chave: Conjuntos Fuzzy, Lógica Fuzzy, Relações Fuzzy, Diagnóstico Médico, *Aedes aegypti*, Dengue, Chikungunya, Zika.

## ABSTRACT

This research aims to use the fuzzy relations to diagnose patients infected with the virus transmitted by the mosquito *Aedes aegypti*, which can be diagnosed with dengue, chikungunya or zika. For this we use fuzzy relational equations to propose a model of medical diagnosis. The basic idea is to relate the symptoms or signs of patients with these three diseases. First we studied basic concepts of Fuzzy Sets Theory through definitions, theorems and examples.

Keywords: Fuzzy sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Relations, Medical Diagnosis, *Aedes aegypti*, Dengue, Chikungunya, Zika.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Representação gráfica da função característica do conjunto dos números reais entre 2 e 5.....	28
Figura 1.2. Ilustração de Subconjuntos Fuzzy e Crisp.....	33
Figura 1.3. Representação gráfica da função de pertinência dos números reais próximos de 5.....	34
Figura 1.4. Representação gráfica da função de pertinência dos números reais próximos de 5.....	34
Figura 1.5. Operações com subconjuntos Fuzzy: (a) união; (b) intersecção; (c) complemento.....	37
Figura 1.6. Ilustração dos conjuntos de $\alpha$ -nível.....	43
Figura 1.7. Ilustração dos $\alpha$ -níveis $[A]^\alpha$ e $[A]^0 \neq U$ .....	45
Figura 1.8. Ilustração dos $\alpha$ -níveis $[A]^\alpha$ e $[A]^0 = U$ .....	46
Figura 1.9. Intervalos encaixantes determinados pelos $\alpha$ -níveis e $\beta$ -níveis.....	47
Figura 1.10. Imagem de um subconjunto fuzzy a partir do princípio de extensão para uma função $f$ monotônica.....	51
Figura 1.11. Subconjunto $\hat{f}(A)$ do Exemplo .....	54
Figura 1.12. Obtenção da extensão $\hat{f}$ de $f$ .....	56
Figura 2.1. Representação da relação clássica entre os predadores e suas presas .....	62
Figura 2.2. Relação fuzzy e os vários graus de pertinência.....	62
Figura 2.3. Representação da relação fuzzy usando mapeamento.....	65
Figura 2.4. Representação da relação fuzzy usando mapeamento.....	66
Figura 2.5. Representação da relação fuzzy usando mapeamento com respectivos dígrafos...	67
Figura 3.1. Ilustração gráfica de t-normas triangulares.....	82
Figura 3.2. Ilustração gráfica de t-conormas triangulares.....	88
Figura 4.1. Fase evolutiva do Aedes Aegypti.....	97
Figura 4.2. Modo de transmissão do vírus.....	98
Figura 4.3. Principais sintomas entre dengue, chikungunya e zika.....	102

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1. Propriedades das operações complemento, união e intersecção de conjuntos.....	31
Tabela 1.2. União, intersecção e complementar dos conjuntos $A$ e $B$ .....	37
Tabela 2.1. Relação dos sintomas com as doenças.....	59
Tabela 3.1. Conectivos lógicos.....	75
Tabela 3.2. Tabela verdade do conectivo <b>e</b> .....	76
Tabela 3.3. Tabela verdade do conectivo <b>ou</b> .....	76
Tabela 3.4. Tabela verdade do conectivo <b>não</b> .....	76
Tabela 3.5. Tabela verdade do conectivo <b>se p então q</b> .....	77
Tabela 3.6. Tabela verdade do conectivo $\wedge$ .....	77
Tabela 3.7. Tabela verdade do conectivo $\vee$ .....	78
Tabela 3.8. Tabela verdade do conectivo $\neg$ .....	78
Tabela 3.9. Tabela verdade do conectivo $\Rightarrow$ .....	78
Tabela 4.1. Matriz da relação $R$ : pacientes e respectivos sintomas.....	104
Tabela 4.2. Sinais e sintomas em comum entre dengue, chikungunya e zika.....	105
Tabela 4.3. Matriz da relação $S$ : sintomas e diagnósticos.....	105
Tabela 4.4. Matriz da relação $T$ : padrão de diagnósticos.....	110

# SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	17
CAPÍTULO 1. CONJUNTOS FUZZY .....	20
1.1. História da Lógica .....	22
1.2. Conceitos Básicos da Teoria Clássica de Conjuntos .....	27
1.3. Subconjuntos Fuzzy.....	31
1.4. Operações com Subconjuntos Fuzzy .....	35
1.5. O Conceito de $\alpha$ -nível.....	42
1.6. O Princípio de Extensão de Zadeh .....	49
CAPÍTULO 2. RELAÇÕES FUZZY .....	57
2.1. Relações Fuzzy .....	57
2.2. Formas de Representações e Propriedades das Relações Binárias.....	60
2.3. Composição entre Relações Fuzzy Binárias.....	64
2.4. Equações Relacionais Fuzzy .....	70
3.1. Um pouco de lógica.....	74
3.2. Sobre conectivos básicos da Lógica Fuzzy .....	81
4.1. <i>Aedes Aegypti</i> .....	96
4.2. O modelo matemático.....	103
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	112
REFERÊNCIAS .....	115

## INTRODUÇÃO

Conforme evidencia Lakatos & Marconi [15]:

*"... a característica da pesquisa documental é que a fonte de coleta de dados está restrita a documentos, escritos ou não, constituindo e que se denomina de fontes primárias. Estas podem ser feitas no momento em que o fato ou fenômeno ocorre, ou depois".*

Em outras palavras, o trabalho bibliográfico não é mera repetição do que já foi dito ou descrito sobre o assunto, mas propicia um novo enfoque ou abordagem chegando a conclusões inovadoras. Para isso, articula-se em estudos bibliográficos para construção teórica desse trabalho.

Esta pesquisa pretende mostrar o quão importante pode ser a Lógica Fuzzy, também conhecida como Lógica Difusa, para a Biomedicina enfatizando o processo incerto de diagnosticar várias doenças. Aqui, o foco são pacientes infectados pelo vírus de uma ou mais doenças (dengue, chikungunya ou zika) transmitidas pelo vetor *Aedes aegypti*, o "famoso" mosquito da dengue. Para tanto, as relações fuzzy são relativamente fáceis de se entender e de se usar na prática, além de que o conhecimento matemático não é tão complexo como parece à primeira vista. Assim, utilizando-se de dados coletados em tabelas e representando-os em matrizes, estes valores são convertidos em graus de pertinência. No entanto, é proposto um modelo matemático para o diagnóstico médico utilizando-se de equações relacionais fuzzy.

Com o grande volume de informações provenientes de novas tecnologias médicas utilizadas pelos clínicos, o processo de classificar diferentes tipos de sintomas através de um único nome e determinar o tratamento adequado se mostra um pouco complicado e muitas vezes, portanto, uma doença pode se manifestar em estágios diferentes em pacientes diferentes, além de que um sintoma pode se manifestar em estágios diferentes em pacientes distintos. Entretanto, o conhecimento médico em relação ao sintoma-doença pode gerar dúvidas, incertezas e imprecisões no processo de diagnóstico, enquanto que o conhecimento relativo ao estado do paciente constitui outra. Uma alternativa para incluir essas incertezas no diagnóstico médico foi um modelo que utiliza a Lógica Fuzzy [16] [19] [26].

O termo Lógica (do grego  $\lambda\omicron\gamma\kappa\eta'$  = *logiké* = *lógos*) pode ser definida como a ciência do raciocínio, e foi estudada por várias civilizações na Antiguidade. Porém, foi Aristóteles quem apresentou de maneira mais elaborada os primeiros textos de lógica, originando assim a lógica aristotélica. Sua teoria baseava-se na ideia de que um elemento pertencia a um determinado conjunto se tivesse alguma característica em comum, e caso não tivesse nenhum

dos atributos, este elemento estaria numa outra categoria. Esta foi a base para o cálculo de predicados em que as sentenças são binárias, isto é, ou são verdadeiras ou são falsas, não podendo ser ao mesmo tempo parcialmente verdadeira e parcialmente falsa. O emprego da lógica de Aristóteles levava a uma linha de raciocínio lógico baseado em premissas e conclusões, identificado como silogismo de Aristóteles [11] [16] [17] [18] [36].

Já a Lógica Difusa viola as suposições aristotélicas. O conceito de dualidade, estabelecendo que algo pode coexistir com o seu oposto, faz a lógica difusa parecer natural e inevitável. De fato, presenciamos muitas experiências humanas onde as situações não podem simplesmente ser classificadas como verdadeiras ou falsas, sim ou não, branco ou preto, baixo ou alto, etc. Por exemplo, um sim ou um não, não seria uma resposta completa para perguntas do tipo "*A taxa de glicose no seu sangue está alta ou baixa?*". Na verdade, entre a certeza de ser (sim) e a certeza de não ser (não), existem infinitos graus de incerteza. Porém, para esta imperfeição intrínseca à informação representada numa linguagem natural, pode ser tratada matematicamente pelos graus de pertinência na Lógica Fuzzy.

Contudo, a Lógica Difusa, com base na Teoria dos Conjuntos tem se mostrado muito adequada para tratar "imperfeições" da informação e de forma mais objetiva e preliminar podemos definir essa lógica como sendo uma ferramenta capaz de capturar informações vagas, em geral descritas em uma linguagem natural e convertê-las para um formato numérico, de fácil manipulação pelos computadores da atualidade. Pode ser também definida como a lógica que suporta os modos de raciocínio que são aproximados, ao invés de exatos, baseada na Teoria dos Conjuntos Fuzzy diferindo dos sistemas lógicos tradicionais. Nesta lógica, o raciocínio exato corresponde a um caso limite do raciocínio aproximado, interpretado assim, como um processo de composição difusa. [11] [16].

A lógica em questão, foi introduzida em 1965 por Lotfi A. Zadeh (Universidade da Califórnia em Berkeley) e combina lógica multivalorada, teoria probabilística, inteligência artificial para que possa representar o pensamento humano, ou seja, ligar a linguística e a inteligência humana como os usados em controladores fuzzy. A Zadeh é atribuído o reconhecimento como grande colaborador do controle moderno. Em meados da década de 60, observou que os recursos tecnológicos disponíveis eram incapazes de automatizar as atividades relacionadas a problemas de natureza industrial, biológica ou química que compreendessem situações ambíguas, não passíveis de processamento através da lógica computacional fundamentada na lógica booleana. Procurando então solucionar esses problemas o Prof. Zadeh publicou em 1965 um artigo resumindo os conceitos dos conjuntos



fuzzy, revolucionando o assunto com a criação de sistemas fuzzy, onde o valor verdade de uma proposição pode ser um subconjunto nebuloso de qualquer conjunto parcialmente ordenado, ao contrário dos sistemas lógicos binários, em que o valor verdade só pode assumir dois valores: verdadeiro (V) ou falso (F). Uma das vantagens do uso da Lógica Fuzzy em sistemas dedutíveis é a possibilidade de gerar uma saída lógica a partir de um conjunto de entradas com informações vagas, ambíguas e imprecisas. Neste aspecto, os sistemas fuzzy auxiliam para que as decisões tomadas pela máquina se aproximem cada vez mais das decisões humanas [2] [7] [11] [16] [38].

Essa dissertação está dividida em quatro capítulos, como se segue: o capítulo 1 traz definições e conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, necessários para o desenvolvimento deste trabalho, assim como teoremas, exemplos e ilustrações; no capítulo 2, estuda-se as relações fuzzy; o capítulo 3 aborda noções básicas da Lógica Fuzzy e equações relacionais fuzzy; no capítulo 4 está o modelo matemático para diagnóstico médico por meio de equações relacionais fuzzy para dengue, chikungunya e zika; as considerações finais são feitas no capítulo 5.

## CAPÍTULO 1. CONJUNTOS FUZZY

*"E no entanto, ver-se-á bem que  
não se pode chegar a saber o que  
cada coisa realmente é".*

*(Demócrito de Abdera - Séc. V a.C).*

"Do que se pode ter certeza?" [6].

"*Cogito, ergo sum*", é a resposta de Descartes para os questionamentos da *certeza*. Sua resposta está na raiz de toda especulação filosófica racional, muito questionada até hoje. Na época de Demócrito, os pensadores não eram menos exercitados por tais dilemas epistemológicos, e a tendência dominante entre os pré-socráticos, principalmente entre os sofistas, era a de vagar pelo lado do relativismo, e até mesmo do ceticismo. Contudo, a ausência da certeza, ou seja, a incerteza, é algo que carregamos desde primórdios da humanidade e, no entanto, não é agora que será extinta. Pelo contrário, está sendo cada vez mais estudada, e introduzida na Matemática, principalmente em noções básicas da Lógica Fuzzy ou Lógica Difusa. Já a terminologia conjunto é um conceito fundamental em todos os ramos da Matemática, e não sendo diferente, também serve como base para os estudos sobre a Lógica Difusa.

Quando nos deparamos com situações cotidianas do tipo "você tem que melhorar sua alimentação, está muito gordo" ou "hoje está um calor escaldante", percebemos que nem sempre representam o que queremos expressar. De certo modo, essas expressões representam uma subjetividade, no sentido de que não sabemos definir precisamente, o que exatamente é fazer calor ou ser gordo, pois depende de uma série de variantes. Para tanto, quando trabalhamos com conjuntos fuzzy, tal imprecisão é associada a uma função à qual chamamos de função de pertinência e, deste modo, conseguimos definir o quanto é fazer "muito calor" ou ser "muito gordo".

Um conjunto clássico, ou crisp em inglês, fica bem definido, pois conseguimos identificar claramente se um elemento pertence ou não a um determinado conjunto. Seja A, o conjunto das pessoas obesas com 89 kg ou mais, para uma estatura média de 1,70 m, ou seja, um indivíduo de 1,70 m de altura é considerado obeso se tiver 89 kg ou mais. Assim, uma pessoa de 88,9 kg não pertenceria ao conjunto A? Seria considerado magro? Não, e é nesse contexto que surge a ideia de conjuntos fuzzy e função de pertinência que vamos definir mais adiante.

Nos conjuntos clássicos (crisp), a função característica que determina se um elemento pertence ou não no conjunto, tem contra-domínio  $\{0,1\}$ . Se um elemento está no conjunto, ele tem característica 1, caso contrário tem característica 0. Por exemplo, um cachorro tem característica 1 no conjunto dos mamíferos, enquanto que um peixe tem característica 0 neste mesmo conjunto. Já nos conjuntos fuzzy, a função é chamada de função de pertinência e seu contra-domínio se estende ao intervalo  $[0,1]$  [3]. Podemos definir, por exemplo, uma função  $\varphi$  para o conjunto A, tal que  $\varphi(88,9) = 0,97$ , isto é, uma pessoa de 1,70 m de altura e 88,9 kg tem grau de pertinência 0,97 para obesidade, e deste modo, todas as pessoas poderiam ser consideradas obesas, mas com grau de pertinência entre 0 e 1.

A teoria da Lógica Fuzzy enfrentou forte resistência por parte da comunidade científica inicialmente, em especial pelos grupos de pesquisadores estatísticos norte-americanos. Entretanto, com o passar dos tempos esse preconceito foi superado e muitos pesquisadores vislumbraram as possibilidades que esta teoria oferecia e trabalhos começaram a surgir em todo o mundo, particularmente no Japão, onde a Lógica Fuzzy desenvolveu-se rapidamente [26].

Já na primeira década (1965 - 1975), os teóricos se esforçaram para estender seus fundamentos introduzindo novos conceitos e desenvolvendo outras abordagens dessa teoria, como as relações fuzzy, as variáveis linguísticas, os processos de decisão fuzzy, as medidas fuzzy, sistemas topológicos, álgebra com números fuzzy, etc.. Em 1972, sob a coordenação do professor Toshiro Terano, formou-se no Japão o primeiro grupo de pesquisas em sistemas fuzzy, e em 1974 foi apresentado o primeiro controlador fuzzy criado por E. Mamdani, no Reino Unido. Em 1976, temos a primeira aplicação industrial da Lógica Fuzzy, desenvolvida pelo Circle Cement e SIRA, na Dinamarca, onde um controlador fuzzy incorporava o conhecimento e a experiência dos operários para controlar os fornos das fábricas. Em 1977, Didier Dubois aplicou os conjuntos fuzzy em um estudo sobre condições de tráfego e no mesmo ano surgiu o primeiro sistema especialista fuzzy [26] [30] [37].

Em 1985 foi desenvolvido o primeiro chip fuzzy por Masaki Togai e Hiroyuke Watanabe, no laboratório Bell (EUA). Em 1987 foi inaugurado no Japão, no sistema do metrô de Sendai, o primeiro trem controlado por meio da Lógica Fuzzy. Foi também neste ano que a Yamaha desenvolveu a Yamaha-50, um helicóptero não tripulado totalmente controlado por um controlador fuzzy. Em 1988 começou a operar no Yamaichi Fuzzy Fund, o primeiro sistema de comércio financeiro fuzzy. Mas foi em 1990 que esta teoria atingiu sua popularidade com o lançamento da primeira máquina de lavar roupas, pela Matsushita

Electric Industrial Co, à qual funcionava por um controlador fuzzy, marcando assim o início do desenvolvimento de produtos de consumo [26] [30].

Atualmente, é possível encontrar principalmente no Japão, vários eletrodomésticos cujo sistema é baseado em controles fuzzy (televisão, câmera fotográfica, panela de cozimento de arroz, vídeos, etc.) e existem várias empresas que possuem laboratórios de pesquisas em Lógica Fuzzy para desenvolvimento de seus produtos (Siemens, Daimler-Benz, Klockner-Moeller, SGS-Thomson, General Motors, Motorola, Hewlett-Pckard, etc) [ 27].

Dessa forma nota-se o quão rápido se deu o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos Fuzzy e o quão abrangente tem sido suas aplicações. É notável cada vez mais o interesse por essa teoria por profissionais e pesquisadores das mais diversas áreas, dada a sua capacidade de explorar variáveis linguísticas, da possibilidade de desenvolver raciocínios mais próximos do ser humano, da sua diversidade de operações e de sua potencialidade em aplicações.

## **1.1. História da Lógica**

Ao longo dos tempos, vários questionamentos a respeito de incertezas têm sido preocupações de filósofos e de pesquisadores, pois é um tema que tem gerado muitos debates e controvérsias desde a Grécia Antiga, quando os gregos colocaram explicitamente a questão "*Transformação ou Permanência?*", referindo-se às duas dimensões do pensamento, separadas e até opostas. Os filósofos pré-socráticos, por volta de séc. VI a.C., nas cidades gregas da Ásia Menor, procuravam desenvolver formas de explicação da realidade natural, do mundo que os cercava, independentemente do apelo a divindades e a forças sobrenaturais [2] [17]. Em outras palavras, observavam a natureza e questionavam sobre a origem de tudo, quais os fundamentos de sua existência e procuravam fazer afirmações com base em seus pensamentos sobre o universo na tentativa de explicar as coisas que nele existem.

Dois dos mais importantes filósofos pré-socráticos, Parmênides de Eleia e Heráclito de Éfeso, que foram praticamente contemporâneos (VI - V a.C.), num segundo momento da filosofia pré-socrática e com pensamento menos naturalista, representaram correntes de pensamentos rivais na filosofia grega. O princípio fundamental da filosofia de Heráclito é o "*panta hei*", isto é, tudo corre e o elemento que escolheu para explicar a origem do universo foi o fogo: "*Este mundo, o mesmo de todos os seres, nenhum deus, nenhum homem o fez, mas era, é e será um fogo sempre vivo, acendendo-se em medidas e apagando-se em medidas*".

Afirmava que ninguém banha-se no mesmo rio duas vezes: "*Nos mesmos rios, entramos e não entramos, somos e não somos*" e Crátilo, seu discípulo elevou o pensamento de seu mestre dizendo que não podemos nos banhar nem mesmo uma vez no rio, pois as coisas estão sempre mudando, e o rio não é mais o mesmo, assim como nós também não somos mais os mesmos. Contrapondo-se a Heráclito, Parmênides dizia "a única coisa que existe é o ser - que é o mesmo que pensar". O ser é imutável e imóvel, uno e contínuo, idêntico a si mesmo, Zenão, seu seguidor, justifica a tese do mestre negando a compreensão do movimento dada na época, com o famoso paradoxo da tartaruga e Aquiles, ou seja, o movimento não pode ser tomado como mais básico, como primitivo e como definidor do real [2] [17] [18] [21].

É difícil de analisar estas controvérsias entre os monistas e mobilistas. Do ponto de vista de Heráclito, em que os opostos são complementares e vê no conflito e no movimento os princípios básicos do real, a concepção de Parmênides é insustentável, e para os monistas de eleastas, que busca aquilo que é único, permanente, estável, perfeito e eterno, a posição dos mobilistas é absurda. Uma curiosidade é que a maioria dos filósofos pré-socráticos, exceto Heráclito, acreditavam nesse algo eterno e imutável que sustentavam todas as coisas (*archê*), ou seja, um elemento primordial. Tales pensava que era a água; Anaximedes, o ar; Pitágoras achava que eram os números; Demócrito acreditava que eram os átomos e o vazio, enfim, a certeza e a incerteza foram amplamente debatidas pelos filósofos gregos [2] [18].

Os sofistas, que eram os sábios contemporâneos e opositores de Sócrates ficaram conhecidos por ensinar a arte retórica, uma técnica de argumentação que é a arte de falar bem, mostrar eloquência diante de um público para ganhar sua causa. Essa arte era a postura que os sofistas tinham diante do conhecimento, simplificado num total ceticismo em relação a qualquer tipo de conhecimento absoluto e objetivo, pois não interessa saber como as coisas são, tudo é relativo e depende da interpretação de cada um a respeito delas. Os principais e mais conhecidos sofistas da época foram Protágoras de Abdera (490 - 421 a.C.), Górgias de Leontinos (487 - 380 a.C.), Hípias de Élis, Licofon, Pródicos, que foi inclusive, mestre de Sócrates e Trasímaco, dentre outros de que não temos conhecimentos dos nomes. Protágoras, juntamente com Górgias ensinavam a seus alunos como transformar argumentos fracos em fortes [2] [18].

A lógica surgiu como ciência na Antiguidade. Entre os gregos, diversas escolas trabalharam esse tema, mas o termo lógica foi cunhado por Aristóteles, que apresentou de maneira mais elaborada os primeiros textos sobre este tema desenvolvendo um conjunto de leis que regem o pensamento. Sócrates, Platão e Aristóteles, três dos maiores filósofos que

viveram na Grécia, apresentaram uma contribuição continuada que deu grande impulso para a futura sistematização destes princípios [8] [36].

Sócrates confrontava os sofistas de sua época, e a questão principal era formulada pela pergunta "O que é?" (*Ti Estin*) [2]. Infelizmente não deixou nada por escrito. Platão, que inicialmente compartilhou as ideias de Heráclito e de Parmênides, promovendo uma síntese sobre os mesmos, foi discípulo de Sócrates pelo menos nos últimos dez anos de vida do filósofo e apresentou diálogos que tinham o intuito de fazer a defesa do mestre baseados no método socrático. Provavelmente começou a escrever seus diálogos devido ao impacto de sua morte, de seus ensinamentos e da situação política em que Atenas se encontrava naquela época. Posteriormente, após ter tido contato com os pitagóricos e eleatas, Platão se afasta dos pensamentos de Sócrates e começa a desenvolver sua própria doutrina, formulando a teoria das formas ou ideias [18] [36].

Já para Aristóteles, que foi discípulo da Academia de Platão por 19 anos, não existe o mundo das ideias e as essências estão contidos nas próprias coisas. O conhecimento universal está vinculado à sua Lógica e ao Silogismo. Após a morte de seu mestre, Aristóteles rompe com seus ensinamentos e elabora seu próprio sistema filosófico a partir de uma crítica ao pensamento de Platão, sobretudo à teoria das ideias [18].

Platão e Aristóteles defendiam respectivamente que a dialética e o silogismo fossem empregados em busca da verdade, já os sofistas adotaram a retórica, que é a arte de convencer em busca do melhor e não em busca da verdade, pois esta não existe de maneira absoluta [2].

Górgias, considerado um dos maiores oradores e principais mestres da retórica de sua época foi um cético que viveu na Silícia e negou a verdade absoluta em seu famoso tratado *Da Natureza* ou *Do-não Ser*, ou seja, a impossibilidade do conhecimento em um sentido estável e definitivo: "*nada existe, ainda que algo existisse não se poderia conhecer e, ainda que se pudesse conhecer algo, não se poderia comunicar esse algo a outrém*". Górgias dá grande importância ao *logos* enquanto discurso argumentativo, e em seu *Elogio a Helena* faz a famosa afirmação: "*O logos é um grande senhor*". De certa maneira, o *logos* pode ser visto como enganoso, pois não se pode ter acesso à natureza das coisas, porém tudo de que se dispõe é o discurso. O *logos*, contudo, pode ser persuasivo, e Górgias chega a sustentar que mais importante do que o verdadeiro é o que pode ser provado ou defendido [9] [18].

A breve síntese de alguns pensadores matemáticos e filósofos colocados até aqui tem como objetivo, justificar a dificuldade de dialogar a respeito de certeza ou incerteza. Se procurássemos num dicionário os sinônimos de incerteza, encontraríamos termos como

imprecisão, hesitação, subjetividade, aleatoriedade, duvida, confusão, imprevisibilidade, indecisão, ambiguidade, indefinição, dubiez, etc.

A incerteza proveniente da aleatoriedade de eventos está bastante desenvolvida e atualmente se destaca na Matemática. A Física Quântica, por exemplo, tem se utilizado das teorias estocásticas e o físico W. Heisenberg (1927) em "*Princípio da Incerteza*" relaciona a posição e a velocidade de uma partícula, onde afirma que não se pode conhecer com certeza, e ao mesmo tempo, a posição e a velocidade de uma partícula subatômica [2].

Resolver problemas faz parte do cotidiano da vida das pessoas. No entanto, ao utilizarem determinado conhecimento, se valem de formas distintas de interpretação e posterior resolução dos mesmos. Os conhecimentos subjetivos, que representam informações linguísticas, usualmente são muito difíceis de quantificar utilizando matemática convencional e geralmente são ignorados por engenheiros de projetos, mas frequentemente são utilizados para avaliar seus projetos, pois o mundo em que vivemos não é constituído apenas por fatos absolutamente verdadeiros ou falsos. Para descrever certos fenômenos relacionados em nosso cotidiano, temos utilizado graus que representam qualidades ou verdades parciais ou ainda padrões do melhor (na linguagem sofista) [2]. Esse é o caso, por exemplo, dos conceitos de obeso, alto, fumante, presa, bonito, fome, rápido, etc.

