UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA SUSTENTABILIDADE CAMPUS SOROCABA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PLANEJAMENTO E USO DE RECURSOS RENOVÁVEIS

ALESSANDRO ARAUJO AMARAL DE ALMEIDA

Aplicação de modelos lineares mistos com regressão quantílica na projeção do crescimento e produção de *Eucalyptus* spp.

ALESSANDRO ARAUJO AMARAL DE ALMEIDA

Aplicação de modelos lineares mistos com regressão quantílica na projeção do crescimento e produção de *Eucalyptus* spp.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis da Universidade Federal de São Carlos – *campus* Sorocaba, para obtenção do título de Mestre.

Orientação: Prof. Dr. Cláudio Roberto Thiersch

Araujo Amaral de Almeida, Alessandro

Aplicação de modelos lineares mistos com regressão quantílica na projeção do crescimento e produção de Eucalyptus spp. / Alessandro Araujo Amaral de Almeida. -- 2020.

41 f.: 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Cláudio Roberto Thiersch

Banca examinadora: Monica Fabiana Bento Moreira Thiersch, Thelma Shirlen Soares

Bibliografia

Biometria Florestal.
 Modelos de crescimento e produção.
 Modelos mistos e Regressão quantílica.
 Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

ALESSANDRO ARAÚJO AMARAL DE ALMEIDA

APLICAÇÃO DE MODELOS LINEARES MISTOS COM REGRESSÃO QUANTÍLICA NA PROJEÇÃO DO CRESCIMENTO E PRODUÇÃO DE Eucalyptus spp.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação para obtenção do título de mestre em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis.

Universidade Federal de São Carlos.

Sorocaba, 03 de abril de 2020.

Orientador:

Prof. Dr. Claudio Roberto Thiersch

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar Campus Sorocaba

Certifico que a sessão de defesa foi realizada com a participação à distância da Profa. Dra. Thelma Shirlen Soares, da Universidade Federal de Goiás - UFG e da Profa. Dra. Monica Fabiana Bento Moreira Thiersch, da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba e, depois das arguições e deliberações realizadas, as participantes à distância estão de acordo com o conteúdo do parecer da comissão examinadora redigido no relatório de defesa de Dissertação de Alessandro Araújo Amaral de Almeida.

Prof. Dr. Claudio Roberto Thiersch

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus e toda a família pelo apoio e confiança.

À minha esposa Camila, por todo incentivo, apoio e compreensão em todos os momentos. E também ao meu filho Matias trazendo mais felicidade a nossa família.

Ao Prof. Dr. Cláudio Roberto Thiersch pela orientação, dedicação e confiança desde período da graduação.

Aos amigos que de alguma forma contribuíram para realização deste trabalho.

À Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, pela oportunidade.

RESUMO

ALMEIDA, A. A. A. Aplicação de modelos lineares mistos com regressão quantílica na projeção do crescimento e produção de *Eucalyptus* spp. 2020. 41 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2020.

A inferência correta do crescimento e da produção florestal são fatores importantes para tomadas de decisões no planejamento, existindo diferentes modelos baseados em estatísticas de regressão. Esses modelos são utilizados para determinação da idade técnica e econômica de corte, para gerar tabelas de produção dos povoamentos e curvas de crescimento. Devido a sua importância e a busca por estimativas mais precisas, o desenvolvimento de modelos mais complexos vem sendo aplicado no setor florestal, dentre os quais pode citar a modelagem mista e uso da regressão quantílica. O objetivo deste trabalho foi avaliar o uso de uma nova técnica utilizando modelos mistos lineares com regressão quantílica na projeção do crescimento e produção em um povoamento de eucalipto e também comparar as estimativas volumétricas com as obtidas pelo modelo de Clutter tradicional e modelagem mista. Os dados foram provenientes de um plantio clonal de eucalipto, localizado no interior de São Paulo, com idade entre 24 a 64 meses. Os ajustes das equações do modelo de Clutter, bem como do modelo linear misto com regressão quantílica e modelos mistos foram realizados no software estatístico R. Para verificar a acurácia dos métodos, selecionou-se a última medição como referência e, a partir desta, criou-se classes de períodos de projeção em intervalos de 12 meses, sendo estas de: (6,18], (18,30] e (30,42] meses. A avaliação foi realizada através do gráfico de dispersão dos resíduos, bem como por meio da raiz quadrada do erro médio (RMSE %). Verificou-se que o modelo misto e modelo linear misto com regressão quantílica obtiveram um menor RMSE de 3,94% e 4,20%, respectivamente, para classe de (6,18] meses. Já para as classes (18,30] e (30,42) meses o modelo de Clutter tradicional que apresentou menores valores de RMSE, sendo 4,28% e 4,75%, respectivamente. Após realizada as análises, definiu-se que para classe de (6,18) meses é indicado o uso do modelo linear misto com regressão quantílica devido ao RMSE e também apresentar a melhor dispersão dos resíduos. Para as classes (18,30] meses, apesar do modelo de Clutter tradicional apresentar o menor RMSE, após a análise da dispersão dos resíduos verificou-se que o uso do modelo misto é o mais indicado devido melhor dispersão, e para classe de (30,42] meses o modelo tradicional de Clutter é o mais indicado.

Palavras-chave: Biometria Florestal. Modelos de crescimento e produção. Modelos mistos. Regressão quantílica.

ABSTRACT

ALMEIDA, A. A. A. Application of linear mixed models with quantitative regression in the growth and production projection of *Eucalyptus* spp. 2020. 41 f. Thesis (Masters) – Federal University of São Carlos, Sorocaba, 2020.

The correct inference of growth and forest production are important factors for decision making in planning, with different models based on regression statistics. These models are used to determine the technical and economic age of the cut, to generate production tables for the stands and growth curves. Due to its importance and the search for more accurate estimates, the development of more complex models has been applied in the forestry sector, among which we can mention the mixed modeling and the use of quantile regression. The aim of this work was to evaluate the use of a new technique using linear mixed models with quantile regression in the projection of growth and production in an eucalyptus stand and also to compare the volumetric estimates with those obtained by the traditional Clutter model and mixed modelling. The data came from a clonal *Eucalytpus* spp. stand, located in the interior of São Paulo state, aged between 24 and 64 months. Adjustments to the equations of the Clutter model, as well as the mixed-effect models and the linear mixed-effect models with quantile regression, as well as the linear mixed model with quantile regression and mixedeffect models were performed using the statistical software R. To check the accuracy of the methods, the last measurement was selected as a reference and, based on this, classes of projection periods were created at 12-month intervals, which are: (6,18], (18,30] and (30,42] months. The evaluation was carried out through the residual plot, as well as through the square root of the average error (RMSE %). It was found that the mixed model and linear mixed model with quantile regression obtained a lower RMSE of 3.94% and 4.20%, respectively, for (6,18] month class. For the classes (18.30] and (30.42) months, the traditional Clutter model that presented lower values of RMSE, being 4.28% and 4.75%, respectively. After the analyzes were carried out, it was defined that for the class of (6,18) months the use of the linear mixed model with quantile regression due to the RMSE is indicated and also present the best dispersion of the residues. For the classes (18,30] months, despite the traditional Clutter model presenting the lowest RMSE, after analyzing the dispersion of the residues it was found that the use of the mixed model is the most suitable due to better dispersion, and for the class of (30,42] months, the traditional model of Clutter is the most suitable.

Keywords: Forest Biometrics. Modeling of growth and production. Mixed models. Quantile regression.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1. Dispersão dos resíduos em função do volume para classe de idade (6,18], em % ...32
- Figura 2. Dispersão dos resíduos em função do volume para classe de idade (18,30], em % .33
- Figura 3. Dispersão dos resíduos em função do volume para classe de idade (30, 42], em % 34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Amplitude e valores de idade, altura dominante (Hd), área basal (B) e volume total
com casca (VTcc)
Tabela 2. Exemplos de como foram realizadas as definições das classes para cada parcela 24
Tabela 3. Seleção da matriz de variância e covariância
Tabela 4. Alternativas de modelagem avaliadas para projeção do volume utilizando o material
genético como grupo de efeitos aleatórios
Tabela 5. Estatística utilizada para avaliar o ajuste dos métodos nas diferentes classes29

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1 MODELAGEM DE CRESCIMENTO	13
2.2 MODELO DE CLUTTER	14
2.3 MODELO DE EFEITO FIXO	15
2.4 MODELOS MISTOS	16
2.5 REGRESSÃO QUANTÍLICA	20
3 MATERIAL E MÉTODOS	23
3.1 FONTE DE DADOS	23
3.2 MODELAGEM DE CRESCIMENTO E PRODUÇÃO	23
3.3 ESTATÍSTICA DE AVALIAÇÃO	25
3.4.1 Raiz quadrada do erro médio	26
3.4.2 Análise gráfica dos resíduos	26
3.4.3 Critério de informação de Akaike	27
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	28
5. CONCLUSÕES	35
REFERÊNCIAS	36

1 INTRODUÇÃO

Conhecer o estoque de madeira atual e estimar a produção futura de um empreendimento florestal é de essencial importância. Estudos vêm sendo realizados para um contínuo aprimoramento das técnicas de construção de modelos de crescimento e produção. Segundo Vanclay (1994) os modelos de crescimento e produção apresentam benefícios a longo prazo, pois possibilitam ao gestor florestal investigar alternativas de manejo florestal, fornecendo informações necessárias para o planejamento das atividades florestais.

