

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CAIO FERNANDO E SILVA

Formulações semiclássicas da Mecânica Quântica: uma análise do oscilador singular por meio do formalismo de Weyl-Wigner e trajetórias quânticas

São Carlos

2020

CAIO FERNANDO E SILVA

Formulações semiclássicas da Mecânica Quântica: uma análise do oscilador singular por meio do formalismo de Weyl-Wigner e trajetórias quânticas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini

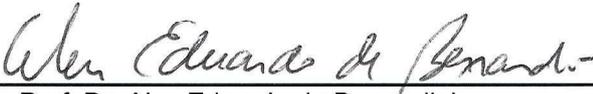
São Carlos

2020

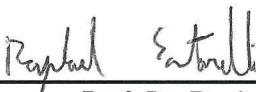


Folha de Aprovação

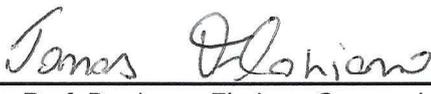
Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Caio Fernando e Silva, realizada em 10/02/2020:



Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini
UFSCar



Prof. Dr. Raphael Santarelli
UFSCar



Prof. Dr. Jonas Floriano Gomes dos Santos
UFABC

Este trabalho é dedicado aos meus amados pais, Márcio e Luzia.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini, por sua atenção e conselhos, cruciais na minha trajetória e no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, pelo incentivo incondicional para seguir as minhas escolhas pessoais e profissionais.

Aos meus irmãos, Kelly, Rodrigo, Felipe e Poliana, e família, por contribuírem, a seu modo, pela minha formação pessoal e por experiências que carregarei como ensinamentos para a vida toda.

Ao Departamento de Física e PPGF da UFSCar, cujos professores associados, desde a minha graduação, permitiram que eu tivesse uma experiência extremamente positiva na minha formação.

Aos funcionários da UFSCar, em particular, a Heloísa Helena, que apesar do difícil cenário nacional, esforçam-se para garantir uma universidade de excelência.

Aos meus colegas de graduação e pós-graduação, os quais, direta e indiretamente, tornaram esse período de aprendizagem ainda mais importante.

A Wagner, pela paciência, suporte e, acima de tudo, companheirismo, tão necessários para que, nos momentos de hesitação, eu seguisse firme nos meus objetivos.

A todos aqueles outros, ainda que minimamente, permitiram que eu estivesse aqui hoje.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“It is not his possession of knowledge, of irrefutable truth, that makes the man of science,
but his persistent and recklessly critical quest for truth. ”*

(Karl Raimund Popper)

RESUMO

A formulação usual da mecânica quântica não aprecia características relevantes do limite semiclássico. Neste trabalho, duas abordagens teóricas serão consideradas, a mecânica bohmiana e a formulação de Weyl-Wigner. O oscilador singular servirá como uma plataforma para obter, analiticamente, quantificadores de não-classicalidade dependentes da anarmonicidade do sistema. Na primeira parte, um estado *quasi*-gaussiano puro será considerado a partir das suas trajetórias bohmianas, as quais desviam da trajetória clássica por meio do potencial quântico. Na segunda parte, um *ensemble* canônico será considerado a partir do formalismo de Weyl-Wigner, com o qual é possível obter uma função de Wigner termalizada e, dada a anarmonicidade do potencial, investigar flutuações topológicas no espaço de fases para o fluxo correspondente. Essa característica quântica será distinguida das flutuações térmicas, as quais são dominantes para valores crescentes da temperatura. Equações de conservação de informação quântica serão introduzidas para calcular o efeito global das flutuações topológicas no fluxo de Wigner em equilíbrio termodinâmico. Na última parte, uma aplicação será dada a partir do modelo cosmológico de Hořava-Lifshitz, o qual será investigado no contexto dos formalismos desenvolvidos. O fator de escala será reparametrizado para que os quantificadores de não-classicalidade tornem-se dependentes da curvatura espacial do universo. Os resultados correlacionam valores crescentes da anarmonicidade a uma dinâmica *quasi*-clássica, usualmente associada apenas ao potencial harmônico. Além disso, as flutuações quânticas para o fluxo de Wigner em equilíbrio termodinâmico só podem ser detectadas localmente no espaço de fases, dado que as flutuações térmicas suprimem globalmente os efeitos do sistema não-*liouvilliano*.

Palavras-chave: Weyl-Wigner. Equilíbrio termodinâmico. Trajetórias bohmianas. Semiclássicalidade. Hořava-Lifshitz. Oscilador singular.

ABSTRACT

The usual quantum mechanics formalism does not address relevant points of the semiclassical limit. In this work two theoretical approaches will be considered: Bohmian mechanics and the Weyl-Wigner formulation. The singular oscillator will be used as a platform to analytically obtain *quantumness* quantifiers for anharmonic systems. The first part will be concerned with a pure *quasi*-Gaussian state, for which the corresponding Bohmian trajectories will be calculated and are shown to deviate from the classical one due to the quantum potential. In the second part, a canonical ensemble will be considered by using the Weyl-Wigner formalism, with which it is possible to derive a thermalized Wigner function. Given that the potential is anharmonic, topological fluctuations on the phase space are expected and will be investigated for the Wigner flux. The influence of the thermal fluctuations will be distinguished from its quantum counterpart, which is diminished for increasing values of the temperature. Also, quantum information conservation equations will be introduced to calculate the global effect of topological fluctuations on the thermal equilibrium Wigner flux. In the last part, the Hořava-Lifshitz cosmological model will be studied from both of the aforementioned theoretical perspectives. From them, the scale factor will be parameterized so that the quantumness quantifiers will depend on the spatial curvature of the universe. The results show that for increasing values of the anharmonic parameter, one observes a *quasi*-classical dynamics, usually associated to harmonic potentials only. Furthermore, Wigner flux topological fluctuations at thermodynamic equilibrium can be detected only locally, given that thermal fluctuations globally suppress non-Liouvillian effects.

Keywords: Weyl-Wigner. Thermodynamic equilibrium. Bohmian trajectories. Semiclassicality. Hořava-Lifshitz. Singular Oscillator.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função de Wigner do oscilador harmônico para o estado fundamental $n = 0$ e diversos estados excitados	20
Figura 2 – Evolução de trajetórias correspondentes ao pacote gaussiano livre	25
Figura 3 – O oscilador singular	30
Figura 4 – Trajetórias quânticas sobrepostas ao potencial $\mathcal{U}(x)$	36
Figura 5 – A força quântica $-\partial_x \mathcal{Q}(x, \tau)$ e a evolução de diversas trajetórias bohmianas	38
Figura 6 – Força quântica para trajetórias <i>quasi</i> -clássicas	39
Figura 7 – Dependência da corrente de Wigner \mathcal{J}^α com o parâmetro de interação α	48
Figura 8 – Fluxo de Wigner termalizado no espaço de fases	50
Figura 9 – Quantificador do caráter <i>liouviliano</i>	52

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Esquema comparativo entre a formulação de Weyl-Wigner e a mecânica bohmiana e seus correspondentes clássicos	28
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	Teorias clássico-quânticas no espaço de fases	14
2.1.1	<i>Mecânica Quântica de Weyl-Wigner</i>	16
2.2	Mecânica bohmiana no espaço das configurações	22
2.2.1	<i>Equação de Hamilton-Jacobi quântica</i>	22
3	O OSCILADOR SINGULAR	29
3.1	Variáveis adimensionalizadas	29
3.2	Estado quasi-gaussiano	32
3.2.1	<i>O oscilador harmônico Bohmiano</i>	36
3.3	Estado termalizado	41
3.3.1	<i>Correntes de Wigner dependentes da temperatura</i>	46
3.3.2	<i>Quantificador de Liouvillianidade</i>	51
3.3.3	<i>Fluxo de informação no espaço de fases</i>	52
4	COSMOLOGIA DE HOŘAVA-LIFSHITZ	57
4.1	A ação clássica	61
4.2	Equação de Wheeler-DeWitt	63
5	CONCLUSÕES	67
	Apêndice A Função de Wigner para o oscilador harmônico	72
	Apêndice B Adimensionalização	73
	Apêndice C Fase quântica para o pacote <i>quasi-gaussiano</i>	74
	Apêndice D Pureza da função de Wigner termalizada	75
	Apêndice E Equações de continuidade para pureza e entropia	77
	Referências Bibliográficas	79

1 INTRODUÇÃO

As primeiras contribuições para a construção de uma teoria quântica referem-se à explicação da radiação de corpos negros, por Max Planck (PLANCK, 1901), e pelo efeito fotoelétrico, por Albert Einstein (EINSTEIN, 1905). A teoria mostrou-se fundamental ao considerar fenômenos em escalas atômicas e a interpretação tradicional, em termos da função de onda, foi corroborada por cientistas como Bohr, Heisenberg e Schrödinger. Desde então, a mecânica quântica forneceu resultados precisos para diversos fenômenos até então abordados por uma teoria clássica e, ao longo do século, logrou ser considerada uma teoria fundamental da natureza.