É, no entanto, neste tipo de incerteza que a Lógica Fuzzy tem dado suas principais contribuições. Relacionando, respectivamente em "grupo" de pessoas obesas, altas, fumantes, bonitas, famintas e rápidas. Existem exemplos típicos de "conjuntos" cujas fronteiras podem ser definidas por meios de propriedades subjetivas ou atributos imprecisos, isto é, são consideradas incertas, pois quando falamos em uma pessoa obesa, por exemplo, temos inúmeras colocações, ou seja, um indivíduo com 150 kg é mais obeso que outro com 90 kg. Mesmo definindo que os dois são obesos, eles não têm o mesmo grau de obesidade. São valores incertos. Se dissermos a outrem que dois indivíduos são obesos, não haverá uma distinção de peso, pode ser que tenham o mesmo peso ou haja uma enorme diferença entre ambos, mas não um valor fixo e exato para obesidade.

Fixando no mesmo exemplo das pessoas obesas, uma proposta para formalizar matematicamente tal conjunto poderia ter pelo menos duas abordagens [2]: uma clássica, distinguindo a partir de que medida de peso um indivíduo é considerado obeso. E uma segunda abordagem, menos convencional, é dado de maneira que todos os indivíduos sejam considerados obesos com maior ou menor intensidade, ou seja, com um grau de pertinência. Neste caso, um indivíduo com maior massa corporal terá maior grau de pertinência para a

classe dos obesos e desta forma, podemos dizer que todos os indivíduos pertencem a esta classe, com mais ou menos intensidade.

Foi a partir de desafios como esse, onde é incerta a propriedade que define o conjunto, que surgiu a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que vem se destacando cada vez mais em nosso cotidiano, tanto do ponto de vista teórico como nas aplicações em diversas áreas do estudo.

A palavra "fuzzy" é de origem inglesa, e significa incerto, difuso, nebuloso, vago, impreciso, subjetivo, enfim, significa algo que não está claro. A maioria dos países tem usado a palavra fuzzy sem traduzi-la para sua língua pátria, com algumas exceções como França que traduziu para *nebule* e alguns países latinos que usam a palavra *borroso*, no lugar de fuzzy [2].

A Lógica Difusa é a forma de lógica multivalorada onde os valores lógicos das variáveis podem ser qualquer número pertencente ao conjunto dos reais, entre 0 e 1, onde 0 é totalmente Falso, e 1 significa completamente Verdadeiro, diferentemente da lógica booleana, em que os valores lógicos das variáveis podem ser apenas 0 e 1. Além disso, quando as variáveis linguísticas são usadas, esses graus podem ser manipulados por funções específicas.

Dentro deste conceito, surge em 1965 o termo Lógica Fuzzy, introduzido pelo matemático Lotfi Asker Zadeh [38], professor no Departamento de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley [29] com a proposta da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, quando ele trabalhava com problemas de classificações de conjuntos que não possuíam fronteiras bem definidas (a transição entre conjuntos é suave, e não abrupta) [26]. Sua principal intenção era dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos. Esse seria o primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas. A ideia de Zadeh foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos, criando a noção de grau de pertinência, ou seja, um elemento poderia pertencer parcialmente a um dado conjunto. Para modelar matematicamente esse tal "conjunto", Zadeh propôs o conceito de conjunto fuzzy a partir de uma função de pertinência que indica o quanto um elemento faz parte do conjunto [29].

As implementações da lógica difusa permitem que estados indeterminados possam ser tratados por dispositivos de controle, o que permite avaliar termos linguísticos, como por exemplo, temperatura (quente, médio, morno), velocidade (muito rápido, rápido, médio, lento, muito lento), sentimento de felicidade (radiante, feliz, apático, triste), etc.



## 1.2. Conceitos Básicos da Teoria Clássica de Conjuntos

De maneira semelhante aos termos *ponto* e *reta* da Geometria, os termos *conjunto* e *elemento* da Teoria Clássica de Conjuntos não tem definição, ou seja, são considerados noções primitivas [23]. Conjuntos podem ser caracterizados como uma coleção de objetos distinguíveis que compartilham de algumas características em comum, às quais qualificam a pertencer ou não ao conjunto. Os objetos que formam o conjunto são denominados *elementos do conjunto*.

Geralmente os conjuntos são denotados por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas. A letra  $U$  denota o conjunto universo, que nada mais é que um conjunto que contém todos os outros conjuntos, considerados de certo problema [3]. Assim, todos os conjuntos trabalhados num problema podem ser considerados subconjuntos de um conjunto maior, o *Conjunto Universo*.

A noção de pertinência de elemento a conjunto também é considerada primitiva, ou seja, sem definição. Para indicar que determinado objeto  $x$  é elemento de um conjunto  $A$ , escrevemos  $x \in A$ , e para indicar que  $x$  não é elemento de  $A$ , escrevemos  $x \notin A$ .

**Definição 1.1:** *Seja  $U$  o conjunto universo, então todo subconjunto  $A$  de  $U$  define uma função  $X_A$ , chamada função característica, tal que:*

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

A função característica discrimina quais elementos de  $U$  são elementos do conjunto  $A$  e quais não são, ou seja, para cada  $x \in U$ , se  $x$  é elemento de  $A$ , nota-se  $X_A(x) = 1$ , e se  $x$  não é elemento de  $A$  nota-se  $X_A(x) = 0$ .

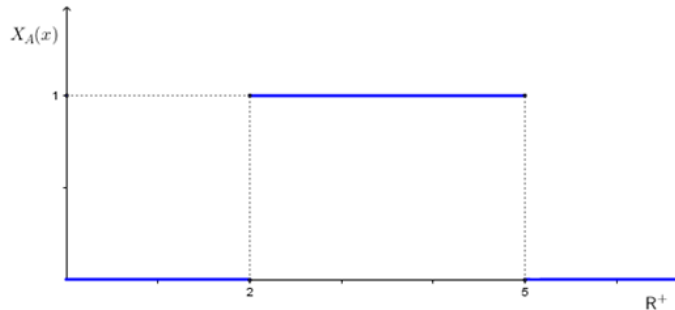
A representação de conjuntos por meio de sua função característica é muito importante, dado que pode ser generalizada para conjuntos fuzzy.

**Exemplo 1.1:** Considere o conjunto dos números reais não negativos ( $\mathbb{R}^+$ ) e seja  $A$ , o conjunto dos números reais entre 2 e 5, inclusive. A função característica do conjunto  $A$  é:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A Figura 1.1 abaixo representa essa situação graficamente:

**Figura 1.1:** Representação gráfica da função característica do conjunto dos números reais entre 2 e 5.



Fonte: Adaptado de [23]

A seguir são revisados algumas definições, proposições e teoremas da teoria clássica de conjuntos, pois são base para os estudos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Foram utilizadas basicamente as referências [23] e [29].

**Definição 1.2:** Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais ( $A = B$ ), se e somente se, tiverem os mesmos elementos. Simbolicamente, tem-se  $A = B$  se, e somente se,  $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ . Se  $A$  e  $B$  não são iguais nota-se  $A \neq B$ .

**Definição 1.3:** O conjunto vazio não tem elementos e é denotado por  $\emptyset$  ou  $\{\}$ .

**Definição 1.4:** Uma família ou coleção de conjuntos é um conjunto cujos elementos são conjuntos, e são notadas com letras maiúsculas em itálico.

**Definição 1.5:** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos, dizemos que  $A$  está contido em  $B$  ( $A \subseteq B$ ), se e somente se, cada elemento de  $A$  for também elemento de  $B$ . Se  $A \subseteq B$ , então  $A$  é subconjunto de  $B$  e, se existir um elemento  $x$ , tal que  $x \in B$  e  $x \notin A$ , então  $A$  é um subconjunto próprio de  $B$  ( $A \subset B$ ). Se  $A \subseteq B$  não se verifica, então escreve-se  $A \not\subseteq B$ . É interessante notar que  $B$  inclui  $A$  ( $B \supseteq A$ ) é o mesmo que  $A \subseteq B$ . Todo conjunto é subconjunto de si próprio e todo conjunto é subconjunto do conjunto universo.

**Proposição 1.1:** Seja  $U$  o conjunto universo e,  $A$  e  $B$  subconjuntos de  $U$ . Então são válidas as afirmações:

- i)  $A \subseteq B$  se, e somente se,  $X_A \leq X_B$ ;
- ii)  $X_{A \cup B} = \max\{X_A, X_B\}$ ;
- iii)  $X_{A \cap B} = \min\{X_A, X_B\}$ ;
- iv) Se  $X/A$  é o conjunto complementar de  $A$  em  $X$ , então  $X_{X/A} = 1 - X_A$ .

**Proposição 1.2:** *Seja  $U$  um conjunto universo e  $\{A_i\}_{i \in I}$ , uma família de subconjuntos de  $U$ .*

*Então são válidas as afirmações:*

- i)  $X \cup_{i \in I} A_i = \sup_{i \in I} X_{A_i}$ ;
- ii)  $X \cap_{i \in I} A_i = \inf_{i \in I} X_{A_i}$ ;

**Proposição 1.3:** *Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos universos e  $X \times Y$ , o produto cartesiano de  $X$  por  $Y$ . Se  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$ , então:*

$$X_{A \times B}(x, y) = \min\{X_A(x), X_B(y)\},$$

para todo par ordenado  $(x, y) \in X \times Y$ .

**Teorema 1.1:** *O conjunto vazio está contido em qualquer outro conjunto. Para qualquer conjunto  $A$ ,  $\emptyset \subseteq A$ .*

**Teorema 1.2:** *Os conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais, se e somente se, se,  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ .*

**Definição 1.6:** *Dado um conjunto  $A$ , a família de todos seus subconjuntos é chamada de conjunto potência de  $A$  e é notada por  $P(A)$ .*

**Teorema 1.3:** *Seja  $A$  um conjunto finito com  $n$  elementos, então  $P(A)$  tem  $2^n$  elementos.*

**Definição 1.7:** *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , temos:*

- i) *União, definido por  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ , onde "ou" tem significado inclusivo, ou seja, umas das seguintes situações deve ser satisfeita:  $x \in A$  e  $x \notin B$ ,  $x \notin A$  e  $x \in B$ ,  $x \in A$  e  $x \in B$ ;*
- ii) *Intersecção, definido por  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ ;*
- iii) *Disjuntos, definidos por  $A \cap B = \emptyset$ .*

**Definição 1.8:** Dado uma família de conjuntos  $A$ , tal que  $A = \{A_{s_1}, A_{s_2}, A_{s_3}, \dots\}$ , em que  $A_{s_i} = A_{s_j}$  se  $s_i = s_j$ . Os elementos do conjunto  $A$  podem ser identificados pelos elementos do conjunto  $I = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ , e escreve-se:

$$A = \{A_i / i \in I\}.$$

Os elementos de  $I$  são chamados de *índices*, o conjunto  $I$  de *conjunto índice*,  $A$  de *conjunto indexado*.

**Definição 1.9:** Seja  $I$  um conjunto índice. Então genericamente, temos:

i) *União*, definida por  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid a \in A_i, \text{ para pelo menos um } i \in I\}$ ;

ii) *Intersecção*, definida por  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{a \mid a \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}$ .

**Definição 1.10:** Uma partição  $p(A)$  de um conjunto  $A$  ( $p(A) = \{A_i \mid i \in I\}$ ), é uma família de subconjuntos distintos e não vazios de  $A$ , tal que  $\bigcup_{i \in I} A_i = A$  e  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para todo  $i, j \in I$  ( $i \neq j$ ). Os conjuntos  $A_i$  são chamados de *blocos da partição*.

**Definição 1.11:** Dados dois conjuntos  $A$  e  $X$ . O conjunto diferença  $X - A$  é o conjunto que contém todos os elementos de  $X$  que não são elementos de  $A$ . Também é conhecido por *complemento relativo*, notado por  $X - A = \{x \mid x \in X \text{ e } x \notin A\}$ .

O complemento absoluto de um conjunto  $A$ , notado por  $A'$  é o conjunto  $U - A$ . Neste caso, temos  $X - A = X \cap A'$ . O complemento absoluto é sempre involutivo, isto é,  $A'' = A$ .

**Teorema 1.4:** Dados dois conjuntos,  $A$  um conjunto qualquer e  $U$  o conjunto universo, então  $A \cup A' = U$  e  $A \cap A' = \emptyset$ .

**Definição 1.12:** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , a diferença simétrica, notada por  $A + B$  é o conjunto definido por  $A + B = (A - B) \cup (B - A)$ .

**Teorema 1.5:** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  subconjuntos do conjunto universo  $U$ , então as seguintes igualdades, descritas na Tabela 1.1 se verificam:

**Tabela 1.1:** Propriedades das operações de complemento, união e intersecção de conjuntos.

<b>Involução</b>	$A'' = A$
<b>Comutativa</b>	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
<b>Associativa</b>	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
<b>Distributiva</b>	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
<b>Idempotência</b>	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
<b>Absorção</b>	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
<b>Absorção por <math>U</math> e <math>\emptyset</math></b>	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
<b>Identidade</b>	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
<b>Contradição</b>	$A \cap A' = \emptyset$
<b>Meio Excluído</b>	$A \cup A' = U$
<b>De Morgan</b>	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Fonte: [13].

### 1.3. Subconjuntos Fuzzy

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico  $A \subset U$  pode ser caracterizado por uma função

característica  $X_A$ . Desta forma,  $X_A$  é uma função cujo domínio é  $U$  e sua imagem está contida no conjunto  $\{0,1\}$ . Nos conjuntos clássicos, sabemos dizer com exatidão se um determinado elemento pertence ou não a um conjunto, isto é, dado um conjunto  $A$  e um elemento  $x$ , dizemos que  $x \in A$  ou  $x \notin A$ . Por exemplo, seja  $A$ , o conjunto dos números pares. Portanto sabemos que  $10 \in A$  e  $11 \notin A$ . Mas, existe casos em que não sabemos dizer exatamente se um elemento pertence a um determinado conjunto ou não, isto é, a pertinência entre elementos e conjuntos não é precisa.

**Exemplo 1.2:** Considere o conjunto dos números reais próximos de 5, ou seja,  $A = \{x \in \mathbb{R}: x \text{ é próximo de } 5\}$ .

Questionando se o número 6 e o número 100 pertencem ao conjunto  $A$ , a resposta seria incerta, pois não sabemos dizer até que ponto podemos dizer objetivamente quando um número está próximo de 5. Uma afirmação "plausível" seria que 6 está mais próximo de 5 do que 100. Se compararmos, por exemplo, com o número 1.000.000, o número 100 está bem próximo de 5.

Permitindo uma espécie de "relaxamento" no conjunto imagem da função característica de um conjunto foi que Zadeh formulou matematicamente um subconjunto fuzzy [38]. E, assim como um conjunto clássico fica determinado pela sua função característica, um conjunto fuzzy fica determinado pela sua função de pertinência.

**Definição 1.14:** *Seja  $U$  o conjunto universo clássico. Um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  ( $F \subseteq U$ ) é caracterizada por uma função  $\varphi_F : U \rightarrow [0,1]$  pré fixada, chamada função grau de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ .*

O valor  $\varphi_F(x) \in [0,1]$  indica o grau de pertinência com que o elemento  $x$  de  $U$  está no conjunto fuzzy  $F$ , sendo  $\varphi_F(x) = 0$  e  $\varphi_F(x) = 1$  indicando, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa do elemento  $x$  ao conjunto fuzzy  $F$ . Formalmente, a definição de subconjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra-domínio da função característica, que é o conjunto  $\{0,1\}$ , para o intervalo  $[0,1]$ . Assim, podemos dizer que um conjunto clássico é um caso particular de um conjunto fuzzy [2].

Um subconjunto fuzzy  $F$  é composto por elementos  $x$  de um conjunto clássico  $U$  com um valor de pertinência a  $F$ , dado por  $\varphi_F(x)$ . Assim, pode-se dizer que um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é dado por um conjunto clássico de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)) / x \in U\}.$$

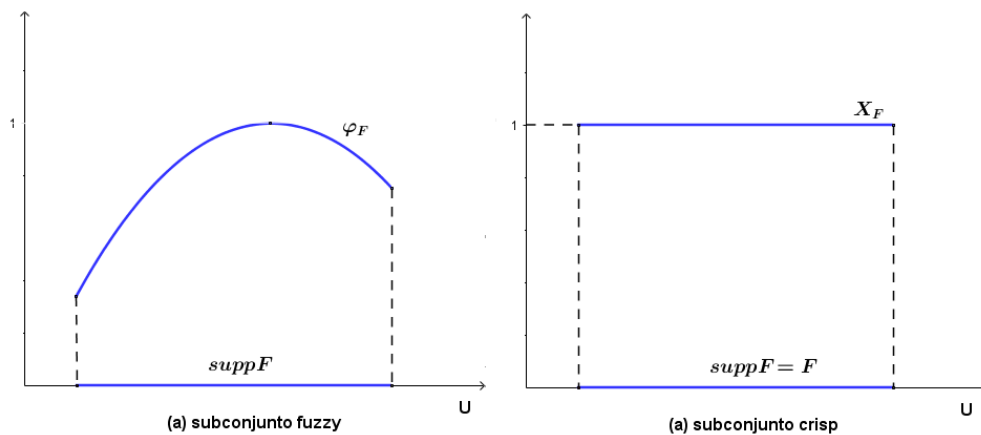
O subconjunto clássico de  $U$  definido por

$$\text{supp } F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}.$$

é denominada suporte de  $F$  e é fundamental sua participação na interrelação entre as teorias de conjuntos clássica e fuzzy [2].

Diferentemente do *subconjunto* fuzzy, o suporte de um subconjunto *crisp* sempre coincide com o próprio conjunto. A Figura 1.2 ilustra esse fato.

**Figura 1.2:** Ilustração de Subconjuntos Fuzzy e Crisp



Fonte: Adaptado de [2].

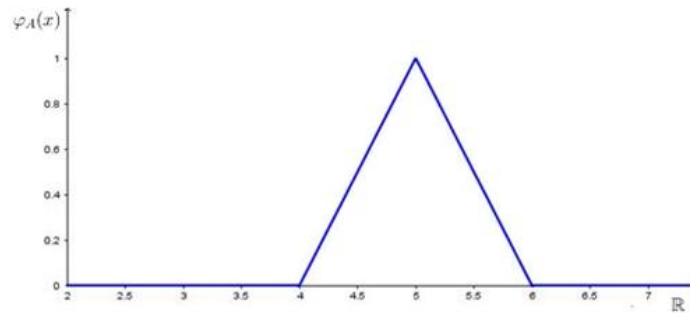
Veja agora, um exemplo de conjuntos fuzzy.

**Exemplo 1.3:** Utilizando-se do mesmo Exemplo 1.2, podemos definir  $\varphi_A(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ , que associa  $x \in \mathbb{R}$  a um valor próximo ao ponto 5, como:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - |x - 5| & \text{se } x \in [4,6] \\ 0 & \text{se } x \notin [4,6] \end{cases},$$

cuja representação gráfica é apresentada na Figura 1.3:

**Figura 1.3:** Representação gráfica da função de pertinência dos números reais próximos de 5



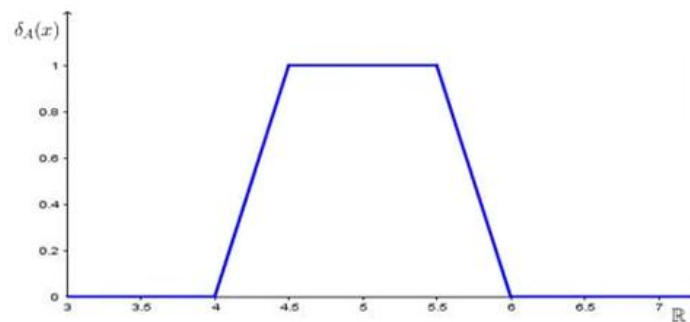
Dessa forma,  $\varphi_A(4,5) = 0,5$  e  $\varphi_A(6,5) = 0$ . Verifica-se, portanto, que  $x = 4,5$  é um elemento de  $A$  com grau de pertinência 0,5 e  $x = 6,5$  possui grau de pertinência 0 para o mesmo conjunto  $A$ , ou seja, não é um ponto próximo de 5 neste caso.

Observa-se aqui que a função de pertinência não é única, ou seja, tem-se uma subjetividade do termo "próximo de " e pode-se, então, definir uma função de pertinência mais conveniente. Suponha, por exemplo, que é suficiente estar no intervalo  $[4,5; 5,5]$  para que um número seja próximo de 5 com grau de pertinência 1 e é definida assim, uma nova função de pertinência para  $A$ , representada por  $\delta_A(x)$  [3]:

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 4 \\ 2x - 8 & \text{se } 4 \leq x < 4,5 \\ 1 & \text{se } 4,5 \leq x \leq 5,5 \\ -2x + 12 & \text{se } 5,5 < x \leq 6 \\ 0 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

cujo gráfico é ilustrado na Figura 1.4.

**Figura 1.4:** Representação gráfica da função de pertinência dos números reais próximos de 5



Com o exemplo 1.3, percebe-se que a função de pertinência pode ser elaborada de acordo com o termo subjetivo do problema em questão, ou seja, de como se quer avaliar o



termo "próximo". A subjetividade está exatamente na escolha do raio da "vizinhança". Especificamente neste caso, todos os valores desta vizinhança estão próximos de 5 com o mesmo grau de pertinência que é 1.

Do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, qualquer uma das funções de pertinência usada no exemplo 1.3 pode representar o nosso conjunto fuzzy A. Porém cada uma destas funções produzem conjuntos fuzzy distintos.

Funções de pertinência fuzzy apresentam os aspectos fundamentais de todas as ações teóricas de sistema fuzzy. Uma função de pertinência é uma função numérica gráfica ou tabulada que atribui valores de pertinência *fuzzy* para valores de uma variável em seu conjunto universo. Deve-se lembrar que o universo de uma variável representa o intervalo numérico de todos os possíveis valores reais que uma variável específica pode assumir [29].

#### 1.4. Operações com Subconjuntos Fuzzy

Nesta seção, estende-se as operações básicas de conjuntos clássicos a conjuntos fuzzy, como união, intersecção e complementação.

Sejam  $A$  e  $B$ , dois subconjuntos fuzzy de  $U$ , com funções de pertinência  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$ , respectivamente. Diz-se que  $A$  é subconjunto fuzzy de  $B$  ( $A \subset B$ ), se  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$  para todo  $x \in U$ .

**Definição 1.15:** *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , tem-se:*

i) *União entre  $A$  e  $B$ , notada por  $A \cup B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{(A \cup B)}(x) = \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}.$$

Esta definição é uma extensão do caso clássico de conjuntos, pois para quaisquer conjuntos *crisp*  $A$  e  $B$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
X_{A \cup B}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cup B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cup B \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases} \\
&= \max_{x \in U} \{X_A(x), X_B(x)\}.
\end{aligned}$$

ii) *Intersecção entre A e B, notada por  $A \cap B$  é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{(A \cap B)}(x) = \min_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}.$$

De maneira similar, essa definição também é uma extensão da definição de conjuntos clássicos. Para quaisquer conjuntos fuzzy A e B, tem-se:

$$\begin{aligned}
\min_{x \in U} \{X_A(x), X_B(x)\} = 1 &\Leftrightarrow X_A(x) = 1 \text{ e } X_B(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap B, x \in U,
\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
\min_{x \in U} \{X_A(x), X_B(x)\} = 0 &\Leftrightarrow X_A(x) = 0 \text{ ou } X_B(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \notin A \cap B, x \in U.
\end{aligned}$$

Logo:

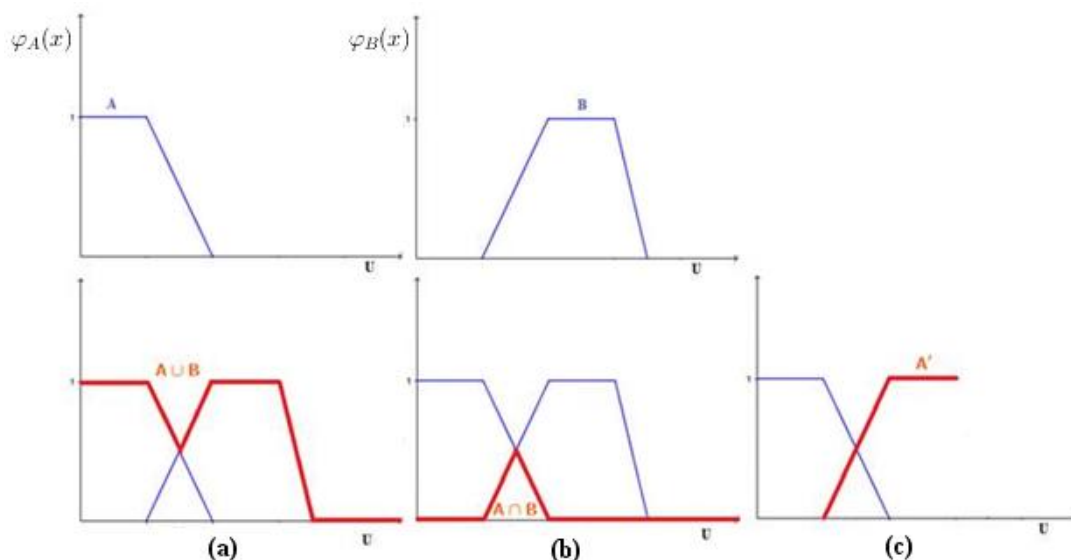
$$\min_{x \in U} \{X_A(x), X_B(x)\} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cap B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases}, x \in U.$$

iii) *Complementar de A, é o subconjunto fuzzy  $A'$  (ou  $\bar{A}$ ) de U, cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U.$$

Veja graficamente na Figura 1.5 os casos apresentados na Definição 1.15

**Figura 1.5:** Operações com subconjuntos fuzzy: (a) união; (b) intersecção; (c) complemento.



**Exemplo 1.4:** Suponha que o conjunto universo  $U$  seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam  $A$  e  $B$  os subconjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e mialgia, respectivamente. A Tabela 1.2 ilustra as operações de união, intersecção e complemento:

**Tabela 1.2:** União, intersecção e complementar dos conjuntos  $A$  e  $B$ .

Paciente	Febre: $A$	Mialgia: $B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A'$	$A \cap A'$	$A \cup A'$
1	0,8	0,7	0,8	0,7	0,2	0,2	0,8
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
3	0,5	0,3	0,5	0,3	0,5	0,5	0,5
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,3	1,0	0,3	0,0	0,0	1,0

Fonte: Adaptado de [2].

Os valores indicados nas colunas, exceto os da primeira, significam os graus com que cada paciente pertence aos conjuntos fuzzy  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A'$ ,  $A \cap A'$  e  $A \cup A'$ , respectivamente, onde  $A$  e  $B$  são supostamente dados para exemplificar a Definição 1.15.

