UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JOÃO PAULO SILVA GUIMARÃES

UMA EXPERIÊNCIA SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO SOB A PERSPECTIVA DA UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS DA OBMEP

SÃO CARLOS – SP

2019

JOÃO PAULO SILVA GUIMARÃES

UMA EXPERIÊNCIA SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO SOB A PERSPECTIVA DA UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS DA OBMEP

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano.

SÃO CARLOS – SP

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato João Paulo Silva Guimarães, realizada em 11/02/2020:

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
UFSCar

Prof. Dr. Rodrigo Dantas de Lucas
IFSP

Prof. Dr. Renato Jose de Moura
UFSCar

Silva Guimarães, João Paulo

UMA EXPERIÊNCIA SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MEDIO SOB A PERSPECTIVA DA UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS DA OBMEP / João Paulo Silva Guimarães. -- 2020.
120 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Paulo Antonio Silvani Caetano
Banca examinadora: Paulo Antonio Silvani Caetano, Rodrigo Dantas de Lucas, Renato Jose de Moura
Bibliografia

1. Ensino Médio. 2. OBMEP. 3. Geogebra. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

Dedico este trabalho aos meus pais, minha esposa e meus filhos por todo apoio nas horas mais difíceis da minha vida e por sempre acreditarem na minha capacidade.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Agradeço aos meus pais por não medirem esforços para eu conseguir chegar até aqui.

Agradeço a minha esposa Catia e meus três filhos Leozinho, Gabriel e Bernardo por todo amor, carinho e paciência nesses quase 3 anos que por muitas vezes estive ausente.

Meu irmão Luiz Eduardo e toda a sua família pelo apoio de sempre.

Aos meus queridos amigos Bruno, Leonardo, Danilo e Fernando pelo companheirismo e incentivo de sempre.

Agradeço ao meu amigo Gabriel Fontes que além de parceiro de viagem nessa jornada, foi meu professor e incentivador.

Ao meu amigo Paulo Cereda por toda ajuda, instrução e tempo que dedicou para realização deste trabalho em um momento muito difícil.

Agradeço a minha amiga e ex-coordenadora Valentina Bariviera da escola Jorge Neto por todas as conversas e apoio durante a realização deste curso.

Agradeço a equipe gestora, professores e funcionários da escola José Jorge Neto por todo apoio ao longo desses anos. Com certeza é a minha segunda casa.

Agradeço meu orientador Professor Dr. Paulo A. S. Caetano por toda paciência, ideias e tempo dedicado à realização deste trabalho.

A todos os professores da UFSCar pela ajuda na melhoria do meu conhecimento.

Agradeço a todos meus alunos e ex-alunos, especialmente os da 3ª série em que o trabalho foi aplicado. Todo o trabalho realizado foi pensando em vocês.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a idealização, aplicação e discussão da utilização de 5 versões de problemas da OBMEP na forma de fichas de atividades com o uso de material manipulável e recursos tecnológicos em celulares.

Palavras Chaves: OBMEP, Ensino Médio, Fichas de Atividades, GeoGebra, Excel, Saresp.

Abstract

In this work we present the idealization, application and discussion of the use of 5 OBMEP problem versions in the form of activity sheets using manipulable material and technological resources in mobile phones.

Keyswords: OBMEP, High School, Activity Sheets, Geogebra, Excel, Saresp.

Lista de Ilustrações

Lista de Imagens

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Quando discutimos e analisamos resultados de uma escola, a disciplina de Matemática é a que causa maior preocupação e geralmente é o foco das discussões. Falta de pré-requisitos, má formação nos ciclos anteriores, a não leitura e interpretação de textos e até a falta de vontade do aluno em aprender, são alguns dos apontamentos apresentados nessas discussões de resultados não satisfatórios. Mas como não tratar com naturalidade o “fracasso matemático”?

Segundo D’AMBROSIO (1993), existem certas especificidades que tornam a Educação Matemática merecedora de um espaço próprio quando falamos dos inúmeros desafios da educação. Para BOERI e VIONE (2009), desmistificar a matemática como sendo o “bicho papão” das salas de aula é tarefa a qual todo professor desta disciplina deve se dedicar. Os autores ainda afirmam, que todo professor deve mostrar a Matemática como tendo uma função relevante no desenvolvimento do educando como um ser social.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) enfatizam que a Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser tratada como meta prioritária no trabalho do docente. Os PCN’s ainda nos mostram que:

> “A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos”
>
> (PCN, BRASIL, 1998)

Para GARBI (2010), a matemática está relacionada a dois tipos de sentimentos logo no início da vida escolar: paixão, da parte de uma minoria, e aversão, da parte da maioria. Garbi reitera que mesmo com tristeza, é preciso dizer que alguns professores não estão isentos da culpa no desencaminhamento de jovens que devidamente motivados, poderiam estar no grupo daqueles que são apaixonados pela “Rainha das Ciências”. O autor ainda cita que:

> “Quem, por acaso, não cruzou, com um professor de Matemática que lhe deixou desagradáveis lembranças? E qual o amante da Matemática que não se recorda, com carinho, de algum saudoso mestre que lhe abriu as portas por onde entrou a luz dos números e das formas?”
>
> (GARBI, Gilberto G., 2010)

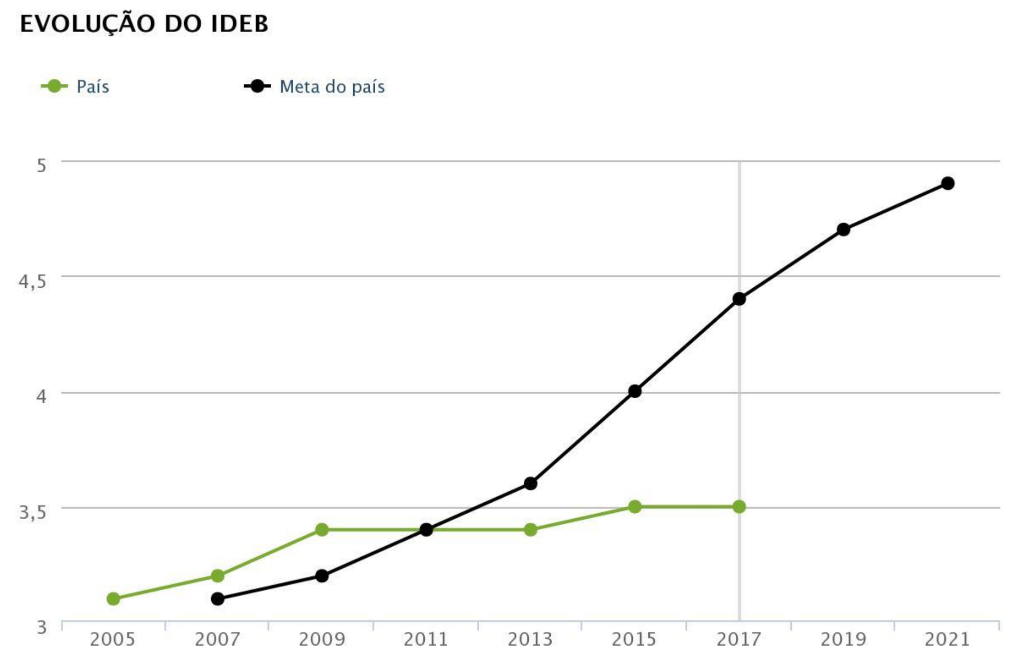
Pensando em métodos que mostrem aos alunos a importância do ensino de Matemática, neste trabalho idealizaremos sequências didáticas através de fichas de atividades com problemas da OBMEP, tendo como metodologia a engenharia didática, bem como mostraremos os resultados da aplicação dessas fichas em uma sala de 3º ano do Ensino Médio da escola E.E. Professor José Jorge Neto, pertencente a Diretoria de Ensino da região de Pirassununga. O trabalho é resultado de uma experiência no contato mais próximo desses alunos com problemas da OBMEP, utilizando quando possível recursos tecnológicos, mais precisamente o software *GeoGebra* para smartphones.

1.1 Justificativa

O nível de aprendizagem dos alunos nas escolas públicas brasileiras é medido através de avaliações externas, tanto em nível nacional quanto em nível estadual. Em nível nacional temos a Prova Brasil, que é utilizada para determinar o índice do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), e em nível estadual temos a prova do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo). As avaliações são compostas de questões de Português e Matemática. Para determinar a nota final de uma unidade, é considerada a nota da prova e dados da escola, como o fluxo escolar (taxa de aprovação), por exemplo.

Dados do SAEB de 2017, mostram que os resultados obtidos pelo Ensino Médio estão muito distantes das metas estabelecidas.

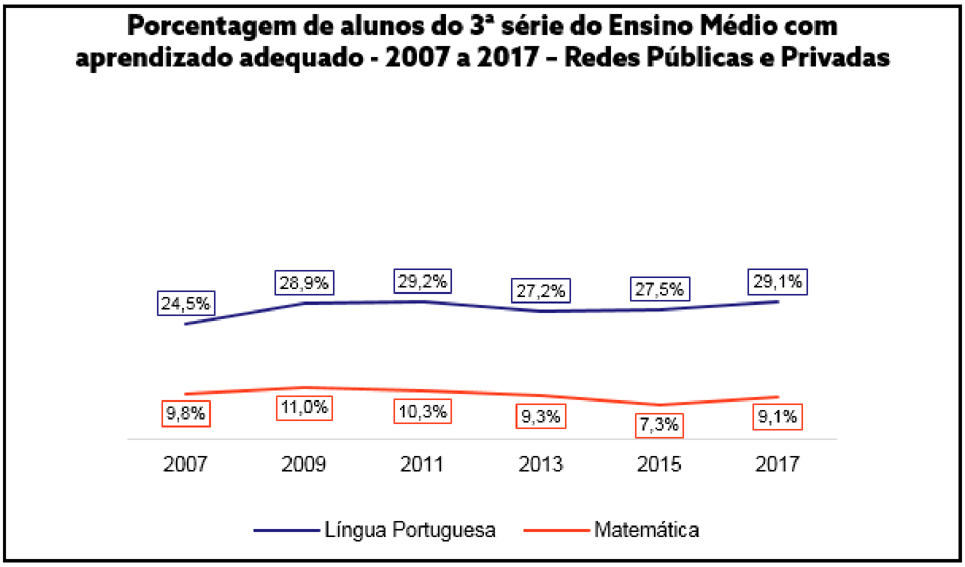
Figura 1: Evolução do IDEB nos últimos anos



Fonte: QEdu.org.br. Dados do Ideb/Inep (2017)

Ainda segundo dados do SAEB, verificamos que o nível de aprendizagem adequada em Matemática é praticamente o mesmo de dez anos atrás, o que nos mostra que além de ser uma porcentagem pequena, não tivemos grandes avanços neste período.

Figura 2: Porcentagem dos alunos de 3ª série do Ensino Médio com aprendizado adequado



ELABORAÇÃO: TODOS PELA EDUCAÇÃO | FONTE: SAEB / INEP

Antes de pensar qualquer estratégia de ensino diferenciada para o público alvo deste trabalho, foi necessário entender os resultados obtidos pela escola em que esse público estuda na disciplina de Matemática no ano de 2018.

Figura 3: Classificação dos resultados do Saresp 2018

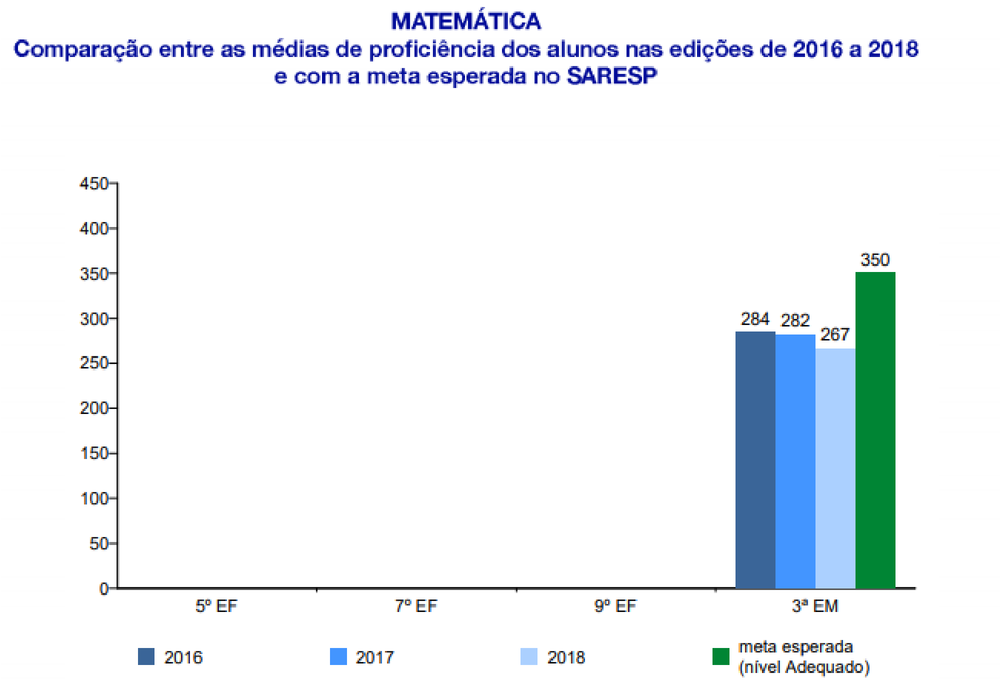
3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO							
CLASSIFICAÇÃO	NÍVEL		REDE ESTADUAL	INTERIOR	DIRETORIA DE ENSINO	ESCOLA
Insuficiente	Abaixo do Básico	< 275	46,6	40,7	42,3	**58,3**
Suficiente	Básico	275 a < 350	47,5	50,9	51,4	**33,3**
	Adequado	350 a < 400	5,6	7,9	5,9	**8,3**
	Básico + Adequado		*53,1*	58,8	*57,3*	***41,7***
Avançado	Avançado	≥ 400	0,3	0,5	0,4	**0,0**

Fonte: SARESP (2018)

Vale ressaltar que, segundo os dados do SARESP de 2018, qualquer que seja o local comparativo de níveis, temos uma grande parcela de alunos localizada no nível "abaixo do básico". A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo descreve os que se encontram nesse nível como alunos que demonstram domínio insuficiente dos conteúdos, das competências e das habilidades desejáveis para o ano/série escolar que se encontram.

Fazendo um comparativo dos últimos três anos da unidade escolar, verificamos que a quantidade de alunos do nível adequado também caiu, segundo o gráfico da figura 4 a seguir.

Figura 4: Comparação entre as médias de proficiência dos alunos no SARESP



Fonte: SARESP (2018)

Os dados não satisfatórios na disciplina de Matemática da escola E.E. Professor José Jorge Neto justificam a importância deste trabalho como uma oportunidade de aplicação e discussão de problemas diferenciados abrangendo diversos conteúdos do ensino básico de Matemática. Além disso, o fato de a escola ser a única na modalidade de Ensino Médio da cidade e do autor ter um bom relacionamento na escola como um todo, motivou ainda mais a realização deste trabalho. Vale destacar que o autor, além de docente na escola, também foi aluno da mesma durante todo o Ensino Fundamental e Médio.

A escola E.E. Professor José Jorge Neto está localizada em Analândia, uma pequena cidade do interior paulista, com menos de 5000 habitantes (IBGE, 2018). Apesar de uma mudança nos últimos anos, Analândia ainda é uma cidade onde boa parte da dos habitantes, cerca de 20% segundo dados do IBGE, residem na zona rural. Este fato se faz importante nos resultados escolares, visto que um dos apontamentos feito pelos professores e gestão da escola sobre os maus resultados nos últimos anos é a falta de perspectiva do aluno sobre a importância dos estudos em seu futuro. Por conta disso, ressaltamos a importância de ouvir o aluno sobre as suas principais dificuldades e concepções.

1.2 Objetivos

O principal objetivo desse trabalho é a aplicação de fichas de atividades com problemas adaptados da OBMEP, tendo o software GeoGebra como um recurso diferenciado para resolução desses problemas, buscando dar ao aluno autonomia e torna-lo sujeito de sua aprendizagem. Além do principal objetivo podemos destacar outros, como:

i) Contribuir com a escola sobre o ensino de Matemática, pois além da experiência com uma sala em específico, os resultados podem ser utilizados por gestores e outros docentes na discussão de futuros resultados;

ii) Melhorar a experiência docente do autor, visto que um dos propósitos para a realização do programa sempre foi uma prática de ensino no ambiente de trabalho;

iii) Fornecer material diversificado para o aluno, de tal maneira que veja o ensino de matemática de uma forma diferenciada das experiências que teve nos últimos anos, melhorando a formação do mesmo;

iv) Colaborar com o ensino de Matemática, já que os métodos utilizados podem ser replicados em outras escolas com suas adaptações necessárias, seguindo a particularidade de cada ambiente.

1.3 Metodologia da Engenharia Didática

Este trabalho se fundamenta na metodologia da engenharia didática, pois utilizamos uma metodologia qualitativa, onde o autor é o observador participante.

A noção de Engenharia Didática surgiu no início dos anos 80 e segundo ARTIGUE (1988) é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência.

Para Almouloud e Coutinho (2008), a engenharia didática, vista como uma metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Ainda segundo os autores, a engenharia didática caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre a análise a priori e análise posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós teste.

Segundo ARTIGUE (1988), a Engenharia Didática é composta de 4 etapas:

- Análises prévias: na qual se realizam as análises preliminares como concepções do aluno por exemplo;
- Construção e análise a priori: descrição das escolhas das variáveis e características das atividades desenvolvidas, análise da importância para o aluno e previsão de comportamentos possíveis.
- Experimentação: momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais identificam a necessidade.
- Fase de análise a posteriori e validação: é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para a melhoria dos conhecimentos didáticos.

1.4 Organização do trabalho

Para o próximo capítulo, foi realizada uma breve exposição teórica sobre o Ensino de Matemática e apresentamos partes do currículo de Matemática do Estado de São Paulo, já que as atividades foram realizadas em uma escola estadual. Também foi feito um relato de todas as avaliações (internas e externas) aplicadas durante o ano letivo.

No capítulo 3 contém toda a descrição das atividades, desde ao cronograma até os critérios de avaliação destas fichas.

Para o capítulo 4, mostramos toda a análise dos resultados com discussões e comentários sobre as fichas de atividades e questionário aplicado aos alunos.

As considerações finais estão no capítulo 5 deste trabalho.

2. CONTEXTUALIZAÇÃO

2.1 Ensino de Matemática

Segundo FIORENTINI (1995), o estudo das relações/interações que envolvem a tríade aluno/professor-saber matemático é um dos principais projetos da investigação em Educação Matemática e embora o papel da investigação seja elucidar aspectos da dinâmica dessa tríade, tal elucidação tem como eixo fundamental a transformação qualitativa, ainda que nem sempre imediata ou direta, do ensino/aprendizagem da Matemática. O autor ainda destaca os diferentes modos de conceber e ver a questão da qualidade do ensino da Matemática, como o nível de rigor e formalização dos conteúdos matemáticos trabalhados na escola, técnicas de ensino e controle do processo ensino/aprendizagem com o propósito de reduzir as reprovações, o uso de uma matemática ligada ao cotidiano ou à realidade do aluno e até a Educação Matemática a serviço da formação de cidadania. O conceito de qualidade de ensino é relativo e modifica-se historicamente sofrendo determinações socioculturais e políticas.

Apesar de ser um artigo de mais de duas décadas, podemos fazer uma comparação com as discussões atuais que acontecem nas escolas. O ensino como um todo é considerado algo desafiante, mas quando falamos especificamente do ensino de matemática temos a impressão de ser um desafio ainda maior. Para CANAVARRO (2011), uma boa prática é o ensino exploratório da matemática, que como o próprio autor descreve, não é uma prática onde os alunos descobrem sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que os alunos inventem conceitos e procedimentos. A autora classifica o ensino exploratório de matemática, como uma prática que defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. É com essa prática que os alunos têm a possibilidade de ver conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Como a proposta do trabalho é a exploração de atividades diferenciadas para conhecimento e aprofundamento de conteúdos e habilidades vistos pelos alunos, podemos seguir a linha do ensino exploratório de matemática proposto pela autora juntamente com a metodologia de engenharia didática descrita no capítulo anterior.

2.2 Currículo do Estado de São Paulo

Visto que a escola onde foi aplicado o trabalho é uma escola estadual, faz -se importante o estudo do documento que norteia o ensino de Matemática na unidade em questão. Vale destacar que pela transição de governo do estado de São Paulo e a discussão sobre a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o currículo estudado neste capítulo está passando por um processo de reformulação, mas ainda foi o documento que norteou o trabalho dos professores da rede estadual de ensino neste ano.

O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2011) é constituído de um documento que apresenta os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

O documento destaca os princípios para um "currículo comprometido com o seu tempo" que se baseiam em:

- Uma escola que também aprende: interação entre as escolas da rede de ensino, visando a troca de experiências com o objetivo de aprender a ensinar, levando em consideração que ninguém é detentor absoluto do conhecimento e de que o conhecimento coletivo é maior que a soma dos conhecimentos individuais.
- O currículo como espaço de cultura: diferencia as atividades extraclasses das atividades extracurriculares, dando foco de que o conhecimento não é algo inalcançável, pois a informação está disponível a qualquer instante, em tempo real. O currículo ainda destaca que deve haver o rompimento da dissociação entre cultura e conhecimento, para melhor conexão entre currículo e a vida.

- As competências como referência: objetivo de promover os conhecimentos próprios de cada disciplina articuladamente às competências e habilidades do aluno. As habilidades podem ser consideradas em uma perspectiva em geral, isto é, no que têm de comum com as disciplinas e tarefas escolares ou no que tem de específico. Já as competências, caracterizam modo de ser, de raciocinar e de interagir, que podem ser depreendidos das ações e das tomadas de decisão em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades.
- Prioridade para a competência da leitura e da escrita: destaque para a linguagem verbal, oral e escrita, representada pela língua materna, que viabiliza a compreensão e o encontro dos discursos utilizados em diferentes esferas da vida social. O currículo enfatiza que o domínio do código não é suficiente para garantir a comunicação, ou seja, o desenvolvimento da competência linguística do aluno, não está pautado na exclusividade do domínio técnico de uso da língua legitimada pela norma-padrão, mas, principalmente no domínio da competência performativa.
- Articulação das competências para aprender: diferencia maior quantidade de ensino (ou de conteúdos) da qualidade de aprendizagem. O currículo afirma que os conteúdos do ensino são importantes e decisivos para a continuação da aprendizagem mesmo fora da escola, ou depois dela, mas destaca que a forma como se aprende esses conteúdos é o grande desafio das novas gerações.
- Articulação para o mundo do trabalho: se resume nas recomendações dos PCN do Ensino Médio, também pertinentes para a educação básica como um todo:
    - Compreensão dos significados das ciências, das letras e das artes;
    - A relação entre teoria e prática em cada disciplina do Currículo;
    - As relações entre educação e tecnologia;
    - A prioridade para o contexto do trabalho;
    - O contexto do trabalho no Ensino Médio;

Como objetivo principal, o currículo aponta o mapeamento do vasto território do conhecimento, recobrindo-o por meio de disciplinas e articulando-as de tal modo que o mapa assim elaborado constitua um permanente convite a viagens, não representando apenas uma delimitação rígida de fronteiras entre os diversos territórios disciplinares.

Assim como outros currículos, o do estado de São Paulo coloca a Matemática e a língua materna (entendida como a primeira língua que se aprende) como disciplinas básicas na constituição do documento, como justificativa de que sem o desenvolvimento adequado de tal eixo linguístico/lógico-matemático a formação pessoal não se completa. A relação entre a Matemática e língua materna deve ser um recurso imprescindível para uma expressão rica, uma compreensão abrangente, uma argumentação correta, um enfrentamento assertivo de situações problema, uma contextualização significativa dos temas estudados, segundo o currículo.

De ideias gerais apresentadas na formulação do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), o currículo afirma que é possível vislumbrar um elenco de competências básicas a serem desenvolvidas pelos alunos ao longo da escola básica, incluindo três pares complementares de competências, que constituem três eixos norteadores da ação educacional:

- **o eixo expressão/compreensão**: a capacidade de expressão do eu, por meio de diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto, de uma tabela, de um gráfico, até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais, etc.
- **o eixo argumentação/decisão**: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações, tendo em vista a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações afetivas;
- **o eixo contextualização/abstração**: a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola, de enraizamento na realidade imediata, nos universos de significações – sobretudo no mundo do trabalho -, e a capacidade de abstração de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de virtualidades, de potencialidades para se conceber o que ainda não existe.

O currículo organiza os conteúdos disciplinares de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações.

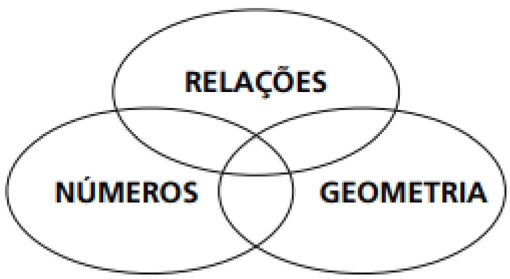
O bloco Números do documento é descrito como as noções de contagem, medida e representação simbólica, tanto de grandezas efetivamente existentes quanto imaginárias, incluindo a representação algébrica sobre elas. Duas ideias são destacadas como fundamentais na constituição desse bloco: equivalência e ordem.

A Geometria diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais. Ainda é destacado a importância da construção e representação dessas formas geométricas e a elaboração de concepções que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca.

As Relações, consideradas como um bloco temático, incluem a noção de medida, com a fecundidade e a riqueza da ideia de aproximação; as relações métricas em geral; e as relações de interdependência, como as de proporcionalidade ou as associadas à ideia de função.

Para o currículo, os três blocos interpenetram-se permanentemente, sendo praticamente impossível abordar um deles sem a participação quase automática dos dois outros.

Figura 5: Diagrama dos blocos do currículo de matemática



Fonte: Currículo do Estado de São Paulo

O currículo ainda traz os conteúdos que devem ser contemplados divididos por bimestre. Apesar de sabermos que o ensino de Matemática se dá pela continuidade, vamos apresentar apenas os conteúdos do Ensino Médio, visto que a unidade escolar onde foi realizado o trabalho só atende a esses alunos. Os alunos do Ensino Fundamental são atendidos pela rede Municipal de Ensino, que não segue o currículo do Estado de São Paulo.

