UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

PATRICIA COSTA GINEZ

FENÔMENO DE CONGRUÊNCIA E NÃO CONGRUÊNCIA SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL EM MATERIAIS DIDÁTICOS

SOROCABA

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

PATRICIA COSTA GINEZ

FENÔMENO DE CONGRUÊNCIA E NÃO CONGRUÊNCIA SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL EM MATERIAIS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

SOROCABA

2020

Ginez, Patricia Costa

FENÔMENO DE CONGRUÊNCIA E NÃO CONGRUÊNCIA SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL EM MATERIAIS DIDÁTICOS / Patricia Costa Ginez. -- 2020.
107 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador: Rogério Fernando Pires
Banca examinadora: Amari Goulart, Magda da Silva Peixoto
Bibliografia

1. Função Exponencial.. 2. Registro de Representação Semiótica.. 3. Fenômeno de congruência e não congruência.. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano – CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Patricia Costa Ginez, realizada em 28/02/2020:

Rogério Pires

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires
UFU

Amari Goulart

Prof. Dr. Amari Goulart
IFSP

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

Dedico este trabalho
ao meu marido Emerson que me incentivou e encorajou a enfrentar e conquistar meus ideais, aos meus filhos Murilo e Augusto pela compreensão, a minha Mãe e meu Pai que sempre acreditou e apoiou minhas escolhas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, por toda graça a mim concedida na realização deste trabalho, que diante de todos obstáculos, provações permitiu que continuasse.

A meu marido e filhos por todo incentivo, paciência, compreensão pelos momentos de ausência. Amo vocês!

À minha mãe e meu pai, pelas orações, pelo apoio, e aos meus irmãos pelo incentivo. Também amo vocês!

Ao Prof. Dr. Rogério Fernando Pires, meu orientador, pelo apoio, ensinamentos, por todo incentivo, e pelas orientações que foram momentos de aprendizagem, além da dedicação e companheirismo. Foi uma honra tê-lo como orientador!

Aos professores que compuseram a banca examinadora, Prof. Dr. Amari Goulart e Prof.ª Dra Magda da Silva Peixoto, meu muitíssimo obrigada por todas as contribuições e sugestões.

Aos professores da UFSCAR- Sorocaba do programa PPGECE, com os quais tive a oportunidade de conviver, aprender e construir conhecimentos para toda vida.

Aos meus amigos de sala, por todo companheirismo e troca de experiências que foi de grande importância para meu progresso.

E a todos meus amigos e familiares que me incentivaram e me apoiaram nessa caminhada.

RESUMO

A incompreensão dos alunos em determinados conteúdos em Matemática nos leva a repensar metodologias de ensino de modo que possibilite estratégias que favoreçam a aprendizagem, olhando para os materiais didáticos que são utilizados nesse processo. Com isso, o objetivo do estudo foi analisar como são propostas a mobilização e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica da função exponencial no material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, o Caderno do Professor e o livro didático de Iezzi et al. (2016). Resultados de outras pesquisas, apontaram dificuldades por parte dos alunos na compreensão do conceito de função, em especial, a função exponencial, como também, sobre a forma apresentada no Caderno do Professor. Para tanto, nossa pesquisa fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que discute a importância das diferentes representações semióticas na aprendizagem Matemática. As informações que compuseram a pesquisa foram dispostas em quadros destacando os registros de representação de partida e os registros de representação de chegada para a análise das transformações de acordo coma teoria de Raymond Duval. A pesquisa respondeu à questão: “Como o conceito de função exponencial é apresentado nesses materiais didáticos sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no que tange aos fenômenos de congruência e não congruência?” O desenvolvimento dessa pesquisa qualitativa do tipo bibliográfica apontou a mobilização, manipulação e coordenação de representações semióticas da função exponencial encontradas nos materiais didáticos, em que possibilitam a compreensão dos objetos matemáticos, por meio de diferentes representações, oportunizando ao professor situações de aprendizagem diferenciada.

Palavras-chave: Função exponencial, Registro de Representação Semiótica, Fenômenos de congruência e não congruência, Caderno do Professor, livro didático.

ABSTRACT

The students' lack of understanding concerning certain contents in Mathematics leads us to rethink teaching methodologies so as to enable strategies that favor learning, looking at the teaching materials that are used in this process. Thus, the objective of this study was to analyze how the mobilization and coordination of different records of semiotic representation of the exponential function in the supporting material of the São Paulo State Curriculum, the Teacher's Notebook and the textbook by Iezzi et al. (2016). Results of other researches pointed out difficulties on the part of the students in understanding the concept of function, in particular, the exponential function, as well as the way it is presented in the Teacher's Notebook. For this, our research was based on Raymond Duval's Theory on Semiotics Representations Registers, which discusses the importance of different semiotic representations in mathematical learning. The information that comprised the research was displayed in tables highlighting the records of departure representation and records of arrival representation for the analysis of transformations according to Raymond Duval's theory. The research answered the question: "How is the concept of exponential function presented in these didactic materials from the perspective of the Theory on Semiotics Representations Registers in terms of congruence and non-congruence phenomena?" The development of this bibliographic qualitative research pointed to the mobilization, manipulation and coordination of semiotic representations of the exponential function found in didactic materials, in which they enable the understanding of mathematical objects, through different representations, providing the teacher with differentiated learning situations.

Keywords: Exponential function, Semiotic Representation Register, Phenomena of congruence and non-congruence, Teacher's Notebook, textbook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática muita das vezes é vista como uma disciplina que não agrada a muitas pessoas. Em alguns momentos na docência, como professora de Matemática, foi possível observar que muitos estudantes veem a Matemática como algo difícil de ser compreendido, e com isso apresentam bloqueios e dificuldades diante dos diversos conteúdos abordados. Em minha trajetória no magistério como professora de Matemática nos ensinos Fundamental e Médio na rede pública estadual de São Paulo foi possível fazer essa observação, e em cada ano com novas vivências, novas experiências, fui criando uma inquietação diante das dificuldades dos alunos, principalmente quanto as abordagens relacionadas a álgebra e funções, pois precisam compreender bem o enunciado para seguir com a resolução. Diante desses fatos, procurei meios para compreender o que estava acontecendo com esses discentes, e o que poderia ser feito para solucionar essa problemática. Então comecei a repensar minha maneira de ensinar e a busca de me aperfeiçoar se tornou ainda mais necessária, para que pudesse ensinar os conceitos matemáticos de maneira significativa.

Vários autores comentam de como as novas gerações de alunos estão cada vez mais imersas nas novas tecnologias. Einhardt (2016) nos diz que "Os lares brasileiros são equipados com no mínimo um computador, e os estudantes, quase que na sua totalidade, possuem smartphones e tablets." (p.15), então uma das maneiras seria utilizar os conceitos matemáticos unindo ao meio tecnológico. Sendo assim, iniciou-se várias experiências com os conceitos de funções e *softwares*, em que foi possível observar um melhor interesse por parte dos alunos nas abordagens das atividades trazendo significados para as funções que haviam sido trabalhadas no contexto algébrico. Porém, ainda não foram suficientes para um eficiente aprendizado, a dificuldade na compreensão de enunciados ainda persistia.

Em mais uma tentativa, com intuito de sanar as dificuldades dos alunos, foi realizado um novo aperfeiçoamento, que fez com que tivéssemos um primeiro contato com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Com isso, houve a possibilidade de observar os estudantes na realização de trabalhos com construções e representações utilizando *softwares*, apresentando uma melhor compreensão referente aos diferentes modos de registros de representações semióticas e daí em diante, foi possível observar que uma das maneiras de amenizar as dificuldades seria com a utilização de diferentes formas de ensinar e representar os objetos matemáticos. Observei durante minhas aulas que em uma abordagem com registros algébricos, em tabelas e gráficos não estava sendo suficiente para uma aprendizagem efetiva, pois muitos alunos ainda apresentavam dificuldades de converter a linguagem natural para a algébrica. Daí surgiu a vontade de aprofundar nos conceitos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas no que tange o fenômeno de congruência referente ao tema funções e em específico as funções exponenciais, pela sua aplicabilidade, com assuntos abrangendo fenômenos naturais e sociais, referentes ao crescimento populacional, resfriamento de um corpo, meia vida de uma substância, e pela possibilidade de interdisciplinaridade da Matemática com outras áreas do conhecimento.

Problemática

Uma das principais fontes de consulta do professor de Matemática é o livro didático, devido a precariedade de recursos didáticos na escola pública, e ao fácil acesso para o professor. Nesse sentido o livro didático passa a ser um instrumento de apoio a prática docente e um facilitador para a aprendizagem, pois amplia a compreensão, interpretação dos alunos e considerando o cenário da Educação no estado de São Paulo, por meio do currículo em vigência, é fornecido um material de apoio para ser utilizado concomitantemente com os livros didáticos, material esse que implicitamente aborda competências e habilidades cobradas em avaliações externas como o SARESP.

Segundo Valente (2008), o livro didático poderá apontar um legado do ensino de Matemática presentes em nosso cotidiano escolar e deverá ser compreendido para além do conteúdo de Matemática que se encerra.

Assim, a apropriação desses materiais implica em uma reflexão sobre a forma como são abordados os conteúdos e como desenvolvem competências cognitivas para a aprendizagem dos estudantes.

> Num livro didático, tudo precisa estar em função da situação coletiva da sala de aula, para com ele se aprenderem conteúdos, valores e atitudes específicos, sendo que se espera que a aprendizagem não se processe apenas pela leitura das informações que o livro fornece, mas também pela realização das atividades que ele sugere. (LAJOLO, 1996, p.5)

Então visando um olhar crítico para as abordagens descritas nesses materiais será realizada a pesquisa na tentativa de explicitar como são apresentados os registros de representação semiótica no contexto das funções exponenciais.

Justificativa

O conhecimento matemático é necessário para diversas situações, que são abordadas no dia a dia. Sendo assim, a Matemática é considerada um apoio para as demais áreas do conhecimento, tendo em vista que a Matemática colabora para o desenvolvimento de outras competências.

No Ensino Médio, os discentes devem ser preparados de forma que a Matemática faça parte de sua formação contribuindo para uma construção de visão de mundo. Para que isso ocorra, os discentes necessitam *...”dominar códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, compreender e interpretar desenhos e gráficos e relacioná-los à linguagem discursiva.*” (BRASIL, 2007, p.112)

Relacionando com o estudo de funções, podemos observar que o educando tem a oportunidade de fazer uma conexão com situações matemáticas e não matemáticas que estão presentes no seu cotidiano.

Em Brasil (2007, p.43-44), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), salientam que o conceito de função desempenha um processo importante para descrever através de leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de fenômenos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.

Os PCNEM também apresentam competências e habilidades a serem desenvolvidas referente ao tema funções, em que devem transcrever conceitos matemáticos da linguagem natural para linguagem simbólica matemática de forma correta. Esse documento ainda enfatiza que uma investigação e compreensão pode ser desenvolvida a medida em que o aluno identifica o problema, por meio de enunciados, procurando selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

O que muitas vezes ocorre é a dificuldade na interpretação e compreensão para converter da língua natural para um outro tipo de registro adequado.

> Além da dificuldade de realizar as conversões necessárias, os estudantes muitas vezes se deparam com um linguajar utilizado na Matemática completamente diferente daquela usado fora dela, o que pode ser um dos motivos que levam os estudantes a se deparar com grandes obstáculos na realização de tarefas matemáticas que partem com um registro na língua natural. (PIRES, 2014, p.177)

Nesse sentido, vemos a necessidade de ampliar a compreensão de enunciados que se encontram nos livros didáticos e em situações de aprendizagem descritas no material de apoio do professor, e acreditamos que é um tema de muita importância para uma análise e investigação de como são propostos os processos de aquisição do conceito de função, em especial, da função exponencial.

Objetivo e questão de pesquisa

Esta pesquisa tem como objetivo analisar como são propostas a mobilização e a coordenação de diferentes registros representações semióticas de função exponencial no livro Matemática-Ciência e Aplicação de Iezzi et al. (2016) e no material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, o Caderno do Professor da 1ª série do Ensino Médio, volume 2. A análise será realizada de modo que se observe como fenômenos de congruência e não congruência aparecem nas propostas desses materiais e quais contribuições o material traz para uma efetiva aprendizagem do aluno. Diante desses fatos temos como pergunta norteadora "Como o conceito de função exponencial é apresentado nesses materiais didáticos sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no que tange aos fenômenos de congruência e não congruência?"

A pesquisa

A representação é uma palavra considerada importante em Matemática. Com uma escrita, uma notação, pode-se representar um objeto matemático, como, um número ou uma função. Temos então que um objeto matemático não pode ser confundido com sua representação, e para uma compreensão matemática deve-se distinguir um objeto de sua representação.

Por outro lado, temos que semiótica é o estudo da construção de significados, do processo de signos. Duval (2012 b, p. 269) nos diz que

> As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL, 2012 b, p. 269)

Ao se recorrer a diferentes representações de um objeto matemático no processo de ensino, pode favorecer que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que sejam reconhecidos em cada uma delas.

O autor também enfatiza que para que um sistema semiótico seja um registro de representação, deve-se permitir três atividades cognitivas. A primeira delas é a formação de uma representação identificável, enunciado de uma frase, em que identificação e reconhecimento de uma representação e a possibilidade de sua utilização para tratamentos. A segunda temos o tratamento de uma representação, que se classifica como uma transformação interna a um registro, e a terceira temos a conversão, que é a transformação de uma representação em outro registro, mas conservando a sua referência. Por exemplo, considerando uma função representada no registro algébrico e fazendo a representação gráfica, faremos uma conversão de registro. Essa conversão pode ocorrer de uma passagem de uma função para a sua representação gráfica, como também no sentido inverso, o que traz uma contrariedade nesse processo. A conversão é uma comparação no registro de partida com a representação no registro de chegada e envolve os fenômenos da congruência e o da não congruência.

Uma imagem gráfica representa um objeto que está descrito por uma expressão algébrica. Quando modificamos essa imagem ao mesmo tempo precisamos nos atentar para as modificações na expressão algébrica. Segundo Duval (2011, p. 99) ," [...] isto significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação".

A representação gráfica, no sentido de encontrar a expressão algébrica que a representa, necessita de uma interpretação global. Em livros didáticos como Iezzi et al. (2016) e caderno do professor, a maioria das abordagens se limitam em atividades relacionadas a representação gráfica por meio de pares ordenados deixando os estudantes sem compreender uma utilização correta das representações gráficas, pois necessitam de uma análise semiótica visual e algébrica, e exige que atenção esteja centrada no domínio de conceitos.

Nesse sentido, utilizar de análises gráficas fazendo observações por meio de variações que ocorrem na expressão, torna-se possível uma identificação do que ocorre no outro registro. Estas mudanças de registros obedecem a certos procedimentos de codificação na passagem da escrita simbólica para a gráfica e, também, para a passagem inversa. A substituição de uma expressão pertencente a uma rede semântica, para uma expressão de outra rede semântica é o que muitas vezes traz dificuldades, tornando-se um obstáculo na aprendizagem.

> O problema da congruência ou da não congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro. Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo da passagem de uma apresentação a outra corre o risco de ser elevado, e também de não ser efetuado ou entendido. Em outras palavras: **a equivalência referencial não é uma razão suficiente para reunir em uma mesma rede semântica e, a fortiori, para assegurar a evidência imediata da substituição de uma expressão por outra não congruente**. (DUVAL, 2012 a, p. 105)

Por isso a importância de uma abordagem por meio do fenômeno de congruência, que é visto pela maioria dos alunos em diferentes níveis e em diferentes domínios da aprendizagem matemática como uma dificuldade na compreensão.

Sendo assim, vemos a importância de estudo voltado para uma análise do Caderno do Professor e do livro didático, Matemática: Ciências e Aplicações da 1ª série do Ensino Médio de Iezzi et al. (2016), em que é abordado a função exponencial no capítulo 7, com questões que apresentam expressões algébricas e gráficos de forma contextualizada e com aplicações com visão de mundo e caderno do Professor, na Situação de Aprendizagem 1 , do volume 2, que apresentam conteúdos contextualizados com competências envolvidas relacionadas com a leitura Matemática, realizando assim uma pesquisa bibliográfica

Uma pesquisa bibliográfica segundo Gil (2008, p.50), pode ser definida como pesquisas desenvolvidas a partir de técnicas de análise de conteúdo. O autor ainda nos diz que a principal vantagem está no fato de permitir ao investigador um amparo a uma série de fenômenos mais amplo do que em uma pesquisa diretamente.

Nesse sentido, a análise será realizada tendo como fundamentação a Teoria dos Registros de Representação Semiótica com foco no fenômeno de congruência que ocorre nos exemplos e exercícios relacionados a função exponencial que são presentes no livro didático e no Caderno do Professor. Em várias atividades abordadas é possível observar que os alunos apresentam dificuldades relacionados a interpretação de enunciados que interferem na aprendizagem. Na busca de conhecer os meios disponíveis nesses materiais e, também, no intuito de identificar quais problemáticas ocorrem no sentido que dificulta a aprendizagem dos alunos, se faz necessário uma investigação.

Os materiais a serem analisados apresentam os enunciados, expressões algébricas como também as representações gráficas, com isso, faremos uma análise, na questão de tratamento e conversão que são estabelecidas por Duval (2009) nas representações semióticas referentes a enunciados, expressões algébricas e representações gráficas. Será observado quais abordagens estão contidas nesse material e quais contribuições apresentam para que o aluno entenda as diferentes representações, levando-os a compreensão dos significados e conceitos.

Serão selecionados alguns exercícios de modo que possam fornecer subsídios para tal análise.

Quando for diagnosticada a conversão, iremos analisar as questões de congruência e não congruência existentes nos exemplos e exercícios. Constatada a congruência ou não congruência, iremos trabalhar na questão que traz uma dificuldade maior aos alunos, e nesse sentido, abordaremos a não congruência semântica seguindo os três exemplos destacados no texto de Duval (2012 a,p.105), que fala sobre o alcance da não congruência semântica em Matemática.

Para isso utilizaremos como apoio os dados descritos em um quadro que apresenta o registro de partida e o registro de chegada para uma comparação e análise dos dados descritos, identificando as propriedades referentes a conversão, caracterizando como conversão congruente e não congruente.

As questões que apresentarem a não congruência verificaremos em quais dos itens acima elas se enquadram, verificando quais dessas abordagens estão mais presentes nos materiais didáticos analisados.

Descrição da dissertação

Nessa introdução apresentamos elementos importantes do nosso trabalho que nos motivaram a realizar tal estudo, comentando sobre a problemática, a justificativa, objetivo e questão de pesquisa, a teoria utilizada nos pressupostos teóricos e os procedimentos metodológicos descritos de forma suscinta.

A dissertação está construída em cinco capítulos. No Capítulo 1, dedicamos a uma revisão de literatura, que contribuiu para aprofundamento de nosso conhecimento referente as pesquisas realizadas sobre função exponencial e o Caderno do Professor, a fim de conhecer melhor o universo de nosso estudo.

No Capítulo 2 tratamos sobre a discussão da evolução histórica do conceito de função até chegar a função exponencial, e sobre a maneira de como esses conceitos são tratados em alguns materiais didáticos.

O Capítulo 3 é dedicado a fundamentação teórica, apresentando as ideias sobre os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval que subsidiaram nossos estudos.

No Capítulo 4 dedicamos à apresentação da metodologia, em que descrevemos os caminhos trilhados para a realização de nossos estudos, caracterizamos a pesquisa e apresentamos como foram os procedimentos de análise.

No Capítulo 5, apresentamos a análise dos materiais didáticos do ponto de vista qualitativo.

Finalizamos com as considerações finais, apontando os principais resultados e respondendo a nossa questão de pesquisa, como também sugestões para pesquisas futuras.

CAPÍTULO 1

REVISÃO DE LITERATURA

Neste Capítulo apresentamos algumas das abordagens realizadas com o ensino de Função Exponencial. Podemos notar que são muitos os estudos realizados nessa área em buscas de inovações, pois na maioria dos casos ainda é um conteúdo que precisa de atenção, diante das dificuldades dos alunos e pela forma como são abordadas em livros didáticos e outros materiais de apoio. Em pesquisas, podemos encontrar vários trabalhos que abordam essa temática, no Portal da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), banco de Teses e Dissertações da Pontifica Universidade Católica de São Paulo, Banco de Teses e Dissertações da Universidade Federal de São Carlos, podemos observar uma quantidade vasta de materiais que tratam da temática. Com isso, de um total de 70 481 dissertações de mestrado que de certa forma estão com o mesmo intuito, de um estudo para melhoria do processo de ensino e aprendizagem, selecionamos alguns trabalhos que realizam atividades abordando jogos, modelagem matemática, tecnologias da informação e comunicação, interdisciplinaridade e implementação do Caderno do Professor do Currículo do Estado de São Paulo e desses trabalhos escolhemos dez, que atendem melhor à temática, em que cinco deles são referentes a abordagens com a Função Exponencial e os demais com abordagens que envolvem a Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

1.1-Intervenção de Ensino da Função Exponencial

1.1.1- Função Exponencial e as Tecnologias

Einhardt (2016), em seu trabalho desenvolve aplicações de funções exponenciais e logarítmica usando o aplicativo MalMath. Procura abordagens contextualizadas com temas do cotidiano e salienta a importância da inserção à prática docente as novas tecnologias.

Tem como objetivo auxiliar e colaborar com atividades para as aulas de Matemática com uso de aplicativo. Busca uma aproximação do conteúdo de Funções Exponenciais e Logarítmicas com a utilização das tecnologias móveis. Einhardt (2016), escolheu esse assunto pelo fato de muitos fenômenos da natureza e situações práticas do dia-a-dia serem modelados e exemplificados através dessas funções.

Em sua fundamentação utiliza Lima (2013) para o estudo sobre funções, suas características, com abordagens sobre sequências, progressões aritméticas e geométricas, para chegar à definição. Apresenta transformações gráficas, função inversa, partindo para função exponencial com definição e caracterização e propriedades do gráfico da função exponencial, utilizadas em livros didáticos como Dante (2014), Iezzi; Dolce; Murakami, (2013). Comenta sobre abordagens de funções em outros livros didáticos, fala que de um modo geral as funções exponenciais são abordadas de forma semelhante. Explica sobre o aplicativo Malmath e sobre a facilidade na utilização dos aparelhos e a velocidade de resposta.

Em sua metodologia aplicada em sala de aula, baseia-se em exercícios de funções exponenciais e logarítmicas. Cada problema apresenta duas etapas, nas quais os alunos iriam responder e caso necessário tirariam suas dúvidas com o professor. Na primeira etapa explorando a lei da função sem a utilização do aplicativo Malmath e na segunda etapa com o aplicativo. As atividades foram criadas com abordagens referente a cultura de bactérias, decaimento radioativo, aplicação na poupança.

Nas considerações finais deixa como principal resultado que acredita ser necessário que se utilizem das novas tecnologias como uma ferramenta no ambiente educacional, para uma mudança de prática que como consequência traz a atenção e interesse dos alunos por ser uma abordagem inovadora de forma contextualizada.