Na coluna  $A \cap A'$ , o valor 0,2 indica que o paciente 1 está tanto no grupo dos febris como dos não febris, o que é um fato absurdo na teoria clássica de conjuntos na qual temos a lei do terceiro excluído, ou seja,  $A \cap A' = \emptyset$ .

**Definição 1.16:** Dados  $A$  e  $B$ , dois subconjuntos fuzzy de  $U$ , diz-se que  $A$  e  $B$  são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é,  $\varphi_A(x) = \varphi_B(x), \forall x \in U$ .

**Proposição 1.4:** As operações entre subconjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades:

- i)  $A \cup B = B \cup A$
- ii)  $A \cap B = B \cap A$
- iii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- iv)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- v)  $A \cup A = A$
- vi)  $A \cap A = A$
- vii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- viii)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- xix)  $A \cap \emptyset = \emptyset$  e  $A \cup \emptyset = A$
- x)  $A \cap U = A$  e  $A \cup U = U$
- xi)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  e  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  (leis De Morgan)

A demonstração de cada propriedade é uma aplicação direta das propriedades de máximo e mínimo entre funções, ou seja:

$$\begin{aligned} \max[\varphi(x), \psi(x)] &= \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) + |\varphi(x) - \psi(x)|] \\ \min[\varphi(x), \psi(x)] &= \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)|], \end{aligned}$$

onde,  $\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  são funções com imagem em  $\mathbb{R} [2]$ .

Aqui, será demonstrado que as 11 propriedades acima são válidas para subconjuntos fuzzy  $A$ ,  $B$  e  $C$  de  $U$ :

i)

$$\begin{aligned} \varphi_{(A \cup B)}(x) &= \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \\ &= \max_{x \in U} \{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} \\ &= \varphi_{(B \cup A)}(x), \forall x \in U \end{aligned}$$

$$\therefore A \cup B = B \cup A.$$

■

ii) Análogo a (i).

iii)

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x) \} \\ &= \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \max \{ \varphi_B(x), \varphi_C(x) \} \}.\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) &= \max_{x \in U} \{ \varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x) \} \\ &= \max_{x \in U} \{ \max \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, \varphi_C(x) \}.\end{aligned}$$

Considerando os seguintes casos:

- 1)  $\varphi_A(x) \geq \varphi_B(x) \geq \varphi_C(x)$
- 2)  $\varphi_A(x) \geq \varphi_C(x) \geq \varphi_B(x)$
- 3)  $\varphi_B(x) \geq \varphi_A(x) \geq \varphi_C(x)$
- 4)  $\varphi_B(x) \geq \varphi_C(x) \geq \varphi_A(x)$
- 5)  $\varphi_C(x) \geq \varphi_A(x) \geq \varphi_B(x)$
- 6)  $\varphi_C(x) \geq \varphi_B(x) \geq \varphi_A(x)$

Para o caso (1), tem-se:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x) \} \\ &= \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \max \{ \varphi_B(x), \varphi_C(x) \} \} \\ &= \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \} \\ &= \varphi_A(x),\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}\varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) &= \max_{x \in U} \{ \varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x) \} \\ &= \max_{x \in U} \{ \max \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, \varphi_C(x) \} \\ &= \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_C(x) \} \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

E, deste modo segue a igualdade.

$$\therefore A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Para os demais casos, a análise é feita de maneira análoga. ■

iv) Análogo a (iii).

v)

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup A}(x) &= \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_A(x)\} \\ &= \varphi_A(x).\end{aligned}$$

$$\therefore A \cup A = A. \quad \blacksquare$$

vi) Análogo a (v).

vii)

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)\} \\ &= \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \min\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\}.\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\varphi_{((A \cup B) \cap (A \cup C))}(x) &= \min_{x \in U} \{\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_{A \cup C}(x)\} \\ &= \min_{x \in U} \{\max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\}\}.\end{aligned}$$

Considere novamente os casos vistos em (iii), observe que a propriedade também é válida para (1), os demais seguem de modo análogo.

Assim, para o caso (1), tem-se:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)\} \\ &= \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \min_{x \in U} \{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\} \\ &= \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \varphi_A(x),\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
\varphi_{((A \cup B) \cap (A \cup C))}(x) &= \min_{x \in U} \{ \varphi_{A \cup B}(x), \varphi_{A \cup C}(x) \} \\
&= \min_{x \in U} \{ \max\{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}, \max\{ \varphi_A(x), \varphi_C(x) \} \} \\
&= \min_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_A(x) \} \\
&= \varphi_A(x).
\end{aligned}$$

E assim segue a igualdade.

$$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$



viii) Análogo a (vii).

xix)

$$\begin{aligned}
\varphi_{A \cap \emptyset}(x) &= \min_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_{\emptyset}(x) \} \\
&= \min_{x \in U} \{ \varphi_A(x), 0 \} \\
&= 0 = \varphi_{\emptyset}(x).
\end{aligned}$$

$$\therefore A \cap \emptyset = \emptyset.$$

E:

$$\begin{aligned}
\varphi_{A \cup \emptyset}(x) &= \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_{\emptyset}(x) \} \\
&= \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), 0 \} \\
&= \varphi_A(x).
\end{aligned}$$

$$\therefore A \cup \emptyset = A.$$



x) Análogo a xix.

xi)

Neste item, temos uma das leis De Morgan.

Seja  $\varphi_A$  a função de pertinência associada ao subconjunto A. Então:

$$\begin{aligned}
\varphi_{A \cup B'} &= \max_{u \in U} [1 - \varphi_A(u), 1 - \varphi_B(u)] \\
&= \frac{1}{2} [(1 - \varphi_A(u)) + (1 - \varphi_B(u)) + |\varphi_A(u) - \varphi_B(u)|] \\
&= \frac{1}{2} [2 - (\varphi_A(u) + \varphi_B(u)) - |\varphi_A(u) - \varphi_B(u)|] \\
&= 1 - \frac{1}{2} [\varphi_A(u) + \varphi_B(u) - |\varphi_A(u) - \varphi_B(u)|] \\
&= 1 - \min_{u \in U} [\varphi_A(u), \varphi_B(u)] \\
&= 1 - \varphi_{A \cap B}(u) \\
&= \varphi_{(A \cap B)'}(u).
\end{aligned}$$

$$\therefore A \cup B' = (A \cap B)'. \quad \blacksquare$$

## 1.5. O Conceito de $\alpha$ -nível

O conjunto de todos os elementos que pertencem a um conjunto fuzzy  $A$ , com pelo menos grau  $\alpha$  é chamado de  $\alpha$ -nível, e denotado por  $[A]^\alpha$ .

**Definição 1.16:** Dado um subconjunto fuzzy  $A$  de  $U$ , e  $\alpha \in [0,1]$ , o  $\alpha$ -nível de  $A$  é o subconjunto clássico de  $U$ , definido por:

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}, \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Assim, o conjunto  $[A]^\alpha$  consiste nos elementos de  $U$  cujo grau de pertinência é maior ou igual a  $\alpha$ , sendo que o maior nível é  $\alpha = 1$ , e determina um conjunto de  $U$  ao qual pertence completamente a  $A$ . É fácil verificar que  $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$  e  $\beta > \alpha$ . De fato:

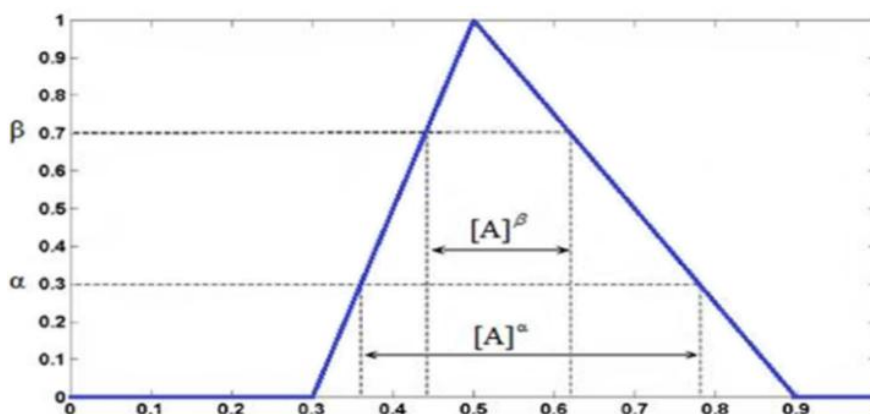
Se  $\alpha < \beta$ , então  $x \in [A]^\beta \implies \varphi_A(x) > \beta > \alpha$ , para todo  $x \in U$ .

Logo  $x \in [A]^\alpha$ . E, portanto,  $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$ . \blacksquare



Veja na Figura 1.6, a ilustração gráfica dos conjuntos de  $\alpha$ -níveis. Note ainda que estes conjuntos de  $\alpha$ -níveis são conjuntos *crisp*:

**Figura 1.6:** Ilustração dos Conjuntos de  $\alpha$ -nível.



Fonte: [19]

A definição de  $\alpha$ -nível é muito importante, pois fornece uma maneira diferente de se considerar um conjunto fuzzy. Quando a função de pertinência determina completamente um conjunto fuzzy, seus valores pertencem ao intervalo  $[0,1]$ , então o conjunto fuzzy  $A$  pode ser descrito pela união de todos os conjuntos  $\alpha$ -níveis:  $A = \cup_{\alpha} A_{\alpha}$ ,  $\alpha \in [0,1]$ . Em outras palavras, cada conjunto fuzzy pode ser representado pela agregação de seus conjuntos de  $\alpha$ -níveis, isto é, todo conjunto fuzzy pode ser decomposto em uma família de  $\alpha$ -níveis. Os problemas formulados na estrutura dos conjuntos fuzzy podem ser resolvidos utilizando técnicas não-fuzzy, aproveitando o formalismo clássico e resultados disponíveis. Os vários conceitos importantes na análise difusa, como diferenciabilidade e integrabilidade são construídos a partir dos conceitos de  $\alpha$ -níveis, desenvolvidos por Dubois & Prade, Kaleva, Ralescu, Seikkala, dentre outros [26] [19].

**Definição 1.17:** Seja  $A$  um subconjunto fuzzy de  $U$ . o  $\alpha$ -nível zero é definido como o fecho do suporte de  $A$ , ou seja,  $[A]^0 = \overline{\text{supp} A}$ .

**Definição 1.18:** Um subconjunto fuzzy  $(A, \varphi_A)$  de  $A$  é dito normal se todos os seus  $\alpha$ -níveis forem não vazios, isto é,  $[A]^1 \neq \emptyset$ .

**Exemplo 1.5:** Seja  $U = \mathbb{R}$  e  $A \subset \mathbb{R}$ , um subconjunto fuzzy com a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x-4 & , \text{ se } 4 \leq x \leq 5 \\ 6-x & , \text{ se } 5 < x \leq 6 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

Para  $0 < \alpha \leq 1$ , tem-se:

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\},$$

logo:

$$\varphi_A(x) \geq \alpha > 0 \Rightarrow \varphi_A(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [4,5] \text{ ou } x \in ]5,6].$$

Para  $x \in [4,5]$ , tem-se:

$$\varphi_A(x) = x-4 \geq \alpha \Rightarrow x \geq 4+\alpha.$$

Para  $x \in ]5,6]$ , tem-se:

$$\varphi_A(x) = 6-x \geq \alpha \Rightarrow 6-\alpha \geq x,$$

logo:

$$4+\alpha \leq x \leq 6-\alpha \Rightarrow x \in [4+\alpha, 6-\alpha].$$

Portanto:

$$[A]^\alpha = [4+\alpha, 6-\alpha], \quad \text{para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Para  $\alpha = 0$ , tem-se:

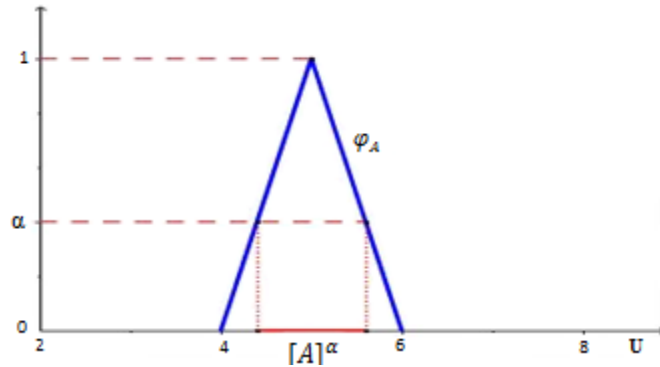
$$[A]^0 = \overline{\text{supp}A}, \quad \text{onde } \overline{\text{supp}A} = \{x \in U; \varphi_A(x) > 0\} = ]4,6[.$$

Logo:

$$[A]^0 = \overline{\overline{\text{supp}A}} = \overline{]4,6[} = [4,6].$$

Observe na Figura 1.7, a ilustração gráfica dos  $\alpha$ -níveis  $[A]^\alpha$  e  $[A]^0 \neq U$ .

**Figura 1.7:** Ilustração dos  $\alpha$ -níveis  $[A]^\alpha$  e  $[A]^0 \neq U$



No exemplo acima, temos  $[A]^0 \neq U$ , o que mostra que nem sempre temos  $[A]^0 = U$ . Veremos agora um exemplo em que  $[A]^0 = U$ .

**Exemplo 1.6:** Sejam  $U = [0,1]$  e  $A \subset U$  subconjunto fuzzy cuja função de pertinência é dada por  $\varphi_A(x) = 4(x - x^2)$  [2].

Sendo  $[A]^\alpha = \{x \in [0,1] : \varphi_A(x) \geq \alpha\}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} 4(x - x^2) \geq \alpha &\Rightarrow x - x^2 \geq \frac{\alpha}{4} \Rightarrow x^2 - x \leq -\frac{\alpha}{4} \\ &\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq -\frac{\alpha}{4} \\ &\Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{4}} \\ &\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$-\frac{\sqrt{1-\alpha}}{2} + \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2} + \frac{1}{2},$$

e, no entanto:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha} + \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha} + \frac{1}{2}.$$

Logo:

$$[A]^\alpha = \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

E, para  $\alpha = 0$ , tem-se:

$$4(x - x^2) > 0 \Rightarrow x - x^2 > 0 \Rightarrow x(1 - x) > 0.$$

Assim, tem-se que  $x > 0$  e  $1 - x > 0$  ou  $x < 0$  e  $1 - x < 0$ . Mas, como  $x \in [0,1]$ , ocorre a primeira condição, ou seja,  $x > 0$  e  $x < 1$ .

Logo:

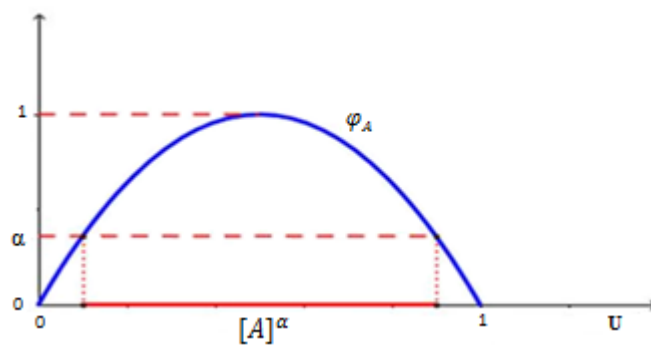
$$\overline{\text{supp} A} = [0,1].$$

Assim:

$$[A]^0 = \overline{\text{supp} A} = ]0,1[ = [0,1] = U.$$

Observa-se na Figura 1.8, a ilustração gráfica dos  $\alpha$ -níveis  $[A]^\alpha$  e  $[A]^0 = U$ .

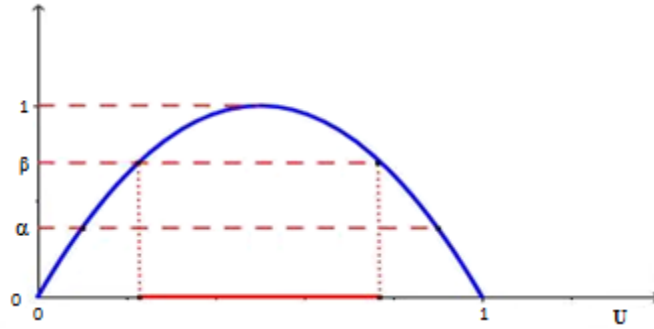
**Figura 1.8:** Ilustração dos  $\alpha$ -níveis  $[A]^\alpha$  e  $[A]^0 = U$



**Teorema 1.6:** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy de  $U$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $A = B$  é que  $[A]^\alpha = [B]^\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$ .*

Veja na Figura 1.9, uma ilustração gráfica dos intervalos encaixantes determinados pelos  $\alpha$ -níveis e  $\beta$ -níveis e em seguida a demonstração do Teorema.

**Figura 1.9:** Intervalos encaixantes determinados pelos  $\alpha$ -níveis e  $\beta$ -níveis



*Demonstração [2]:*

Supõe-se que  $A = B$ , então:

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} = \{x \in U : \varphi_B(x) \geq \alpha\} = [A]^\beta.$$

Por outro lado, se  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0,1]$ , supõe-se  $A \neq B$ . Então:  
 $\exists x \in U \setminus \varphi_A(x) \neq \varphi_B(x)$ , isto é,  $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$  ou  $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ .

Sem perda de generalidade, suponha  $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$ . Então, tome  $\alpha = \varphi_A(x)$ .

Se  $x \in [A]^{\varphi_A(x)}$ , e como  $\varphi_A(x) > \varphi_B(x) = \alpha$ , então  $x \notin [B]^{\varphi_A(x)}$ . Assim existe um  $\alpha$ -nível  $\varphi_A(x)$ , tal que  $[A]^{\varphi_A(x)} \neq [B]^{\varphi_A(x)}$ , que contradiz a hipótese  $[A]^\alpha = [B]^\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$ . E, de maneira análoga, chega-se a uma contradição se admitir  $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ .

$\therefore A = B$

■

Uma consequência deste teorema é a existência de uma relação entre a função de pertinência de um subconjunto fuzzy e as funções características de seus  $\alpha$ -níveis, ou seja:

$$\varphi_A(x) = \max_{\alpha \in [0,1]} \min[\alpha, X_{[A]^\alpha}(x)], \text{ onde } X_{[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [A]^\alpha \\ 0 & \text{se } x \notin [A]^\alpha \end{cases}.$$

**Proposição 1.5:** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy. Usando a definição de  $\alpha$ -nível, pode-se elencar as seguintes propriedades:*

- i)  $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ ,
- ii)  $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$ .

*Demonstração:*

- i) Se  $x \in [A \cup B]^\alpha$ , então  $\varphi_{A \cup B}(x) \geq \alpha$ .

Como  $\varphi_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$ , então:

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} \varphi_A(x), & \text{se } \varphi_A(x) > \varphi_B(x) \\ \varphi_B(x), & \text{se } \varphi_A(x) < \varphi_B(x) \end{cases}.$$

Logo,  $\varphi_A(x) \geq \alpha$  ou  $\varphi_B(x) \geq \alpha$ .

Portanto,  $x \in [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ .

Por outro lado, e  $x \in [A \cup B]^\alpha$ , então  $x \in [A]^\alpha$  ou  $x \in [B]^\alpha$ . Logo  $\varphi_A(x) \geq \alpha$  ou  $\varphi_B(x) \geq \alpha$ .

Desse modo  $\max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha$ , e portanto,  $\varphi_{A \cup B}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [A \cup B]^\alpha$ .

$\therefore [A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ .

ii) *Demonstração análoga a anterior.*

■

Lembrando que o suporte de um conjunto fuzzy  $A$  é o conjunto clássico:

$$\text{supp } A = \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\},$$

e, se o suporte de  $A$  for finito ( $\text{supp } A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ) com  $n$  elementos, é comum usarmos para descrever tal conjunto, a seguinte notação:

$$A = \varphi_A(x_1) / x_1 + \varphi_A(x_2) / x_2 + \dots + \varphi_A(x_n) / x_n = \sum_{i=1}^n \varphi_A(x_i) / x_i.$$

E, caso contrário, quando o conjunto fuzzy  $A$ , tem suporte enumerável:

$$A = \varphi_A(x_1) / x_1 + \varphi_A(x_2) / x_2 + \dots + \varphi_A(x_n) / x_n = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / x_i.$$

Vale notar que o símbolo / não indica divisão, e sim a associação de elemento com seu respectivo grau de pertinência  $\varphi_A(x_i)$ . O símbolo + não significa adição, bem como  $\sum$  não significa somatório. É apenas uma forma de conectar os elementos de  $U \subset A$  com seus respectivos graus.

**Exemplo 1.7:** Seja  $A$  o subconjunto fuzzy dos reais representados por:

$$A = \sum_{i=1}^n \varphi_A(x_i) / x_i = 0,3/1 + 0,9/2 + 0,82/3 + 0,1/5 + 1/7 + 0,5/10$$

Como  $\varphi_{A'}(1) = 0,7$ ,  $\varphi_{A'}(2) = 0,1$ , ...,  $\varphi_{A'}(10) = 0,5$ , então denota-se  $A'$  por:

$$A' = \sum_{i=1}^n [1 - \varphi_A(x_i)] / x_i = 0,7/1 + 0,1/2 + 0,18/3 + 0,9/5 + 0/7 + 0,5/10$$

Neste caso, o 0,15-nível de  $A$  e  $A'$ , por exemplo, são dados respectivamente por:

$$[A]^{0,15} = \{1, 2, 3, 7, 10\} \text{ e } [A']^{0,15} = \{1, 3, 5, 10\}.$$

## 1.6. O Princípio de Extensão de Zadeh

O Princípio de Extensão permite mapear conjuntos fuzzy de um domínio em conjuntos fuzzy de outro domínio a partir de uma função clássica e surgiu da necessidade de se aplicar uma função clássica a argumentos imprecisos. Neste sentido, se tem uma função  $f$  e precise aplicá-la a argumentos fuzzy, então deve-se recorrer ao princípio de extensão [26].

O argumento fuzzy descreve a distribuição de possibilidades do argumento da função  $f$  e, no entanto, para cada valor que a variável da função pode assumir, o funcional produz sua possível imagem fornecendo também a distribuição de possibilidades dessa imagem. Vale ressaltar que, dependendo da função, pode ocorrer que diferentes valores de entrada sejam mapeados no mesmo valor de saída, como ocorre com funções não injetoras e neste caso, é preciso determinar a possibilidade de cada um dos valores de saída através da combinação dos graus de pertinência de todos os valores de entrada que mapeiam o mesmo valores de saída, que pode ser feito usando o operador *sup*. A Figura 1.10 é uma ilustração gráfica de mapeamento de uma distribuição de possibilidades para uma função monotônica, em que  $A$  e  $B$  são conjuntos fuzzy.

O Princípio de Extensão de Zadeh para uma função  $f : X \rightarrow Z$ , tem por objetivo indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy  $A$  de  $X$  por meio de  $f$ , esperando que esta imagem seja um novo subconjunto fuzzy de  $Z$ .

**Definição 1.18:** Sejam  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$  e  $f$  uma função, tal que  $f : X \rightarrow Z$ . A extensão de Zadeh de  $f$  é a função  $\hat{f}$  que, aplicada a  $A$  fornece o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde  $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$  denomina-se a pré-imagem de  $z$ .

Observa-se que se  $f$  for bijeção de  $X$  em  $Z$ , então a função de pertinência de  $\hat{f}(A)$  é dado por  $\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \max_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x)$ , já que dado  $z \in Z$ , existe um único  $x \in X$  com  $f(x) = z$ .

Logo  $f^{-1}(z) \neq \emptyset$ .

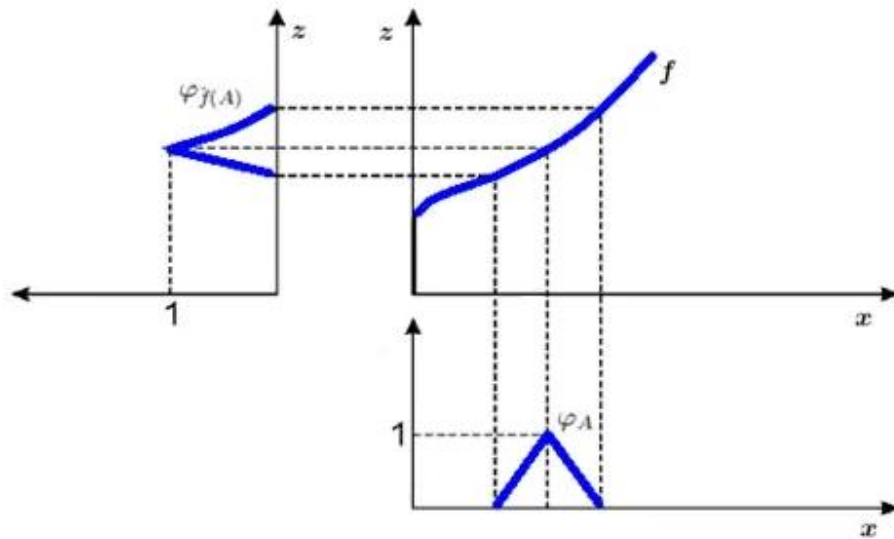
No entanto, a unicidade deste elemento garante que  $\max_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) = \varphi_A(f^{-1}(z))$  e, deste modo tem-se:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \varphi_A(f^{-1}(z)).$$

Para o caso em que  $f$  é bijetora, veja na Figura 1.10, uma ilustração gráfica para a obtenção da extensão  $\hat{f}$  de  $f$ .



**Figura 1.10:** Imagem de um subconjunto fuzzy a partir do princípio de extensão para uma função  $f$  monotônica.



Fonte: Adaptado de [19]

Se  $f$  for injetora, tem-se que  $z = f(x)$  pertence ao subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ , com o mesmo grau  $\alpha$  com que  $x$  pertence a  $A$ , o que pode não ocorrer se  $f$  não for injetora. De fato:

$$x \in [A]^\alpha \Leftrightarrow \varphi_A(x) \geq \alpha, \alpha \in [0,1].$$

Assim:

$$\begin{aligned} \varphi_A(f^{-1}(z)) \geq \alpha &\Rightarrow \varphi_{\hat{f}(A)}(z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow z \in [\hat{f}(A)]^\alpha. \end{aligned}$$

Seja  $f : X \rightarrow Z$  uma função injetora e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ , enumerável, e dado por  $A = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / x_i$ , então, o Princípio de Extensão garante que  $\hat{f}(A)$  é um subconjunto fuzzy de  $Z$ , dado por:

$$\hat{f}(A) = \hat{f}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i) / f(x_i).$$

Este princípio estende o conceito de uma função aplicada a um subconjunto clássico de  $X$ , isto é,  $f : X \rightarrow Z$  e  $A \subset X$  um subconjunto clássico. A função de pertinência de  $A$  é sua função característica.