Figura 6: Conteúdos 1ª série do Ensino Médio

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Números e sequências • Conjuntos numéricos • Regularidades numéricas: sequências • Progressões aritméticas e progressões geométricas	• Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível • Conhecer as características principais das progressões aritméticas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Compreender o significado da soma dos termos de uma PG infinita (razão de valor absoluto menor do que 1) e saber calcular tal soma em alguns contextos, físicos ou geométricos
2º Bimestre	**Relações** Funções • Relação entre duas grandezas • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado • Função de 1º grau • Função de 2º grau	• Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções • Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação • Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo) • Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

Figura 7: Conteúdos 1ª série do Ensino Médio

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Relações** Funções exponencial e logarítmica • Crescimento exponencial • Função exponencial: equações e inequações • Logaritmos: definição e propriedades • Função logarítmica: equações e inequações	• Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento • Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos • Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial • Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos
4º Bimestre	**Geometria/Relações** Geometria-Trigonometria • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies • Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos	• Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos • Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos • Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais • Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies • Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

Figura 8: Conteúdos 2ª série do Ensino Médio

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Relações** Trigonometria • Fenômenos periódicos • Funções trigonométricas • Equações e inequações • Adição de arcos	• Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas • Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos • Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como f(x) = asen(bx) + c a partir do gráfico de y = senx, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c • Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos
2º Bimestre	**Números/Relações** Matrizes, determinantes e sistemas lineares • Matrizes: significado como tabelas, características e operações • A noção de determinante de uma matriz quadrada • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento	• Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano • Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, *pixels* etc.) • Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes • Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

Figura 9: Conteúdos 2ª série do Ensino Médio

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Números** Análise combinatória e probabilidade • Princípios multiplicativo e aditivo • Probabilidade simples • Arranjos, combinações e permutações • Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos • Probabilidade condicional • Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o binômio de Newton	• Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento • Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas • Saber resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidades de eventos simples repetidos, como os que conduzem ao binômio de Newton • Conhecer e saber utilizar as propriedades simples do binômio de Newton e do triângulo de Pascal
4º Bimestre	**Geometria** Geometria métrica espacial • Elementos de geometria de posição • Poliedros, prismas e pirâmides • Cilindros, cones e esferas	• Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas) • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos • Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

Figura 10: Conteúdos 3ª série do Ensino Médio

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Geometria/Relações** Geometria analítica • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares • Ponto e reta: distância • Circunferência: equação • Reta e circunferência: posições relativas • Cônicas: noções, equações, aplicações	• Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações • Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas • Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares • Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares • Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas
2º Bimestre	**Números** Equações algébricas e números complexos • Equações polinomiais • Números complexos: operações e representação geométrica • Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial • Relações de Girard	• Compreender a história das equações, com o deslocamento das atenções das fórmulas para as análises qualitativas • Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica • Saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz • Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss • Compreender o significado geométrico das operações com números complexos, associando-as a transformações no plano

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

Figura 11: Conteúdos 3ª série do Ensino Médio

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Relações** Estudo das funções • Qualidades das funções • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais • Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação • Composição: translações e reflexões • Inversão	• Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e de 2º graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características • Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões) • Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de f(x) por unidade a mais de x), utilizando-a para caracterizar o crescimento, o decrescimento e a concavidade de gráficos • Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decrescimento exponencial, incluindo-se os que se expressam por meio de funções de base e
4º Bimestre	**Números/Relações** Estatística • Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos • Medidas de tendência central: média, mediana e moda • Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão • Elementos de amostragem	• Saber construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas • Saber calcular e interpretar medidas de tendência central de uma distribuição de dados: média, mediana e moda • Saber calcular e interpretar medidas de dispersão de uma distribuição de dados: desvio padrão • Saber analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos • Reconhecer as características de conjuntos de dados distribuídos normalmente; utilizar a curva normal em estimativas pontuais e intervalares

Fonte: Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

2.3 Mecanismos de Avaliação

Visando entender os resultados da escola nos últimos anos, nesta seção iremos analisar as principais avaliações externas de Matemática aplicadas na escola, principalmente na 3ª série do Ensino Médio.

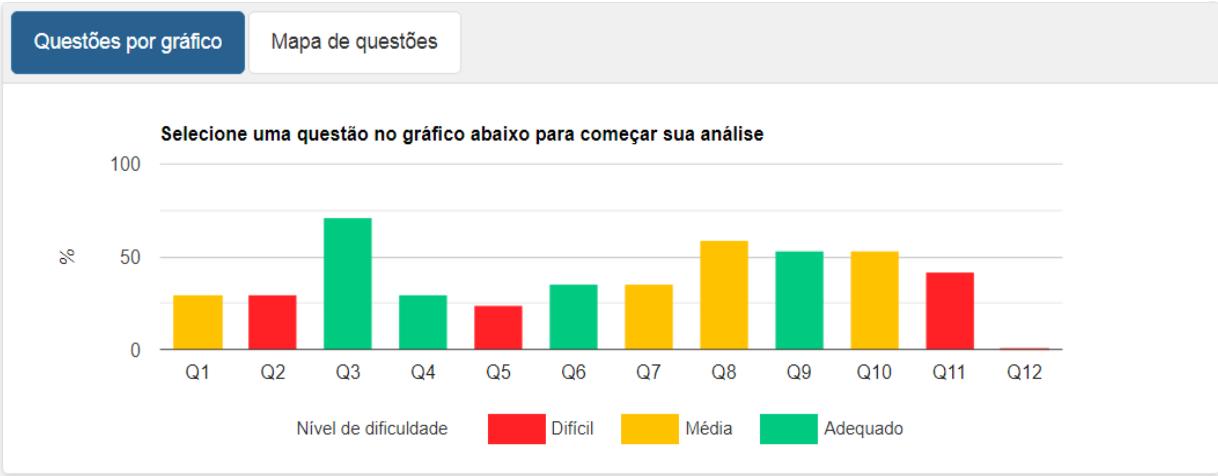
2.3.1 Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP)

Segundo a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, a AAP tem o objetivo de diagnosticar o nível de aprendizado dos estudantes matriculados na rede estadual de ensino. A avaliação é composta de um caderno de perguntas com questões dissertativas e de múltipla escolha nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática. A avaliação começou a ser aplicada no ano de 2014 e era aplicada duas vezes ao ano, uma vez em fevereiro e outra em agosto. Nos últimos anos, a avaliação começou a ser aplicada ao final de cada bimestre e conta apenas com questões de múltipla escolha.

Os índices extraídos são utilizados pela Secretaria de Educação para produzir orientações aos educadores, desenvolver programas e projetos que atuem nas dificuldades dos alunos. Nas escolas, os educadores recebem o manual "Comentários e Recomendações Pedagógicas", desenvolvido por especialista na área, que contém sugestões de trabalho para cada etapa da escolaridade.

Depois de realizada as avaliações, as respostas são cadastradas em uma plataforma chamada "Secretaria Digital". A plataforma fornece dados individuais e coletivos (por série) que são usados pela equipe gestora e professores para um planejamento das atividades que serão realizadas para consolidação das habilidades não atingidas, apontadas pela AAP. A Figura 12 mostra os resultados do 1º bimestre na série em que o trabalho foi realizado:

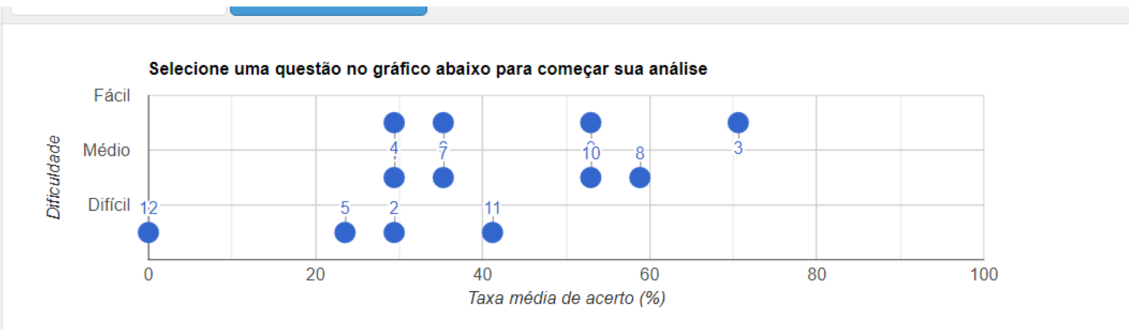
Figura 12: Resultado da AAP



Fonte: Secretaria Digital

No exemplo, temos os resultados das questões aplicadas no 1º bimestre e seus respectivos níveis de dificuldades. Os resultados se baseiam na porcentagem de acertos de cada questão em relação ao total de alunos que realizou a prova. Cada questão é classificada em níveis de dificuldades definidos pela própria Secretaria de Educação. Os resultados também são apresentados por um "Mapa de Questões":

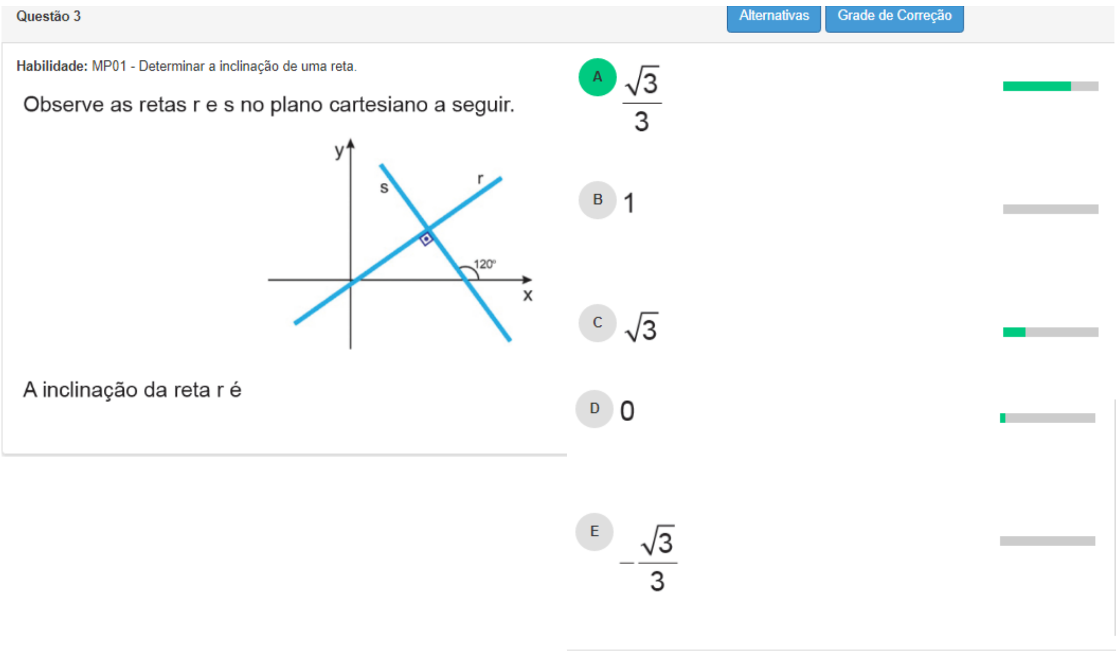
Figura 13: Resultado da AAP



Fonte: Secretaria Digital

Por último, o sistema permite que o professor verifique a questão, a habilidade abordada e a alternativa que a maioria dos alunos escolheu segundo os dados da figura 14 a seguir:

Figura 14: Questão da AAP



Fonte: Secretaria Digital

Apesar de a AAP ser uma prova externa, a recomendação da Secretaria de Educação é de que os resultados sejam usados de forma interna e motivem novas estratégias de ensino.

Um dos apontamentos feitos pelos professores da escola é que as avaliações internas feitas e aplicadas pelos próprios professores tinham resultados diferentes das avaliações externas. Os motivos apontados no planejamento escolar realizado no início do ano letivo de 2019 para justificar essa diferença foram a falta de seriedade na realização da prova, falta de devolutiva dos resultados para os alunos e alinhamento das habilidades não consolidadas para novas estratégias. Neste mesmo planejamento foi de comum acordo que as avaliações internas tivessem um padrão de criação, dificuldade e aplicação, para um melhor alinhamento entre todas as avaliações existentes. Os resultados nas avaliações externas tiveram uma significativa melhora no decorrer dos 3 primeiros bimestres, em Matemática, como mostram os resultados da Secretaria Digital:

Tabela 1: Resultados da AAP – 1º bimestre

Descrição Turma	Participantes	Acertos	Percentual Acertos
3ª Série A Noite	10	28	23,33%
3ª Série B Manhã	17	78	38,24%
Total Geral	27	106	32,72%

Fonte: Secretaria Digital

Tabela 2: Resultados da AAP – 2º bimestre

Descrição Turma	Participantes	Acertos	Percentual Acertos
3ª Série A Noite	7	19	22,62%
3ª Série B Manhã	22	156	59,09%
Total Geral	29	175	50,29%

Fonte: Secretaria Digital

Tabela 3: Resultados da AAP – 3º bimestre

Descrição Turma	Participantes	Acertos	Percentual Acertos
3ª Série A Noite	7	39	46,42%
3ª Série B Manhã	18	117	54,17%
Total Geral	25	156	52,00%

Fonte: Secretaria Digital

2.3.2 Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp)

O Saresp tem a finalidade de produzir um diagnóstico da situação de escolaridade básica paulista, visando orientar os gestores do ensino de monitoramento das políticas voltadas para a melhoria da qualidade educacional.

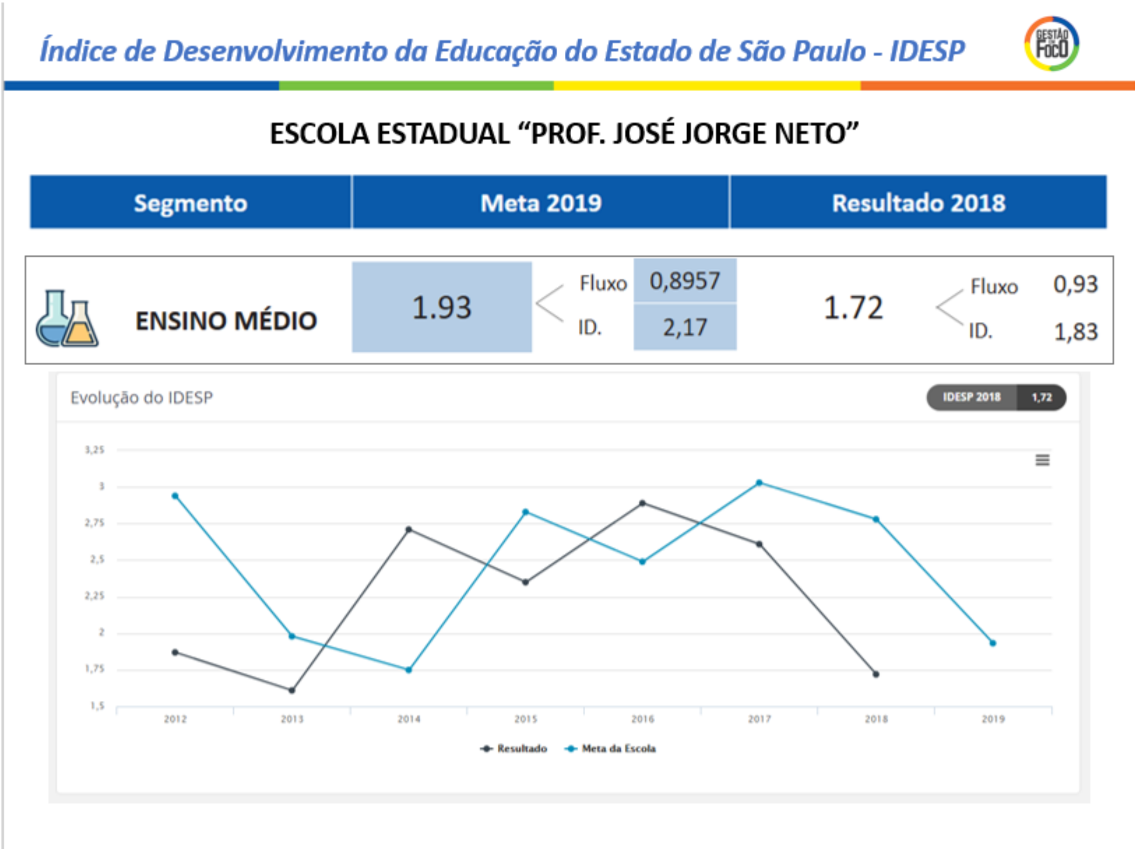
No Ensino Médio, a avaliação é exclusiva para a 3ª série e os alunos têm seus conhecimentos avaliados por meio de provas com questões de Língua Portuguesa e Matemática. Os resultados são utilizados para orientar as ações da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e também integram o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo (Idesp).

A escola E.E. Professor José Jorge Neto obteve índices abaixo do básico, como mostramos anteriormente, e uma das motivações deste trabalho foi a aplicação de métodos diferenciados com a realidade da escola, no estudo de Matemática.

Os objetivos de cada escola são traçados levando em consideração o desempenho dos alunos no Saresp e o fluxo escolar de cada ciclo. Por esse motivo, cada unidade escolar terá uma meta diferente para cada ciclo que oferecer.

A Secretaria de Educação adota a política de bonificação por resultados e ao alcançar pelo menos parte da meta definida pelo Idesp, a escola também conquista o pagamento do bônus, que é proporcional ao resultado da unidade, ponderando a frequência do servidor e o índice socioeconômico da escola. Os objetivos para o ano seguinte são sempre revistos, ano a ano. Dessa forma, as escolas têm metas a serem alcançadas condizentes com seus últimos resultados. A seguir, temos os índices alcançados e as metas planejadas nos últimos anos da escola:

Figura 15: IDESP de 2012 até 2018



Fonte: Coordenação E.E. Professor José Jorge Neto

Fazendo uma análise do gráfico em relação ao ano de 2018, vemos que a escola teve uma grande queda no Idesp e que por conta disso, a meta projetada para o ano de 2019 é uma das baixas dos últimos anos. Por conta do índice baixo do ano passado, a escola é classificada como "Escola Prioritária" pela rede. Quando a unidade escolar é classificada desta forma é realizado um trabalho mais intensivo em um grupo formado pela Diretoria de Ensino (supervisores e professores coordenadores de núcleo), equipe gestora da escola (diretor e coordenador pedagógico) e professores.

O trabalho intensivo é composto de 3 principais pilares: planejamento do começo do ano, análise dos resultados das avaliações externas ao longo do ano e preparação para a avaliação final (Saresp) que está descrita neste capítulo. O Saresp é frequentemente aplicado no final de novembro de cada ano e os resultados do Idesp são apresentados por boletins no ano subsequente.

2.3.3 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

A OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a OBMEP tem como objetivos principais:

- Estimular e promover o estudo de Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;

- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Como descrito no capítulo anterior, uma das etapas fundamentais para o trabalho intensivo de uma “escola prioritária” é o planejamento das atividades no decorrer do ano letivo. Como as notas em matemática foram um dos apontamentos para o planejamento, foi de comum acordo dos professores da escola que deveríamos dar um foco maior em relação a aplicação e incentivo da OBMEP.

A escola tem participado da OBMEP há vários anos, porém nunca realizamos um estudo e uma preparação específica para a realização da prova.

Em todos os anos que a OBMEP foi realizada, a escola mantém um diálogo com os alunos classificados para a 2ª fase e seus responsáveis, mas mesmo assim tivemos uma participação cada vez menor. No ano de 2018, só foram classificados 6 alunos para a 2ª fase, todos do nível 3, e nenhum deles foi fazer a prova da 2ª fase.

Para o ano de 2019 a escola criou a estratégia de realizar uma confraternização com os alunos que foram classificados e realizassem a prova da 2ª fase. No decorrer do ano letivo, o coordenador pedagógico e os professores de matemática da escola realizaram momentos de conversa com os alunos sobre a importância da realização da prova, ressaltando sua importância para a melhora dos índices na disciplina de matemática. Como a OBMEP é uma prova diferenciada que estimula a lógica e a criatividade do aluno, certamente ela é de grande ajuda para a melhoria dos índices da escola.

Para o ano de 2019 tivemos 128 alunos inscritos para a 1ª fase, dos quais 12 foram classificados para a 2ª fase. Desses 12 alunos, 6 realizaram a prova da 2ª fase e participaram da confraternização dos alunos classificados.

A realização e aplicação deste trabalho está inserida nesse incentivo pois a parte prática é composta de questões da OBMEP (adaptadas) com a utilização de recursos tecnológicos.

2.4 Ferramentas didático-pedagógicas

É notável que nos últimos anos recebemos cada vez mais alunos com acesso a recursos tecnológicos, como celulares e computadores. Ao mesmo tempo sempre nos perguntamos se as escolas se atualizaram para atender as necessidades dos alunos dessa nova geração.

De acordo com ABAR (2011), cada sociedade é configurada de acordo com suas possibilidades de acesso às informações, ao conhecimento e de como eles serão distribuídos e aplicados. O autor ainda afirma que o avanço tecnológico em si não determina o acesso às informações, mas é a necessidade social de sua democratização que determina novas categorias de tempo e espaço, transformando-as em realidades virtuais. É importante observar que apenas a existência das tecnologias que permitem o rápido acesso às informações e à comunicação não garante a construção do conhecimento e de uma sociedade preparada para seu uso e é nesse aspecto que se sobressai o papel das tecnologias na educação: que seu uso seja direcionado à construção do conhecimento e à formação de pessoas competentes para inserção em uma sociedade cada vez mais tecnológica.

Apesar deste trabalho estar direcionado à resolução de problemas da OBMEP com o uso de recursos tecnológicos, realizamos também as atividades com materiais manipuláveis para que o aluno entenda que, mesmo sendo importante a inserção de novas tecnologias em sala de aula em um ambiente em que ele se sente à vontade, outras ferramentas são de extrema importância no ensino de matemática.

Para ABAR, um dos grandes desafios em relação à formação de docentes no ambiente informatizado é a integração dos recursos tecnológicos com a prática de ensino em sala de aula, e para exercer essa prática o professor precisa aprender o conteúdo que trabalhará e desenvolver métodos e técnicas para transposição do ensino.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

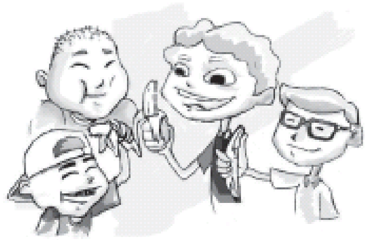
Neste capítulo apresentaremos alguns recortes das fichas que foram aplicadas aos alunos da 3ª série do ensino médio, um resumo sobre as expectativas em relação a elas e a descrição do desenvolvimento das atividades ao longo do cronograma pré-estabelecido.

3.1 Estratégias das Fichas

- Ficha de Atividade nº 1 – O Problema das Formigas

A ficha de atividade traz o enunciado adaptado de um problema de 1ª fase de nível 1 e 2 da OBMEP aplicada em 2010.

Tabela 4: Problema das Bananas

Saci, Jeca, Tatu e Pacu comeram 52 bananas. Ninguém ficou sem comer e Saci comeu mais que cada um dos outros. Jeca e Tatu comeram ao todo 33 bananas, sendo que Jeca comeu mais que Tatu. Quantas bananas comeu cada um dos meninos?	

Fonte: www.obmep.org.br

Para esta atividade separamos a sala em grupos de 4 alunos para uma simulação do problema.

Inicialmente, em um item a), foi pedido para os alunos assumirem o papel de cada um dos personagens do problema. Depois, utilizando feijões para realizarem as possíveis distribuições das bananas, foi pedido para eles responderem as seguintes perguntas:

Tabela 5: Perguntas da Ficha de atividade

b) Com base nas informações do problema, responda:

- Pelo menos quantas bananas cada um dos meninos comeu? ____
- Quem comeu mais bananas? ________
- Quantas bananas Jeca e Tatu comeram juntos? ____
- Entre Jeca e Tatu, quem comeu mais? __________
- Quantas bananas Saci e Pacu comeram juntos? ____
- Quantas bananas Saci comeu no máximo? __________

Fonte: Próprio autor

O objetivo dessas perguntas foi suscitar discussões e encaminhar os alunos para a resposta do problema. Depois de realizada as discussões, foi pedido que preenchessem duas tabelas para o encaminhamento final da resposta do problema:

Tabela 6: Tabela dos problemas das bananas

c) Utilizando os feijões, simulem a repartição de bananas entre Jeca e Tatu. Depois preencham a tabela abaixo com os valores que encontraram. Exemplo: Jeca comeu 32 e Tatu comeu 1, pois 32 + 1 = 33.

Jeca	Tatu

Jeca	Tatu

Fonte: Próprio autor

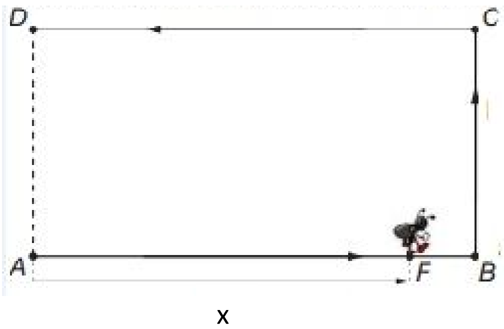
Depois de preenchida a tabela, os alunos tinham como tarefa encontrar a resposta final do problema.

Vale ressaltar que para essa primeira ficha de atividade não foram utilizados recursos tecnológicos na resolução do problema. A proposta foi que os alunos tivessem um primeiro contato com a resolução de um problema da OBMEP e conseguissem resolver com autonomia.

- Ficha de Atividade nº 2 – O caminho da formiga

A segunda ficha de atividade traz um problema adaptado da 2ª fase de nível 2 da OBMEP aplicada em 2014:

Tabela 7: Problema do caminho da formiga

Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar x centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.	

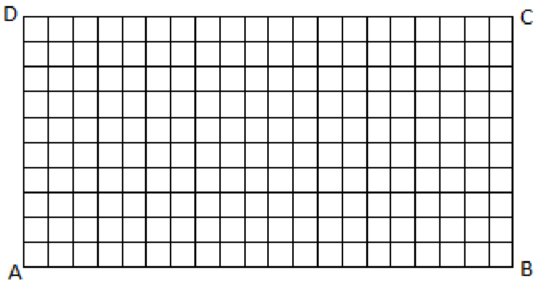
Fonte: www.obmep.org.br

Para o entendimento do enunciado, a ficha de atividade trazia malhas quadriculadas para o aluno simular o caminho da formiga com as medidas 5 cm, 10 cm, 20 cm, 24 cm, 25 cm, 26 cm, 30 cm, 40 cm e 45 cm, como mostra o exemplo para x = 5cm abaixo:

Tabela 8: Exemplo do desenho do caminho da formiga

Inicialmente, você deve desenhar e pintar em cada quadriculado abaixo triângulo correspondente à distância x percorrida pela formiga:

- x = 5 cm



Fonte: Próprio autor

Além de ser importante para o entendimento do problema, o desenho ajuda os alunos a entenderem os possíveis triângulos obtidos durante o caminho da formiga.

Após feito todos os desenhos, a ficha traz a fórmula da área de um triângulo, e foi pedido que os alunos calculassem a área de todos os triângulos do item anterior e anotassem os resultados em uma tabela:

Tabela 9: Tabela das áreas dos triângulos

Caminho da Formiga	Área do Triângulo ADF
5 cm	
10 cm	
20 cm	
24 cm	
25 cm	
30 cm	
40 cm	
45 cm	

Fonte: Próprio autor

O preenchimento da tabela traz a ideia de que existe uma área máxima para os triângulos formados. Para o próximo item da ficha foi pedido que os alunos anotassem se achavam que existia tal área máxima e qual seria.

Um dos itens na versão original do problema pedia aos alunos que realizassem o esboço do gráfico da função que associa o comprimento x (caminho da formiga) e a área do triângulo formado. O item foi mantido na versão adaptada, pois além de ser um dos conteúdos estudados no 3º bimestre da série que realizou o trabalho, trouxemos para esta ficha a primeira proposta de atividade com o GeoGebra para celular que está em anexo.

- Ficha de atividade nº 3 – Os ingressos do Grêmio

O problema da ficha nº 3 também é um problema adaptado da 2ª fase do nível 3 da OBMEP de 2007, que contém o seguinte enunciado:

Tabela 10: Problema dos ingressos do Grêmio

O Grêmio Estudantil de Taperoá vai dar uma festa, vendendo ingressos a R$ 6,00. Para estimular a compra antecipada de ingressos, os diretores do Grêmio decidiram que:

- Os ingressos serão numerados a partir do número 1 e vendidos obedecendo à ordem crescente de sua numeração;
- Ao final da festa, cada participante receberá R$ 0,01 para cada ingresso vendido que tenha um número maior que o número do seu ingresso.

Fonte: www.obmep.org.br

Como estratégia de desenvolvimento da ficha foi feita inicialmente uma simulação de venda de ingressos com os alunos presentes na sala, seguindo as instruções do problema. Para isso seguimos a ordem de chamada dos alunos: o aluno nº 1 compra o ingresso nº 1, o aluno nº 2 compra o ingresso nº 2 e assim por diante. O objetivo da estratégia proposta foi que os alunos entendessem a compra, a devolutiva do troco em função do ingresso comprado e o lucro do grêmio. Após a simulação foi proposto para aos alunos que respondessem as seguintes perguntas:

Tabela 11: Perguntas dos ingressos do Grêmio

• Quantos ingressos foram vendidos? _______________ • Quantos reais foram arrecadados pelo Grêmio? ___________ • Após o final da festa, quantos reais foram devolvidos ao aluno que comprou o ingresso nº 1? E para o que comprou o ingresso nº 10?____ • No total, quantos reais foram devolvidos pelo Grêmio? ___________ • Considerando o lucro como a diferença entre o total arrecadado e o dinheiro devolvido após o final da festa, qual foi o lucro do Grêmio nessa simulação de venda?__________

Fonte: Próprio autor

Após respondida as perguntas, a ficha apresenta duas questões para que o aluno entenda a relação entre o número de ingressos vendidos, o troco devolvido e o lucro do grêmio.

Tabela 12: Item a) do Problema do Grêmio

a) Se forem vendidos 100 ingressos, quanto vai receber, ao final da festa, a pessoa que comprou o ingresso com o número 1? E a que comprou o ingresso com o número 70?