A análise do crescimento no setor florestal, utilizando modelos matemáticos e estatísticos, não é algo novo, sendo cada vez mais sofisticado este tipo de análise. Segundo Clutter (1983), uma das principais tarefas atribuídas ao profissional da área é entender como ocorre o crescimento de uma árvore em um povoamento, qual tratamento silvicultural adotar e prever qual será a época de corte e a produtividade do plantio, sendo possível planejar o abastecimento de indústrias florestais.

Os modelos com base em estatísticas de regressão são os mais usuais na modelagem do crescimento e produção florestal, sendo o modelo de Clutter o mais empregado para plantios de eucalipto (CARVALHO, 2010). Porém, com a evolução da tecnologia, o desenvolvimento de novos modelos de crescimento para estimativas do povoamento tem tido avanços no setor florestal, como vem ocorrendo, por exemplo, variações no modelo de Clutter, uso de regressão quantílica, modelagem mista, entre outros, que buscam estimativas mais precisas devido à importância para o planejamento florestal.

Os modelos de regressão tradicionais não levam em conta a possível variação dos parâmetros, entre os diferentes grupos hierárquicos como municípios, talhões, parcelas, entre outros. Já os modelos mistos, podem lidar com essa variação, considerando alguns dos parâmetros dos modelos como sendo aleatórios (PINHEIRO; BATES, 1995). Portanto, em aplicações que envolvem a análise da correlação entre unidades amostrais e mesmo dentro dessas unidades, é necessário utilizar o método de modelagem mista, uma vez que considera a correlação existente entre as observações.

Os modelos mistos possibilitam a utilização de diferentes tipos de estrutura para as matrizes de variâncias e covariâncias. Dessa forma é possível optar pela que melhor representa a variabilidade dos dados e a correlação entre as medidas. Segundo Barbosa (2009), a seleção da estrutura pode melhorar a eficiência das estimativas feitas sobre os parâmetros do modelo proposto.

Quando aplicada a regressão em modelos lineares, as estimativas dos parâmetros são obtidas pela utilização do método dos mínimos quadrados ordinários, que tem como premissa

a distribuição normal da variável dependente, considerando a análise das observações independentes (CAMPOS; LEITE, 2013). Entretanto, é comum a existência de correlação entre unidades amostrais observadas ao longo do tempo, o que viola a suposição de independência, além de resultar estimativas de baixa precisão quando amostras discrepantes (*outliers*) estão presentes nos dados (COSTA, 2003; BARROS, 2013).

Uma alternativa visando melhorar a precisão das estimativas é a utilização da regressão quantílica que possibilita o mapeamento mais completo do desenvolvimento da floresta em relação ao crescimento temporal, uma vez que permite caracterizar toda distribuição condicional da variável resposta. Além disso, ela é mais robusta na presença de dados discrepantes (KOENKER; BASSETT, 1978; CADE; NOON, 2003).

As técnicas de modelos mistos e regressão quantílica foram utilizadas na área florestal para modelos de crescimento e produção, tais como: estimativa volumétrica por modelo misto; modelagem do crescimento e produção de eucalipto com e sem efeito aleatório; uso da regressão quantílica na predição da produção de povoamentos de eucalipto (CARVALHO, 2013; FRAGA FILHO, 2016; FARIAS, 2018). Estes estudos, no entanto, utilizam a técnica de modelagem mista e regressão quantílica separadamente.

Sabendo da necessidade de estimativas precisas na projeção do crescimento e produção de eucalipto e das importâncias expostas, o presente trabalho objetivou avaliar uma nova técnica utilizando modelos mistos lineares com regressão quantílica com intuito de verificar a influência gerada na precisão das estimativas ao se utilizar a técnica de modelagem mista em conjunto com a regressão quantílica. Após avaliação da nova técnica, buscou-se comparar com modelo tradicional de Clutter (1963) e modelagem mista.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Modelagem de crescimento

A projeção do crescimento florestal é uma das principais informações aplicadas ao manejo. É de extrema importância o conhecimento dos parâmetros produtivos para o estabelecimento de um processo de gestão de povoamentos florestais (CAMPOS; LEITE, 2013).

Os modelos de crescimento e produção florestal permitem simular a dinâmica natural de um povoamento e prever a sua produção ao longo do tempo, em diferentes possibilidades de exploração (VANCLAY, 1994). Dentre os modelos para crescimento e produção florestal, na literatura, há uma grande variedade que se diferenciam de acordo com o nível de detalhamento podendo citar, conforme Nogueira et al. (2005), Scolforo (2006), Campos; Leite (2013) e Castro et al. (2013):

- a) modelos explícitos ou povoamento total, que fornecem estimativa da produção para o povoamento por unidade de área a partir de informações relacionadas ao povoamento em geral, como: idade, o sítio e uma medida qualquer de densidade. Estes são aplicados quando estimativas gerais sobre a população são desejadas;
- b) modelos implícitos ou de distribuição diamétrica que tem como princípio estimar o número de árvores por classe diamétrica possibilitando a avaliação de multiprodutos, além de serem flexíveis para analisar simulações de desbastes. Além disso, avaliam a produção considerando a estrutura dos povoamentos florestais tendo que agregar variáveis tais como diâmetro mínimo, diâmetro máximo e o diâmetro médio quadrático, dentre outros; e possui como característica o emprego de uma função de densidade de probabilidade;
- c) modelos para árvore individual que avaliam a produção florestal considerando a árvore como unidade das estimativas de crescimento, podendo ser em função do diâmetro, altura ou área basal. Este modelo, também, pode ser subdividido em dependente e independente da distância e abrange análises de mortalidade e competição.

Segundo Dias et al. (2005a), no Brasil persiste o uso de modelos de crescimento e produção em nível de povoamento, em que o volume e área basal são projetados com base em características intimamente relacionadas à produção volumétrica como idade, área basal e índice de sítio.

De acordo com Campos e Leite (2013), em modelos em nível de povoamento o crescimento é estimado por unidade de área, independentemente da classe de tamanho da árvore, e dentre os modelos matemáticos mais difundidos podemos citar os de Schumacher

(1939), Buckman (1962) e de Clutter (1963). Sendo que segundo Dias et al. (2005b), o de Clutter é o mais aplicado na área florestal.

2.2 Modelo de Clutter

O modelo de Clutter foi desenvolvido em 1963 e ainda é o modelo do tipo povoamento total mais difundido no Brasil. A teoria do modelo é que o crescimento e a produção devem ser considerados de forma simultânea, por isso o modelo é dito simultâneo por ser composto por duas equações, um para produção em volume e outra para área basal (CAMPOS; LEITE, 2013).

$$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{l_1}{l_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{l_1}{l_2} \right) S_1 + \varepsilon_i$$
 (1)

$$\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i \tag{2}$$

Onde:

 $B_1 = \text{área basal (m}^2/\text{ha}), \text{ na idade } I_1;$

 $B_2 = \text{área basal futura (m}^2/\text{ha)};$

 S_1 = índice de sítio na idade I_1 ;

 V_2 = volume futuro (m³/ha);

 $I_1 = idade presente (meses);$

 $I_2 = idade futura (meses);$

 α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , β_2 , β_3 = parâmetros do modelo;

 ε_i = erro aleatório.

Substituindo o B2 na equação de volume é obtida a equação 3:

$$\ln V_2 = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 \frac{1}{I_2} + \beta_3 \left[\ln \beta_3 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \beta_4 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \beta_5 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) S \right] + \varepsilon_i$$
 (3)

Onde:

$$\beta_4 = \propto_0 \beta_3 e$$
;

$$\beta_5 = \alpha_1 \beta_3$$
.

Para realizar o ajuste do modelo de Clutter (1963), é necessário obter as informações de volume, área basal, índice de sítio e idade do povoamento para cada uma das parcelas. (CUNHA, 2016).

Os estudos de crescimento e produção até 1962 foram desenvolvidos sem que fosse observado o princípio de compatibilidade entre eles, ou seja, os modelos de crescimento eram desenvolvidos independentemente dos modelos de produção. Assim, quando sucessivos incrementos estimados eram adicionados a um volume inicial, eles geralmente não apresentavam os mesmos valores de volumes preditos pela equação de produção, considerando-se o mesmo povoamento nas mesmas condições de idade, sítio e densidade (SCOLFORO, 2006).