Portanto, a extensão de Zadeh de  $f$  aplicada a  $A$ , é o subconjunto  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função característica é dada por:

$$\begin{aligned}\varphi_{\hat{f}(A)}(z) &= \max_{\{x: f(x)=z\}} X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in f(A) \\ 0 & \text{se } z \notin f(A) \end{cases} \\ &= X_{f(A)}(z), \forall z.\end{aligned}$$

Deste modo, para todo  $z \in Z$  tem-se que  $\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = X_{f(A)}(z) \Leftrightarrow \hat{f}(A) = f(A)$ , sendo:

$$f(A) = \{f(a); a \in A\}.$$

E, conseqüentemente:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = [f(A)]^\alpha = f(A) = f([A]^\alpha).$$

Este resultado não só vale para conjuntos *crisp*, como também é válido para conjuntos *fuzzy*.

**Teorema 1.8:** *Sejam  $f : X \rightarrow Z$  uma função contínua e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . Então para todo  $\alpha \in [0,1]$ , tem-se:*

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha).$$

*Demonstração [35]:*

Seja  $z \in f([A]^\alpha)$ , então  $\exists x_0 \in X \setminus f(x_0) = z$ , e  $\varphi_A(x_0) \geq \alpha$ . Como  $x_0$  pertence ao conjunto das imagens inversas de  $z$ , então:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \max_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) \geq \varphi_A(x_0) \geq \alpha.$$

Logo,  $z \in [\hat{f}(A)]^\alpha$ .

Por outro lado, seja  $x \in [\hat{f}(A)]^\alpha$ , isto é,  $\varphi_{\hat{f}(A)}(x) \geq \alpha$ . Assim:

$$f^{-1}(x) \neq \emptyset \text{ e } [A]^\alpha \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset.$$

Portanto:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(x) = \max_{z \in f^{-1}(x)} \varphi_A(z) = \max_{z \in f^{-1}(x) \cap [A]^\alpha} \varphi_A(z).$$

E:

$$\exists y \in f^{-1}(x) \cap [A]^0 \setminus \max_{z \in f^{-1}(x) \cap [A]^0} \varphi_A(z) = \varphi_A(y) [34].$$

Logo,  $\varphi_A(y) \geq \alpha$  e portanto, como  $f(y) = x$ , segue que  $x \in f([A]^\alpha)$ . ■

Este resultado, no entanto, nos diz que os  $\alpha$ -níveis de um conjunto fuzzy obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos  $\alpha$ -níveis pela função crisp (vide Figura 1.11).

**Exemplo 1.8:** No Exemplo 1.6 é observado que os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são dados por:

$$[A]^\alpha = \left[ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right], \forall \alpha \in [0,1],$$

onde,

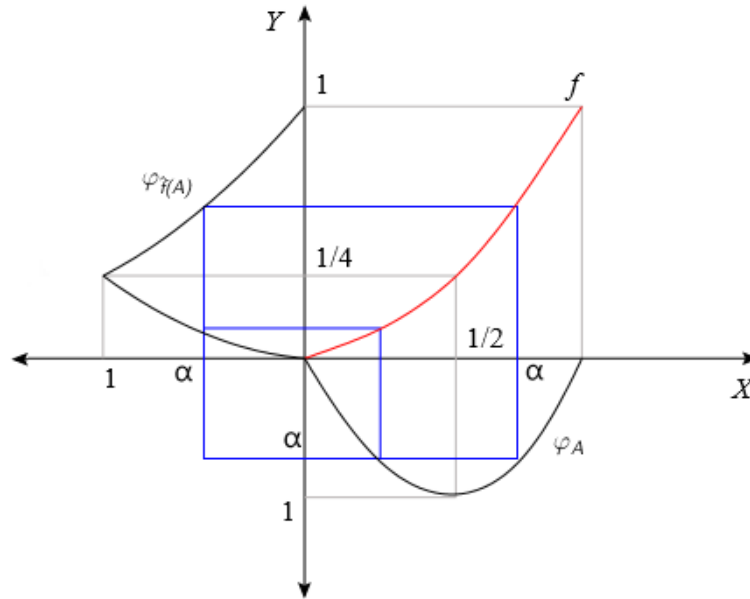
$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0,1] \end{cases}.$$

No entanto, a extensão de Zadeh pela função  $f$  dada por  $f(x) = x^2, \forall x \geq 0$  é:

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= \left[ f\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha})\right), f\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha})\right) \right] \\ &= \left[ \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha})\right)^2, \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha})\right)^2 \right] \\ &= \left[ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right] \\ &= \hat{f}([A])^\alpha. \end{aligned}$$

Deste modo, os níveis 0, 0.75 e 1 de  $[\hat{f}(A)]^\alpha$  são dados respectivamente por  $[0,1]$ ,  $[0.0625, 0.5625]$  e  $[0.25, 0.25]$ .

**Figura 1.11:** Subconjunto  $\hat{f}(A)$  do Exemplo 1.8.



Fonte: Adaptado de [2]

**Definição 1.19:** Sejam  $f : X \times Y \rightarrow Z$  e  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

A extensão  $\hat{f}$  de  $f$ , aplicada a  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A, B)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{\hat{f}(A, B)}(z) = \begin{cases} \max_{f^{-1}(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde  $f^{-1}(z) = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$ .

**Exemplo 1.9:** Seja  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a função dada por  $f(x, y) = x^2 + y$ . Sejam ainda  $A = 0,4/3$   $0,5/4 + 1/5 + 0,5/6 + 0,2/7$  e  $B = 0,2/6 + 0,5/7 + 1/8 + 0,5/9 + 0,2/10$  dois conjunto finitos.

Determinar  $\hat{f}(A, B)$  e os graus de pertinência de  $z = 10$  e  $z = 25$  em  $\hat{f}(A, B)$ .

Tem-se então:

Para  $z = 10$ :

Para os conjunto  $A$  e  $B$  dados, não existe solução para  $f(x, y)$ , tal que  $x^2 + y = 10$ .

Portanto  $\hat{f}(A, B) = f^{-1}(10) = \emptyset$  e conseqüentemente  $\varphi_{\hat{f}(A, B)}(10) = 0$ .

Para  $z = 25$ :

Neste caso, tem-se que  $f(x,y) = x^2 + y = 25$ , para  $x = 4$  e  $y = 9$ . Portanto  $\hat{f}(A,B) = f^{-1}(25) = [4,5]$ .

Assim:

$$\begin{aligned} \varphi_{\hat{f}(A,B)}(25) &= \max_{x^2+y=25} \min[\varphi_A(4), \varphi_B(9)] \\ &= \max_{x^2+y=25} [\varphi_A(4), \varphi_B(9)] \\ &= \max_{x^2+y=25} [0,5; 0,5] \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.10** [4]: Sejam  $f(x) = x^2 - 6x + 11, x \geq 0$  e  $A$  um conjunto fuzzy com suporte enumerável. Deseja-se determinar um número fuzzy próximo de 4.

a) Determinação da função de pertinência:

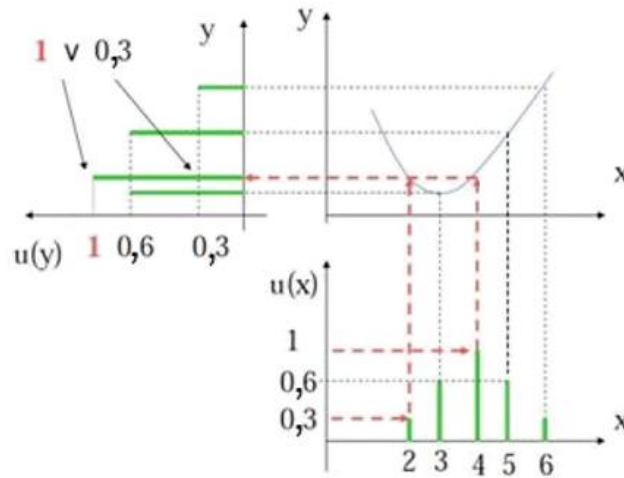
$$\hat{f}(\text{próximode } 4) = 0,3/2 + 0,6/3 + 1/4 + 0,6/5 + 0,3/6$$

b) Determinação da imagem de  $A$ , via princípio de extensão:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\text{próximode } 4) &= 0,3/f(2) + 0,6/f(3) + 1/f(4) + 0,6/f(5) + 0,3/f(6) \\ &= 0,3/3 + 0,6/2 + 1/3 + 0,6/6 + 0,3/11 \\ &= 0,6/2 + \max(0,3 \wedge 1)/3 + 0,6/6 + 0,3/11 \\ &= 0,6/2 + 1/3 + 0,6/6 + 0,3/11 \end{aligned}$$

A Figura 1.12 ilustra o processo gráfico para obtenção da extensão  $\hat{f}$  de  $f$ . A imagem de  $A$  por  $f$  pode ser deduzida do conhecimento das imagens de  $x_i$  por  $f$ . O grau de pertinência de  $y_i = f(x_i)$  em  $f(A)$  é o mesmo de  $x_i$  em  $A$ .

**Figura 1.12:** Obtenção da extensão  $\hat{f}$  de  $f$ .



Fonte: [4].

No entanto, as características descritas aqui introduzem os dois conceitos mais importantes do princípio de extensão [26]:

- A possibilidade de um valor de entrada é propagado diretamente para a possibilidade de sua imagem.
- Quando a combinação de múltiplas entradas mapeia o mesmo valor de saída, a possibilidade da saída é obtida pela combinação das possibilidades dessas entradas através do operador sup.

## CAPÍTULO 2. RELAÇÕES FUZZY

*"Nada existe e, se existisse, nós não o conheceríamos e, se pudéssemos conhecer, não saberíamos explicar essa existência para ninguém".*

*(Górgias de Leontini - Séc. V a.C).*

Górgias é tradicionalmente classificado como um retor, e mais educadamente, como um sofista. No entanto, um cético que nega a verdade absoluta: "*nada existe, mesmo que existisse, nós não conheceríamos e ainda mesmo que se pudéssemos conhecer, não saberíamos explicar a ninguém sua existência*". Sem dúvida foi um grande sofista da época e, de acordo com seus pensamentos, o ser que existe é apenas um ser flutuante e empírico, ou seja, nosso conhecimento é empírico e a comunicação deve ser influenciada pela retórica, que por sua vez, não se fundamenta em verdades absolutas.

Há filósofos como Aristóteles, por exemplo, que estudaram o empirismo e defendem que por meio desses estudos é que surgiram a teoria do conhecimento. No entanto, estudos de associações, relações ou interações entre os elementos de diversas classes é de grande interesse na análise e compreensão de muitos fenômenos do mundo real. Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos [28]. Deste modo, pode-se dizer que uma relação será fuzzy quando opta-se pela Teoria dos Conjuntos Fuzzy, e será clássica quando opta-se pela Teoria Clássica de Conjuntos para conceituar a relação em estudo, o modelo adotado depende do fenômeno estudado.

### 2.1. Relações Fuzzy

Assim como os conjuntos *fuzzy*, as relações fuzzy são uma generalização das relações clássicas. Uma relação clássica descreve a inter-relação entre dois ou mais objetos, ou seja, uma relação binária entre dois objetos, ternária entre três objetos, n-ária entre  $n$  objetos. Por exemplo, a relação entre uma mãe e seu filho pode ser representada por uma relação binária: (*mãe, filho*).

Uma relação clássica segue a função característica clássica. Sendo assim, uma relação de amizade entre duas pessoas, por exemplo, designadas como "*amigos*" considera-se nas relações humanas que, ou alguém é seu amigo ou não o é, o que é uma simplificação da

realidade. Por outro lado, uma relação de "amizade" fuzzy entre duas pessoas pode considerar o grau de amizade entre ambos, isto é, dois ou mais indivíduos podem se relacionar com diferentes graus de amizade, desde 0 (*não são amigos*) até 1 (*certamente amigos*) [26].

Portanto, na Teoria Clássica de Conjuntos, uma relação indica se existe ou não associação entre os objetos em análise, enquanto que numa relação fuzzy, além de indicar se há ou não tal associação, indica também o grau dessa relação.

**Definição 2.1:** *Uma relação fuzzy  $R$  sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  é qualquer subconjunto fuzzy de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  e definida por uma função de pertinência  $\varphi_R : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0,1]$ .*

Assim, uma relação binária entre duas variáveis,  $x \in X$  e  $y \in Y$ , por exemplo, pode ser representada como uma função que mapeia um par ordenado  $(x,y)$  em  $X \times Y$  para 0 quando a relação não se aplica, ou para 1, caso contrário, ou seja,  $R: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$ . Já, uma relação fuzzy entre duas variáveis,  $x \in X$  e  $y \in Y$  é, então, definida como uma função que mapeia os pares ordenados em  $X \times Y$  para o seu grau na relação, ou seja,  $R: X \times Y \rightarrow [0,1]$ .

Uma relação fuzzy sobre  $n$  objetos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com domínios  $X_1, X_2, \dots, X_n$  respectivamente, é definida por uma função que mapeia o ponto  $x_1, x_2, \dots, x_n$  em  $X_1, X_2, \dots, X_n$  para um número no intervalo  $[0,1]$ , isto é,  $R: X \times Y \rightarrow [0,1]$ . Este mapeamento equivale a uma função de pertinência de um conjunto fuzzy multidimensional [26]. Se os valores de  $x$  e  $y$  forem discretos podemos então expressar uma relação *fuzzy* em forma matricial, o que será visto mais adiante, neste capítulo.

**Definição 2.2:** *O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $U_1, U_2, U_n$  respectivamente, é a relação fuzzy  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde  $\wedge$  representa o mínimo.

É interessante notar que, se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forem conjunto clássicos, então o produto cartesiano clássico  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  pode ser obtido pela Definição 2.2, substituindo as funções de pertinência pelas respectivas funções características dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .



Veja um exemplo, onde deseja-se expressar uma relação fuzzy de um sistema diagnóstico em termos dos sintomas e das doenças. Para estabelecer o grau de relação entre cada *sintoma* com cada *doença*, pode-se consultar um especialista.

**Exemplo 2.1** [19]: Considere a Tabela 2.1, que relaciona o conjunto dos sintomas

$$\{s_1, s_2, s_3\} = \{\text{cefaléia, febre, tosse}\}$$

e o conjunto das doenças ,

$$\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\} = \{\text{Endocardite, Pneumonia, Coqueluche, Tuberculose, Gripe comum}\}$$

**Tabela 2.1:** Relação dos sintomas com as doenças.

s\d	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
$s_1$	0,0	0,0	0,3	0,0	0,8
$s_2$	0,9	1,0	0,3	1,0	0,2
$s_3$	0,2	0,4	0,7	1,0	0,1

Fonte: [19]

Tem-se aqui uma matriz de relação fuzzy, onde as colunas são as doenças, as linhas são os sintomas e os valores são o grau com que os sintomas se relacionam com as doenças. Assim, o grau de relação entre cefaleia ( $s_1$ ) e Endocardite ( $d_1$ ) é *zero*, ou seja, de acordo com a matriz de relações propostas não existe correlação direta entre cefaleia e Endocardite. No entanto, a relação entre tosse ( $s_3$ ) e gripe comum ( $d_5$ ) é *um*, segundo os dados desta mesma matriz relacional. Se alguém sugerir que a relação entre *sintomas* e *doenças* depende da *idade*, o que seria razoável para um grande número de patologias [19], poderia agregar então, mais a informação *idade*, e conseqüentemente, precisaria considerar mais uma dimensão na matriz de relações resultando, portanto, numa relação fuzzy ternária (*idade, sintomas, doenças*).

Para indicar o quanto um indivíduo tem gripe comum, é tomado um grau de pertinência aos conjuntos dos sintomas cefaleia, febre e tosse, de acordo com a tabela. Por exemplo, seja um paciente que apresenta um valor  $x$  de cefaleia, sendo então  $\varphi_{s_1}(x) = 0,8$ ; uma temperatura  $y$  cuja pertinência ao conjunto febre é  $\varphi_{s_2}(y) = 0,2$  e um valor  $z$  de tosse que faz com que  $\varphi_{s_3}(z) = 0,1$ . Assim, o diagnóstico para este paciente para a doença gripe comum é dado por:

$$\varphi_{d_5=\text{gripe}}(x, y, z) = \varphi_{s_1}(x) \wedge \varphi_{s_2}(y) \wedge \varphi_{s_3}(z) = 0,8 \wedge 0,2 \wedge 0,1 = 0,1$$

Isto significa que o paciente dado neste exemplo (fictício) está no subconjunto fuzzy dos febris com cefaléia e tosse tendo grau de pertinência 0,1, ou seja, é seu grau de diagnóstico para gripe comum.

Este número pode dar suporte para a partir daí, o especialista tomar decisão quanto ao trabalho a ser adotado. Do ponto de vista teórico, o produto cartesiano clássico também poderia ser adotado para o diagnóstico, mas neste caso, seria indicado gripe comum com grau 1 ou não gripe com grau 0.

No Capítulo 4 é apresentado um estudo mais detalhado a respeito de diagnóstico médico (tema deste trabalho).

## 2.2. Formas de Representações e Propriedades das Relações Binárias

Nesta seção é destacado algumas representações e propriedades das relações binárias e fuzzy binárias.

Sejam  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  e  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  e a relação fuzzy  $R$  sobre  $X \times Y$  com função de pertinência dada por  $\varphi_R(x_i, y_j) = r_{ij}$  para  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

Um das formas mais comuns de se representar uma relação fuzzy binária em  $X \times Y$ , quando  $X$  e  $Y$  são finitos, são a tabular e a matricial. Veja tais representações:

$$\begin{array}{c|cccc}
 R & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\
 \hline
 x_1 & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\
 x_2 & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 x_m & r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}
 \end{array}
 \quad \text{ou} \quad
 R = \begin{bmatrix}
 r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\
 r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}
 \end{bmatrix}$$

**Definição 2.3:** *Seja  $R$  uma relação fuzzy binária definida em  $X \times Y$ . A relação fuzzy binária inversa ( $R^{-1}$ ), definida em  $Y \times X$  tem função de pertinência  $\varphi_{R^{-1}} : Y \times X \rightarrow [0,1]$  dada por  $\varphi_{R^{-1}}(y, x) = \varphi_R(x, y)$ .*

De acordo com essa definição, a forma matricial da relação  $R^{-1}$  é dada por:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdots & r_{m1} \\ r_{12} & r_{22} & \cdots & r_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

É importante ressaltar que a matriz de  $R^{-1}$  coincide com a transposta de  $R$ , já que  $\varphi_R^{-1}(y, x) = \varphi_R(x, y)$ , e por esse motivo, muitos textos de Lógica Fuzzy adotam o termo relação transposta no lugar de inversa [28].

**Exemplo 2.2:** [2]: Suponha um determinado ecossistema  $U$ , no qual interagem as populações de *águias* ( $a$ ), *cobras* ( $c$ ), *insetos* ( $i$ ), *lebres* ( $l$ ) e *sapos* ( $s$ ). Um estudo interessante sobre estes indivíduos é a relação do tipo *presa-predador*.

Se desejar estudar a relação entre dois indivíduos deste ecossistema, esta relação pode ser modelada matematicamente por uma relação binária  $R$ , com  $\varphi_R(x, y) = 0$  se  $y$  não é predador de  $x$  e  $\varphi_R(x, y) \neq 0$  se  $y$  é predador de  $x$ , onde  $x$  e  $y$  representam indivíduos do conjunto  $U$ .

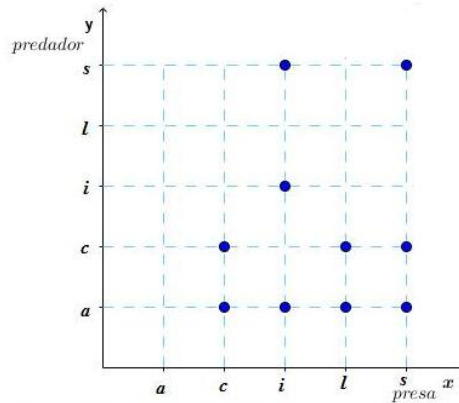
Então, será discutido dois casos: emprego da relação clássica (a) e emprego da relação fuzzy (b):

a) Caso queira indicar apenas quem é predador e quem é presa na relação deste conjunto  $U$ , pode-se então optar pela teoria clássica e  $R$  será uma relação binária clássica. Então:

$$\varphi_R(x, y) = X_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \text{ for predador de } x; \\ 0 & \text{se } y \text{ não for predador de } x. \end{cases}$$

Veja representação gráfica na Figura 2.1, onde os animais são colocados em ordem alfabética em um par de eixos.

**Figura 2.1:** Representação da relação clássica entre os predadores e suas presas.

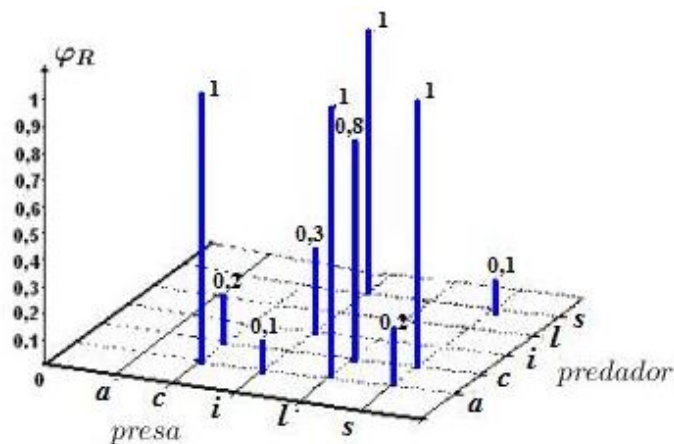


Fonte: [2]

Os pontos destacados na Figura 2.1 indicam os pares que fazem parte da relação  $R$ , que por sua vez, revela claramente quem é predador de quem.

b) Caso haja interesse em saber, por exemplo, o grau de interesse de um predador por alguma presa na comunidade  $U$ , então uma boa alternativa é que  $R$  seja uma relação fuzzy. Então, neste caso,  $\varphi_R(x, y)$  indica o grau com que  $y$  tem preferência por  $x$ . Se por acaso não houver diferença nos graus de predação dentro de cada espécie, uma possibilidade para  $\varphi_R(x, y)$ , de acordo com um especialista, está ilustrado na Figura 2.2, onde o eixo vertical representa os vários graus de pertinência  $\varphi_R(x, y)$ .

**Figura 2.2:** Relação fuzzy e os vários graus de preferência.



Fonte: [2]

Agora, esses dados serão representados em forma de matriz:

		predador				
	R	a	c	i	l	s
p	a	0	0	0	0	0
r	c	1	0,2	0	0	0
e	i	0,1	0	0,3	0	1
s	l	1	0,8	0	0	0
a	s	0,2	1	0	0	0,1

e:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 & 0 & 1 \\ 1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Portanto, se  $R$  é a relação fuzzy então a representação matricial de sua inversa  $R^{-1}$  é dada pela sua transposta:

$$R^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,1 & 1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa  $R^{-1}$  indica que  $x$  é predado por  $y$ , enquanto que em  $R$  temos que  $y$  é predado por  $x$ .

**Exemplo 2.3** [Adaptado de 15]: Sejam  $X = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$  e  $Y = \{12, 13, 14, 15\}$  conjuntos e  $R$  uma relação binária fuzzy em  $X \times Y$  representada por " $x$  é muito menor que  $y$ ", onde  $R$  é dado pela seguinte função de pertinência:

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{y}, & \text{se } x \leq y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Deste modo,  $R$  é representado pela seguinte matriz:

$$R = \begin{bmatrix} 0,16 & 0,23 & 0,28 & 0,33 \\ 0,08 & 0,15 & 0,21 & 0,26 \\ 0 & 0,077 & 0,14 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,07 & 0,13 \\ 0 & 0 & 0 & 0,06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, relação  $R^{-1}$  é, por definição, representada pela seguinte matriz:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0,16 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,23 & 0,15 & 0,077 & 0 & 0 & 0 \\ 0,28 & 0,21 & 0,14 & 0,07 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0,26 & 0,2 & 0,13 & 0,06 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3. Composição entre Relações Fuzzy Binárias

A composição entre relações é de extrema importância para as aplicações do objeto de estudo desta pesquisa, o que será explorado mais adiante, onde aparecem as principais aplicações em diagnóstico médico. Nesta seção será apresentado apenas a composição mais tradicional em Lógica Fuzzy.

**Definição 2.4:** Considere  $R$  e  $S$  duas relações fuzzy binárias em  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente. A composição  $R \circ S$  é uma relação fuzzy binária em  $U \times W$  cuja função de pertinência é:

$$\varphi_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in V} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))].$$

Quando os conjuntos  $U$ ,  $V$  e  $W$  são finitos, ou seja,  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ ;  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ ,  $W = [w_1, w_2, \dots, w_p]$ ,

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{np} \end{bmatrix}_{n \times p},$$

a forma matricial da relação  $R \circ S$ , dada pela relação [max-min], é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo. De fato, de acordo com a Definição 2.4, tem-se:

$$T = R \circ S = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mp} \end{bmatrix}_{m \times p},$$

onde  $t_{ij}$  é dado por:

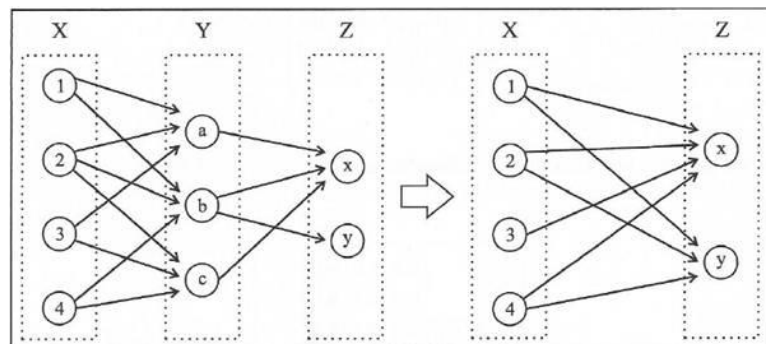
$$t_{ij} = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, w_j))] = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(r_{ik}, s_{kj})].$$

**Exemplo 2.4** [23]: Considere os conjuntos  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{a, b, c\}$  e  $Z = \{x, y\}$  e as relações fuzzy  $R : X \times Y \rightarrow [0,1]$  e  $S : Y \times Z \rightarrow [0,1]$ , dados pelas matrizes:

$$R = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,0 \\ 0,4 & 0,9 & 0,1 \\ 1,0 & 0,0 & 0,3 \\ 0,0 & 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,0 \\ 0,8 & 0,7 \\ 0,2 & 0,0 \end{bmatrix}$$

Veja na Figura 2.3, uma representação de mapeamento, com as relações fuzzy  $R : X \times Y \rightarrow [0,1]$ ,  $S : Y \times Z \rightarrow [0,1]$  e a composição  $R \circ S : X \times Z \rightarrow [0,1]$ .