Qualquer formulação válida de uma teoria quântica deve, evidentemente, apresentar previsões que sejam coerentes com os experimentos. No entanto, da mesma forma que se dispõe de diversas formulações da mecânica clássica, a teoria quântica também apresenta um variado quadro de abordagens teóricas. Algumas delas são compreendidas como complementares, como a formulação matricial e as funções de onda usuais. Contudo, outros formalismos podem apresentar uma relevância em contextos mais específicos, como as integrais de caminho de Feynman para o cálculo de probabilidades de transição, ou ainda, a segunda quantização para sistemas de muitos corpos (STYER *et al.*, 2002).

Se por um lado, as teorias apresentadas acima compartilham as mesmas previsões, em contrapartida, outras podem fornecer um caminho mais intuitivo para se investigar a transição do regime quântico-clássico. Nessa perspectiva, a formulação de Weyl-Wigner (WIGNER, 1932; CASE, 2008; BERNARDINI; BERTOLAMI, 2017; BERNARDINI, 2018) reconstrói a mecânica quântica no espaço de fases, ao projetar nesse os operadores usuais do espaço de Hilbert. A função de Wigner desempenha o papel do operador densidade, ou ainda, a função de onda para estados puros, com a vantagem operacional de ser uma função de escalares comutativos na posição e no momento. Um ponto crucial é que a função de Wigner pode ser interpretada como o correspondente quântico de uma densidade de probabilidade clássica no espaço de fases, de modo que se pode implementar

diversos algoritmos relacionados à quantificação de não-classicalidade (STEURNAGEL; KAKOFENGITIS; RITTER, 2013; KAKOFENGITIS; STEURNAGEL, 2014; KAKOFENGITIS; OLIVA; STEURNAGEL, 2017; BERNARDINI; BERTOLAMI, 2017). Por exemplo, da própria definição da função de Wigner, nota-se que ela não é positivamente definida para um estado quântico arbitrário, o que impede que ela descreva uma verdadeira densidade de probabilidade de microestados. Apenas em casos muito particulares, como o estado fundamental do oscilador harmônico, a função de Wigner corresponde a uma função não-negativa para todo seu domínio, assumindo a forma de uma função gaussiana (KENFACK; ŻYCZKOWSKI, 2004). De forma mais relevante, a evolução da função de Wigner descreve a evolução de *ensembles* no espaço de fases, para os quais a equação de Liouville pode ser obtida no regime clássico. Evidentemente, o caso mais genérico viola a evolução *Liouviliana*, o que motiva a investigação de quantificadores de não-classicalidade relacionados à não-*Liouvilianidade*, responsável por distorcer o fluxo clássico no espaço de fases.

Pragmaticamente, os quantificadores de não-classicalidade podem estar associados a fluxos localmente não-*liouvilianos* ou a sistemas globalmente não-conservativos. Para distingui-los, equações de continuidade globais, associadas a decoerência quântica, perda ou produção de pureza e entropia (BERNARDINI; BERTOLAMI, 2017; BERNARDINI; BERTOLAMI, 2019) podem ser construídas para um domínio fechado no espaço de fases. Desta forma, os aspectos não-clássicos locais e globais no espaço de fases são conectados, e o fluxo de Wigner quântico pode ser comparado a um fluxo clássico, globalmente conservativo.

Uma outra perspectiva para a transição clássico-quântica pode ser dada a partir da mecânica bohmiana (HOLLAND, 1995; DÜRR; TEUFEL, 2009), a qual introduz o conceito de trajetórias quânticas no espaço físico para uma função de onda usual definida no espaço das configurações. Uma profícua dinâmica pode ser observada ao se implementar a evolução da fase da função de onda (PINTO-NETO; PANTOJA, 2014; OLIVEIRA-NETO *et al.*, 2018), em geral negligenciada no formalismo usual. Independente de questões interpretativas, as trajetórias bohmianas transportam a densidade de probabilidade a partir da equação de continuidade. Portanto, uma trajetória é univocamente definida a partir de uma condição inicial, não interseccionando outra trajetória em nenhum momento da sua evolução. A partir da equação de Hamilton-Jacobi, constrói-se um potencial quântico

dependente da densidade de probabilidade usual, o qual pode ser utilizado para quantificar a correção quântica de trajetórias a partir das suas correspondentes clássicas.

Neste trabalho, para investigar os aspectos quânticos das teorias acima descritas, utilizar-se-á um oscilador anarmônico, dado que potenciais harmônicos adicionam ingredientes pouco relevantes na discussão (ALLORI, 2001; KAKOFENGITIS; OLIVA; STEUERNAGEL, 2017). Assim, o oscilador singular servirá com uma plataforma para aplicar os quantificadores de não-classicalidade. Ele apresenta um alto grau de manipulabilidade como observado em estudos anteriores (BERNARDINI, 2018; BERNARDINI; SILVA, 2020) e, portanto, apropriado para introduzir os aspectos mais relevantes das abordagens.

Com relação à estrutura da dissertação, o capítulo (2) será dedicado às fundações teóricas do formalismo de Weyl-Wigner e a mecânica bohmiana, com aplicações em exemplos mais triviais. O capítulo (3) aplicará os formalismos discutidos em um potencial anarmônico. Inicialmente, variáveis adimensionalizadas serão consideradas, pois simplificarão a discussão posterior. Um pacote de onda *quasi*-gaussiano será construído, o qual permitirá extrair analiticamente as trajetórias bohmianas. Além disso, a evolução da fase e do potencial quânticos também será considerada, visto que eles desempenham um papel crucial no regime quântico. O critério de curtos comprimentos de onda para o regime de classicalidade será verificado.

Na segunda parte do capítulo, investigar-se-á o caso de uma mistura estatística em equilíbrio termodinâmico, para a qual o formalismo de Wigner é naturalmente implementado. A função de Wigner termalizada será calculada e, a partir dela, as propriedades estatísticas serão derivadas. A função de partição e a pureza quântica do *ensemble* canônico serão calculadas analiticamente. A análise das correntes de Wigner permitirá investigar a influência da temperatura no caráter *liouviliano* do fluxo de fase. Na parte final, as equações de continuidade de probabilidade, pureza e entropia serão consideradas para o oscilador singular em equilíbrio termodinâmico, para o qual o efeito global das flutuações quânticas será calculado.

No capítulo (4), os desenvolvimentos teóricos discutidos serão contextualizados no modelo cosmológico de Hořava-Lifshitz, o qual permitirá parametrizar as soluções obtidas na função de onda do universo, em termos do fator de escala cosmológico. O procedimento de quantização canônica será introduzido a partir da ação clássica. A equação de Wheeler-DeWitt será obtida e reparametrizada convenientemente para que as soluções obtidas ao

longo do trabalho permitam obter um modelo quântico para o universo de Hořava-Lifshitz sujeito a condições iniciais, ou ainda, um universo em equilíbrio termodinâmico.

No capítulo (5), as considerações finais serão feitas e extensões do trabalho discutidas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, duas formulações teóricas serão discutidas para investigar a estrutura do limite semiclássico. A primeira delas explorará a estrutura do espaço de fases, no qual se identifica a evolução de *ensembles* quânticos a partir da função de Wigner. Em seguida, uma análise complementar por meio da evolução de trajetórias no espaço das configurações será dada pela mecânica bohmiana, a qual fornece uma dinâmica quântica com condições de contorno.

2.1 Teorias clássico-quânticas no espaço de fases

Antes de adentrar nos desenvolvimentos da mecânica quântica, é útil recordar como a estrutura do espaço de fases se desenvolve na mecânica clássica. No formalismo hamiltoniano, o par (q_i, p_i) das variáveis canônicas define completamente o estado do sistema. Para isso, a Hamiltoniana H é associada à evolução temporal dessas variáveis por meio das conhecidas equações de Hamilton,

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} \quad (2.1)$$

e

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\{q_i, H\}, \quad (2.2)$$

nas quais $\{, \}$ são os parênteses de Poisson. A evolução temporal gerada pela hamiltoniana do sistema é uma transformação canônica, pois preserva as equações de movimento e, portanto, a região dada pelo conjunto de pontos $(q_i, p_i) \rightarrow (q_i(t), p_i(t))$ apresenta volume constante (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002). Pragmaticamente, como tal evolução é univocamente definida pelas equações de Hamilton, duas trajetórias nunca se cruzam no espaço de fases.