Einhardt, (2016) discorre sobre as abordagens em livros didáticos acerca das transformações gráficas e suas propriedades e aplica atividades com assuntos voltados a cultura de bactérias e decaimento radioativo, relacionando com as novas tecnologias que acreditamos ser indispensável e desse modo se aproxima de nosso trabalho, pois analisamos representações gráficas presentes no livro didático, e com atividades referentes ao mesmo assunto, em que algumas se relacionam as tecnologias e, além disso, analisamos os diferentes registros de Representação no Caderno do Professor, material do Currículo do Estado de São Paulo, fazendo um comparativo com o livro didático de Iezzi et al. (2016), adotado pela escola onde a autora leciona.

1.1.2 Função Exponencial e os jogos.

Desde crianças os alunos são estimulados através de brincadeiras e em qualquer idade os jogos são bem aceitos. Com isso são considerados meios para uma abordagem de conteúdos matemáticos com intuito de facilitar a compreensão e aprendizagem dos alunos, tendo em vista a abstração que muitos conteúdos apresentam.

Silva (2015a) fez um trabalho que utiliza a Torre de Hanói como uma ferramenta para facilitar o ensino e aprendizagem da função exponencial. Tem como objetivo contribuir para o ensino da Matemática facilitando a introdução dos conceitos matemáticos referentes a função exponencial.

Utiliza Smole et al. (2007) para fundamentar a importância dos jogos e as competências e habilidades que os alunos podem desenvolver com esse tipo de abordagem, melhorando interação, autonomia, levando a ser protagonista no processo de ensino e aprendizagem.

Em sua metodologia comenta sobre os conhecimentos prévios como potenciação, progressão geométrica, funções e gráficos que são necessários para a atividade com a Torre de Hanói. Faz uma apresentação da história do jogo e inicia a atividade com uma Torre de Hanói para cada dupla, fornecendo um disco e após aumentando. No desenvolvimento da atividade os alunos anotaram em tabelas o número de movimentos das etapas, respondendo a questões sobre quantos movimentos realizaram para transferir à torre do primeiro para o segundo, chegando então a problemas que envolvem potências. Para observar o crescimento exponencial do número da quantidade mínima de movimentos relacionada com a quantidades de discos utilizou um projetor e o Geogebra para análise de gráfico.

Em suas considerações sugere que a teoria referente ao conteúdo de função exponencial para o Ensino Médio deve ser feita a partir de definições dos livros didáticos e a expressão matemática obtida a partir da Torre de Hanói e seus gráficos devem ser sempre retomados ao longo das explicações da teoria. Foi possível através do jogo um resgate pela busca do conhecimento, pois tiveram uma aprendizagem prazerosa e com um conteúdo presente em várias aplicações.

Silva (2015a) no desenvolvimento de seu trabalho comentou sobre anotações de dados em tabelas e para observação do crescimento exponencial, apresentação de construção gráfica, como também, a utilização de livro didático para a definição de Função Exponencial, o que vem ao encontro do nosso trabalho, pelo fato de analisarmos tabelas, gráficos presentes no livro didático, fazendo a comparação com análise do Caderno do Professor focando nos diferentes Registros de Representações de tabelas, expressões e gráficos.

1.1.3 Função Exponencial em um ambiente de Modelagem Matemática.

Existem vários estudos que demonstram uma preocupação em relacionar a Matemática com contextos da realidade dos educandos, criando um ambiente que facilite a aprendizagem.

Oliveira (2013) comenta sobre a necessidade de trabalhar metodologias de ensino que permitem uma conexão de conteúdos matemáticos e a realidade dos alunos. Observa essa necessidade devido a uma supervalorização de regras, fórmulas e procedimentos para uma abordagem que leve a uma aprendizagem mais significativa, em que os alunos possam aprender conceitos e aplicá-los em resolução de problemas, mas, se o aluno recebe os conteúdos de forma passivamente, isso não garantem uma aprendizagem significativa.

Desse modo, tem como objetivo apresentar uma proposta de atividade Educacional para o Ensino Médio com a Função Exponencial em um ambiente de Modelagem Matemática, articulada com a resolução de problemas.

Utiliza Bassanezi (1999) e Barbosa (2004,2009) para fundamentar sobre a modelagem Matemática, onde comenta sobre a definição de Bassanezi, de que a Modelagem Matemática é como transformar problemas da realidade em problemas Matemáticos. O autor acredita que essa forma de atuar aproxima o aluno da Matemática

O autor ainda se apoia nos dizeres de Lima (1999, 2006) sobre os três componentes básicos em que a Matemática se apoia, que são: a conceituação, manipulação e aplicação e sobre a utilização de recursos, como as tecnologias, história da Matemática, para que o aluno reconheça a Matemática como uma criação, e sugere que as tecnologias devem ser aliadas no processo de ensino aprendizagem e que a utilização dos jogos minimiza algumas dificuldades, como também podem ser utilizados para fixar conteúdos.

Sugere a criação da modelagem, com direcionamento inicial feito pelo professor com um determinado tema e na sequência os alunos buscam uma resolução para a situação-problema com coletas de dados, analisando e formulando modelos, chegando aos resultados. Os alunos são estimulados a traçar as próprias estratégias para a resolução. Pretendeu com as atividades aplicar uma abordagem contextualizada para uma aprendizagem significativa apresentando problemas que se relacionam com outras áreas, e em sua solução os alunos organizaram os dados em tabelas para entendimento do problema, chegando a um modelo matemático representado por uma expressão analítica

Nas considerações aponta como necessidade urgente de buscar novas formas de abordar os conteúdos de Matemática, em sala de aula. E que uma das formas de diversificar o ensino é através da Modelagem Matemática, permitindo que aplique conhecimentos e métodos matemáticos na resolução de problemas referentes ao cotidiano do aluno. Fala sobre o ensino de funções que a maioria das vezes se limita em demonstrações e explorações de expressões analíticas sem fazer uma abordagem de aspectos gráficos e suas propriedades.

Oliveira (2013) em seu texto apresenta problemas que se relacionam em outras áreas, em que na solução os alunos fizeram a organização de dados em tabelas para chegar a um modelo matemático, representando por uma expressão analítica, estratégia que apresenta considerável relação com nosso trabalho, pelo fato de apresentar situações que propõe o estudo com tabela e expressão algébrica, em que em nosso caso utilizaremos os diferentes Registros de Representação Semiótica para uma análise de suas contribuições.

1.1.4 Função Exponencial e a Interdisciplinaridade.

Silva (2015 b) tem como objetivo em seu trabalho evidenciar os principais aspectos de Funções Exponenciais, com apresentações e discussões sobre as aplicações e interdisciplinaridade às diversas áreas do conhecimento.

Faz uma contextualização histórica do conceito de função, fundamentada por Boyer; Merzback,(2012), Eves, (2004), Sá;Souza;Silva, (2003), como também, Lima (2012), entre outros, apresentando caracterização e definições da

Função Exponencial. Salienta que as propriedades garantem um conhecimento mais seguro de aplicabilidade de Função Exponencial e que os gráficos favorecem a observação de diferentes comportamentos que em outras representações como numérica, algébricas e tabelas são difíceis de serem percebidas.

Silva (2015b) comenta que a Função Exponencial tem destaque nos três últimos anos do Ensino Médio e com importância considerável na universidade, sendo utilizada na Matemática Aplicada a atividades científicas e profissionais e que deve ser introduzida não somente com fundamentação teórica, mas também, a partir de relações e problemas que tenham significado para o aluno.

Enfatiza as apresentações de transformações gráficas com auxílio do Geogebra como facilitador e destaca as orientações curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008), que é importante destacar o significado das representações gráficas quando alteramos seus parâmetros. Com isso apresenta atividades com descrições e aplicações de expressões e funções exponenciais relacionadas a diversas áreas do conhecimento como matemática financeira, decaimento radioativo, crescimento populacional, entre outros, salientando as aplicações em outras áreas.

Em suas considerações comenta sobre as dificuldades dos discentes em ver as relações entre o ensino de Matemática e sua aplicabilidade prática e que é preciso criar meios facilitadores para que o conhecimento seja adquirido de maneira natural e que a função exponencial dá ao professor um rico instrumento de articulação e interdisciplinaridade.

Silva (2015b) em seu trabalho traz à tona a aplicabilidade da Função Exponencial nas diferentes áreas e sobre as representações em gráficos que favorecem a observação de comportamentos, apresentando atividades com expressões algébricas e função exponencial, o que direciona nosso olhar para analisar as questões no Caderno do Professor e do livro didático que apresentam conteúdos interdisciplinares e representações gráficas que vem contribuir para uma aprendizagem de função a partir dos diferentes parâmetros apresentados em diferentes gráficos, permitindo conhecer o objeto matemático nos diferentes Registros de Representação.

1.1.5 Função exponencial e diferentes abordagens

Piano (2016) fez um trabalho bibliográfico sobre funções, utilizando como estímulo as dificuldades que os alunos apresentam ao aprender sobre esse conceito e também devido a sua aplicabilidade, como também a pouca atenção dada ao assunto por alguns autores de livros didáticos do Ensino Médio. Tem como objetivo explorar as funções exponenciais e logarítmicas do ponto de vista do professor e principalmente para o Ensino Médio, visando aprofundar na construção de conceitos matemáticos.

Utiliza os PCNEM dizendo que o Ensino Médio deve preparar o aluno para viver em sociedade. Fundamenta seu trabalho com dizeres de Alves (2014) sobre as características da função exponencial como o crescimento rápido que deve ser trabalhado com gráficos e tabelas de comparação e Oliveira (2014) para assunto de funções logarítmicas, dizendo que a maioria dos problemas são modelados com função exponencial. Define a função exponencial, relembrando conceitos e propriedades, como também apresenta funções contínuas e descontínuas que são apresentadas em gráficos. Faz uma abordagem diferenciada para a definição de logaritmo através do conceito de área de uma faixa de hipérbole, com a utilização do gráfico de uma hipérbole a caracterização geométrica dos logarítmicos. Apresenta a propriedade do logaritmo natural, focando na abordagem de uma função bijetora, para assim comparar e identificar a função inversa que no caso é a função exponencial e a partir da parte geométrica utiliza ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral para definir funções exponenciais.

Em suas considerações alega que prefere uma abordagem geométrica, pois a visualização do que está acontecendo permite uma comparação entre o abstrato e visual, facilitando a compreensão e aprendizagem.

Piano (2016) em seu trabalho salienta que prefere abordagens geométricas, pois a visualização de algo permite a comparação entre o abstrato e o visual e fundamenta seu trabalho nos dizeres de Alves (2014) sobre as características da função exponencial que necessita de um trabalho com gráficos e tabelas de comparação, forma pela qual acreditamos que corrobora com nosso trabalho pelo fato de que são encontradas atividades em nosso material de estudo que levam os alunos a solucionar as atividades através da visualização e comparação de representações de expressões algébrica e representações gráficas, porém considerando o que ocorre na passagem desses diferentes tipos de Registros de Representações.

1.2- Análise do Caderno de Matemática na Secretaria do Estado de São Paulo

1.2.1 Potencialidades e Fragilidades na Implementação do Caderno do Professor

Cassiari (2011) faz uma análise sobre a implementação do currículo do estado de São Paulo, com objetivo de identificar as possíveis potencialidades e fragilidades da implementação do caderno do Professor e caderno do Aluno.

Utiliza Estrella (2009), Camargo Júnior (2010) e Oliveira (2010) para uma revisão bibliográfica constatando que poucos autores se dedicaram a investigar como a proposta curricular tem sido implementada nas escolas.

Em sua metodologia, aplica um questionário, onde busca construir os perfis e identificar a relação que os professores possuem com o material e o grau de concordância em relação ao trabalho realizado com os cadernos. Apresenta os documentos da Proposta Curricular, onde trata de que para o ensino de qualidade a proposta segue alguns princípios que que são: uma escola que aprende, o currículo com espaço e cultura, competências como referência e que a Matemática é apresentada como um sistema simbólico, que se articula diretamente com a língua materna, nas formas orais e escritas,

Segundo Cassiari (2011) o que pode dificultar a implementação do caderno é a falta de pré-requisitos do aluno que poderá prejudicar a implementação. Em relatos dos professores expressam que a Secretaria Estadual de Educação de São Paulo-SEE/SP não se propõe a coordenar, apoiar ou avaliar o desenvolvimento curricular, o que contraria, já que a SEE/SP menciona em sua proposta estar atenta para esclarecer dúvidas e dificuldades para ajustes e adaptações.

Em suas considerações afirma que o caderno do aluno é um material de fácil compreensão para o professor e propicia um currículo único, porém não é de fácil compreensão para os alunos. No geral, os professores aceitam a proposta Curricular, mas salientam de que o material não foi reformulado pela

SEE/SP, tendo em vista que a maior parte dos professores relatam que o material não é de fácil compreensão e não oferece orientação completa, tanto no conteúdo como na abordagem.

Cassiari (2011) fez uma análise da implementação do Currículo e comenta após suas análises que o Caderno do Aluno é de fácil compreensão para os professores, mas não para os alunos e o que pode dificultar a implementação do caderno é a falta de pré-requisitos dos alunos e que no geral os professores aceitam a proposta. Esse trabalho se assemelha ao nosso, no sentido de que faremos a análise do material, porém analisamos, no Caderno de Matemática, a função Exponencial quanto as suas representações, como também os pré-requisitos que o caderno apresenta para o estudo dessa função.

1.2.2 Currículo e identidades docentes

Rampini (2011) fez uma pesquisa com objetivo de entender ou desentender o quanto um manual direcionado para os professores pode mover práticas dos professores para outras direções, mudar a sua maneira de ser e estar na escola. Discorre sobre práticas indentitárias expressas no material do Currículo do Estado de São Paulo que os docentes consomem.

Utiliza em sua fundamentação as contribuições de Certeau (1994,2003) sobre táticas de resistências adquiridas a partir do consumo de identidades desejadas pelas políticas que sofrem alterações com experiências individuais e coletivas, fazendo um comparativo com a identidade dos docentes, em diz que estão em processo de construção constante quando é vivida e experimentada.

Em sua metodologia utiliza Benjamim (1994) que salienta que se imprime a narrativa a marca do narrador, sendo assim, faz entrevistas com 12 professores, na qual é possível perceber nos comentários de que a proposta surgiu para unificar os conteúdos para que os alunos não sejam prejudicados quando mudarem de escola. Mas também, enfatizam que a proposta deve ser bem estudada para ver o que é viável ou não para a sala de aula e além disso, sobre o caderno que traz pouco conteúdo e não é sequencial, tendo assim um material desinteressante para o aluno. Falam ainda da não obrigatoriedade na utilização do material, porém o conteúdo do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) pode conter questões do caderno. Diante desses fatos, alguns professores sentem desmotivados, desamparados.

Rampini (2011) salienta que a produção e adoção do material nas práticas pedagógicas podem ser uma oportunidade interessante, porém questiona sobre a forma que foi construído. Diz que o material inibe a experiência docente e produz apagamentos em suas práticas.

No texto de Rampini (2011) nos chama a atenção quando um dos entrevistados comenta sobre estudar bem para analisar o que é viável ou não para passar aos alunos. Nesse sentido, observamos a importância mais uma vez de analisar o caderno do Professor identificando a viabilidade ou não do conteúdo de Função Exponencial para a aprendizagem.

1.2.3 Ambiente virtual de aprendizagem suporte para o estudo de funções segundo a proposta

Di Piero (2011) em seu trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um ambiente virtual de aprendizagem para trabalhar conteúdos da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, caderno do 3º bimestre da 3ª série do Ensino Médio, buscando divulgar, difundir e desmitificar as atividades dessa proposta para futuros professores.

Em sua fundamentação tem como referencial Gravina (1998) que fala sobre ambiente informatizado que é construtivista quando tem dinamismo, interatividade, fazendo uso da Matemática para resolução de problemas de outras áreas do conhecimento e Pereira (2007) que diz que a qualidade do processo de aprendizagem depende do aprendiz. Fala um pouco sobre a abordagem das noções de função no caderno do aluno em diferentes séries e conclui que os alunos não compreendem o conceito de função devido a maneira tradicional que são ensinadas pelos professores.

Para sua metodologia desenvolve um AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem) com situações de Aprendizagem do caderno do aluno para o Moodle em quatro tópicos com fóruns, lições, questionários, revisando conceitos de funções já estudados e após utiliza o Geogebra para utilização de visualizadores para aprendizagem significativa. Foi aplicado a alunos do curso de licenciatura em Matemática, na disciplina de prática de ensino, na qual os alunos acessaram o sistema, para realização de suas atividades que são apresentadas com orientações necessárias, explorando visualizações gráficas e algébricas, para reconhecimento das propriedades gráficas para expressar em linguagem algébrica.

De maneira geral, Di Piero (2011), diz que foram muitas dificuldades encontradas, como adaptação com a linguagem moodle, tempo de elaboração, dificuldade dos alunos no crescimento e decrescimento das funções, em especial função exponencial. Considera que o resultado foi proveitoso, pois permitiu a revisão de conteúdos e a participação dos alunos da licenciatura foi importante para evidenciar as dificuldades que poderão encontrar na Proposta Curricular e as tecnologias.

Di Piero (2011) em seu trabalho faz explorações de visualizações gráficas e algébricas para reconhecimento de propriedades gráficas para expressar as algébricas, uma forma que se aproxima de nosso trabalho, pois queremos fazer a análise desses processos de mudanças de uma para a outra representação. Além disso, temos o intuito de identificar as facilidade e dificuldades que são apresentadas na Proposta Curricular, mas voltadas para a análise de como as funções exponenciais são apresentadas nessa proposta.

1.2.4 Práticas pedagógicas com o uso das TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação) no Contexto do novo Currículo do Estado de São Paulo

Boschesi (2016) tem como objetivo em seu trabalho investigar como as TICs estão presentes no currículo de Matemática nas Situações de Aprendizagem dos Cadernos do Professor e Aluno e como os professores do Ensino Médio relatam que estão desenvolvendo suas práticas com o uso destes recursos.

Utiliza para sua fundamentação autores como Fiorentini e Lorenzatto (2012), Ponte (1998, 2014), Penteado e Borba (2000), Gatti (2008), Gomes (2002) e outros. Comenta de acordo com os autores de sua fundamentação, que as TIC contribuem para o aprendizado dos alunos quando são integrados à prática do professor. E como os alunos tem muita informação, os professores têm o papel de prepará-los para que sejam capazes de utilizar essas ferramentas para a produção de novos conhecimentos.

Em sua metodologia faz a coleta de dados com grupo de professores, em que faz uma análise do caderno do Professor, seguido de uma aplicação de questionário e entrevista, nos quais os professores selecionados, comentam como utilizam as TIC, e se o currículo oferece orientações pedagógicas para utilização desses recursos . Destaca que dos 6 volumes que compõem o Ensino Médio com 48 Situações de Aprendizagem, somente 5 delas apresentam indicação do uso das TIC. Salienta que na Situação de Aprendizagem do 1º Ano do Ensino Médio, traz indicação de *software* livre para construção de gráficos de função exponencial.

Na análise dos dados Boschesi (2016) identifica que os professores notam as deficiências do material do Currículo, quanto as orientações de trabalhos com as TIC. Destaca que as atividades são apresentadas como pesquisa individual e com conceitos já abordados anteriormente. Considera que as atividades com indicação das TIC não têm finalidade de levar o aluno a construir novos conhecimentos e os materiais que representam um norte do planejamento das aulas contribuem pouco, ou quase nada para a utilização das TIC na prática pedagógica dos professores da rede pública do estado de São Paulo.

Bochesi (2016) fez a análise do Caderno do Professor descrevendo que na Situação de Aprendizagem do 1º Ano do Ensino Médio traz indicações de *Software* livre para construção de gráficos, forma pelo qual se aproxima de nosso trabalho, pois analisamos o caderno do 1º Ano do Ensino Médio, porém com a abordagem gráfica analisamos as diferentes representações identificando a conversão de registros de representações.

1.2.5 Função Exponencial no Caderno do Professor

Souza (2010) faz uma análise do caderno do Professor referente a Proposta curricular do Estado de São Paulo ao tema Função Exponencial.

Tem como objetivo analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão dos alunos a respeito da Função Exponencial e se conseguem realizar ou não mudanças de registros de representações semióticas.

Utiliza em sua fundamentação as teorias sobre Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2003) e o modelo 3UV de Sonia Ursini et al. (2005).

Em sua metodologia faz a escolha de 4 atividades de um total de oito apresentadas no Caderno do Professor da Proposta Curricular do Estado de São

Paulo para realizar com 14 alunos de uma escola estadual de São Paulo e sobre elas analisa os diferentes registros de representações Semióticas definidas por Duval (2003) abordando registros de partida e chegada e os casos de congruência e não congruência.

Faz também a análise nas atividades relacionadas sobre o modelo 3UV de Ursini (2005) considerando nas atividades o termo desconhecido, número genérico e relação funcional. Faz uso da calculadora nas atividades, e considera que facilitaria nas operações com cálculos envolvendo potências.

Souza (2010) em sua análise verifica que os alunos apresentam dificuldades quanto a conversão do registro de partida para o registro de chegada. Comenta que nas construções de gráficos, os alunos partiam do registro algébrico para o registro em tabelas e após para o registro gráfico, mas apresentavam dificuldades nas construções gráficas.

Deixa como sugestão para trabalhos futuros para estudos de Funções Exponenciais e Logarítmicas utilizando atividades do Caderno do Professor da Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

O texto de Souza (2010) se aproxima muito de nosso trabalho, pois buscamos analisar o Caderno do Professor no conteúdo de Função Exponencial com os Registros de Representação Semiótica de Duval. Consideramos importante um ensino voltado a diferentes registros e observamos que alguns trabalhos enfatizam as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Função Exponencial e nesse sentido analisamos todas as situações de Aprendizagem apresentadas no Caderno do Professor sobre função exponencial identificando se há os fenômenos de congruência e não congruência defendidas na teoria de Duval.

CAPÍTULO 2

CONCEITO DE FUNÇÃO: EVOLUÇÃO HISTÓRICA

Este capítulo é dedicado a apresentar o conceito de função, desde a evolução histórica, como também sobre a abordagem desse conceito em livros e documentos como o Currículo do Estado de São Paulo inseridos pela Secretaria da Educação.

O capítulo foi estruturado com três seções, em que a primeira, são apresentados contexto histórico do conceito de função, na segunda, como os livros apresentam esse conceito e na terceira, procuramos apresentar um pouco da estrutura do currículo do Estado de São Paulo para a disciplina de Matemática.

2.1 História do conceito de função

Ao longo dos séculos a história da Matemática se constituiu com descobertas realizadas pelos matemáticos que visavam facilitar e organizar a vida na época. Com o passar dos anos foram criando e descobrindo métodos e notações matemáticas que se evoluíram ao longo dos séculos.

Segundo Sá, Souza, Silva (2003) a ideia de função não era algo recente e surgiu pela necessidade, em que o homem passou a associar uma pedra a cada animal para o controle de seu rebanho e desse modo, a relação que se faz com as pedras e os animais seria uma relação de dependência que nos levaria a ideia de função.

O conceito de Função passou por inúmeras descobertas, até chegar no que se tem hoje. Na antiguidade um dos primeiros a iniciar as descobertas foram os Babilônicos, porém não havia muito entendimento sobre o conceito de Função.