**Figura 2.3:** Representação da relação fuzzy usando mapeamento

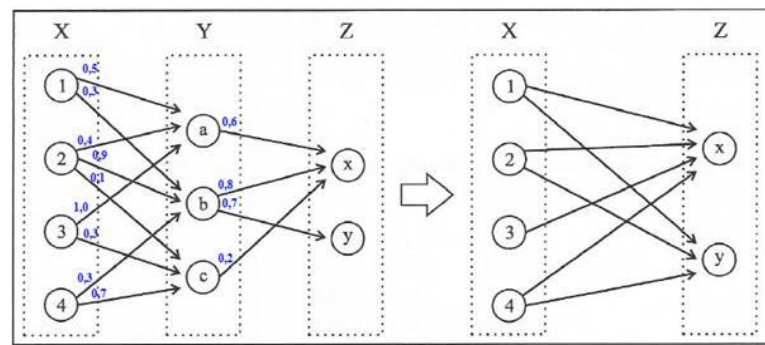


Fonte: [23]

Pode-se determinar então, a relação composta  $R \circ S : X \times Z \rightarrow [0,1]$ , usando a composição  $[max-min]$ , de acordo com a Definição 2.4.

Vale ressaltar que as linhas e colunas de  $R$  estão associadas aos elementos de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, de acordo com sua posição na descrição dos conjuntos, ou seja, a primeira linha de  $R$  traz os graus de pertinência dos pares  $\langle 1,a \rangle$ ,  $\langle 1,b \rangle$  e  $\langle 1,c \rangle$  ao conceito que a relação  $R$  apresenta e de modo análogo para  $S$  e  $R \circ S$ . Os elementos dos conjuntos  $X$  e  $Y$  estão dispostos no gráfico e a presença de um par deles na relação é representada por um arco rotulado com o valor de pertinência do par ao conceito que a relação apresenta (Figura 2.4).

**Figura 2.4:** Representação da relação fuzzy usando mapeamento.



Fonte: Adaptado de [23]

As relações fuzzy  $R$ ,  $S$  e  $R \circ S$ , em um conjunto universo, podem ser representadas por um dígrafo, cujos "nós" são os elementos do universo e os arcos representam a presença do par que os une na relação, com um grau de pertinência igual ao rótulo do arco. Note ainda que são omitidos os arcos correspondentes aos pares nos quais o grau de pertinência é 0. Por exemplo, o par  $\langle 1,c \rangle$  na relação  $R : X \times Y \rightarrow [0,1]$  é omitido na representação de mapeamento, e na matriz  $R$  é indicado por 0,0. O mesmo raciocínio segue para as outras relações neste caso.

Calculando então a relação  $R \circ S : X \times Z \rightarrow [0,1]$ , tem-se:

$$R \circ S = \begin{bmatrix} \max\{\min\{0.5,0.6\}, \min\{0.3,0.8\}, \min\{0.0,0.2\}\} & \max\{\min\{0.5,0.0\}, \min\{0.3,0.7\}, \min\{0.0,0.0\}\} \\ \max\{\min\{0.4,0.6\}, \min\{0.9,0.8\}, \min\{0.1,0.2\}\} & \max\{\min\{0.4,0.0\}, \min\{0.9,0.7\}, \min\{0.1,0.0\}\} \\ \max\{\min\{1.0,0.6\}, \min\{0.0,0.8\}, \min\{0.3,0.2\}\} & \max\{\min\{0.0,0.0\}, \min\{0.0,0.7\}, \min\{0.3,0.0\}\} \\ \max\{\min\{0.0,0.6\}, \min\{0.3,0.8\}, \min\{0.7,0.2\}\} & \max\{\min\{0.0,0.0\}, \min\{0.3,0.7\}, \min\{0.7,0.0\}\} \end{bmatrix}$$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} \max\{0.5,0.3,0.0\} & \max\{0.0,0.3,0.0\} \\ \max\{0.4,0.8,0.1\} & \max\{0.0,0.7,0.0\} \\ \max\{0.6,0.0,0.2\} & \max\{0.0,0.0,0.0\} \\ \max\{0.0,0.3,0.2\} & \max\{0.0,0.3,0.0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.0 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

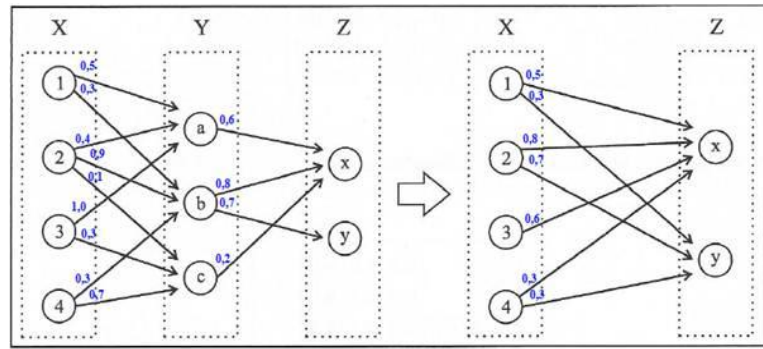


Portanto, a relação composta  $R \circ S : X \times Z \rightarrow [0,1]$  é dado pela matriz:

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.0 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

e a representação por meio de mapeamento, usando dígrafo está ilustrada na Figura 2.5.

**Figura 2.5:** Representação da relação fuzzy usando mapeamento com respectivos dígrafos.



Fonte: Adaptado de [23]

Veja na Definição 2.5, a Regra de Composição de Inferência:

**Definição 2.5:** Sejam  $U$  e  $V$ , dois conjuntos,  $F(U)$  e  $F(V)$  as classes dos subconjuntos fuzzy de  $U$  e  $V$ , respectivamente.

Seja  $R$  uma relação binária sobre  $U \times V$ , então:

i) A relação  $R$  define um funcional de  $F(U)$  em  $F(V)$  que a cada elemento  $A \in F(U)$  faz corresponder o elemento  $B \in F(V)$  cuja função de pertinência é dado por:

$$\varphi_B(y) = \varphi_{R(A)}(y) = \max_{x \in U} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_A(x))],$$

composição esta, é denominada composição de inferência.

ii) A relação  $R$  também define um funcional de  $F(V)$  em  $F(U)$ , fazendo corresponder cada  $B \in F(V)$  em um elemento  $A \in F(U)$ , dado pela função de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \varphi_{R^{-1}(B)}(x) = \max_{y \in V} [\min(\varphi_{R^{-1}}(y, x), \varphi_B(y))],$$

que é a imagem inversa de  $B$  por  $R$ .

Da Definição 2.5 segue que:

$$\max_{x \in U}[\min(\varphi_R(x, y), \varphi_A(x))] = \max_{x \in U}[\min(\varphi_A(x), \varphi_R(x, y))],$$

e portanto,  $B = R(A) = A \circ R$ .

De modo análogo,

$$\max_{y \in V}[\min(\varphi_{R^{-1}}(y, x), \varphi_B(y))] = \max_{y \in V}[\min(\varphi_B(y), \varphi_{R^{-1}}(y, x))].$$

Logo:

$$A = R^{-1}(B) = B \circ R^{-1}.$$

**Definição 2.6:** *Seja  $R$ , uma relação binária clássica sobre  $U$ . Assim, para quaisquer  $x, y$ , e  $z$  de  $U$ , a relação  $R$  é:*

- i) *Reflexiva, se  $X_R(x, x) = 1$ ;*
- ii) *Simétrica, se  $X_R(x, y) = 1 \Rightarrow X_R(y, x) = 1$ ;*
- iii) *transitiva, se  $X_R(x, y) = X_R(y, z) = 1 \Rightarrow X_R(x, z) = 1$ ;*
- iv) *anti-simétrica, se  $X_R(x, y) = X_R(y, x) = 1 \Rightarrow x = y$ .*

As definições acima retratam exatamente cada uma das definições usadas em teoria de conjuntos. A opção feita pelo uso da função característica foi apenas "um meio" para facilitar o entendimento nos casos fuzzy.

**Definição 2.7:** *Seja  $R$ , uma relação fuzzy binária sobre  $U$ , cuja função de pertinência é  $\varphi_R$ . Assim, para quaisquer  $x, y$ , e  $z$  de  $U$ , a relação fuzzy  $R$  é:*

- i) *Reflexiva, se  $\varphi_R(x, x) = 1$ ;*
- ii) *Simétrica, se  $\varphi_R(x, y) = \varphi_R(y, x)$ ;*
- iii) *transitiva, se  $\varphi_R(x, z) \geq \varphi_R(x, y) \wedge \varphi_R(y, z)$ , onde  $\wedge = \text{mínimo}$ ;*
- iv) *anti-simétrica, se  $\varphi_R(x, y) > 0$  e  $\varphi_R(y, x) > 0 \Rightarrow x = y$ .*

A relação reflexiva é aquela em que todo indivíduo tem relação máxima consigo mesmo.

Já a relação simétrica é caracterizada pela reciprocidade, ou seja, se  $x$  e  $y$  são os indivíduos de  $U$ , então se relacionam com mesma intensidade, com mesmo grau de pertinência, tanto  $x$  com  $y$ , quanto  $y$  com  $x$ .

A transitiva indica que a relação entre dois indivíduos quaisquer não deve ser, simultaneamente, menor que a relação de cada um destes dois com os demais.

A anti-simétrica é aquela que não admite qualquer reciprocidade entre indivíduos distintos.

É chamado de relação de equivalência fuzzy, as relações que satisfazem apenas as três primeiras condições, (i), (ii) e (iii).

**Exemplo 2.5:** [14]: Seja  $X$ , o conjunto de todas as disciplinas de um curso e  $R$  uma relação  $X \times X$  que representa "é pré-requisito para". Verifica-se então que não é uma relação reflexiva, pois uma disciplina nunca é pré-requisito dela mesma, portanto,  $\varphi_R(x, x) = 0$ .

Também não pode ser simétrica, pois se uma disciplina  $x$  é pré-requisito para uma disciplina  $y$ , então  $y$  não pode ser pré-requisito para  $x$ , e assim  $\varphi_R(x, y) \neq \varphi_R(y, x)$ .

No entanto,  $R$  é uma relação transitiva, uma vez que se  $x$  é pré-requisito para  $y$  ( $\varphi_R(x, y) = 1$ ) e  $y$  é pré-requisito para  $z$  ( $\varphi_R(y, z) = 1$ ), conseqüentemente  $x$  é pré-requisito para  $z$   $\varphi_R(x, z) \geq \varphi_R(x, y) \wedge \varphi_R(y, z)$ .

**Exemplo 2.6:** [14] Seja  $X$  o conjunto de todas as cidades de um país, e  $R$  uma relação fuzzy  $X \times X$  à qual representa a relação "próximo".

Pode-se considerar que uma cidade é muito próxima dela mesma, isto é,  $\varphi_R(x, x) = 1$ , e portanto,  $R$  é reflexiva.

Também é simétrica, pois se  $x$  é próxima de  $y$ , então  $y$  também é próxima de  $x$  com mesmo grau de pertinência ( $\varphi_R(x, y) = \varphi_R(y, x)$ ).

No entanto a relação não é transitiva, pois podemos nos deparar com situações em que uma cidade  $x$  está próxima de  $y$  com grau de pertinência 0,7 e a cidade  $y$  está próxima da cidade  $z$  com grau 0,8, mas a cidade  $x$  pode estar próxima da cidade  $z$  com grau de pertinência 0,5.

**Exemplo 2.7:** [14] Seja  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ . O produto cartesiano  $X \times Y$  contém 100 pares:  $(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (10,10)$ . Seja ainda  $R(X,X) = \{(x,y) / x \text{ e } y \text{ têm o mesmo resto quando dividido por } 3\}$ .

Verificamos que  $R$  é uma relação de equivalência fuzzy, pois é reflexiva ( $x$  deixa o mesmo resto que  $x$  na divisão por 3), simétrica (se  $x$  e  $y$  possuem o mesmo resto na divisão por 3, então  $y$  e  $x$  também possuem o mesmo resto na divisão por 3) e transitiva (se  $x$  e  $y$  possuem o mesmo resto na divisão por 3 e  $y$  e  $z$  também, então  $x$  e  $z$  possuem o mesmo resto na divisão por 3). As três classes de equivalência definidas por esta equação são:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_4 = A_7 = A_{10} = \{1, 4, 7, 10\} \\ A_2 &= A_5 = A_8 = \{2, 5, 8\} \\ A_3 &= A_6 = A_9 = \{3, 6, 9\} \end{aligned}$$

## 2.4. Equações Relacionais Fuzzy

Considere os conjuntos universos finitos:

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ e } W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}.$$

As equações relacionais procuram determinar a forma matricial de uma relação fuzzy binária, a partir de duas outras conhecidas.

Aqui, as equações relacionais fuzzy têm a forma

$$\mathcal{R} * \mathcal{X} = \mathcal{T} \text{ ou } \mathcal{X} * \mathcal{R} = \mathcal{T},$$

onde  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{T}$  são as formas matriciais das relações fuzzy binárias dadas, o símbolo "\*" é a composição entre relações fuzzy (não necessariamente máx-min) e  $\mathcal{X}$  a forma matricial de uma relação fuzzy incógnita a ser encontrada.

Assim, portanto, resolver a equação

$$\mathcal{R} * \mathcal{X} = \mathcal{T}$$

significa encontrar a forma matricial de uma relação fuzzy binária  $\mathcal{X}$ , em  $V \times W$ , supondo conhecidas as formas matriciais  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{T}$  em  $U \times V$  e  $U \times W$ , respectivamente.

Para as Equações Relacionais Fuzzy com a composição máx-mín, vamos estudar o caso em que a operação "\*" é a composição máx-mín e a equação é dada por

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{T}.$$

Supõe que os universos envolvidos sejam finitos, de modo que as relações fuzzy tenham representações matriciais

$$\mathcal{R} = [r_{ij}], \mathcal{X} = [x_{jk}] \text{ e } \mathcal{T} = [t_{ik}],$$

onde  $r_{ij} = \varphi_{\mathcal{R}}(u_i, v_j)$ ,  $x_{jk} = \varphi_{\mathcal{X}}(v_j, w_k)$  e  $t_{ik} = \varphi_{\mathcal{T}}(u_i, w_k)$ .

Como a composição dada aqui é a max-min, resolver a equação  $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{T}$  significa encontrar  $x_{jk} \in [0,1]$  tais que

$$\max_{1 \leq j \leq n} [\min(r_{ij}, x_{jk})] = t_{ik},$$

para cada  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq k \leq p$ .

Portanto, para investigar a solução de  $\mathcal{T}$ , devemos verificar se tal sistema de equações tem solução.

De  $\max_{1 \leq j \leq n} [\min(r_{ij}, x_{jk})] = t_{ik}$ , tem-se

$$\max_{1 \leq j \leq n} [\min(r_{ij}, x_{jk})] = t_{ik} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} \geq t_{ik},$$

para todo  $i$  e todo  $k$ . Daí, segue imediatamente que se existir uma linha  $i$  de modo que

$$\max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} < \max_{1 \leq k \leq p} t_{ik},$$

então **não** haverá  $\mathcal{X}$  que resolva a equação, o que nos leva ao seguinte resultado:

**Proposição 2.1:** *Se a desigualdade  $\max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} < \max_{1 \leq k \leq p} t_{ik}$  for verificada, então a equação relacional fuzzy  $\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{T}$  não terá solução.*

**Exemplo 2.7** [2]: Considere a equação relacional

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{X} = \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Para achar  $\mathcal{X}$  deve-se resolver o sistema de quatro equações

$$\begin{cases} \max[\min(0,7; x_{11}), \min(0,6; x_{21})] = 0,4 \\ \max[\min(0,2; x_{11}), \min(0,3; x_{21})] = 0,3 \\ \max[\min(0,7; x_{12}), \min(0,6; x_{22})] = 0,8 \\ \max[\min(0,2; x_{12}), \min(0,3; x_{22})] = 0,2 \end{cases}$$

Verifica-se, portanto, que o sistema acima não tem solução, pois

$$\max[\min(0,7; x_{12}), \min(0,6; x_{22})] \leq \max[0,7; 0,6] = 0,7 < 0,8 = \max t_{ik},$$

e, de acordo com a Proposição 2.1, essa equação não tem solução.

Observa-se que as duas primeiras equações do sistema dado contém apenas as incógnitas  $x_{11}$  e  $x_{21}$ , enquanto que as duas últimas tem como incógnitas as variáveis  $x_{12}$  e  $x_{22}$ . Assim, conclui-se que a equação relacional

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

tem uma solução, que é

$$\mathcal{X}_1 = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \end{bmatrix}.$$

Além de  $\mathcal{X}_1$ , a equação relacional possui outras soluções, como por exemplo,

$$\mathcal{X}_2 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{X}_3 = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix}.$$

Dentre os elementos que fazem parte de qualquer solução de uma equação dada, o maior deles, neste caso  $\mathcal{X}_3$ , isto é, com  $\mathcal{X}_{ij}$  maiores possíveis, são chamadas de *maximais*. Portanto, a solução maximal é a relação formada por elementos com maior grau de pertinência à solução da equação dada.

## CAPÍTULO 3. LÓGICA FUZZY - CONCEITOS BÁSICOS

*"...o conhecimento demonstrativo tem que proceder de premissas que sejam verdadeiras, primárias, imediatas, melhor conhecidas e anteriores à conclusão e que sejam causa desta".*  
(Aristóteles - Séc. IV a.C, em *Organon*).

Para Aristóteles, a razão da verdade é o conhecimento, sem preocupações práticas. Já para os sofistas, a prática está ligada ao conhecimento, substituindo o padrão de verdadeiro ou falso pelo de melhor ou pior.

O termo "Lógica Fuzzy" é utilizado de duas formas: a primeira, para representar e manipular informações imprecisas com o propósito de tomar decisões, dando lugar ao uso da teoria de conjuntos fuzzy. A segunda refere-se à extensão da lógica clássica, objetivo deste capítulo.

Fazendo um breve histórico, a lógica surgiu como ciência na Antiguidade, principalmente entre os gregos, que produziram diversos trabalhos sobre lógica. Foi, porém, Aristóteles quem apresentou de maneira mais elaborada os primeiros textos de lógica e explicitou alguns princípios, que desde então, passaram a caracterizar o que chamamos de lógica aristotélica [8]. Aristóteles, desenvolveu sua teoria a partir dos trabalhos de Pitágoras, que acreditava na precisão matemática do Universo e que tudo poderia ser definido através de uma relação matemática. Os estudos sobre a teoria do silogismo, os quais buscavam uma melhor compreensão da verdade, foi introduzida por Aristóteles em "Analíticos Anteriores", o terceiro livro de *Organon* e, através das leituras dos trabalhos de Platão, discípulo de Sócrates, é que Aristóteles percebe a existência de leis que regem o pensamento no propósito da busca do conhecimento e da verdade, sem dar "lado" às interpretações. Um exemplo de verdade é dado pelo método de investigação de Sócrates:

"Todo homem é mortal

Sócrates é homem

Logo, Sócrates é mortal"

O silogismo acima é típico da Lógica que possibilita o verdadeiro conhecimento defendido por Aristóteles.

Somente no século XVI, a lógica aristotélica apareceu novamente, quando Leibniz cria a lógica simbólica à qual Boole, no século XIX desenvolve uma álgebra. Neste mesmo

período Gotlob Frege (professor universitário de Matemática), fundou a lógica contemporânea. No século XX, esta ferramenta passa a ser utilizada em controle de circuitos e posteriormente em linguagem computacionais. Ainda no século XX, a lógica foi objeto de estudos para renomados matemáticos como Peano, Whitehead, Russel e Godel, dentre outros. Também neste período surge a lógica multivalorada, que é a extensão da lógica de dois valores (lógica aristotélica) para lógica com vários valores. Dentre estas, destacamos a de Lukasiewics, que certo modo, é considerada a precursora da Lógica Fuzzy, e porém, só na década de 1960 é que surge o primeiro trabalho que dá origem à Lógica Fuzzy [2].

A Lógica Fuzzy é, de certa forma, uma lógica com suas próprias metodologias. Não lida com questões ambíguas. As incertezas por ela tratadas são do tipo monotônicas, isto é, o seu uso possibilita conclusões imprecisas a partir de proposições imprecisas, como é típico na linguagem natural. Esta área é usualmente conhecida como raciocínio aproximado. A seguinte afirmação é um exemplo de raciocínio aproximado [31]:

"Selos antigos são usualmente colecionáveis;

Selos colecionáveis são caros;

**Conclusão:** Portanto, selos antigos são usualmente caros."

A conclusão (última sentença) é uma inferência dedutiva obtida a partir das premissas. Alguns dos predicados não são termos precisos, a saber: antigos, usualmente e caros, e por este motivo, a lógica clássica não trata estes termos. Porém, o propósito da Lógica Fuzzy é dar sentido formal para estas inferências, baseando-se em termos linguísticos imprecisos, tais como: obeso, jovem, baixo, alto, verdadeiro, falso, parecido, feliz, entre outros. De certa forma, a Lógica Fuzzy é uma aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy. Utiliza-se dos conceitos e métodos desenvolvidos na Teoria de Conjuntos Fuzzy para formular a teoria do raciocínio aproximado, necessária para estabelecer a conexão entre os graus de pertinência de um conjunto fuzzy e os graus de verdade nas proposições fuzzy.

Na próxima seção serão relacionados alguns conceitos da lógica tradicional que servirão de base para o desenvolvimento da Lógica Fuzzy.

### 3.1. Um pouco de lógica

Para a lógica, um conectivo lógico ou operador lógico, é um símbolo ou palavra usado para formar novas proposições (tanto na linguagem formal quanto na linguagem natural) a



partir de outras, de um modo gramaticalmente válido, de maneira que o sentido da proposição formada dependa apenas das proposições originais .

Os primeiros passos em lógica matemática são realizados com o estudo de três conectivos básicos ("e", "ou", "não") e dois conectivos lógicos ("implica", "equivalência"), destacado na Tabela 3.1.

**Tabela 3.1:** Conectivos Lógicos

<i>Conectivo</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Operação</i>
<i>não</i>	$\neg$	<i>negação</i>
<i>e</i>	$\wedge$	<i>conjunção</i>
<i>ou</i>	$\vee$	<i>disjunção</i>
<i>se...,então</i>	$\Rightarrow$	<i>implicação</i>
<i>se, e somente,..</i>	$\Leftrightarrow$	<i>equivalência</i>

Estes conectivos são usados na modelagem matemática em sentenças do tipo [2]:

"Se a está em A e b está em B,

**então** c está em C **ou** d **não** está em D"

Os valores lógicos para cada conectivo são analisados por meio de tabelas verdades. No entanto, o valor lógico de uma sentença é obtido por meio da composição das tabelas verdades dos conectivos presentes na sentença. Para a lógica clássica, a sentença só pode ser verdadeira (V) ou falsa (F). Se for verdadeira, a sentença assume valor lógico 1, e se for falsa assume valor lógico 0. Além disso, para as proposições contemplamos os princípios aristotélicos[8]:

*i) Princípio da identidade:* toda proposição é idêntica a si mesma;

*ii) Princípio da não contradição:* uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;

*iii) Princípio do terceiro excluído:* toda proposição é verdadeira ou falsa, não havendo outra possibilidade.

Veja então a tabela verdade de cada um desses conectivos, bem como suas operações binárias, com exceção da negação [1]:

**1. Conjunção:** conectivo "e", denotado por  $\wedge$  .

Chama-se *conjunção* de duas proposições  $p$  e  $q$ , a proposição representada por " $p$  e  $q$ " cujo valor lógico é a verdade (V) quando as proposições  $p$  e  $q$  são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos.

O valor lógico da conjunção de duas proposições é portanto definida na Tabela 3.2.

**Tabela 3.2:** Tabela verdade do conectivo e.

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

**2. Disjunção:** conectivo "ou", denotado por  $\vee$ .

Chama-se *disjunção* de duas proposições  $p$  e  $q$ , a proposição representada por " $p$  ou  $q$ " cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições  $p$  e  $q$  é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições  $p$  e  $q$  são ambas falsas.

O valor lógico da disjunção de duas proposições é portanto definida na Tabela 3.3.

**Tabela 3.3:** Tabela verdade do conectivo ou.

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**3. Negação:** conectivo "não", denotado por  $\neg$ .

Chama-se *negação* de uma proposição  $p$ , a proposição representada por "*não*  $p$ " cujo valor lógico é a verdade (V) quando  $p$  é falsa e a falsidade (F) quando  $p$  é verdadeira.

O valor lógico da negação de duas proposições é portanto definida na Tabela 3.4.

**Tabela 3.4:** Tabela verdade do conectivo não

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

**4. Implicação:** conectivo "se..., então", denotado por  $\Rightarrow$ .

Chama-se *implicação* ou *proposição condicional* uma proposição representada por "se  $p$  então  $q$ ", cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que  $p$  é verdadeira e  $q$  é falsa e a verdade (V) nos demais casos.

O valor lógico da implicação de duas proposições é portanto definida na Tabela 3.5.

**Tabela 3.5:** Tabela verdade do conectivo se p então q.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Na lógica clássica, sentenças verdadeiras tem valor lógico 1, enquanto sentenças falsas tem valor lógico 0. Pensando na extensão para o caso fuzzy, usaremos as notações [2] [7]:

$\wedge$  = *mínimo*, para a conjunção "e";

$\vee$  = *máximo*, para a conjunção "ou";

$\neg$ , para *negação*

$\Rightarrow$ , para *implicação*.

Sejam  $p$  e  $q$  duas proposições. As Tabelas 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 representam as tabelas verdades para os conectivos apresentados.

**Tabela 3.6:** Tabela verdade do conectivo  $\wedge$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**Tabela 3.7:** Tabela verdade do conectivo  $\vee$ .

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

**Tabela 3.8:** Tabela verdade de  $\neg$ .

$p$	$\neg p$
1	0
0	1

**Tabela 3.9:** Tabela verdade de  $\Rightarrow$ .

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Nota-se que em cada tabela verdade,  $p$  e  $q$  assumem apenas os valores 0 ou 1, e no entanto, a lógica clássica é, às vezes chamada de "lógica a dois valores" [2].

Cada um dos conectivos lógicos apresentados acima podem ser vistos como operador matemático, cujos valores coincidem com os das respectivas tabelas verdades, fato esse que justifica as notações  $\wedge$  para o **e** e  $\vee$  para o **ou**. Exceto a negação, os demais conectivos são operações binárias.