A invariância do volume de uma região no espaço de fases está fundamentalmente ligada ao teorema de Liouville, no qual a densidade de probabilidade é preservada ao longo

das trajetórias. Isso é particularmente relevante para se entender como tais sistemas evoluem dinamicamente a partir das suas variadas configurações no espaço de fases, identificadas pelos microestados. Essa linguagem é bastante intuitiva no escopo da mecânica estatística, na qual um macroestado, dado por grandezas termodinâmicas definidas, está associado a um conjunto de microestados. Dada a complexidade de um sistema com tantos graus de liberdade, a noção de um *ensemble* estatístico se torna útil.

Uma definição de *ensemble* foi dada por Lemos (2007, p. 262) como “*Uma coleção imaginária de sistemas idênticos em composição e situação macroscópica, mas em diferentes microestados*”. Assim, a distribuição de probabilidade $\rho(q_i, p_i; t)$ caracteriza completamente tal sistema e quantifica quais microestados são prováveis, para valores crescentes de $\rho(q_i, p_i; t)$, e quais microestados são irrealizáveis, com $\rho(q_i, p_i; t) \approx 0$, não contribuindo para o estado observável. Por exemplo, no ensemble canônico (em equilíbrio térmico) a probabilidade de um microestado é da forma $\rho \propto \exp[-E_i/k_B T]$, na qual $k_B T$ corresponde à energia térmica associada à temperatura de equilíbrio e E_i à energia do microestado. É imediato notar que para estados extremamente energéticos, a probabilidade vai a zero e tal ponto no espaço de fases não contribui com o macroestado descrito. Assim, a densidade de probabilidade no espaço de fases descreve, de forma econômica, todos os possíveis microestados de um sistema. Além disso, como cada elemento do ensemble evolui de acordo com as equações de movimento, a conservação da densidade de probabilidade é uma consequência *Liouvilliana*,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0, \quad (2.3)$$

isto é, a equação de Liouville descreve como $\rho(q_i, p_i; t)$ evolui para uma hamiltoniana arbitrária. Essa equação sumariza o conteúdo dinâmico de um sistema físico clássico.

Da breve introdução acima, mostrou-se o significado da equação de Liouville para sistemas clássicos. Na próxima seção, será discutido por que tal equação não é capaz de descrever as particularidades de um sistema quântico, ainda que se obtenha uma descrição no espaço de fases. Dessa forma, uma versão mais geral dela pode ser implementada, estabelecendo uma equivalência na abordagem teórica entre o fluido de fase clássico e quântico.

2.1.1 Mecânica Quântica de Weyl-Wigner

Da intuição clássica, a densidade de probabilidade quantifica a probabilidade de que uma ou mais variáveis, no caso q e p , assumam um valor dentro de um intervalo. Tal noção não pode ser aplicada no domínio quântico, o que está fundamentalmente relacionado a possíveis flutuações que se tornam relevantes quando o intervalo especificado se torna arbitrariamente pequeno, ou mais precisamente, na escala da constante de Planck. Para resolver esse impasse, as variáveis posição e momento são promovidas a operadores não-comutativos no espaço de Hilbert, de forma que a densidade de probabilidade — função dessas coordenadas — também apresenta um operador equivalente, nomeadamente, o operador densidade. No entanto, é possível construir o mapeamento dos operadores em funções escalares de q e p , de modo que a mecânica quântica possa ser abordada no espaço de fases, preservando os seus axiomas.

Ainda que não se possa preservar a noção de densidade de probabilidade, valores esperados de observáveis físicos são usualmente obtidos dentro da teoria quântica. Por definição, o traço do produto de um operador qualquer e o operador densidade fornece tal distribuição estatística. Utilizando a notação *bra-ket* para um estado quântico $|\psi\rangle$ normalizado,

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{O}] = \langle\hat{O}\rangle, \quad (2.4)$$

na qual a notação “ $\hat{}$ ” indica um operador e $\text{Tr}[\dots]$ é a operação traço. A segunda igualdade segue para o operador densidade escrito como $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ para um estado puro. Como será visto a seguir, para estabelecer uma completa equivalência entre a operação traço e valores esperados na mecânica estatística, [Weyl \(1931\)](#) obteve um mapeamento de operadores no espaço de Hilbert a funções escalares, dado por

$$\begin{aligned} \hat{O}^W(q, p) &= \int dw \exp(i p w / \hbar) \langle q - w/2 | \hat{O} | q + w/2 \rangle \\ &= \int ds \exp(-i q s / \hbar) \langle p - s/2 | \hat{O} | p + s/2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

o qual é a conhecida transformada de Weyl de um operador quântico e, por facilidade de notação, considerou-se $(q, p) = (q_i, p_i)$, muito embora as equações tratadas aqui considerarão sistemas de uma partícula unidimensionais. É possível observar que tal transformação $\hat{O} \rightarrow \hat{O}^W$ associa a um operador uma função escalar das coordenadas comutativas no espaço de fases. Essa transformação permite verificar imediatamente que

$$\hat{q}^W = \int dw \exp(i p w / \hbar) (q + w/2) \delta(-w) = q \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$\hat{p}^W = \int ds \exp(i q s / \hbar) (p + s/2) \delta(-s) = p. \quad (2.7)$$

Genericamente, portanto, obtém-se que qualquer operador que possa ser escrito como a soma de polinômios em \hat{q} ou \hat{p} tem a sua transformada dada pela substituição $\hat{p} \rightarrow p$ e $\hat{q} \rightarrow q$.

É importante notar que a transformada de Weyl define uma álgebra particular¹, já que, em geral, $\hat{A}^W \hat{B}^W \neq (\hat{A}\hat{B})^W$. De fato, é possível mostrar que

$$\text{Tr}[\hat{A}\hat{B}] = \frac{1}{h} \int dq \int dp A^W B^W, \quad (2.10)$$

ou seja, o traço do produto de dois operadores pode ser calculado partir do produto de suas transformadas. Pode-se verificar, por exemplo, que a inserção do operador densidade na expressão acima leva a

$$\text{Tr}[\hat{\rho}] = \frac{1}{h} \int dq \int dp \int dw \exp(i p w / \hbar) \psi^*(q - w/2) \psi(q + w/2) \quad (2.11)$$

$$= \int dq \int dp W(q, p) = 1. \quad (2.12)$$

na qual se calculou $\hat{1}^W = 1$ e a última igualdade segue da condição de normalização dos estados ψ . Dessa forma, a função de Wigner $W(q, p)$ é fisicamente dada pela transformada de Fourier das coerências (elementos não-diagonais) do operador densidade na representação da posição ou do momento, ou simplesmente, $W = \hat{\rho}^W / h$ (CASE, 2008). Tal expressão foi encontrada por Wigner (1932) ao tentar estabelecer um método para calcular valores médios em misturas estatísticas no formalismo quântico, alternativamente à operação traço, devido à sua difícil manipulabilidade algébrica. De fato, ainda que uma função de onda não seja definida para estados mistos, é possível obter a correspondente função de Wigner, o que será apresentado na seção 3.3.

¹ A nova álgebra mencionada é definida pelo produto- \star (ou, para o presente caso, produto Moyal), na qual o produto das transformadas é distributivo (CURTRIGHT; FAIRLIE; ZACHOS, 1998; EFTEKHARZADEH; HU, 2005), ou seja,

$$(\hat{A}\hat{B})^W = \hat{A}^W \star \hat{B}^W \quad (2.8)$$

para

$$\star \equiv \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \left[\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q \right]\right). \quad (2.9)$$

Note que a não comutatividade das transformadas de Weyl (sob o produto usual) é uma consequência direta da não comutatividade dos seus correspondentes operadores.

Algumas propriedades decorrem da definição da função de Wigner,

- A função de Wigner é real:

$$\begin{aligned} W^*(q, p) &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dw \exp(-i p w / \hbar) \psi(q - w/2) \psi^*(q + w/2) \\ &= -\frac{1}{h} \int_{\infty}^{-\infty} dw' \exp(i p w' / \hbar) \psi(q + w'/2) \psi^*(q - w'/2) \\ &= W(q, p), \end{aligned} \quad (2.13)$$

na qual a última igualdade segue ao se inverter o intervalo de integração;

- A Eq. (2.12) indica que a função de Wigner é normalizada no espaço de fases:

$$\begin{aligned} \int dq \int dp W(q, p) &= \frac{1}{h} \int dq \int dp \int dw \exp(i p w / \hbar) \psi^*(q - w/2) \psi(q + w/2) \\ &= \int dq \psi^*(q) \psi(q) = 1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

na qual foi utilizado $\int dp \exp(ipw/\hbar) = 2\pi\delta(w/\hbar)$;

- Para estados puros,

$$\int dq \int dp W_i(q, p) W_j(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \delta_{ij}, \quad (2.15)$$

o que segue das manipulações feitas na Eq. (2.14).