Segundo Eves (2008, p. 61) “perto do ano 2000 a.C., a aritmética babilônica havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida”. Nessa época os babilônicos, que eram construtores de tábuas para cálculos, efetuavam processos aritméticos e resolviam equações quadráticas e cúbicas, como também as raízes quadradas de números não quadrados perfeitos utilizando tábuas sexagesimais.

De acordo com Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014), uma tábua importante para a álgebra Babilônica foi a tábua de sequência de valores de n^2+n^3, que resolviam muitos problemas em que levavam a ideias principais do conceito de Função.

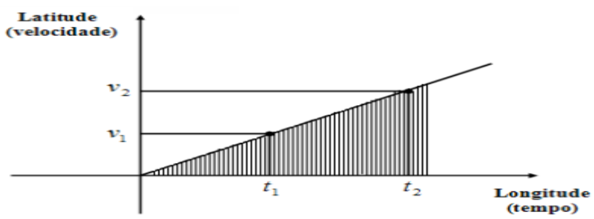
> As tábuas contendo problemas, por um lado, tratavam de situações do cotidiano, do comércio e de mensurações práticas e envolviam conhecimentos em geometria; assim, percebemos, claramente, a presença de relações entre variáveis. Por outro lado, as que envolviam, diretamente, a geometria, também mostravam ideias de funcionalidade. (ALVARENGA, BARBOSA, FERREIRA, 2014,p.163)

Outro campo explorado pelos Babilônicos foi o da astronomia, onde utilizavam as tábuas como instruções de cálculos geométricos para descrever a posição dos astros. Com esse tratamento e utilização das tábuas, os Babilônios expressavam a ideia de dependência que associavam por meio dos cálculos, contribuindo assim, para as noções iniciais de Função, com a ideia de relação entre variáveis.

No século XIV, apesar de acontecimentos como a peste negra, Nicole Oresme (1323-1382) foi o matemático que se destacou na época com o trabalho sobre a latitude das formas, onde descreveu graficamente a dependência entre velocidade e tempo.

Fonseca, Santos e Nunes (2013) representa o modelo descrito por Oresme, que segundo Boyer (2010), os termos longitude e latitude são equivalentes ao que temos hoje como abcissas e ordenadas. Como na figura 2.1.

Figura 2.1 - Modelo descrito por Oresme



Fonte: Fonseca, Santos e Nunes (2013, p.6)

As ideias de coordenadas descritas por Oresme trouxeram várias contribuições para representação gráfica de Funções, sua ideia de traçar uma figura ou gráfico de uma quantidade variável foi novidade, porém não chegou a realizar uma geometria algébrica.

A álgebra no século XVI teve um avanço com as contribuições de François Viète (1540-1603) com o simbolismo algébrico. Segundo Eves (2008), Viète inicia seus estudos baseados em variáveis, introduzindo a prática de utilizar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes.

Os trabalhos de Viéte auxiliaram René Descartes (1596-1650), na formulação algébrica para problemas geométricos. Descartes foi quem introduziu as últimas letras do alfabeto para indicar incógnita e as primeiras letras para a constante. Em 1637 em seu trabalho “La géométrie”, fez uma explicação de alguns dos princípios da geometria algébrica.

> Usando-se um segmento unitário é possível, dessa maneira, representar qualquer potência de uma variável, ou um produto de variáveis, por meio de um segmento de reta e então, quando se atribuem valores a essas variáveis, construir efetivamente o segmento de reta com os instrumentos euclidianos. Com essa aritmetização da geometria, Descartes, na primeira parte de La géométrie, marcava x num eixo dado e então um comprimento y, formando um ângulo fixo com esse eixo, com o objetivo de construir pontos cujo x e cujo y satisfizessem uma relação dada. (EVES, 2008,p.384).

Em La géométrie, Descartes tinha como objetivo utilizar processos algébricos para realizar geometria e com isso, dar significados as operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.

Desse modo, “seu método em La géométrie consiste então em partir de um problema geométrico traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geometricamente.” (BOYER, 2010, p.233).

Descartes “afirmou que uma equação de duas variáveis, indica uma dependência entre quantidades variáveis. (PONTE,1992, p.4) e representando a linguagem algébrica, as incógnitas de uma equação podem ser associadas às curvas, surgindo estudos iniciais da geometria analítica. Essas descobertas realizadas por Descartes traz uma noção para os números infinitesimais que foi fundamental para a criação do Cálculo por Newton e Leibniz.

Segundo Ponte (1992), Newton mostrou como as funções poderiam ser desenvolvidas em série de potência infinita. Em 1665 iniciou seus estudos sobre as séries infinitas e fez uma descoberta importante chamado método dos fluxos, em que para Newton uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto.

De acordo com Eves (2008)

> [...] a abcissa e a ordenada de um ponto gerador passa a ser quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluentes (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. Em notação moderna esse fluxo equivale a $\frac{dy}{dt}$, onde t representa o tempo. (EVES, 2008, p.439)

Com isso foi possível constatar que a velocidade de um corpo sobre uma curva, num dado ponto, em que durante um intervalo de tempo infinitesimal, esse ponto sobre a curva se deslocava, expressando as relações entre as grandezas, introduzindo assim, noções básicas de funções.

Leibniz, um dos maiores formadores de notação e criador do termo função, devido descrever uma quantidade relacionada a curva, introduziu o seu Cálculo Diferencial com a mesma conclusão de Newton, que na época apresentou trabalhos com mesmo enfoque temático e embora Newton tenha chegado as mesmas conclusões anos antes, Leibniz foi quem publicou os primeiros resultados.

Segundo Ponte (1992) dois anos mais tarde das publicações realizadas por Leibniz, Bernoulli, que foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal, publicou um artigo definindo uma função de variável como uma quantidade que é composta por qualquer forma dessa variável e constante. “Definiu a seguinte maneira: função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes”(SÁ, SILVA e SOUZA, 2003, p.128).

Após a definição de Bernoulli, Leonhard Euler (1707-1783), que foi seu aluno, considerou uma função como equação ou fórmulas qualquer envolvendo variáveis e constantes, e acrescentou a definição o termo expressões analíticas, diferenciando da definição de Bernoulli, que expressou com a palavra quantidade. Então, no século XVIII, Euler definiu funções no sentido analítico e contribuiu à Matemática com a implantação da notação f(x) para designar uma função que depende de x.

Euler e Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) foram dois grandes matemáticos do século XVIII. O trabalho de Lagrange influenciou bastante nas pesquisas matemáticas diante das várias contribuições. Seus estudos criou uma grande motivação ao iniciar o assunto sobre a teoria das funções de variável real. O cálculo das variações, foi um novo campo da Matemática, em que tratava de determinar uma relação funcional y=f(x) tal que uma integral seja máxima ou mínima.

As contribuições realizadas ao longo dos tempos estavam cada vez mais próximas das notações e conceitos de Funções que temos hoje. O conceito de Euler se encontrava inalterado até que Joseph Fourier (1768-1830), considerou em suas pesquisas sobre propagação do calor, o desenvolvimento de Função em séries trigonométricas, que envolviam uma relação mais geral entre variáveis do que já havia estudado, considerando a temperatura com função de duas variáveis que eram, o tempo e espaço. Mais tarde Dirichlet (1805-1859), que apresentou destaque no século XIX, deu exemplos de Funções descontínua e apresentou condições para que uma função fosse representada por uma série de Fourier.

Dirichlet sugeriu uma moderna definição para Função, onde

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, a qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. (EVES, 2008, p.661).

Essa definição apresenta uma correspondência de relação entre dois conjuntos, porém os conceitos de conjuntos não haviam sido estabelecidos. A evolução da noção de função continuou com Georg Cantor (1845-1918) quando inseriu a teoria dos conjuntos, chegando ao conceito moderno de função, pois propiciou relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, com o produto cartesiano. Sendo assim, os matemáticos estavam mudando da noção de correspondência para a noção de relações.

Na teoria dos conjuntos de Cantor, de acordo com Eves (2008, p. 661) “uma função f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos", considerando, por exemplo um conjunto A como domínio da função e conjunto B como imagem da função, chegando a uma função, chegando a um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano A x B.

George Boole (1815-1864), interpretou o conceito de Função como transformação. Ele considerou que cada elemento x se transformava em f(x). Silva (1999 c, p.31) ressalta que se "(...) trocamos x para 1, o resultado será expresso por f(1), e se na mesma função mudamos x para 0, o resultado será expresso por f(0).

Os conceitos de função ganharam uma formulação mais pertinente em termos das ideias da teoria de conjunto, o que levou a busca de formalização dos conceitos matemáticos.

Com isso o grupo Bourbaki, formado por matemáticos franceses e que adotou Nicolas Bourbaki como pseudônimo, se destacaram no século XX com publicações de textos científicos. Segundo Fonseca, Santos e Nunes, "Esse grupo acreditava que muitas definições da Matemática moderna deveriam ser repensadas" (FONSECA, SANTOS e NUNES, 2013,p.12).

Sá, Souza e Silva (2003) comenta que na obra Théorie des Ensembles o grupo Bourbaki faz a seguinte definição de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x"E, existe um e somente um elemento y"F que esteja associado a x na relação considerada.
> Dá-se o nome de Função à operação que desta forma associa a todo elemento x"E o elemento y"F que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para os elementos, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.(SÁ, SOUZA e SILVA, 2003, p.135)

De acordo com Eves (2008)

> O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. (EVES, 2008,p.661)

Podemos verificar que houve diversas mudanças no conceito de função e que a cada contribuição dos matemáticos houve uma evolução para a construção desse conceito. Algumas representações como relação entre quantidades variáveis, expressão analítica, relação entre conjuntos, foram evoluções para se chegar ao conceito que temos nos dias atuais e entre elas estão as contribuições do grupo Bourbaki.

Discutiremos na próxima seção a forma como esse assunto é apresentado em alguns livros de Matemática.

2.2 O que os livros didáticos trazem.

Nesta seção discutiremos o que alguns livros trazem sobre a função exponencial, tendo em vista que consideramos esse conceito muito importante na Matemática, já que abordam assuntos que se relacionam em várias áreas do conhecimento.

Em nossos estudos vimos que a evolução das noções de função aconteceu há vários séculos e com tratamentos diferenciados de matemáticos que aos poucos, com suas experiências e estudos, foram formando e consolidando o conceito de função, chegando a abordagens sobre a relação de conjunto.

De acordo com Lima et al. (2006, p.1), “toda a matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. ”

Com a relação de conjuntos, podemos observar que as funções vão surgindo analisando suas variáveis que representam quantidades que dependem uma da outra, sendo possível fazer a relação entre elas. Lima et al. (2006) representa as funções como “dados os conjuntos *X, Y*, uma função f: $X \to Y$ é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento x $\in X$ um elemento y= f(x) $\in Y$.

Os conjuntos *X* e *Y* se relacionam e a cada elemento de x pode-se associar um elemento de y. Nesse sentido, temos que os conceitos matemáticos, quando expressos a outros conhecimentos, nos permitem que se faça uma relação com acontecimentos da realidade através dos conceitos de função.

Existem vários tipos de funções em que podemos associar as relações observadas com situações do cotidiano. Lima et al. (2006, p.171) por exemplo, considera que [...] “uma quantia c_0, aplicada a juros fixos, capitalizados continuamente. Se chamarmos de c(t) o capital gerado a partir daquela quantia inicial depois de decorrido o tempo t, é claro que c(t) é uma função crescente de t".

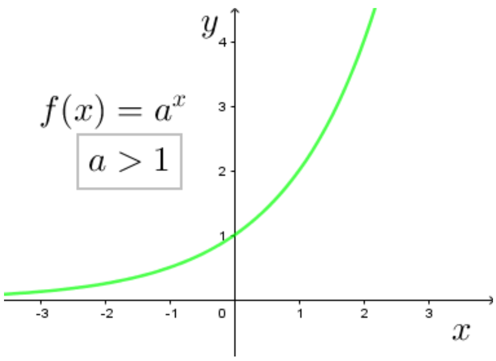
Um problema como este se relaciona com situações do cotidiano que necessita de um modelo matemático para que seja solucionado e as propriedades necessárias são encontradas com as funções exponenciais.

O crescimento e decaimento da quantidade de bactérias em determinado ambiente, também seriam um meio de relacionar as situações ocorridas através das funções. Nesse sentido, daremos uma atenção especial as funções exponenciais que são utilizadas em fenômenos naturais.

Gráfico da Função exponencial

Para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$, dada por $f(x) = a^{x}$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}\ e\ \mathbb{R}^{+}$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$. Sendo assim, temos um gráfico crescente na figura 2.3, com $a > 1$.

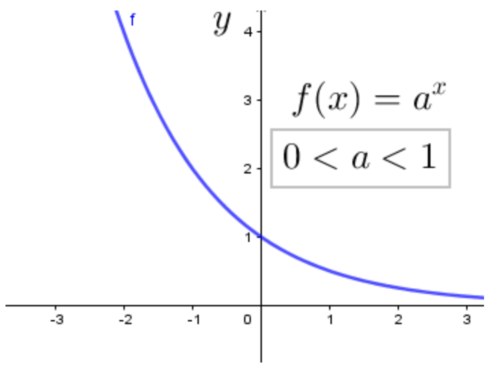
Figura 2.3– Gráfico da Função Exponencial Crescente



Fonte: Elaboração própria

Na figura 2.4, Um gráfico decrescente, com $0 < a < 1$.

Figura 2.4 – Gráfico da Função Exponencial Decrescente



Fonte: Elaboração própria

2.3 - Função Exponencial no Currículo do Estado de São Paulo

No ano de 2008, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP) iniciou-se uma proposta curricular para as escolas da rede estadual de ensino nos níveis de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A proposta curricular apresentou como prioridade as competências leitora e escritora e a escola era definida como um espaço de cultura e articulação dessa competência para aprender, com também um eixo de aprendizagem para a contextualização do mundo do trabalho.

A nova proposta buscava desenvolver a autonomia dos alunos para a aprendizagem e apresentava como foco a leitura, interpretação e produção de texto, pois a linguagem era essencial para o ser humano se comunicar, se socializar.

> A linguagem verbal, oral e escrita, representada pela língua materna, viabiliza a compreensão e o encontro dos discursos utilizados em diferentes esferas da vida social. É com a língua materna e por meio dela que as formas sociais arbitrárias de visão de mundo são incorporadas e utilizadas como instrumentos de conhecimento e comunicação. (SÃO PAULO, 2011, p.16)

Nesse sentido, temos que leitura e escrita, como também a produção de texto, estão presentes na vida de uma pessoa, seja na escola ou no seu trabalho, e são competências que fazem parte do desenvolvimento do ser humano.

A língua materna e a Matemática são consideradas como dois componentes básicos do currículo, porém, a Matemática na proposta curricular foi tratada como uma área específica, mas, em parceria com a língua materna.

Ao longo da escola básica, o currículo de Matemática aponta como competências básicas a serem desenvolvidas, e divididas em três eixos que são: expressão/compreensão, argumentação/decisão, contextualização abstrato, em que os alunos necessitam expressar e compreender por meio de diversas linguagens, leitura de texto, construções de tabelas e gráficos, argumentar, analisar informações com realizações de ações efetivas e contextualizar e imaginar novas potencialidades e perspectivas.

Quanto a organização dos conteúdos, tanto no Ensino Médio como no Ensino Fundamental, é divididos em três blocos temáticos: números, geometria e relações. Os números envolvem noções de contagem, medida, representação simbólica e algébrica, enquanto a geometria diz respeito as formas, relações entre elementos de figuras planas e espaciais e relações envolvem noções de medida, relações métricas, relações de interdependência como as de proporcionalidade ou as associadas a ideia de função.

As organizações dos conteúdos foram dispostas em um conjunto de documentos dirigidos aos professores e alunos, organizados por disciplina/ série/ano por bimestre. Foram oferecidos esses materiais de apoio aos professores, da nova proposta curricular, que apresentava cada tema de uma maneira significativa e articulada entre os diversos temas.

No início do ano letivo de 2008, antes da proposta curricular, chegaram as escolas o material “jornal do aluno”, com atividades para todas as disciplinas promovendo interações, como também a “revista do professor” que continham orientações para as atividades do jornal. A utilização desse material teve como intuito preparar alunos e professores para a inserção da nova proposta curricular e fazer um reforço sobre as competências que foram diagnosticadas por meio de avaliações externas que os alunos ainda não dominavam.

Após a utilização desse jornal do aluno, foi implementado alguns documentos orientadores como o Caderno do Professor, que traziam conteúdos que deveriam ser abordados durante o ano letivo. No ano de 2009, implementou o caderno do aluno, com proposta de atividades para auxiliar os alunos em sala de aula. A cada bimestre eram enviados os cadernos para o aluno e professor.

No caderno do professor a apresentação dos conteúdos foram organizados de forma sistemática pelos bimestres, havendo um ou dois temas dominantes, buscando apresentar os temas de forma significativa. Além disso, apresentava como sugestões abordagens favorecendo o uso de tecnologias, modelagem matemática, materiais concretos relacionados ao conteúdo do bimestre. Neles são apresentadas situações de aprendizagem com competências e habilidades organizados por série/ano e com orientações para abordagens e sala de aula, como também avaliação e recuperação.

Com as competências descritas no currículo, espera-se que os alunos desenvolvam modos de se relacionar, raciocinar, interagir, ter responsabilidade, tomar decisões de modo que resolvam situações cotidianas. Além disso, o currículo busca articular as competências do currículo com as pertencentes aos alunos.

A habilidade vem de modo a promover a compreensão, em que são desenvolvidas na busca das competências, sendo assim, temos que as competências são um conjunto de habilidades desenvolvidas. Elas estão associadas ao saber fazer. As habilidades podem ser vistas como uma aplicação de determinada competência.

“É com essas competências e habilidades que o aluno contará para fazer a leitura crítica do mundo, questionando para melhor compreendê-lo, inferindo questões e compartilhando ideias”. (SÃO PAULO, 2011, p.14)

O aluno ao desenvolver as competências e habilidades, vai aprendendo a usá-las de maneira adequada. Portanto, o currículo descreve que a escola focando em competências e habilidades em seu trabalho preparará os alunos para lidar com problemas do cotidiano e com a capacidade de resolvê-los.

Além das competências e habilidades, em cada bimestre, o tema referente ao conteúdo a ser estudado, foi dividido em oito unidades, e dentre essas oitos unidades, foram escolhidas quatro situações de aprendizagem que constituem quatro centros de interesse a serem desenvolvidos com os alunos.

Nesse material as noções de função exponencial são tratadas no volume 2, referente ao 3º bimestre, em que maiores detalhes sobre a situação de aprendizagem serão apresentados no capítulo de análise.

CAPÍTULO 3

REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Neste capítulo discorremos sobre a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval que embasam nossos estudos e objetivo

Compõe este capítulo três seções em que na primeira discorreremos sobre significados das representações e sua importância para os diferentes registros de um objeto matemático, como também, sobre semiótica e os signos que representam.

Na segunda seção abordaremos os diferentes registros de representação e as transformações que podem ocorrer nos registros de representação, além das dificuldades que podem ser encontradas nas transformações das representações matemáticas.

Na terceira versaremos sobre os fenômenos de congruência e não congruência e alguns critérios que auxiliam no seu entendimento, inclusive os pontos que apresentam facilidade ou inibição no processo de ensino e aprendizagem .

3.1 Representação e semiótica

Representação é uma palavra considerada importante no ensino e aprendizagem de Matemática. Com ela podemos reproduzir, identificar um símbolo, uma imagem referente a um objeto, representar uma escrita, um conjunto, uma notação, funções matemáticas, como também a representação de pontos, segmentos.

Porém, diante da diversidade de transformações de representações de um objeto surgem as dificuldades dos alunos, que muitas vezes tem relação com significados e funcionamento do pensamento matemático, prejudicando o entendimento e possibilitando que confundam a representação e o objeto matemático representado.

As representações são essenciais a atividade cognitiva do pensamento. Se faz necessária uma comunicação que leve o aluno a organizar e conectar com suas ideias, para criação de novos conhecimentos e pontos de vista que poderão auxiliar no entendimento e percepção, pois,

> “[...] os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Basta considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disso: os procedimentos, o seu custo, dependem do sistema de escrita escolhido. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática” (DUVAL, 2012b, p. 268).

Nesse sentido, se nos depararmos com objetos matemáticos, serão necessários à utilização de representações para poder manipulá-los, dando um tratamento, empregando uma variedade de representações semióticas. Mas, o que são representações semióticas?

A semiótica é a ciência dos signos, ela estuda as formas de se comunicar através de linguagens verbais e não verbais, ou seja, as diversas linguagens existentes que nos auxiliam na compreensão do mundo.

Os signos são considerados representações que se referem a um determinado objeto analisado. Segundo Santaella (2017, p.90)

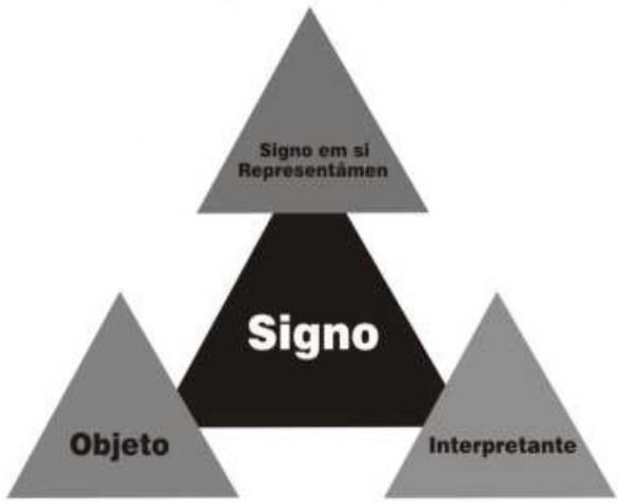
> [...] o signo é uma coisa que representa uma outra coisa: seu objeto. Ele só pode funcionar como signo se carregar esse poder de representar, substituir uma outra coisa diferente dele. Ora, o signo não é o objeto. Ele apenas está no lugar do objeto. Portanto, ele só pode representar esse objeto de um certo modo e numa certa capacidade. (SANTAELLA, 2017, p. 90)

Os signos nos fazem lembrar de algo que é perceptivo aos nossos sentidos. Segundo Pires (2014, p.158) “um signo pode representar de maneira simplista e de fácil entendimento um objeto, e muitas vezes, tem a finalidade de ativar a mente do indivíduo, chamando a atenção para uma mensagem importante”. O ser humano e sua existência utiliza diferentes formas de linguagem que consiste em perceber e processar informações que são oriundas dos signos.

Segundo Medeiros (2019, p.4) “Os signos são tão numerosos e variados que podem ser divididos em grupos, categorias, classes para efeito de estudo.” Peirce (1839-1914) apresentou três maneiras de o signo mediar o significado que são: ícone, índice e símbolo. No ícone tem parâmetro com relação a semelhança com o objeto, no índice que o signo possua uma relação de causalidade indicando seu significado e no símbolo uma relação convencional entre o signo e seu significado.