- Conectivo e:  $\wedge$

$$\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

$$(p, q) \mapsto \wedge(p, q) = p \wedge q = \min\{p, q\}.$$

Assim,

$$\wedge(1,1) = 1 \wedge 1 = 1;$$

$$\wedge(1,0) = 1 \wedge 0 = 0;$$

$$\wedge(0,1) = 0 \wedge 1 = 0;$$

$$\wedge(0,0) = 0 \wedge 0 = 0.$$

- Conectivo ou:  $\vee$

$$\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

$$(p, q) \mapsto \vee(p, q) = p \vee q = \max\{p, q\}.$$

Portanto,

$$\vee(1,1) = 1 \vee 1 = 1;$$

$$\vee(1,0) = 1 \vee 0 = 1;$$

$$\vee(0,1) = 0 \vee 1 = 1;$$

$$\vee(0,0) = 0 \vee 0 = 0.$$

- Negação, também considerada uma operação unária:  $\neg$

$$\neg : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

$$p \mapsto \neg p,$$

onde:

$$\neg 1 = 0 \text{ e } \neg 0 = 1 \text{ e } \neg p = 1 - p.$$

- Implicação:  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

$$(p, q) \mapsto \Rightarrow(p, q) = (p \Rightarrow q).$$

A partir dos conectivos apresentados aqui, é possível obter pelo menos três fórmulas básicas que reproduzem a tabela verdade da implicação:

i)  $(p \Rightarrow q) = (\neg p) \vee q;$

ii)  $(p \Rightarrow q) = (\neg p) \vee (p \wedge q);$

iii)  $(p \Rightarrow q) = \max\{x \in \{0,1\} : p \wedge x \leq q\};$

*Demonstração:*

$$i) (p \Rightarrow q) = (\neg p) \vee q$$

$$\bullet (1,1)$$

$$(1 \Rightarrow 1) = (\neg 1) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$$

$$\bullet (1,0)$$

$$(1 \Rightarrow 0) = (\neg 1) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0$$

$$\bullet (0,1)$$

$$(0 \Rightarrow 1) = (\neg 0) \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$$

$$\bullet (0,0)$$

$$(0 \Rightarrow 0) = (\neg 0) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$$

$$ii) (p \Rightarrow q) = (\neg p) \vee (p \wedge q)$$

$$\bullet (1,1)$$

$$(1 \Rightarrow 1) = (\neg 1) \vee (1 \wedge 1) = 0 \vee 1 = 1$$

$$\bullet (1,0)$$

$$(1 \Rightarrow 0) = (\neg 1) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$$

$$\bullet (0,1)$$

$$(0 \Rightarrow 1) = (\neg 0) \vee (0 \wedge 1) = 1 \vee 0 = 1$$

$$\bullet (0,0)$$

$$(0 \Rightarrow 0) = (\neg 0) \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$$

$$iii) (p \Rightarrow q) = \max\{x \in \{0,1\} : p \wedge x \leq q\}$$

$$\bullet (1,1)$$

$$(1 \Rightarrow 1) = \max\{x \in \{0,1\} : 1 \wedge x \leq 1\} = 1$$

$$\bullet (1,0)$$

$$(1 \Rightarrow 0) = \max\{x \in \{0,1\} : 1 \wedge x \leq 0\} = 0$$

$$\bullet (0,1)$$

$$(0 \Rightarrow 1) = \max\{x \in \{0,1\} : 0 \wedge x \leq 1\} = 1$$

$$\bullet (0,0)$$

$$(0 \Rightarrow 0) = \max\{x \in \{0,1\} : 0 \wedge x \leq 0\} = 1$$

■

Como trata-se de conjuntos clássicos, os conectivos acima assumem apenas os valores 0 ou 1. Para o caso dos conjuntos fuzzy, o intuito é atribuir um valor que indique o quanto uma sentença do tipo "*a* está em *A*" é verdadeira. Para tanto, estende-se os conceitos vistos até aqui por meio das operações *t-norma* e *t-conorma*.

### 3.2. Sobre conectivos básicos da Lógica Fuzzy

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  definidos em  $U$ , pode-se expressar a intersecção desses conjuntos como um outro conjunto, por exemplo,  $X = A \cap B$ , e da mesma forma, pode-se expressar a união como um conjunto  $Y = A \cup B$ .

Na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, a intersecção é implementada por uma família de operadores denominados  $t$ -normas, e a união é implementada por uma família de operadores denominados  $t$ -conormas ou  $s$ -normas. Esses operadores têm origem nos estudos de Espaços Métricos Estatísticos, suas denominações advém da generalização da propriedade triangular para tais espaços [20].

Conforme Menger, as  $t$ -normas são funções que surgem naturalmente no estudo das desigualdades triangulares para espaços métrico probabilísticos. Menger foi o primeiro a usar a denominação norma triangular, chamada  $t$ -norma. Schewizer afirmou a importância de se ter um grande repertório de  $t$ -normas e estabeleceu uma caracterização que permite construí-la à vontade. Klir faz uma revisão dos operadores de intersecção e união difusa colocando as  $t$ -normas e  $t$ -conormas como funções qualificadas para efetivá-las, e dessa forma, as  $t$ -normas são aplicadas sobre graus de pertinência a conjuntos difusos [24].

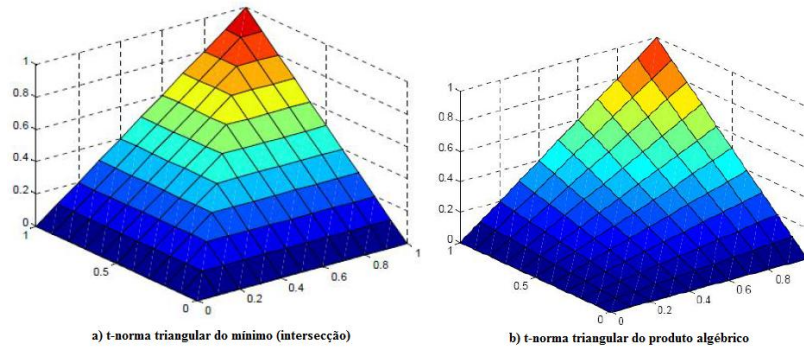
Em outras palavras, uma  $t$ -norma, ou norma triangular, é uma operação binária geralmente utilizada para representar o operador lógico de conjunção ou a operação intersecção entre conjuntos.

**Definição 3.1:** O operador  $\Delta : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , dado por  $\Delta : (x, y) = x\Delta y$  é uma  $t$ -norma, se satisfaz as seguintes condições:

- i) Elemento neutro:  $\Delta(1, x) = 1\Delta x = x$ ;
- ii) Comutativa:  $\Delta(x, y) = x\Delta y = y\Delta x = \Delta(y, x)$ ;
- iii) Associativa:  $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$ ;
- iv) Monotonicidade: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x\Delta y \leq u\Delta v$ .

Observe a Figura 3.1, uma representação gráfica de  $t$ -normas triangulares.

**Figura 3.1:** Ilustração gráfica de t-normas triangulares



Fonte: [7]

**Exemplo 3.1** [2]: Considere os operadores:

$$\Delta_1(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y;$$

$$\Delta_2(x, y) = xy;$$

$$\Delta_3(x, y) = \max\{0, x + y - 1\};$$

$$\Delta_4(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y = 1 \\ y & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

É fácil verificar que estes operadores reproduzem a tabela verdade de  $\wedge$ .

*Demonstração* [35]

$\cdot D_1$  é uma t-norma.

De fato,

i)

$$\Delta(1, x) = 1 \wedge x = \min\{1, x\} = x, \text{ pois } x \leq 1;$$

ii)

$$\Delta(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\} = \min\{y, x\} = y \wedge x = \Delta(y, x);$$

iii)

$$x\Delta(y\Delta z) = x \wedge (y \wedge z) = \min\{x, \min\{y, z\}\}.$$

Por outro lado, tem-se:



$$(x\Delta y)\Delta z = (x \wedge y) \wedge z = \min\{\min\{x, y\}, z\}.$$

Analise agora, apenas um caso, demais seguem de maneira análoga.

Suponha  $x \leq y \leq z$ . Então:

$$x\Delta(y\Delta z) = x \wedge (y \wedge z) = \min\{x, \min\{y, z\}\} = \min\{x, y\} = x,$$

e:

$$(x\Delta y)\Delta z = (x \wedge y) \wedge z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, z\} = x.$$

Portanto, segue a associatividade:

$$x\Delta(y\Delta z) = \min\{x, \min\{y, z\}\} = x = \min\{\min\{x, y\}, z\} = (x\Delta y)\Delta z$$

iv)

Para o caso "se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x\Delta y \leq u\Delta v$ ", deve-se analisar as seguintes possibilidades:

- $x \leq y$  e  $u \leq v$

$$\Delta(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\} = x \leq u = \min\{u, v\} = u \wedge v = \Delta(u, v).$$

- $x \leq y$  e  $v \leq u$

$$\Delta(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\} = x \leq v = \min\{u, v\} = u \wedge v = \Delta(u, v).$$

- $y \leq x$  e  $u \leq v$

$$\Delta(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\} = y \leq x \leq u = \min\{u, v\} = u \wedge v = \Delta(u, v).$$

- $y \leq x$  e  $v \leq u$

$$\Delta(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\} = y \leq x \leq v = \min\{u, v\} = u \wedge v = \Delta(u, v).$$

Portanto, tem-se que:

$$\text{se } x \leq u \text{ e } y \leq v, \text{ então } x\Delta y \leq u\Delta v.$$

■

·  $D_2$  é uma t-norma.

De fato,

$$a) \Delta_2(1, x) = 1 \cdot x = x;$$

$$b) \Delta_2(x, y) = x \cdot y = y \cdot x = \Delta_2(y, x);$$

$$c) x \Delta_2(y \Delta_2 z) = x \Delta_2(y, z) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = (x \Delta_2 y) \Delta_2 z;$$

d) Sejam  $u$  e  $v$ , tais que  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , assim:

$$x \Delta_2 y = x \cdot y \leq u \cdot v = u \Delta_2 v.$$

$\therefore \Delta_2$  é uma t-norma. ■

·  $D_3$  é uma t-norma.

De fato,

$$a) \Delta_3(1, x) = \max\{0, 1 + x - 1\} = x.$$

$$b) \Delta_3(x, y) = \max\{0, x + y - 1\} = \max\{0, y + x - 1\} = \Delta_3(y, x).$$

$$c) \text{ Verifica-se que } x \Delta_3(y \Delta_3 z) = \max\{0, x + \max\{0, y + z - 1\} - 1\}.$$

$$\text{Por outro lado, } (x \Delta_3 y) \Delta_3 z = \max\{0, \max\{0, x + y - 1\} + z - 1\}.$$

Análise os seguintes casos:

Se  $0 > x + y - 1$  e  $0 > y + z - 1$ , então:

$$x \Delta_3(y \Delta_3 z) = \max\{0, x - 1\} = 0$$

$$(x \Delta_3 y) \Delta_3 z = \max\{0, z - 1\} = 0.$$

Se  $0 < x + y - 1$  e  $0 < y + z - 1$ , então:

$$x \Delta_3(y \Delta_3 z) = \max\{0, x + z + y - 2\} = 0$$

$$(x \Delta_3 y) \Delta_3 z = \max\{0, x + y - 2\} = 0.$$

Se  $0 < x + y - 1$  e  $0 < y + z - 1$ , então:

$$x \Delta_3(y \Delta_3 z) = \max\{0, x - 1\} = 0$$

$$(x \Delta_3 y) \Delta_3 z = \max\{0, x + y + z - 2\} = 0.$$

Como  $0 > y + z - 1$  então  $x > x + y + z - 1 \Rightarrow 0 > x - 1 > x + y + z - 2$ .

Logo  $\max\{0, x + y + z - 2\} = 0$ .

Se  $0 > y + z - 1$  e  $0 < y + z - 1$ , segue de maneira análoga ao caso anterior.

d) Sejam  $u$  e  $v$ , tais que  $x \leq u$  e  $y \leq v$ . Assim,

Se  $0 > x + y - 1$ , então:

$$\Delta_3(x, y) = \max\{0, x + y - 1\} = 0 \leq \max\{0, u + v - 1\} = \Delta_3(u, v).$$

Se  $0 < x + y - 1$ , então  $0 < u + v - 1$ . Assim:

$$\Delta_3(x, y) = \max\{0, x + y - 1\} = x + y - 1 \leq u + v - 1 = \max\{0, u + v - 1\} = \Delta_3(u, v).$$

$\therefore \Delta_3$  é uma t-norma. ■

$\cdot D_4$  é uma t-norma.

De fato,

a) Por definição tem-se que  $\Delta_4(1, x) = x$

$$b) \Delta_4(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y = 1 \\ y & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \Delta_4(y, x).$$

c) Para mostrar que  $x\Delta_4(y\Delta_4z) = (x\Delta_4y)\Delta_4z$ , deve-se analisar os seguintes casos:

i)  $x = 1$  e  $y = 1$ ;

ii)  $x = 1$  e  $z = 1$ ;

iii)  $y = 1$  e  $z = 1$ ;

iv)  $x = 1$  e  $y \neq 1$  e  $z \neq 1$ ;

v)  $y = 1$  e  $x \neq 1$  e  $z \neq 1$ ;

vi)  $z = 1$  e  $x \neq 1$  e  $y \neq 1$ ;

vii)  $x \neq 1$  e  $y \neq 1$  e  $z \neq 1$ .

Será mostrado apenas os casos (i), (iv) e (vii), pois os demais decorrem de maneira análoga:

i)

Se  $x = 1$  e  $y = 1$ , então:

$$x\Delta_4(y\Delta_4z) = x\Delta_4z = z.$$

Por outro lado:

$$(x\Delta_4y)\Delta_4z = 1\Delta_4z = z.$$

iv) Se  $x = 1$ ,  $y \neq 1$  e  $z \neq 1$ , então:

$$x\Delta_4(y\Delta_4z) = x\Delta_40 = 0.$$

Por outro lado:

$$(x\Delta_4y)\Delta_4z = y\Delta_4z = 0.$$

vii) Se  $x \neq 1$ ,  $y \neq 1$  e  $z \neq 1$ , então:

$$x\Delta_4(y\Delta_4z) = x\Delta_40 = 0.$$

Por outro lado:

$$(x\Delta_4y)\Delta_4z = 0\Delta_4z = 0.$$

d) Sejam  $u$  e  $v$  tais que  $x \leq u$  e  $y \leq v$ .

Se  $x = 1$ , então  $u = 1$ . Portanto:

$$\Delta_4(x, y) = y \leq v = \Delta_4(u, v).$$

Se  $y = 1$ , então  $v = 1$ . Portanto:

$$\Delta_4(x, y) = x \leq u = \Delta_4(u, v).$$

Caso contrário, tem-se que:

$$\Delta_4(x, y) = 0 \leq \Delta_4(u, v).$$

$\therefore \Delta_4$  é uma t-norma. ■

**Proposição 3.1:** *Seja uma  $\Delta$  t-norma qualquer, então para todo  $x \in [0,1]$ , tem-se que  $\Delta(x,0) = 0$ .*

*Demonstração:*

Como foi visto na Definição 3.1. em (i), (ii) e (iv), segue que :

$$\Delta(x, y) \leq \Delta(x,1) = x.$$

Da mesma forma, tem-se que:

$$\Delta(x, y) \leq \Delta(1, y) = y.$$

Logo:

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= x \wedge y \leq \min\{x, y\} \\ \Rightarrow \Delta(x, 0) &= x \wedge 0 \leq \min\{x, 0\} = 0.\end{aligned}$$

Assim, como  $\Delta(x, 0) \in [0, 1]$  segue que  $\Delta(x, 0) = 0$ . ■

**Proposição 3.2:** *Seja  $\Delta$  uma t-norma qualquer, então  $\Delta_4 \leq \Delta \leq \Delta_1$ .*

*Demonstração:*

Como foi visto na Proposição 3.1,  $\Delta(x, y) \leq \min\{x, y\} = \Delta_1(x, y)$ . Então:

Se  $x = 1$ , então  $\Delta_4(1, y) = y = \Delta(1, y)$ .

Se  $y = 1$ , então  $\Delta_4(x, 1) = x = \Delta(x, 1)$ .

Caso contrário,  $\Delta_4(x, y) = 0 = \Delta(x, 0) \leq \Delta(x, y)$ .

Logo,  $\Delta_4 \leq \Delta$ , e portanto,  $\Delta_4 \leq \Delta \leq \Delta_1$ . ■

A discussão da união de conjuntos fuzzy se aproxima bastante da intersecção dos mesmos. Porém, a união é indicada pelo operador *max* a qual é chamada de *t-conorma*.

**Definição 3.2:** *O operador  $\nabla(x, y) = x \nabla y$  é uma t-conorma se satisfaz as seguintes condições:*

i) *Elemento neutro:*  $\nabla(10x) = 0 \nabla x = x$ ;

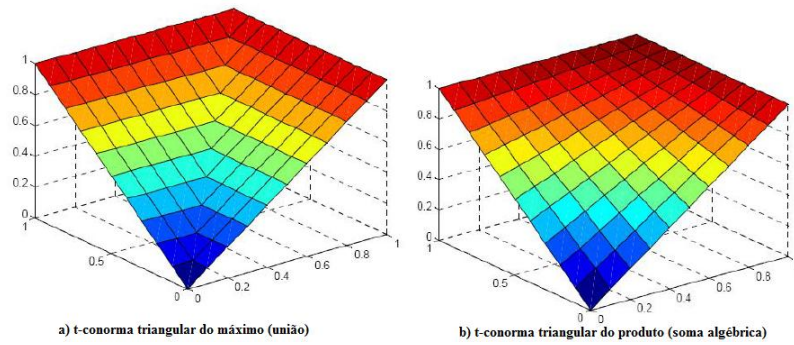
ii) *Comutativa:*  $\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$ ;

iii) *Associativa:*  $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$ ;

iv) *Monotonicidade:* *se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \nabla y \leq u \nabla v$ .*

Observe a Figura 3.2, uma representação gráfica de t-conormas triangulares.

**Figura 3.2:** Ilustração gráfica de t-conormas triangulares



Fonte: [7].

**Exemplo 3.2:** Os operadores abaixo são exemplos de t-conorma que reproduz a tabela verdade do conectivo  $\vee$ .

$$\nabla_1(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y;$$

$$\nabla_2(x, y) = \min\{1, x + y\};$$

$$\nabla_3(x, y) = x + y - xy.$$

*Demonstração:*

·  $\nabla_1$  é uma t-conorma.

De fato,

i)

$$\nabla(0, x) = 1 \vee x = \max\{0, x\} = x, \text{ pois } x \geq 0;$$

ii)

$$\nabla(x, y) = x \vee y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y \vee x = \nabla(y, x);$$

iii)

Se  $x \leq y \leq z$ , então:

$$x \nabla (y \nabla z) = x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = x \nabla z = x \vee z = z.$$

Por outro lado:

$$(x \nabla y) \nabla z = (x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = y \nabla z = y \vee z = z.$$

As outras situações seguem de maneira análoga. Portanto segue a associatividade.

iv)

Para o caso "se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \nabla y \leq u \nabla v$ ", deve-se analisar as seguintes possibilidades:

- $x \leq y$  e  $u \leq v$

$$x \nabla y = x \vee y = \max\{x, y\} = y \leq v = \max\{u, v\} = u \vee v = u \nabla v.$$

- $x \leq y$  e  $v < u$

$$x \nabla y = x \vee y = \max\{x, y\} = y \leq v < u = \max\{u, v\} = u \vee v = u \nabla v.$$

- $y < x$  e  $u \leq v$

$$x \nabla y = x \vee y = \max\{x, y\} = x \leq u < v = \max\{u, v\} = u \vee v = u \nabla v.$$

- $y < x$  e  $v < u$

$$x \nabla y = x \vee y = \max\{x, y\} = x \leq u = \max\{u, v\} = u \vee v = u \nabla v.$$

Portanto, tem-se que:

$$\text{se } x \leq u \text{ e } y \leq v, \text{ então } x \nabla y \leq u \nabla v.$$



$\cdot \nabla_2$  é uma t-conorma.

De fato,

a)  $\nabla_2(0, x) = \min\{1, x + 0\} = \min\{1, x\} = x;$

b)  $\nabla_2(0, x) = \min\{1, x + y\} = \min\{1, y + x\} = \nabla_2(y, x);$

c)  $x \nabla_2(y \nabla_2 z) = \min\{1, x + \min\{1, y + z\}\}.$

Analise os seguintes casos:

Se  $1 \leq y + z$  e  $1 \leq x + y$ , então:

$$x \nabla_2(y \nabla_2 z) = x \nabla_2 1 = \min\{1, x + 1\} = 1$$

$$(x \nabla_2 y) \nabla_2 z = 1 \nabla_2 z = \min\{1, 1 + z\} = 1.$$

Se  $1 > y + z$  e  $1 > x + y$ , então:

$$x\nabla_2(y\nabla_2z) = x\nabla_2(y+z) = \min\{1, x+y+z\}$$

$$(x\nabla_2y)\nabla_2z = (x+y)\nabla_2z = \min\{1, x+y+z\}.$$

Se  $1 \leq y+z$  e  $1 > x+y$ , então:

$$x\nabla_2(y\nabla_2z) = x\nabla_21 = \min\{1, x+1\} = 1$$

$$(x\nabla_2y)\nabla_2z = (x+y)\nabla_2z = \min\{1, x+y+z\}.$$

Como  $1 \leq y+z$ , então  $1 \leq y+z < x+y+z$ , logo  $(x\nabla_2y)\nabla_2z = 1$ .

O caso em que  $1 > y+z$   $1 \leq x+y$  é análogo ao anterior. Portanto segue o resultado.

d) Sejam  $u$  e  $v$  tais que  $x \leq u$  e  $y \leq v$ .

Se  $1 \leq x+y$  então  $1 \leq u+v$ . Logo:

$$\nabla_2(x, y) = \min\{1, x+y\} = 1 = \min\{1, u+v\} = \nabla_2(u, v).$$

sendo assim, verdadeira a igualdade.

Se  $1 > x+y$ , então:

$$\nabla_2(x, y) = \min\{1, x+y\} = x+y \leq u+v.$$

Logo:

$$x+y \leq u+v \text{ e } x+y < 1.$$

Assim:

$$\nabla_2(x, y) = x+y \leq \min\{1, u+v\} = \nabla_2(u, v).$$

$\therefore \nabla_2$  é uma t-conorma. ■

$\cdot \nabla_3$  é uma t-conorma.

De fato,

$$a) \nabla_3(0, y) = 0 + y - 0y = y;$$

$$b) \nabla_3(x, y) = x + y - xy = y + x - xy = \nabla_3(y, x);$$



$$\begin{aligned}
c) \ x \nabla_3 (y \nabla_3 z) &= x \nabla_3 (y + z - yz) \\
&= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\
&= x + y + z - yz - xy - xz + xyz,
\end{aligned}$$

$$\text{Logo } x \nabla_3 (y \nabla_3 z) = (x \nabla_3 y) \nabla_3 z.$$

d) Sejam  $u$  e  $v$ , tais que  $x \leq u$  e  $y \leq v$ . Como  $0 \leq x$  e  $0 \leq v \leq 1$ . Então:

$$0 \leq 1 - x \leq 1 \text{ e } 0 \leq 1 - v \leq 1.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
y \leq v &\Rightarrow y(1 - x) \leq v(1 - x) \\
&\Rightarrow y - xy \leq v - vx \\
&\Rightarrow x + y - xy \leq x + v - vx.
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
x \leq u &\Rightarrow x(1 - v) \leq u(1 - v) \\
&\Rightarrow x - xv \leq u - uv \\
&\Rightarrow v + x - xv \leq v + u - uv.
\end{aligned}$$

Logo,  $x + y - xy \leq x + v - vx \leq u + v - uv$  e assim  $\nabla_3(x, y) \leq \nabla_3(u, v)$ .

$\therefore \nabla_3$  é uma t-conorma. ■

**Proposição 3.3:** Para toda t-conorma  $\nabla$ , tem-se  $\nabla(x, 1) = 1$ .

*Demonstração:*

Por (i), (ii) e (iv) da Definição 3.2, tem-se:

$$\nabla(x, y) \geq \nabla(x, 0) = x \vee 0 = x.$$

Do mesmo modo:

$$\nabla(x, y) \geq \nabla(0, y) = 0 \vee y = y.$$

Logo,  $\nabla(x, y) \geq \max\{x, y\}$  e assim  $\nabla(x, 1) \geq \max\{x, 1\} = x \vee 1 = 1$ .

Como  $\nabla(x, 1) \in [0, 1]$  segue que  $\nabla(x, 1) = 1$ . ■

**Proposição 3.4:** *Seja  $\nabla$  uma t-conorma qualquer, então  $\nabla_1 \leq \nabla \leq \nabla_4$ .*

*Demonstração:*

Como foi visto que  $\nabla(x, y) \geq \max\{x, y\} = \nabla_1(x, y)$ , basta verificar que  $\nabla \leq \nabla_4$ .

Então:

Se  $x = 0$ , tem-se  $\nabla_4(x, y) = y = \nabla(0, y) = \nabla(x, y)$ ;

Se  $y = 0$ , tem-se  $\nabla_4(x, y) = x = \nabla(x, 0) = \nabla(x, y)$ ;

Se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ :

$$\nabla_4(x, y) = 1 = \nabla(x, 1) \geq \nabla(x, y).$$

$$\therefore \nabla_1 \leq \nabla \leq \nabla_4.$$

■

Os conectivos "e" e "ou" são modelados, respectivamente, por t-normas e t-conormas como foi visto até aqui. A seguir, será estendido os conceitos de *negação* e de *implicação*.

**Definição 3.3:** *Uma implicação  $\eta: [0,1] \rightarrow [0,1]$  é uma negação se satisfaz as seguintes condições:*

i) *Fronteira:*  $\eta(0) = 1$  e  $\eta(1) = 0$ ;

ii) *Involução:*  $\eta(\eta(x)) = x$ ;

iii) *Monotonicidade:*  $\eta$  é decrescente.

**Exemplo 3.3:** As aplicações abaixo reproduzem a tabela verdade da negação  $\neg$ :

$$\eta_1(x) = 1 - x \text{ e } \eta_2(x) = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

De fato, para  $\eta_1$ , temos:

a)  $\eta_1(0) = 1 - 0 = 1$  e  $\eta_1(1) = 1 - 1 = 0$ ;

b)  $\eta_1(\eta_1(x)) = \eta_1(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$ ;

c) Se  $x \leq y$ , então  $\eta_1(x) = 1 - x \geq 1 - y = \eta_1(y)$ .