Foram estudos simultâneos realizados por Buckman (1962) e Clutter (1963) que primeiro atentaram para a incompatibilidade entre os modelos de crescimento e produção. Estes autores resolveram o problema de incompatibilidade dos modelos com o uso de cálculo integral e cálculo diferencial. Da primeira derivada do modelo de produção, obteve-se o modelo de crescimento, e com o procedimento inverso, ou seja, com a integral do modelo de crescimento obteve-se o modelo de produção, de maneira que o problema de inconsistência entre a produção final e a soma dos crescimentos foi eliminado (SCOLFORO, 2006).

Muitos pesquisadores empregaram o modelo de Clutter em povoamentos do gênero *Eucalyptus* com diferentes características como, por exemplo, para modelar o crescimento e a produção considerando áreas estratificadas por classes de precipitação pluviométrica; como também em sistemas de integração lavoura-pecuária-floresta; modelagem da produção em nível de povoamento e por distribuição diamétrica e na modelagem do crescimento e da produção florestal em povoamentos desbastados e não desbastados (SALLES et al., 2012; MIRANDA et al., 2015; AZEVEDO et al., 2016; SILVA, 2017).

2.3 Modelo de Efeito fixo

Segundo Reinaldo (2017), o modelo de efeito fixo pressupõe que o efeito de interesse é o mesmo em todos os estudos e que as diferenças entre eles são devidas apenas à variabilidade interna de cada estudo. De forma simplificada, é como se os métodos com efeitos fixos considerassem que a variabilidade entre os estudos ocorreu meramente ao acaso e ignorassem a heterogeneidade entre eles.

A especificação de um modelo de efeitos fixos é apresentada na equação 4:

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \tag{4}$$

Onde:

 y_{it} = variável dependente;

 α_i (i=1,..., n) = efeito específico individual que capta a heterogeneidade não observada entre as unidades em análise:

 x_{it} = vetor p x 1 que representa o conjunto das variáveis explicativas;

 β = vetor de ordem p x 1 de parâmetros a serem estimados e;

 \mathcal{E}_{it} = termo de erro.

O modelo de efeitos fixos apresenta n interceptos, um para cada indivíduo, os quais absorvem os efeitos de todas as variáveis omitidas que diferem entre as unidades, mas são fixas no tempo, ou seja, o modelo supõe a existência de características que variam entre os indivíduos, mas são constantes ao longo do tempo (REINALDO, 2017).

Kennedy (2009) afirma que o modelo de efeitos fixos deve ser utilizado quando as variáveis omitidas são correlacionadas com as variáveis explicativas do modelo considerado, os dados referem-se a toda população (amostra abrange todos os indivíduos de uma população) e deseja-se fazer inferência sobre os indivíduos.

Segundo Abrantes (2007), uma limitação dos modelos fixos é que não são incorporados fatores individuais que afetem a resposta e que possam causar correlação no tempo. Além disso, o modelo de efeito fixo é considerado simples quando existem significantes fontes de heterogeneidade entre os estudos. Nestes casos, deve-se optar pelo modelo de efeito aleatório ou modelos mistos.

2.4 Modelos mistos

Diversos estudos em diferentes campos da ciência utilizam algum tipo de modelo de regressão com o objetivo de relacionar o comportamento de uma variável resposta com uma ou mais variáveis explicativas (COSTA, 2010). Segundo Calegario et al. (2005a), o modelo linear clássico utiliza como procedimento de estimação o método dos mínimos quadrados ordinários, que é restrito devido às pressuposições como independência das observações e homogeneidade de variâncias, frequentemente não atendidas.

Nas ciências florestais são comuns situações em que os dados apresentam comportamentos dependentes entre si, sendo estes chamados de dados agrupados que compreendem dados longitudinais, medidas repetidas, entre outros (COSTA, 2010). Os modelos mistos são de efetivo interesse, sendo apropriados para análise de medidas repetidas ao longo do tempo por se adequar a dados desbalanceados ou incompletos (PEREIRA, 2014).

Na área florestal, o aumento na intensidade do manejo cria oportunidades para o estudo de métodos mais precisos para estimar o volume presente e futuro de uma floresta. Uma alternativa para os ajustes convencionais, os quais consideram apenas efeitos fixos, são os modelos lineares e não lineares mistos (GARBER; MAGUIRE, 2003).

Um modelo linear que apresenta somente fatores de efeitos fixos além do erro experimental é denominado modelo fixo. Os modelos são considerados mistos porque apresentam uma parte que contém parâmetros de efeito(s) fixo(s) e outra parte que contém parâmetros de efeito(s) aleatório(s), além do erro experimental (MELLO, 2014).

De acordo com Hauser et al. (2009) e Yamanaka (2018), os efeitos são considerados:

- Fixos quando se deseja inferir somente as categorias das variáveis independentes (fatores) que são incluídas no ajuste do modelo. Os efeitos fixos são quantidades fixas desconhecidas e que devem ser estimadas baseadas na análise dos dados coletados;
- Aleatórios quando as categorias das variáveis utilizadas no ajuste do modelo constituem uma amostra aleatória de uma população, ou seja, formam um conjunto de categorias com uma distribuição de probabilidade, e se deseja inferir para a população inteira.

Os modelos de efeitos mistos são utilizados para descrever a relação entre uma variável resposta e uma ou mais covariáveis em dados agrupados de acordo com um ou mais fatores, tais como dados longitudinais, medições repetidas, dados com estrutura hierárquica e planejamento com blocos (PINHEIRO; BATES, 1995).

Empregados na área florestal, com pioneirismo para Lappi (1991), os modelos de efeitos mistos são umas das técnicas de regressão mais sofisticadas, tanto para relações empíricas lineares como para não lineares, os quais possibilitam ao usuário trabalhar com os dados na sua perfeita originalidade sem a necessidade de transformar variáveis para atender as pressuposições básicas de análise de regressão que são: independência entre as observações, distribuição aleatória, normal e idêntica dos resíduos com média zero e variância constante (CARVALHO, 2013).

Alguns estudos envolvendo a aplicação de modelos volumétricos mistos em plantios do gênero *Eucalyptus* já foram realizados no Brasil, como a estimativa conduzida por Carvalho (2013), Gouveia et al. (2015) e Fraga Filho (2016).

O uso de modelos mistos é adequado para dados em que a variabilidade entre os indivíduos é maior do que a variabilidade dentro do indivíduo, como é o caso das curvas de crescimento. O modelo assume que a variação na resposta para todos os indivíduos segue um

mesmo modelo ou tendência, porém os indivíduos podem se comportar de formas diferentes. Assim, cada indivíduo terá a sua própria curva de crescimento (FAUSTO et al., 2008).

O modelo linear misto pode ser expresso conforme a equação 5 (ROCHA, 2017):

$$Y = X\beta + Z\alpha + \varepsilon \tag{5}$$

Onde:

Y = estimativa da variável resposta;

 $X\beta$ = matriz de efeitos fixos;

 $Z\alpha$ = matriz de efeitos aleatórios;

 ε = vetor dos erros aleatórios, também aleatórios.

Os modelos lineares mistos são flexíveis para permitir que o coeficiente angular (inclinação) e o intercepto variem entre os indivíduos, possuindo dois componentes: um intraindividual e outro entre indivíduos (variação no intercepto e inclinação individual). Neste tipo de modelo, as medidas dos indivíduos não precisam ser igualmente espaçadas e balanceadas (quando apresentam o mesmo intervalo no tempo de medição) e as análises podem ser conduzidas com os dados de indivíduos que tiveram medidas perdidas (parcelas que não foram medidas, árvores que não foram medidas dentro de parcelas, por exemplo) ou que apresentam ausência de informação em algum momento do estudo. Portanto, na ausência de dados, os modelos mistos oferecem mais uma vantagem de utilização frente aos outros tipos de modelos para dados longitudinais e de medidas repetidas (QUEIROZ, 2012).

Segundo Xavier (2000), é possível optar pela estrutura da matriz de variância-covariância em modelos mistos podendo selecionar aquela que melhor represente os dados respeitando sua natureza, sejam independentes, dependentes, correlacionados ou que apresente qualquer outro tipo de relação, sendo esta uma vantagem de se trabalhar com modelos mistos, que envolvam curvas de crescimento ou polinomiais.

A escolha da melhor estrutura da matriz de variância-covariância visa obter uma estrutura parcimoniosa, que explique bem a variabilidade dos dados nas diversas ocasiões e a correlação entre essas medidas com um número pequeno de parâmetros, o que pode melhorar a eficiência das inferências sobre os parâmetros do modelo proposto para os valores médios nas diversas ocasiões. Além disso, a escolha também afeta as estimativas e erros padrões de efeitos fixos, diagnósticos, interpretações e extrapolações (CASTRO, 1999; BARBOSA, 2009).

A seguir são apresentadas algumas das estruturas de matriz de covariância, comumente utilizadas, como Simétrica Composta, Não Estruturada, Auto-Regressiva de 1ª

Ordem (CAMARINHA FILHO, 2002). Todas as matrizes estão com t = 4 ocasiões somente para efeito de ilustração.