Esses signos são descritos como uma relação triádica, devendo contar com um representâmem, o que funciona como signo, o objeto, o qual o signo se refere, e interpretante, sentido dado pelo signo naquele que o interpreta, como mostra a figura 3.1.

Figura 3.1- Relação triádica



Fonte: MEDEIROS, 2019, p.4

O Signo seria o representante que transmite a ideia do objeto representado ao interpretante, que é o significado daquilo que vemos. O processo de apreensão e compreensão do signo é chamado de semiose. Ou seja, a maneira como um indivíduo utiliza um signo, um objeto e sua interpretação, estabelecendo um processo de significação.

3.2 Os registros de representação semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval a partir dos estudos sobre semiótica. Sua contribuição é de grande importância para a Educação Matemática. E a exploração de registros de representações de um determinado objeto matemático pode levar a melhora da aprendizagem.

De acordo com Duval (2011a, p.83) “[...] para considerar um sistema semiótico como registro, é preciso identificar as operações de produção de representações que ele permite executar de maneira original e específica”. A variedade dos registros de representação de um objeto, não tem o mesmo conteúdo, e se faz necessário considerar diferentes representações de um mesmo objeto para que não confunda uma representação com o objeto representado. Temos na figura 3.2, alguns registros de representação de um determinado objeto.

Figura:3.2 - Possíveis registros de representação de um objeto matemático

Fonte: Henriques, Almouloud (2016, p.468)

As representações não apresentam as mesmas características de um objeto, e esta distinção é fundamental para a análise do conhecimento. “A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos. “ (DUVAL, 2011a, p.15).

E aprender por nós mesmos é essencial para a aprendizagem matemática, pois desse modo chegará à compreensão através do pensamento matemático, adquirido com as diferentes representações que nos levam a aquisição de conhecimento.

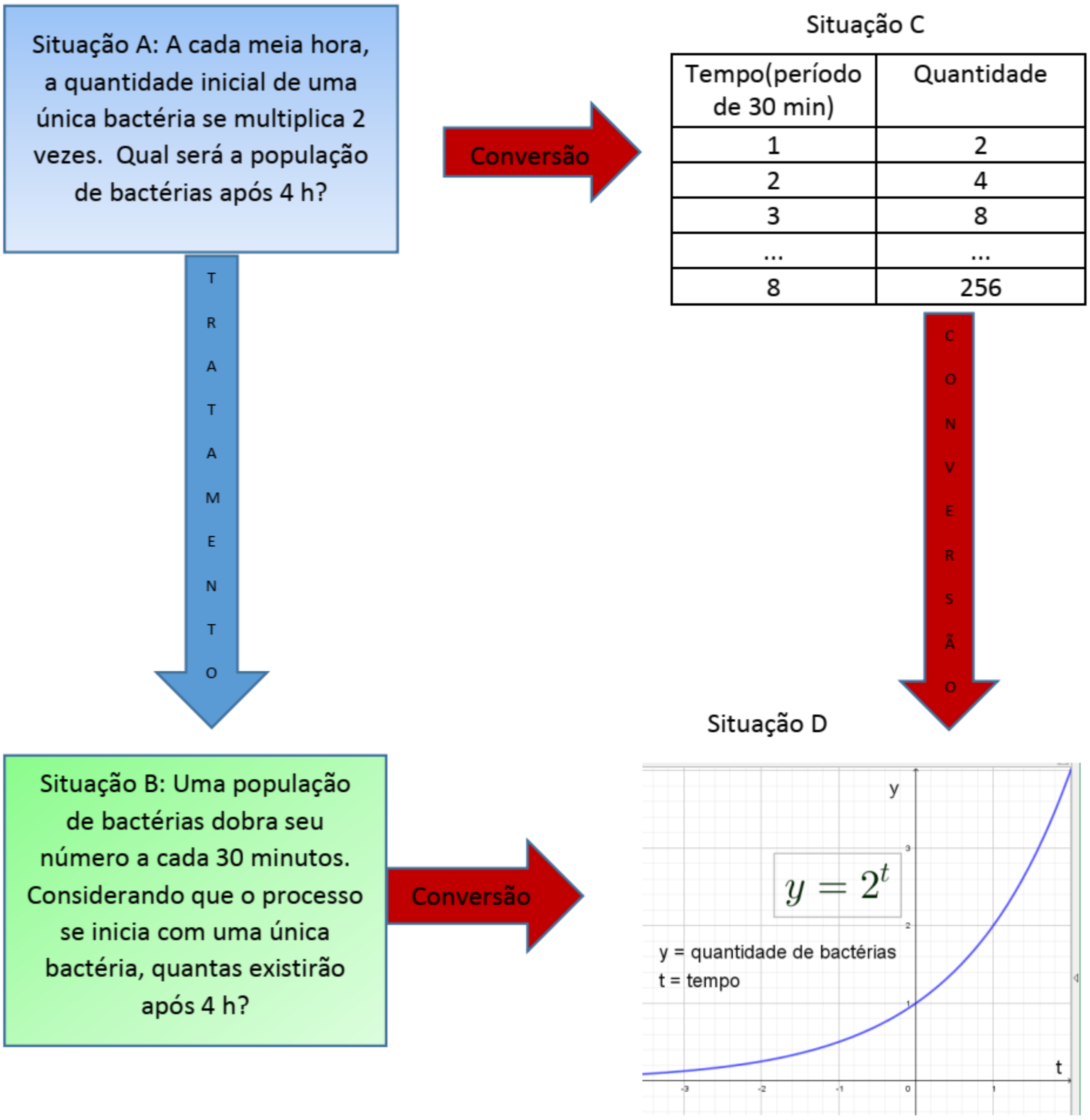
O essencial em uma representação semiótica são as transformações possíveis e não a representação em si. É através dessas transformações em diferentes representações semióticas que poderá desenvolver a compreensão dos alunos. De acordo com Pires (2014, P.169) “A riqueza matemática das transformações semióticas está nas transformações que se podem fazer com elas e não na própria representação”. Com isso as transformações são importantíssimas para uma aprendizagem matemática, pois através delas os alunos poderão demonstrar seus conhecimentos sobre determinado assunto. A aquisição da autonomia do aluno em realizar as transformações demonstra que obteve entendimento. Porém, essas transformações de representação em outras representações, são fatores de grande parte das dificuldades cognitivas encontradas pelos alunos. Segundo Duval (2011a, p.47) “A dificuldade cognitiva vem de fato que duas representações diferentes não apresentam ou não explicitam a mesma coisa do objeto que elas representam. ”

Para que um sistema semiótico seja um registro de representação, segundo Duval (2009) deve-se permitir três atividades cognitivas ligadas a semiose. A primeira delas seria a identificação do objeto matemático. Essa identificação seria a formação de uma representação que poderia ser utilizada, considerando-se a seleção de dados, e as condições de identificação e reconhecimento de uma representação.

As outras duas atividades cognitivas são os tipos de transformações de uma representação: o tratamento e a conversão. Os tratamentos são transformações internas de um registro, em que uma representação é transformada no mesmo sistema de registro, enquanto as conversões são transformações externas ao registro de início. As conversões são transformações de uma representação em outro registro de representação, por exemplo, uma representação algébrica mudar de registro para uma representação gráfica.

A figura 3.3 ilustra exemplos de tratamento e conversão realizados com uma situação-problema sobre função exponencial para identificar algumas diferenças entre as duas transformações.

Figura 3.3 - Exemplo de tratamento e conversão



Fonte: Autora

A utilização da representação semiótica é de extrema importância, pois será através das representações que terá acesso ao objeto matemático. O sistema semiótico produzido nos seguintes registros de representações na figura 3.3 apresentam conteúdos diferentes, e é importante que o aluno consiga realizar as diferentes transformações para uma efetiva aquisição de conhecimento. Podemos observar as representações na situação A e B em que obtemos um tratamento na língua materna, pois houve alterações na escrita. Já a situação C, como uma resolução do problema, apresenta a construção de uma tabela que comparado as situações A e B houve uma mudança de registro, ocasionando uma conversão. E na situação D, temos uma representação gráfica, outro registro distinto das situações A, B e C havendo novamente uma conversão.

As transformações de representação em outros registros de representação fornecem habilidades aos alunos e conhecimento sobre determinado objeto. Um aluno que tem a habilidade de produzir ou reconhecer as transformações de representação demonstra que possui uma compreensão matemática. Duval (1999) enfatiza que a representação e visualização são fundamentais para a compreensão matemática e essa compreensão requer que não se confunda os objetos matemáticos com as representações utilizadas, que se tornam possíveis mediante a mobilização de diferentes registros de um mesmo objeto e são por meio desses diferentes registros que deparamos com as transformações de tratamento e conversão.

Embora as transformações de tratamento e conversão sejam importantes, a conversão pode gerar algumas dificuldades na compreensão matemática. Essa transformação pode ser realizada ao observar enunciados na língua materna, como também a transformação em expressões algébricas ou representação gráfica.

Os enunciados na língua materna muitas vezes, traz incompreensão aos alunos, pelo fato de apresentar um linguajar diferente do que estão acostumados. Segundo Duval (2011a, p.125)" Existe entre a língua natural e os outros registros uma distância cognitiva considerável, mesmo os outros registros discursivos próprios da Matemática ou da lógica".

Os gráficos são um tipo de registro de representação que muitas vezes são utilizados pela facilidade de visualização favorecendo a compreensão, pois se apresentam de forma mais simples.

Em uma construção gráfica, os estudantes podem apresentar êxito para encontrar as coordenadas para uma plotagem, ou muitas vezes para um reconhecimento se o gráfico apresenta uma reta ou curva, se cresce ou decresce, mas, necessitam ser capazes de visualizar os gráficos de modo a reconhecer as propriedades que apresentam.

De acordo com Duval (2011b) uma representação gráfica pode apresentar três regras semióticas de correspondência, que são abordagem ponto a ponto, abordagem de extensão do traçado, interpolação, exploração e interpretação global. Em uma abordagem ponto a ponto através de um par de números permite a identificação de um ponto e esse ponto traduz um par de números, tornando possível a identificação de pontos que favorece a construção de um gráfico, que mediante a uma localização em um plano com dois eixos, permite traçar um gráfico correspondente a uma expressão algébrica. A extensão do traçado leva em conta os dados que os traçados fornecem e na interpretação global é necessária uma análise da imagem formada com os traçados e a expressão algébrica, em que toda modificação realizada na imagem, leva uma modificação na expressão algébrica e essas modificações necessitam ser identificadas para uma interpretação, ou seja, análise de congruência dos diferentes registros, como por exemplo, quando quer encontrar uma equação através de uma análise gráfica.

Os estudantes ao realizarem uma passagem de expressões algébricas para a gráfica, podem utilizar somente o ponto a ponto, porém quando se deparam com o inverso, do gráfico para a representação algébrica exige uma interpretação global, e atenção para as propriedades. Nesse momento que são apresentadas maiores dificuldades, em que acontece uma conversão que traz obstáculos para uma efetiva aprendizagem matemática.

> A interpretação das representações gráficas cartesianas **depende de uma identificação precisa de todos os valores das variáveis visuais pertinentes e do reconhecimento qualitativo das unidades da expressão simbólica correspondente.** (DUVAL, 2011b, p.111, grifo do autor)

Assim sendo, os alunos necessitam conhecer as propriedades das representações gráficas como também das expressões algébricas para que possam fazer as identificações necessárias para interpretação e mudança de registros. Nesse caso, voltamos a questão de que os registros de representação necessitam de abordagens que levem os alunos a transitar pelos diferentes registros a ponto de identificar as propriedades de cada um para realização da conversão. E a conversão requer distinguir as diferenças nos conteúdos. Além disso, temos que as conversões apresentam dois diferentes fenômenos: congruência e não congruência que discutiremos na próxima seção.

3.3 Os fenômenos de congruência e não congruência

O processo de conversão requer diferenciar um conteúdo de uma representação e o que ela representa. Para determinar se duas representações são congruentes ou não, precisamos separar em unidades significantes, de modo que possam ser colocadas em correspondência.

Para uma análise de conversão necessitamos de uma comparação entre o registro de representação de partida com o registro de representação de chegada. Considerando por exemplo, um enunciado na língua materna como registro de representação de partida e comparando com uma expressão algébrica, registro de representação de chegada, a transformação que acontece pode transparecer a relação entre os termos significantes entre o enunciado e a expressão algébrica, ou seja, o registro de representação de chegada deixa transparecer o registro de representação de partida, ocasionando uma conversão congruente, pois haverá uma relação de congruência semântica entre os termos significantes. Porém, se a representação de chegada não transparecer o registro de partida denominamos uma conversão de não congruência.

> Quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, a conversão é trivial e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código. Quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente. (DUVAL, 2012b, p.283-284)

Com o fenômeno de congruência, o aluno pode acessar seus múltiplos conhecimentos em memória para a compreensão dos registros de representação estudados. No caso do fenômeno de não congruência são identificadas com mais frequência dificuldades nas atividades que requerem uma conversão de representações, pois são menos espontâneas e mais difícil para a compreensão da grande maioria dos alunos.

Duval (2009, p. 64) enfatiza que devemos analisar como pode ocorrer um procedimento de correspondência sobre uma conversão e nos deixa um exemplo como a expressão seguinte:

“o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa” y>x.

Nesse caso, a conversão acontece de forma espontânea, com uma correspondência de termo a termo entre as unidades significantes. E a conversão inversa permite reencontrar a expressão inicial do registro de partida, o que caracteriza o fenômeno de congruência.

Podemos observar no exemplo, que uma única conversão não é suficiente para reconhecer as correspondências e não correspondências de um objeto em relação a representação de partida e a representação de chegada, é preciso variar o conteúdo de uma representação de partida efetuando uma nova conversão diferente da realizada anteriormente.

A variação de congruência e não congruência diz respeito a relação existente entre o registro de partida e o registro de chegada em que um objeto é apresentado antes e depois da conversão.

Para determinar uma congruência, embora não sejam suficientes, necessitamos de três critérios.

I- Uma correspondência semântica entre suas unidades significantes.

II - Univocidade semântica terminal: a cada unidade significante de registro de representação partida corresponde uma só unidade significante de registro de representação de chegada.

III- Existência de correspondência de mesma ordem de apreensão das unidades significantes em cada uma das duas representações.

Atendendo aos três critérios, temos um fenômeno de congruência, caso a correspondência semântica atende a alguns dos critérios ou a nenhum, dizemos que há uma não congruência, podendo o fenômeno ser de maior ou menor intensidade. A dificuldade da conversão de uma representação depende do grau da não congruência entre a representação de partida e a representação de chegada.

Além disso, Duval (2011a, p. 121) diz que “A variação de congruência e não congruência é uma das maiores causas de incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos”.

A facilidade ou inibição do funcionamento do processo cognitivo dependem da mesma variação de congruência e não congruência. Duval (2011a) comenta sobre três ideias dominante que estão de acordo com a facilidade e inibição e que ocorre tanto nas teorias como nas práticas. As ideias são:

> [...] a multirrepresentação, isto é, a apresentação em paralelo de enunciados, esquemas, tabelas, imagens, facilitaria a compreensão, [...] que os problemas não deveriam ser apresentados por meio de enunciados em situação de monorrepresentação, mas com base em um material, ou com base em situações de jogo das quais os alunos poderiam se apropriar mais facilmente. [...]. Quando verificamos a escolha dos problemas pelos professores, observamos a tendência de escolher de preferência os problemas em que as conversões a realizar são congruentes, e rejeitar os problemas em que as conversões a realizar são não congruentes [...] (DUVAL,2011a, p. 121-122).

Acreditamos que a multirrepresentação facilita a compreensão pelo fato que a compreensão dos alunos pode ser adquirida a partir do conhecimento e o manuseio dos diferentes tipos de representação. Os enunciados necessitam de uma atenção especial, buscando situações mais atraentes e formas que levam a uma interpretação correta. Além disso, as escolhas dos professores necessitam de uma abordagem que levem os alunos a utilizar, identificar e compreender os dois fenômenos, tendo em vista que os fenômenos de não congruência são mais numerosos que os fenômenos de congruência, porém são poucos explorados, o que contribui para a dificuldade dos alunos quando se deparam com problemas que contém o fenômeno de não congruência.

Segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, a compreensão matemática pode ser adquirida através da habilidade de mudar os registros, além da necessidade de pelo menos dois registros de representação. Sendo assim, acreditamos que uma análise de questões que envolvem alguns registros de representação e que tenham foco nos fenômenos de congruência e não congruência podem auxiliar na aprendizagem e compreensão de atividades Matemática.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA

Neste capítulo descrevemos os caminhos trilhados para a realização da pesquisa e o material utilizado para a análise para responder à questão de investigação. Organizamos em três seções, em que a primeira apresenta a natureza da pesquisa, a segunda o contexto da pesquisa e a terceira os procedimentos para a análise.

4.1 A Pesquisa

A pesquisa tem uma abordagem qualitativa empregado à técnica de análise bibliográfica. A escolha por esta abordagem foi motivada pelo fato de os alunos apresentarem algumas dificuldades diante de enunciados e resoluções das atividades propostas nos materiais que se constituíram como fonte de dados para a realização deste estudo, são eles: o caderno do Professor e o livro didático.

Segundo Gil (2008, p.50) “A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído de livros e artigos científicos.” Assim, o estudo em questão se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica pelo fato de que queremos explicitar e construir hipóteses sobre as transformações entre os diferentes Registros de Representação Semiótica que são exigidas para a realização das atividades encontrados no Caderno do Professor e no livro didático a respeito, no que tange a função exponencial.

Ainda de acordo com Gil (2008, p.50) “Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo.” Nesse sentido, nos convencemos de que a presente pesquisa tem cunho bibliográfico tendo em vista que será realizada uma análise de investigativa sobre as transformações entre diferentes registros de representação semiótica e, a partir disso, procurar desvelar fatores que estão relacionados com a compreensão das noções de função exponencial.

Em uma pesquisa bibliográfica de acordo com Cervo (2007, p.60) “[...] busca-se conhecer e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado sobre determinado assunto, tema ou problema”. Além disso, Gil (2008, p.50) destaca que “A principal vantagem de uma pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente”.

Pesquisa desse tipo nos permite conhecer as diferentes contribuições sobre determinado assunto a ser estudado, além de fornecer vários registros disponíveis de pesquisas anteriores. A escolha por este tipo de pesquisa tem por intuito contribuir para um olhar diferenciado sobre o ensino de função exponencial por meio do material utilizado por professores e alunos. A seguir, passamos para a apresentação do material que analisamos neste trabalho.

4.2 Descrição do material utilizado

Em 2008 a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo implementou o Currículo do Estado de São Paulo e lançou materiais como o Caderno do Professor. Esses cadernos foram separados por disciplinas e divididos por série, contando com quatro volumes durante o ano.

Cada volume referenciava um bimestre, em que apresentava quatro situações de Aprendizagem, envolvendo conteúdos, habilidades e competências organizados para a série a qual o material era destinado, acompanhados de orientações, avaliações e recuperação.

Após alguns anos, passou-se a constituir em dois volumes, em que cada um contava com oito Situações de Aprendizagem, totalizando 16 durante o ano, sendo no Ensino Médio nas três séries um total 48 situações de aprendizagem.

Cada situação de aprendizagem apresentava inicialmente um quadro de conteúdos, temas, competências e habilidades e sugestões de estratégias.

Nesse trabalho vamos analisar o Caderno do Professor que contempla a 1ª Série do Ensino Médio sobre o conteúdo função exponencial que se encontra no volume 2, Situação de Aprendizagem 1.

A situação de aprendizagem começa com um breve comentário sobre o seu objetivo, que diz respeito a consolidar as noções de potenciação com extensão para expoentes negativos, racionais ou irracionais. Indica aos professores trabalhar com uma revisão de potência e descreve que partindo de uma situação concreta, serão destacados apenas fatos fundamentais para a compreensão da função exponencial. Apresenta alguns fatos sobre a potência e na sequência nove atividades que envolvem potência, construção de gráficos utilizando malha quadriculada e *software*.

O ano de 2019, consta como ano de transição, em que os materiais serão reconstituídos à luz da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do currículo paulista.

Assim, o material reformulado passou a ser constituído por um caderno por áreas de conhecimento, organizados em períodos bimestrais. O caderno de Matemática contém 21 exercícios sobre função exponencial.

Outro material analisado no presente estudo é o livro didático aprovado pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) "Matemática, Ciência e Aplicações" de Iezzi et al. (2016) e adotado pela escola na qual a autora deste trabalho leciona. A coleção de livros conta com três volumes, totalizando 33 capítulos distribuídos nas séries do Ensino Médio. O volume 1 possui 13 capítulos e dentre eles, o capítulo 7 apresenta nosso objeto de estudo, a função exponencial.

O capítulo se inicia com uma introdução às funções exponenciais citando aplicações relacionadas ao cotidiano. Segue com uma revisão de potências de expoentes natural, inteiro negativo, racional, irracional, em que apresenta expoente irracional, para calcular aproximações por falta e excesso. e suas propriedades. Define a função exponencial e apresenta seus conceitos e gráficos, como também apresenta o número irracional e e suas propriedades. Continua com aplicações no mundo de trabalho, e após mostra as equações exponenciais. Finaliza o capítulo com textos explicativos constituídos por tabelas e gráficos para as aplicações de meia-vida e radioatividade que apresentam comportamento de uma função exponencial. Conta com 36 exercícios relacionados ao exposto acima, dos quais, serão analisados, os que apresentam registros de representações parecidos com o caderno do professor, para uma comparação, os que de certa forma se repetidos ou exigirem transformações mobilizando as mesmas representações de um exercício já analisado serão desconsiderados.

4.3 Descrição da categoria de análise

Ao realizar as atividades presentes nos materiais, muitas vezes os estudantes se deparam com dificuldades que se relacionam com a interpretação de enunciado, a manipulação de diferentes representações, ou seja, as diversas transformações de representações que muitas vezes exige a mobilização e a coordenação de pelo menos duas representações do objeto, o que acaba gerando a incompreensão caso o aluno não consiga mobilizar as representações necessárias para realizar a transformação. Os PCN nos mostram que um dos objetivos gerais da aprendizagem matemática está relacionado ao aluno

> [...]“comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemática.” (BRASIL, 2007,p. 48)

Contudo, para que isso ocorra, os alunos necessitam de um conhecimento apurado dos conceitos matemáticos, para que possam fazer uma conexão entre as diferentes representações e seu objeto. Analisando alguns documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) podemos verificar que uma das competências específicas de Matemática está relacionada ao aluno

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2018, p.523)

Nesse sentido e, contemplando o objetivo deste trabalho de analisar como o conceito de função exponencial é apresentado nesses materiais didáticos sob a ótica da teoria dos Registros de Representação Semiótica no que tange aos fenômenos de congruência e não congruência. De acordo com o exposto, decidimos adotar três categorias de análise que são: tratamento, conversão e, com relação as conversões, os fenômenos de congruência e não congruência.

Serão analisados o que os materiais contemplam sobre os diferentes registros de representação. E para isso, utilizaremos como inspiração para a análise, o método Cornell, que consiste em dividir a página de anotações em três seções.