Fonte: Próprio autor

O objetivo dessas questões foi que o aluno entendesse a vantagem de comprar antecipado. Após isso foi apresentado uma explicação de 200 ingressos vendidos, que associa o problema com a soma dos termos de uma progressão aritmética:

Tabela 13: Exemplo da venda de 200 ingressos do problema

Por exemplo, se forem vendidos 200 ingressos, o Grêmio arrecadará 200 . R$ 6,00 = R$ 1200,00 e o aluno que comprou o ingresso nº 1, receberá de volta 199 . R$ 0,01 = R$ 1,99. Já o aluno que comprou o ingresso nº 2, receberá de volta 198 . R$ 0,01 = R$ 1,98 de volta e assim por diante. Continuando com o exemplo de 200 ingressos, se quisermos determinar o total que o Grêmio terá que devolver, precisaremos realizar a seguinte soma: $$S = 1{,}99 + 1{,}98 + 1{,}97 + \ldots + 0{,}02 + 0{,}01$$ Vale lembrar, que o aluno que comprou o ingresso nº 200, não recebe nada de volta, ou seja, apenas 199 alunos receberão "troco". Para fazer a soma acima, observe que: $$S = 1{,}99 + 1{,}98 + 1{,}97 + \ldots + 0{,}02 + 0{,}01$$ $$S = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + \ldots + 1{,}98 + 1{,}99$$ Somando ambos os lados da igualdade na vertical, vamos obter: $$S + S = (1{,}99 + 0{,}01) + (1{,}98 + 0{,}02) + \ldots + (0{,}01 + 1{,}99)$$ $$2S = 2{,}00 + 2{,}00 + \ldots + 2{,}00 = 199 \times 2{,}00 = 398$$ $$S = \frac{398}{2} = 199$$ Logo, R$ 199,00 será o valor que o Grêmio terá que devolver. Como o Grêmio arrecadou R$ 1200,00, o seu lucro será dado pela diferença entre o valor arrecadado e o valor devolvido. Logo: $$Lucro = R\$\, 1200{,}00 - R\$\, 199{,}00 = R\$\, 1001{,}00$$

Fonte: Próprio autor

Após essa explicação, a ficha traz um item para o aluno calcular o lucro do grêmio caso fossem vendidos 500, 600, 601 e 700 ingressos tendo como finalidade mostrar ao aluno de que se trata de uma atividade envolvendo o máximo de uma função. Depois da proposta de cálculo para os valores citados anteriormente, a ficha apresenta um item com a explanação da lei de formação do lucro do problema:

Tabela 14: Explicação da fórmula do lucro do Grêmio

b) Para determinarmos a quantidade de ingressos que precisa ser vendida para o Grêmio obter o lucro máximo, primeiramente precisamos descobrir a fórmula supondo que foram vendidos $\boldsymbol{n}$ ingressos. Vamos determinar:

Para começar, sabemos que o Grêmio vende cada ingresso por R$ 6,00, portanto irá arrecadar $6n$ reais se forem vendidos n ingressos. Sabemos também que ao final da festa, o Grêmio terá que devolver:

$$D = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \ldots + \frac{(n-1)}{100}$$

Da mesma forma como foi feito para calcular a soma S, temos:

$$D = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \ldots + \frac{(n-1)}{100}$$

$$D = \frac{n-1}{100} + \frac{n-2}{100} + \frac{n-3}{100} + \ldots + \frac{1}{100}$$

$$2D = \underbrace{\frac{n}{100} + \frac{n}{100} + \frac{n}{100} + \ldots + \frac{n}{100}}_{n-1\ parcelas}$$

$$2D = (n-1)\,\frac{n}{100}$$

$$D = \frac{n\,(n-1)}{200} = \frac{n^2 - n}{200}$$

Como o lucro é calculado pela diferença entre o dinheiro arrecadado e o dinheiro devolvido, podemos escrever o lucro por:

$$L(n) = 6n - \frac{n^2 - n}{200}$$

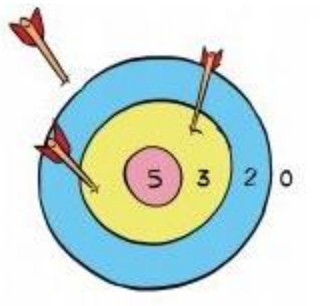
Fonte: Próprio autor

Para determinar o lucro máximo e a quantidade de ingressos vendidos para alcançar tal lucro, a ficha traz uma atividade que utiliza o Excel para smartphones como mostra o apêndice C.

- Ficha de Atividade nº 4 – Brincando com arco e flecha

O problema da ficha nº 4 é um problema adaptado de 2ª fase do nível 3 da OBMEP de 2014, que traz o seguinte enunciado:

Tabela 15: Problema do arco e flecha

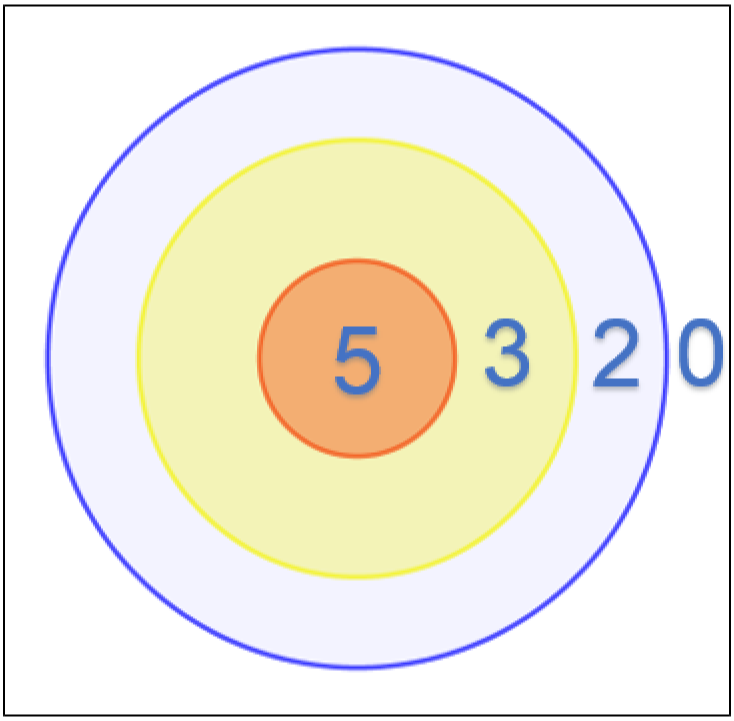


Michel pratica arco e flecha em um alvo como o da figura. Em cada rodada, ele atira três flechas e sua pontuação, na rodada, é a soma dos pontos obtidos em cada flecha. Acertar as regiões interna, intermediária e externa vale, respectivamente, 5 pontos, 3 pontos e 2 pontos; errar o alvo vale zero ponto. Caso a flecha acerte uma linha que divide duas regiões, vale a maior pontuação entre elas.

Fonte: www.obmep.org.br

Antes de realizar qualquer pergunta, a folha de atividades traz um alvo para os alunos praticarem e entenderem como funciona a pontuação. Para isso foram entregues feijões aos alunos, o alvo e foi pedido que os alunos completassem uma tabela:

Figura 16: Alvo do arco e flecha



Fonte: Próprio autor

Tabela 16: Tabela das pontuações

Lançamento	Pontos
1	
2	
3	
Total	

Fonte: Próprio autor

Depois de realizado os treinos, a folha de atividades traz o preenchimento de outras tabelas para que o aluno entenda quais são as possíveis pontuações dados 3 lançamentos e qual a pontuação máxima que pode ser obtida em uma rodada:

Tabela 17: Tabela das possíveis combinações de pontuação

Pontos	Combinação	Pontos	Combinação
0	0 + 0 + 0	9	
1		10	
2		11	
3		12	
4		13	
5		14	
6		15	
7			
8			

Fonte: Próprio autor

Depois do preenchimento dessa tabela foi apresentada a principal pergunta do problema como na versão original:

Tabela 18: Item d) do problema do arco e flecha

d) Michel somou 134 pontos em um treino. Explique por que houve pelo menos dez rodadas nesse treino.

Fonte: Próprio autor

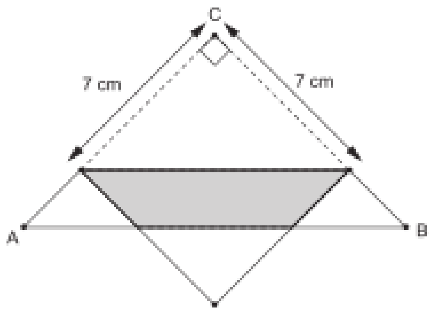
Para esta ficha de atividade não foram utilizados recursos tecnológicos e seguimos a linha do preenchimento de tabelas e o uso de material manipulável.

- Ficha de atividade nº 5 – Problema do Triângulo

A última ficha de atividade traz um problema de cálculo de áreas sobrepostas de um problema da 2ª fase do nível 3 da OBMEP de 2013, com o seguinte enunciado:

Tabela 19: Problema do Triângulo

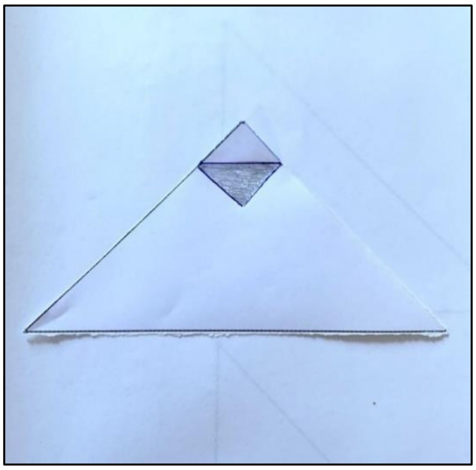
A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por f(x) a área em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm², é f(7).



Fonte: www.obmep.org.br

Como proposta inicial foi pedido que os alunos realizassem um trabalho manipulativo com dois triângulos impressos em uma folha, fazendo medições com régua, dobradura e pintura para representação da área sobreposta de acordo com as informações do problema:

Imagem 1: Triângulo recortado



Fonte: Próprio autor

A ficha traz a proposta de os alunos realizarem o preenchimento da área sobreposta com as medidas 4 cm, 5 cm e 7 cm.

Para o aluno compreender qual seria a área sobreposta formada pela dobradura, a ficha traz o seguinte item a ser preenchido:

Tabela 20: Item a) do problema dos triângulos

a) Qual polígono é formado na região onde ocorre a sobreposição quando a medida de x é: • 2 cm? _________________ • 4 cm? _________________ • 5 cm? _________________ • 7 cm? _________________

Fonte: Próprio autor

E para finalizar a proposta original do problema pedimos que o aluno determinasse a fórmula da área sobreposta em função do comprimento x do problema:

Tabela 21: Item b) do problema dos triângulos

e) Escreva uma fórmula para o cálculo da área onde ocorre a sobreposição para os seguintes casos: • $0 \leq x \leq 5$ _________________________ • $5 \leq x \leq 10$ _________________________

Fonte: Próprio autor

A ficha de atividade ainda traz os comandos do GeoGebra para a visualização dinâmica do problema, conforme o apêndice F.

3.2 Expectativas com os resultados das fichas

Como já descrito anteriormente, o objetivo principal das fichas de atividades é de que o aluno tivesse um contato mais próximo com problemas da OBMEP utilizando quando possível, recursos tecnológicos acessíveis a sala de aula. A proposta da escola discutida em planejamento é de que os alunos realizassem atividades que envolvessem a resolução de problemas para melhoria dos índices da unidade escolar. Quando falamos de expectativa das fichas, a primeira ideia que nos vem é de que os alunos consigam resolver e responder o maior número de atividades sem a interferência do professor, pois se os alunos desenvolvem as atividades de forma correta é sinal de que as mesmas estão claras e objetivas. Vale lembrar de que pelo histórico da escola e o convívio com os alunos, as questões da OBMEP são consideradas difíceis por parte dos mesmos e as fichas trazem a proposta da possibilidade de resolução de uma outra forma para que o aluno tenha acesso a questões de qualidade que priorizam o raciocínio lógico e sua criatividade.

3.3 Descrição e Cronograma

A escola E.E. Professor José Jorge Neto atende alunos do Ensino Médio nos períodos matutino e noturno, nas modalidades de ensino regular e EJA (Ensino de Jovens e Adultos). É uma escola considerada pequena em relação ao número de salas e a distribuição de alunos por sala é considerada adequada. A equipe gestora é formada por um diretor e um coordenador pedagógico. Além das salas de aula, o prédio conta com uma sala de informática e uma sala de leitura. Para o ano de 2020 a escola tem como objetivo a formação de um laboratório de Matemática, que é uma das metas estabelecidas para o plano de melhoria no ano de 2019.

A série em que o trabalho foi realizado é um 3º ano do ensino regular no período da manhã. Durante a aplicação do trabalho, a sala contava com 21 alunos matriculados. Uma parte dos alunos apenas frequenta o ensino médio. Existe uma outra parte dos alunos que além do ensino regular, trabalha ou cursa o ensino técnico (na cidade de Pirassununga, já que Analândia não conta com escola técnica).

O calendário escolar é pré-estabelecido pela Diretoria de Ensino e adequado pela escola com os feriados municipais. A regra é estipular um calendário com 200 dias letivos, divididos em 4 bimestres com o início em fevereiro e término em dezembro. Além dos dias letivos tradicionais, o calendário conta com algumas atividades programadas, que geralmente são atividades realizadas em algum feriado.

As provas internas são realizadas em todas as salas em uma mesma semana que é definida no começo do ano em planejamento. As AAPs são aplicadas ao fim de cada bimestre como descrito anteriormente e o Saresp foi realizado nos dias 27 e 28 de novembro para as disciplinas de Matemática e Português respectivamente.

As fichas de atividades foram aplicadas durante o 3º bimestre, entre agosto e setembro, de modo que alguns conteúdos abordados fossem os mesmos da matriz estabelecida no currículo. As fichas seguiram o seguinte cronograma:

Tabela 22: Cronograma de aplicação das fichas de atividades

Ficha de Atividade	Data
O problema das bananas	19/08
O caminho da formiga	26/08
Os ingressos do grêmio	02/09
Brincando com arco e flecha	09/09
Problema do triângulo	16/09

Fonte: Próprio autor

As aulas em que as fichas foram aplicadas eram aulas duplas de 50 minutos cada e todas às segundas-feiras que foi um combinado entre professor, alunos e direção da escola. O tempo foi suficiente em todas as fichas com exceção da “Os ingressos do grêmio”, pois precisamos de uma aula complementar para realizar a atividade que envolvia o uso do Excel.

3.4 Aplicação e análise

Antes da aplicação efetiva das fichas de atividades dialogamos com os alunos da sala sobre o que seria de fato o trabalho. Primeiramente, os alunos precisariam se sentir confortáveis com a realização das fichas, e para isso o autor fez perguntas sobre as principais dificuldades dos alunos na disciplina de matemática, o que achavam sobre problemas da OBMEP e qual seria a importância do uso de recursos tecnológicos em sala de aula. Com base nesse diálogo inicial simples percebemos que alguns alunos se sentem desconfortáveis com a matemática pelo fato de terem definido que as ciências exatas não fazem parte do seu conjunto de habilidades, mesmo sabendo da importância para a sua vida. Esses mesmos alunos opinaram que uma atividade diferenciada e mais dinâmica seria algo que eles gostariam de realizar, visto que seria uma oportunidade de aprender matemática de uma forma diferente exposta até então. Os alunos que se classificam como habilidosos na disciplina ficaram empolgados com a aplicação do trabalho. Mesmo sendo uma sala heterogênea no que diz respeito ao nível de aprendizagem, a grande maioria dos alunos se demonstrou animada e disposta com a realização das fichas, pois além de ser algo que poderia ajudar no aprendizado, destacaram que a tentativa de inovação nas aulas de todas as disciplinas é algo muito importante. Os estudantes também enfatizaram que qualquer início de aprendizado começa em um boa relação professor-aluno e que isso já acontecia em nossa escola. Ficou decidido por parte dos alunos que o melhor dia para realizar as atividades seria às segundas-feiras por conta das aulas duplas e por ser início da semana, que segundo os mesmos teriam uma maior concentração nesses dias.

Depois de realizada a primeira conversa sobre a aplicação das fichas, a equipe gestora realizou uma apresentação sobre o índice do Idesp de 2018 e quais seriam nossas metas para este ano. Ficou claro que os alunos da sala se sentiram incomodados com os maus resultados do último ano, mas ao mesmo tempo definiram com uma responsabilidade grande a tentativa de melhora deles. A equipe gestora explicou aos alunos que a tentativa de melhora vem de um trabalho contínuo do ano letivo inteiro, com uma retomada de habilidades em conjunto com todas as disciplinas da escola e que a realização da OBMEP e aplicação deste trabalho seria de grande importância nas buscas das metas da escola.

Após todo o diálogo inicial foi explicado aos alunos como seria realizado a aplicação do trabalho e quais seriam as expectativas iniciais com os resultados, seguindo o cronograma de atividades descritas que apresentaremos no próximo capítulo.

4. AVALIAÇÃO

Neste capítulo faremos uma descrição da aplicação das fichas de atividades relatando a participação, desenvolvimento e resultados dos alunos em cada um dos exercícios. Ainda faremos um breve relato sobre os padrões observados nas perguntas e respostas feitas pelos alunos e alguns comentários sobre as questões.

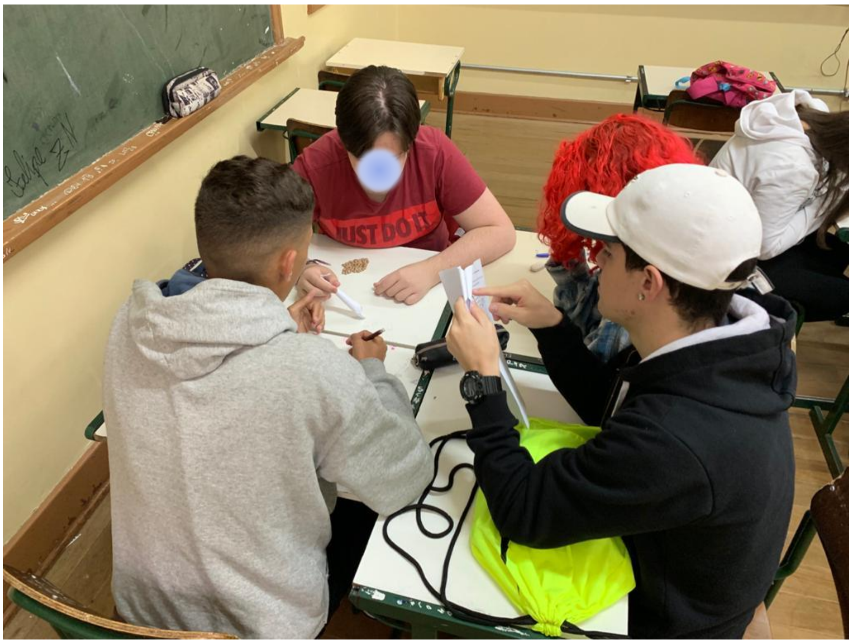
4.1 Análise dos resultados

- 1ª Ficha de atividade (19/08) – O Problema das bananas

Como descrito anteriormente, o professor dialogou com os alunos sobre a importância da aplicação e desenvolvimento das fichas, portanto os alunos já esperavam pela aplicação até com uma certa ansiedade para saber do que se tratava. Antes de começarmos foi pedido que a sala se organizasse em grupos de 4 alunos conforme descrição da ficha. Depois de feita a organização realizamos a leitura da apresentação formal das fichas que se encontra no apêndice A. Logo após a leitura da apresentação, o professor leu o enunciado do problema e pediu aos alunos que a resolução e discussão deveria envolver todos os membros do grupo e que para o auxílio da atividade deveriam utilizar os feijões que seriam entregues. Com os alunos presentes no dia foram formados 5 grupos. Para esse primeiro problema não tivemos perguntas relacionadas ao não entendimento do problema.

Assim que começamos a atividade os alunos preencheram a primeira tabela para uma melhor organização dos personagens. Antes de dar continuidade ao próximo item, percebi que um dos grupos tentava responder o problema utilizando as informações do enunciado e os feijões. Fizeram uma suposição inicial que todos teriam comido a mesma quantidade de bananas e dividiram os 52 feijões entre os integrantes. Os integrantes deste grupo tentaram mais algumas vezes realizar uma nova distribuição dos feijões, mas sem sucesso, até que resolveram seguir com o próximo item do problema que tinha como proposta a organização das informações.

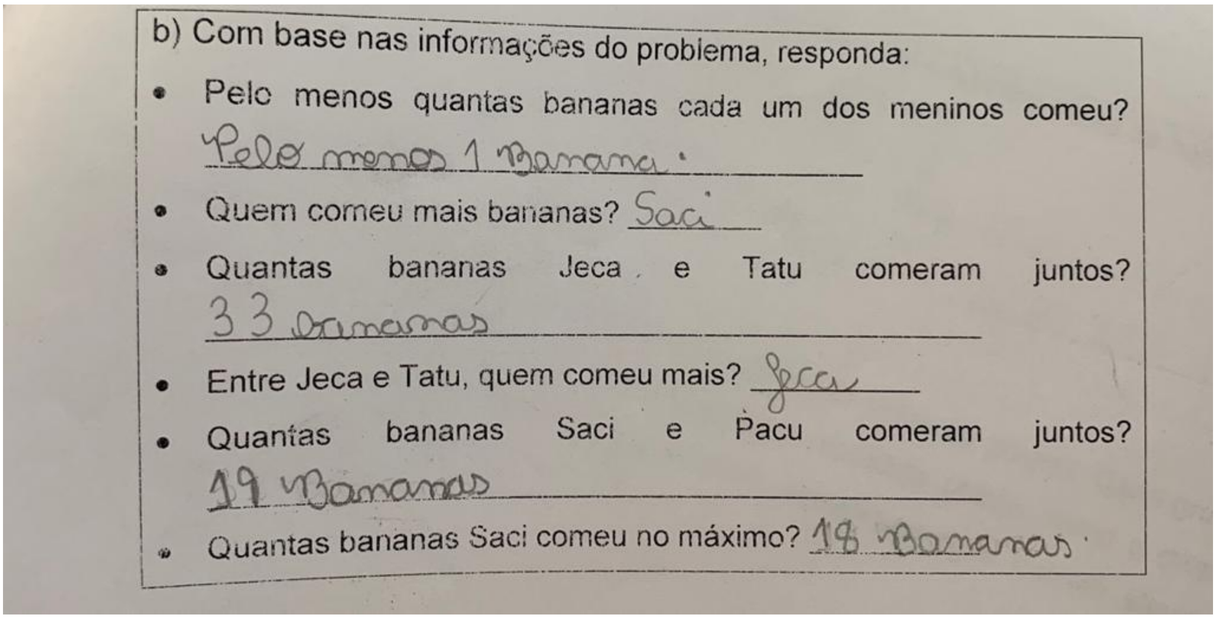
Imagem 2: Alunos realizando a atividade com feijões



Fonte: Próprio autor

No próximo item, os alunos também conseguiram responder sem grandes dificuldades conforme podemos ver nas respostas de um dos grupos:

Imagem 3: Respostas de um aluno na ficha de atividades do problema das bananas



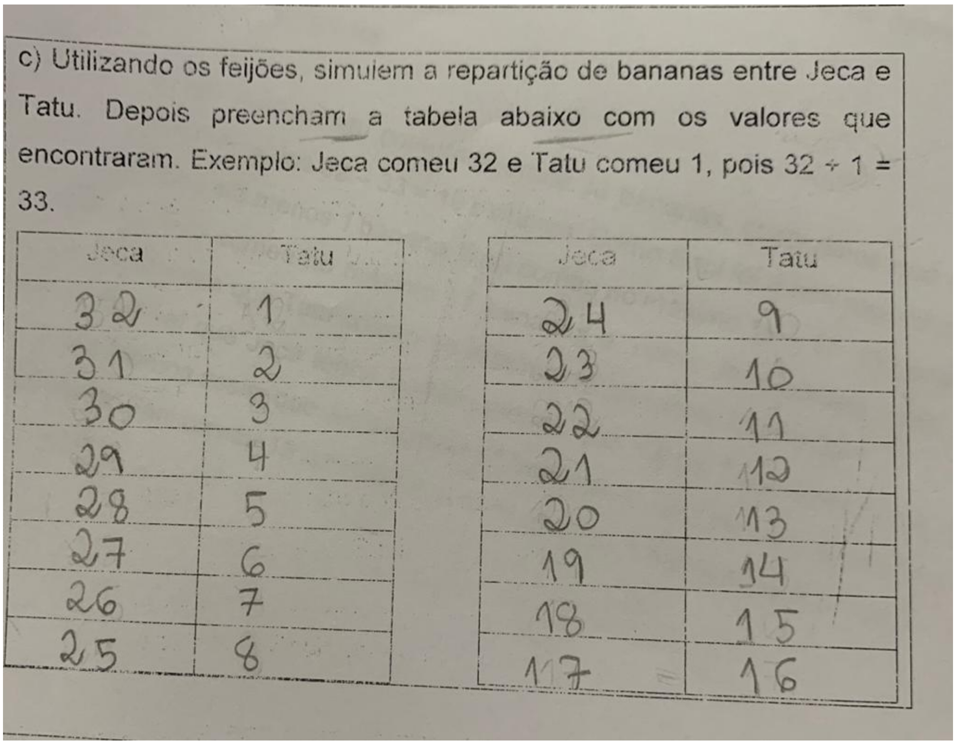
b) Com base nas informações do problema, responda:

- Pelo menos quantas bananas cada um dos meninos comeu? Pelo menos 1 Banana.
- Quem comeu mais bananas? Saci
- Quantas bananas Jeca e Tatu comeram juntos? 33 bananas
- Entre Jeca e Tatu, quem comeu mais? Jeca
- Quantas bananas Saci e Pacu comeram juntos? 19 Bananas
- Quantas bananas Saci comeu no máximo? 18 Bananas.

Fonte: Próprio autor

Nos itens c) e d) da ficha, os alunos precisariam relacionar as informações organizadas no item anterior com o preenchimento possível da tabela. Todos os grupos utilizaram a informação que Jeca e Tatu comeram 33 bananas juntos, mas houve um grupo que esqueceu que Jeca comeu mais que Tatu, e assim surgiu o primeiro questionamento de um dos grupos. A tabela dos itens c) e d) foram elaboradas do tamanho exato para as possíveis respostas em que Jeca come mais que Tatu, e o questionamento surgiu exatamente sobre o tamanho da tabela, pois segundo esse grupo não seria possível preencher a coluna do Jeca com o número 16 e o do Tatu com 17:

Imagem 4: Respostas de um aluno na ficha de atividades do problema das bananas


c) Utilizando os feijões, simulem a repartição de bananas entre Jeca e Tatu. Depois preencham a tabela abaixo com os valores que encontraram. Exemplo: Jeca comeu 32 e Tatu comeu 1, pois 32 + 1 = 33.