Para  $\eta_2$ :

$$a) \eta_2(0) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \text{ e } \eta_2(1) = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0.$$

$$b) \eta_2(\eta_2(x)) = \eta_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = \frac{2x}{2} = x.$$

$$c) \text{ Se } x \leq y, \text{ então } \eta_2(x) = \frac{1-x}{1+x} \geq \frac{1-y}{1+y} = \eta_2(y).$$

■

**Proposição 3.5:** As operações  $\Delta = \wedge$ ,  $\nabla = \vee$  e  $\neg = \eta(x) = 1-x$  satisfazem as Leis de De Morgan, ou seja, para todo  $(x,y)$  de  $[0,1] \times [0,1]$ , tem-se:

$$i) \eta(x \vee y) = \eta(x) \wedge \eta(y);$$

$$ii) \eta(x \wedge y) = \eta(x) \vee \eta(y).$$

*Demonstração:*

i) Como  $x \leq y$ , então  $1-y \leq 1-x$ , e:

$$\begin{aligned} \eta(x \vee y) &= \eta(\max\{x,y\}) = \eta(y) = 1-y \\ &= \min\{1-x, 1-y\} = \min\{\eta(x), \eta(y)\} = \eta(x) \wedge \eta(y). \end{aligned}$$

ii) Como  $x \leq y$ , então  $1-y \leq 1-x$ , e:

$$\begin{aligned} \eta(x \wedge y) &= \eta(\min\{x,y\}) = \eta(x) = 1-x \\ &= \max\{1-x, 1-y\} = \max\{\eta(x), \eta(y)\} = \eta(x) \vee \eta(y). \end{aligned}$$

Para o caso em que  $x > y$ , o resultado segue de maneira análoga.

■

Pode-se dizer que a t-norma  $\Delta$  e a t-conorma  $\nabla$  são duais em relação a uma negação  $\eta$  se satisfazem a uma das Leis de De Morgan.

**Exemplo 3.4 [2]:** Observe que no sistema abaixo, as t-normas e t-conormas são duais em relação à negação  $\eta(x) = 1-x$ .

$$\begin{cases} x \Delta y = \max\{x+y-1, 0\} \\ x \nabla y = \min\{x+y, 1\} \end{cases}.$$

Se  $x+y-1 \leq 0$ , então  $2-x-y \geq 1$ . Assim:

$$\begin{aligned}\eta(x \wedge y) &= \eta(x \Delta y) = \eta(0) = 1 - 0 = 1 = \min\{2 - x - y, 1\} \\ &= \min\{(1 - x) + (1 - y), 1\} = (1 - x) \nabla (1 - y) = \eta(x) \nabla \eta(y).\end{aligned}$$

Por outro lado, se  $x + y - 1 > 0$ , o resultado segue de maneira análoga.

**Definição 3.4:** Um operador  $\Rightarrow: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  é uma implicação fuzzy se satisfaz as seguintes condições:

i) reproduz a tabela da implicação clássica;

ii) é decrescente na primeira variável, isto é, para cada  $x \in [0,1]$ , tem-se:

$$(a \Rightarrow b) \leq (b \Rightarrow x), \text{ se } a \geq b;$$

iii) é crescente na segunda variável, isto é, para cada  $x \in [0,1]$ , tem-se:

$$(x \Rightarrow a) \geq (x \Rightarrow b), \text{ se } a \geq b;$$

No entanto, a classe das implicações fuzzy consiste de todas as aplicações do quadrado  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  em  $[0,1]$ , cuja restrição ao vértice coincide com os valores da implicação clássica; são decrescente em relação às abscissas e crescente em relação às ordenadas. Diz-se ainda que uma implicação fuzzy é uma S-implicação se ela for da forma  $(x \Rightarrow y) = \eta(x) \nabla y$ , para alguma negação  $\eta$  e t-conorma  $\nabla$ , é uma R-implicação se ela for da forma  $(x \Rightarrow y) = \sup\{z \in [0,1] : x \Delta z \leq y\}$ , para alguma t-norma  $\Delta$ .

**Exemplo 3.5:** Seja a implicação de Gödel dada abaixo, verifica-se que é uma implicação fuzzy.

$$g(x, y) = (x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ y & \text{se } x > y \end{cases}.$$

$$a) 1 \Rightarrow 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 > 1 \end{cases} = 1$$

$$1 \Rightarrow 0 = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq 0 \\ 0 & \text{se } 1 > 0 \end{cases} = 0$$

$$0 \Rightarrow 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq 1 \\ 1 & \text{se } 0 > 1 \end{cases} = 1$$

$$0 \Rightarrow 0 = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 > 0 \end{cases} = 1.$$

b) Suponha  $a \leq b$ . Então:

$$x \Rightarrow a = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq x \\ x & \text{se } a > x \end{cases};$$

$$b \Rightarrow x = \begin{cases} 1 & \text{se } b \leq x \\ x & \text{se } b > x \end{cases}.$$

Se  $a \leq x$ , então  $(a \Rightarrow x) = 1 \geq (b \Rightarrow x)$ .

Se  $a > x$ , então  $b \geq a > x$ , e assim  $(a \Rightarrow x) = x = (b \Rightarrow x)$ .

$\therefore (a \Rightarrow x) \geq (b \Rightarrow x)$ .

c) Suponha  $a \leq b$ . Assim:

$$x \Rightarrow a = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq a \\ a & \text{se } x > a \end{cases};$$

$$x \Rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq b \\ b & \text{se } x > b \end{cases}.$$

Se  $x \leq a$ , então  $x \leq a \leq b$ . Assim  $(x \Rightarrow a) = 1 = (x \Rightarrow b)$ .

Se  $x > a$ , então  $(x \Rightarrow a) = a \leq b \leq (x \Rightarrow b)$ .

$\therefore (x \Rightarrow a) \leq (x \Rightarrow b)$ .



## CAPÍTULO 4. DENGUE, CHIKUNGUNYA OU ZIKA?

*"Bem mais sensato do que o homem é o animal que,  
em sua necessidade, sabe quanto necessita.  
O homem, ao contrário, quanto necessita não o sabe".  
(Demócrito de Abdera - Séc. V a.C)*

Para Demócrito é impossível o não ser. O ser é pleno e o não ser é o vazio. As coisas reais são originadas por um infinito número de corpos que são invisíveis por terem um volume extremamente pequeno. São os denominados átomos que em grego significa não divisível, pois caso contrário se dissolveria no vazio. Se hoje existimos, é porque um dia teve origem o átomo.

Será que os indivíduos de uma espécie concordam com Demócrito, de que os animais são tão ou mais sábios do que o homem, pois conhecem a medida de suas necessidades, enquanto que o homem as ignora? Ou será que buscam o máximo de rendimento com o mínimo de esforço? Talvez a diferença entre os dois seja a questão de adaptação e necessidade.

Será feito agora, um breve histórico sobre o mosquito *Aedes Aegypti* e as doenças dengue, chikungunya e zika, transmitidas por ele. Logo em seguida será apresentado um modelo matemático para diagnóstico médico por meio de relações fuzzy para tais doenças.

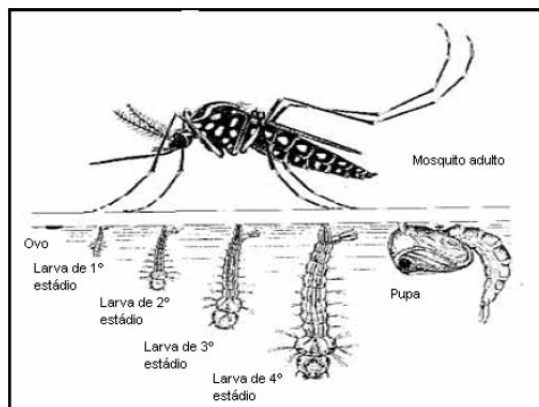
### 4.1. *Aedes Aegypti*

O mosquito *Aedes Aegypti* (Diptera: Culicidae) é originário do Egito (África) e vem se espalhando pelas regiões tropicais e subtropicais do planeta desde o século XVI, o período das grandes navegações. Admite-se que o vetor foi introduzido no Novo Mundo no período colonial, por meio de navios que traficavam escravos. Cientificamente, este mosquito foi descrito pela primeira vez em 1762 como *Culex Aegypti*, cujo nome definitivo, *Aedes Aegypti* foi estabelecido somente em 1818, após a descrição do *Aedes*. [12].

O *Aedes aegypti* apresenta duas fases evolutivas: fase larvária ou imatura (fase aquática) e fase adulta ou alada (fase aérea) e é uma espécie holometabólica (metamorfose completa) que passa por quatro estágios distintos: ovo, larva, pupa e adulto (Figura 4.1). O

estágio de larva acontece em quatro estágios (1° ao 4°), sendo o de pupa o último do ciclo aquático do inseto. Sua proliferação é sinantrópica em vilas e cidades onde existam alterações antrópicas do meio ambiente [10]

**Figura 4.1:** Fase evolutiva do *Aedes Aegypti*.



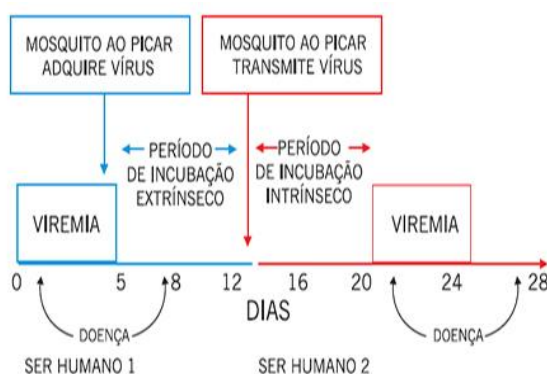
Fonte: [27]

Este inseto é também conhecido como *mosquito da dengue* ou *mosquito rajado*, pois possui cor escura sendo rajado de branco nas patas e corpo. É pouco menor que um pernilongo comum e o mosquito adulto vive de 30 a 35 dias, em média.

A fêmea do mosquito *Aedes Aegypti*, principal responsável pela transmissão da dengue, possui atividade hematofágica diurna, principalmente ao amanhecer e pouco antes do crepúsculo, entretanto pode picar homens e animais domésticos a qualquer hora do dia, em casos raros à noite, caso o hospedeiro aproxime de seu abrigo. É muito habilidosa em escapar de ser morta por sua vítima durante o repasto sanguíneo, pois a qualquer movimento, abandona o hospedeiro, podendo voltar depois de algum tempo, ou procurar outra vítima disseminando seu vírus. É adaptada ao ambiente urbano e, portanto, é sinantrópica e antropofílica, ou seja, se instala nos povoados humanos beneficiando-se das condições ecológicas criada pelas atividades humanas e necessita de sangue preferencialmente humano para maturação de seus ovos que são postos de 4 a 6 vezes durante sua vida, sendo cerca de 100 ovos em cada vez, em locais com água limpa e parada [10] [27].

A transmissão ocorre quando a fêmea do mosquito *Aedes aegypti* pica um indivíduo já infectado pelo vírus e logo em seguida pica outra pessoa. Observe na Figura 4.2 o modo de transmissão do vírus do Aedes.

**Figura 4.2:** Modo de transmissão do vírus.



Fonte: [27]

Um ovo do *Aedes aegypti* pode sobreviver por até 450 dias, mesmo que o local onde foi depositado fique seco. Caso este local receba água novamente, o ovo volta a ficar ativo podendo se transformar em larva, posteriormente em pupa e atingir a fase adulta depois de dois ou três dias, aproximadamente. Quando não encontra recipientes apropriados, a fêmea do *Aedes aegypti*, em casos excepcionais, pode voar a grandes distâncias em busca de outros locais para depositar seus ovos.

Em 1957, o vetor foi considerado eliminado no Brasil, porém reintroduzido em 1967, e novamente erradicado em 1973. Acredita-se que em 1976 tenha ocorrido a reintrodução da espécie. A crescente expansão da infestação de *Aedes Aegypti* no Brasil é um agravante no que diz respeito ao controle populacional e conseqüentemente da incidência da dengue. Além disso, o controle vetorial tem sido dificultado, pois o mosquito começou a apresentar grande capacidade de adaptação a diferentes condições ambientais consideradas não comuns para a espécie. Por exemplo, foi detectado a presença de larvas em recipientes com água poluída e ainda o registro da espécie em locais de altitude elevada (fator limitante para o vetor) onde ocorreram inclusive, algumas epidemias como no México em 1988, em Taxco, a 1.735 m (primeira epidemia notificada em altitudes maiores que 1.700 m) e em Tlayacapan, 1.630 m (Herrera, 1992) [27].

Dentre as doenças transmitidas pelo mosquito *Aedes Aegypti*, vamos destacar a dengue, chikungunya e zika, base deste trabalho:

➤ **Dengue:**



A dengue é uma doença virótica grave transmitida pelo mosquito *Aedes Aegypti* o qual se espalha por meio de áreas tropicais e subtropicais. O indivíduo contrai o vírus da dengue após ser picado por um mosquito infeccioso, sendo que o período de incubação varia de 3 a 14 dias com média de 5 a 6 dias. É uma doença febril aguda que possui um vírus como seu agente etiológico e são conhecidos quatro sorotipos causadores da doença: DENV-1, DENV-2, DENV-3 e DENV-4. Recentemente foi identificado na Malásia o quinto sorotipo da dengue, o DENV-5. Essa doença ameaça a saúde pública de milhões de pessoas que residem em áreas urbanas, suburbanas e rurais [10] [25] [27] [33].

Segundo relatos da Organização Pan-Americana de Saúde (OPAS), a primeira epidemia de dengue ocorreu no continente americano no início do século XIX, no Peru, com surtos no Caribe, Estados Unidos, Colômbia e Venezuela. No Brasil, os primeiros relatos de dengue datam do final do século XIX, em Curitiba (PR) e início do século XX, em Niterói (RJ). Atualmente o mosquito é encontrado em todos os estados do Brasil. Segundo dados do Ministério da Saúde, a primeira ocorrência do vírus no país, documentada clínica e laboratorialmente, aconteceu em 1981-1982, em Boa Vista (RR), causada pelos vírus DENV-1 e DENV-4. Em 1986, houve epidemias no Rio de Janeiro e em algumas capitais do Nordeste. Desde então, a dengue vem ocorrendo no país de forma continuada [12].

Os sinais e sintomas da dengue clássica, geralmente são caracterizados por febre alta de início súbito variando entre 39° a 40°C, com dores de cabeça, dores musculares, prostração, artralgia, falta de apetite, astenia, dor nos olhos, náuseas, vômitos e manchas vermelhas na pele, podendo ser acompanhado ou não de prurido. Além disso, o paciente pode apresentar vômitos e diarreia entre o segundo e o sexto dia da infecção. Em um período de 3 a 7 dias a temperatura começa a normalizar e os sintomas regridem, no entanto permanece um quadro de astenia por algumas semanas [25].

A dengue hemorrágica pode ocorrer após uma reinfecção do vírus, ocasionando sintomas mais graves se comparada a dengue clássica. Este tipo de dengue se inicia com os mesmos sinais e sintomas da dengue clássica, porém acompanhados de sinais hemorrágicos, sendo os mais observados: petéquias, equimoses, hemorragia das mucosas, hematêmese ou melena. A hemorragia gastrointestinal acontece nos casos mais graves juntamente com gengivorragia e epistaxe. O tratamento inadequado pode levar o paciente ao óbito em até 24 horas.

As técnicas utilizadas para a detecção do vírus da dengue podem ser inibição de hemaglutinação (IH), teste de neutralização (TN), PCR e ensaio imunoenzimático (ELISA),

que detecta anticorpos IgM específicos contra dengue, e só podem ser realizados a partir do sexto dia da doença, quando os anticorpos começam a surgir, o que não é bom para um diagnóstico que necessita de urgência na confirmação do vírus. Entre os exames laboratoriais, o hemograma é o mais indicado, onde são encontrados alterações como leucopenia, neutropenia e trombocitopenia. Para diagnóstico da dengue hemorrágica utiliza-se o hematócrito.

➤ **Chikungunya:**

A chikungunya ou febre de chikungunya (CHIKV) é uma doença causada pelo vírus da família *Togaviridae* do gênero *Alphavirus*, transmitida pela picada de fêmeas do mosquito *Aedes Aegypti* e o *Aedes Albopictus* infectados. O nome da doença vem da língua makonde, um dos idiomas oficiais da Tanzânia, onde foi documentada a primeira epidemia da doença em 1953. O termo provém da raiz verbal *kungunyala* e significa "tornar-se dobrado ou contorcido", em referência à aparência curvada dos pacientes devido às intensas dores articulares e musculares, características da doença. Em Angola (África) a doença é popularmente conhecida por *catolotolo*, palavra proveniente do quimbundo *katolotolu*, derivação do verbo *kutolojoka* ("*ficar alquebrado*") [25].

Atualmente é encontrada em regiões tropicais e subtropicais da África, no sul e sudeste da Ásia e em ilhas do Oceano Índico. No Brasil, a transmissão da chikungunya foi detectada em setembro de 2014, na cidade de Oiapoque (Amapá), atingindo posteriormente outros estados como Distrito Federal, Bahia, Mato Grosso do Sul, Roraima e Goiás [25].

A chikungunya é caracterizada por dores articulares de forte intensidade e às vezes debilitante, febre acima de 38,5°C, dor de cabeça e dores musculares. O quadro mais importante e relatado na maioria dos casos clínicos é a artralgia simétrica, observadas nos tornozelos, dedos dos pés, cotovelos, punhos, dedos das mãos e joelhos. A duração desses sintomas é de aproximadamente 10 dias, mas pode estender-se por meses após o quadro febril da doença. Há casos documentados onde a artralgia persiste por anos, podendo em 12% dos casos desenvolver problemas articulares crônicos. O período de incubação da doença no homem é em média de 3 a 7 dias, podendo estender até 12 dias. Após o período de incubação iniciam-se as fases da doença que são: fase aguda ou febril, fase subaguda e a fase crônica [25].

Na fase aguda o paciente apresenta febre de início abrupto, poliartralgia, dor nas costas, dor de cabeça, cansaço, calafrios, dor nos olhos, náuseas, vômitos, diarreia, dor

abdominal e inchaço que está associado à tenossinovite. Durante essa fase ocorre o aparecimento de exantemas, geralmente entre o segundo e o quinto dia, atingindo o tronco e as extremidades, podendo ser generalizado ou localizado nas regiões palmo-plantar. Dentre outras manifestações cutâneas são diagnosticadas as dermatites esfoliativa, lesões vesicobolhosas, hiperpigmentação, fotossensibilidade, eritema nodoso e úlceras orais. Na fase subaguda, a febre para e a artralgia se destaca com maior persistência ou agravamento na região distal incluindo punhos e tornozelos, acompanhado de inchaço de proporções variáveis. Aparece ainda nessa fase da doença, a astenia, prurido generalizado e exantema maculopapular, cansaço e sintomas depressivo [25].

Para acompanhamento da doença, o médico solicita o hemograma, um exame laboratorial, além de outros testes bioquímicos como as transaminases, creatinina e eletrólitos nos casos mais graves [5] [25].

➤ **Zika:**

O vírus Zika (ZIKV) é um arbovírus do gênero *Flavivirus*, pertencente à família Flaviviridae, cujo vetor é o mosquito *Aedes Aegypti*. Foi identificado pela primeira vez em 20 de abril de 1947 na floresta Zika (por isso o nome Zika), localizada na Uganda (África), em um macaco do gênero Rhesus quando um grupo de cientistas pesquisavam sobre a febre amarela. Em seres humanos o vírus foi descoberto em 1952 na Uganda e Tanzânia, em 1968 foi confirmado em amostras biológicas de humanos na Nigéria. Apesar do vírus existir por vários anos, somente no início do ano de 2015 foram registrados os primeiros casos de infecção no Brasil. Os primeiros casos surgiram na Bahia e em São Paulo, logo em seguida a infecção pelo o ZIKV foi confirmada no Rio Grande do Norte, Alagoas, Maranhão, Pará e Rio de Janeiro [25].

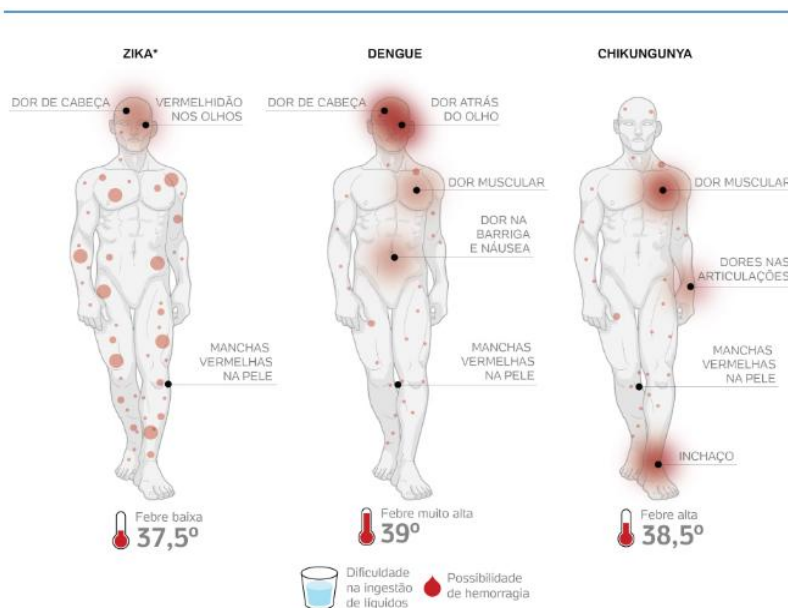
O período de incubação do ZIKV pode variar de 3 a 12 dias após a picada do mosquito. O ZIKV pode causar manifestações clínicas, que incluem artralgia, edema de extremidades, febre moderada que varia entre 37,8 °C e 38 °C, erupções pruriginosas maculopapular com frequência, dores de cabeça, dor retro-orbitária, conjuntivite não purulenta, vertigem, mialgia e distúrbio digestivo e estes sintomas podem durar por cerca de 4 a 7 dias. Dados recentes constataram que recém-nascidos de mães que contraíram o vírus da ZIKV durante a gestação estão sob risco de terem microcefalia (malformação congênita) que cresceram exponencialmente no Brasil em 2015, ano em que também cresceu o número de infectados pelo vírus ZIKV [25].

Em Novembro de 2015, o vírus ZIKV foi encontrado em um recém-nascido no estado do Ceará, que apresentou microcefalia. Desde Dezembro de 2015 já existia a suspeita de que a infecção pelo ZIKV ultrapassa a placenta e ocasiona microcefalia e danos cerebrais. Em Janeiro de 2016, um bebê em Oahu (E.U.A) nasceu com microcefalia, primeiro caso de dano cerebral causado pelo vírus ZIKV nos Estados Unidos. Em 20 de Janeiro de 2016, cientistas do estado do Paraná, (Brasil), descobriram que o vírus é capaz de penetrar a placenta durante a gravidez. Restos do material genético do vírus ZIKV foi encontrado numa amostra de tecido da placenta de uma mulher que abortou devido à microcefalia [32].

Para o diagnóstico da infecção pelo vírus zika, especialistas da saúde solicitam exames laboratoriais para identificação do RNA viral no sangue do paciente. A reação da cadeia de polimerase da transcriptase reversa (RT-PCR) é a técnica de referência para o diagnóstico do ZIKV, tanto na fase de incubação quanto na fase de latência do vírus, sendo ideal realizar o exame no 4º dia do aparecimento dos sintomas. Os testes de ELISA ou imunofluorescência são amplamente utilizados para a confirmação do diagnóstico do ZIKV, no entanto, devido a baixa concentração de anticorpos IgM e IgG na fase de incubação, torna-se mais difícil a identificação do vírus no paciente [25].

É notável (observe a Figura 4.3) que geralmente os sintomas entre as doenças dengue, chikungunya e zika são muito parecidos, o que muitas vezes confunde até mesmo um especialista. Diante destas dificuldades, é proposto na próxima seção, um modelo matemático.

**Figura 4.3:** Principais sintomas entre Dengue, Chikungunya e Zika



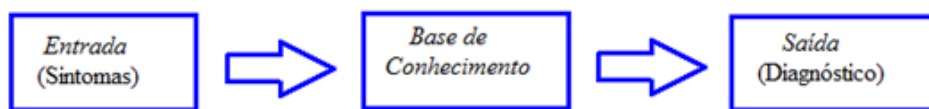
Fonte: [34]

## 4.2. O modelo matemático

O diagnóstico de doenças envolve vários níveis de imprecisão e incerteza, particularmente nos estudos em epidemiologia. Uma única doença pode se manifestar de formas distintas em diferentes pacientes. Também, um único sintoma pode ser indicativo de várias doenças distintas, assim como a presença de outras doenças em um mesmo indivíduo pode alterar completamente o padrão sintomático esperado. Estes efeitos costumam ser geradores de muitas incertezas e imprecisões afetando, porém, as interpretações dos exames e o diagnóstico.

Para um diagnóstico médico, a ideia básica é relacionar os sintomas e sinais de pacientes com as possíveis doenças, de acordo com os conhecimentos de um especialista. Esses dados irão compor a base de conhecimento que serão expressos por meio de relações fuzzy. Vários autores têm utilizado esta abordagem em problemas de epidemiologia [13].

Esta aplicação pode ser resumida no sistema de entradas e saídas:



Considere os seguintes conjuntos universais:

$U$  = conjunto dos pacientes;

$V$  = conjunto dos sintomas;

$W$  = conjunto das doenças.

Sejam:

$s_1$ = febre	$s_6$ = hiperemia conjuntival
$s_2$ = mialgia/artralgia	$s_7$ = linfadenopatia
$s_3$ = edema das extremidades	$s_8$ = hepatomegalia
$s_4$ = exantema maculopapular	$s_9$ = leucopenia/trombocitopenia
$s_5$ = dor retroorbital	$s_{10}$ = hemorragia

e:

$d_1 = \text{dengue}$	$d_2 = \text{chicungunya}$	$d_3 = \text{zika}$
-----------------------	----------------------------	---------------------

Com o auxílio de uma especialista (enfermeira padrão), que colaborou de forma anônima, foi construída a Tabela 4.1 com os dados de cinco pacientes  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ , com os respectivos sintomas  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9$  e  $s_{10}$ , ou seja, para cada sintoma foi atribuído um grau de pertinência (valor entre 0 e 1) relativo aos cinco pacientes.

**Tabela 4.1:** Matriz da Relação  $R$ : pacientes e respectivos sintomas

$P \backslash s$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$
$P_1$	0,9	0,5	0	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,4	0
$P_2$	0,7	1	0	0,2	0,3	0,3	0,5	0,5	0,2	0
$P_3$	0,6	0,5	0,2	0,9	0,1	0,8	0,3	0	0	0,4
$P_4$	0,3	0,1	0,4	0,8	0,9	0,2	0,1	0,1	0,4	0,1
$P_5$	1	0,8	0	0,4	0,8	0	0	0	0,8	0

Na Tabela 4.1 as colunas são os sintomas apresentados por cada paciente e as linhas são os pacientes.

Para prosseguir com o trabalho, faz-se necessário ter o conhecimento dos graus com que cada doença se relaciona com os sintomas, e para isso foi coletado informações de [5], conforme a Tabela 4.2. Na sequência faz-se a conversão destes símbolos para os valores pertencentes ao intervalo  $[0,1]$ , isto é, cada símbolo "+" equivale a 0,25, cujos valores estão indicados na Tabela 4.3.