As características da função de Wigner (real e normalizada) sugerem que ela é uma candidata a uma densidade de probabilidade. Nota-se, porém, que ela não pode ser uma verdadeira densidade de probabilidade, já que ela pode assumir valores negativos. Isso pode ser visto imediatamente para o caso do oscilador harmônico, com a transformação de Weyl aplicada à hamiltoniana,

$$\hat{H}^W(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2, \quad (2.16)$$

cujas autofunções são dadas por (GRIFFITHS, 1994)

$$\psi_n(q) = \mathcal{N}_n^{1/2} H_n(\xi q) \exp\left(-\frac{\xi^2 q^2}{2}\right), \quad (2.17)$$

com

$$\mathcal{N}_n = \left[\frac{\xi}{\pi^{1/2} 2^n \Gamma(n+1)} \right] \quad \text{e} \quad \xi = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2}, \quad (2.18)$$

sendo H_n o polinômio de Hermite de ordem n e $\Gamma(n)$ a função gama. A função de Wigner é obtida após algumas manipulações (cf. Apêndice A), sendo o resultado final dado por

$$W_n(q, p) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} \exp\left(-\xi^2 q^2 - \frac{p^2}{\hbar^2 \xi^2}\right) L_n\left(2\xi^2 q^2 + 2\frac{p^2}{\hbar^2 \xi^2}\right), \quad (2.19)$$

onde $L_n(x)$ é o polinômio de Laguerre de ordem n . Tal resultado pode também ser obtido a partir de um equação de autovalores com o produto Moyal descrito acima. A função de Wigner é exibida na Fig. (1), na qual se observa o perfil não gaussiano para $n \neq 0$. A função de Wigner correspondente ao estado fundamental do oscilador harmônico é sempre positiva e satura o princípio da incerteza². Portanto, associa-se a funções de ondas gaussianas um regime *quasi*-clássico, dada a positividade da sua função de Wigner. Isso permite utilizar a negatividade como um quantificador de não-classicalidade (KENFACK; ŻYCKOWSKI, 2004). Apesar dos estados excitados apresentarem regiões com $W < 0$, observa-se que no limite $\hbar \rightarrow 0$, usualmente associado a uma escala na qual os fenômenos quânticos não são apreciáveis, todas as funções de Wigner do oscilador harmônico se aproximam de distribuições de probabilidade arbitrariamente concentradas no espaço de fases (WANG; LI; DULAT, 2009). Evidentemente, a constante de Planck é fixa e o limite $\hbar \rightarrow 0$ simula condições associadas a um regime clássico, como grandes valores de massa ou energia. Tal limite será investigado ao longo do trabalho.

Retornando à Eq. (2.10), pode-se finalmente reexpressar a operação traço, porquanto a função de Wigner representa o operador densidade no espaço de fases. Assim, valores esperados são explicitamente dados por

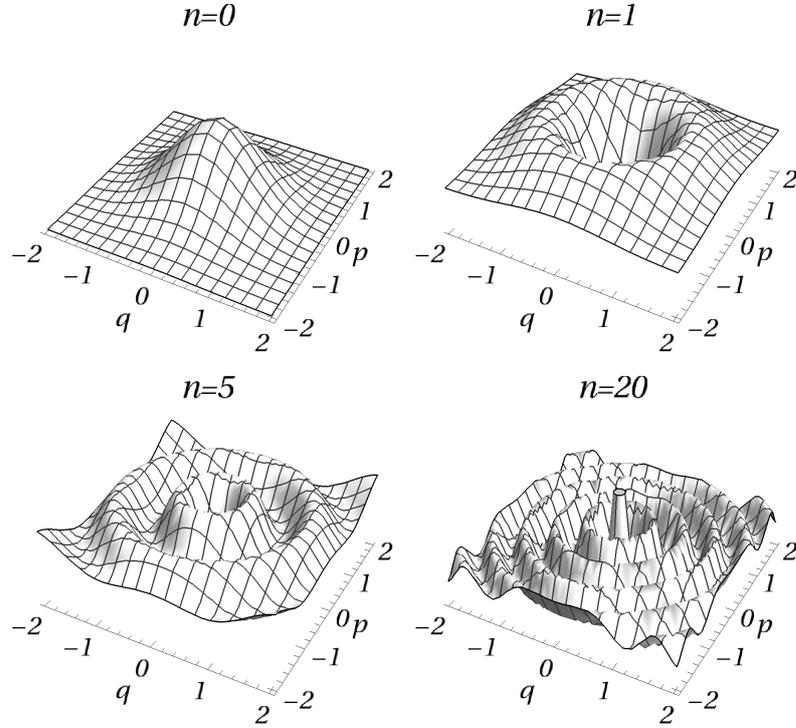
$$\langle O \rangle = \int dq \int dp W(q, p) O^W(q, p). \quad (2.20)$$

Para o oscilador harmônico é imediato notar que $\langle q^k \rangle = \langle p^k \rangle = 0$ para k ímpar, o que segue da paridade da função de Wigner e recupera um resultado já esperado. Com isso, compreende-se que a teoria quântica apresenta uma completa equivalência na formulação de Weyl-Wigner, já que as previsões obtidas para valores esperados de operadores não se alteram.

Para além da análise das regiões de negatividade da função de Wigner, fenômenos qualitativamente novos podem ser observados a partir da sua dinâmica, o que descreve a evolução do sistema quântico de forma genérica. Para isso, a evolução temporal da função de Wigner fornece uma analogia interessante com a equação de Liouville clássica (cf. Eq. 2.3), que permite identificar um regime quântico.

² Em alguns sistemas, é possível produzir outros estados que também minimizam o princípio da incerteza. Em particular, os estados comprimidos (ou *squeezed states*) do campo eletromagnético correspondem a estados cuja variância em uma das coordenadas é menor do que o estado de vácuo do sistema, aqui representado pelo estado fundamental. A sua representação no espaço de fases é dada por uma função de Wigner efetivamente comprimida em uma direção, mas estendida na outra, de modo a respeitar o princípio da incerteza de Heisenberg (TEICH; SALEH, 1989; CARDOSO, 2019).

Figura 1 – Função de Wigner do oscilador harmônico para o estado fundamental $n = 0$ e diversos estados excitados. Por simplicidade, $\hbar = m = \omega = 1$.



Fonte: Elaboração própria

A dinâmica da função de Wigner dependente do tempo $W(q, p; t)$ é obtida a partir da equação de Schrödinger no espaço de fases, para um potencial que possa ser expandido em uma série de Taylor, fornecendo uma equação de continuidade (CASE, 2008),

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial J_q}{\partial q} + \frac{\partial J_p}{\partial p} \equiv \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.21)$$

de forma que se define um vetor de fluxo no espaço de fases $\mathbf{J}(q, p; t) = J_q \hat{q} + J_p \hat{p}$, cujas componentes são explicitamente dadas por

$$J_q(q, p; t) = \frac{p}{m} W(q, p; t), \quad (2.22)$$

$$J_p(q, p; t) = - \sum_{\eta=0}^{\infty} \left(\frac{i \hbar}{2} \right)^{2\eta} \frac{1}{(2\eta + 1)!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial q} \right)^{2\eta+1} V(q) \right] \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{2\eta} W(q, p; t). \quad (2.23)$$

Da expressão acima, ao truncar a expansão no primeiro termo,

$$J_p(q, p; t) = - \frac{\partial V(q)}{\partial q} W(q, p; t), \quad (2.24)$$

de forma que a Eq. (2.21) se torna

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{m} W(q, p; t) - \frac{\partial V(q)}{\partial q} \frac{\partial W(q, p; t)}{\partial p} = 0, \quad (2.25)$$

a qual é a equação de Liouville clássica para uma hamiltoniana na forma $H = p^2/2m + V(q)$. Assim, para potenciais harmônicos, $V(q) \propto q^2$, o fluxo de Wigner é clássico, isto é, linear de acordo com a equação de continuidade, o que corresponde a uma rotação da função de Wigner no espaço de fases. Por outro lado, derivadas de ordem superior do potencial introduzem termos não-lineares na equação de continuidade, o que levará a pontos de estagnação no fluxo de Wigner, como vórtices, intersecção de separatrizes ou pontos de sela (STUERNAGEL; KAKOFENGITIS; RITTER, 2013; BERNARDINI; LEAL; BERTOLAMI, 2018).

Nota-se que, classicamente, o único ponto de estagnação previsto corresponde a $p = 0$ e $\partial V/\partial q = 0$, isto é, um ponto com momento e força nulos, já que funções de Wigner nulas levam a linhas contínuas para $|\mathbf{J}| = 0$. É razoável ainda supor que a estrutura do fluxo de Wigner não seja alterada ao redor desses pontos de estagnação para funções de onda contínuas. Assim, Steuernagel, Kakofengitis e Ritter (2013) identificaram nessas singularidades uma carga topológica, isto é, para um caminho fechado arbitrário percorrido pelo vetor de fluxo, a soma dos *winding numbers*³ dos pontos de estagnação se mantém constante. Essa estrutura topológica é familiar a outras áreas da física, em particular, ao estudo das singularidades de fase da luz — chamado de óptica singular — no qual um campo complexo nulo não apresenta valores definidos de fase (DENNIS; O'HOLLERAN; PADGETT, 2009; BRANDÃO FILHO, 2016).