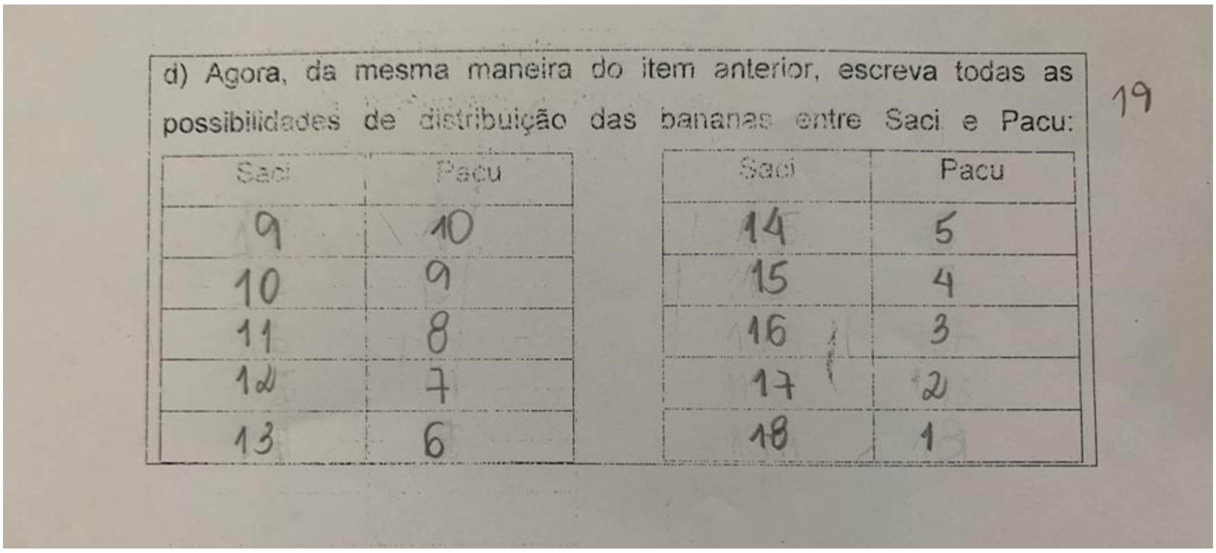
Jeca	Tatu
32	1
31	2
30	3
29	4
28	5
27	6
26	7
25	8

Jeca	Tatu
24	9
23	10
22	11
21	12
20	13
19	14
18	15
17	16

Fonte: Próprio autor

O professor pediu para que o grupo pensasse mais um pouco sem fazer intervenção na resolução do problema. Depois de um tempo o grupo lembrou da informação de que o Jeca tinha comido mais que o Tatu e por isso não seria possível que Jeca tenha comido 16 bananas. Para o próximo item os alunos fizeram o mesmo do item anterior devendo lembrar que o Saci comeu mais que todos e usando a informação de que Saci e Pacu comeram juntos 19 bananas. Um dos grupos, na hora de preencher a tabela, esqueceu da informação de que Saci comeu mais que todos e considerou a distribuição de 9 bananas para Saci e 10 bananas para Pacu:

Imagem 5: Respostas de um aluno na ficha de atividades do problema das bananas



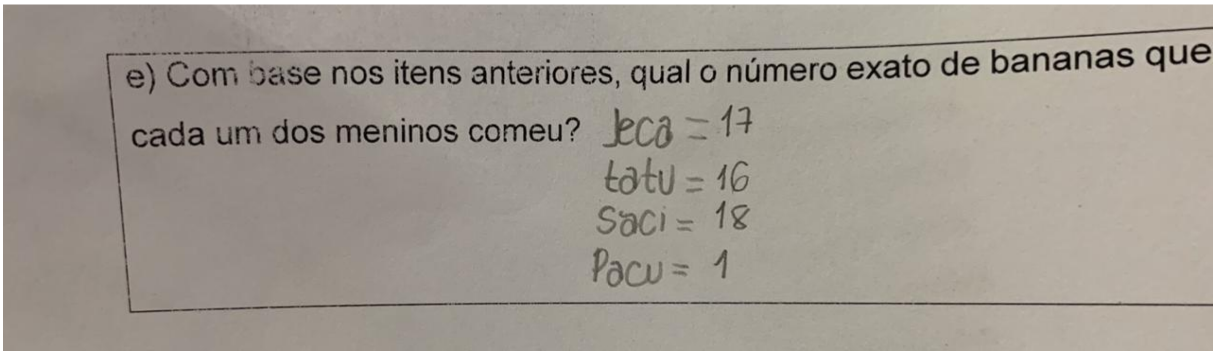
d) Agora, da mesma maneira do item anterior, escreva todas as possibilidades de distribuição das bananas entre Saci e Pacu: 19

Saci	Pacu	Saci	Pacu
9	10	14	5
10	9	15	4
11	8	16	3
12	7	17	2
13	6	18	1

Fonte: Próprio autor

Depois de preenchidas todas as tabelas foi dado um tempo para que analisassem o que foi respondido até então e tentassem chegar a uma conclusão sobre o número de bananas que cada um dos meninos comeu. Todos os grupos conseguiram responder de forma correta seguindo praticamente o mesmo raciocínio. Analisaram as respostas do item b) e comparam com as tabelas do item c) e d) usando a justificativa esperada de que se Saci comeu mais que todos. A única possibilidade cabível era quando ele comesse 18 bananas e Pacu apenas 1 e que se tanto Jeca quanto Tatu comeram menos que Saci, a única possibilidade era que Jeca comesse 17 e Tatu 16.

Imagem 6: Resposta de um aluno do item e) do problema das bananas

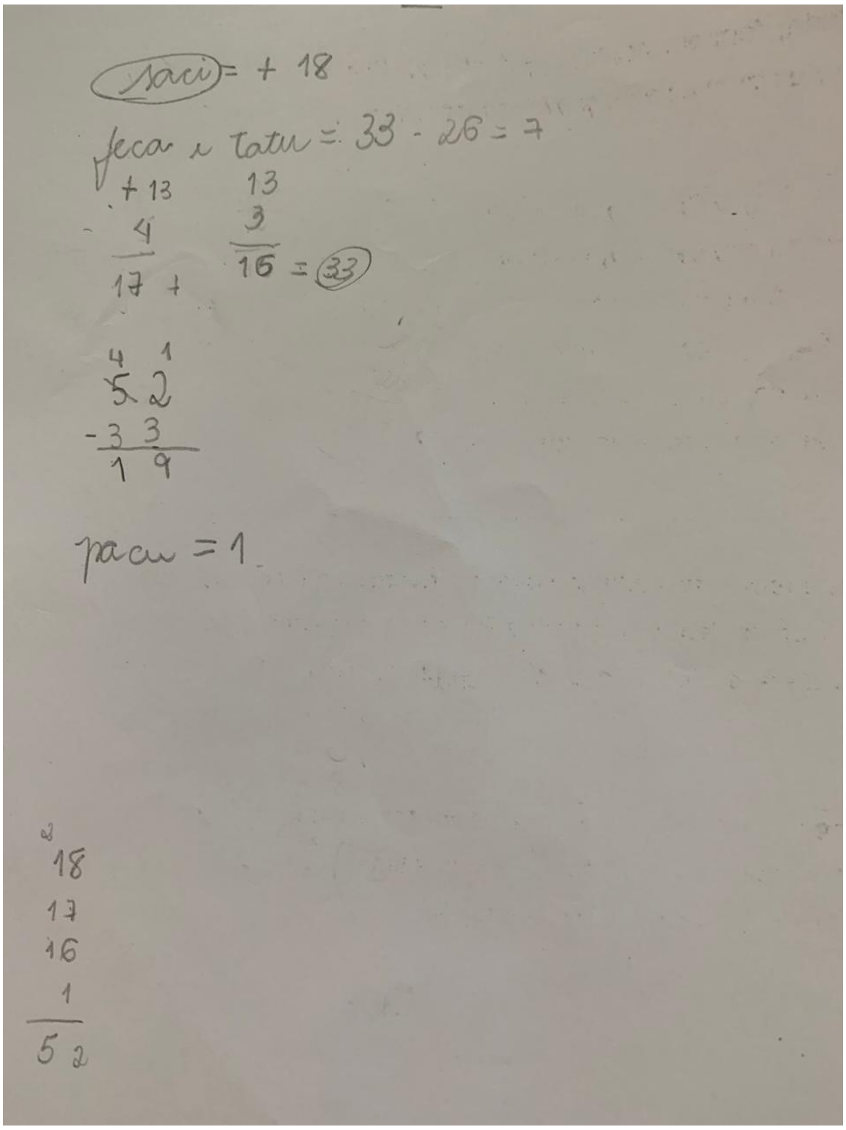


e) Com base nos itens anteriores, qual o número exato de bananas que cada um dos meninos comeu? Jeca = 17
tatu = 16
Saci = 18
Pacu = 1

Fonte: Próprio autor

Depois de finalizada a atividade foi entregue a resposta do problema segundo a resolução da OBMEP, quando uma das alunas chamou o professor para mostrar uma outra forma que tinha realizado os cálculos do problema. A aluna distribuiu igualmente as 52 bananas entre os 4 amigos, o que daria 13 bananas para cada. Depois utilizou a informação de que Jeca e Tatu comeram 33 bananas juntos e justificou que Saci e Pacu não poderiam ficar com 13 bananas cada, pois estariam com 52 – 26 = 7 bananas a mais. Dessas 7 bananas a mais distribuiu 4 para Jeca e 3 para Tatu de tal forma que Jeca ficasse com 17 e Tatu com 16 (já que Jeca comeu mais). Por fim, a única possível quantidade para Saci seria 18 bananas, já que Saci comeu mais que todos e Pacu ficou com apenas 1 banana. A aluna conseguiu justificar de forma oral, mas na ficha justificou de uma forma mais simples como mostra a imagem abaixo:

Imagem 7: Resposta de uma aluna para o problema das bananas



Fonte: Próprio autor

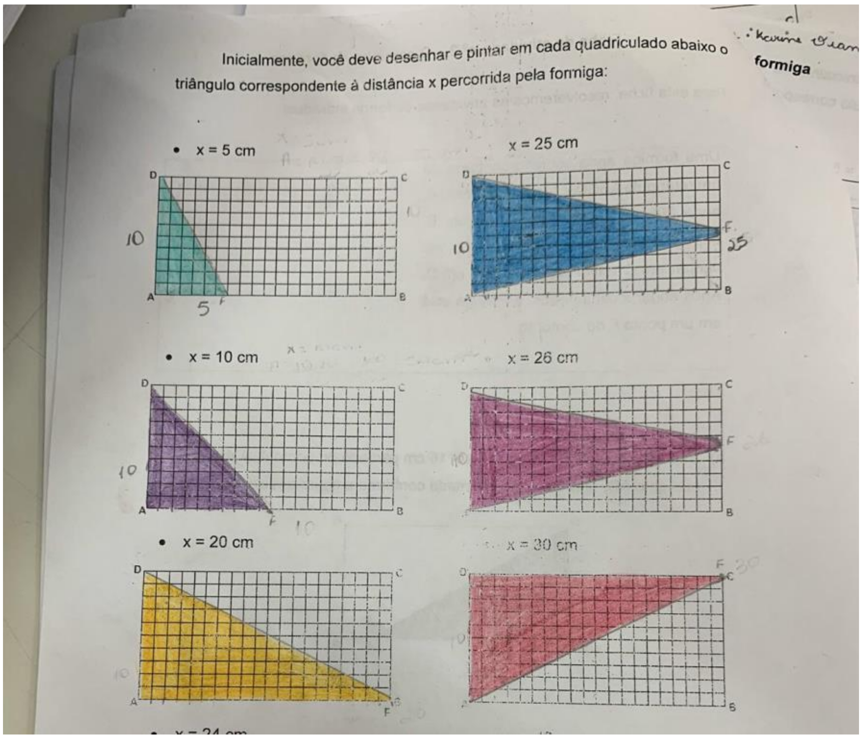
Para finalizar, foi perguntado aos alunos o que acharam do problema e sobre a proposta da ficha para resolução. Os grupos afirmaram que era um bom problema e que o preenchimento de tabelas auxiliou na resolução. Ainda destacaram que provavelmente teriam dificuldades de resolver apenas com o enunciado, mesmo não sendo um problema com um nível elevado de dificuldade.

- 2ª Ficha de atividade (26/08) – O caminho da formiga

A proposta inicial desta atividade era de que os alunos desenvolvessem toda a ficha de forma individual. Como a ficha era a primeira que envolvia o uso do GeoGebra para celular e nem todos os alunos tinham o aparelho, resolvemos realizar as atividades em duplas. Para iniciarmos foi dito aos alunos que formassem as duplas e começassem a leitura e realização da ficha.

No primeiro item, a maioria dos alunos entendeu a ideia de desenhar e pintar a área do triângulo em função do caminho da formiga. Foi notado por parte de alguns alunos uma certa insegurança na hora de traçar e pintar o triângulo com o famoso “medo de estar errado”, mesmo o aluno achando fácil e entendido o que se pedia.

Imagem 8: Desenho e pintura de um aluno para o caminho da formiga



Fonte: Próprio autor

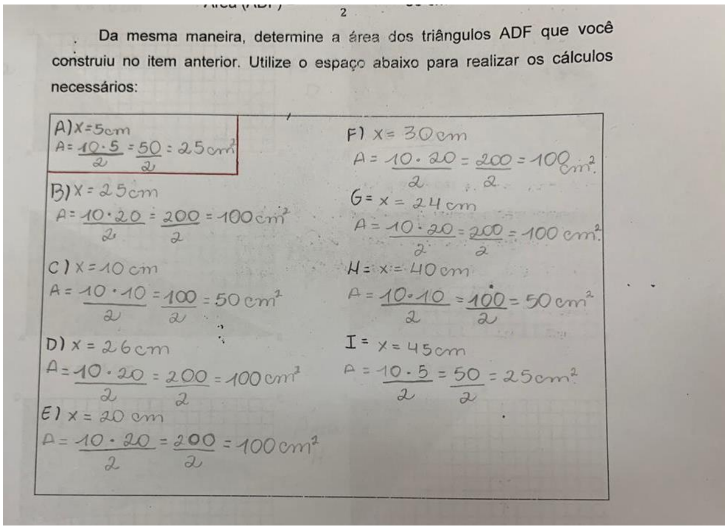
Percebemos que a mudança na realização da atividade (quando foi desenvolvida em duplas) foi benéfica no sentido de os alunos discutirem o entendimento da ficha. As duplas foram formadas pelos próprios alunos, o que muitas vezes é tido como algo não benéfico para o desenvolvimento de atividades como esta, mas os alunos por si só formaram duplas produtivas não levando só em consideração a afinidade entre eles.

Imagem 9: Dupla resolvendo o problema do caminho da formiga

Fonte: Próprio autor

A segunda parte da ficha pedia que os alunos calculassem a área dos triângulos e preenchessem uma tabela com os respectivos dados. Como a ficha trazia um exemplo de cálculo de área de triângulos, os alunos não apresentaram dificuldades.

Imagem 10: Resposta de um aluno para o cálculo das áreas dos triângulos



Da mesma maneira, determine a área dos triângulos ADF que você construiu no item anterior. Utilize o espaço abaixo para realizar os cálculos necessários:

A) x = 5 cm
$A = \frac{10 \cdot 5}{2} = \frac{50}{2} = 25 cm^2$

B) x = 25 cm
$A = \frac{10 \cdot 20}{2} = \frac{200}{2} = 100 cm^2$

C) x = 10 cm
$A = \frac{10 \cdot 10}{2} = \frac{100}{2} = 50 cm^2$

D) x = 26 cm
$A = \frac{10 \cdot 20}{2} = \frac{200}{2} = 100 cm^2$

E) x = 20 cm
$A = \frac{10 \cdot 20}{2} = \frac{200}{2} = 100 cm^2$

F) x = 30 cm
$A = \frac{10 \cdot 20}{2} = \frac{200}{2} = 100 cm^2$

G = x = 24 cm
$A = \frac{10 \cdot 20}{2} = \frac{200}{2} = 100 cm^2$

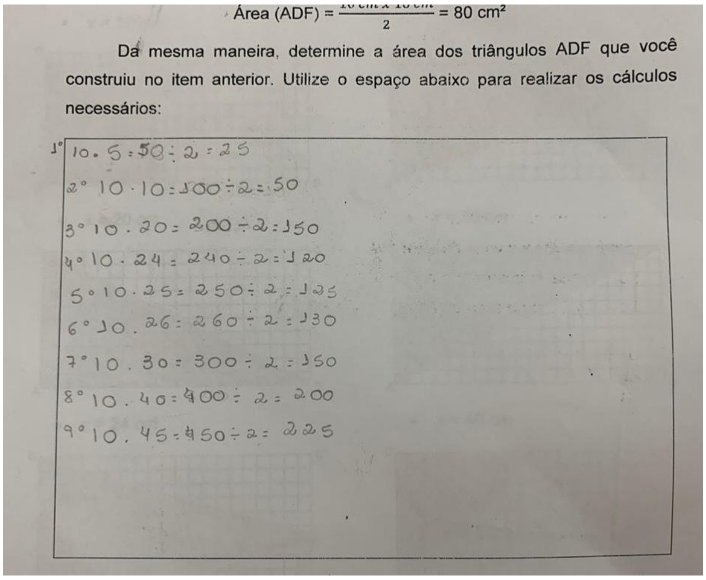
H = x = 40 cm
$A = \frac{10 \cdot 10}{2} = \frac{100}{2} = 50 cm^2$

I = x = 45 cm
$A = \frac{10 \cdot 5}{2} = \frac{50}{2} = 25 cm^2$

Fonte: Próprio autor

É importante registrar que essa parte da atividade era sobre o cálculo de área dos triângulos e que o cálculo dependeria da altura do triângulo formado, já que a base seria sempre a mesma. Todos os alunos registram que a base do triângulo seria a mesma, mas uma das duplas entendeu que a altura seria sempre o caminho da formiga.

Imagem 11: Resposta de um aluno para o cálculo das áreas dos triângulos



Área (ADF) = $\frac{10 cm \times 16 cm}{2}$ = 80 cm²

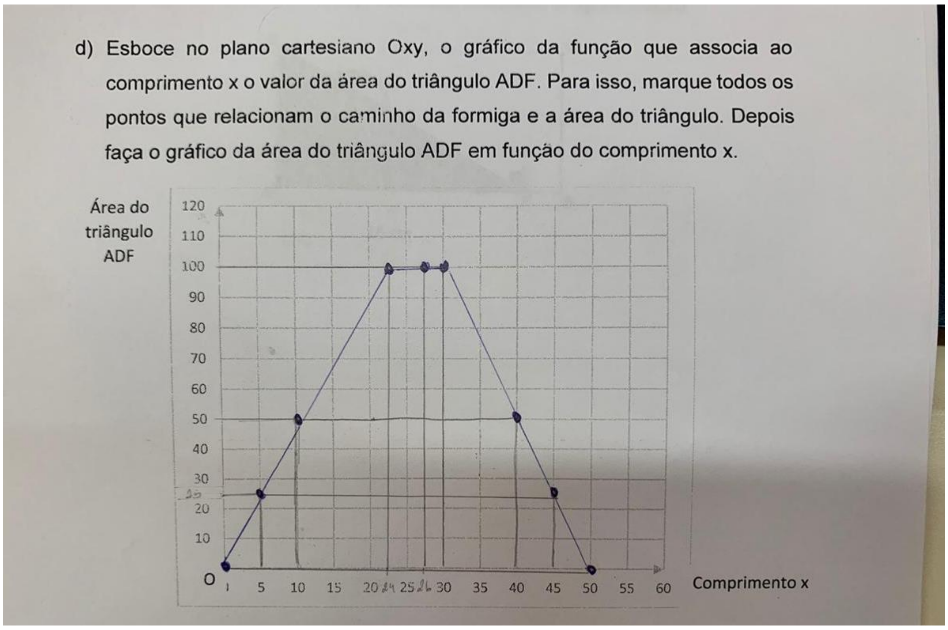
Da mesma maneira, determine a área dos triângulos ADF que você construiu no item anterior. Utilize o espaço abaixo para realizar os cálculos necessários:

1° 10 . 5 = 50 ÷ 2 = 25
2° 10 . 10 = 100 ÷ 2 = 50
3° 10 . 20 = 200 ÷ 2 = 150
4° 10 . 24 = 240 ÷ 2 = 120
5° 10 . 25 = 250 ÷ 2 = 125
6° 10 . 26 = 260 ÷ 2 = 130
7° 10 . 30 = 300 ÷ 2 = 150
8° 10 . 40 = 400 ÷ 2 = 200
9° 10 . 45 = 450 ÷ 2 = 225

Fonte: Próprio autor

Os alunos que calcularam de forma correta as áreas dos triângulos desenhados conseguiram realizar a construção do gráfico que relacionava a área do triângulo em função do comprimento do caminho da formiga. A imagem abaixo mostra a construção do gráfico de uma das duplas:

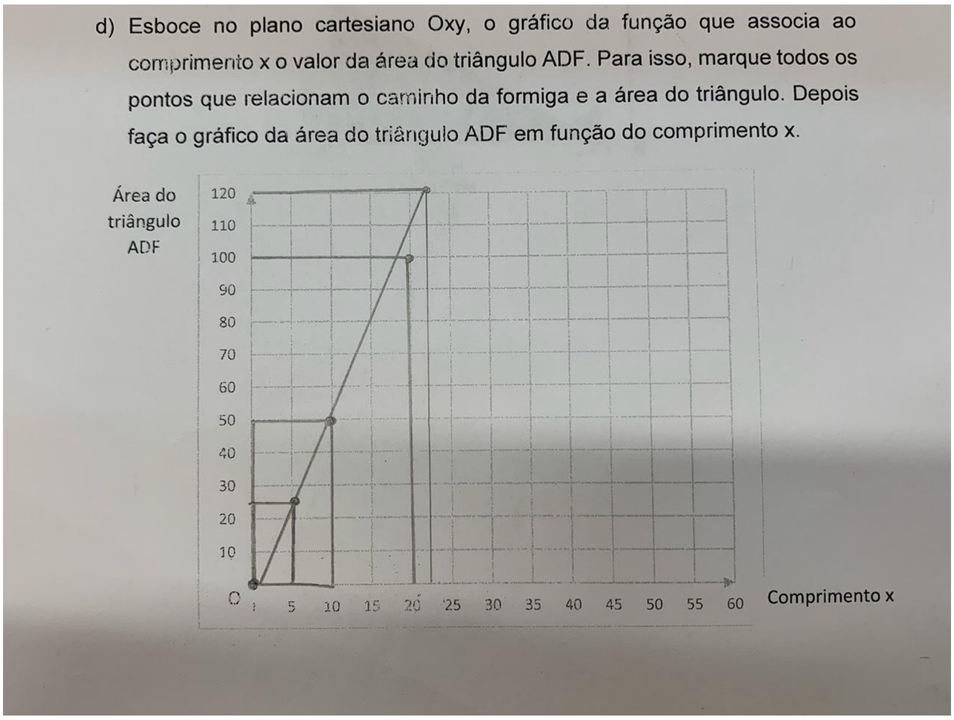
Imagem 12: Esboço de um aluno para o gráfico do problema do caminho da formiga



Fonte: Próprio autor

Já os alunos que calcularam a área do triângulo de forma incorreta tiveram dificuldades no esboço do gráfico e, quando notaram a dificuldade, pediram a ajuda do professor que instruiu a realizar o esboço com os dados obtidos nos cálculos. A imagem abaixo mostra a tentativa de esboço de um desses alunos:

Imagem 13: Esboço de um aluno para o gráfico do problema do caminho da formiga



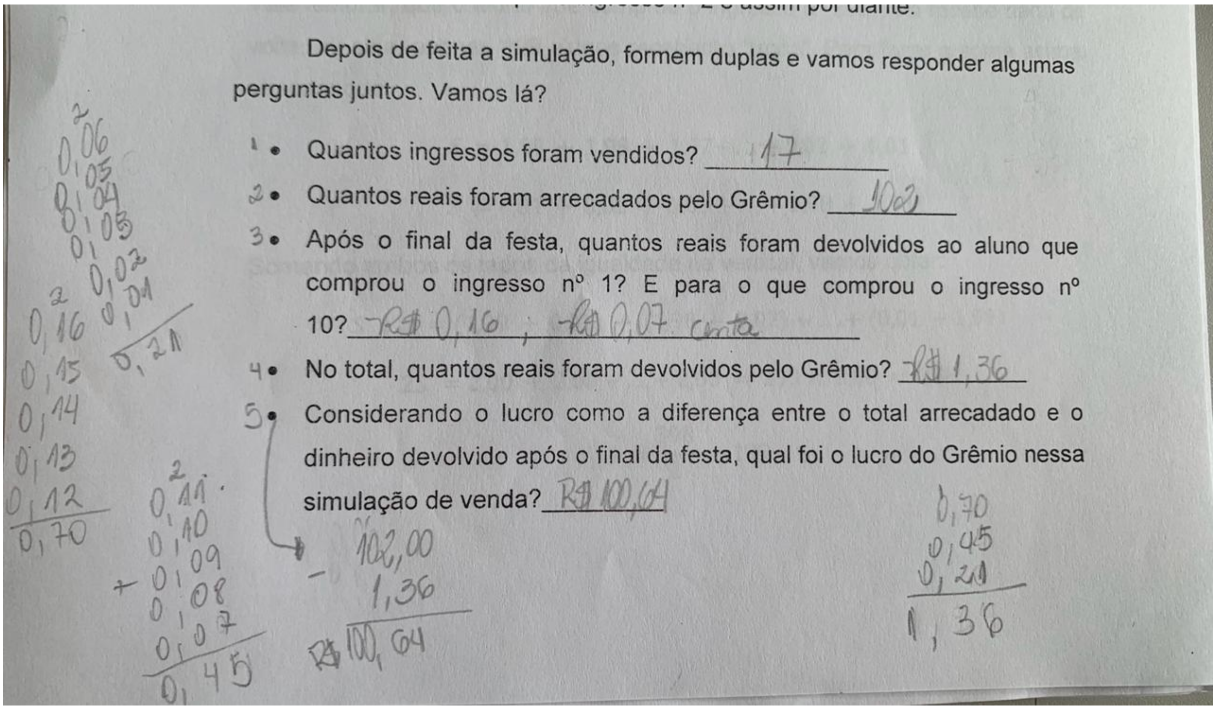
Fonte: Próprio autor

Depois de realizado o esboço do gráfico, foi pedido que os alunos pegassem seus telefones para realizar a segunda parte da ficha que envolvia a atividade com o GeoGebra, que está no apêndice C. Para esta atividade o professor projetou as instruções na televisão e desenvolveu toda a atividade passando as instruções aos alunos. Como a proposta da atividade era realizar o esboço do gráfico em função do caminho da formiga, ao final os alunos puderam perceber qual seria a construção do gráfico correto. Neste trabalho ainda realizaremos um relato da opinião dos alunos em relação a utilização do GeoGebra para esta atividade, mas já adiantamos que tivemos um bom andamento da atividade e que os alunos conseguiram associar bem a atividade desenvolvida na ficha com a desenvolvida com os celulares.

- 3ª ficha de atividade (02/09) – Os ingressos do grêmio

Para este problema realizamos uma simulação de venda dos ingressos do grêmio envolvendo os alunos presentes na sala, como relatado anteriormente. No dia da atividade tínhamos 17 alunos presentes e para dar início a atividade, o professor leu o problema e o exemplo que constava na ficha para os alunos entenderem qual seria a simulação. Como proposta da ficha, o professor pediu para que os alunos formassem duplas (neste dia tivemos um trio) e respondessem as perguntas iniciais. Depois que as duplas foram formadas, alguns alunos levantaram a mão pedindo uma nova leitura e explicação do problema, pois ainda não tinham entendido. Uma nova leitura foi realizada e para melhor entendimento o professor explicou um exemplo com apenas 3 ingressos vendidos. Depois de explicado o exemplo na lousa, o professor pediu que os alunos tentassem responder as primeiras questões. Pela observação feita em sala e as respostas das fichas, os alunos entenderam a proposta do problema. A imagem abaixo mostra as anotações de um aluno da sala:

Imagem 14: Resposta de um aluno para a simulação da venda de ingressos do grêmio


Depois de feita a simulação, formem duplas e vamos responder algumas perguntas juntos. Vamos lá?