A categorização consiste em apresentar a questão, sua solução e assim identificar um tratamento, que sinalizaremos pela cor azul; uma conversão sinalizaremos seu contorno pela cor laranja e, se a conversão apresentar o fenômeno de congruência seu preenchimento será verde e, caso, for identificado o fenômeno de não congruência seu preenchimento será vermelho.

A figura 4.1 ilustra como serão apresentadas as atividades que serão analisadas no capítulo a seguir.

Figura 4.1 – Exemplo dos quadros para análise de acordo com a teoria de Duval.

Fonte: Elaboração própria

A cada questão analisada identificaremos com pelo menos uma das informações descritas acima ou até mesmo com as três, identificando o tipo de transformação realizada. Salientamos que é importante que os exercícios tragam conversões e não fiquem apenas no tratamento. Buscamos com essas informações um auxílio para amenizar os problemas que afetam o processo de ensino e aprendizagem. E é com essa análise que buscamos concretizar nosso objetivo com intuito de contribuir para um conhecimento que venha subsidiar a aquisição da aprendizagem. Portanto, no próximo capítulo, apresentaremos a análise por meio dos instrumentos descritos neste capítulo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE

Neste capítulo apresentaremos a análise de dados com o objetivo de descrever e interpretar os dados a luz dos pressupostos teóricos que embasaram este estudo, como também de alguns resultados de pesquisas evidenciados na revisão de literatura. Nesse sentido, conforme exposto no Capítulo 4 , os dados foram organizados em quadros, para identificação dos Registros de Representação Semiótica propostos por Raymond Duval (1999, 2009, 2011a, 2011b), dividindo o capítulo em duas seções, uma para a análise do Caderno do Professor do Estado de São Paulo e outra para a análise do livro didático "Matemática, Ciência e Aplicações" de Iezzi et al. (2016).

5.1- Análise das atividades do Caderno do Professor

Na análise das atividades selecionadas focamos nossos estudos na identificação de caminhos para realizar o tratamento e a conversão dos registros de representação à luz dos Registros de Representação Semiótica propostos por Raymond Duval (1999, 2009, 2011a, 2011b), com intuito de observar e identificar como os fenômenos de congruência e não congruência aparecem nos materiais escolhidos para a análise. Como um auxílio, buscamos utilizar uma técnica de anotação conhecida como o método de Cornell. Esse método foi desenvolvido por Walter Pauk, professor da Universidade de Cornell, na década de 1950, em que fornece um formato sistemático para a organização das anotações. O método consiste em dividir a página de anotação em três seções, uma para anotar a pergunta, outra para parafrasear as principais ideias e outra para resumi-las.

Adaptando aos nossos estudos, utilizaremos o formato para inserir a representação de partida e chegada dos registros de representação como também a identificação de um tratamento, conversão congruente ou conversão não congruente.

Na sequência apresentamos as atividades selecionadas referentes a Situação de Aprendizagem 1- As potências e o crescimento/ decrescimento exponencial: A Função Exponencial, do Caderno do Professor do Estado de São

Paulo, que totalizam em 9 atividades conforme descrevemos anteriormente na metodologia.

A primeira atividade traz uma revisão de potências para iniciar a exploração da Função Exponencial, algo também descrito por Lima et al. (2006) e Iezzi et al. (2016) em seus livros, que conforme descritos na seção 2.2 inicia a apresentação dos conceitos de Função Exponencial com uma revisão de potência com expoente natural. O quadro 5.1 faz parte da atividade 1, a qual exemplifica uma situação descrita na tabela de alguns fatos sobre as potências

Quadro 5.1- Seção Leitura e análise de texto.

Registro de Partida

Suponhamos que no país X a produção de determinado alimento foi igual a uma tonelada no final do ano de 2000. Em virtude dos incentivos econômicos, essa produção passou a triplicar anualmente a partir daquele momento.

Uma tabela com as quantidades produzidas ao final de cada ano é apresentada a seguir.

Registro de Chegada

Ano	Produção P (em toneladas)	Potência correspondente
2000	1	3^0
2001	3	3^1
2002	9	3^2
2003	27	3^3
2004	81	3^4
2005	243	3^5
2006	729	3^6
2007	2187	3^7
2008	6561	3^8
2009	19683	3^9
...	...	...
2015	14 348 907	3^{15}
2000 + n		3^n

Conversão Congruente | **Tratamento**

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.12), com adaptações

Achamos interessante analisar esse quadro pois, por mais que a atividade seja apresentada apenas para a leitura e não leve o aluno a realizar nenhum registro por ser apresentada toda preenchida, uma abordagem visando o preenchimento da tabela pelo aluno, traria ou resgataria vários conhecimentos, pois apresenta mais que uma transformação. A apresentação de várias transformações podem levar o aluno a aquisição de habilidades, que vem de acordo com os dizeres de Pires (2014),de que a riqueza matemática das transformações semióticas está nas transformações que se podem fazer com elas, e nesse sentido, uma atividade que vise o aluno a realizar várias transformações semióticas de um mesmo objeto, só vem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

Observando a atividade no quadro 5.1, e considerando o enunciado, registro de partida, a linguagem natural transformou em um registro de tabela, denominado registro de chegada, ocorrendo assim uma conversão, pois houve uma mudança no registro. Comparando os registros de partida e chegada, podemos observar que o registro de partida deixa transparecer o registro de chegada , que conduz naturalmente a representação da sequência apresentada na tabela. Além disso para uma verificação do tipo de congruência temos que, Duval (2009) nos diz, que uma conversão pode ser congruente se atender há três critérios, que são: correspondência semântica, univocidade semântica terminal e existência de correspondência de mesma ordem e caso contrário será não congruente.

Analisando a atividade podemos observar que quando o enunciado diz que a produção de determinado alimento foi igual a 1 tonelada no final do ano 2000 e que a produção passou a triplicar anualmente a partir daquele momento, temos que a produção passou a ser 3 vezes maior, ou seja, na língua materna apresenta com a palavra triplo enquanto que no registro algébrico encontramos o número 3, que possui o significado de que 3 vezes maior significa triplicar, o que caracteriza uma correspondência semântica. Em relação a univocidade semântica, como triplica, no registro de chegada está 3 vezes admitindo somente esse significado e quanto a conservação da ordem, 3 vezes tem o significado de triplicar, portanto temos uma conversão congruente

Olhando a tabela temos uma transformação de registro numérico, em que a transformação continua no mesmo sistema de registro, considerada por Duval (2009), uma transformação interna, que recebe o nome de tratamento. Ao multiplicar a produção em toneladas e dar a correspondência em potências estamos realizando um tratamento dentro do mesmo registro.

Sendo assim, a questão analisada apresenta uma transformação do registro da língua natural para o registro numérico, uma conversão congruente, seguido de uma transformação dentro do mesmo registro, ou seja, um tratamento.

Após a apresentação dos dados descritos no quadro 5.1, a Situação de Aprendizagem, apresenta perguntas relacionadas a tabela, que estão descritas no quadro 5.2.

Quadro 5.2- Atividade 1- Caderno do Professor

Registro de Partida	Registro de Chegada
1.1- Tomando a situação descrita pela tabela, como você representaria a produção **P** do país **X** meio ano após o início da produção?	1.1-Calcular $P = 3^{0,5}$, por exemplo, significaria estimar a produção do alimento na metade do ano de 2001, ou seja, 0,5 ano após o momento em que a produção começou a triplicar ano a ano. Uma interpretação natural para $3^{0,5}$, portanto, foi a seguinte: Como se espera que $3^{0,5}$. $3^{0,5}$ seja igual a $3^{0,5+0,5}$, ou seja, 3^1, segue daí que $3^{0,5}$ é uma nova maneira de escrever$\sqrt{3}$, ou seja, $3^{0,5}$ = $3^{\frac{1}{2}}$ = $\sqrt{3}$ Dessa maneira, $3^{1,5}$ representaria a produção no meio do ano, entre 2001 e 2002, e teríamos $3^{1,5}$ = $3^{\frac{3}{2}}$ = 3^1. $3^{0,5}$ =3 $\sqrt{3}$
1.2- E quatro anos e três meses após o início do processo?	1.2 - $3^{4,25}$ = $3^{\frac{17}{4}}$ = $\sqrt[4]{3^{17}}$
Conversão não congruente	

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.13), com adaptações.

Ao levar o aluno a pensar na atividade utilizando números racionais, e diante da possível solução apresentada no Caderno do Professor, podemos observar que houve uma mudança de registro. A atividade apresenta uma situação problema utilizando língua natural, levando a realizar uma transformação para o registro numérico. Considerando que 3^0, tempo inicial, 3^1 , após um ano, então meio ano após o início do processo seria $3^{0,5}$, mas o registro de chegada final apresenta $\sqrt{3}$ o que não corresponde de maneira direta a questão meio ano após o processo.

Nesse caso, temos que o registro de partida expresso em língua materna não se relaciona de maneira direta com o registro de chegada, não atendendo aos critérios de conversão congruente descritos por Duval (2009). Sendo assim, temos uma conversão não congruente. Diante disso, o aluno necessita variar o conteúdo de uma representação de registro de partida para um novo registro de representação, precisando de conhecimentos adquiridos para a transformação da língua natural em decimais, dos decimais em fração além de utilizar a propriedade da potência para a transformação de radicais.

Como continuidade dos estudos, o Caderno do Professor, apresenta como complementação do estudo de potências, cálculo de valores de 3^x, em que x não seja um número racional, como exemplo $3^{\sqrt{2}}$, determinando por aproximação por falta ou excesso.

Nesse sentido, e de acordo com Cassiari (2011), consideramos que a atividade não oferece orientação completa, dificultando a compreensão dos alunos. Acreditamos que uma revisão dessas propriedades também se faz necessária para a compreensão desses conteúdos.

Analisando o novo modelo de atividades do guia de transição de 2019 fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, podemos observar que apresenta uma sequência de questões, e não explicita atividades com abordagens de números que não sejam racionais.

No quadro 5.3, a atividade apresenta como proposta o preenchimento de espaços em branco da tabela.

Quadro 5.3- Atividade 2- Caderno do Professor

Registro de Partida	Registro de Chegada				
2- Para analisar a função exponencial $y = a^x$, ou seja, $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo número real, construímos, a seguir, uma tabela com diversos valores de x e os valores correspondentes de $f(x)$ para alguns valores de a. Preencha os espaços em branco da tabela.	**x**	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	2	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
	3	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$
	0	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
	−3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$
	$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cong 1{,}41$	$3^{\frac{1}{3}} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}71$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}58$

Tratamento

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.14), com adaptações.

A atividade tem como proposta o preenchimento dos espaços em branco na tabela, destacados em vermelho. Ao realizar o preenchimento ocorre a substituição da incógnita x pelo número correspondente a linha, registro de partida.

O registro de partida nos mostra uma tabela para ser preenchida. Supõem-se que o aluno irá observar os dados que estão inseridos, considerados como registro de partida, e após fará uma resolução, buscando os conceitos das propriedades de potência revisadas com o professor. A resolução das potências chegará a outro registro numérico, o registro de chegada. Podemos observar que não há uma mudança de registro, quer dizer então, que ocorre um tratamento, pois Duval (2009) comenta que se as transformações em um registro são internas, que dizer que existe um tratamento.

Alguns autores utilizam e enfatizam a utilização de tabelas como um recurso para auxiliar a compreensão da função exponencial. Silva (2015 a), por exemplo, utiliza anotações de dados em tabela para após utilizar os dados e construir um gráfico para observação de crescimento exponencial.

Souza (2010) comenta que nas construções gráficas, os alunos partiam do registro algébrico, para um registro em tabela e após para um registro gráfico. A proposta da atividade tem o mesmo intuito abordado por Souza (2010), pois na sequência temos uma atividade voltada para a construção gráfica a partir dos dados descritos na tabela. Observe o Quadro 5.4.

Quadro 5.4- Atividade 3- Caderno do Professor.

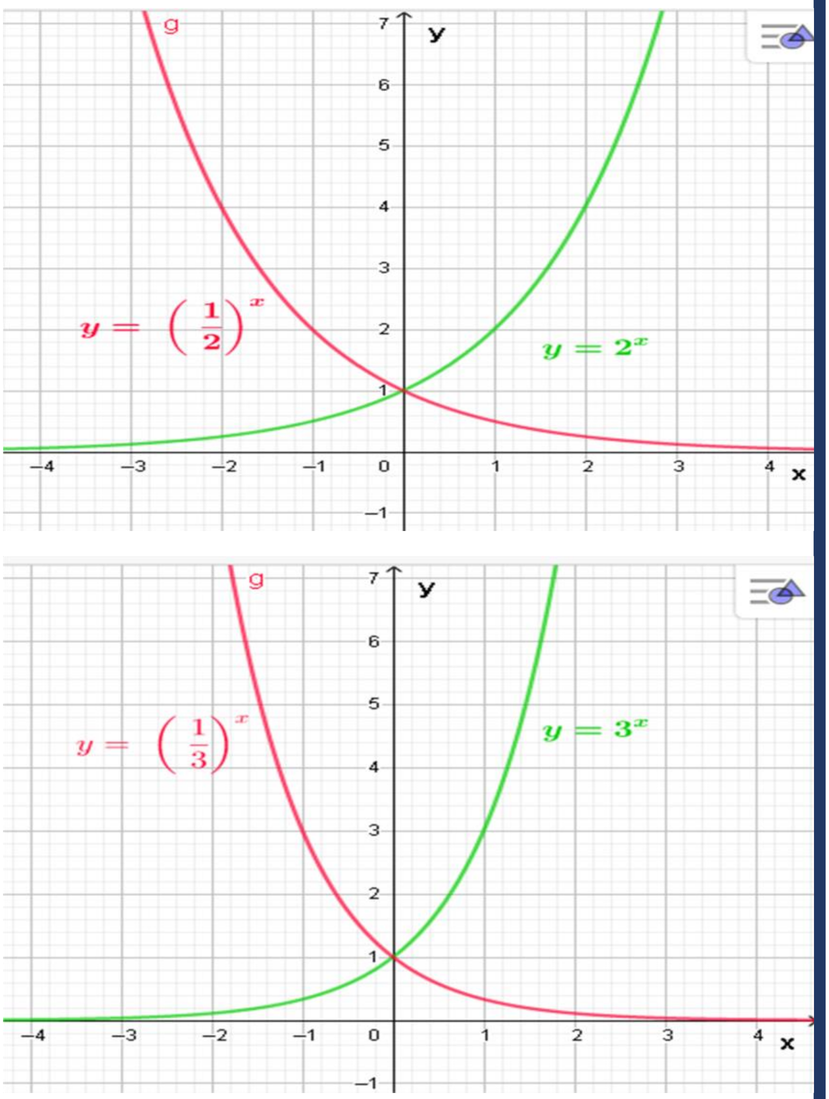
Registro de Partida

3. Tendo como base os valores obtidos na tabela apresentada na atividade anterior, vamos esboçar os gráficos das funções exponenciais a seguir, observando o crescimento ou o decrescimento em cada caso. Para isso, construa os gráficos das funções I e II em um mesmo sistema de eixos. Faça o mesmo para as funções III e IV. Divida o espaço milimetrado a seguir em duas partes, uma para cada par de gráficos:

I. 2^x e II. $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

III. 3^x e IV. $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Registro de Chegada



Conversão Congruente

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.15), com adaptações

A proposta da atividade 3 tem como base levar o aluno, por meio dos valores obtidos na tabela, construir os gráficos que representam as duas funções em um mesmo plano. Na atividade temos que o registro de partida apresenta um registro algébrico e sua resolução se torna uma representação de registro gráfico. Contudo, os dados dessa expressão algébrica já foram registrados em uma tabela, o que facilita a construção gráfica, pois o aluno vai recorrer aos dados da tabela para a construção. Temos então, que nessa atividade ocorre mais que uma transformação, o que proporciona habilidades e conhecimentos aos alunos, indo ao encontro com Duval (1999) que diz que a representação e visualização são fundamentais para aprender matemática, e a mobilização de diferentes registros contribui para que não se confunda os objetos matemáticos com as representações.

Em uma representação gráfica desse tipo, como a apresentada na atividade 3, o aluno tem a possibilidade de fazer uma correspondência com os valores de x para encontrar y. Os alunos poderão utilizar para a passagem de expressões algébricas para gráfica a relação ponto a ponto, descrita por Duval (2011b) que mediante a uma localização de pontos, permite traçar um gráfico. A transformação do registro de partida, a expressão algébrica, para o registro de chegada, o registro gráfico, possui uma correspondência de termo a termo entre as unidades significantes, havendo assim uma correspondência semântica. Como a representação gráfica é única a cada expressão abordada, possui uma univocidade terminal e o gráfico representado se mudarmos as variáveis, tanto no registro algébrico quanto no registro gráfico a ordem se mantém, satisfazendo os três critérios estabelecidos por Duval (2009),sobre a correspondência semântica, univocidade terminal dos termos significantes e a conservação da ordem, sendo assim, temos uma conversão congruente.

Quadro 5.5- Atividade 4 – Caderno do Professor

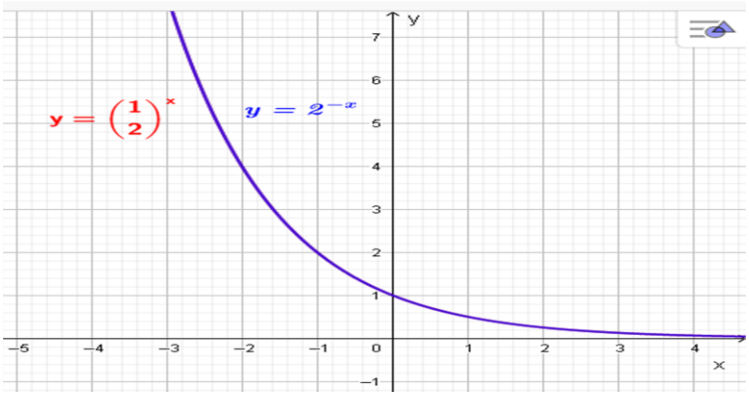
Registro de Partida

4. Desenhe os gráficos das seguintes funções e escreva o que você observou.

$I - f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$II - f(x) = (2)^{-x}$

Registro de Chegada



Conversão Congruente

Tratamento

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.16), com adaptações.

A atividade 4 (Quadro 5.5) se assemelha com a situação da atividade 3. Apresenta um gráfico que é construído a partir de uma expressão algébrica. Quanto a construção gráfica a partir da expressão algébrica, analisando cada uma, temos uma conversão congruente, pois possui uma correspondência semântica de termo a termo das unidades significantes, porém as duas expressões algébricas resultam em um mesmo gráfico de curvas que são coincidentes. Analisando então as expressões algébricas, podemos identificar que entre os dois registros, se considerarmos a expressão I, como um registro de partida e a expressão II, como um registro de chegada, temos que haverá uma transformação interna, que resulta em um tratamento como descrito por Duval (2009), pois as expressões $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f(x) = (2)^{-x}$ possuem o mesmo significado, são expressões algébricas equivalentes, que com um tratamento representam a mesma função, ou seja, representam o mesmo objeto. A atividade conduz o aluno a acessar seus conhecimentos sobre potência para realizar a transformação do registro. A atividade mostra que o mesmo objeto matemático pode ser representado por diferentes representações. Atividades desse tipo são importantes para um contato com representações diferentes que reportam o mesmo objeto, permitindo que o aluno não se confunda objeto com sua representação.

Quadro 5.6 - Atividade 5- Caderno do Professor.

Registro de Partida

5. Desenhe os gráficos das seguintes funções em um mesmo sistema de eixos na malha a seguir:

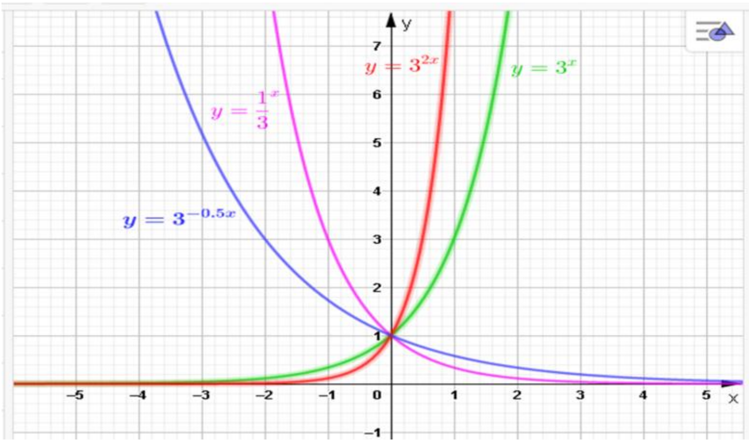
$I. f(x) = 3^x$

$II. f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$III. f(x) = 3^{2x}$

$IV. f(x) = 3^{-0,5x}$

Registro de Chegada



Conversão Congruente

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.16-17), com adaptações

O Quadro 5.6 explicita novamente uma construção gráfica a partir de expressões algébricas. A

Vários gráficos de diferentes funções representadas em um mesmo plano, possibilita aos alunos fazer observações, quanto ao crescimento, quando a base maior que 1 e decrescimento, quando está entre 0 e 1 como também exemplificar as transformações ocorridas nos gráficos referentes as bases diferentes.

O Caderno do Professor apresenta uma construção de gráficos com a utilização de *software*, e propõe que os gráficos das atividades sejam construídos com o auxílio do *software* para responder as questões das atividades. Porém o material contribui pouco para uma abordagem envolvendo a tecnologia, que necessitaria de construções e através delas fazer uma análise referente as formas que os gráficos produzem a cada função diferente, o que vem de acordo com a análise de Boschesi (2016) que identifica que as utilizações das tecnologias no Caderno do Professor, não têm finalidade de envolver o aluno a construir novos conhecimentos.

As construções gráficas através de *software* favorecem construções mais rápidas, proporcionando mais tempo para as análises de gráficos, que segundo Duval (2009) são utilizados pela facilidade de visualização que facilitam a compreensão, mas necessitam conhecer as propriedades que os gráficos apresentam.

Desse modo, voltamos a refletir sobre as contribuições que os diferentes registros de representações podem enriquecer o aprendizado dos alunos, quando são instruídos com conhecimentos necessários para transitar nos diferentes registros de representação.

Seguindo com as atividades do Caderno do Professor, a atividade 5 (Quadro 5.7) apresenta questões para análise do coeficiente dos expoentes das funções exponenciais que com o auxílio dos gráficos, a identificação como crescente ou decrescente se torna mais rápidos. A proposta da atividade requer que identifique um coeficiente K nas representações algébricas das funções de modo a constatar como crescente e decrescente.

Quadro 5.7- Atividade 5 a) e b) - Caderno do Professor.

Registro de Partida

5. a) Escreva cada uma das funções na forma $y = (a^k)^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, identificando o valor de **K.**

b) Analisando os gráficos das funções, identifique quais delas são crescentes ou decrescentes.

Registro de Chegada

a)

$I. f(x) = 3^x = (3^1)^x$; k=1

$II. f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = (3)^{-x} = (3^{-1})^x; k = -1.$

$III. f(x) = 3^{2x} = (3^2)^x; k = 2.$

$IV. f(x) = 3^{-0.5x} = (3^{-0,5})^x; k = -0,5.$

b)

Observando os gráficos, concluímos que I e III são crescentes e II e IV são decrescentes.