Na matriz simétrica composta as variâncias são iguais em todas as ocasiões de medidas e possuem mesmas covariâncias entre medidas feitas em ocasiões distintas e envolve dois parâmetros (GOUVEIA, 2015).

I. Simétrica Composta

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma^2 + \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Na matriz não estruturada, atribuem-se variâncias e covariâncias distintas para cada uma das n_i ocasiões. Sendo assim, com $t_i(t_i+1)/2$ parâmetros (GOUVEIA, 2015).

II. Não Estruturada

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

A auto-regressiva de 1ª ordem possui dois parâmetros e aplicam-se variâncias iguais nas diversas situações e correlação decrescente com o acréscimo do intervalo entre as ocasiões (GOUVEIA, 2015).

III. Auto-Regressiva 1^a Ordem (AR (1))

$$\sigma^{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^{2} & \rho^{3} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^{2} \\ \rho^{2} & \rho & 1 & \rho \\ \rho^{3} & \rho^{2} & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

IV. Espacial

$$\sigma^{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho^{d12} & \rho^{d13} & \rho^{d14} \\ \rho^{d34} & 1 & \rho^{d23} & \rho^{d24} \\ \rho^{d24} & \rho^{d23} & 1 & \rho^{d34} \\ \rho^{d14} & \rho^{d13} & \rho^{d12} & 1 \end{bmatrix}$$

O ρ , da Espacial, é o parâmetro de correlação espacial e os d_{ij} são as distâncias euclidianas.

Várias técnicas de seleção do modelo com a respectiva estrutura da matriz de covariâncias podem ser utilizadas. A de uso mais difundido é o critério de informação de Akaike (AIC). O AIC é de grande importância na análise de regressão, uma vez que é relevante quando se tem o objetivo de comparar modelos ajustados para uma mesma amostra, pois penaliza modelos com número excessivos de parâmetros, selecionando modelos mais acurados (CARVALHO, 2013; MÔRA, 2015; NICOLETTI, 2017).

Em relação às inferências dos modelos mistos, os coeficientes podem ser estimados através do método da máxima verossimilhança (ML), porém, este produz estimativas enviesadas para variância do modelo devido à perda de graus de liberdade resultante da estimação dos efeitos fixos não ser considerada. Com isso, utiliza-se o método da máxima verossimilhança restrita (REML) uma vez que este problema (enviesamento) é corrigido ao utilizar o método REML (NUNES, 2010).

Quando os modelos são ajustados por REML, os valores de AIC somente podem ser comparados entre modelos com mesma estrutura de efeitos fixos. Já quando os modelos são ajustados por ML, os valores de AIC podem ser comparados com quaisquer modelos ajustados para os mesmos dados. Neste último caso, a qualidade do ajuste pode ser avaliada para diferentes especificações de efeitos fixos ou diferentes especificações de efeitos aleatórios ou ambos (PINHEIRO; BATES, 1995).

2.5 Regressão Quantílica

A regressão quantílica, introduzida por Koenker e Bassett (1978), é um método de análise de regressão que pode ser uma alternativa aos métodos baseados em médias. Em seu artigo, os autores propõem a classe de modelos no contexto linear, apresentando como uma alternativa mais robusta ao método de estimação de mínimos quadrados.

O modelo de regressão quantílica é uma extensão natural do modelo de regressão linear clássico. A principal diferença está no fato de que enquanto o modelo de regressão linear especifica a mudança na média condicional da variável dependente em função da mudança da sua covariância, o modelo de regressão quantílica especifica mudanças na mediana ou em qualquer quantil especificado permitindo uma melhor descrição dos dados (OLIVEIRA, 2011).

A regressão quantílica, diferentemente da abordagem tradicional de modelos de regressão, possibilita obter informações da variável de interesse em diversos níveis (quantis) da distribuição, tornando o estudo sobre o fenômeno mais completo e informativo. Esta pode ser usada para fornecer uma análise estatística mais completa das relações entre variáveis

aleatórias (BARROSO, 2018). Ou seja, enquanto os modelos clássicos se limitam à análise das médias condicionais, a regressão quantílica permite a análise ao longo de toda a distribuição condicional da variável resposta nas covariáveis (RASTEIRO, 2017).

Os modelos de regressão quantílica surgiram como uma generalização do método de minimização dos resíduos absolutos, tendo deparado no início com a dificuldade na estimação dos parâmetros por não ter uma fórmula analítica, ao contrário dos modelos de regressão lineares usuais. No entanto com avanço da tecnologia, e também o desenvolvimento das técnicas de programação, a metodologia vem ganhando cada vez mais espaço (RASTEIRO, 2017).

Para estimar os diversos quantis de interesse é feita uma ponderação na minimização desses resíduos. Diferente do método dos mínimos quadrados em que a distribuição dos dados deve ser normal e as amostras não devem apresentar dados discrepantes devido à média ser uma medida sensível a estes dados e difícil de interpretar, o método da regressão quantílica é robusto na presença de dados discrepantes na variável resposta, além disso, quando a distribuição dos erros não é normal, se mostra melhor para descrever uma posição central da distribuição condicional da variável resposta ao estimar o valor mediano da distribuição (KOENKER; BASSETT, 1978; SANTOS, 2012).

Em geral, os quantis escolhidos dependem inteiramente da finalidade do estudo, possibilitando o estudo de toda a distribuição ou apenas algumas partes definindo quantis específicos. Ou seja, neste modelo podem ser estimadas retas para cada quantil de interesse tornando em uma interpretação dos resultados mais adequada para o conjunto de dados com presença de assimetria, pois é possível traçar a relação em regiões centrais, através da mediana, e nas caudas da distribuição condicional (BARROSO, 2014).

Conforme Silva e Porto Júnior (2006) e Carvalho (2014), existem algumas vantagens na utilização da regressão quantílica:

- A regressão quantílica permite a análise de toda a distribuição condicional de uma variável dependente a partir de um conjunto de regressores;
- É possível utilizar a regressão quantílica nas distribuições que não sejam normais, devido esta dar menos peso para tais observações na variável dependente do que o método dos mínimos quadrados ordinários;
- A regressão quantílica é robusta a outliers, ou seja, não deixa a regressão ser tendenciosa;

• É possível estimar os intervalos de confiança diretamente do quantil condicional desejado.

Segundo Koenker e Basset (1978), quando uma distribuição não é normal, o método dos mínimos quadrados torna-se extremamente sensível a pequenas quantidades de *outliers*.

A metodologia já foi empregada por alguns autores no setor florestal, por exemplo, Farias (2018) utilizou regressão quantílica na predição da produção de povoamentos do gênero *Eucalyptus*, Santos (2017) realizou estudo de regressão não linear quantílica para classificação de sítio em povoamentos de *Eucalyptus* sp, Araújo Júnior, Soares, Leite (2016) empregaram regressão quantílica em curvas de índices de local em povoamentos de eucalipto.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Fonte de dados

O estudo foi realizado em um povoamento de *Eucalyptus* spp. localizado no município de Avaré, Estado de São Paulo. O clima, predominante, classificado segundo Köppen, é do tipo é Cwa – mesotérmico com inverno seco e verão quente, com precipitação pluviométrica média anual de 1.274 mm e solo do tipo latossolo vermelho.

Os dados utilizados foram provenientes de inventários florestais contínuos (IFC) em 69 parcelas permanentes retangulares com área em função do espaçamento possuindo dimensão média de 317,4 m². A área total do plantio é de 496,63 ha com idade variando de 25,2 a 64,8 meses, com 3 diferentes materiais genéticos plantados no espaçamento 3 x 2 m e 3 x 2,5 m.

Em cada parcela foi mensurada a circunferência à altura do peito, ou seja, a 1,30 m de altura do solo (CAP) de cada árvore, a altura total das cinco primeiras árvores e também a altura das árvores dominantes definidas conforme Assmann (1970).

O processamento do volume individual de cada árvore, bem como a capacidade produtiva foi realizado pela empresa que concedeu os dados, sendo geradas estimativas por parcela. A Tabela 1 apresenta dados médios, mínimos e máximos de idade, altura dominante, área basal e volume total com casca obtido nas parcelas do estudo.

Tabela 1. Amplitude e valores de idade, altura dominante (Hd), área basal (B) e volume total com casca (VTcc)

Idade ((meses)		Hd (m)		I	3 (m²/ha	1)	VI	Ccc (m³/h	a)
Mín.	Máx.	Mín.	Méd.	Máx.	Mín.	Méd.	Máx.	Mín.	Méd.	Máx.
25,2	64,8	15,4	23,59	31	13,43	25,10	37,85	94,73	270,51	475,46

Fonte: Elaboração própria

3.2 Modelagem de crescimento e produção

Para projeção do crescimento e produção foi empregado o modelo de Clutter.

$$Ln(V_2) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{S} + \beta_2 \frac{1}{I_2} + \beta_3 \left(\frac{I_1}{I_2}\right) * ln \left[G_1 + \beta_4 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) + \beta_5 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right) * S\right] + \varepsilon$$
 (6)

Onde:

 $V_2 = Volume futuro (m^3/ha);$

 I_1 e I_2 = Idade atual e futura (meses);

S =Índice de sítio (metros);

 $G_1 = \text{Área basal atual (m}^2/\text{ha)};$

ln = logaritmo neperiano;

 β_i = Parâmetros da regressão;

εi = erro aleatório.