1 • Quantos ingressos foram vendidos? 17

2 • Quantos reais foram arrecadados pelo Grêmio? 102

3 • Após o final da festa, quantos reais foram devolvidos ao aluno que comprou o ingresso nº 1? E para o que comprou o ingresso nº 10? R$ 0,16 ; R$ 0,07 centa

4 • No total, quantos reais foram devolvidos pelo Grêmio? R$ 1,36

5 • Considerando o lucro como a diferença entre o total arrecadado e o dinheiro devolvido após o final da festa, qual foi o lucro do Grêmio nessa simulação de venda? R$ 100,64

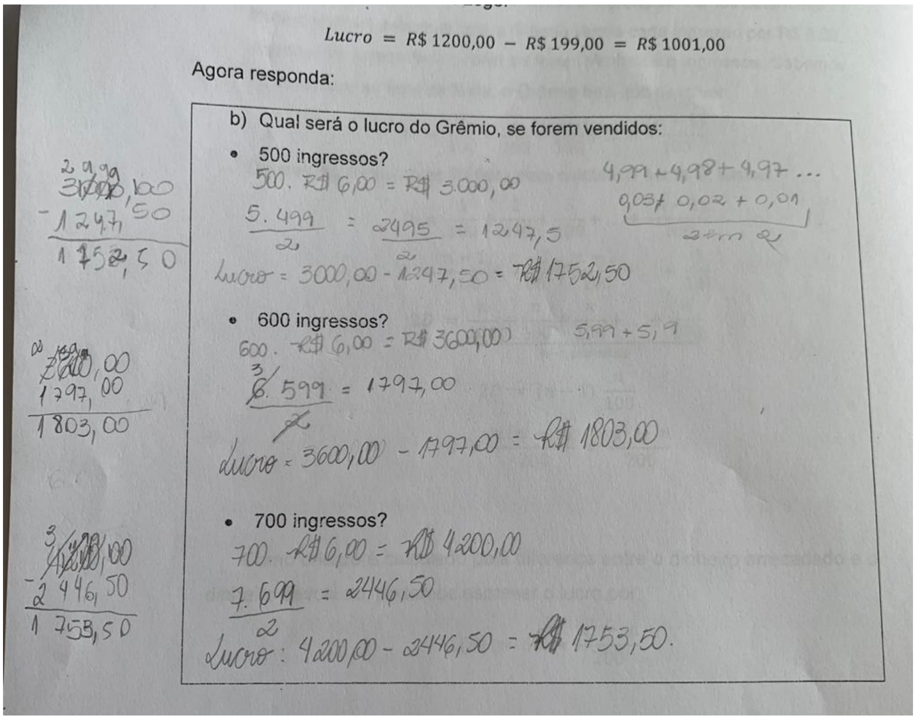
Fonte: Próprio autor

Pelas anotações das fichas, todas as duplas conseguiram responder os primeiros itens do problema. Depois de realizada essa primeira parte, o professor pediu que os alunos respondessem o item a) que trata de uma venda de 100 ingressos e o troco devolvido para a pessoa que comprou o ingresso nº 1 e o nº 70. Pelas anotações feitas na ficha constatamos que os alunos não tiveram dificuldades.

Como previsto na elaboração das fichas, para os alunos entenderem qual seria o lucro do grêmio em função da quantidade de ingressos vendidos, primeiramente precisaríamos explicar a soma dos trocos devolvidos para todos os compradores dos ingressos. Neste momento o professor utilizou o texto da ficha que usava como exemplo a venda de 200 ingressos e explicou por meio da soma dos termos de uma progressão aritmética qual seria o troco devolvido. Como é um conteúdo visto na 1ª série do ensino médio, boa parte dos alunos lembrava o que era uma PA, mas não como somar os seus termos. O professor leu e ao mesmo tempo ia explicando no quadro como se somava os termos da progressão. Vale ressaltar que neste momento, os alunos fizeram vários questionamentos, o que resultou em um certo atraso no andamento das atividades.

Após explicado o exemplo e sanadas as dúvidas, foi pedido aos alunos que calculassem o lucro do grêmio para 500, 600 e 700 ingressos vendidos. O objetivo desta parte da ficha era que os alunos entendessem que existiria um lucro máximo que o grêmio poderia obter. Podemos ver abaixo o cálculo correto do item b) de um aluno:

Imagem 15: Resposta de um aluno para o item b) da venda de ingressos do grêmio



Fonte: Próprio autor

Para o item c), os alunos teriam que responder se achavam que existia um lucro máximo. Todos os alunos responderam que sim usando como justificativa o item anterior onde perceberam que o lucro diminuía de 600 para 700 ingressos vendidos. Finalizando a primeira parte da ficha foi explicado aos alunos como determinar a fórmula que representa o lucro obtido pelo grêmio. Nesta parte da atividade foram feitos alguns questionamentos pelos alunos novamente e terminamos depois que todas as dúvidas foram sanadas.

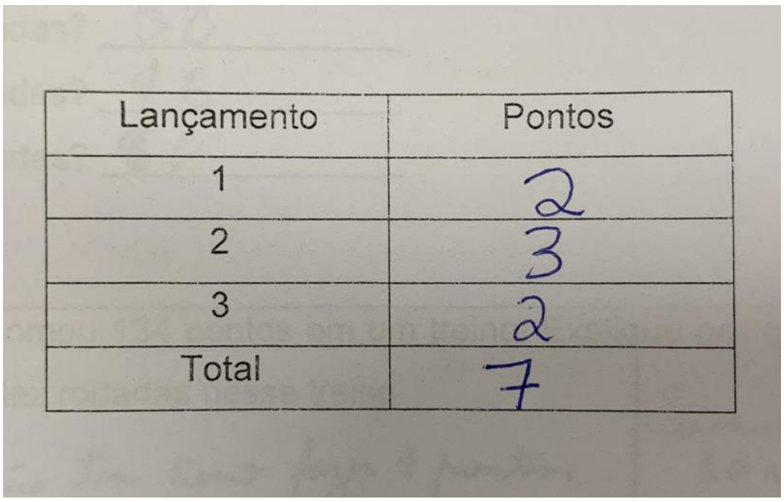
Pelo fato de os alunos terem uma boa participação com questionamentos e dúvidas, o tempo programado para esta ficha não foi suficiente, já que a segunda parte contava com o preenchimento de planilha e representação do gráfico com a utilização do Excel para smartphones. Para esta parte da ficha utilizamos mais uma aula de 50 minutos, onde o professor projetou a atividade (que consta no apêndice D) na televisão e os alunos em seus smartphones realizaram os comandos.

- 4ª Ficha de atividade (09/09) – Brincando com arco e flecha

Como proposta inicial da ficha, os alunos deveriam responder as perguntas individualmente, mas por pedido dos alunos e para melhor distribuição dos feijões, o professor pediu que os alunos se organizassem em trios.

Para começar fizemos a leitura do enunciado e o professor pediu que lessem as instruções das fichas para que preenchessem a primeira tabela. Como se tratava de uma atividade simples onde os alunos deveriam lançar os feijões no alvo e anotar suas respectivas pontuações da rodada, não tivemos questionamentos por parte dos alunos. A imagem abaixo mostra a tabela preenchida de um dos alunos depois de realizado os lançamentos:

Imagem 16: Tabela de um aluno da simulação dos lançamentos

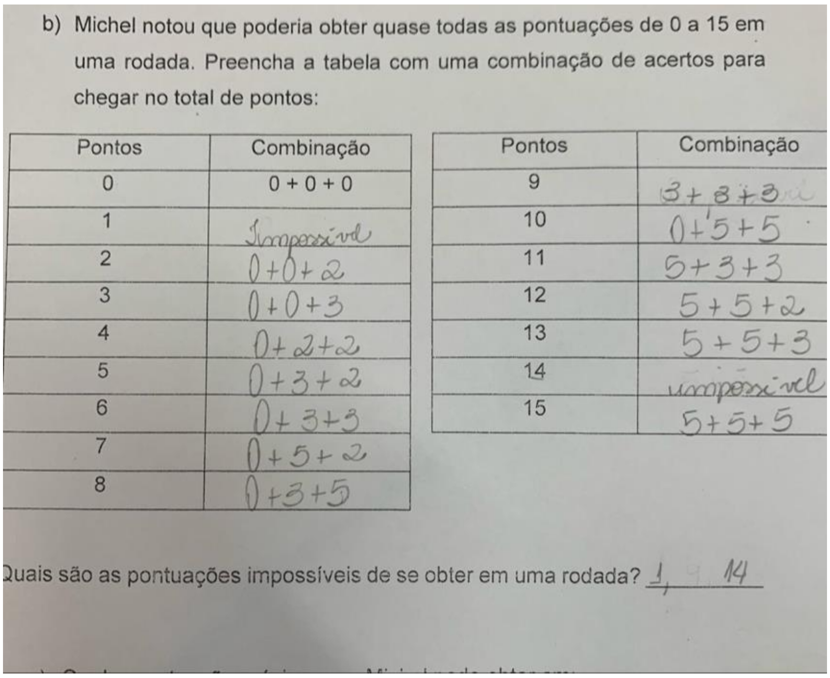


Lançamento	Pontos
1	2
2	3
3	2
Total	7

Fonte: Próprio autor

Depois de todos os alunos realizarem os lançamentos e o preenchimento da tabela, o item a) da ficha trazia a pergunta sobre a possibilidade de somar 11 pontos em uma rodada. Todos os alunos responderam que seria possível quando atingissem o alvo uma vez no número 5 e duas vezes no número 3, com exceção de um aluno que respondeu que deveria atingir o alvo uma vez no número 5 e três vezes no número 2, mas este aluno provavelmente esqueceu que cada rodada era composta de apenas 3 lançamentos. Para o item b), tínhamos um novo preenchimento de tabela com as possíveis pontuações de 0 até 15 pontos e suas respectivas combinações. Alguns alunos apresentaram dúvidas neste item e o professor intermediou explicando um exemplo na lousa. Segue abaixo a tabela de um dos alunos preenchida:

Imagem 17: Tabela de um aluno sobre as possíveis pontuações por rodada



b) Michel notou que poderia obter quase todas as pontuações de 0 a 15 em uma rodada. Preencha a tabela com uma combinação de acertos para chegar no total de pontos:

Pontos	Combinação
0	0 + 0 + 0
1	Impossível
2	0+0+2
3	0+0+3
4	0+2+2
5	0+3+2
6	0+3+3
7	0+5+2
8	0+3+5

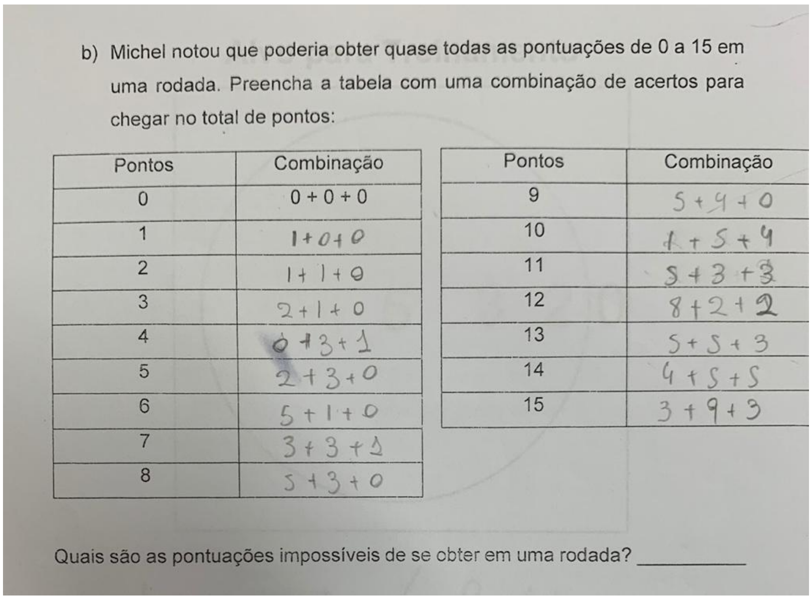
Pontos	Combinação
9	3+3+3
10	0+5+5
11	5+3+3
12	5+5+2
13	5+5+3
14	impossível
15	5+5+5

Quais são as pontuações impossíveis de se obter em uma rodada? 1, 14

Fonte: Próprio autor

Pela observação realizada no dia da aplicação e pela análise das fichas, pudemos constatar que um dos alunos não se atentou quais eram os números que estavam no alvo e por isso não acharam nenhuma pontuação impossível, como mostra a imagem a seguir:

Imagem 18: Tabela de um aluno sobre as possíveis pontuações por rodada



b) Michel notou que poderia obter quase todas as pontuações de 0 a 15 em uma rodada. Preencha a tabela com uma combinação de acertos para chegar no total de pontos:

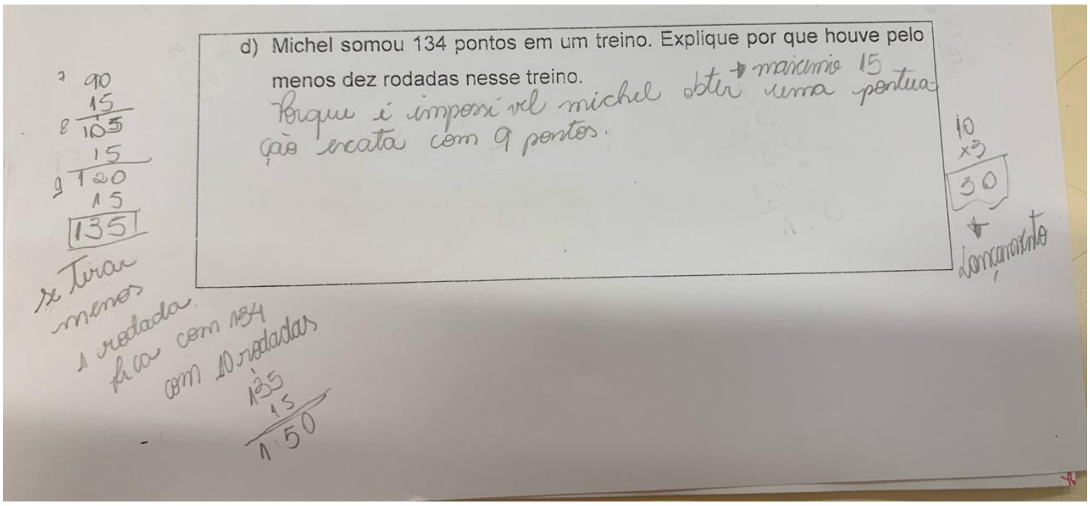
Pontos	Combinação	Pontos	Combinação
0	0 + 0 + 0	9	5 + 4 + 0
1	1 + 0 + 0	10	1 + 5 + 4
2	1 + 1 + 0	11	5 + 3 + 3
3	2 + 1 + 0	12	8 + 2 + 2
4	0 + 3 + 1	13	5 + 5 + 3
5	2 + 3 + 0	14	4 + 5 + 5
6	5 + 1 + 0	15	3 + 9 + 3
7	3 + 3 + 1		
8	5 + 3 + 0		

Quais são as pontuações impossíveis de se obter em uma rodada? __________

Fonte: Próprio autor

No item c), onde os alunos deveriam responder qual seria a pontuação máxima em função do número de rodadas jogadas, todos os alunos responderam corretamente, mesmo o aluno que não se atentou aos números do alvo no item anterior. No item d) que apresentava a principal pergunta do problema tivemos algumas dúvidas. Neste momento, os alunos conversaram bastante entre eles para conseguirem chegar em uma conclusão, principalmente porque o item pedia uma justificativa. A maioria dos alunos apresentava a resposta de que realmente seriam necessárias 10 rodadas para obtenção dos 134 pontos, porém tinham dificuldade na justificativa. Nesta hora o professor pediu que escrevessem com suas próprias palavras e que depois discutiríamos o porquê das 10 rodadas. Alguns alunos deixaram o item em branco, mas a maioria respondeu como mostra o exemplo a seguir:

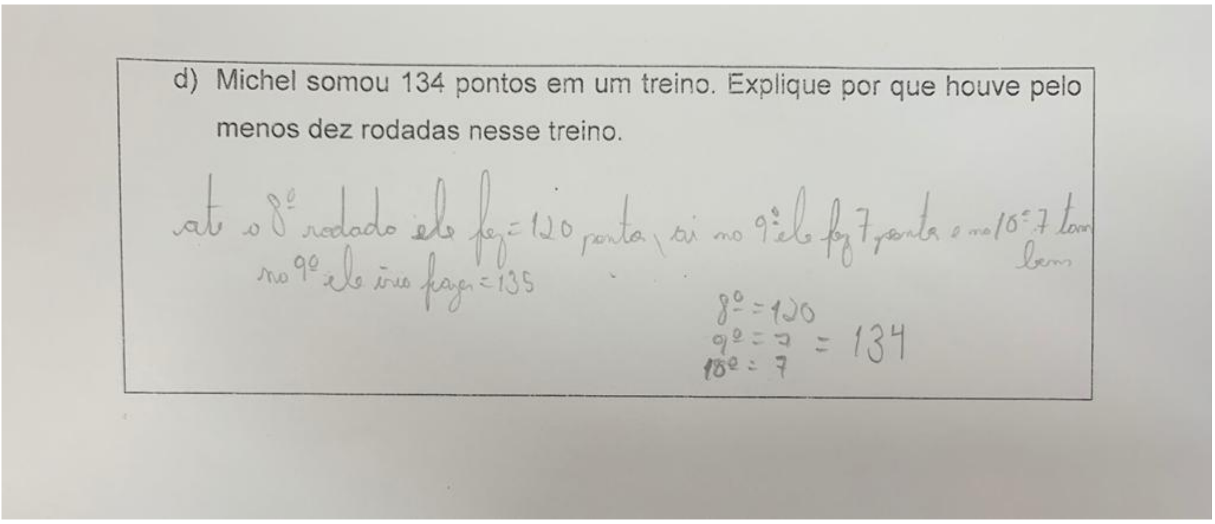
Imagem 19: Justificativa de um aluno sobre o item d) do problema do arco e flecha



Fonte: Próprio autor

Podemos perceber que no canto esquerdo da imagem anterior, o aluno realizou a soma das pontuações máximas por rodada. Pela justificativa do aluno podemos perceber que ele se atentou que com 9 rodadas obteria 135 pontos. O aluno justifica que não seria possível obter a pontuação exata com 9 “pontos” (provavelmente o aluno trocou a palavra ponto por rodada). Podemos notar na ficha de outro aluno que ele justifica que é possível obter 120 pontos com 8 rodadas e divide os 14 pontos restantes em duas rodadas de 7 pontos. O aluno não usa a justificativa de que é impossível fazer 14 pontos em uma rodada, mas pela resposta podemos notar que o aluno percebeu este fato:

Imagem 20: Justificativa de um aluno sobre o item d) do problema do arco e flecha



Fonte: Próprio autor

Fica a observação que o aluno provavelmente trocou o número 134 pelo 135.

Após todos os alunos terem respondido a atividade, fizemos uma socialização sobre as respostas de todos. Pelo que o professor observou, os alunos acharam que o problema era um dos mais fáceis apresentados até então, porém o item d) exigia um raciocínio lógico que eles não estavam acostumados, mas que acharam o problema muito legal. Para finalizar, o professor explicou que a proposta das atividades era despertar esse raciocínio e a criatividade de cada um.

- 5ª ficha de atividade (16/09) – Problema do Triângulo

Antes de começarmos a última ficha de atividades, foi pedido aos alunos que se organizassem em duplas. Como a ficha traz além do enunciado um exemplo de recorte dos triângulos, foi feita a leitura e explicação do problema com a projeção da atividade no televisor simultaneamente à utilização da lousa.

Depois de realizada toda explicação, os alunos começaram o recorte e dobradura dos triângulos para melhor entendimento da área sobreposta que o problema trazia.

Imagem 21: Alunos recortando os triângulos do problema

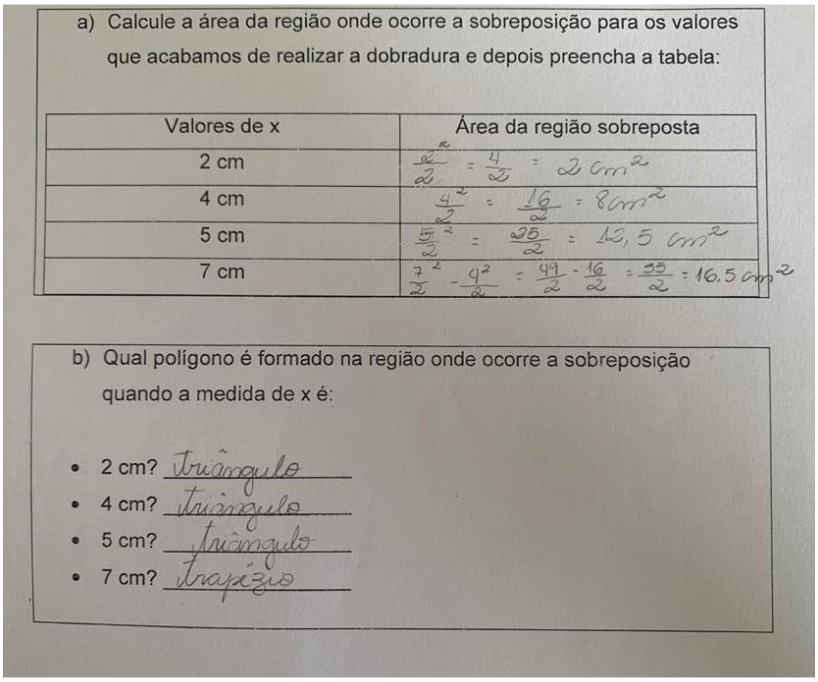
Fonte: Próprio autor

Imagem 22: Aluno pintando a área sobreposta do triângulo

Fonte: Próprio autor

Não houve dúvidas em relação a primeira parte do problema que tratava do recorte, dobradura e pintura das áreas sobrepostas. Como descrito anteriormente, o item a) pedia que os alunos calculassem a área das regiões sobrepostas. Alguns alunos logo lembraram do problema do caminho da formiga que tinha o cálculo de área de triângulos e perceberam que, por se tratar de um triângulo retângulo, sabiam que os catetos representavam a base e altura dos triângulos. Outros alunos também perceberam que a área da região sobreposta seria a metade da área de um quadrado de lado x. Portanto, os alunos não tiveram dificuldades para o cálculo da área da região para x = 2 cm, x = 4 cm e x = 5 cm. Mas para o valor de x = 7 cm, os alunos perceberam com a dobradura que a região sobreposta não era um triângulo, e as primeiras dúvidas surgiram. O professor deixou a sala a vontade para tentarem determinar a área do trapézio formado. Alguns alunos relataram ao professor qual seria o método para determinar a área do trapézio: *era pegar a área do triângulo maior e subtrair a área do triângulo menor que não fazia parte da região sobreposta*. Como era esperado na proposta do problema, os alunos estavam corretos porém encontraram dificuldades para determinar a área do triângulo que não fazia parte da região sobreposta. Nessa hora o professor teve que fazer uma intervenção com um desenho na lousa ao mesmo tempo que ia fazendo questionamento sobre as medidas dos triângulos. Com essa intervenção todas as duplas conseguiram entender como realizar o cálculo da área para x = 7 cm e completaram as seguintes tabelas dos itens a) e b):

Imagem 23: Item a) e b) de um aluno do problema do triângulo



a) Calcule a área da região onde ocorre a sobreposição para os valores que acabamos de realizar a dobradura e depois preencha a tabela:

Valores de x	Área da região sobreposta
2 cm	$\frac{2^2}{2} = \frac{4}{2} = 2\,cm^2$
4 cm	$\frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8cm^2$
5 cm	$\frac{5^2}{2} = \frac{25}{2} = 12,5\ cm^2$
7 cm	$\frac{7^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \frac{49}{2} - \frac{16}{2} = \frac{33}{2} = 16.5\,cm^2$

b) Qual polígono é formado na região onde ocorre a sobreposição quando a medida de x é:

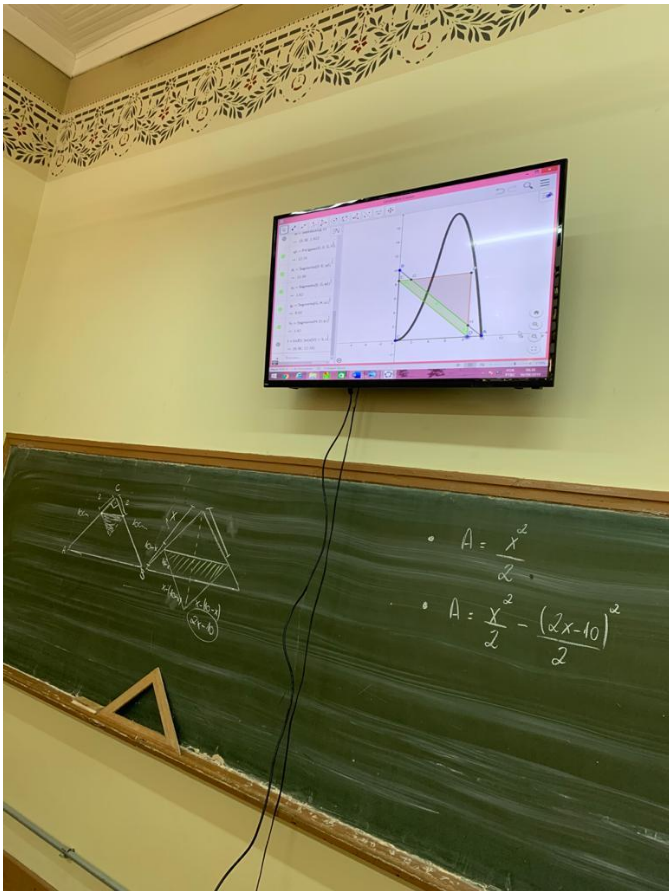
- 2 cm? triângulo
- 4 cm? triângulo
- 5 cm? triângulo
- 7 cm? trapézio

Fonte: Próprio autor

Para o item c) que tratava da fórmula para o cálculo das áreas das regiões sobrepostas, o professor também teve que fazer uma intervenção. Para o intervalo $0 \leq x \leq 5$ os alunos não tiveram dúvidas, pois lembraram que a área seria metade da área do quadrado de lado x. Já para o intervalo $5 \leq x \leq 10$, os alunos apresentaram dificuldade com a determinação da fórmula, mesmo entendendo o exemplo numérico anterior. O professor teve que utilizar a mesma estratégia de levantar questionamentos até os alunos construírem o conhecimento sobre a questão.

Para o segundo momento da atividade foi proposta a construção do gráfico que representaria a área da região sobreposta em função do número x medido no triângulo. Para isso os alunos utilizaram o GeoGebra para smartphones, enquanto o professor projetou os comandos na televisão.

Imagem 24: Projeção do Geogebra na televisão da sala de aula



Fonte: Próprio autor

4.2 Padrões observados

Antes de analisar a aplicação de todas as fichas podemos destacar uma primeira observação sobre o comportamento dos alunos. Como retratado anteriormente, os alunos se demonstraram empolgados para aplicação das atividades nas primeiras conversas e a execução dos exercícios superou as primeiras expectativas, pois além do compromisso de praticamente todos os alunos, tivemos formação de grupos produtivos, discussão envolvendo todos os membros dos grupos, mesmo os que apresentavam maior dificuldade na disciplina de matemática, e uma boa autonomia em relação a tentativa de realizar as atividades antes de pedir ajuda do professor. Como descrito anteriormente, os alunos tiveram maturidade o suficiente para formar grupos escolhendo o critério de afinidade, mas com o compromisso de realização e discussão das atividades.

Vale ressaltar que a equipe gestora deu a importância devida ao trabalho e sua aplicação, conscientizando os alunos para realização de uma proposta diferenciada e por consequência algo que poderia trazer uma melhora nos índices da escola. Podemos afirmar que o trabalho realizado antes da aplicação das fichas foi um dos fatores predominantes para o bom andamento das atividades.

Podemos fazer outra observação em relação aos problemas da OBMEP. O histórico de participação dos nossos alunos na 2ª fase caiu drasticamente nos últimos anos, e muitos usam a justificativa de ser uma prova fora da realidade no que diz respeito ao raciocínio lógico da maioria. Quando começamos a realização das atividades, um dos primeiros apontamentos feitos pelos alunos, é que as questões eram mais bem elaboradas e mais prazerosas de praticar quando comparadas com os exercícios dos livros e apostilas.

4.3 Discussões

Antes da aplicação das atividades criamos um critério de dificuldade quando comparamos os exercícios propostos, levando em consideração o nível de aprendizagem da sala em que o trabalho foi realizado. Por se tratar de um problema de primeira fase, o problema da divisão das bananas comprovou nossas expectativas. Os alunos não precisaram de muito tempo para a realização. Houve interação entre todos os membros dos grupos, utilizaram o material concreto como a proposta pedia e todos os alunos conseguiram chegar na resposta correta. A questão dividida em itens direcionou os alunos para a divisão correta das bananas e gerou uma atividade mais completa, do que simplesmente apresentar uma boa questão para os alunos.