**Tabela 4.2:** Sinais e sintomas em comum entre dengue, chikungunya e zika.

Sinais e sintomas	Dengue	Chikungunya	Zika
Febre	++++	+++	+++
Mialgia/artralgia	+++	++++	++
Edema das extremidades	ausente	ausente	++
Exantema maculopapular	++	++	+++
Dor retroorbital	++	+	++
Hiperemia conjuntival	ausente	+	+++
Linfadenopatia	++	++	+
Hepatomegalia	ausente	+++	ausente
Leucopenia/trombocitopenia	+++	+++	ausente
Hemorragia	+	ausente	ausente

Fonte: [5]

**Tabela 4.3:** Matriz da Relação  $S$ : sintomas e diagnósticos

$s \backslash d$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
$s_1$	1	0,75	0,75
$s_2$	0,75	1	0,5
$s_3$	0	0	0,5
$s_4$	0,5	0,5	0,75
$s_5$	0,5	0,25	0,5
$s_6$	0	0,25	0,75
$s_7$	0,5	0,5	0,25
$s_8$	0	0,75	0
$s_9$	0,75	0,75	0
$s_{10}$	0,25	0	0

Na Tabela 4.3, cada elemento da relação  $S$  indica o grau com que cada sintoma está relacionada com as doenças especificadas. Por exemplo, o valor  $S_{73} = 0,25$  indica que numa escala entre 0 e 1, o sintoma  $s_7 =$  linfadenopatia está relacionado com a doença  $d_3 =$  zika com grau 0,25.

Esses dados, irão compor a base de conhecimento que serão expressos por meio de equações relacionais fuzzy.

A ideia é obter uma relação fuzzy  $T$ , de modo que  $R \circ S = T$ , onde  $R$  e  $S$  são, respectivamente, as representações matriciais das relações fuzzy dos sintomas característico de cada paciente e do grau com que cada sintoma está relacionado com cada doença, dadas em  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente.

A base de conhecimento é composta pelas relações fuzzy  $R$  e  $S$ , cujas matrizes são representadas nas Tabelas 4.1 e 4.3, respectivamente:

A partir da relação fuzzy  $S$  é possível obter o diagnóstico médico de cada paciente, ou seja, como o modelo matemático que adotamos para diagnosticar foi  $R \circ S$ , então para obter o grau da doença para cada paciente, de acordo com a fórmula,

$$t_{ij} = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(\varphi_R(u_i, v_k), \varphi_S(v_k, w_j))] = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(r_{ik}, s_{kj})],$$

em que  $R$  é a matriz com os sintomas, basta calcularmos  $R^T \circ S$ .

Na equação acima, substitui-se o mínimo pelo produto e o máximo pela soma, obtendo assim a forma matricial de  $T$ :

$$T = R \circ S = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mp} \end{bmatrix}_{m \times p},$$

como multiplicação das matrizes associadas a  $R$  e  $S$ , a composição [*max-min*].

Assim:

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,7 & 0,6 & 0,3 & 1 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0,1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,9 & 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,9 & 0,8 \\ 0,1 & 0,3 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0 & 0,4 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0,75 & 0,75 \\ 0,75 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,75 \\ 0,5 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,75 & 0 \\ 0,75 & 0,75 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$

Veja agora o cálculo de  $t_{ij}$ ,  $i = 1,2,3,4,5$  e  $j = 1,2,3$  da matriz  $T$ :



•  $t_{11}$

$$t_{11} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,9;1\}, \min\{0,5;0,75\}, \min\{0;0\} \min\{0,1;0,5\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,1;0\}, \\ \min\{0,3;0,5\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0;0,25\}]$$

$$t_{11} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,9;0,5;0,0;0,1;0,2;0,0;0,3;0,0;0,4;0,0] = 0,9$$

•  $t_{12}$

$$t_{12} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,9;0,75\}, \min\{0,5;1\}, \min\{0;0\} \min\{0,1;0,5\}, \min\{0,2;0,25\}, \min\{0,1;0,25\}, \\ \min\{0,3;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{12} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,75;0,5;0,0;0,1;0,2;0,1;0,3;0,2;0,4;0,0] = 0,75$$

•  $t_{13}$

$$t_{13} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,9;0,75\}, \min\{0,5;0,5\}, \min\{0;0,5\} \min\{0,1;0,75\}, \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,1;0,75\}, \\ \min\{0,3;0,25\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0,4;0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{13} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,75;0,5;0,0;0,1;0,2;0,75;0,25;0,0;0,0;0,0] = 0,75$$

•  $t_{21}$

$$t_{21} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,7;1\}, \min\{1;0,75\}, \min\{0;0\} \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,3;0,5\}, \min\{0,3;0\}, \\ \min\{0,5;0,5\}, \min\{0,5;0\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0,25\}]$$

$$t_{21} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,7;0,75;0,0;0,2;0,3;0,0;0,5;0,0;0,2;0,0] = 0,75$$

•  $t_{22}$

$$t_{22} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,7;0,75\}, \min\{1;1\}, \min\{0;0\} \min\{0,2;0,5\}, \min\{0,3;0,25\}, \min\{0,3;0,25\}, \\ \min\{0,5;0,5\}, \min\{0,5;0,75\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{22} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,7;1,0;0,0;0,2;0,25;0,25;0,5;0,5;0,2;0,0] = 1,0$$

•  $t_{23}$

$$t_{23} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,7;0,75\}, \min\{1;0,5\}, \min\{0;0,5\} \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,3;0,5\}, \min\{0,3;0,75\}, \min\{0,5;0,25\}, \min\{0,5;0\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{23} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,7;0,5;0,0;0,2;0,3;0,3;0,25;0,0;0,0;0,0] = 0,7$$

•  $t_{31}$

$$t_{31} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,6;1\}, \min\{0,5;0,75\}, \min\{0,2;0\} \min\{0,9;0,5\}, \min\{0,1;0,5\}, \min\{0,8;0\}, \min\{0,3;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,4;0,25\}]$$

$$t_{31} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,6;0,5;0,0;0,5;0,1;0,0;0,3;0,0;0,0;0,25] = 0,6$$

•  $t_{32}$

$$t_{32} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,6;0,75\}, \min\{0,5;1\}, \min\{0,2;0\} \min\{0,9;0,5\}, \min\{0,1;0,25\}, \min\{0,8;0,25\}, \min\{0,3;0,5\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,4;0\}]$$

$$t_{32} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,6;0,5;0,0;0,5;0,1;0,25;0,3;0,0;0,0;0,0] = 0,6$$

•  $t_{33}$

$$t_{33} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,6;0,75\}, \min\{0,5;0,5\}, \min\{0,2;0,5\} \min\{0,9;0,75\}, \min\{0,1;0,5\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,3;0,25\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0\}, \min\{0,4;0\}]$$

$$t_{33} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,6;0,5;0,2;0,75;0,1;0,75;0,25;0,0;0,0;0,0] = 0,75$$

•  $t_{41}$

$$t_{41} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,3;1\}, \min\{0,1;0,75\}, \min\{0,4;0\} \min\{0,8;0,5\}, \min\{0,9;0,5\}, \min\{0,2;0\}, \min\{0,1;0,5\}, \min\{0,1;0\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0,1;0,25\}]$$

$$t_{41} = \max_{l \leq k \leq 10} [0,3;0,1;0,0;0,5;0,5;0,0;0,1;0,0;0,4;0,1] = 0,5$$

•  $t_{42}$

$$t_{42} = \max_{l \leq k \leq 10} [\min\{0,3;0,75\}, \min\{0,1;1\}, \min\{0,4;0\} \min\{0,8;0,5\}, \min\{0,9;0,25\}, \min\{0,2;0,25\}, \min\{0,1;0,5\}, \min\{0,1;0,75\}, \min\{0,4;0,75\}, \min\{0,1;0\}]$$

$$t_{42} = \max_{1 \leq k \leq 10} [0,3;0,1;0,0;0,5;0,25;0,2;0,1;0,1;0,4;0,1] = 0,5$$

•  $t_{43}$

$$t_{43} = \max_{1 \leq k \leq 10} [\min\{0,3;0,75\}, \min\{0,1;0,5\}, \min\{0,4;0,5\} \min\{0,8;0,75\}, \min\{0,9;0,5\}, \min\{0,2;0,75\}, \min\{0,1;0,25\}, \min\{0,1;0\}, \min\{0,4;0\}, \min\{0,1;0\}]$$

$$t_{43} = \max_{1 \leq k \leq 10} [0,3;0,1;0,4;0,75;0,5;0,2;0,1;0,0;0,0;0,0] = 0,75$$

•  $t_{51}$

$$t_{51} = \max_{1 \leq k \leq 10} [\min\{1;1\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0\} \min\{0,4;0,5\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0,25\}]$$

$$t_{51} = \max_{1 \leq k \leq 10} [1,0;0,75;0,0;0,4;0,5;0,0;0,0;0,0;0,75;0,0] = 1,0$$

•  $t_{52}$

$$t_{52} = \max_{1 \leq k \leq 10} [\min\{1;0,75\}, \min\{0,8;1\}, \min\{0;0\} \min\{0,4;0,5\}, \min\{0,8;0,25\}, \min\{0;0,25\}, \min\{0;0,5\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0,8;0,75\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{52} = \max_{1 \leq k \leq 10} [0,75;0,8;0,0;0,4;0,25;0,0;0,0;0,0;0,75;0,0] = 0,8$$

•  $t_{53}$

$$t_{53} = \max_{1 \leq k \leq 10} [\min\{1;0,75\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0;0,5\} \min\{0,4;0,75\}, \min\{0,8;0,5\}, \min\{0;0,75\}, \min\{0;0,25\}, \min\{0;0\}, \min\{0,8;0\}, \min\{0;0\}]$$

$$t_{53} = \max_{1 \leq k \leq 10} [0,75;0,5;0,0;0,4;0,5;0,0;0,0;0,0;0,0;0,0] = 0,75$$

Portanto, de acordo com os resultados acima é construído a matriz  $T$ , abaixo:

$$T = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 1.0 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0.75 \\ 0.5 & 0.5 & 0.75 \\ 1.0 & 0.8 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Assim  $R^T \circ S = T$  indica o diagnóstico de cada paciente, ou seja, a matriz resultante  $T$ , representada na Tabela 4.4, é formada pelos graus de cada uma das doenças apresentadas pelos pacientes, pois  $R$  é uma relação em  $U \times V$  (pacientes x sintomas),  $S$  é uma relação em  $V \times W$  (sintomas x doenças) e, conseqüentemente, a composição resulta em uma relação  $U \times W$  (pacientes x doenças).

**Tabela 4.4:** Matriz da Relação  $T$ : padrão de diagnósticos

P\d	$d_1$	$d_2$	$d_3$
$P_1$	0,9	0,75	0,75
$P_2$	0,75	1	0,7
$P_3$	0,6	0,6	0,75
$P_4$	0,5	0,5	0,75
$P_5$	1.0	0.8	0.75

Na Tabela 4.4, as linhas são os pacientes considerados e as colunas são as doenças, ou seja, os diagnósticos de cada paciente. Nota-se ainda, que o paciente  $P_1$ , pela teoria aplicada tem maior possibilidade de estar com dengue ( $d_1$ ), pois possui grau de pertinência 0,9, enquanto que chikungunya e zika apresentam 0,75 grau de pertinência. O paciente  $P_2$  pode estar com chikungunya ( $d_2$ ) com grau de pertinência 1. Já  $P_3$  e  $P_4$ , ambos com grau de pertinência 0,75 tem maior possibilidade de ser diagnosticado com zika. O paciente  $P_5$  tem grande chance de ser diagnosticado com dengue, pois possui grau 1 de pertinência.

Observa-se que os resultados do diagnóstico foram muito próximos um do outro, uma vez que as doenças pesquisadas possuem sintomas parecidos muito de uma forma geral. Fato este que, segundo a especialista, condizem com as situações presenciadas em sua rotina de trabalho.

Com os resultados do modelo fuzzy disponíveis na Tabela 4.4 e apresentados à enfermeira padrão, a mesma mostrou-se muito satisfeita com os resultados da pesquisa, pois conhecia os diagnósticos dos cinco pacientes, e o modelo aqui proposto apresentou um acerto de 100% em relação aos diagnósticos dos pacientes.

É notável ainda que a resposta da composição também é um conjunto fuzzy, pois fornece a distribuição de possibilidades do paciente no conjunto de doenças dado que ele apresenta uma certa distribuição de possibilidades no conjunto de sintomas. Outra propriedade importante da relação fuzzy é que à medida que se obtém diagnósticos de novos pacientes, estes podem ser incluídos na base de conhecimentos aumentando assim a capacidade de se obter mais diagnósticos por meio de relações fuzzy, tal como faz o médico [2] [13] [19].

Nesta pesquisa, os nomes da especialista da área da saúde e dos pacientes foram omitidos por motivos éticos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos objetivos desse trabalho foi propor uma estratégia de aplicação da Lógica Fuzzy em problemas de Biomedicina. Neste tipo de modelagem é comum encontrar incertezas nas variáveis, como por exemplo, para diagnosticar alguma doença observam-se os sinais ou sintomas apresentados pelo paciente. A “intensidade” destes sintomas ou sinais indicará o procedimento médico a ser adotado. O termo “intensidade” é subjetivo e, portanto, naturalmente tratado por meio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Neste caso, mais especificamente, é utilizado relações fuzzy para propor um modelo matemático para diagnosticar doenças transmitidas pelo mosquito *Aedes Aegypti*, ou seja, dengue, chikungunya e zika, sendo essencial a contribuição de pelo menos um especialista.

O *Aedes aegypti*, uma espécie de mosquito da família *Culicidae*, proveniente da África, atualmente distribuído por quase todo o mundo, se instala especialmente em regiões tropicais e subtropicais sendo o principal vetor das doenças mencionadas no título deste trabalho. Doenças essas, compartilham alguns sinais clínicos entre si, que podem levar a erros de diagnósticos. O paciente pode se confundir ao contrair uma das doenças devido aos sintomas que são parecidos. O procedimento inicial de tratamento para as três doenças é o mesmo, muitas vezes não sendo possível diagnosticar de imediato, e portanto, as medidas são tomadas para os cuidados de dengue, como destacam especialistas da área médica.

Pontos como esses foram cruciais na motivação para desenvolvimento deste trabalho recorrendo à Lógica Fuzzy. Lógica essa, que representa uma forma inovadora de "manuseio" de informações imprecisas, fornecendo um método de traduzir expressões verbais, imprecisas e qualitativas, comuns na comunicação humana, em valores numéricos, aos quais é chamada de grau ou função de pertinência. A função de pertinência de um subconjunto fuzzy indica com que grau um conceito específico é membro de um conjunto. São funções que mapeiam o valor que poderia ser um membro do subconjunto para outro valor entre 0 e 1, sendo que o grau 0 indica que o valor não pertence ao conjunto enquanto que o grau 1 indica que o valor pertence completamente ao conjunto.

No cotidiano das pessoas são presenciados muitos casos em que não se tem total certeza sobre as coisas ou fatos, pois "está no DNA" do ser humano tomar decisões considerando a verdade parcial como algo concreto, existente e, no entanto, a Lógica Fuzzy suporta os modos de raciocínio que são aproximados ao invés de exatos e constitui a base para

o desenvolvimento de métodos e algoritmos de modelagem e controle de processos, permitindo a redução da complexidade, solucionando assim, problemas intratáveis na lógica clássica.

Neste estudo, foram revisados os conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, onde o valor verdade de uma proposição pode ser um subconjunto fuzzy de qualquer conjunto, diferentemente dos sistemas lógicos binários onde o valor verdade assume apenas dois valores: falso (0) ou verdadeiro (1). Baseando-se nessa Teoria, esse estudo foi de extrema importância para compreender que a Lógica Fuzzy é construída a partir dos conceitos pré-estabelecidos na lógica clássica. As funções de pertinência dos subconjuntos fuzzy podem ser utilizadas para definir as operações básicas de intersecção, união e complemento fuzzy, sendo representadas pelo mínimo, máximo e complemento das relativas funções características. Já as proposições fuzzy podem ser combinadas utilizando-se de diferentes operadores, gerando assim novas proposições fuzzy, incluindo os conectivos lógicos "e" e "ou", bem como o operador de implicação "se, então". As proposições fuzzy resultantes dessas combinações podem ser descritas em termos de relações fuzzy, as quais o valor desta relação em função dos conjuntos fuzzy de cada operando pode ser realizados de diferentes maneiras. Por fim, na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, as normas triangulares são de extrema importância para fornecer os modelos genéricos para as operações de intersecção e união, obedecendo as propriedades de comutatividade, associatividade, monotonicidade e elemento neutro. Existem, portanto, muitas formas de estender os conectivos proposicionais clássicos para o conjunto  $U$ .

Valendo-se dos conceitos de Lógica Fuzzy, aplicadas de maneira correta ou da melhor maneira possível, são essenciais para que resolvamos os problemas de indecisão para diagnosticar os pacientes aos quais contraíram dengue ( $d_1$ ), chikungunya ( $d_2$ ) ou zika ( $d_3$ ), uma vez que permite incorporar ao modelo incertezas inerentes ao problema. Com a ajuda de um especialista foi elaborado uma tabela com cinco pacientes anônimos ( $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ ), e os graus de pertinência relativos a dez sintomas, os quais representados por  $s_1, s_2, \dots, s_{10}$ , que são respectivamente febre, mialgia/artralgia, edema das extremidades, exantema maculopapular, dor retroorbital, hiperemia conjuntival, linfadenopatia, hepatomegalia, leucopenia/trombocitopenia e hemorragia, característicos dessas doenças. Porém, para prosseguir com a pesquisa, fez-se necessário um embasamento teórico para esclarecimento dos graus de pertinência com que cada doença se relaciona com os respectivos sintomas (Tabela 4.2), os quais foram coletados do boletim epidemiológico [5]. Tendo em mãos esses dados, os mesmos foram convertidos em graus de pertinência.

Por meio de equações relacionais fuzzy, foi proposto um modelo matemático para o diagnóstico de cada paciente, ou seja, a possibilidade de cada doença apresentada pelos pacientes. Conforme depoimento de uma especialista (enfermeira padrão da cidade de Sorocaba/SP), os resultados condizem com diagnósticos estabelecidos em sua rotina de trabalho. Destaca ainda a coerência da proximidade dos valores dos graus de pertinência nos resultados de diagnósticos aqui propostos, devido à semelhança de alguns sintomas presentes nas três doenças estipuladas na pesquisa.

Portanto, a Lógica Fuzzy mostrou-se uma ferramenta matemática adequada e de grande importância para abordar problemas de Biomedicina, particularmente em Epidemiologia. Ela apresenta uma estrutura útil e de aplicabilidade real e efetiva. Por exemplo, para um paciente que apresente os sintomas febre, mialgia/artralgia, exantema maculopapular, dor retroorbital e linfadenopatia, com certeza acarretará dúvidas para o diagnóstico, pois são sintomas característicos das três doenças. E neste caso, analisando os graus com que cada sintoma se manifesta, pode-se por meio das relações fuzzy chegar ao melhor resultado possível, de forma satisfatória.

Ressalta-se ainda que este trabalho de pesquisa aumentou a motivação pelos estudos de Lógica Fuzzy. Para trabalhos futuros pretende-se aprofundar os estudos em Equações Relacionais Fuzzy, Sistemas Baseados em Regras Fuzzy e Modelagem em Biomatemática.



## REFERÊNCIAS

- [1] ALENCAR FILHO, Edgard de. *Iniciação à Lógica Matemática*, Reimpressão 2006 - Editora Nobel, São Paulo/SP, 1975.
- [2] BARROS, Laécio Carvalho de, BASSANEZI, Rodney Carlos. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática* - 2ª Edição - Campinas - SP: IMECC/UNICAMP, 2010.
- [3] BELLUCCI, Danilo Peixoto. *Sistemas Baseados em Regras Fuzzy*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do ABC, Santo André/SP, 2009.
- [4] BOTELHO, Tiago Gonçalves. *Uma nova proposta para a implementação computacional do princípio de extensão de Zadeh*. Dissertação de Mestrado, UFLA, Lavras/MG, 2012.
- [5] BRASIL, Ministério da Saúde. Secretária de Vigilância em Saúde . *Febre pelo Zika: uma revisão narrativa sobre a doença*. Boletim Epidemiológico vol. 46, nº 26, 2015.
- [6] CARTLEDGE, Paul. *Demócrito: Demócrito e a política atomista* (Coleção Grandes Filósofos), tradução de Angelika Elisabeth Köhnke - São Paulo - Editora UNESP, 2001.
- [7] DIAS, Marília do Amaral. *Introdução ao Estudo das Implicações Fuzzy Valoradas Intervalarmente*. Dissertação de Mestrado, Universidade Católica de Pelotas, Pelotas/RS, 2010.
- [8] FEITOSA, Hércules de Araújo, PAULOVICH, Leonardo. *Um Prelúdio à Lógica* - São Paulo: Editora UNESP, 2005.
- [9] FILHO, Jenner Barreto Bastos. *O Ensino de Mecânica Quântica e o Paradoxo da Compreensão*. Artigo Científico, Universidade Federal de Alagoas, Maceió/AL.

- [10] GARCIA NETO, Levindo José. *Efeito residual do Diflubenzuron sobre larvas de Aedes Aegypti em condições simuladas de campo, no laboratório*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza/CE, 2011.
- [11] GOMIDE, Fernando Antonio Campos, GUDWIN, Ricardo Ribeiro. *Modelagem, Controle, Sistemas e Lógica Fuzzy*. Artigo Científico, Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial - UNICAMP, Campinas/SP, 1994.
- [12] IOC, Instituto Oswaldo Cruz: Uma Instituição a Serviço da Vida. Dengue: *Vírus e Vetor*. Rio de Janeiro/RJ. Disponível em <<http://www.ioc.fiocruz.br/dengue/textos/longatraje.html>>. Acesso em: 09 mai. 2016.
- [13] JAFELICE, Rosana Sueli da Motta, BARROS, Laécio Carvalho de, BASSANEZI, Rodney Carlos. *Usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos*. Simpósio de Aplicação em Lógica Fuzzy - Mini Curso, Sorocaba/SP, 2008.
- [14] KLIR, George Jiri, YUAN, Bo. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*, Prentice-Hall, 1995.
- [15] LAKATOS, Eva Maria, MARCONI, Marina de Andrade. *Fundamentos de Metodologia Científica*. São Paulo: Atlas, 1991
- [16] MANCHINI, Daniella Patricia, PAPPA, Gisele Lobo. *Lógica Difusa: Lógica Fuzzy Aplicada à Medicina*. Disponível em <<http://www.din.uem.br/~ia/intelige/fuzzy/index.htm>>. Acesso em: 21 mai. 2016
- [17] MARCONDES, Danilo. *Textos Básicos de Filosofia: dos pré-socráticos a Wittgenstein - 7ª Edição* - Rio de Janeiro: Zahar, 2011.
- [18] MARCONDES, Danilo, 1953. *Iniciação à História da Filosofia: dos pré-socráticos a Wittgenstein - 13ª Edição* - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2010.

- [19] MASSAD, Eduardo, ORTEGA, Neli Regina Siqueira, BARROS, Laécio Carvalho de, STRUCHINER, Cláudio José. *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [20] MENGER, Karl. *Statistical metrics*. Proceedings of the National Academy of Sciences 28, 1942, nº. 12, 535 - 537.
- [21] MINIKOVSKY, Cléverson Israel. *Heráclito versus Parmênides: História da Filosofia*, Editora Biblioteca 24 Horas, Seven System Internacional Ltda, 1ª Edição, Brasil, 2009.
- [22] NEGOITA, Constantin Virgil, RALESCU, Dan. *Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1975 .
- [23] NICOLETTI, Maria do Carmo, CAMARGO, Heloisa de Arruda. *Fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy* - São Carlos: EdUFSCAR, 2009 (Série Apontamentos).
- [24] OLIVEIRA, Fabiano Ricardo de. *Rede Neural Difusa com T-Normas Diferenciáveis e Interativas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande/MS, 2006.
- [25] OLIVEIRA CHAVES, Moacir Rubens de, BERNARDO, Adrielle Silmara, BERNARDO, Carla Daniela, FILHO, Josimar Francisco, PAULA, Hellen da Silva Cintra de, PASSOS, Xisto Sena. *Dengue, Chikungunya e Zika: a nova realidade brasileira*, Artigo Científico, Universidade Paulista, Aparecida De Goiânia/GO.
- [26] ORTEGA, Neli Regina Siqueira. *Aplicação da teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Medicina*. Tese de Doutorado, USP, São Paulo/SP, 2001.
- [27] PEDROSA, Michele Cristina. *Aspectos Ecológicos da ocorrência de Aedes (Stegomyia) Aegypti (Linnaeus, 1762) e Aedes (Stegomyia) albopictus (Skuse, 1984) (DIPTERA: CULICIDAE) em áreas verdes urbanas e residenciais*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/MG, 2013.

- [28] PEDRYCZ, Witold, GOMIDE, Fernando. *An introduction to fuzzy sets: Analysis and design*, The MIT Press, Massachusetts, 1998.
- [29] PEIXOTO, Magda da Silva. *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: Um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo*. Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas/SP, 2005.
- [30] REZNIK, Leonid. *Fuzzy Controllers*. Newnes, Reino Unido, 1997.
- [31] RIBACIONKA, Francisco. *Sistemas Computacionais baseados em Lógica Fuzzy*. Dissertação de Mestrado. Universidade Makenzie, São Paulo/SP, 1999.
- [32] ROSSETTI, Victor. *Aedes aegypti – ASPECTOS EPIDEMIOLÓGICOS DO VÍRUS ZIKA*. Disponível em <<https://netnature.wordpress.com/2016/03/11/aedes-aegypti-aspectos-epidemiologicos-do-virus-zika/>>. Acesso em: 10 mai. 2016.
- [33] TAKAHASHI, Lucy Tiemi. *Modelos matemáticos de epidemiologia com vetores: simulação da propagação urbana e geográfica da dengue*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas/SP, 2004.
- [34] UOL NOTÍCIAS, Ciência e Saúde. *Chikungunya desafia ciência e já mata mais que dengue e zika no Nordeste*. Disponível em:  
< <http://noticias.uol.com.br/saude/ultimas-noticias/redacao/2016/07/12/chikungunya-desafia-ciencia-e-ja-mata-mais-que-dengue-e-zika-juntos-no-ne.htm>>. Acesso em : 27 junho 2016.
- [35] WASQUES, Vinícius Francisco. *Lógica Fuzzy Aplicada à Geologia*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro/SP, 2015.
- [36] WEBER, Léo, KLEIN, Pedro Antônio Trienweiler. *Aplicação da Lógica Fuzzy em Software e Hardware* - Canoas: Ed. ULBRA, 2003.

[37] YEN, John, LANGARI, Reza. *Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information*, Prentice Hall, EUA, 1999.

[38] ZADEH, Lotfi Askar. *Fuzzy sets, Information and Control* 8 (1965), 338 - 353.