Para a sequência do estudo foi adotado como $y = Ln(V_2); x1 = \frac{1}{s}; x2 = \frac{1}{l_2}; x3 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right) * ln(G_1); x4 = \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right); x5 = \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) * S$

Para projeção volumétrica foram empregadas três técnicas, sendo a primeira o modelo tradicional de Clutter, identificado como método 1. A segunda técnica, denominada como método 2, consistiu na modelagem de efeitos mistos considerando como efeito aleatório os materiais genéticos. Por fim, a terceira técnica, denominada método 3, empregou modelos mistos com regressão quantílica também utilizando os materiais genéticos como efeito aleatório.

Para testar a acurácia dos métodos propostos, selecionou-se a última medição de cada parcela como referência e, a partir desta, criou-se classes de período de projeção em intervalos de 12 meses, sendo de (6,18], (18,30] e (30,42] meses. Essas classes foram definidas por meio da diferença entre a idade da última medição e as idades de medição dos anos anteriores. O mesmo cálculo é realizado para todas as parcelas. Uma exemplificação do procedimento é descrita na Tabela 2.

Tabela 2. Exemplos de como foram realizadas as definições das classes para cada parcela

Parcela	Idade referência (meses)	Idade (meses)	Definição da classe	Classe
1	64,8	27,6	64,8 - 27,6 = 37,2	(30,42]
1	64,8	40,8	64,8 - 40,8 = 24	(18,30]
1	64,8	51,6	64,8 - 51,6 = 13,2	(6,18]
18	63,6	26,4	63,6 - 26,4 = 37,2	(30,42]
18	63,6	39,6	63,6 - 39,6 = 24	(18,30]
18	63,6	49,2	63,6 - 49,2 = 14,4	(6,18]
26	62,4	25,2	62,4 - 25,2 = 37,2	(30,42]
26	62,4	38,4	62,4 - 38,4 = 24	(18,30]
26	62,4	49,2	62,4 - 49,2 = 13,2	(6,18]

Onde: Parcela = Área delimitada para mensurar as variáveis da população; Idade referência = Idade da última medição realizada na parcela; Idade = Idade que foi realizada medição da parcela; Definição da classe = Resultado da diferença entre Idade referência e Idade para definição da classe; Classe = Classe de período de projeção em que a parcela foi definida.

Foram avaliadas 6 alternativas considerando a inclusão do efeito aleatório (material genético) em cada parâmetro no modelo de Clutter e verificou-se em qual destes o efeito aleatório teria maior influência. Após definir o parâmetro que terá influência do efeito aleatório, uma etapa importante na modelagem de efeitos mistos foi a escolha da estrutura da matriz de variância e covariância. No estudo foram utilizadas a Simétrica Composta, Auto-Regressiva de 1ª Ordem (AR1) e Espacial Linear. Todas as estruturas avaliadas no estudo estão presentes na biblioteca nlme (*Linear and Nonlinear Mixed Effects Models*) (PINHEIRO; BATES; DEBROY; SARKAR, 2014).

Após a escolha da estrutura, foram realizadas as estimativas dos parâmetros com auxílio do software R (R CORE TEAM, 2019). Para o método 1, foi utilizado o método dos mínimos quadrados ordinários em dois estágios utilizando a função lm (*linear model*). Este método é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados.

No método 2 utilizou-se a biblioteca nlme (*Linear and Nonlinear Mixed Effects Models*) (PINHEIRO et al., 2019) disponível no *software* R, a qual ajusta os modelos pelo procedimento de máxima verossimilhança restrita (REML). Tal método, de acordo com Fraga Filho (2016), consiste na obtenção de estimadores que maximizem a função de densidade de probabilidade das observações a respeito dos efeitos fixos e os componentes de variância.

Para o método 3, foi utilizada a biblioteca lqmm (*Linear Quantile Mixed Models*) (GERACI, 2014; GERACI; BOTTAI, 2014) que ajusta modelos mistos lineares quantílicos com base na distribuição assimétrica de Laplace. Para o método 3 foi realizado o ajuste para uma sequência de percentis variando 0,1 a 0,9 com intervalos de 0,005, definido de forma aleatória. Após gerar várias curvas de crescimento nos respectivos percentis citados, foi selecionado aquele que melhor representava a curva de crescimento, ou seja, aquele que mais se aproximou dos volumes observados.

3.3 Estatística de avaliação

Os critérios adotados para comparação dos modelos foram empregados a raiz quadrada do erro médio, a análise gráfica dos resíduos e o critério de informação de Akaike.

3.4.1 Raiz quadrada do erro médio

A raiz quadrada do erro médio (RMSE) é frequentemente usada para expressar a acurácia dos resultados obtidos no ajuste. Quanto menor o valor de RMSE mais próximo o ajuste está dos dados observado e consequentemente, maior qualidade do ajuste. Para o cálculo do RMSE percentual, foram utilizadas as seguintes expressões:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (Y - \hat{Y})^2}{n}}$$
 (7)

$$RMSE(\%) = \frac{\text{RMSE}}{\sum_{i=1}^{n} Y/n} * 100$$
(8)

Onde:

RMSE = raiz quadrada do erro médio na unidade da variável resposta;

 \hat{Y} = variável regressora estimada pelo modelo;

Y = variável observada;

n = número de observações;

RMSE(%) = raiz quadrada do erro médio em porcentagem.

3.4.2 Análise gráfica dos resíduos

A análise gráfica dos resíduos é de grande importância quando se avalia o ajuste de modelos de um determinado conjunto de dados, pois possibilita a identificação de possíveis tendenciosidades dos modelos testados.

Para estimativa dos resíduos foi utilizada a expressão:

$$E_i = \frac{(Y_i - \hat{Y}_i)}{Y_i} * 100 \tag{9}$$

Onde:

 E_i = resíduo da i-ésima observação;

 Y_i = variável dependente observada;

 \hat{Y}_i = variável dependente estimada.

3.4.3 Critério de informação de Akaike

O critério de informação de Akaike (AIC) é um método matemático para avaliar quão bem um modelo se ajusta aos dados dos que pretende descrever, ou seja, seleciona o modelo que apresenta as estimativas mais próximas do modelo verdadeiro.

Este critério penaliza modelos com muitas variáveis sendo que os melhores ajustes resultam em menores valores de AIC.

AIC é definido como:

$$AIC = -2logf(x|\Theta) + 2p \tag{10}$$

Onde:

AIC = Critério de informação de Akaike;

ln = logaritmo neperiano;

 $f(x|\theta)$ = máxima verossimilhança da função;

p = número de parâmetros do modelo.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Tabela 3 apresenta o ajuste de diferentes matrizes de variância e covariância para o método 2, bem como o valor de AIC para cada modelo.

Tabela 3. Seleção da matriz de variância e covariância

Estruturas ajustadas para o modelo de Clutter	Critério de informação de Akaike
Auto-Regressiva de 1ª Ordem	-632,1869
Simétrica Composta	-620,3496
Espacial Linear	-631,3701

Fonte: Elaboração própria

A estrutura Auto-Regressiva de 1ª ordem apresentou o menor valor de AIC, sendo, portanto, a mais adequada para o modelo de projeção volumétrica nos dados estudados. Segundo Rabello (2015), nesta estrutura as covariâncias diminuem com o tempo, além de supor homogeneidade de variâncias e heterogeneidade de covariâncias. Gouveia et al. (2013) estudando modelos volumétricos mistos aplicados a clones de *Eucalytus* avaliou diversas estruturas para matriz de covariância e verificou pelo uso do AIC que o melhor ajuste para estimativa volumétrica foi a Auto-Regressiva de primeira ordem.

A estrutura simétrica composta foi a que apresentou a pior qualidade de ajuste dentre as estruturas avaliadas. De acordo com Rabello (2015), essa estrutura supõe homogeneidade de variâncias dos efeitos aleatórios ao longo do tempo e homogeneidade de covariâncias para medidas realizadas em tempos diferentes.

A Tabela 4 apresenta os valores de AIC dos ajustes das 6 alternativas propostas. Dentre as alternativas analisadas a que obteve o menor valor de AIC foi a 4, com efeito aleatório na variável (idade1/idade2)*log(área basal). Consequentemente esta é a variável fixa que sofre influência do efeito aleatório material genético.