Era esperado que para o problema do caminho da formiga precisaríamos de mais tempo e o problema poderia gerar algumas dúvidas. Na primeira parte do problema que envolvia o desenho do triângulo e o cálculo de áreas, a maioria dos alunos conseguiu realizar bem, mas fica a observação dos alunos que não conseguiram relacionar a base e altura dos triângulos formados, o que desencadeou erros nos próximos itens, principalmente no item que pedia para esboçar o gráfico. A questão foi bem aceita pelos alunos, pois envolvia conteúdos vistos no bimestre de aplicação do trabalho. Para a segunda parte da atividade, onde os alunos deveriam usar o GeoGebra para smartphones, podemos relatar que mesmo os alunos seguindo o passo a passo projetado na televisão e o professor realizando a atividade ao mesmo tempo, foi a parte da atividade que demandou mais tempo, pois foi o momento que os alunos mais se dispersaram, principalmente quando alguém realizava algum comando errado e o professor tinha que intervir. Por outro lado, o uso do GeoGebra foi muito bem aceito por parte dos alunos, pois segundo relato deles conseguiram “enxergar” melhor o que tinham feito na atividade de papel. Os alunos que erraram o cálculo das áreas e o esboço do gráfico comentaram no mesmo momento em que visualizaram o gráfico no GeoGebra sobre os seus erros. Com todas as observações realizadas podemos classificar de forma positiva a elaboração e realização da ficha do caminho da formiga.

No exercício dos ingressos do grêmio, o tempo para aplicação não foi suficiente como já descrevemos. Utilizamos uma boa parte do tempo de aula para entendimento do enunciado e realização da simulação de venda dos ingressos envolvendo os alunos presentes em sala. Além disso, boa parte da ficha contava com uma aula expositiva para lembrar alguns conceitos de soma dos termos de uma progressão aritmética. Apesar de ser uma atividade onde o professor foi mais presente na realização, os alunos interagiram e participaram bastante. A segunda parte da atividade que envolvia o uso do Excel para celulares também foi bem aceita pelos alunos. Muitos disseram que já tiveram algum contato com o aplicativo, mas nem imaginavam que era possível construir gráficos a partir de fórmulas matemáticas desenvolvidas nas planilhas. Pela experiência que tivemos fica a sugestão de melhor organização do tempo de realização das fichas em uma aplicação futura.

Podemos comparar o nível de dificuldade da atividade do arco e flecha com o exercício da divisão das bananas. Apesar de ser um exercício de segunda fase da OBMEP, os alunos não demoraram muito tempo para entender a proposta do problema. Observamos que o preenchimento da tabela com as possibilidades de pontuações por rodada foi muito importante na construção do entendimento do problema. Em nossa experiência com esses alunos fica registrado a dificuldade em justificar um item desse tipo de questão. Muitos alunos conseguiram visualizar o porquê precisariam de pelo menos 10 rodadas para obter os 134 pontos, porém apresentavam certa resistência em escrever a justificativa no papel. Esse tipo de item nos mostra a importância da escrita matemática como justificativa de resposta.

A quinta e última ficha nos apresentou algo que já esperávamos: uma certa familiaridade com esse tipo de exercício. Apesar de ser a atividade final, os alunos demonstraram a mesma empolgação que tiveram no primeiro exercício. O uso de recorte e dobradura dos triângulos deu um bom direcionamento para a resolução do problema. Como dito anteriormente, os alunos apresentaram dificuldade no cálculo da área da região sobreposta quando x = 7 cm e na determinação de fórmulas, mas depois da intervenção do professor tivemos um bom andamento das atividades. A proposta da utilização do GeoGebra para a construção do gráfico foi bem aceita novamente pelos alunos. Como nas outras atividades que envolviam o uso de celular percebemos que a dispersão é um pouco maior. Não pelo uso do celular em si, mas pela ansiedade em querer fazer os comandos de forma correta juntamente com o professor. O tempo de aplicação do problema e a atividade do GeoGebra foi suficiente.

Fazendo uma análise geral de todas as fichas é notório que esses alunos se empenharam na realização das atividades e para isso podemos destacar algumas justificativas relatadas pelos próprios alunos: trabalho em grupo de forma organizada, fichas de atividade que direcionam para a solução do problema e o uso de celulares em sala de aula para atividades. Esta última justificativa serviu até de reflexão para os próprios alunos em relação ao uso exagerado do celular nas aulas. A escola onde o trabalho foi aplicado adota a política de tolerância zero para o uso de celular durante as aulas, com exceção de atividades pedagógicas que envolvam o aparelho. Os alunos concordam que o uso adequado do celular nas aulas da uma maior concentração e por diversas vezes esquecem dos aplicativos que mais usam, como as redes sociais.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como projeção inicial do trabalho, um dos objetivos era a utilização de um instrumento de aprendizagem para tentativa de melhoria dos índices da escola. A nota desses índices é divulgada no ano posterior ao da realização do Saresp e, portanto, um dos resultados que esperamos ainda ficará vago, podendo ser mostrado em um trabalho futuro.

Em contrapartida, a realização deste trabalho também se deu para fornecer um material diferenciado com exercícios da OBMEP com o intuito de despertar o raciocínio lógico e a criatividade dos alunos da escola. Podemos concluir que esse objetivo foi alcançado uma vez que tivemos a participação efetiva de todos alunos, mesmo aqueles que se auto intitularam como limitados na disciplina de matemática. Além da criatividade dos alunos, o trabalho se fez importante para a estratégia de trabalho em grupo pouco utilizada antes nas aulas. Isso tudo sem comprometer o andamento e cronograma das atividades.

No planejamento inicial da escola, o corpo docente junto com a equipe gestora firmaram o comprometimento de criação ou utilização de métodos educacionais diferenciados com o objetivo de melhoras nos índices dos últimos anos. Portanto a criação e aplicação das fichas de atividades serviram de apoio ao um dos itens do plano de melhoria da escola discutido no início do ano letivo.

Quando falamos das fichas de atividades, vale ressaltar que as cinco foram traçadas com o propósito de o aluno realizá-las de forma independente para que ele ou seu grupo seja o protagonista do aprendizado. Na descrição da aplicação dessas atividades percebemos que nem sempre foi possível de o aluno ter total autonomia para concretizar os exercícios e isso já era esperado, pois fazia parte da nossa metodologia de trabalho. Por outro lado, os alunos entenderam a proposta e só pediram a intervenção do professor quando realmente achavam que não seria possível ou buscavam uma dica para chegar à resposta final.

Pela experiência do professor, o uso de celulares em sala foi uma boa saída para o desenvolvimento de atividades que envolviam o uso de recursos tecnológicos. Em outras ocasiões, o professor já utilizava a sala de informática para tarefas que envolviam o uso destes recursos. Alguns dos problemas observados ao longo dos anos é que os computadores demoravam a ligar, a escola não contava com máquinas suficiente para todos os alunos, o layout da sala não favorece o acompanhamento do professor nas atividades e faltava um projetor para o professor instruir os alunos com os comandos. Já com o uso do celular vimos vantagens como: praticamente todos os alunos tinham o aparelho com os aplicativos instalados e a facilidade e rapidez no acesso tomaram menos tempo para organização das aulas. Mas o principal ponto a destacar foi a conscientização do uso do celular como instrumento de aprendizagem, já que foi um trabalho compartilhado com todo o corpo docente. Os próprios alunos envolvidos com as atividades relataram que precisam usar menos o celular para uma melhor concentração nas aulas, mas que seria muito válido se mais atividades envolvessem tal instrumento que se faz presente na vida de muitas pessoas.

6. REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P. **Educação Matemática na Era Digital**. Unión, San Cristobal de La Laguna, v. 27, p. 14-28, 2011

ALMOULOUD, Saddo Ag., COUTINHO, Cileda Q. S., **Engenharia Didática**: *características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19* / ANPEd - REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

ARTIGUE, M. (1988): **"Ingénierie Didactique". Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

BOERI, Camila N., VIONE, Márcio T. **Abordagens em Educação Matemática** – 2009

CAETANO, Paulo A. S., **Funções elementares: módulo II** / Paulo Antonio Silvani Caetano, Roberto Ribeiro Paterlini. – Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013. – (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio)

CANAVARRO, Ana P., **Ensino exploratório da Matemática**: *Práticas e desafios* – Disponível em < https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf>, Acesso em: 13 out. 2019.

D'AMBROSIO , Ubiratan. **Educação Matemática**: *Uma Visão do Estado da Arte* – Pro-Posições Vol. 4 nº 1 [10] – março de 1993.

FIORENTINI, Dario**. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil**. ZETETIKÉ. Campinas: UNICAMP, ano 3, n. 4, 1-36 p., 1995.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas** – 4. ed ver. e ampl. – São Paulo: Editora Livraria de Física, 2010.

GIRALDO, Victor., CAETANO, Paulo A. S., MATTOS, Francisco R. P. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. SBM 1ª ed., 2013.

IDESP – **Resultados do Idesp 2018**. Disponível em < http://idesp.edunet.sp.gov.br/> Acesso em: 15 jul. 2019.

INEP – **Resultados do Saeb 2017**. Disponível em < https://medium.com/@inep/resultados-do-saeb-2017-f471ec72168d> Acesso em: 15 jul. 2019.

OBMEP – **Banco de Questões da OBMEP**. Disponível em <http://www.obmep.org.br/provas.htm> Acesso em: 15 jun. 2019

BRASIL, PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS - **Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática**. Ministério da Educação e do Desporto - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: 1998.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação - **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação**; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo : SE, 2011.72 p.

7. APÊNDICES

Apêndice A - Apresentação

Caro aluno,

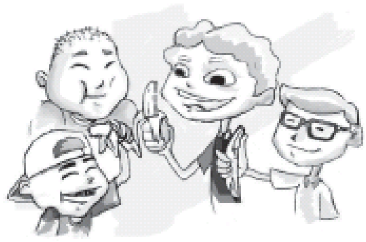
Em algumas aulas deste bimestre, realizaremos atividades com questões da OBMEP (Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) de uma forma um pouco diferenciada. Utilizaremos fichas de atividades como base na resolução de questões que muitas vezes são consideradas difíceis. No decorrer destas atividades, realizaremos trabalhos em grupos e individualmente, abrangendo alguns conteúdos matemáticos vistos até a 3ª série do Ensino Médio. Um outro objetivo destas atividades é a coleta de dados para o trabalho final de mestrado (PROFMAT - UFSCar) do Professor João Paulo. Por isso, a sua colaboração na resolução das atividades é muito importante. Seguem algumas instruções:

- Para as atividades em grupo, realizem uma discussão envolvendo todos os integrantes do grupo. Cada aluno tem uma maneira de pensar, e toda ajuda é importante.
- Para uma mesma atividade, podem existir caminhos diferentes de resolução para chegar em um mesmo resultado, por isso, use a sua criatividade e raciocínio sem moderação.
- Como estas fichas servem para a coleta de dados de um trabalho, toda anotação é muito importante. Tentem não deixar nenhuma atividade em branco e não se preocupem em apagar depois de pronta.

Vamos lá?

Apêndice B - Ficha de Atividade nº 1 – O problema das bananas

Para esta atividade, formem grupos de 4 alunos. Façam a leitura do problema com atenção e utilizem os espaços para responder.



Saci, Jeca, Tatu e Pacu comeram 52 bananas. Ninguém ficou sem comer e Saci comeu mais que cada um dos outros. Jeca e Tatu comeram ao todo 33 bananas, sendo que Jeca comeu mais que Tatu. Quantas bananas comeu cada um dos meninos?

Para auxiliar nesta atividade, cada grupo receberá um saquinho contendo 52 feijões. Antes de iniciar, contem o número de feijões do saquinhho. Utilizem os feijões para simularem a distribuição das bananas. Tudo ok? Vamos continuar.

a) Para facilitar, cada integrante do grupo será responsável por um personagem do problema. Para isso, preencha a tabela a seguir com o nome do aluno do seu respectivo personagem:

Personagem	Aluno
Saci	
Jeca	
Tatu	
Pacu	

b) Com base nas informações do problema, responda:

- Pelo menos quantas bananas cada um dos meninos comeu? ______________________________
- Quem comeu mais bananas? ________
- Quantas bananas Jeca e Tatu comeram juntos? ____________________________________
- Entre Jeca e Tatu, quem comeu mais? __________
- Quantas bananas Saci e Pacu comeram juntos? ____________________________________
- Quantas bananas Saci comeu no máximo? __________

c) Utilizando os feijões, simulem a repartição de bananas entre Jeca e Tatu. Depois preencham a tabela abaixo com os valores que encontraram. Exemplo: Jeca comeu 32 e Tatu comeu 1, pois 32 + 1 = 33.

Jeca	Tatu

Jeca	Tatu

d) Agora, da mesma maneira do item anterior, escreva todas as possibilidades de distribuição das bananas entre Saci e Pacu:

Saci	Pacu

Saci	Pacu

e) Com base nos itens anteriores, qual o número exato de bananas que cada um dos meninos comeu?

Para finalizar, vamos fazer uma interação entre os grupos. Cada grupo escolhe um integrante para dizer qual foi o resultado obtido, como o grupo chegou no resultado, quais foram as suas estratégias e se tiveram alguma dificuldade.

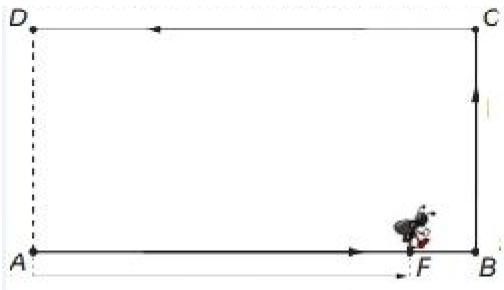
Resposta do problema:

Como Jeca e Tatu comeram juntos 33 bananas, concluímos que Saci e Pacu comeram juntos 52 – 33 = 19 bananas. Como Saci foi quem mais comeu e Pacu comeu pelo menos 1 banana, Saci comeu no máximo 19 – 1 = 18 bananas. Portanto, Jeca comeu no máximo 17 bananas e, como Jeca comeu mais que Tatu, concluímos que Tatu comeu no máximo 16 bananas. Como 33 = 17 + 16, não é possível que Jeca tenha comido menos que 17 ou Tatu menos que 16 bananas. Vemos assim que Jeca comeu 17 bananas e Tatu comeu 16 bananas; além disso, Saci comeu 18 bananas e sobrou apenas 1 banana para o Pacu.

Apêndice C - Ficha de atividade nº 2 – O caminho da formiga

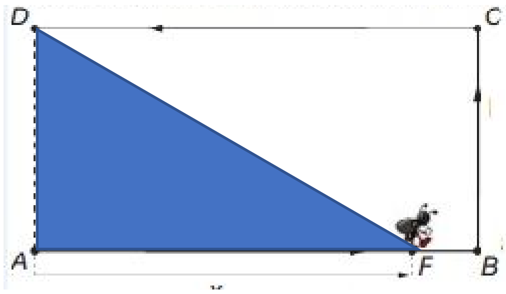
Para esta ficha, resolveremos as atividades de forma individual.

Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar x centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.



x

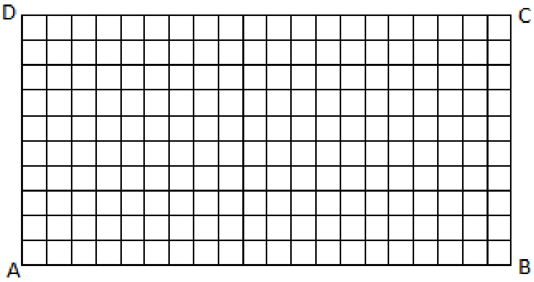
a) Suponha que a formiga andou x = 16 cm partindo do ponto A. A área do triângulo ADF pode ser representada conforme a figura abaixo:



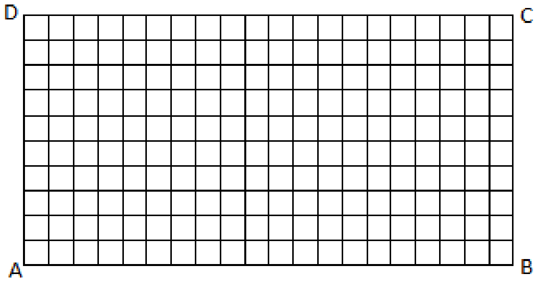
16 cm

Inicialmente, você deve desenhar e pintar em cada quadriculado abaixo o triângulo correspondente à distância x percorrida pela formiga:

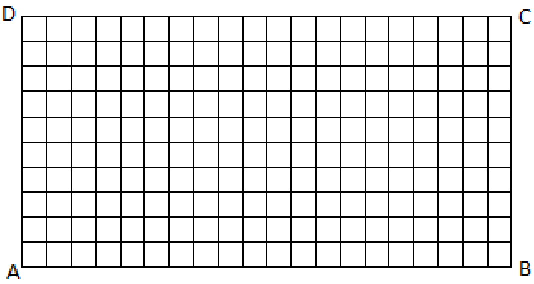
- x = 5 cm



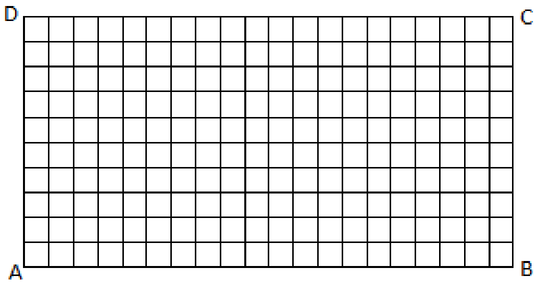
- x = 25 cm



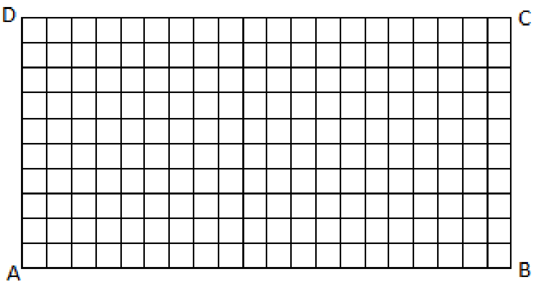
- x = 10 cm



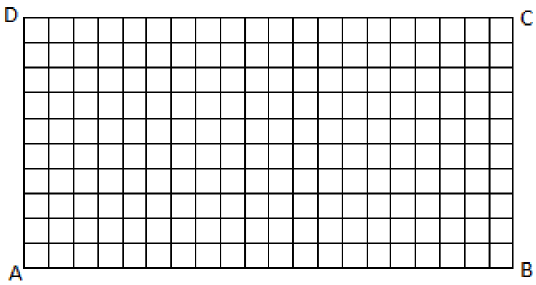
- x = 26 cm



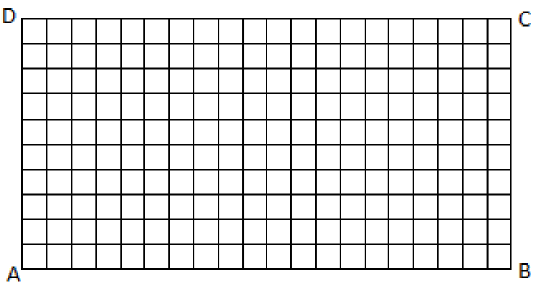
- x = 20 cm



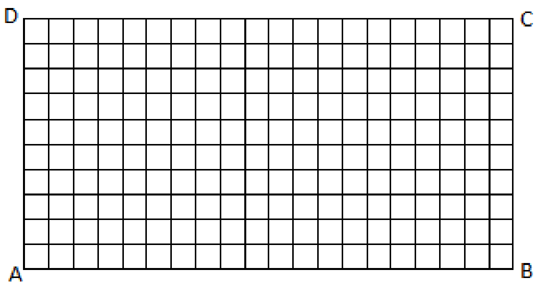
- x = 30 cm



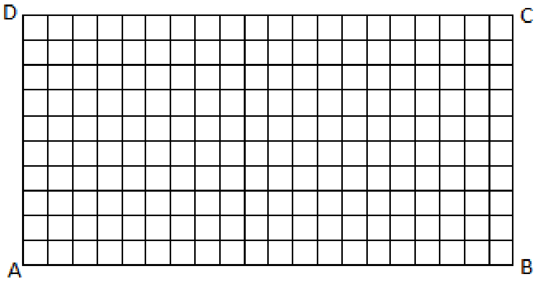
- x = 24 cm



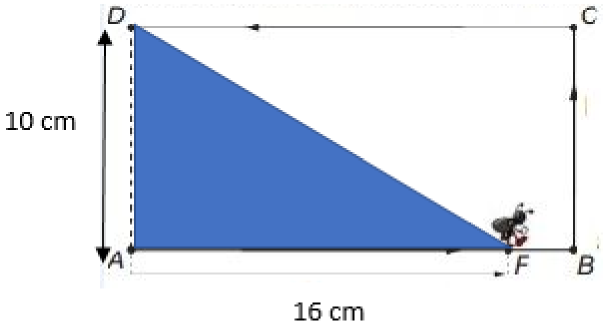
- x = 40 cm



- x = 45 cm



b) Agora, vamos falar sobre o cálculo das áreas dos triângulos formados. No exemplo em que a formiga caminhou x = 16 cm, temos:



$$\text{Área (ADF)} = \frac{10\ cm\ x\ 16\ cm}{2} = 80\ cm^2$$

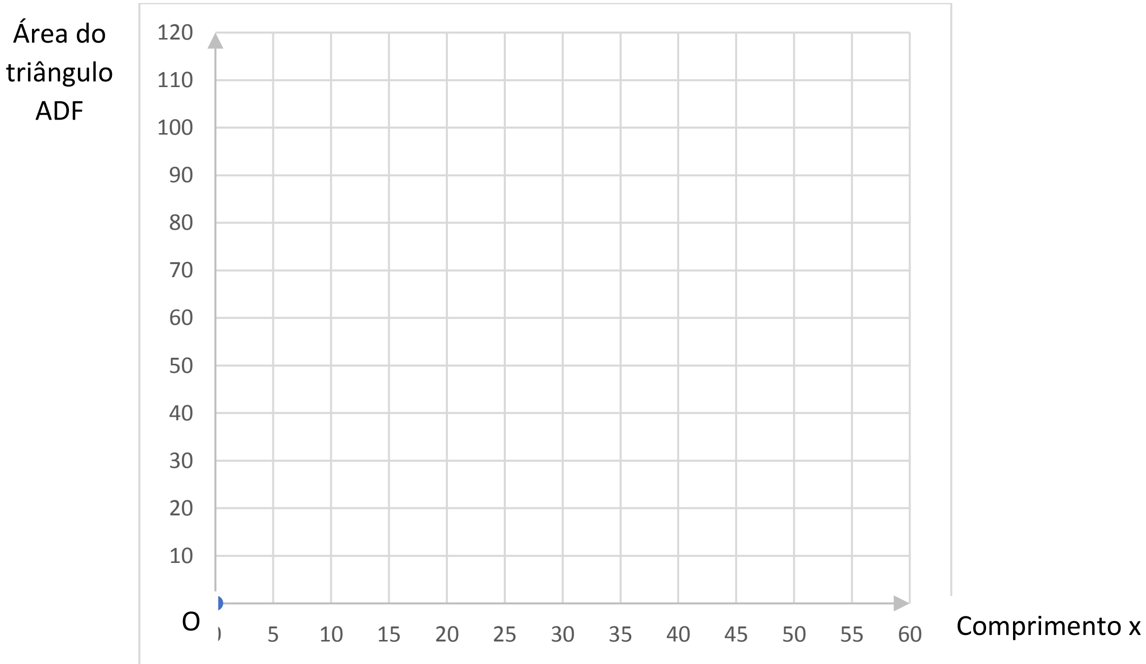
Da mesma maneira, determine a área dos triângulos ADF que você construiu no item anterior. Utilize o espaço abaixo para realizar os cálculos necessários:

Preencha a tabela abaixo, com os valores das áreas dos triângulos que você encontrou:

Caminho da Formiga	Área do Triângulo ADF
5 cm	
10 cm	
20 cm	
24 cm	
25 cm	
30 cm	
40 cm	
45 cm	

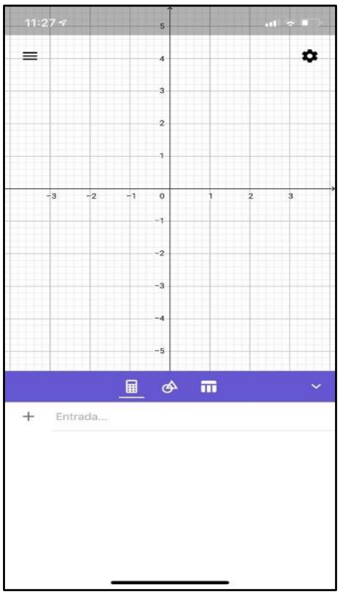
c) Você acha que existe uma área máxima para os triângulos ADF formados a partir do comprimento x que a formiga anda? Qual seria o valor dessa área?

d) Esboce no plano cartesiano Oxy, o gráfico da função que associa ao comprimento x o valor da área do triângulo ADF. Para isso, marque todos os pontos que relacionam o caminho da formiga e a área do triângulo. Depois faça o gráfico da área do triângulo ADF em função do comprimento x.

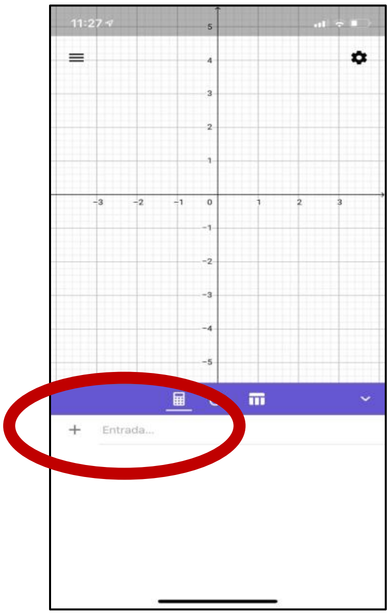


Construção do gráfico com o *Geogebra*

1 – Abra o aplicativo *Geogebra (Graping Calc)* em seu smartphone.

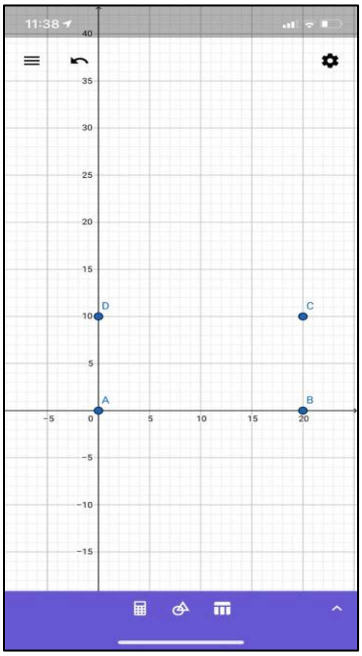


2 – Para digitar os comandos, utilize o campo "Entrada"

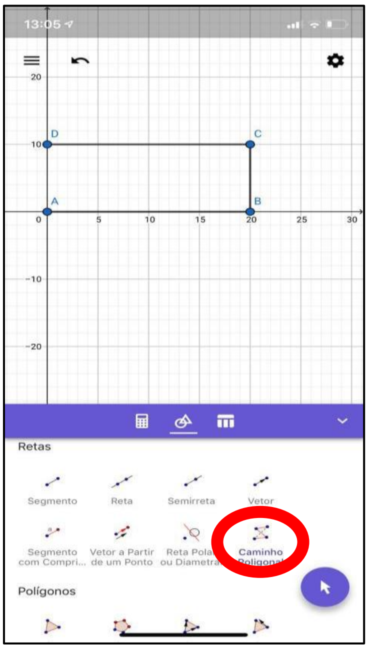


3 – No campo "Entrada", digite: *(0, 0)*. Depois disso, toque na tecla "enter"

4 – Faça o mesmo para os pares ordenados (20, 0), (20, 10) e (0, 10).