Em suma, a analogia com um fluido de fase permite investigar a fronteira clássico-quântica a partir da formação de estruturas não previstas classicamente no perfil do espaço de fases. Dado um caminho fechado, as flutuações topológicas podem ser quantificadas para sistemas anarmônicos, o que será feito no capítulo seguinte. Uma análise complementar pode se tornar profícua ao se investigar a evolução do sistema no espaço das configurações, determinada pela dinâmica da fase da função de onda. Essa formulação ficou conhecida como mecânica bohmiana ou teoria de onda-piloto, cujos aspectos formais serão discutidos a seguir.

³ o *winding number* é um número inteiro e corresponde ao número de rotações que uma determinada curva faz ao redor de um ponto. Por exemplo, para rotações horárias, tem-se números positivos.

2.2 Mecânica bohmiana no espaço das configurações

Analogamente ao que foi desenvolvido na seção anterior, a evolução da fase quântica apresenta uma analogia com uma conhecida equação da mecânica clássica. Para uma hamiltoniana $H(q, p; t)$, é possível introduzir uma transformação de variáveis $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ que preservam as equações de movimento (2.1) e (2.2). Em particular, para uma dessas transformações, a hamiltoniana transformada, ou kamiltoniana, $K(Q, P; t)$, anula-se. Portanto, as equações tornam-se

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad (2.26)$$

e

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0. \quad (2.27)$$

Dessa forma, a transformação hamiltoniana pode ser obtida com (LEMONS, 2007)

$$K = H(q, p; t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (2.28)$$

da qual decorre $\nabla S = \partial_q S = p$ e $S(q, P; t)$ é chamada de função geradora. As novas variáveis Q e P são, na realidade, constantes de movimento e podem ser determinadas pelas condições de contorno. A ação clássica ou função principal de Hamilton também satisfaz a Eq. (2.28) e difere de $S(q, P; t) \equiv S(q; t)$ por apenas uma constante. Surpreendentemente, a função $S(q; t)$ parece ter uma correspondente quântica, a qual será introduzida a seguir.

2.2.1 Equação de Hamilton-Jacobi quântica

O formalismo descrito anteriormente é útil para se obter as possíveis evoluções no espaço de fases, a partir de condições de contorno na posição e também no momento. Entretanto, ao se investigar a evolução das trajetórias quânticas, há uma restrição adicional a ser imposta na distribuição de momentos, a qual impede que os momentos sejam arbitrariamente escolhidos, como será visto a seguir.

A mecânica bohmiana (BOHM, 1952), também chamada de teoria de onda-piloto, ou ainda teoria de de Broglie-Bohm, reescreve a equação de Schrödinger para uma função de onda unidimensional de uma partícula na forma polar, $\psi = \rho^{1/2} e^{iS/\hbar}$, para escalares reais ρ , a densidade de probabilidade usual e S , a fase quântica, de forma que se pode

obter duas equações acopladas ao se separar a parte real e imaginária (DÜRR; TEUFEL, 2009),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla S}{m} \right) = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q = 0, \quad \text{para } Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2}}, \quad (2.30)$$

sendo a primeira delas a conhecida equação de continuidade e a segunda é chamada de equação de Hamilton-Jacobi quântica (HJQ), que — ao menos em sua forma — corresponde à equação de Hamilton-Jacobi clássica com um termo corrigido, o potencial quântico Q . Nota-se, porém, que além da correção do potencial Q , a equação da continuidade identifica um campo de velocidade local, cujo momento da partícula correspondente pode ser identificado com $p = \nabla S$. Evidentemente, aqui, p não é mais o momento canônico, dado que a função S não é uma integral completa da equação de Hamilton-Jacobi clássica. Isso reflete, novamente, as dificuldades em se criar uma teoria quântica no espaço de fases. Além disso, a natureza do potencial Q é diametralmente oposta a V : enquanto o potencial V corresponde a uma interferência externa, como uma barreira de potencial, a dependência com a densidade de probabilidade de Q faz com que as partículas bohmianas dependam não-localmente de outros elementos do *ensemble*. Em particular, regiões para as quais ρ se anula, $Q \rightarrow \infty$, e as trajetórias não podem acessar os nodos da função de onda. Além disso, a dependência com \hbar^2 indica claramente a sua natureza não-clássica, de forma que se supõe que o potencial quântico se torna irrelevante no regime $\hbar \rightarrow 0$, ou mais rigorosamente, quando $\hbar^2/m\sigma$, onde σ é uma largura característica da função de onda, for irrelevante comparado aos outros termos da equação (BALLENTINE, 1998). Embora seja intuitivo obter alguns aspectos clássicos ao considerar valores nulos da constante de Planck, há algumas exceções que impedem que ao se impor $\hbar = 0$, o potencial quântico vá a zero. Ao contrário, alguns casos podem fornecer previsões bastante distintas das clássicas e serão abordados aqui.

Considera-se o trivial exemplo de um pacote gaussiano livre, cuja função de onda para um tempo t arbitrário é dada por (GRIFFITHS, 1994; PAN, 2010)

$$\psi(q, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_t^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(q - ut)^2}{4\sigma_0\tilde{\sigma}_t} + ik(q - ut) + \frac{iEt}{\hbar} \right], \quad (2.31)$$

com uma velocidade de grupo $u = \hbar k/m$, k o número de onda e $E = mu^2/2$ a energia cinética associada a uma partícula de massa m . Além disso,

$$\sigma_t = |\tilde{\sigma}_t| = \sigma_0 \left| 1 + i \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma_0^4} \right|^{1/2} \quad (2.32)$$

é a largura característica da gaussiana dependente do tempo, com $\sigma_{t=0} = \sigma_0$. A densidade de probabilidade é dada por

$$\rho(q, t) = \psi^*(q, t)\psi(q, t) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_t^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(q - ut)^2}{2\sigma_t^2} \right]. \quad (2.33)$$

Por outro lado, para colocar a Eq. (2.31) na forma polar, $\rho^{1/2} \exp(iS/\hbar)$, nota-se que

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_t^{1/2}} = \sigma_t \exp \left(\frac{i\theta}{2} \right) \quad \text{com} \quad \tan(\theta) = -\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}, \quad (2.34)$$

e, portanto, a fase quântica é dada por

$$S(q, t) = \frac{\hbar^2 (q - ut)^2 t}{8m\sigma_0^2 \sigma_t^2} + mu \left(q - \frac{ut}{2} \right) - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2} \right). \quad (2.35)$$

O campo de velocidade é obtido com

$$v_q(q, t) = m^{-1} \frac{\partial S}{\partial q} = u + \frac{t(q - ut)\xi}{1 + \xi t^2}, \quad (2.36)$$

com

$$\xi = \left(\frac{\hbar}{2m\sigma_0^2} \right)^2. \quad (2.37)$$

A trajetória $q_i(t)$ da i -ésima partícula é dada implicitamente por

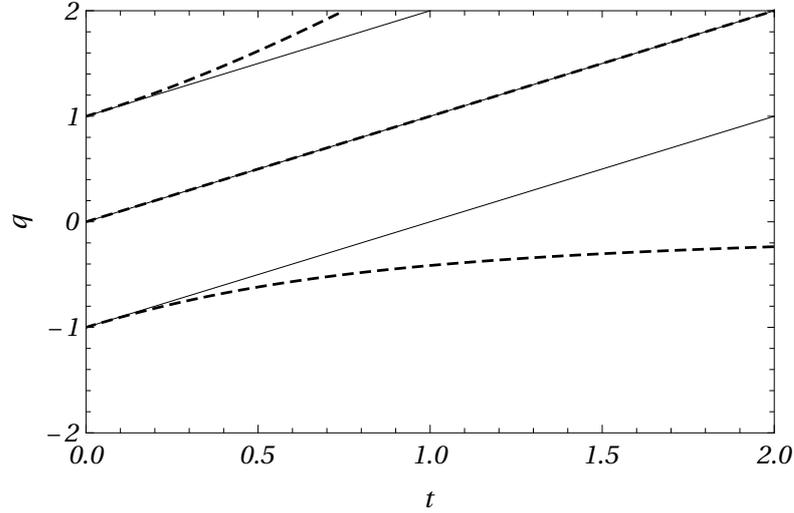
$$\frac{dq_i}{dt} = v_q(q_i(t), t), \quad (2.38)$$

fornecendo

$$q_i(t) = ut + q_{0i} \sqrt{1 + t^2 \xi}, \quad \dot{q}_i(t) = u + \frac{q_{0i} \xi t}{(1 + t^2 \xi)^{1/2}}, \quad (2.39)$$

as posições e velocidades dependentes das condições iniciais. A evolução do pacote de ondas é coerente com as trajetórias obtidas. Para $q_{0i} > 0$ (< 0), as partículas são aceleradas (desaceleradas) ao longo do eixo. A trajetória com $q_{0i} = 0$, no centro do pacote de onda, corresponde ao valor médio da coordenada q e sempre segue movimento uniforme, o que é uma consequência do teorema de Ehrenfest, como pode ser observado na Fig. (2). Dois

Figura 2 – Evolução de trajetórias correspondentes ao pacote gaussiano livre centrado na origem para instantes iniciais, em unidades de $\xi = u = 1$. Trajetórias clássicas em linha contínua e trajetórias quânticas em linha tracejada.