Tabela 4. Alternativas de modelagem avaliadas para projeção do volume utilizando o material genético como grupo de efeitos aleatórios

Alternativa	Variáveis do modelo com	Critério de informação de	
	efeito aleatório	Akaike	
1	$(\beta_0 + b_0)$	-630,8242	
2	$(\beta 1+b1)* 1/S$	-631,0006	
3	$(\beta 2+b2)*1/I_2$	-628,8351	
4	$(\beta 3+b3)*(I_1/I_2)*ln(G_1)$	-632,1869	
5	$(\beta 4+b4)*(1-I_1/I_2)$	-630,1867	
6	$(\beta 5+b5)*(1-I_1/I_2)*S$	-630,0931	

Onde: S =indice de sítio; $I_1 =$ idade atual; $I_2 =$ Idade futura; $G_1 =$ Área basal atual; $\beta =$ parâmetros fixos do modelo e b =parâmetros aleatórios.

Fonte: Elaboração própria

A partir da definição do melhor modelo considerando o efeito aleatório e a estrutura para matriz de variância e covariância, foram realizadas análises estatísticas para verificar a acurácia dos métodos 1, 2 e 3 nas diferentes classes (Tabela 5).

Tabela 5. Estatística utilizada para avaliar o ajuste dos métodos nas diferentes classes

RMSE (%)				
Classe	Método 1	Método 2	Método 3	
(6,18]	4,64	3,94	4,20	
(18,30]	4,28	4,34	5,66	
(30,42]	4,75	4,98	7,96	

Fonte: Elaboração própria

Analisando a classe de (6 a 18] meses, dentre os três métodos de projeção volumétrica ajustada, o método 2 foi o que obteve os melhores resultados para a medida de precisão, com RMSE de 3,94%, sendo superior ao método 1 e ao método 3. Pode-se observar também que o método 3 apresentou um valor de RMSE de 4,20%, menor quando comparado aos 4,64% obtidos para o método 1. Com isso, tanto o método 2 quanto o método 3 foram superiores ao método 1 podendo afirmar que para a classe de (6,18] meses, a inclusão de um efeito aleatório ao modelo, bem como o uso da regressão quantílica contribuíram para o aumento da precisão nas estimativas do volume nas condições avaliadas.

De acordo com Lopes (2018), espera-se que o com o emprego de modelos mistos seja possível obter resultados mais acurados, pois os modelos mistos permitem, não apenas descrever a tendência ao longo do tempo, tendo em conta a correlação existente entre as medições sucessivas, mas também descrever a variação geral de uma população e a mudança ao longo do tempo no nível do indivíduo, além de que as análises podem ser conduzidas para indivíduos que possam perder uma ou mais medições durante o estudo, caso comum para dados com medições sucessivas.

Quanto à regressão quantílica espera-se melhora no ajuste por permitir caracterizar toda a distribuição condicional de resposta tornando o estudo mais completo, além de ser mais robusta a *outliers*.

Para as classes de (18 a 30] e (30 a 42] meses, o método 1 apresentou um RMSE de 4,28% e 4,75% respectivamente. O modelo foi seguido pelo método 2 com RMSE de 4,34% e 4,98% e método 3, que apresentou RMSE de 5,66% e 7,96%. Para estas classes pode-se observar que a inclusão do efeito aleatório no modelo não melhorou a qualidade do ajuste.

Avaliando os erros obtidos, observa-se que a projeção volumétrica nas primeiras medições (2 anos - Classe (30,42] meses e 3 anos de idade - (18,30] meses) para os métodos 2 e 3 possuem um RMSE(%) maior do que método 1. Porém, em idades mais próximas à colheita (aproximadamente 5 e 6 anos de idade - Classe [6,18) meses) percebe-se uma melhora na precisão das estimativas volumétricas para os métodos 2 e 3.

Com base nos resultados, o uso do método 2 e 3 para idades de 5 e 6 anos (classe de (6,18] meses), são os mais indicados. A estimativa do volume para idades próximas ao corte é de fundamental importância para uma empresa florestal, pois, é geralmente através desta estimativa que são realizadas as negociações financeiras anteriores ao inventário pré-corte. Já para as primeiras idades de 2 e 3 anos (classe de (6,18] meses), o método 1 é o mais indicado por obter estimativas mais precisas.

Silva (2017) em seu estudo na modelagem de crescimento e produção florestal em povoamentos de *Eucalyptus* desbastados e não desbastados utilizando o modelo de Clutter encontrou um erro de 8,58% para estimativa volumétrica em povoamentos não desbastados. Um aspecto importante observado pelo autor foi da importância de obter estimativas cada vez mais precisas na produção do volume, pois o impacto é significativo para a sustentabilidade do empreendimento florestal, uma vez que envolve o atendimento de demandas nacionais e internacionais, além de influenciar os balanços econômicos, especialmente por se tratar de um planejamento a longo prazo (SILVA, 2017). Logo, a escolha da metodologia a ser utilizada deve atender aos objetivos e gerar estimativas de alta confiabilidade.

Procurando obter estimativas mais acuradas, Fraga Filho (2016), em seu estudo avaliou alternativas baseadas no modelo de Clutter (1963) para projeção do volume por classe de produtividade. Uma das alternativas consistiu na utilização do material genético como variável de agrupamento de efeitos aleatórios obtendo-se para cada classe de produtividade (sítio), S = 21, S = 27 e S = 33, RMSE (%) de 8,37%, 8,25% e 8,55%, respectivamente.

Farias (2018) comparando a precisão das metodologias de Clutter (1963) realizando ajuste por meio do Método dos Mínimos Quadrados em dois estágios e da regressão quantílica para projeção dos volumes obteve um RMSE% de 22,21% para Clutter e 11,78% para regressão quantílica.

Segundo Ferreira e Trevisan (2001), erros de até 10% são considerados admissíveis para modelos de prognose da produção. Portanto, sob o ponto de vista do RMSE (%), os três métodos avaliados apresentaram resultados admissíveis.

Para melhor avaliação da qualidade do ajuste verificou-se a dispersão dos resíduos para os dados de volume estimados nos três métodos avaliados.

Pode-se observar na Figura 2, que o método 1 apresentou subestimativa de volume com casca estimado entre 300 e 400 m³/ha, já para os volumes entre 400 a 450 m³/ha há superestimativa. Tais comportamentos sugerem a ocorrência de heterogeneidade de variância, ou seja, variância não constante dos erros, devido os pontos formarem uma "curva" ao redor do zero (subestimando para volumes menores e superestimando em volumes maiores) não estando dispostos aleatoriamente. Segundo Gujarati (2006), as possíveis causas destes erros (heterocedasticidade) são: método de coleta das variáveis dendrométricas e a presença de dados discrepantes.

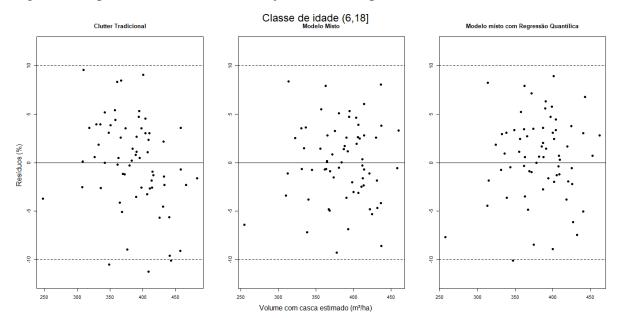


Figura 1. Dispersão dos resíduos em função do volume para classe de idade (6,18], em %

A dispersão dos resíduos para os dados de estimativa dos volumes para o método 2, demonstra que a inclusão do efeito aleatório (material genético) apresentou melhora na distribuição não possuindo tendenciosidade nas estimativas tanto em volumes menores quanto em maiores. Os resíduos estão dispersos aleatoriamente em torno do zero indicando o comportamento esperado para distribuição dos resíduos. Por fim, o método 3 também apresentou comportamento livre de tendenciosidade, tendo a dispersão dos resíduos parecida ao método 2 em sua totalidade com desvio entre -10 e 10%, sugerindo, desta maneira, baixa discrepância nos valores estimados.

Ao analisar os gráficos para classe de (6,18] meses, observa-se a capacidade da inclusão do efeito aleatório em obter estimativas de volumes mais acuradas. Portanto, pode-se dizer que para classe de (6,18] meses (ou idades de 5 e 6 anos), o uso dos métodos 2 e 3 são mais confiáveis, pois, apresentam resultados mais próximos do real e livres de tendenciosidades. Sendo que, dentre estes o mais indicado é o método 3 por apresentar menor valor de RMSE, além da análise gráfica dos resíduos realizada.

Para classe de idade de (18,30] meses (Figura 3) nota-se que os três métodos avaliados apresentaram comportamento livre de tendenciosidade. Para o método 1 e o método 2, observa-se um comportamento aleatório em torno do zero (nuvem de pontos dispostos de maneira homogênea) para variável volume com casca estimado, sendo que o método 2 apresenta, de forma discreta, uma dispersão mais concentrada dos resíduos. Já o método 3 verifica-se uma maior concentração dos resíduos acima de zero, havendo uma maior superestimativa dos volumes. Dessa forma, para classe (18,30] avaliando-se o RMSE(%) e gráfico de resíduos recomenda-se a utilização do método 2. Este método, de acordo com

Barboza et al. (2019), leva em consideração a dependência entre as observações, ou seja, pode-se testar diferentes matrizes de covariâncias no modelo, evitando assim, interpretações equivocadas.