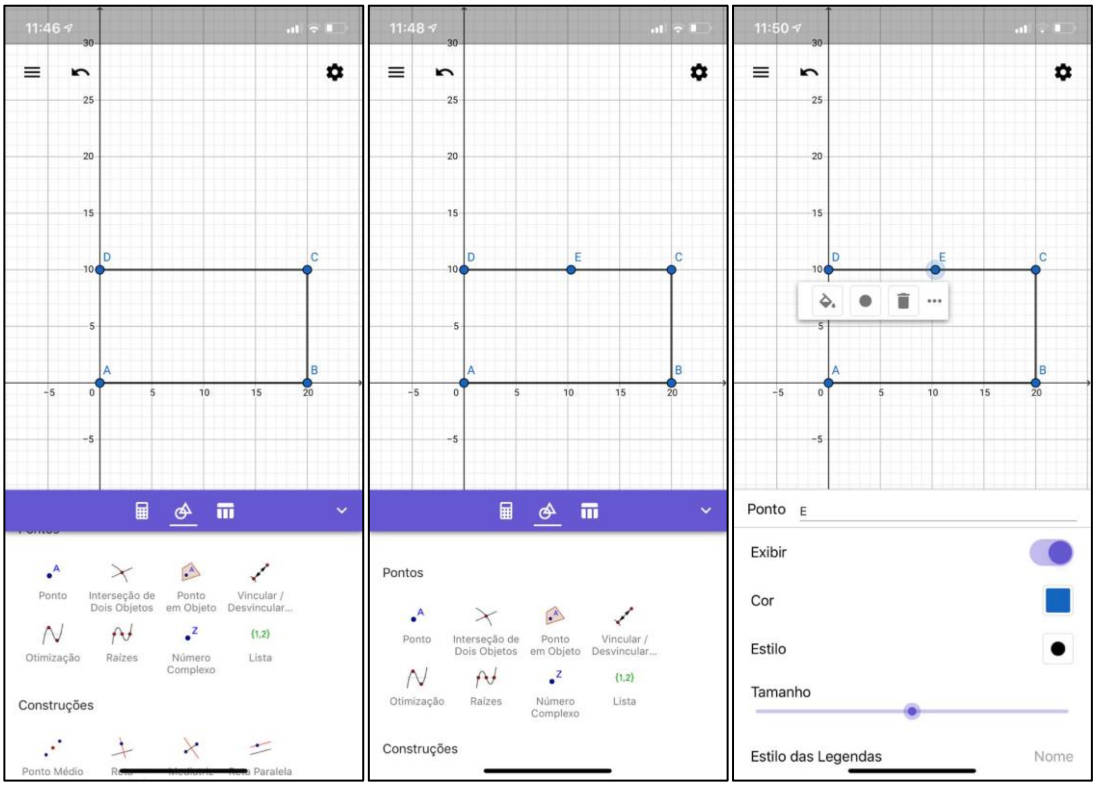


5 – Agora que foram criados os pontos A, B, C e D, vamos construir o retângulo ABCD. Para isso, selecione a ferramenta “Caminho Poligonal” e toque em cima dos pontos A, B, C, D e A da figura nesta ordem.

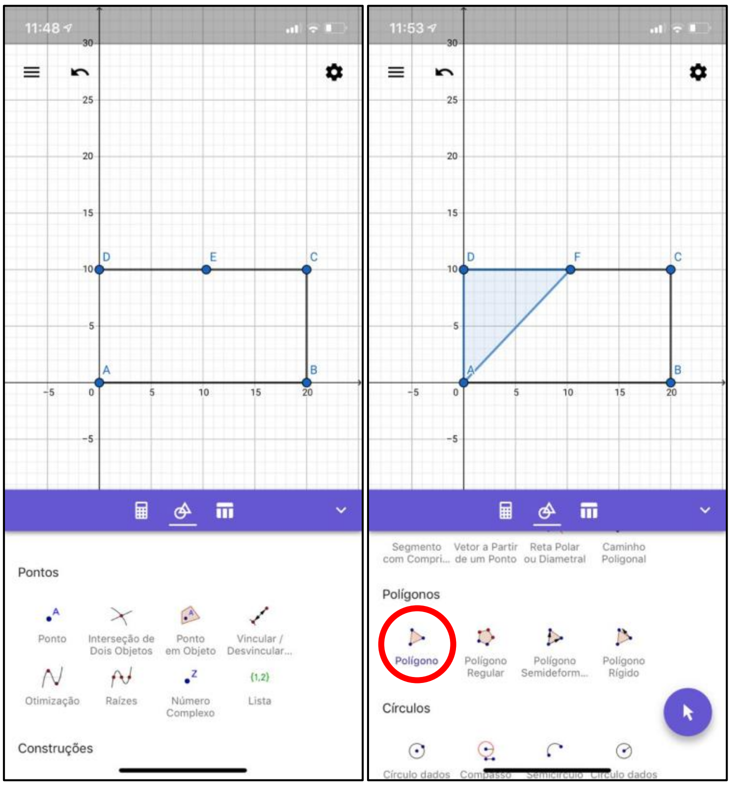


6 – Vamos projetar o ponto “F” que representa o caminho que a formiga faz no problema. Para isso, selecione a ferramenta “Ponto em objeto” e toque em cima de uma das arestas do retângulo ABCD. Veja que foi criado um ponto “E”. Para

renomear, toque em cima do ponto E e segure. Toque nas reticências e renomeie o ponto para “F”.



7 – Agora, vamos construir o triângulo ADF. Selecione a ferramenta “Polígono” e toque nos pontos A, D, F e A novamente.



9 – Vamos criar três segmentos que representarão o caminho que a formiga realiza. Um segmento passando por A e B, outro por B e C e outro por C e D. No campo entrada, digite cada um dos comandos abaixo e depois pressione enter:

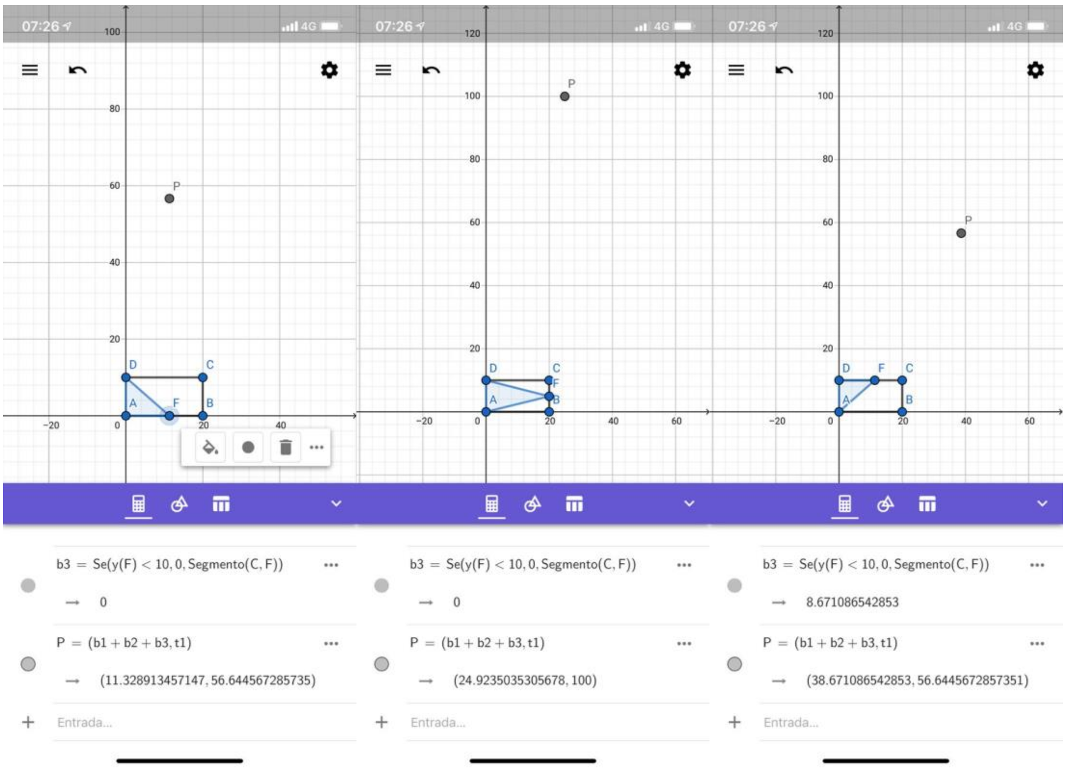
- *b1=Se(y(F)>0,20,segmento(A,F))*
- *b2=Se(y(F)==0,0,se(y(F)≥10,10,segmento(B,F))*
- *b3=Se(y(F)<10,0,segmento(C,F))*

Aparentemente, você não irá notar nenhuma mudança no gráfico. As mudanças irão acontecer à medida que movermos o ponto F.

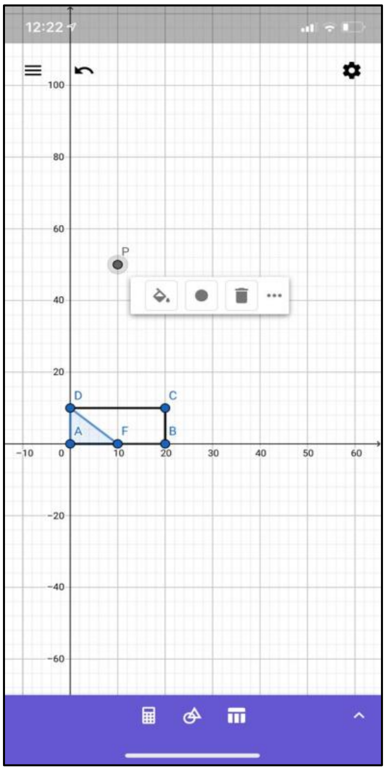
10 – Agora, vamos criar o ponto P, que representará a área do triângulo ADF em função do caminho da formiga. Para isso, digite o comando abaixo no campo "Entrada":

- *P= (b1+b2+b3,t1)*

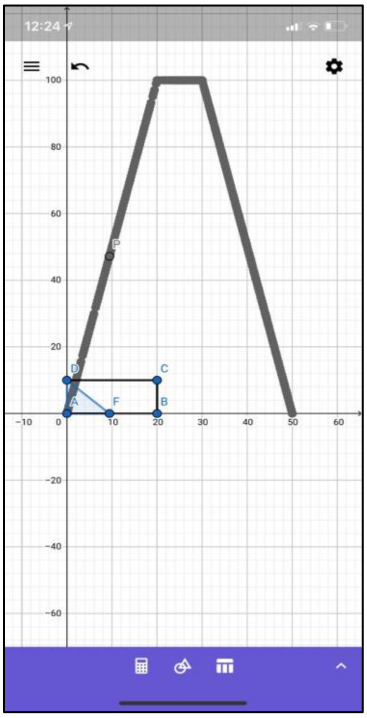
Note que quando o ponto F se move, o ponto P também se move.



11 – Para finalizar a visualização do gráfico que fizemos na ficha de atividade, vamos exibir o rastro do ponto P. Para fazer isso, toque em cima do ponto P, segure, clique nas reticências e selecione a opção “Exibir Rastro”.



12 – Agora, basta mover o ponto F sobre o retângulo (vai e volta) e visualizar o gráfico.



Apêndice D - Ficha de atividades nº 3 – Os ingressos do Grêmio

O Grêmio Estudantil de Taperoá vai dar uma festa, vendendo ingressos a R$ 6,00. Para estimular a compra antecipada de ingressos, os diretores do Grêmio decidiram que:

- Os ingressos serão numerados a partir do número 1 e vendidos obedecendo à ordem crescente de sua numeração;
- Ao final da festa, cada participante receberá R$ 0,01 para cada ingresso vendido que tenha um número maior que o número do seu ingresso.

Para começar, faremos uma simulação envolvendo todos alunos da sala, de como seria realizada a venda desses ingressos. Seguindo as instruções do problema, cada aluno "comprará" um ingresso no valor de R$ 6,00 e o número do ingresso seguirá a ordem de chamada. Para isso, vamos considerar apenas os alunos presentes. Exemplo: O aluno nº 1 compra o ingresso nº 1, o aluno nº 2 faltou, o aluno nº 3 compra o ingresso nº 2 e assim por diante.

Depois de feita a simulação, formem duplas e vamos responder algumas perguntas juntos. Vamos lá?

- Quantos ingressos foram vendidos? ______________
- Quantos reais foram arrecadados pelo Grêmio? __________
- Após o final da festa, quantos reais foram devolvidos ao aluno que comprou o ingresso nº 1? E para o que comprou o ingresso nº 10?______________________________________
- No total, quantos reais foram devolvidos pelo Grêmio? __________
- Considerando o lucro como a diferença entre o total arrecadado e o dinheiro devolvido após o final da festa, qual foi o lucro do Grêmio nessa simulação de venda?_________

Com base no enunciado e das respostas da encenação, responda as perguntas a seguir:

c) Se forem vendidos 100 ingressos, quanto vai receber, ao final da festa, a pessoa que comprou o ingresso com o número 1? E a que comprou o ingresso com o número 70?

Seguindo as instruções do problema, podemos perceber que é vantagem comprar o ingresso de forma antecipada. O aluno que compra o ingresso nº 1, recebe R$ 0,01 de volta para cada ingresso vendido com um número maior que o seu. Por exemplo, se forem vendidos 200 ingressos, o Grêmio arrecadará 200 . R$ 6,00 = R$ 1200,00 e o aluno que comprou o ingresso nº 1, receberá de volta 199 . R$ 0,01 = R$ 1,99. Já o aluno que comprou o ingresso nº 2, receberá de volta 198 . R$ 0,01 = R$ 1,98 de volta e assim por diante. Continuando com o exemplo de 200 ingressos, se quisermos determinar o total que o Grêmio terá que devolver, precisaremos realizar a seguinte soma:

$$S = 1{,}99 + 1{,}98 + 1{,}97 + \ldots + 0{,}02 + 0{,}01$$

Vale lembrar, que o aluno que comprou o ingresso nº 200, não recebe nada de volta, ou seja, apenas 199 alunos receberão “troco”. Para fazer a soma acima, observe que:

$$S = 1{,}99 + 1{,}98 + 1{,}97 + \ldots + 0{,}02 + 0{,}01$$

$$S = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + \ldots + 1{,}98 + 1{,}99$$

Somando ambos os lados da igualdade na vertical, vamos obter:

$$S + S = (1{,}99 + 0{,}01) + (1{,}98 + 0{,}02) + \ldots + (0{,}01 + 1{,}99)$$

$$2S = 2{,}00 + 2{,}00 + \ldots + 2{,}00 = 199 \times 2{,}00 = 398$$

$$S = \frac{398}{2} = 199$$

Logo, R$ 199,00 será o valor que o Grêmio terá que devolver. Como o Grêmio arrecadou R$ 1200,00, o seu lucro será dado pela diferença entre o valor arrecadado e o valor devolvido. Logo:

$$Lucro = R\$\,1200{,}00 - R\$\,199{,}00 = R\$\,1001{,}00$$

Agora responda:

d) Qual será o lucro do Grêmio, se forem vendidos:

- 500 ingressos?

- 600 ingressos?

- 700 ingressos?

e) Se forem vendidos 601 ingressos, quanto receberá de volta o aluno que comprou o ingresso nº 1? Podemos afirmar que existe um lucro máximo que o Grêmio poderá obter? Justifique sua resposta.

f) Para determinarmos a quantidade de ingressos que precisa ser vendida para o Grêmio obter o lucro máximo, primeiramente precisamos descobrir a fórmula supondo que foram vendidos $\boldsymbol{n}$ ingressos. Vamos determinar:

Para começar, sabemos que o Grêmio vende cada ingresso por R$ 6,00, portanto irá arrecadar $6n$ reais se forem vendidos n ingressos. Sabemos também que ao final da festa, o Grêmio terá que devolver:

$$D = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \ldots + \frac{(n-1)}{100}$$

Da mesma forma como foi feito para calcular a soma S, temos:

$$D = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \ldots + \frac{(n-1)}{100}$$

$$D = \frac{n-1}{100} + \frac{n-2}{100} + \frac{n-3}{100} + \ldots + \frac{1}{100}$$

$$2D = \underbrace{\frac{n}{100} + \frac{n}{100} + \frac{n}{100} + \ldots + \frac{n}{100}}_{n-1\ parcelas}$$

$$2D = (n-1)\ \frac{n}{100}$$

$$D = \frac{n\ (n\ -1)}{200} = \frac{n^2\ -\ n}{200}$$

Como o lucro é calculado pela diferença entre o dinheiro arrecadado e o dinheiro devolvido, podemos escrever o lucro por:

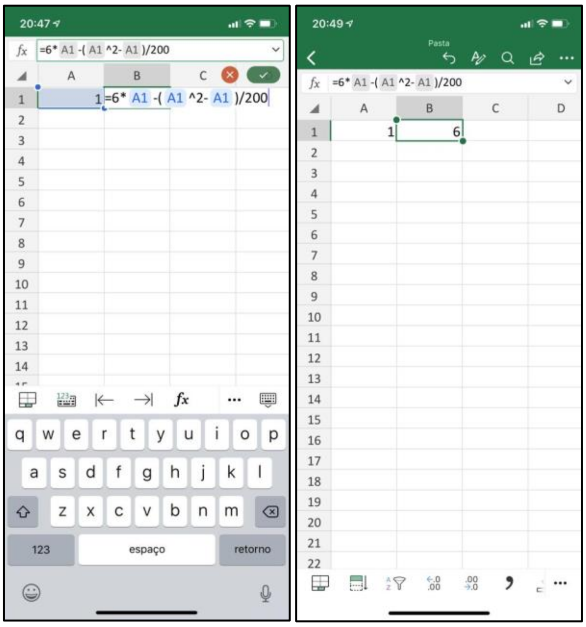
$$L(n) = 6n - \frac{n^2\ -\ n}{200}$$

Para determinarmos a quantidade de ingressos vendidos e o lucro máximo que o Grêmio poderá obter, vamos usar o aplicativo *Excel* para smartphone.

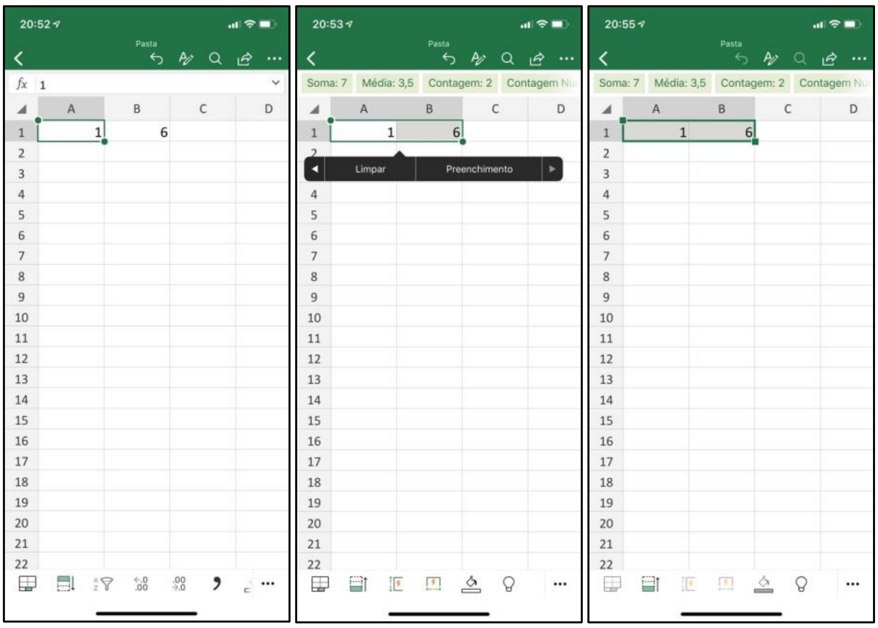
1- Abra o aplicativo *Excel* em seu celular.

2- Na célula A1, de dois toques e digite o número “1”, que representará um ingresso vendido pelo grêmio.

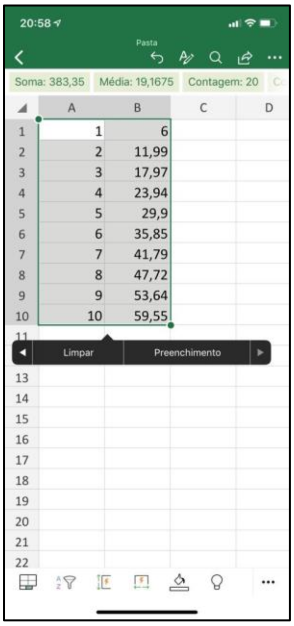
3- Na célula B1, vamos digitar a função que representa o lucro obtido em função da quantidade de ingressos vendidos. De dois toques na célula B1 e digite: **=6*A1-(A1^2-A1)/200** e depois toque no botão verde. Note que substituímos o x pelo A1 na fórmula e na célula A2 apareceu o número 6 que representa justamente o lucro obtido pelo Grêmio para 1 ingresso vendido.



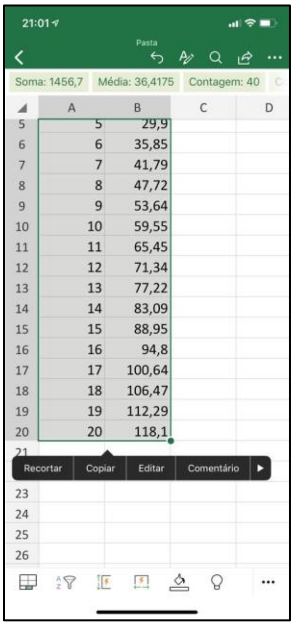
4- Agora, vamos selecionar A1 e A2 ao mesmo tempo. Para isso, toque na bolinha verde da célula A1, segure e arraste até a célula A2. Repare que aparecerão algumas opções. Clique em “Preenchimento” e a bolinha verde de antes se transformará em um quadradinho verde.



5- Toque no quadradinho verde, segure e arraste até a linha 10. Observe que a coluna A representa a quantidade de ingressos vendidos e a coluna B, o lucro obtido pelo Grêmio. Podemos observar também, que o lucro é crescente até os 10 ingressos vendidos.



6- Clique na opção "Preenchimento" novamente e arraste para baixo até a linha 20. Note que enquanto o número de ingressos vendidos aumenta, o lucro também cresce.



7- Repita o processo de tocar na opção “Preenchimento” e arrastar para baixo. Com este método responda: Qual o número de ingressos que devem ser vendidos para o Grêmio obter o lucro máximo segundo a planilha do Excel?

Como vimos anteriormente, a função que determina o lucro do Grêmio é dada por:

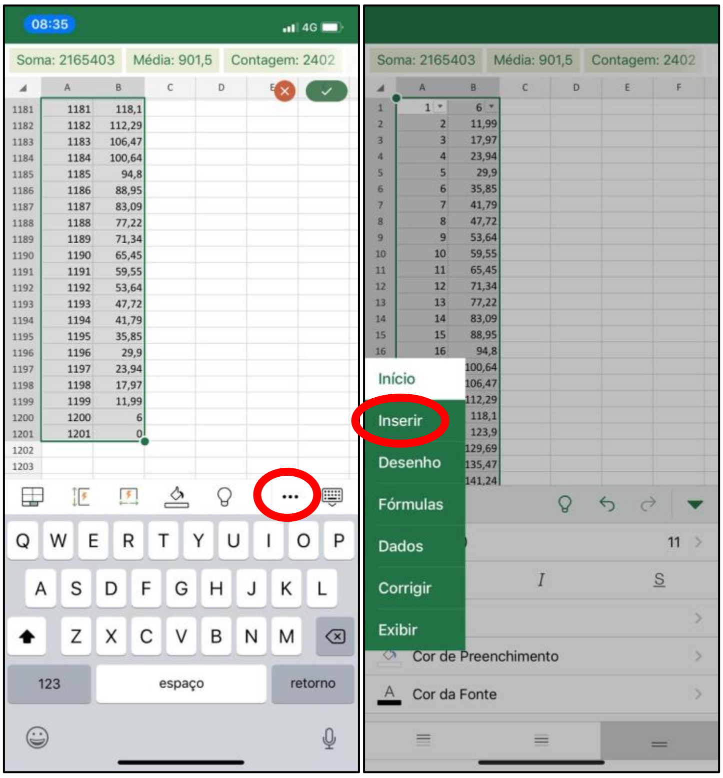
$$L(n) = 6n - \frac{n^2 - n}{200} = -\frac{1}{200}n^2 + \frac{1199}{200}n$$

Como $L(n)$ é uma função quadrática, seu gráfico é uma parábola, e o lucro máximo ocorrerá na primeira coordenada x_v do vértice. Lembre-se que para uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o “x do vértice” é:

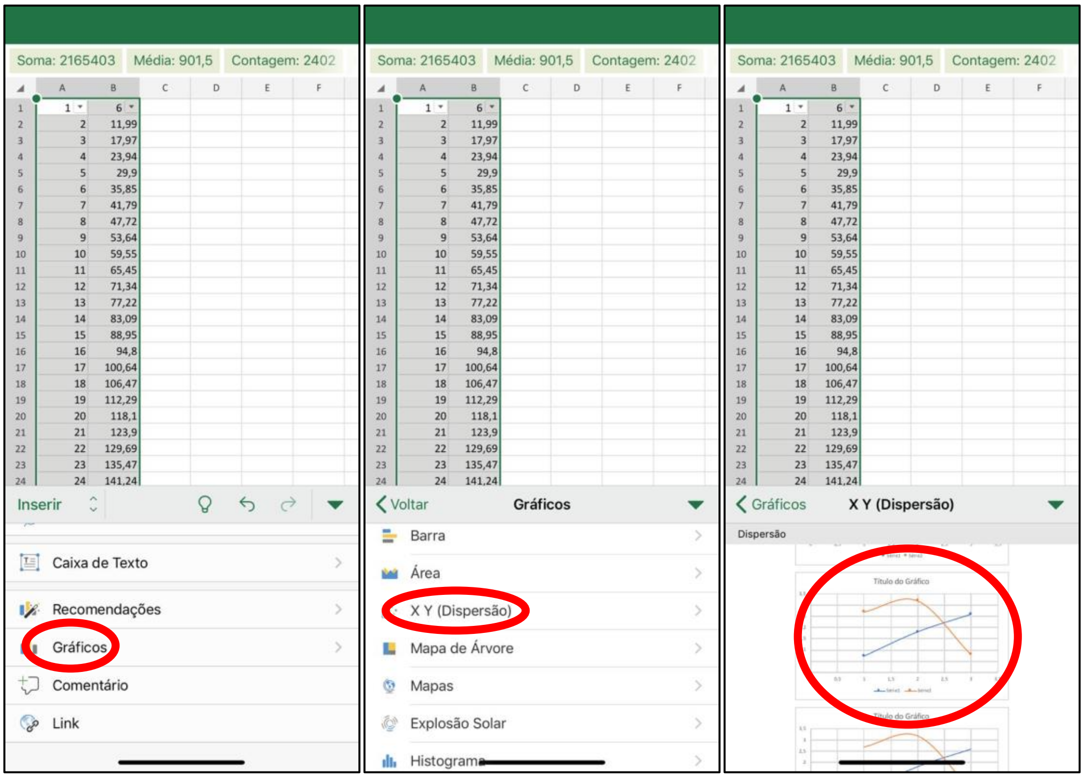
$$x_v = -\frac{b}{2 \, . \, a}$$

Determine o “x do vértice” para a função quadrática $L(n) = -\frac{1}{200}n^2 + \frac{1199}{200}n$ e compare com a resposta achada com o Excel.

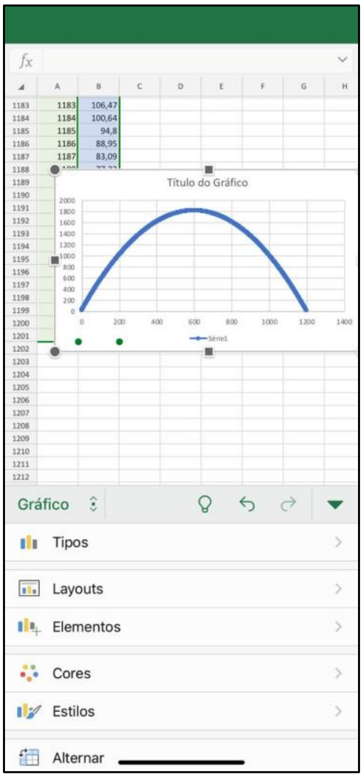
Para finalizar, utilizando os dados do “Excel” já obtidos, continue o processo da opção “Preenchimento” até a célula 1201. Com todas as células selecionadas, toque nas reticências e na opção “Início” abrirá um menu de opções. Toque em “Inserir”



Toque na opção “Gráficos”, selecione a opção “X Y(Dispersão)” e depois selecione o modelo da imagem.



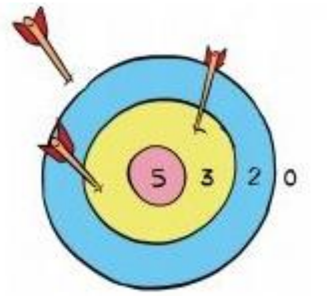
Na tela aparecerá o gráfico (parábola) que representa o lucro do Grêmio. Note que existe um “lucro máximo” da função.


Título do Gráfico
Gráfico
Tipos
Layouts
Elementos
Cores
Estilos
Alternar

Apêndice D - Ficha de Atividades nº 4 – Brincando com arco e flecha

Esta ficha será realizada individualmente.