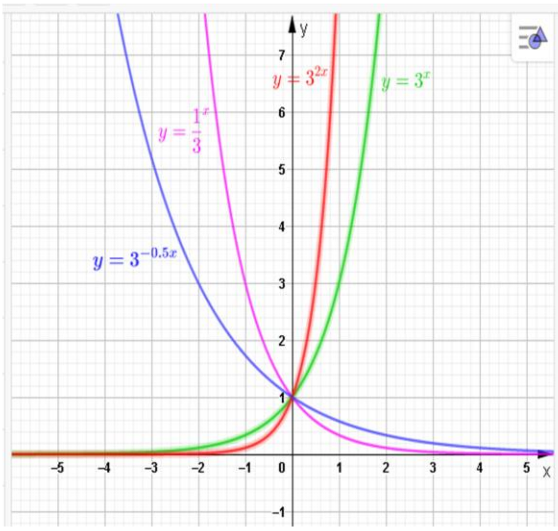
Tratamento | **Conversão Congruente**

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.16-17), com adaptações.

No item a), o coeficiente é separado da incógnita e o enunciado mostra como um tipo de instrução para o que se necessita fazer. Diante das representações algébricas das funções apresentadas para identificar o valor de K, necessitamos de uma transformação do registro de representação algébrico para o registro de representação numérico, que por meio das propriedades de potência se torna possível identificar o valor de K. Essa transformação no registro numérico recorre a uma transformação interna no registro, que de acordo com Duval (2009) resulta em um tratamento.

No item b) pede para analisar o gráfico das funções para identificar se são crescentes ou decrescentes. A forma apresentada na imagem traz uma facilidade na compreensão e visualização. Porém, observando a representação gráfica realizada anteriormente e buscando identificar que tipo de gráfico, estamos identificando uma mudança de registro, considerando a representação gráfica como registro de partida e a língua natural, descrevendo crescente ou decrescente como registro de chegada. Observe o quadro 5.8.

Quadro 5.8 – Atividade 5 -b) – Caderno do Professor.

Registro de Partida	Registro de Chegada
	Observando os gráficos, concluímos que I e III são crescentes e II e IV são decrescentes.
Conversão Congruente	

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.16-17), com adaptações

Analisando os gráficos, o aluno poderá apresentar êxito, em reconhecer se a curva cresce ou decresce, pois apresenta uma facilidade na visualização como já descrito por Duval (2009). Nesse caso, consideramos uma conversão congruente, pois existe uma congruência semântica quando pensamos na maneira que a curva é apresentada, cada expressão representa um único gráfico, e a ordem apresentadas nas variáveis da expressão algébrica se mantem nos cálculos para a construção do gráfico ocorrendo a conversão congruente.

Contudo, pensando em uma proposta para interpretar uma curva e identificar uma expressão que a representa, a atividade torna mais complicada para os alunos. Todavia, atividades que abordem a interpretação global que faz parte das regras semióticas de correspondência descrita por Duval (2011 b) que seria esse inverso de registro gráfico para algébrico, se faz necessário para que o aluno adquira mais conhecimento sobre a função e possa transitar nos diferentes registros com facilidade, demonstrando que reconhece todos os valores das variáveis visuais pertinentes.

A atividade 5, apresenta três tipos de transformações de registro. A transformação do registro algébrico para o registro de representação gráfico na apresentação do enunciado, no item a) a transformação interna, ou seja, um tratamento e no item b) para responder à pergunta, uma transformação do registro gráfico para o registro na língua materna. Nesse sentido, pensando em algo mais completo para uma aquisição de conhecimento para o aluno transitar nos diferentes registros, seria interessante uma conversão não congruente, visando uma transformação de registro gráfico para o algébrico, pois para que possamos buscar sanar a dificuldade que os alunos apresentam quanto a esse tipo de questão, necessitamos de abordagens que levem a adquirir conhecimentos para a realização das atividades.

A atividade 6 apresenta uma expressão em que a resolução consiste em substituir os valores de t para encontrar os valores para uma população N. como no quadro 5.9.

Quadro 5.9 – Atividade 6 a) – Caderno do Professor

Registro de Partida

6. Uma população **N** de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão N = 5 000 · 3 t, sendo **t** em horas.

a) Calcule o valor de **N** para os seguintes valores de **t**:

I) t = 2 h

II) t = 0,5 h

III) t = $\frac{2}{3}$ h

IV) t = 1,25 h

Registro de Chegada

6. a)

Calculando os valores de N, temos:

I) N = 5 000 × 3^2 = 5 000 × 9 = 45 000 micróbios;

II) N = 5 000 × $3^{0.5}$= 5 000 × $\sqrt{3}$ ≅ 5 000 × 1,732 ≅ 8 660 micróbios;

III) N = 5000 × $3^{\frac{2}{3}} = 5000 \times \sqrt[3]{3^2} \cong 5000 \times 2{,}080 \cong$ 10 400 micróbrios.

IV) N = 5 000 × $3^{1,25}$ = 5 000 × $\sqrt[4]{3^5}$ $3^{\frac{5}{4}}$ ≅ 5 000 × 3,948 ≅
19 740 micróbios.

Tratamento | **Conversão não congruente**

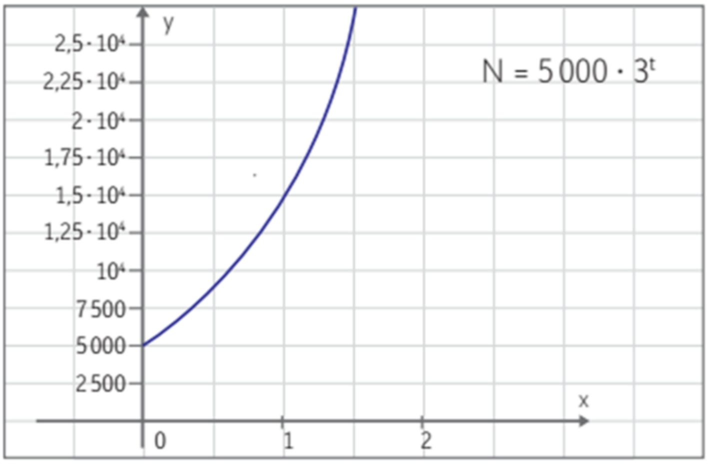
Fonte: São Paulo (2014-2017, p.18), com adaptações

Na atividade ao substituir os valores descritos nos itens I, II, III, IV, a resolução consiste em uma transformação interna, ou seja, ocorre um tratamento até chegar à solução. Porém, ao realizar o tratamento nos deparamos com uma situação que exige conhecimentos das propriedades da potência com expoentes natural e expoentes racionais utilizando a definição $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, como também o cálculo utilizando radiciação por aproximações para a conclusão da solução. Nesse momento se as propriedades não estiverem bem assimiladas, aparecem as dificuldades que podem levar a incompreensão, dificultando a realização da atividade.

No item b) ocorre uma conversão, da representação algébrica, que constava no item a) e com a substituição chegou a um tratamento nos valores numéricos, para a construção do gráfico. A conversão realizada apresenta uma congruência semântica entre os termos significantes, atende a univocidade terminal e mantem a conservação da ordem que são os critérios definidos por

Duval (2009) sendo considerados como uma conversão congruente, como apresentados no quadro 5.10.

Quadro 5.10 – Atividade 6 b) – Caderno do Professor

Registro de Partida	Registro de Chegada
6. b) Esboce o gráfico de **N** como função de **t**: N = f(t). (Estabeleça uma escala apropriada no eixo **y**.)	O gráfico de N = f(t) = 5 000 □ 3^t é como o gráfico de $y = 3^t$ sendo cada ordenada y multiplicada por 5 000: 

Conversão Congruente

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.18), com adaptações

A atividade orienta os alunos a esboçar o gráfico de N em função de t, levando o estudante a utilizar os dados resolvidos no item a). Esses dados possivelmente podem ser inseridos em uma tabela para uma melhor visualização para a construção gráfica. Contudo, uma orientação se faz necessária já que os dados se apresentam de forma aproximada na possível solução apresentada no Caderno do Professor.

O gráfico formado com a expressão algébrica, indica que houve uma multiplicação por 5000, demonstrando um traçado diferente dos gráficos abordados anteriormente. Oliveira (2013) fala sobre a necessidade de abordagens de aspectos gráficos e suas propriedades, e que o ensino de Funções se limita em demonstrações e explorações de expressões algébricas, enfatizando sobre a busca de novas formas de abordar os conteúdos. O Caderno do Professor deixa de apresentar mais situações que envolvem a multiplicação a expressão que representa a função exponencial, deixando de apresentar abordagens com aspectos diferentes que podem ser identificados de maneira mais simples nas construções gráficas.

A atividade 7 apresenta um registro de partida na linguagem materna e para achar a quantidade produzida que é pedida no enunciado, transforma em uma expressão algébrica para realizar os cálculos, como demonstrado no quadro 5.11.

Quadro 5.11 – Atividade 7 – Caderno do Professor.

Registro de Partida	Registro de Chegada
7. Em determinado país **X**, a produção de automóveis cresce em progressão geométrica, ano após ano, a partir do início do ano 2000, tendo aumentado 50% ao ano desde então. Sabendo-se que em 2004 foram produzidos 162 000 automóveis, pergunta-se: **a)** Qual foi a quantidade produzida no ano 2000? **b)** Qual é a produção estimada para o ano de 2010?	Chamando a quantidade produzida em 2000 de P_0, se a cada ano a produção aumenta em 50%, então, a cada ano, o valor inicial fica multiplicado por 1,5. Após t anos, o valor da quantidade produzida P(t) será igual a: $P(t) = P_0.(1{,}5)^t$. Sabendo-se que, em 2004 (ou seja, t = 4), o valor da produção foi de 162 000 automóveis, resulta que: $162\,000 = P_0\,.\,1{,}5^4$; ou seja, $P_0 = \frac{162\,000}{1{,}5^4}$ Calculando a potência $1{,}5^4$, obtemos: $1{,}5^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$ Segue que $P_0 = 162\,000\,.\,\frac{16}{81} = 32\,000$. b) A produção estimada para o ano de 2010 é $P(10) = 32\,000\,.\,1{,}50^{10} = 32\,000\,.\,\frac{3^{10}}{2^{10}} \cong$ $1\,845\,281$ automóveis.
Conversão não congruente	Tratamento

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.18), com adaptações

A resolução da atividade inicialmente consiste em determinar uma expressão algébrica para dar continuidade a solução e responder à questão descrita no item a). Podemos observar que a partir do enunciado, registro de partida, ocorre uma transformação para o registro de representação de chegada, na forma de expressão algébrica, acontecendo uma conversão.

O enunciado diz que a cada ano a partir do início em 2000, aumenta 50% e a possível solução apresenta que o valor é multiplicado por 1,5, o que nesse caso, necessita de uma boa interpretação do enunciado para a compreensão da atividade. Contudo, comparando o enunciado e expressão algébrica, observamos que a expressão não transparece a língua materna, pois 50% de aumento ano após ano, se apresenta como 1,5, ou seja, não apresenta uma relação termo a termo. Nesse sentido, a conversão não é congruente, pois deixa de atender aos critérios estabelecidos por Duval (2009) em relação a conversão congruente.

Após essa conversão para a resolução do exercício ocorre um tratamento, pois para determinar a quantidade produzida em 2000, substitui os dados na expressão algébrica e realiza os cálculos para chegar à solução, ou seja, realiza uma transformação interna que Duval (2009) considera como um tratamento. Na atividade ocorre uma conversão não congruente seguida de um tratamento.

No item b) é realizado um tratamento, pois a expressão algébrica foi determinada no item a) e como é para estimar a produção para o ano de 2010, substituiu o tempo por 10 na expressão para calcular, realizando assim um tratamento. Ainda na solução podemos observar que $1{,}50^{10}$ é transformado em $\frac{3^{10}}{2^{10}}$, tratamento realizado nas representações numéricas.

Na atividade 8 (Quadro 5.12) cada item pede para construir o gráfico das expressões em um mesmo plano. Podemos observar que teve uma atenção para alguns dos aspectos gráficos necessários para uma compreensão dos alunos referente as alterações realizadas nas expressões. Além de demonstrar diferentes registros de representação.

Quadro 5.12 – Atividade 8 a) – Caderno do Professor.

Registro de Partida

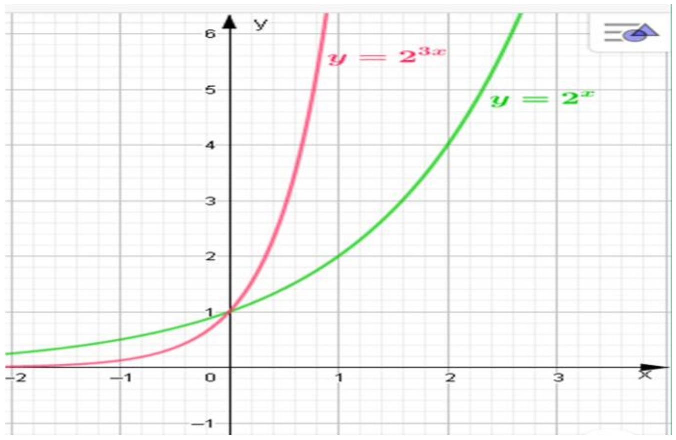
8. É possível construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = 2^{kx}$ de modo análogo ao de $y = 2^x$, quando **k** é positivo, ou ao de $y = 2^{-x}$, quando **k** é negativo. Nos dois casos, ocorrerá apenas uma mudança na escala no eixo **x**. Para compreender tal fato, construa o gráfico de cada par de funções a seguir no mesmo sistema de coordenadas**:**

a) $y = 2^x$ **e** $y = 2^{3x}$

Registro de Chegada

Para construir o gráfico de $y = 2^x$ e de $y = 2^{3x}$, podemos escrever $y = (2^3)^x = 8^x$ Os valores da seguinte tabela ajudam-nos a relacionar os dois gráficos a seguir:

X	0	1	2	3	4	-1	-2
2^x	1	2	4	8	16	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$2^{3x} = 8^x$	1	8	64	512	4 096	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$



Conversão Congruente

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.18-19), com adaptações.

O item a) em uma das expressões se inicia realizando um tratamento, a expressão se apresenta como $y = 2^{3x}$ realizando o tratamento se torna $y = 8^x$. Na continuação da solução, se realiza uma transformação das expressões algébricas para valores em tabela com intuito de relacionar os dois gráficos. Duval (1999), enfatiza que as diferentes representações e visualizações são fundamentais para a compreensão, pois essa variedade de registros não possuem o mesmo conteúdo e desse modo, permite que não se confunda os objetos matemáticos e suas representações. Além disso, a tabela permite uma melhor visualização dos pontos a serem inseridos, que mediante a uma localização de pontos em um plano permite a construção do traçado que define o gráfico a ser realizado, para que assim, realize uma análise da imagem formada comparando com a expressão algébrica dada. A atividade é importante para o reconhecimento das propriedades tanto dos gráficos como das tabelas, e expressões algébricas.

Com as construções gráficas torna-se possível uma visualização dos gráficos quanto ao seu crescimento e podendo fazer uma comparação, podemos observar que quanto maior a base, o traçado do gráfico da função se torna mais próximo do eixo y, ou seja, há um crescimento mais rápido.

No item b) a realização da atividade exige um tratamento nas expressões seguido de uma conversão. Identificamos como tratamento, pois há uma substituição dos valores, resolvendo as expressões para chegar ao resultado. Nesse caso, ocorre uma transformação interna, que segundo Duval (2009) é um tratamento. Olhando mais a fundo os exercícios identificamos a necessidade de busca de conhecimentos sobre propriedades das potências para realizar as transformações, como apresentadas no quadro 5.13.

Quadro 5.13 – Atividade 8 b) – Caderno do Professor

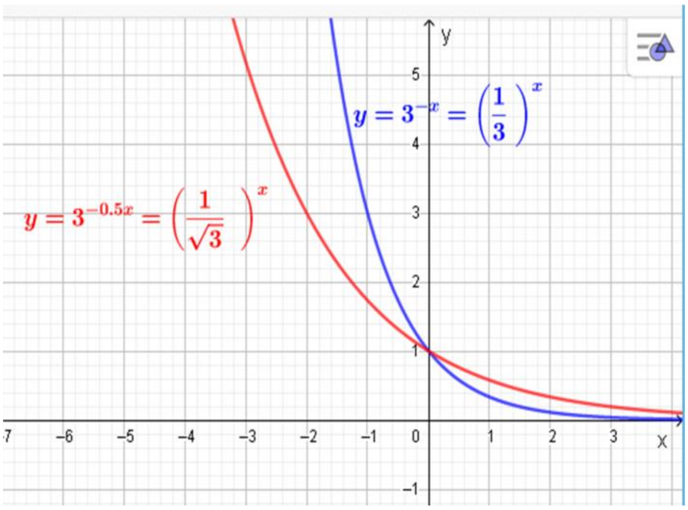
Registro de Partida

8.
b) $y = 3^{-x}$ e $y = 3^{-0,5x}$

Registro de Chegada

b) De maneira análoga, para construir o gráfico de $y = 3^{-x}$ e $y = 3^{-0,5x}$, podemos escrever $y = 3^{-x} = (3^{-1})^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $y = 3^{-0,5x} = ((3^{-0,5})^{-1}) = = ((3^{0,5})^{-1})^x = (\sqrt{3}\ ^{-1})^x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

Os gráficos dessas funções são representados desta forma:



Tratamento

Conversão não congruente

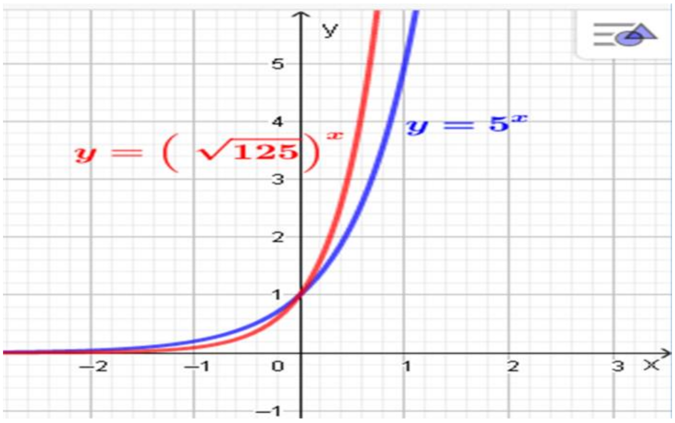
Fonte: São Paulo(2014-2017, p.19), com adaptações.

Nesse caso, as transformações das representações não apresentam uma correspondência semântica , pois não existe uma relação termo a termo, acontecendo uma conversão não congruente.

Podemos observar comparando os gráficos, que há um decrescimento em que o aluno pode identificar com o expoente negativo (unidades simbólicas significativas) ou que o valor da base está entre 0 e 1. Além disso, pode observar o que ocorre quando o expoente é multiplicado por algum número.

O item c) apresenta as expressões algébricas que passam por um tratamento chegando à utilização de propriedades para a solução, como pode ser visto no quadro 5.14.

Quadro 5.14 – Atividade 8 c) – Caderno do Professor

Registro de Partida	Registro de Chegada
8. **c)** $y = 5^x$ e $y = 5^{1,5x}$	c) Para $y = 5^x$ e $y = 5^{1,5x}$, temos $y = 5^{1,5x} = \langle\langle 5^3\rangle^{\frac{1}{2}}\rangle^x = \langle\sqrt{125}\rangle^x$. Este último gráfico é do tipo $y = a^x$, com $a = \langle\sqrt{125}\rangle^x \cong (11,2)^x$. Observe os gráficos a seguir. 
Tratamento	Conversão não congruente

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.19), com adaptações

A expressão 5^x apresenta uma conversão congruente, pois temos que a base 5 é maior que 0, ou seja, pela definição de função exponencial $a > 0$, e analisando o expoente x, observamos que é positivo, então, pela definição temos que a expressão apresentará um gráfico crescente, ocorrendo assim uma relação de congruência semântica entre os termos significantes, existindo uma univocidade semântica, pois apresenta um único objeto e há conservação da ordem. Sendo assim, segue os critérios de Duval (2009) para uma conversão congruente. Já a expressão $y = 5^{1,5x}$ passa por um tratamento seguido de uma conversão, mas, a conversão não deixa transparecer os termos significantes.

O aluno necessita da busca de requisitos para a resolução com propriedades das potências, o que muitas vezes, apresentam maior dificuldades na busca para a solução, quando se trata de uma construção gráfica a partir de tabelas.

Os gráficos se apresentam crescentes e comparando os expoentes x e $1,5x$, podemos concluir que o gráfico relacionado à expressão $y = 5^{1,5x}$ cresce 1,5 vezes mais que aquele que está relacionado à expressão $y = 5^{x}$, o que pode ser observado com facilidade quando os gráficos são construídos no mesmo plano cartesiano

O item d) $y = 7^{x}$, no quadro 5.15, apresenta uma conversão congruente para a forma gráfica.

Quadro 5.15 – Atividade 8 d) – Caderno do Professor

Registro de Partida

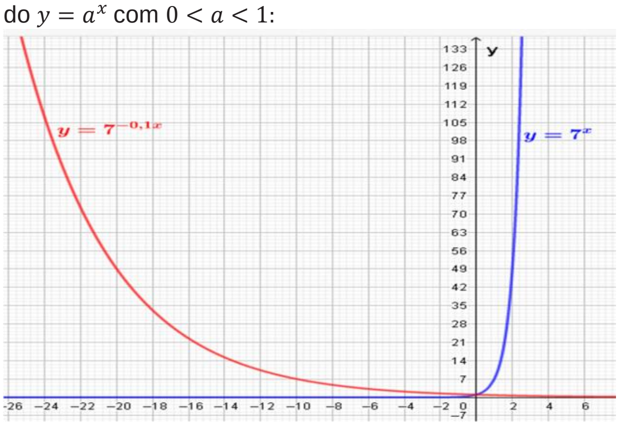
8.

d) $y = 7^{x}$ e $y = 7^{-0,1x}$

Registro de Chegada

d) Finalmente, para $y = 7^{x}$ e $y = 7^{-0,1x}$, temos:

$y = 7^{-0,1x} = \left((7^{-1})^{\frac{1}{10}} \right)^{x} = \left(\sqrt[10]{\frac{1}{7}} \right)^{x}$, ou seja, é um gráfico do $y = a^{x}$ com $0 < a < 1$:



Tratamento

Conversão não congruente

Fonte: São Paulo (2014-2017, p.19), com adaptações.

A solução apresentada para a expressão $y = 7^{-0,1x}$ passa por um tratamento dentro do mesmo registro numérico. Porém, para a continuidade da solução são necessárias propriedades da potência, que se não forem realizadas de forma espontânea, ocorre uma conversão não congruente, chegando à conclusão de que a expressão é um tipo de gráfico $y = a^x$ com $0 < a < 1$, ou seja, a representação gráfica, mostra um gráfico decrescente.