Fonte: Elaboração própria

regimes podem ser identificados para as trajetórias das partículas. Para $\xi t^2 \ll 1$, no qual o pacote ainda é concentrado na origem com $\sigma_t \approx \sigma_0$,

$$q_i(t) \approx ut + q_{0i}, \quad (2.40)$$

o que corresponde a $S \approx mu(q - ut/2)$, independente de \hbar . Assim, as trajetórias bohmianas apresentam movimento uniforme com velocidade u . Por outro lado, nota-se que o potencial quântico,

$$Q = -\frac{\hbar^2}{8m\sigma_t^4}((q - ut)^2 - 2\sigma_t^2), \quad (2.41)$$

tende a $Q \propto \frac{-\hbar^2}{m\sigma_0^2}$. Da mesma forma, $E \propto \frac{mu^2}{2}$, com u definindo uma escala temporal, $u = \sigma_0/t$. Portanto, $E \gg Q$ e o potencial quântico pode ser desconsiderado.

À medida que o pacote gaussiano evolui, o espalhamento se torna relevante devido à dependência quadrática da fase em q , para o qual o potencial quântico passa a ser relevante na dinâmica das trajetórias. Decorrido tempo suficiente tal que $\sigma_t \rightarrow \infty$, ele novamente vai a zero e as trajetórias bohmianas seguem movimento uniforme para $t^2\xi \gg 1$, e suas trajetórias se aproximam assintoticamente de

$$q_i(t) \approx (u + q_{0i}\xi^{1/2})t. \quad (2.42)$$

Nesse caso, a fase quântica depende linearmente da posição (e também de \hbar), o que também pode ser observado no regime de Fraunhofer para difração de ondas (SANZ; MIRET-ARTÉS, 2012).

Em suma, a mecânica bohmiana é capaz de acomodar os aspectos da formulação tradicional, como o conhecido teorema de Ehrenfest. Além disso, quando o pacote de ondas está concentrado, a força quântica pode ser desconsiderada, de modo que as trajetórias bohmianas são clássicas e a distribuição de probabilidade se aproxima de uma distribuição de partículas clássicas com velocidade u . Porém, a evolução do pacote de onda contraria a intuição de um regime clássico, embora as trajetórias bohmianas sigam novamente movimento uniforme, mas com velocidades dependentes da posição inicial. Como notaram Holland (1995) e Ballentine (1998), o regime clássico não está necessariamente associado a funções de onda concentradas, muito embora uma solução hamiltoniana particular possa ser encontrada nesse caso, porquanto uma distribuição de partículas clássicas com momentos distintos não se mantém concentrada no espaço das configurações.

Genericamente, nota-se que $Q(q, t) \approx 0$ é um indicativo para uma dinâmica clássica, cujo limite $\hbar \rightarrow 0$ é apenas um caso particular. Assim, é razoável supor que no limite clássico da Eq. (2.30), o *quantum* de ação pode ser negligenciado em comparação à ação quântica, $S(q, t) \gg \hbar$, de forma que a parte complexa da função de onda, $\exp(iS/\hbar)$, oscile rapidamente em um intervalo espacial. Isso foi formalizado por Allori *et al.* (2002), ao definirem uma escala clássica na forma

$$L = \sqrt{\left| \frac{V'}{V'''} \right|}, \quad (2.43)$$

onde V' é a derivada (em relação a q) do potencial V . Destarte, L está associado a uma escala de variação do potencial externo. A partir dele, eles obtiveram as condições genéricas para que se obtivesse a convergência das Eqs. (2.29) e (2.30) para as suas correspondentes clássicas a partir do regime de curtos comprimentos de onda λ . A análise será particularizada para o caso no qual se pode observar uma dinâmica *quasi*-clássica. Segundo a Eq. (2.29), identifica-se o momento $p = \partial_q S$, de modo que se espera que o comprimento de onda de de Broglie seja na forma

$$\lambda \propto \frac{\hbar}{|\partial_q S|}, \quad (2.44)$$

e $\epsilon = \lambda/L \ll 1$ (cf. seção 5.1 de (ALLORI, 2001)) introduz uma escala adimensional para a equação de Schrödinger na qual a partícula quântica leva um tempo arbitrariamente

grande ($\propto mL/p$) para sentir os efeitos do potencial externo. Destarte, para variações suficientemente pequenas do comprimento de onda λ , $S(q+\lambda, t) \approx S(q, t) + |\partial_q S| \lambda(q, t)$, com $S(q, t) \gg \hbar$. Por outro lado, como o potencial varia lentamente na escala λ , considera-se que variações na densidade de probabilidade são desprezíveis, de modo que

$$\left| \frac{\nabla^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right| \ll \lambda^2 \quad \text{e} \quad \frac{|\partial_q S|^2}{2m} \gg |Q|, \quad (2.45)$$

e a fase quântica satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi para $Q \approx 0$. Nota-se que o limite usual associado a $\hbar \rightarrow 0$ é fisicamente relacionado a $S/\hbar \rightarrow \infty$, o qual não ocorre para todos os sistemas quânticos, particularmente nos casos em que $\lambda \rightarrow \infty$, como será visto ao longo do trabalho.

Dadas as condições acima, $\hbar = 0$ é, usualmente, equivalente a ajustar outros parâmetros físicos do sistema, dependentes do potencial externo. Para um potencial até quadrático na posição, nota-se da Eq. (2.43) que a escala clássica L pode ser arbitrariamente escolhida, de modo que para o pacote gaussiano livre, $\lambda \propto \hbar/(mu)$ e sempre pode-se convenientemente escolher m tal que $\lambda \ll L$. Nesse caso, as trajetórias bohmianas nas novas coordenadas adimensionalizadas têm um comportamento clássico, como foi verificado acima. O regime de curtos comprimentos de onda descrito será testado no capítulo 3 para um potencial anarmônico e variáveis adimensionalizadas, as quais introduzem naturalmente escalas clássicas associadas às equações de Hamilton. Além disso, deseja-se verificar se algum aspecto de classicalidade pode ser observado que não satisfaça o critério acima.

O quadro (1) resume as duas abordagens introduzidas nesse capítulo, comparando-as com seus correspondentes clássicos. O formalismo de Wigner investiga as propriedades não-*Liouvilianas* para sistemas quânticos no espaço de fases, isto é, ele detecta correções quânticas à equação de Liouville introduzidas por termos não-lineares na evolução da função de Wigner, com um correspondente clássico dado pelas trajetórias hamiltonianas. Comparativamente, a mecânica bohmiana é identificada como uma formulação hidrodinâmica — a qual remonta aos seus primeiros desenvolvimentos (MADELUNG, 1927 apud BURGHARDT; MØLLER, 2002, p.7409) — a qual descreve a evolução de um fluido probabilístico. Visto que a equação de continuidade para a evolução da densidade de probabilidade implica que para cada coordenada q , o momento é unicamente definido por $p = \nabla S$, não é possível escolher arbitrariamente o momento da partícula. Isso permite obter um campo de velocidade local, que integrado fornece trajetórias univocamente definidas a partir das condições iniciais para a coordenada $q(t)$. O limite clássico corresponde a

Quadro 1 – Esquema comparativo entre a formulação de Weyl-Wigner e a mecânica bohmiana e seus correspondentes clássicos

	Quantum dynamics	Classical dynamics
Liouville space	Wigner phase space quantum Liouville equation for $\rho_w(q,p)$ → “Wigner trajectories”	Classical phase space classical Liouville equation for $f_{cl}(q,p)$ → classical Hamiltonian trajectories
hydrodynamic phase space	Quantum hydrodynamics $\rho_{hyd}(q,p) = P(q) \delta[p - \bar{p}(q)]$ → quantum hydrodynamic trajectories	Classical hydrodynamics $\rho_{hyd}^{cl}(q,p) = P_{cl}(q) \delta[p - \bar{p}_{cl}(q)]$ → classical hydrodynamic trajectories

Fonte: Adaptado de Burghardt e Møller, 2002.

trajetórias newtonianas para estados puros. As trajetórias bohmianas identificam, portanto, as regiões ao longo das quais a densidade de probabilidade $\rho(q, t)$ é transportada (BURGHARDT *et al.*, 2004; SANZ; MIRET-ARTÉS, 2012). O ponto comum entre as teorias pode ser observado a partir das distribuições marginais na posição, porquanto ao integrar as *quasi*-distribuições de probabilidade ao longo do eixo do momento, a teoria bohmiana é compatível com o formalismo de Weyl-Wigner (COLOMÉS; ZHAN; ORIOLS, 2015).