Michel pratica arco e flecha em um alvo como o da figura. Em cada rodada, ele atira três flechas e sua pontuação, na rodada, é a soma dos pontos obtidos em cada flecha. Acertar as regiões interna, intermediária e externa vale, respectivamente, 5 pontos, 3 pontos e 2 pontos; errar o alvo vale zero ponto. Caso a flecha acerte uma linha que divide duas regiões, vale a maior pontuação entre elas.



Antes de realizar qualquer cálculo, vamos praticar um pouco. Cada aluno terá direito a uma rodada para tentar acertar o alvo. Para isso, utilize o desenho no final da ficha que representará o alvo e os lançamentos serão realizados com feijões.

. Depois de fazer os 3 lançamentos, anote na tabela abaixo sua pontuação:

Lançamento	Pontos
1	
2	
3	
Total	

Já que praticamos um pouco, vamos agora pensar no problema. Responda:

a) Será que é possível alguém somar 11 pontos? Se sim, de qual forma?

b) Michel notou que poderia obter quase todas as pontuações de 0 a 15 em uma rodada. Preencha a tabela com uma combinação de acertos para chegar no total de pontos:

Pontos	Combinação
0	0 + 0 + 0
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Pontos	Combinação
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

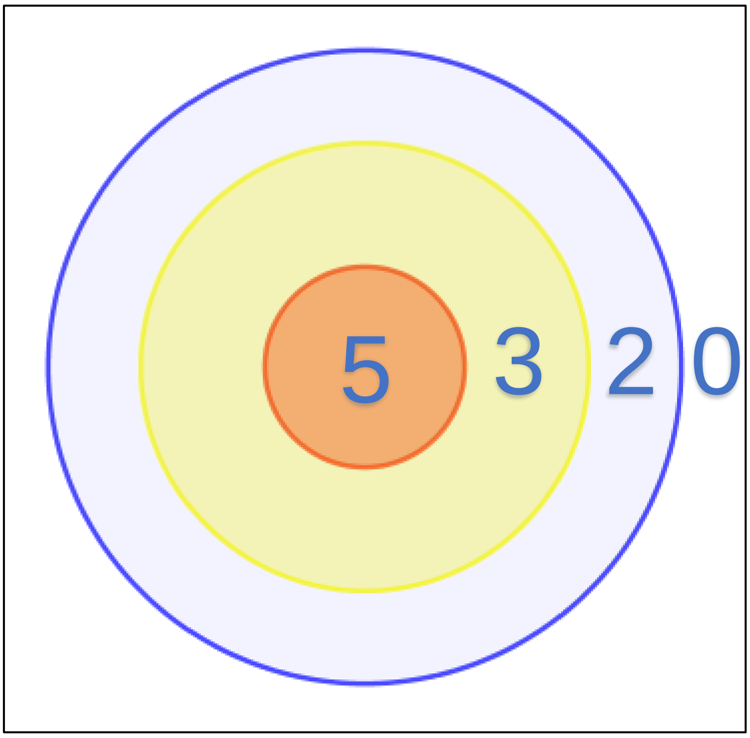
Quais são as pontuações impossíveis de se obter em uma rodada? ___________

c) Qual a pontuação máxima que Michel pode obter em:

- 1 rodada? _________________
- 2 rodadas? ________________
- 3 rodadas? ________________
- 6 rodadas? ________________

d) Michel somou 134 pontos em um treino. Explique por que houve pelo menos dez rodadas nesse treino.

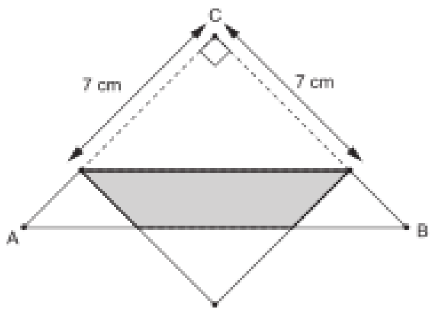
Alvo para Treinamento



Apêndice F - Ficha de atividades nº 5 – Problema do Triângulo

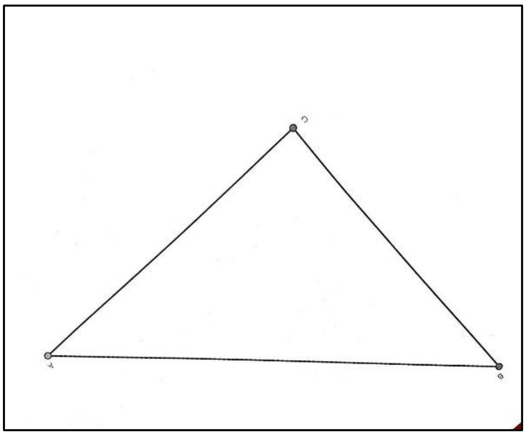
Esta ficha será realizada em duplas.

A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por f(x) a área em cm², da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm², é f(7).

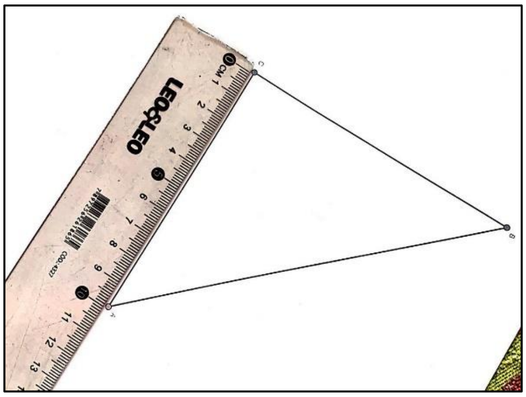
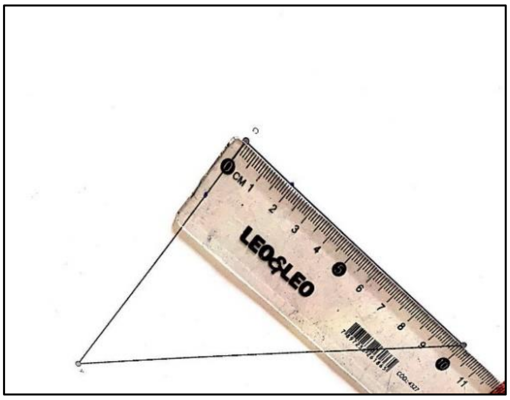
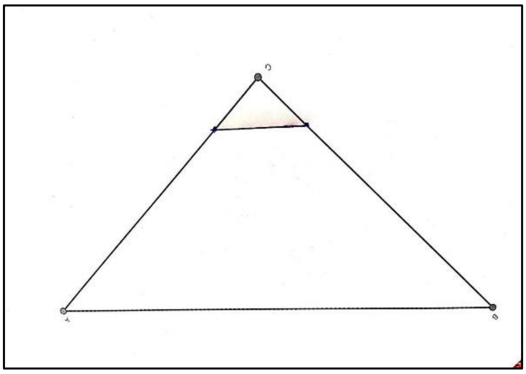


Para começar, vamos realizar verificar a região onde ocorre a sobreposição com um triângulo de papel, para a medida x = 2 cm:

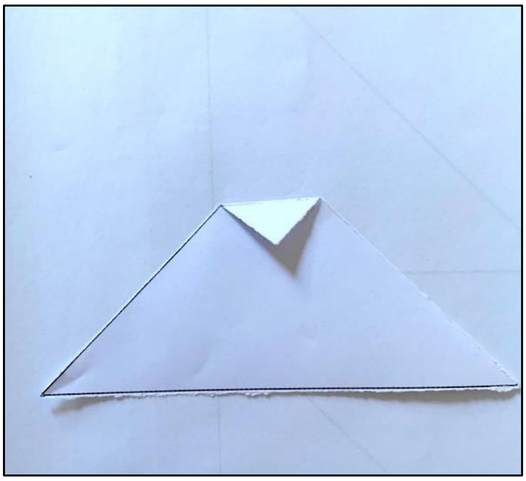
1 – Primeiro, teremos o triângulo ABC, retângulo em C com os catetos AC e AB medindo 10 cm.



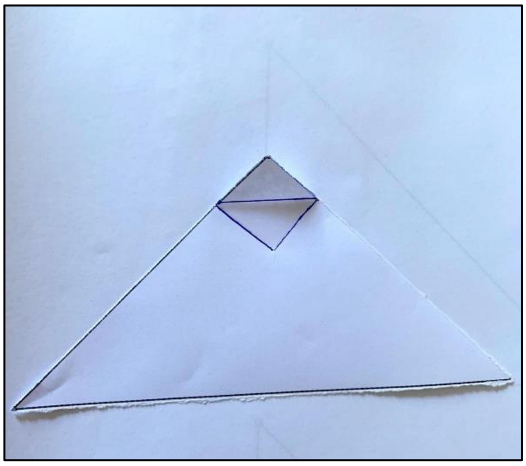
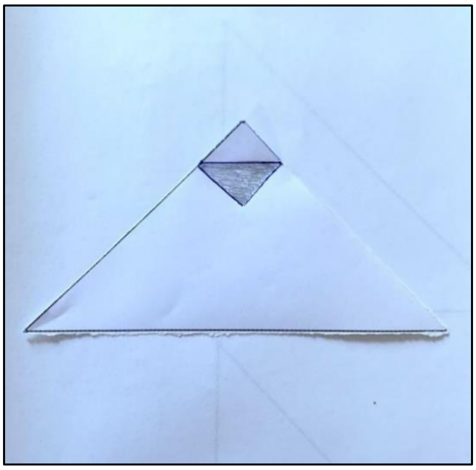
2 – A partir do vértice C, meça 2 cm nos dois catetos e marque os pontos. Depois, trace o segmento que une esses dois pontos.

3 – Dobre o papel, usando como eixo de simetria o segmento que acabamos de traçar:



4 – Com um lápis, contorne a região onde ocorre a sobreposição e pinte a área.

Agora, faça o mesmo para:

- x = 4 cm
- x = 5 cm
- x = 7 cm

f) Calcule a área da região onde ocorre a sobreposição para os valores que acabamos de realizar a dobradura e depois preencha a tabela:

Valores de x	Área da região sobreposta
2 cm	
4 cm	
5 cm	
7 cm	

g) Qual polígono é formado na região onde ocorre a sobreposição quando a medida de x é:

- 2 cm? _________________
- 4 cm? _________________
- 5 cm? _________________
- 7 cm? _________________

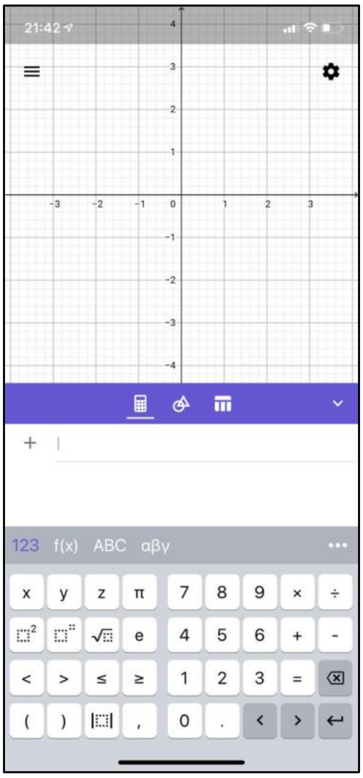
h) Escreva uma fórmula para o cálculo da área onde ocorre a sobreposição para os seguintes casos:

- $0 \leq x \leq 5$ ___________________________
- $5 \leq x \leq 10$ ___________________________

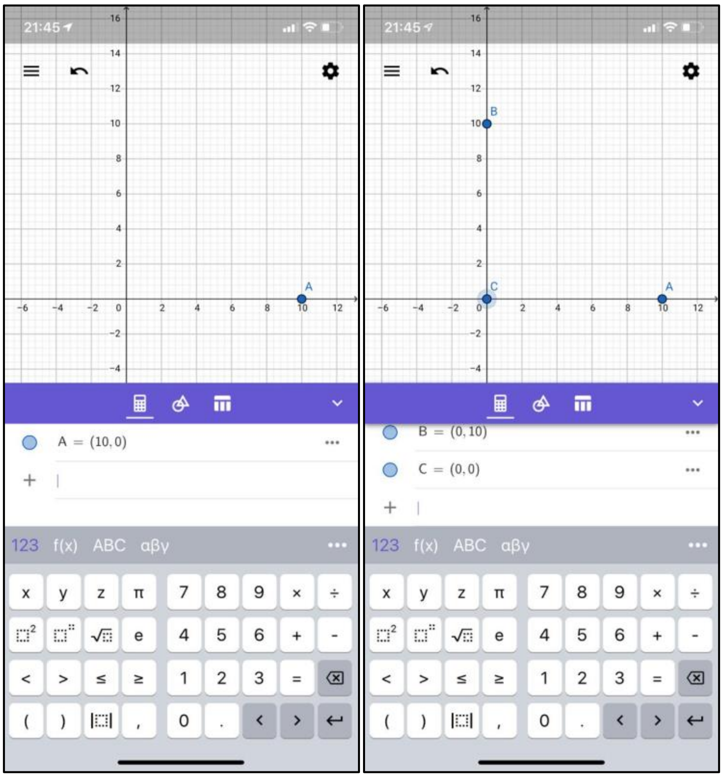
Agora, vamos construir o gráfico que representa a área sobreposta em função de x utilizando o aplicativo Geogebra.

Construindo o gráfico com o *Geogebra*

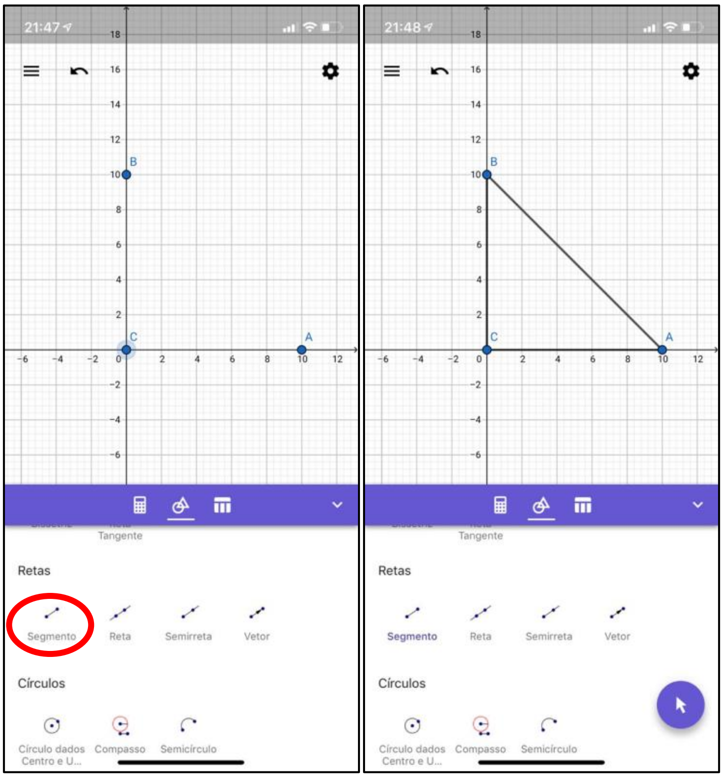
1 – Abra o aplicativo *Geogebra (Graphing Calculator)* em seu smartphone



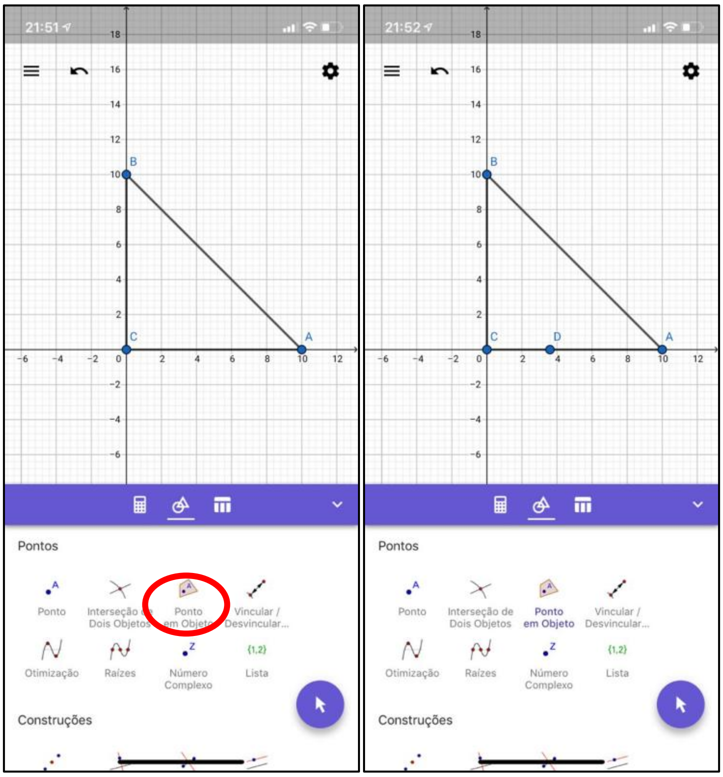
2 – Como o triângulo ABC é retângulo em C, vamos usar os eixos para a construção do triângulo. Digite no campo “entrada”: (10, 0) ; (0, 10) e (0, 0) que são os vértices do triângulo.



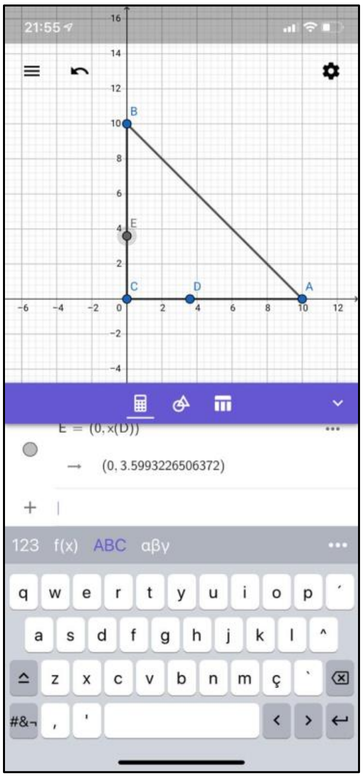
3 – Agora, vamos traçar os segmentos que formarão o triângulo que queremos. Para isso, selecione a ferramenta “segmento” e depois clique no ponto C e depois no ponto A, depois no ponto A e no ponto B e por último no ponto B e no ponto C.



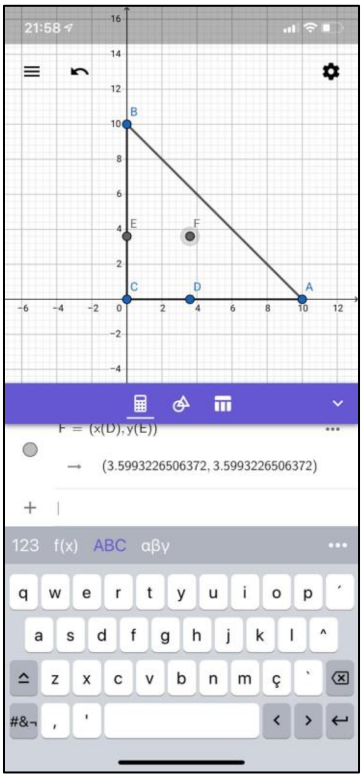
4 – Vamos determinar os pontos pertencentes aos catetos que distam x em relação ao vértice C. Selecione a opção “Ponto em Objeto” e toque no segmento AC (será criado um ponto D pertencente ao segmento).



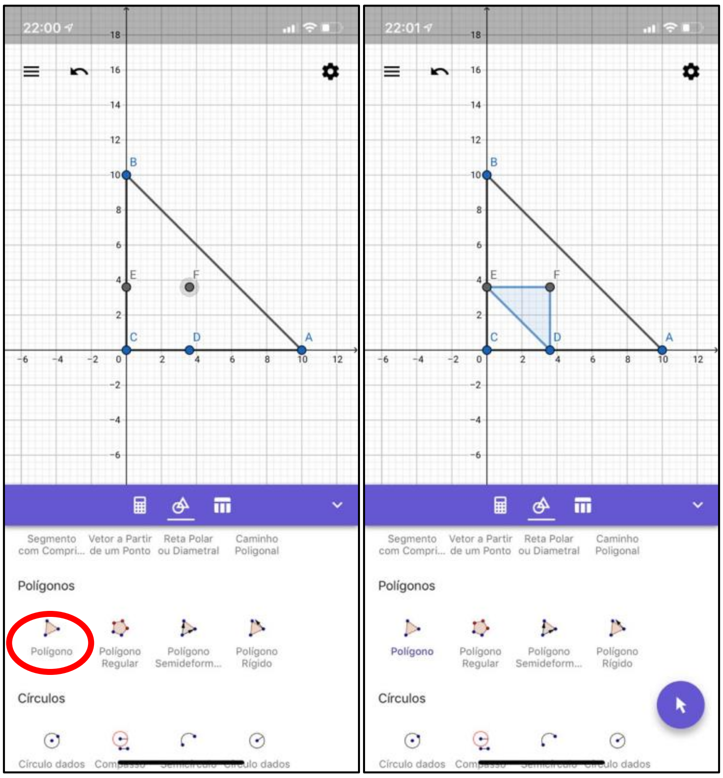
5 – Precisamos criar outro ponto que pertença ao outro cateto e tenha a mesma distância que D em relação a C. Para isso, digite no campo “Entrada”: (0, x(D)) (será criado um ponto “E” que tem abscissa 0 e a ordenada igual a abscissa de D).



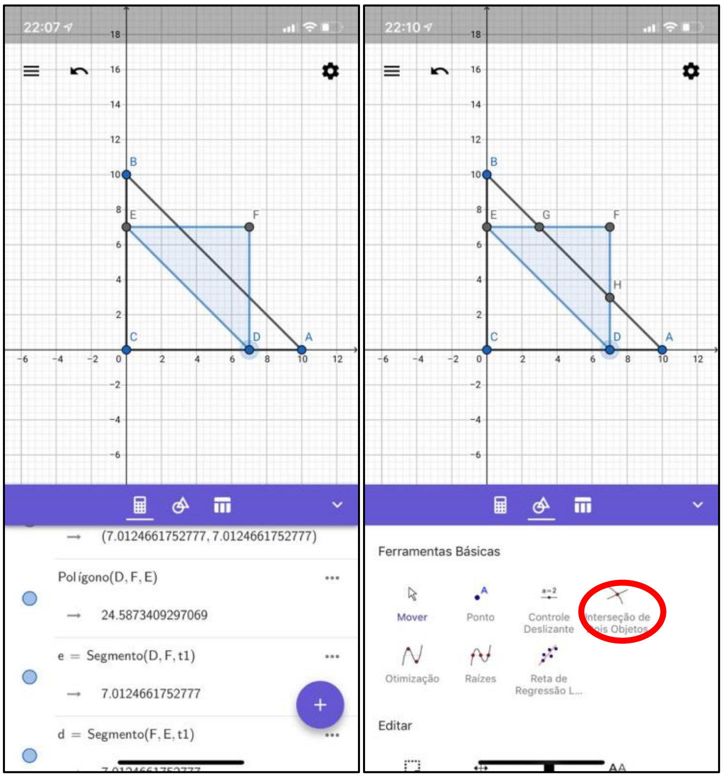
6 – Agora, criaremos um novo ponto que servirá pra delimitar a área sobreposta do problema. Digite no campo “Entrada”: (x(D), y(E)). Será criado um ponto F, conforme a figura abaixo:



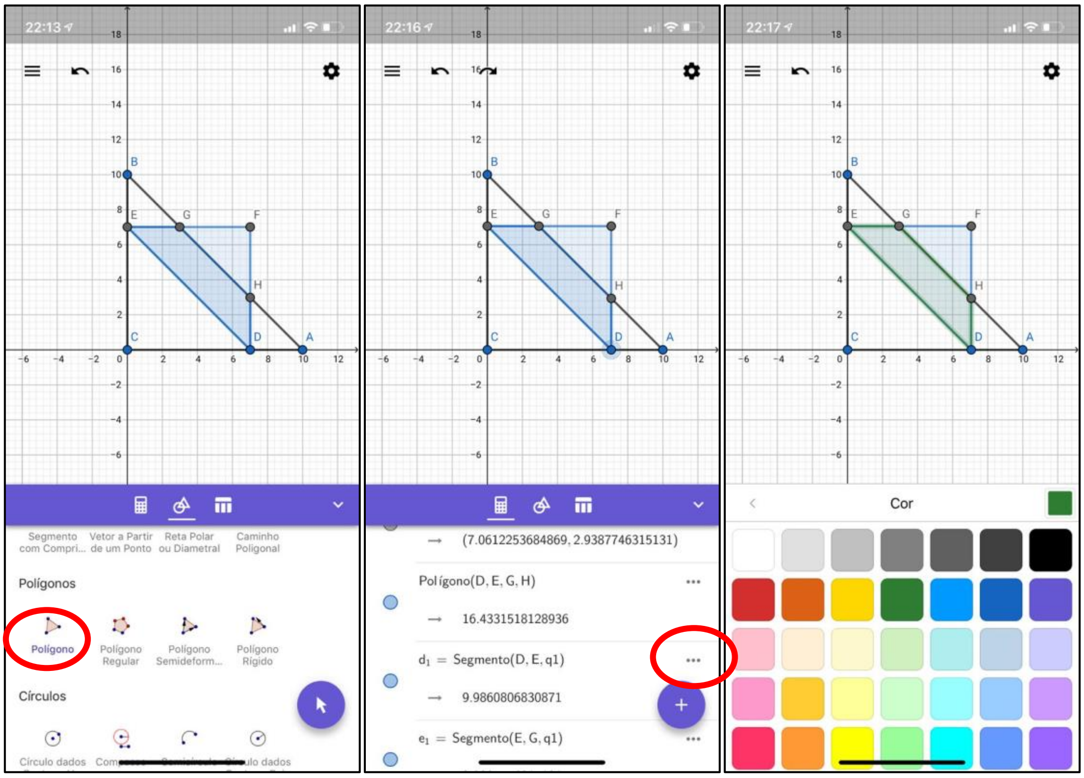
7 – Vamos agora determinar a área delimitada pelo triângulo EDF. Selecione a ferramenta “Polígono” e depois toque nos pontos D, F, E e D novamente.



8 – Quando utilizamos a ferramenta “Mover” e movemos o ponto D, perceba que o ponto F pode ficar fora do triângulo ABC, e como vimos, a área sobreposta neste caso, é a área do trapézio que precisamos criar no *Geogebra.* Selecione a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” e toque nas interseções entre os triângulos ABC e DEF. (foram criados os pontos G e H).



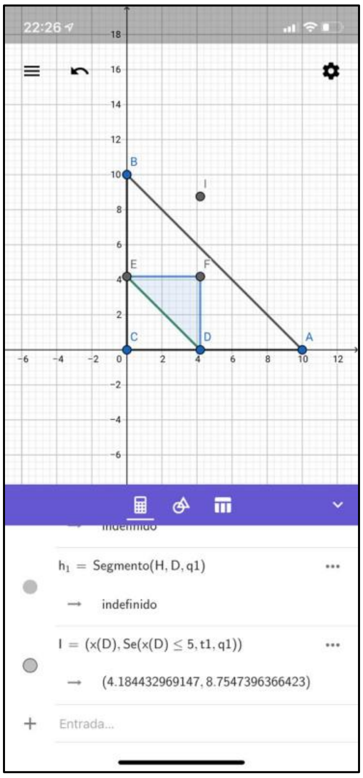
9 – Para construirmos o gráfico, precisamos considerar a área delimitada pelo trapézio DEGH. Para isso, selecione a ferramenta “Polígono” e toque nos pontos D, E, G, H e D novamente. Para melhor visualização, trocaremos a cor da área do trapézio. Na lista de entradas, procure o Polígono(D, E, G, H), toque nas reticências e depois em configurações. Em “Cor”, escolha uma de sua preferência.



10 – Precisamos criar o ponto que fará a representação do gráfico da área sobreposta, para cada medida x do problema. No campo “Entrada” digite:

- *(x(D), se(x(D)≤5, t1, q1))*

Onde “t1” representa a área do triângulo DEF e “q1” representa a área do trapézio DEGH. Repare que foi criado um ponto “I” e como suas coordenadas dependem do ponto D, ele também se move quando movemos o ponto D.



11 - Para finalizar, toque no ponto I, nas reticências e depois habilite a opção "Exibir Rastro". Mova o ponto D (vai e volta) e o gráfico que representa a área sobreposta do problema, será traçado.