A situação apresenta dois gráficos, em que o gráfico da expressão $y = 7^{-0,1x}$ decresce de forma mais lenta, enquanto o gráfico da expressão $y = 7^x$ cresce e rápido, considerando que está mais próxima ao eixo y,

Partindo das expressões $y = 7^x$ e $y = \left(\sqrt[10]{\frac{1}{7}}\right)^x$, ao passar da expressão algébrica para a gráfica estamos realizando novamente uma conversão entre as transformações dos registros, e como a conversão atende aos três critérios defendidos por Duval (2009), temos uma conversão congruente, pois os termos se relacionam, possui a univocidade terminal e a conservação da ordem.

Analisando as construções realizadas nessa atividade 8, o início da atividade sugere que as construções sejam feitas em três diferentes tipos de registros de representação. Parte da representação algébrica, para valores descritos em tabelas e após a construção gráfica. Porém, nos demais itens, as possíveis soluções não apresentam a tabela, fazem modificações com as expressões, mas deixa de apresentar valores. Outro ponto importante a ser destacado é que os valores para serem encontrados e dispostos em tabela não se apresentam de forma simples e não sugerem formas diferentes que poderiam ser trabalhadas para a construção do conhecimento referente aos gráficos e expressões apresentadas, como a utilização de *softwares.*

Consideramos importante a apresentação em vários registros diferentes, tanto que, utilizamos diferentes registros de representação descritos por Duval(1999). Além disso, Piano (2016) comenta que para um olhar para as características da Função Exponencial quanto ao crescimento rápido, deve-se trabalhar com gráficos e tabelas de comparação, pois diz que a visualização do que está acontecendo permite uma comparação entre o abstrato e o visual, o que facilita a aprendizagem, mas também, não podemos deixar de dar importância a diferentes abordagens para atingir a compreensão dos alunos.

Nessa atividade sentimos a falta de uma sugestão de abordagens das diferentes expressões algébricas com auxílio de um *software* para identificação, comparação de diferentes aspectos encontrados nas expressões como também nos gráficos. Silva (2015 b) diz que os gráficos favorecem a observação de diferentes comportamentos que em outras representações são difíceis de serem percebidas e enfatiza sobre as transformações gráficas com o auxílio de *software* como facilitador e que é importante para destacar o significado das representações gráficas quando alteramos seus parâmetros.

A identificação das propriedades dos gráficos dos itens c) e d), com auxílio de um *software* são mais fáceis de identificar e visualizar, não que os outros não sejam, mas essas expressões dos itens c) e d) em uma construção ponto a ponto ficaria difícil realizar uma comparação do que acontece, o que torna bem simples quando construído com auxílio de *software*, pois possuem opções de aumentar ou diminuir os gráficos de forma rápida e simples.

Na atividade 9, (Quadro 5.16), o enunciado na língua materna apresenta uma expressão para o cálculo de uma população. Nos itens a), b), c) e d) ocorrem um tratamento, pois a expressão foi dada no enunciado e os itens tinham como proposta a substituição de valores para encontrar o crescimento de uma população durante determinado tempo, havendo uma transformação interna.

Quadro 5.16 – Atividade 9 – Caderno do Professor

Registro de Partida	Registro de Chegada
9. A população N de determinado município cresce exponencialmente desde a sua fundação, há 20 anos, de acordo com a expressão $N = 3000 \,.\, 10^{0,1t}$ sendo t em anos. Calcule: **a)** O valor de **N** quando o município foi fundado (t = 0) **b)** O valor de **N** dez anos após a fundação. **c)** O valor de **N** nos dias atuais. **d)** Quanto tempo, após a fundação, a população atingirá a marca de 3 000 000 de habitantes, se o ritmo de crescimento continuar assim. **e)** Quanto tempo, após a fundação, o valor de **N** atingirá 600 000.	a) Quando foi fundado, o município tinha uma população N_0 = 3 000 . 10^0 = 3 000. b) Dez anos após a fundação, a população era igual a: $N_{10} = 3\,000 \,.\, 10^{0,1\,.10}$ = 3 000 . 10 = 30 000 c) O valor de N nos dias atuais (t = 20) é igual a: $N_{20} = 3\,000 \,.\, 10^{0,1\,.\,20}$ =3 000 . 10^2 = 300 000 de habitantes. d) Para N = 3 000 000, devemos ter: 3 000 000 = 3 000 . $10^{0,1\,.\,t}$, ou seja, $10^{0,1\,.\,t}$ = 1 000 de onde obtemos 0,1 t = 3; portanto, t = 30 anos e) Para calcular depois de quantos anos a população atingirá 600 000, devemos ter: 600 000 = 3 000 . $10^{0,1\,.\,t}$. Precisamos saber, então, qual o expoente da potência de 10 que seria igual a 200. Sabemos que 10^2 = 100 e que 10^3 = 1 000. Deve haver um número n, entre 2 e 3, tal que 10^n = 200. Somente descobrindo esse número é que podemos completar os cálculos, pois, igualando o expoente de 10 a esse número n, teremos: 0,1t = n, e então, t = 10 n. O número n tal que 10^n = 200 é aproximadamente igual a 2,30 e o valor de t correspondente é 23 anos. Para calcular números como esses, estudaremos os logaritmos nas próximas unidades.
Conversão não congruente	**Tratamento**

Fonte: São Paulo(2014-2017, p.19-20), com adaptações

No item e) também ocorre um tratamento, porém quando faz os cálculos referente a $10^{0,1t}$= 200, ou seja, para determinar um número n tal que $10^n = 200$, necessita de uma busca de valores que se aproximam do que foi pedido. Por ser uma atividade que envolve situações do cotidiano possivelmente traz uma compreensão melhor do que foi pedido. Oliveira (2011), comenta sobre as dificuldades dos alunos em ver as relações entre o ensino de Matemática e sua aplicabilidade prática, ainda diz que, a função exponencial consiste em um rico instrumento de articulação e interdisciplinaridade. Nesse sentido, mostra a importância de abordar atividades que envolvem o cotidiano de maneira mais simplificada para que haja a compreensão de conceitos, propriedades sobre as Funções Exponenciais.

5.2- Análise do Livro Didático

Nessa seção faremos a análise de alguns dos exercícios apresentados no livro didático “Matemática, Ciência e Aplicações” de Iezzi et al. (2016). Foram escolhidos alguns, pois são apresentados vários exercícios similares, com situações diferentes, mas, em sua solução fazem a mesma coisa.

O livro didático “Matemática, Ciência e Aplicações” de Iezzi et al. (2016) inicia com uma situação que explora o censo realizado a partir de coletas de dados, trabalhando com valores aproximados sobre o crescimento populacional.

Demonstra o cálculo da população brasileira de x anos, contados a partir de 2020, ou seja, considera 1 ano a partir de 2020, e faz cálculos utilizando algumas propriedades como a transformação de porcentagem para decimal, e cálculos de multiplicação chegando as potências. O mesmo cálculo é realizado para 2 anos, 3 anos, chegando para x anos, em que torna possível a expressão $y = 1{,}012^x . 101$, que representa a população brasileira, em milhões de habitantes, para x anos.

Esse tipo de atividade como introdução é de extrema importância pelo fato de abordar uma situação do cotidiano explorando potências, porcentagem, multiplicação, e além de tudo o crescimento populacional que faz parte da função exponencial, pois, muitas vezes o aluno apresenta dificuldades em ver a relação entre o ensino da Matemática e aplicabilidade no cotidiano como citado por Oliveira (2013) e com a atividade desse tipo, traz a possibilidade de um envolvimento do aluno que favorece na compreensão.

A partir da atividade como uma introdução aos conceitos de função, o livro de Iezzi et al. (2016), faz uma revisão sobre potências, raízes e suas propriedades, abordando situações com expoentes natural, inteiro negativo e suas propriedades. No quadro 5.17, selecionamos alguns dos exercícios para resolução com aplicação de potências e suas propriedades.

Quadro 5.17- Exercício 1 – Livro didático.

Registro de Partida

1) Calcule:

a) 5^3 b) $(-5)^3$ c) 5^{-3} d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ e) $\left(\frac{1}{50}\right)^{-2}$ f) $\left(-\frac{11}{7}\right)^0$

2) Calcule

a) $0{,}2^2$ b) $0{,}1^{-1}$ c) $3{,}4^1$ d) $(-4{,}17)^0$ e) $0{,}05^{-2}$ f) $1{,}25^{-1}$

3) Calcule o valor de cada uma das expressões:

a) A= $\left(\frac{3}{4}\right)^2 .\ (-2)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1$

b) B= $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

c) $-2 . \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1^{15} - (-2)^1$

4) Escreva em uma única potência:

a) $\frac{11^3 .\ (11^4)^2 .\ 11}{11^6}$

b) $\frac{(2^4)^3 .\ 2^7 .\ 2^3)}{(2^{11})^2}$

Tratamento

Iezzi et al. (2016, p.130), com adaptações.

Em sua maioria, os exercícios de potências envolvem uma transformação interna, que como descrito anteriormente, é considerado pela teoria de Duval (2009) como um tratamento.

Da lista de exercícios contidas no livro de Iezzi et al. (2016), apenas um, exige uma transformação do registro em língua materna para o registro numérico, como apresentado no quadro 5.18.

Quadro 5.18 – Exercício 6 – Livro didático

Registro de Partida	**Registro de Chegada**	
6) Escreva em uma única potência: a) a metade de 2^{100}. b) o triplo de 3^{20}. c) a oitava parte de 4^{32}. d) o quadrado do quíntuplo de 25^{10}.	a) $\frac{2^{100}}{2} = 2^{99}$ b) $3.\ 3^{20} = 3^{21}$	c) $\frac{4^{32}}{8} = \frac{2^{64}}{2^3} = 2^{61}$ d) $(5 . 25^{10})^2 = (5^{21})^2 = 5^{42}$

Conversão Congruente

Iezzi et al. (2016, p.130), com adaptações.

Nessa transformação, quando diz a metade, logo associamos que divide por 2 e se considerarmos $\frac{2^{100}}{2}$, podemos associar que é a metade de 2^{100}, sendo assim, podemos observar uma correspondência semântica de termo a termo, tanto na representação de partida, quanto na representação de chegada, em que existe uma univocidade e a ordem de conservação se mantem, o que podemos concluir diante dos critérios de Duval (2009) que a conversão é congruente. O mesmo ocorre em o triplo de 3^{20}, a oitava parte de 4^{32} e o quadrado do quíntuplo de 25^{10}.

Identificamos então nessa atividade uma conversão congruente em que todas elas para a resolução são aplicadas transformações internas, ou seja, a atividade apresenta uma conversão seguida de tratamento.

A maioria das atividades tanto de potências como de raízes apresentadas no livro de Iezzi et al. (2016), exigem para sua realização uma transformação do tipo tratamento.

Após a introdução de potências e raízes, chegamos a aplicação da função exponencial, em que traz sua definição de $f(x) = a^x$, com a um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$, seguindo com apresentação de gráficos de funções exponenciais para a observação de algumas propriedades.

Na primeira situação apresenta um gráfico em que indica o método de localizar pontos do gráfico e liga-los por meio de uma curva descrevendo o gráfico da função, atividade citada por Duval (2011b) quando comenta que uma representação gráfica pode apresentar três regras semióticas de correspondência, e que no caso, são utilizadas para a construção do gráfico como a ponto a ponto, a extensão de traçado e a interpretação global. Segue a primeira situação no quadro 5.19.

Quadro 5.19 – Exemplo de construção de gráfico – Livro didático

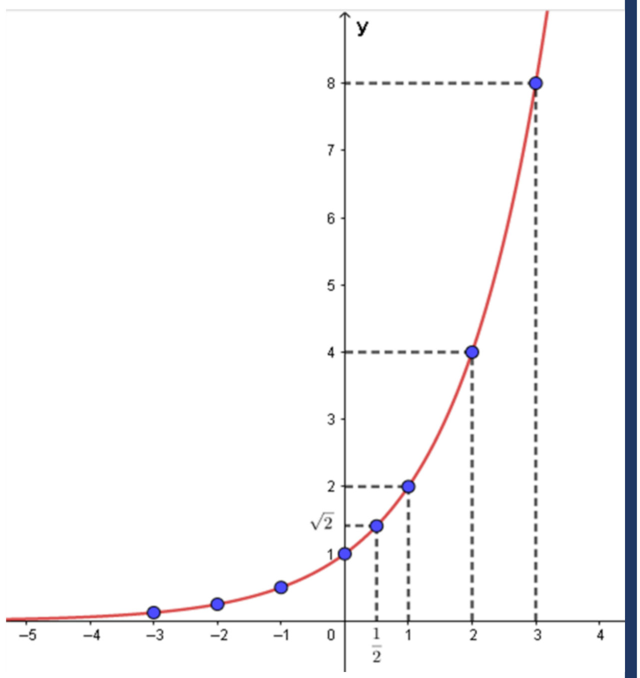
Registro de Partida

Vejamos como construir o gráfico da função f, cuja lei é $y = 2^x$.

Vamos usar o método de localizar alguns pontos do gráfico e ligá-los por meio de uma curva.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} \cong 1{,}41$
1	2

Registro de Chegada



Conversão Congruente

Iezzi et al. (2016, p.136), com adaptações.

Com a expressão algébrica $y = 2^x$ e a partir dos pontos calculados e inseridos em tabela, foram localizados no gráfico para encontrar assim o seu traçado, obtendo $2^x > 0$, através do ponto a ponto. O mesmo ocorreu na construção do gráfico da expressão $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, que a partir dos valores em tabela, traçou o gráfico realizando ponto a ponto e extensão do traçado.

Podemos observar nesses exemplos que diante da Teoria dos Registros de Representação semiótica proposta por Duval (2009), houve uma transformação de registro de representação. A partir da tabela com valores, registro de partida, realizou uma transformação para o registro gráfico, registro de chegada, utilizando ponto a ponto descrito por Duval (2011b).

As transformações ocorridas nos dois exemplos, apresentam uma correspondência semântica entre os termos significantes, possui a univocidade terminal e a conservação se mantem, seguindo os critérios estabelecidos por Duval (2009) sobre a conservação congruente.

Observando ainda mais os dois gráficos, podemos identificar que a imagem das curvas mostra situações diferentes, interessantes de mostrar aos alunos e comentar sobre as propriedades apresentadas, para assim iniciar a ideia de crescimento e decrescimento a partir dos gráficos.

Além desses exemplos, Iezzi et al. (2016), traz exemplos dos dois gráficos das expressões $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, construídos com auxílio do *software Geogebra* para compreensão da imagem obtida nas duas situações, o que possibilita uma exploração sobre o *software* para facilitar a compreensão dos alunos.

Na sequência das atividades apresenta o número e, falando sobre sua importância na Matemática e apresentando algumas expressões e valores que x pode assumir, sugerindo o uso da calculadora científica, para a realização do exercício, comentando sobre limite e falando um pouco da descoberta feita por John Napier sobre o número e.

Após, apresenta as propriedades da função exponencial $y = a^x$, para uma função crescente e decrescente.

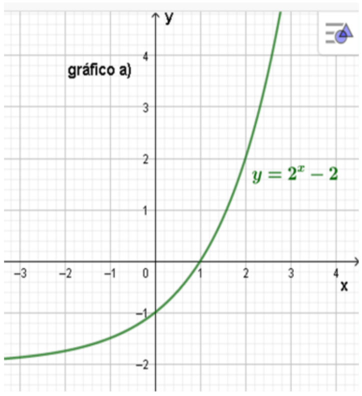
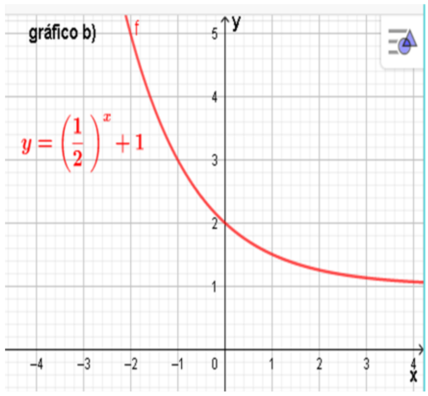
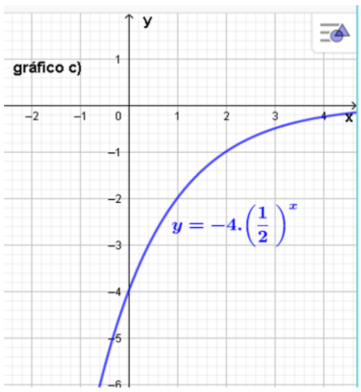
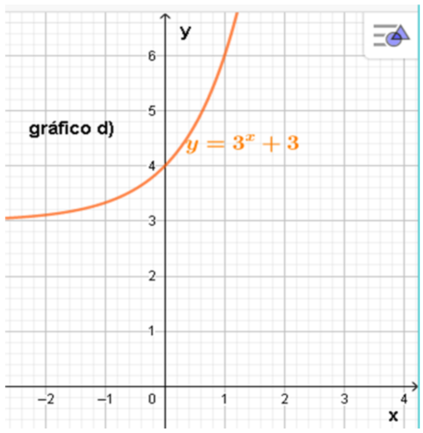
Uma observação importante contida no livro é sobre as funções do tipo exponencial, em que indica que existe funções com gráficos de curvas exponenciais que são análogos ao gráfico $y = a^x$ quando $a > 1$.

Traz o exemplo de gráficos com translação como $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x$ +2, dizendo que o gráfico de g pode ser obtido a partir do gráfico de f deslocando-o duas unidades para cima.

Na sequência traz exercícios de construções de gráficos e identificação de expressões que observamos e selecionamos alguns para explorar, pois se apresentam de forma similares.

Na primeira situação temos um exercício para a construção gráfica a partir das expressões algébricas dadas e para a identificação do conjunto imagem, como apresentado no quadro 5.20.

Quadro 5. 20 – Exercício 20 – Livro didático

Registro de Partida	Registro de Chegada
Faça o gráfico de cada uma das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pelas leis seguintes, destacando a raiz(se houver) e o respectivo conjunto imagem: a) $y = 2^x - 2$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ c) $y = -4.\left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $y = 3^x + 3$	 Raiz:x=1 Im={$y \epsilon \mathbb{R}/y > -2$}  Raiz: não tem Im={$y \epsilon \mathbb{R}/y > 1$}  Raiz: não tem Im={$y \epsilon \mathbb{R}/y < 0$}  Raiz: não tem Im={$y \epsilon \mathbb{R}/y > 3$}

Conversão Congruente

Iezzi et al. (2016, p.141), com adaptações.

A atividade apresentada pede para realizar a construção de gráficos, o que leva a entender que a construção seja realizada a partir do ponto a ponto, com a construção de tabelas com dados a partir das expressões algébricas e assim realizar a localização de pontos no gráfico. Notamos que a utilização de *software* seria interessante pelo fato de o aluno poder observar algumas propriedades, como a translação vertical negativa no gráfico a referente a expressão $y = 2^x$, ou como a translação vertical que ocorre nos gráficos b e d. Ainda sobre os gráficos a e b, a partir das expressões $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, viabilizar meios para trabalhar com o crescimento e decrescimento e quando multiplicada a expressão por um fator como no gráfico c, comentar sobre a influência de um número negativo, que indica a reflexão em relação ao eixo horizontal da expressão $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, e o número 4 que indica um quádruplo da expressão.

As observações citadas serão possíveis de serem trabalhadas em uma construção ponto a ponto, mas a utilização do *software* trará rapidez e facilidade nas construções, além da precisão que muitas vezes não são alcançadas em uma construção de gráfico utilizando o ponto a ponto.

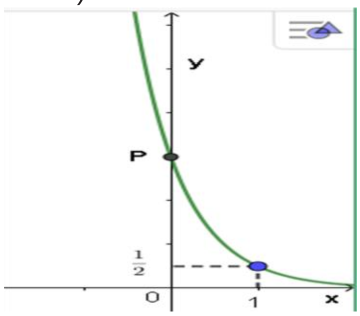
Em comparação com a análise do Caderno do Professor do Estado de São Paulo, observamos que a sequência de atividades contida no caderno, não apresenta gráficos referentes a translação. Também identificamos que o Caderno do Professor traz uma abordagem de gráficos referente a uma constante K no expoente, que com as transformações de registros de representação algébrica para a gráfica torna possível realizar algumas análises nas respectivas imagens, e que não foram abordadas no livro de Iezzi et al. (2016) como uma análise de diferentes gráficos, mas traz em situações problemas que envolvem a construção de gráficos. Acreditamos ser importante abordagens que mostram situações diferentes nas imagens dos gráficos para um domínio de conhecimentos mais amplo sobre às funções exponenciais.

O próximo exercício de Iezzi et al. (2016), traz um gráfico que para sua resolução necessita de uma análise e interpretação dos dados representados no gráfico como apresentado no Quadro 5.21.

Quadro 5.21 – Exercício 18 – Livro didático

Registro de Partida

Na figura está representado o gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = m\,.\,6^{-x}$, sendo $\boldsymbol{m}$ uma constante real.
Determine:
a) o valor de $\boldsymbol{m}$;
b) f(-1)
c) a ordenada de **P.**



Registro de Chegada

a) Quando x=1 , y= $\frac{1}{2}$

Substituindo na equação

$$\frac{1}{2} = m\,.\,6^{-1}$$

$$\frac{1}{2} = m\,.\,\frac{1}{6}$$

$$2\,m = 6 \;\; \Rightarrow m = 3$$

b) $f(-1) = 3\,.\,6^{-(-1)}$

f(-1) = 3 . 6 = 18

c) Quando x=0 y=P

Substituindo
P = 3 . 6^0
P = 3 . 1 = 3

Conversão não congruente | Tratamento | Conversão Congruente

Iezzi et al. (2016, p.140), com adaptações.

Para a resolução dos exercícios, o aluno necessita reconhecer algumas propriedades do gráfico associado a expressão algébrica para a resolução de cada item, em que o registro de representação de partida não deixa transparecer o registro de representação de chegada, se utilizar a regra de correspondência ponto a ponto estabelecido por Duval (2011 b), pois são menos espontâneas e necessitam de uma compreensão dos dados fornecidos. Como no item a) que necessita determinar o valor de m, utilizando os pontos fornecidos no gráfico, para substituir na expressão algébrica.

No caso da ordenada P, novamente o aluno necessita reconhecer as propriedades do gráfico e identificar o par ordenado que representa P, ou seja, parte dele para realizar a solução. Então, se a atividade for realizada com uma interpretação ponto a ponto e extensão do traçado, a conversão será não congruente, pois o aluno não consegue identificar os dados do gráfico e associar a expressão de forma direta.

Duval (2011b) salienta que a interpretação das representações gráficas depende da identificação de valores das variáveis visuais pertinentes das expressões correspondentes e que a representação gráfica pode apresentar três regras semióticas de correspondência, o que nesse caso, voltamos o olhar para a interpretação global, uma das regras semiótica de correspondência, em que analisa a imagem do gráfico e sua expressão algébrica para identificar as propriedades contidas no gráfico. Se o aluno for capaz de identificar e realizar uma interpretação global ao olhar para o gráfico e para a expressão algébrica dada, a conversão realizada será congruente, pois faz a identificação de forma espontânea. O aluno consegue identificar os dados e realizar a atividade com rapidez, identificando a congruência semântica e a relação entre os dados do gráfico e da expressão algébrica.