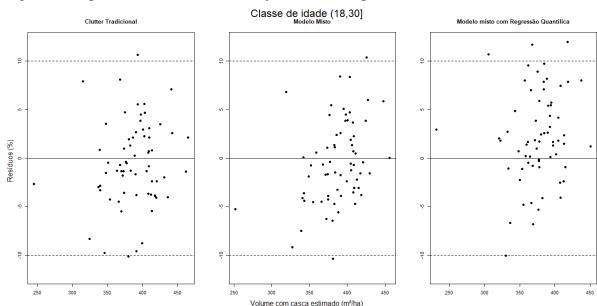


Figura 2. Dispersão dos resíduos em função do volume para classe de idade (18,30], em %

Por fim, avaliando a dispersão dos resíduos da classe (30,42] (Figura 4), os três métodos apresentaram comportamento livre de tendenciosidade. Para esta classe é possível observar que o método 1 apresentou dispersão mais concentrada dos resíduos das estimativas realizadas e de forma aleatória em torno do zero, quando comparado aos métodos 2 e 3. O método 2 também possui comportamento aleatório dos resíduos, já o método 3, novamente, apresenta maior concentração dos resíduos na parte superior (subestimativas dos volumes). Desta maneira, analisando o RMSE (%) e a distribuição dos resíduos percebe-se que a inclusão do efeito aleatório no modelo para esta classe não trouxe melhorias no ajuste. Portanto, baseando nas análises realizadas, para classe (30,42] é indicado o uso do método 1.

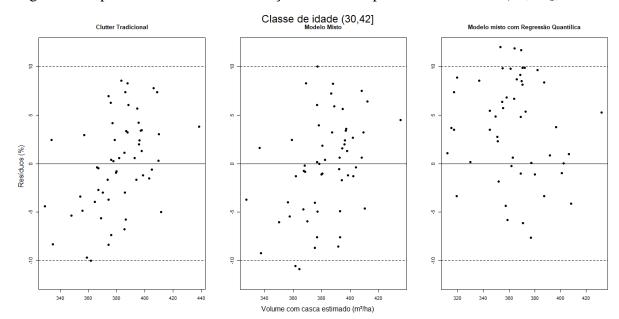


Figura 3. Dispersão dos resíduos em função do volume para classe de idade (30, 42], em %

Com base nos resultados das 3 classes pode-se afirmar que a utilização de efeito aleatório no modelo, seja o método 2 ou o método 3, são recomendados para a base de dados estudada, uma vez que, conforme Rocha (2017) cita em seu estudo, na regressão para fazer a inferência dos parâmetros do modelo são necessários alguns pressupostos teóricos, como por exemplo, independência entre as observações e homocedasticidade. No entanto, é possível que estes pressupostos não sejam satisfeitos podendo levar a conclusões incorretas, estimativas enviesadas, erros subestimados ou superestimados, entre outros. Por esse motivo, modelos que incorporam a estrutura hierárquica da população e as dependências entre as observações são importantes para a inferência estatística, como é o caso dos modelos mistos e a nova metodologia proposta de modelos mistos com regressão quantílica, empregados neste estudo.

5. CONCLUSÕES

O uso do modelo de Clutter considerando efeito aleatório teve desempenho superior ao modelo tradicional na classe (6,18] meses segundo o critério de raiz quadrada do erro médio (%) para as estimativas volumétricas, sendo indicado o uso do modelo misto para esta classe.

Para a classe (18,30] meses o modelo misto é o mais indicado devido as análises da raiz quadrada do erro médio e dispersão dos resíduos.

Por fim, para classe de (30,42] meses, o modelo tradicional de Clutter obteve melhores resultados com um menor valor de raiz quadrada do erro médio, além de ser confirmado sua superioridade pela análise gráfica dos resíduos.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, M. M. **Diferentes estratégias de modelagem de dados longitudinais desbalanceados.** 2007. 37 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.
- ARAÚJO JUNIOR, C. A.; SOARES, C. P. B.; LEITE, H. G. Curvas de índices de local em povoamentos de eucalipto obtidas por regressão quantílica. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 51, n. 6, p. 720-727, 2016. Disponível em: https://bit.ly/2x5w7sK>.
- ASSMANN, E. **The principles of forest yield study.** New York: Pergamon Press, 1970 506p.
- AZEVEDO, G. B. et al. Modelagem da produção em nível de povoamento e por distribuição diamétrica em plantios de eucalipto. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, v. 44, n. 110, p. 383-392, 2016. Disponível em: < https://bit.ly/2V0kTxA>.
- BARBOSA. M. Uma abordagem para a análise de dados com medidas repetidas utilizando modelos lineares mistos. 2009. 112 f. Dissertação (Mestrado Agronomia) Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Piracicaba, 2009.
- BARBOZA, R. C. O. Análise de medidas repetidas em ovinos da raça Santa Inês por meio de modelos mistos. **Sigmae,** Alfenas, v. 8, n. 2, p. 779-783, 2019. Disponível em: < https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/1064>.
- BARROS, A. L. B. P. **Revisitando o problema de classificação de padrões na presença de** *outliers* **usando técnicas de regressão robusta.** 2013. 132 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática) Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
- BARROSO, L. M. A. **Regressão quantílica na avaliação da adaptabilidade e estabilidade fenotípica.** 2014. 70 f. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2014.
- BARROSO, L. M. A. **Regressão quantílica: aplicações em seleção genômica ampla**. 2018. 58 f. Tese (Doutorado em Estatística Aplicada e Biometria) Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2018.
- BUCKMAN, R. E. **Growth and yield of red pine in Minnesota**. Washington.1962. 50 p. (Technical Bulletin, 1272).
- CADE, B. S.; NOON, B. R. A gentle introduction to quantile regression for ecologists. **Frontiers in Ecology and the Environment**, Washington, v. 1, n. 8, p.412-420. 2003. Disponível em: < https://bit.ly/37HPx3L>.
- CAMARINHA FILHO, J. A. C. **Modelos lineares mistos: estruturas de matrizes de variâncias e covariâncias e seleção de modelos.** 2002. 85 f. Tese (Doutorado em Agronomia) Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, 2002.
- CALEGARIO, N. et al. Melhoria da qualidade de ajuste de modelos biométricos florestais

- pelo emprego da teoria dos modelos não lineares generalizados. **Scientia Forestalis,** Piracicaba, n. 69, p. 38-50, 2005a. Disponível em: https://www.ipef.br/publicacoes/scientia/nr69/cap03.pdf>
- CAMPOS, J.C.C.; LEITE, H.G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. 4. ed. Viçosa: UFV, 2013. 600-p.
- CARVALHO, S. P. C. Uma nova metodologia de avaliação do crescimento e da produção de *Eucalyptus* sp clonal para fins energéticos. 2010. 103 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.
- CARVALHO, S. P. C. Estimativa volumétrica por modelo misto e tecnologia laser aerotransportado em plantios clonais de *Eucalyptus* sp. 2013. 104 f. Tese (Doutorado em Recursos Florestais) Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, 2013.
- CARVALHO, G. M. **Atividade física na renda dos indivíduos no Brasil: uma aplicação de Regressão Quantílica.** 2014. 82 f. Dissertação (Mestrado em Economia) Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2014.
- CASTRO, S. M. J. A metodologia de análise de dados longitudinais em plantas forrageiras no contexto de estruturas de covariância. 1999. 156 f. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999.
- CASTRO, R. V. O. et al. Crescimento e produção de plantios comerciais de eucalipto estimados por duas categorias de modelos. **Pesquisa agropecuária brasileira**, Brasília, v. 48, n. 3, p. 287-295, 2013. Disponível em: < https://bit.ly/2U89L2V>.
- CLUTTER, J. L. Compatible growth and yield models for Loblolly Pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 9, n. 3, p. 354-371, 1963.
- CLUTTER, J. L. et al. **Timber management: a quantitative approach**. New York: John Wiley & Sons, 1983. 333 p.
- COSTA, S. C. **Modelos lineares generalizados mistos para dados longitudinais**, 2003. 110f. Tese (Doutorado em Agronomia) Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, 2003.
- COSTA, T. R. Modelos lineares mistos: uma aplicação na produção de leite de vacas da raça Sindi. 2010. 64 f. Dissertação (Mestrado Biometria e Estatística Aplicada) Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2010.
- CUNHA, A. B. Modelagem do crescimento e produção de povoamentos de *Eucalyptus* por diferentes métodos de classificação de índice local. 2016. 52 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Florestais) Universidade de Brasília, Brasília, 2016.
- DIAS, A. N. et al. Avaliação de métodos de ajuste de curvas de índices de local em povoamentos de eucalipto desbastados. **Revista Árvore,** Viçosa, v.29, p.741-747, 2005a. Disponível em: https://bit.ly/3dXmL2Y>.