Dadas as considerações acima, é evidente que não existe uma teoria única que possa abordar o limite semiclássico. De fato, a própria mecânica quântica apresenta diversas formulações que concordam em suas previsões (STYER *et al.*, 2002), embora algumas delas procurem sanar as sérias restrições impostas às formulações da mecânica clássica numa descrição de fenômenos quânticos, os quais se manifestam, nesse trabalho, como funções de Wigner negativas, ou potenciais quânticos finitos. Dessa forma, ambas as formulações são potenciais ferramentas para se investigar a fronteira clássico-quântica. Como foi visto, para se obter uma descrição mais profícua, é necessário introduzir anarmonicidade ao sistema físico, pois ela desempenha um papel fundamental na emergência de aspectos de não-classicalidade que não podem ser evitados com uma escala apropriada das coordenadas. Com ambas abordagens, o oscilador singular servirá como uma plataforma para detectar um regime quântico, seja pela dinâmica de *ensembles* no espaço de fases, seja pela evolução de *ensembles* de trajetórias no espaço das configurações, o qual é possibilitado pelo alto grau de manipulabilidade analítica de tal sistema, como será visto no próximo capítulo.

3 O OSCILADOR SINGULAR

Neste capítulo, os formalismos teóricos desenvolvidos serão aplicados no chamado oscilador singular, o qual corresponde a um oscilador harmônico corrigido por um termo não-linear,

$$V(q) = \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \frac{4\alpha^2 - 1}{8m} \frac{\hbar^2}{q^2} - \alpha\hbar\omega, \quad (3.1)$$

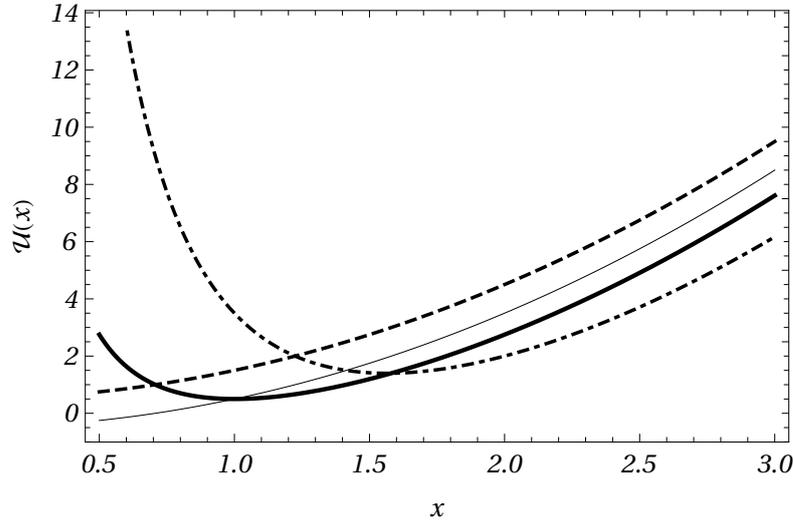
para uma massa m e uma frequência característica ω . Esse potencial foi discutido em diversos contextos, (PEAK; INOMATA, 1969; BERNARDINI; LEAL; BERTOLAMI, 2018; BERNARDINI, 2018), dado a sua generalização do caso harmônico. Inicialmente, as equações adimensionais serão construídas para que uma análise mais clara possa ser estabelecida. A partir da solução estacionária, uma solução genérica *quasi*-gaussiana será construída, a qual servirá como uma plataforma para verificar os desvios quânticos das trajetórias, influenciadas pelo potencial quântico. Na segunda parte, a análise será estendida para um mistura estatística em equilíbrio termodinâmico, para a qual a função e correntes de Wigner serão obtidas. O caráter *liouviliano* será relacionado à temperatura e anarmonicidade.

3.1 Variáveis adimensionalizadas

A partir das diversas manipulações matemáticas discutidas no capítulo anterior, nota-se que a adoção de variáveis adimensionais é extremamente simplificadora. Para isso, as escalas relevantes do potencial anarmônico serão introduzidas. A partir da Eq. (3.1), é possível introduzir uma escala de energia $\hbar\omega$. Então, como

$$[q] = \left[\frac{\hbar}{m\omega} \right]^{1/2}, \quad (3.2)$$

Figura 3 – O oscilador singular para diversos parâmetros de anarmonicidade: $\alpha = -1/2$ (linha tracejada), $\alpha = 1/2$ (linha fina), $\alpha = 3/2$ (linha grossa) e $\alpha = 7/2$ (linha traço-ponto).



Fonte: Elaboração própria

onde [...] indica a unidade da grandeza física, a variável x adimensional pode ser dada por

$$x = (m \omega \hbar^{-1})^{1/2} q. \quad (3.3)$$

De forma similar, o momento pode ser obtido a partir do termo cinético da hamiltoniana do sistema, também em unidades de $\hbar\omega$, o que resulta em

$$[p] = [\hbar \omega m]^{1/2}, \quad (3.4)$$

e o momento adimensional k pode ser escrito como

$$k = (m \omega \hbar)^{-1/2} p. \quad (3.5)$$

Além disso, ω é a frequência característica e τ a variável tempo adimensional. A partir da redefinição das variáveis, todas as grandezas podem ser descritas como função de variáveis adimensionais. O oscilador singular (3.1) se torna

$$\mathcal{U}(x) = (\hbar\omega)^{-1} V(q) = \frac{x^2}{2} + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x^2} - \alpha, \quad (3.6)$$

e é exibido na Fig. (3). Similarmente, a hamiltoniana adimensionalizada é

$$\mathcal{H}(k, x) = (\hbar\omega)^{-1} H(q, p) = \frac{1}{2} \left\{ k^2 + x^2 + \frac{4\alpha^2 - 1}{4x^2} - 2\alpha \right\}, \quad (3.7)$$

na qual o operador momento é dado por $\hat{k} \equiv -i\partial/\partial x$ e recupera a relação de comutação adimensional, $[\hat{x}, \hat{k}] = i$.

Os pormenores do processo de adimensionalização foram deixados para o Apêndice (B) e serão sumarizados aqui. A função de onda e a respectiva fase quântica adimensionais podem ser relacionadas às antigas grandezas por combinações das constantes fundamentais,

$$\phi(x, \tau) \equiv \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{-1/4} \psi(q, t), \quad (3.8)$$

$$\mathcal{S}(x, \tau) \equiv \hbar S(q, t). \quad (3.9)$$

Semelhantemente, a função e as correntes de Wigner adimensionais são dadas por (BERNARDINI, 2018)

$$\mathcal{W}(x, k; \tau) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(2iky) \phi(x-y; \tau) \phi^*(x+y; \tau), \quad \text{com } y = (m\omega\hbar^{-1})^{1/2} w, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{J}_x(x, k; \tau) = k \mathcal{W}(x, k; \tau), \quad (3.11)$$

$$\mathcal{J}_k(x, k; \tau) = -\sum_{\eta=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{2\eta} \frac{1}{(2\eta+1)!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2\eta+1} \mathcal{U}(x) \right] \left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{2\eta} \mathcal{W}(x, k; \tau), \quad (3.12)$$

satisfazendo a respectiva equação da continuidade,

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{J}_k}{\partial k} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tau} + \nabla_{\xi} \cdot \mathcal{J} = 0, \quad (3.13)$$

com $\xi = (x, k)$ o vetor coordenada no espaço de fases adimensionalizado.

Introduzida a nova notação a ser adotada, observa-se que a solução da equação de Schrödinger,

$$\mathcal{H}(x)\phi_n(x) = \varepsilon_n \phi_n(x), \quad (3.14)$$

onde \mathcal{H} é a hamiltoniana correspondente ao oscilador singular (cf. 3.7), é dada por (BAGROV; GITMAN, 1990)

$$\phi_n^{\alpha}(x) = 2^{1/2} \Theta(x) N_n^{(\alpha)} x^{\alpha+1/2} \exp(-x^2/2) L_n^{\alpha}(x^2), \quad (3.15)$$

onde o índice α foi incluído $\phi(x)_n \equiv \phi(x)_n^{\alpha}$, L_n^{α} são os polinômios de Laguerre associados e

$$N_n^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}}. \quad (3.16)$$

Além disso, $\Theta(x)$ é a função de Heaviside que restringe a solução a $x > 0$. Os autovalores $\varepsilon_n = (2n+1)$ correspondem ao espectro $E_n = \hbar\omega(2n+1)$, o qual fornece surpreendentemente o mesmo espectro de energia que um oscilador harmônico de frequência $\omega' = 2\omega$.