Percebemos na análise realizada, que o Caderno do Professor deixa de apresentar situações como a apresentada no quadro 5.21, no sentido de realizar uma interpretação global da imagem de um gráfico de função exponencial. Consideramos importante exercícios desse tipo, pois fornece ao aluno conhecimentos que possibilitam uma compreensão de atividades que abordam função exponencial, além de prover meios para transitar nos diferentes Registros de Representação Semiótica de Duval.

O próximo exercício (Quadro 5.22) é uma das aplicações de situações problema relacionada ao cotidiano, dentre alguns dos exercícios de Iezzi et al. (2016) que apresentam enunciados diferentes, mas que levam ao mesmo método de resolução.

Quadro 5.22 – Exercício 21 – Livro didático.

Registro de Partida

Em um laboratório constatou-se que uma colônia de certo tipo de bactéria triplicava a cada meia hora. No instante em que começaram as observações, o número de bactérias na amostra era estimado em dez mil.

a) Represente, em tabela, a população de bactérias, (em milhares) nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 0,5 hora, 1 hora, 1,5 hora, 2 horas, 3 horas e 5 horas.

b) Obtenha a lei que relaciona o número (**n**) de milhares de bactérias, em função do tempo (**t**), em horas.

Registro de Chegada

a)

t(horas)	0	0,5	1	1,5	2	3	5
Números de bactérias (milhares)	10	30	90	270	810	7290	590490

b) $t = 0 \Rightarrow n(0) = 10$

$t = 0{,}5 \Rightarrow n(0{,}5) = 3 \,.\, 10 = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} \,.\, 10 = 30$

$t = 1 \Rightarrow n(1) = 3^{2 \cdot 1} \,.\, 10 = 90$

$t = 1{,}5 \Rightarrow n(1{,}5) = 3^3 \,.\, 10 = 3^{2 \cdot \frac{3}{2}} \,.\, 10 = 270$

$t = 2 \Rightarrow n(2) = 3^4 \,.\, 10 = 3^{2 \cdot 2} \,.\, 10 = 810$

Logo, $n(t) = 3^{2t} \,.\, 10$

Conversão Congruente | **Tratamento**

Iezzi et al. (2016, p.141), com adaptações.

O exercício se apresenta na língua materna, como registro de partida, indicando que uma população de bactérias triplicava a cada meia hora, iniciando com uma amostra estimada de 10 mil. Nesse sentido, podemos observar que para um registro de chegada se apresenta como na primeira meia hora como 3 . 10, apresentando os dados dos registros uma conversão de forma congruente, pois existe uma correspondência semântica entre os termos. Os demais dados para preenchimento da tabela tornam possível ao aluno de forma mais espontânea, apenas seguindo o que foi realizado para a identificação da primeira meia hora.

No item b) a conversão acontece do registro de representação de partida da língua natural para chegar ao registro algébrico, como registro representação de chegada. Uma possibilidade para o aluno chegar à solução seria realizar uma conversão para a representação numérica, a fim de realizar um tratamento que torna visual o que acontece com os dados do exercício, facilitando a compreensão da forma da expressão algébrica. Com esse exercício possibilita a exploração dos diferentes Registros de Representação Semiótica descritos por Duval (2009), além de ser importante a abordagem da língua materna para o registro em tabela que permite facilitar uma construção gráfica a partir dos dados visuais descritos na tabela.

Na sequência (Quadro 5.23), selecionamos um exercício que apresenta diferentes registros de representação.

Quadro 5.23 – Exercício 36 – Livro didático.

Registro de Partida A lei que permite estimar a depreciação de um equipamento industrial é v(t)= 5 000 . $4^{-0{,}02t}$, em que v(t) é o valor (em reais) do equipamento **t** anos após sua aquisição.

a) Por qual valor esse equipamento foi adquirido?

b) Em quanto tempo ele passará a valer metade do valor da aquisição?

c) Faça o esboço do gráfico da função que relaciona **v** e **t**.

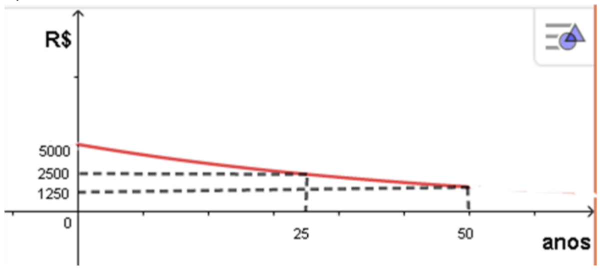
Registro de Chegada

a) $t = 0 \;\Rightarrow v(0) = \;5\,000\,.\;4^{0} \;\; = \;5\,000($ 5 000 reais)

b) $v(t) = 2\,500 \;\Rightarrow 2\,500 \;=\; 5\,000\,.\,4^{-0{,}02t} \Rightarrow \frac{1}{2} = 4^{-0{,}02t}$

$$\Rightarrow 2^{-1} \;=\; 2^{-0{,}02t} \Rightarrow 0{,}04t = 1 \;\Rightarrow t = \frac{1}{0{,}04} = 25\;(25\;anos)$$

c)



Conversão Congruente | **Tratamento**

Iezzi et al. (2016, p.144), com adaptações.

O exercício se apresenta na língua materna no registro de representação de partida e para a resolução do item a), como a expressão algébrica foi dada, necessita de uma substituição dos dados para a resolução, transformando em um registro de representação numérico, realizando assim uma transformação interna no registro de representação, que descrito por Duval (2009) é um tratamento. No item b) parte do registro de partida em língua materna para o registro de chegada como registro de representação numérico, porém para a resolução ocorre uma transformação interna que necessita de conhecimentos sobre resolução de equações exponenciais. No item c) realiza uma transformação para a representação gráfica que com observação e análise dos dados nos itens anteriores acreditamos que facilita a construção gráfica, ou seja, a conversão, que nesse caso, é uma conversão congruente, pois atende aos critérios de congruência estabelecidos por Duval (2009).

Com a realização da análise foi possível perceber que de nove atividades com seus respectivos itens contidas no Caderno do Professor, nove situações envolveram tratamento, seis conversão congruente e 7 conversões não congruente. É importante salientar que as conversões não congruentes apresentadas eram questões que envolviam o conhecimento de propriedades para seguir com a resolução e muitas delas já haviam sido apresentadas em outras atividades. Das atividades escolhidas no livro didático analisado, encontramos quatro tratamentos, seis conversões congruentes e uma conversão não congruente. Entretanto, é importante destacar que os exercícios dos livros não foram todos analisados.

Nos resultados apresentados identificamos uma diversidade de atividades que são fundamentais para trabalhar a teoria dos registros de representação. Quanto as contribuições da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático como em atividades que desenvolvem transformações como os tratamentos e conversões congruentes possibilitando aos alunos sucesso na resolução, contribuindo para o desenvolvimento da autoconfiança. As atividades que envolvem uma conversão são mais desafiadoras, porém essenciais para o desenvolvimento de habilidades e competências para lidar com situações complexas.

Diante da análise realizada e alinhada a nossa investigação, consideramos que obtivemos informações suficientes para responder a nossa questão norteadora da pesquisa que apresentaremos a seguir nas considerações finais.

5.3 Discussão e Conclusão

A análise da pesquisa seguiu o percurso do estudo qualitativo, do tipo bibliográfico, realizando uma análise das atividades e exercícios, apresentados nos materiais, com uma investigação fundamentada nos pressupostos da Teoria de Representação Semiótica de Duval (1999, 2009, 2011 a, 2011 b, 2012a, 2012b), destacando as transformações como tratamento e conversão que podem ser identificadas nas atividades no decorrer de suas realizações, com uma atenção maior para as conversões que podem ser apresentadas de forma congruente ou não congruente.

Os diferentes Registros de Representação Semiótica são identificados a partir de uma comparação de registros de representação de partida com os registros de representação de chegada, sendo assim, buscamos por organizar esses dados com auxílio do método de Cornell, identificando os tipos de transformações ocorridas.

Com isso no Caderno do Professor evidenciamos que em um total de 9 atividades foram contempladas as transformações de tratamento, conversão congruente e conversão não congruente.

A primeira atividade apresentou mais que uma transformação semiótica em que uma seção de leitura e análise consistia em partir da língua materna para uma representação em tabela, que apresentava os dados de uma produção em toneladas de certo alimento em determinado país X, apresentando de início uma conversão congruente, seguida de um tratamento, que conseguinte apresentava uma conversão não congruente, em que o registro de partida não se relacionava de maneira direta com o registro de chegada. Desse modo, a atividade nos levou a uma reflexão sobre uma abordagem logo de início para se trabalhar os conceitos de função exponencial.

Sabendo da importância de trabalhar os diferentes registros de representação, principalmente aos que levam a uma conversão não congruente, acreditamos que esta abordagem foi um pouco precipitada, pois exige do aluno uma preparação para transitar nos diferentes registros e para que isso ocorra, os conteúdos devem estar bem assimilados, de modo que, possam variar os conteúdos de uma representação para a outra e com uma conversão não congruente isso torna mais difícil para o aluno. As atividades iniciais necessitam ser mais simples de modo que leve o aluno a se interessar pelo assunto.

Na sequência das atividades do Caderno do Professor, é apresentada uma tabela para completar realizando um tratamento e aplicando as propriedades de potência com expoente natural e racional. Prosseguindo, com as próximas três atividades, 3, 4 e 5, apresentaram uma conversão congruente que foram evidenciadas a partir de uma comparação com o registro de partida, expressões algébricas para o registro de chegada, construção do gráfico, explorando a construção ponto a ponto e extensão de traçado descrito por Duval (2011a). Além disso, o caderno do Professor propõe uma construção com a utilização de *software*, o que julgamos ser de extrema importância tendo em vista que os alunos vivem em um mundo tecnológico. Contudo, não foi dada a atenção necessária para propor mais atividades envolvidas nesse contexto. Cabe aos professores, inserir mais atividades que visem abordagens com as tecnologias.

Na atividade 6, com os itens a) e b), em sua trajetória de resolução, envolve no item a), um tratamento, conversão não congruente e no item b) uma conversão congruente, demonstrando diferentes registros de representação, possibilitando ao aluno conhecimentos sobre a variação de registros que contribui para a aprendizagem. Já a atividade 7, a compreensão do enunciado faz com que a atividade seja acessível na visão dos alunos, porém, a não compreensão do enunciado dificultará a realização. Nesse sentido, constatamos que essa atividade vem de acordo com as possibilidades de aproximar os alunos de tarefas que busquem uma compreensão por meio das relações com o fenômeno de não congruência.

A atividade 8 trabalha com diferentes expressões e suas respectivas construções de gráfico que possibilita uma comparação a partir da mudança de parâmetros presentes nas expressões. Verificamos que as expressões, registro de partida, passaram por um tratamento e depois transformou do registro algébrico para o registro gráfico tornando a transformação menos espontâneas.

Pensando na atividade que apresenta uma conversão não congruente e da importância de se trabalhar esse tipo de atividade para uma melhor compreensão, sentimos a necessidade de trabalhar bem as propriedades de potência, para que ao realizar atividades como esta, não apresentem dificuldades.

E na atividade 9, os itens apresentam tratamento e em alguns casos, a conversão não congruente, levando o aluno a buscar conhecimentos sobre as potencias, chegando as equações exponenciais.

No livro didático, com os primeiros exercícios, evidenciou que são aplicados tratamentos, trabalhando com a questão de potência. Todavia, chama a atenção para um exercício que apresenta uma conversão congruente, iniciando as atividades de função exponencial de forma simples.

Na sequência trabalha a construção de gráfico, utilizando o ponto a ponto e extensão de traçado descrito por Duval (2011a), de diferentes gráficos que apresentam um crescimento e o outro um decrescimento, sugerindo na sequência uma abordagem dos mesmos gráficos com a utilização de *software.* Nos exercícios são apresentadas transformações que seguem como uma conversão congruente em todos os gráficos apresentados.

O próximo exercício do quadro 5.21, possibilita a exploração da translação de gráficos realizando a comparação nas diferentes expressões apresentadas.

O livro didático não sugere a forma pelo qual o gráfico deve ser construído, porém, se o ponto de vista for as construções, o interessante é a utilização ponto a ponto. Contudo, se o enfoque for os diferentes parâmetros ocorridos, é interessante que a abordagem seja realizada com a utilização de *softwares.*

O exercício do quadro 5.21, nos traz uma reflexão importante, pois é um exercício que trabalha os diferentes registros em uma atividade. E o interessante é que dependendo do nível em que o aluno se encontra para a compreensão de conteúdos relacionados a função exponencial, poderá ser simples ou mais complicada.

Chamamos a atenção para abordagens como a descrita no exercício, pois não são contemplados com frequência. Atividades que envolvem uma interpretação global, necessitam de uma atenção especial, pois a partir delas, o aluno terá uma visão geral do comportamento das funções, que muitas vezes não são percebidas em uma estratégia ponto a ponto e extensão do traçado.

Os outros dois exercícios restantes da análise do livro didático de Iezzi et al. (2016), apresentam conversões congruentes, um enfatizando construções de tabelas e a outro envolvendo a construção de um gráfico, com aplicação das propriedades da potência para as equações exponenciais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo analisar como são propostas a mobilização e a coordenação de diferentes Registros de Representação Semiótica da função exponencial no material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, o Caderno do Professor e no livro didático, Matemática- Ciências e Aplicação- de Iezzi et al. (2016), abordados no 1º Ano do Ensino Médio.

O interesse em estudar os materiais, surgiu da dificuldade que em alguns momentos eram apresentadas pelos alunos, relacionados à álgebra e função, e pela necessidade de ampliar a compreensão de enunciados, tabelas, gráficos, como também a possibilidade de fazer conexão com situações descritas em Matemática com outras áreas do conhecimento. Desse modo, instigou a vontade de analisar atividades com diferentes maneiras de apresentar as funções, indo ao encontro com os PCNEM que afirmam que o conceito de função, desempenha um processo importante, pois permite descrever através de leitura, interpretação, construção de gráfico o comportamento de fenômenos encontrados na área de Matemática e em outras áreas.

Nesse sentido, com intuito de conhecer melhor esse universo de estudo, realizamos uma revisão de literatura e constatamos que diversas pesquisas vêm sendo realizadas abordando o conceito de função e que algumas pesquisas indicam que não há muita satisfação em trabalhar o Caderno do Professor.

Diante desse cenário, e por meio de um primeiro contado, em aperfeiçoamentos, com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, surgiu a vontade de aprofundar os conceitos dessa teoria, para trabalhar com as diferentes formas de representar os objetos matemáticos.

Dessa forma, optamos por estudar as atividades contidas nos materiais, Caderno do Professor e Livro didático adotado pela escola em que a autora leciona, visando uma contribuição para o ensino e aprendizagem.

Após a análise das informações coletadas e por meio dos argumentos apresentados, sentimo-nos aptos para responder à questão que norteou esta investigação.

Como o conceito de função exponencial é apresentado nesses materiais didáticos sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no que tange aos fenômenos de congruência e não congruência?

A partir da análise realizada, foi possível perceber que os diferentes registros de representação são encontrados nos materiais didáticos e que o fenômeno de congruência é encontrado nos dois materiais com um mesmo quantitativo. Contudo, o fenômeno de não congruência aparece em algumas abordagens no Caderno do Professor, e em uma delas acreditamos que a atividade deveria ser aplicada posteriormente a atividades simples envolvendo tratamento e conversão congruente. Todavia, atividades que envolvem a conversão não congruente necessitam ser aplicadas com mais frequências, visto que são essenciais para o desenvolvimento de habilidades e competências que são adquiridas com atividades mais complexas envolvendo esse fenômeno. Já as demais atividades, concordamos com as situações, mas salientamos a importância de trabalhar as propriedades de potências que corroboram para a aprendizagem.

Enfatizamos que para uma melhor compreensão dos alunos, as transformações dos Registros de Representação Semiótica necessitam ser apresentadas e estudadas gradativamente, seguindo a princípio abordagens que envolvem tratamento, após conversão congruente, e na sequência a conversão não congruente, pois uma das causas dos alunos não terem afinidade com a Matemática, são devido as abordagens que levam a incompreensão.

Iezzi et al. (2016), apresenta situações que envolvem um processo que possibilita trabalhar os Registros de Representação Semiótica seguindo o tratamento, conversão congruente e conversão não congruente. Apresenta uma atividade de não congruência que ao ser realizada pelo aluno, torna possível para o professor uma visão sobre o nível em que o aluno se encontra sobre a compreensão dos conceitos de função exponencial, trabalhando com a interpretação global, que é uma das dificuldades de incompreensão dos alunos.

Observamos que as atividades sobre construções de gráficos tanto do Caderno do Professor como do livro de Iezzi et al. (2016), necessitam de um olhar voltado as tecnologias para aplicação da função exponencial com auxílio de *software.* E que ao realizar as atividades com gráficos no *software* trabalharemos com o fenômeno de congruência e se realizada através do ponto a ponto, em algumas expressões algébricas estremos diante do fenômeno de não congruência. Assim, fica evidente que a utilização de *softwares* para a construção de gráficos auxilia na compreensão dos conceitos.

Sabemos a partir da teoria de Duval (1999) que a compreensão dos diferentes registros de representação semiótica acontece quando é possível transitar nos diferentes registros. Sugerimos que as atividades a serem aplicadas e elaboradas privilegiem as conversões nos dois sentidos, e que sejam abordados diferentes registros de um mesmo objeto matemático, com enfoque nas conversões congruentes e principalmente nas conversões não congruentes que são causas da incompreensão dos alunos e são pouco exploradas.

A partir dos resultados encontrados, sugerimos para futuras pesquisas um estudo que contemple as funções logarítmicas visando as abordagens de conversões congruentes e não congruentes. E com a análise realizada na presente pesquisa, sugerimos uma aplicação das atividades analisadas e propostas nos materiais didáticos em sala de aula, para verificação de como os diferentes registros de representação semiótica podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, Karly; BARBOSA, Celso Viana; FERREIRA, Gislaine Maria. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a.C. até o século XX. **Revemat**, Florianópolis, v. 9, n. 1, p.159-178, 2014.

BOSCHESI, Fabio Henrique Lepri. **Práticas Pedagógicas com uso das TIC declaradas por Professores de Matemática do Ensino Médio no contexto do novo Currículo do Estado de São Paulo.** 2016. 159 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2016.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3 edição. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora: Edgard Blucher. 2010.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnologia**. PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2007. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em: 02 jun 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192> Acesso em: 10 ago. 2019.

CASSIARI, Edna Ribeiro. **Potencialidades e Fragilidades na Implementação do "Caderno do Professor" e "Caderno do aluno" da Rede Estadual de São Paulo.** 2011. 104 f. Dissertação (Mestrado) - Pontífica Universidade Católica de São Paulo-, São Paulo, 2011.

CERVO, Amado Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino. SILVA, Roberto da. **Metodologia científica.** 6. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2007.

DI PIERO, Pedro Jose. **Um ambiente virtual de aprendizagem suporte para o estudo de funções segundo a proposta curricular do estado de São Paulo.** 2011. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

DUVAL, Raymond. Representation, vision and visualization: Cognitive functions. Mathematical thinking. Basic issues for learning. **Proceedings XXI Psycology of Mathematical Education**, México: Éric, n. 1, p. 3-26, 1999.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres

Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica. In: CAMPOS, T. M. M. (Org.).Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem, 2011a.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. MORETTI, Méricles Thadeu. **Revista eletrônica de educação matemática (REVEMAT)**, v.6, n. 2, p.96-112 Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2011 b.

DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Trad. MORETTI, Méricles Thadeu. **Revista eletrônica de educação matemática (REVEMAT),** v.7, n. 1, p.97-117. Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012a

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, Méricles Thadeu. **Revista eletrônica de educação matemática (REVEMAT),** v.7, n. 2, p.266-297 Florianópolis, 2012b.

EINHARDT, Ivan Fabricio Braun. **Aplicações das Funções exponenciais e logarítmicas usando o aplicativo Malmath.** 2016. 149 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues. 3 ed. Campinas: Editora da Unicamp. 2008 . 844p.

FONSECA, Vilmar Gomes da. SANTOS, Angela Rocha dos. NUNES, Wallace Vallory. Estudo Epistemológico do conceito de Funções: uma retrospectiva. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática** Curitiba, SBEM, 18 a 21 de julho de 2013.p. 1-14

GIL, Antonio Carlos**. Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, [s.l.], v. 22, n. 2, p.465-487, jun. 2016. FapUNIFESP (SciELO).

IEZZI, Gelson. Et al. **Matemática:** ciência e aplicações. Ensino médio: Livro do professor, v.1, 9ª edição. São Paulo: Saraiva, 2016

LAJOLO, Marisa. Livro Didático: um (quase) manual de usuário. **Em aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996

LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cesar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática.)

MEDEIROS, Diego Piovesan. **Semiótica teoria e classificação dos signos.** Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2895111/mod_resource/content/1/Apostila%20de%20semi%C3%B3tica.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2019.

OLIVEIRA, Antônio Josimário Soares de. **O ensino e a aprendizagem de função exponencial em um ambiente de modelagem matemática.** 2013. 95 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal Rural do Semi-Árido., Mossoró, 2013.

PIANO, Cátia. **Diferentes abordagens para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas.** 2016. 108 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional., Universidade Tecnológica Federal do Paraná., Pato Branco, 2016.

PIRES, Rogério Fernando. **Função:** Concepções de Professores e Estudantes dos Ensinos Médio e Superior. 2014.438 f. Tese(Doutorado em Educação Matemática) Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator**, v. 3, n. 2, p. 3-8, 1992

RAMPINI, Elisabete Aparecida. **Currículo e identidades docentes: o caso da proposta curricular da secretaria da educação do estado de São Paulo.** 2011. 118 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

SÁ, Pedro Franco de; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Isaac Dayan Bastos da. A construção do Conceito de Função: alguns dados históricos. **Traços**, Belém, v. 6, n. 11, p.123-140, ago. 2003.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Linguagens, códigos e suas tecnologias**. – 2. ed. – São Paulo: SE, 2011. 260 p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 1ª série do Ensino Médio, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica**.1ed., 34ª reimpressão. São Paulo: Brasiliense, 2017 (Coleção Primeiros Passos: 103).

SILVA, Claudenor Ancelmo da. **A torre de hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensinoaprendizagem de função exponencial e resolução**

de problemas. 2015. 62 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semiárido(UFERSA), Mossoró, 2015a.

SILVA, Ricardo José Aguiar. **Contexto e aplicações das funções exponenciais no ensino médio: uma abordagem interdisciplinar.** 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas., Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015b.

SILVA, Maria Helena Morais. **Análise Histórica do Conceito de Função**. Universidade Federal Fluminense**,** Rio de Janeiro, v. 2, n. 2, p.29-33,1999 c. Disponível em: < http://www.dalicenca.uff.br/images/stories/caderno/volume2/Anlise_Histrica_do_Conceito_de_Funo.pdf> Acesso em: abr. 2019

SOUZA, Claudia Vicente de. **A função exponencial no caderno do professor de 2008 da secretaria do estado de São Paulo, análise de atividades realizadas por alunos da 2ª série do ensino médio.** 2010. 168 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Revista Zetetike**, Campinas, SP, v. 16, n. 2, out. 2008.