- DIAS, A. N. et al. Emprego de um modelo de crescimento e produção em povoamentos desbastados de eucalipto. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 29, n. 5, p. 731 739, 2005b. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rarv/v29n5/a08v29n5.pdf>.
- FARIAS, A. A. Uso de regressão quantílica na predição da produção de povoamentos de eucalipto. 2018. 27 f. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2018.
- FAUSTO, M. A. et al. O modelo de regressão linear misto para dados longitudinais: uma aplicação na análise de dados antropométricos desbalanceados. **Cadernos de Saúde Pública**, Rio de Janeiro, v. 24, n. 3, p. 513-524, 2008. Disponível em: https://bit.ly/2Xa4dGE>.
- FERREIRA, A. C.; TREVISAN, R. Prognose do crescimento volumétrico de espécies de Eucalyptus para a Região Centro Sul do Brasil. **Boletim de Pesquisa Florestal**, Colombo, v. 42, p. 71-82, 2001.
- FIGUEIREDO, E. O. Avaliação de modelos pelo método da curva média para construção de curvas de índice de local para *Tectona grandis* L. f. **Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento**, Rio Branco: Embrapa Acre, 49 f, 2005. Disponível em: < https://www.infoteca.cnptia.embrapa.br/bitstream/doc/511251/1/21005.pdf >
- FRAGA FILHO, C. V. Modelagem para prognose do crescimento e produção de eucalipto em diferentes níveis de abordagem. 2016. 280 f. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) Universidade Federal do Espírito Santo, Jeronimo Monteiro, 2016.
- GARBER, S. M.; MAGUIRE, D. A. Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures. **Forest Ecology and Management**, Amsterdan, v. 179, n. 1-3, p. 507-522, 2003. Disponível em: https://bit.ly/2UJNdF>.
- GERACI, M. **Linear Quantile Mixed Models**: The lqmm Package for Laplace Quantile Regression. Journal of Statistical Software, 57(13), 1-29, 2014 URL http://www.jstatsoft.org/v57/i13/.
- GERACI, M.; BOTTAI, M. Linear quantile mixed models. Statistics and Computing 24(3), 461-479, 2014.
- GOUVEIA J. F. et al. Modelos volumétricos mistos em clones de *Eucalyptus* no pólo gesseiro do Araripe, Pernambuco. **Revista Floresta**, Curitiba, v. 45, n. 3, p. 587-598, 2015. Disponível https://bit.ly/3e1zxxs.
- GUJARATI, D. N. **Econometria Básica.** 4ª Edição. Rio de Janeiro: Elsevier- Campus, 2006. 812 p.
- HAUSER, L. et al. Curva de crescimento usando modelo misto: uma aplicação na progressão da doença de Machado-Joseph. **Revista HCPA**, v. 10, n. 1, p. 5-17, 2009. Disponível em: < r/hcpa/article/view/8310>.
- KENNEDY, P. Manual de econometria. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009. 624 p.

- KOENKER, R.; BASSET JR, G. Regression Quantiles. **Econometrica**, New Haven, v. 46, n. 1. p. 33-50, 1978.
- LAPPI, J., Calibration of height and volume equations with random parameters. **Forest Science,** v. 37, n. 3, p. 781-801, 1971. Disponível em: https://academic.oup.com/forestscience/article/37/3/781/4642671.
- LOPES, M. D. **Modelo longitudinal aplicado à perda auditiva induzida pelo ruído: um estudo de caso**, 2018. 47 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018.
- MELO, E. A. **Desenvolvimento de modelos para crescimento florestal e afilamento de fuste,** 2013. 122 f. Dissertação (Mestrado Engenharia Florestal) Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2014.
- MIRANDA, R. O. V. et al. Modelagem do crescimento e produção em classes de precipitação pluviométrica para *Eucalyptus* sp. **Floresta**, Curitiba, v. 45, n. 1, p. 117-128, 2015. Disponível em: https://bit.ly/34cF7Zb.
- MÔRA, R. Funções de afilamento de forma variável e modelagem de efeitos mistos em fustes de *Pinus taeda* e *Eucalyptus saligna*. 2015. 277 f. Tese (Doutorado em Engenharia florestal) Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.
- NICOLETTI, M. F. **Modelagem não linear mista e método bivariado para sortimento da produção de** *Pinus taeda* L. 2017. 118 f. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal) Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.
- NOGUEIRA, G. S. et al. Modelo de distribuição diamétrica para povoamentos de Eucalyptus sp. submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 29, n. 4, p. 579-589, 2005. Disponível em: https://tinyurl.com/tgleatn.
- NUNES, A. M. R. O modelo linear misto multinível na análise do efeito do desbaste de pinheiros na recuperação ecológica de uma pedreira calcária. 2010. 105 f. Dissertação (Mestrado em Bioestatística) Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.
- OLIVEIRA, G. R. Determinantes da estrutura de capital das empresas brasileiras: uma abordagem em regressão quantílica. 2011. 46 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Econômicas) Universidade de Brasília, Brasília, 2011.
- PEREIRA, N. N. Modelos não lineares mistos na análise de curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã. 2014. 39 f. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) Universidade Federal de Viçosa, 2014.
- PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed effects models in S and S-PLUS**. Madison: University of Wiscosin, 1995. 32 p. (Technal Report, 89). Disponível em: https://bit.ly/2UISXzp.
- PINHEIRO, J.; BATES, D.; DEBROY, S.; SARKAR, D. R Core Team (2020). _nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models_. R package version 3.1-144, <URL: https://CRAN.R-p roject.org/package=nlme>.

- QUEIROZ, G. de. **Métodos e interpretação de modelos estatísticos de análise de medidas repetidas: uma aplicação a ensaio clínico.** 2012. 132 f. Dissertação (Mestrado em Epidemiologia em Saúde Pública) Escola Nacional de Saúde Pública Sergio Arouca, Rio de Janeiro, 2012.
- R CORE TEAM (2019). R: A language and environment for statistical computing. R Foundat ionfor Statistical Computing, Vienna, Austria. URL https://www.R-project.org/.
- RABELLO, W. S. Modelos mistos lineares em análise de dados longitudinais em genótipo s de feijão vagem. 2015. 108 f. Tese (Doutorado em Produção Vegetal) Universidade Estad ual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2015.
- RASTEIRO, L. R. **Regressão quantílica para dados censurados.** 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.
- REINALDO, L. M. **Estimação clássica e bayesiana para dados em painel.** 2017. 117 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) Universidade de Brasília, Brasília, 2017.
- ROCHA, A. L. M. M. **Modelos lineares Mistos: Uma abordagem bayesiana.** 2017. 50 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) Universidade de Brasília, Brasília, 2017.
- SALLES, T. T. et al. Modelo de Clutter na modelagem de crescimento e produção de eucalipto em sistemas de integração lavoura-pecuária-floresta. **Pesquisa agropecuária brasileira**, Brasília, v. 47, n. 2, p. 253-260, 2012. Disponível em: https://bit.ly/2JDVnZR>.
- SANTOS, B. R. **Modelos de Regressão Quantílica.** 2012. 96 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.
- SANTOS, C. J. **Regressão não linear quantílica para classificação de sítio em povoamentos de** *Eucalyptus sp.* 2017. 31 f. Dissertação (Mestrado em Planejamento e Uso de Recursos Renováveis) Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.
- SCHUMACHER, F. X. A new growth curve and its application to timber yield studies. **Journal of Forestry**, v. 37, p. 819-820, 1939.
- SCOLFORO, J. R. S. Crescimento e produção das variáveis dendrométricas: Crescimento em área basal e volume. In: SCOLFORO, J. R. S. **Biometria Florestal: Modelos de Crescimento e Produção Florestal**. Lavras: UFLA/FAEPE, 2006. cap. 2.
- SILVA, E. N.; PORTO JÚNIOR, S. S. Sistema financeiro e crescimento econômico: uma aplicação de regressão quantílica. **Economia Aplicada**, Ribeirão Preto, v. 10, n. 3, p. 425-442, 2006. Disponível em: https://bit.ly/2UI77Rc.
- SILVA, G. C. C. Modelagem do crescimento e da produção florestal em povoamentos de eucalipto desbastado e não desbastado. 2017. 129 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2017.
- VANCLAY, J. K. **Modelling Forest Growth and Yield**: Applications to Mixed Tropical Forests. Wallingford: CAB International. 1994. 312p. Disponível em: <encurtador.com.br/qR125>.

XAVIER, L. H. Modelos univariado e multivariado para análise de medidas repetidas e verificação da acurácia do modelo univariado por meio de simulação. 2000. 91 f. Dissertação (Mestrado em Agronomia) — Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, 2000.

YAMANAKA, S. E. **Modelos não lineares mistos em estudos de crescimento de frango de corte.** 2018. 183 f. Dissertação (Mestrado em matemática) — Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2018.