Considerando a solução mais trivial do oscilador singular, um comportamento clássico nem sempre pode ser observado a partir de um estado quântico. Isso se torna

evidente na presença de potenciais externos que confinam a solução em uma região finita. Para isso, nota-se que as autofunções do operador hamiltoniano (3.15) são na forma

$$\phi_n^\alpha(x, \tau) = \phi_n^\alpha(x) \exp(i\mathcal{S}_n(\tau)), \quad (3.17)$$

e, portanto, as trajetórias quânticas obtidas com $\partial_x \mathcal{S} = 0$ são estacionárias. Nesse caso, a energia cinética da partícula foi armazenada no potencial quântico $\mathcal{Q}(x, \tau) \equiv Q(x)$ e, para garantir uma solução estacionária,

$$\partial_x(\mathcal{Q} + \mathcal{U}) = 0. \quad (3.18)$$

Desse modo, nos estados estacionários há um perfeito balanceamento entre as forças ‘clássica’ e quântica. Essa característica foi discutida no próprio desenvolvimento da teoria (BOHM, 1952), e foi criticada por Einstein (BALLENINE, 1972), pois ele esperava que qualquer estado quântico pudesse apresentar um correspondente clássico, isto é, a função de onda deveria descrever uma partícula clássica, em oposição a um *ensemble* estatístico de estados físicos. Nota-se que o limite de altos números quânticos, com autoenergias aproximadamente contínuas, ainda forneceria o mesmo resultado, já que o potencial $\mathcal{U}(x)$ é independente do número quântico.

Para resolver essa dificuldade, Holland (1995, p. 243-247) argumenta que como os autoestados do hamiltoniano estão confinados entre barreiras de potenciais, tais estados resultam da interferência de dois pacotes de ondas que viajam em direções opostas, cuja superposição fornece um momento local nulo na mecânica bohmiana, um comportamento bastante distinto do esperado classicamente e, portanto, chamado de ultra-quântico. Assim, como a força efetiva $-\partial_x(\mathcal{Q} + \mathcal{U})$ é sempre nula para esses estados, a força quântica é independente de constantes fundamentais (como \hbar), o que ocorre para qualquer n . No entanto, para $n \rightarrow \infty$, ele mostrou (para uma partícula na caixa) que a distribuição de probabilidade no momento se aproxima de uma distribuição clássica de partículas com momentos opostos.

3.2 Estado *quasi*-gaussiano

Dadas as dificuldades acima introduzidas, trajetórias não estacionárias são obtidas a partir da superposição de estados quânticos, de forma que o termo de fase passa a

dependem da coordenada x . A superposição mais genérica é dependente do tempo, ou seja, é escrita na forma

$$\varphi^\alpha(x, \tau) \propto \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha(\tau) \phi_n^\alpha(x). \quad (3.19)$$

Bernardini, Leal e Bertolami (2018) obtiveram uma superposição *quasi*-gaussiana ao impor $c_n^\alpha = \chi^n N_n^{-1}(\alpha) \exp(-i\tau/2)$, com $\chi = \exp(-\zeta - i\tau)$ e $\zeta > 0$. De fato, da Eq. (3.15), com $\varphi^\alpha(x, \tau) \equiv \mathcal{G}_\alpha(x, \tau)$

$$\mathcal{G}_\alpha(x, \tau) = \mathcal{N} \Theta(x) \exp(-i\tau/2) \sum_{n=0}^{\infty} \chi^n L_n^\alpha(x^2), \quad (3.20)$$

onde o somatório pode ser reescrito como (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972, p. 784)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi^n L_n^\alpha(x^2) = (1 - \chi)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{x^2 \chi}{\chi - 1}\right), \quad (3.21)$$

e a expressão para o pacote de ondas é simplificada para

$$\mathcal{G}_\alpha(x, \tau) = \mathcal{N} \Theta(x) x^{\alpha+\frac{1}{2}} (1 - \chi)^{-(1+\alpha)} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \chi}{1 - \chi}\right) x^2\right] \exp\left(\frac{-i\tau}{2}\right), \quad (3.22)$$

com a constante de normalização dada por

$$\mathcal{N} = \left[\frac{(1 - e^{-2\zeta})^{1+\alpha}}{2\Gamma(1 + \alpha)} \right]^{1/2}. \quad (3.23)$$

A fase quântica é dada por (cf. Apêndice C)

$$\mathcal{S}_\alpha(x, \tau) = \arctan\left(\frac{v}{1 + u}\right) (1 + \alpha) - \frac{vx^2}{2} - \frac{\tau}{2}, \quad (3.24)$$

para

$$u(\tau) \equiv u = \frac{\sinh(\zeta)}{\cosh(\zeta) - \cos(\tau)} \quad \text{e} \quad v(\tau) \equiv v = -\frac{\sin(\tau)}{\cosh(\zeta) - \cos(\tau)}. \quad (3.25)$$

Nota-se que o terceiro termo da Eq. (3.24) corresponde à energia do estado fundamental do oscilador harmônico. O campo de velocidade pode ser imediatamente obtido a partir da Eq. (3.24),

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{S}_\alpha}{\partial x} = -\frac{vx}{2}. \quad (3.26)$$

Como a hamiltoniana adimensionalizada descreve um oscilador com frequência $\omega' = 2$, o fator ‘2’ no denominador acima descreve, portanto, um oscilador com frequência unitária, o qual foi escolhido por simplicidade de notação. As trajetórias são dadas implicitamente por $v(x_i(\tau), \tau) = dx_i(\tau)/d\tau$, cuja solução é dada por

$$x_i(\tau) = x_{oi} \sqrt{\frac{\cosh(\zeta) - \cos(\tau)}{\cosh(\zeta) - 1}}, \quad (3.27)$$

para as posições iniciais $x_i(\tau = 0) = x_{0i}$. Para estabelecer uma conexão mais evidente com as soluções hamiltonianas, nota-se da independência temporal da Eq. (3.7) que as soluções clássicas podem ser parametrizadas com

$$\mathcal{H}_c(k_c, x_c) = \frac{1}{2} \left\{ k_c^2 + x_c^2 + \frac{4\alpha^2 - 1}{4x_c^2} - 2\alpha \right\} = \varepsilon, \quad (3.28)$$

isto é, ε é um parâmetro de energia contínuo. As trajetórias clássicas (x_c, k_c) são obtidas por meio das equações de Hamilton adimensionais (cf. 2.1 e 2.2),

$$\dot{k}_c = \{k_c, \mathcal{H}\}_{\text{PB}} = - \left(x_c + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x_c^3} \right), \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_c = -\{x_c, \mathcal{H}\}_{\text{PB}} = k_c, \quad (3.30)$$

onde “ $f(\tau)$ ” corresponde à derivada temporal $df(\tau)/d\tau$. Para uma substituição de variáveis na forma $X_c = x_c^2$, obtém-se (BERNARDINI; LEAL; BERTOLAMI, 2018)

$$\dot{X}_c = \pm (8X_c(\varepsilon + \alpha) - 4X_c^2 + 1 - 4\alpha^2)^{1/2}, \quad (3.31)$$

cujas soluções são da forma¹

$$X_{c\pm}(\tau) \equiv (\alpha + \varepsilon) \pm \Delta \sin(\tau + \vartheta) \quad \text{com} \quad \Delta = \left(\frac{1}{4} + \varepsilon^2 + 2\alpha\varepsilon \right)^{1/2}, \quad (3.32)$$

para ϑ dependente das condições iniciais. Assim, sem perda de generalidade, mantém-se apenas uma das soluções com a trajetória $x_c(\tau)$ explicitamente dada por

$$x_c(\tau) = \sqrt{(\alpha + \varepsilon) + \Delta \sin(\tau + \vartheta)}, \quad (3.33)$$

cujas soluções foram restritas a $x_c > 0$.

Da solução clássica acima, nota-se que as trajetórias bohmianas na Eq. (3.27) podem ser convenientemente parametrizadas com

$$\zeta = \text{arccosh} \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{\Delta} \right), \quad (3.34)$$

de forma que uma trajetória clássica pode ser recuperada para $x_{0i}^2 = \alpha + \varepsilon - \Delta$ e $\vartheta = \pi/2$. Evidentemente, para uma solução clássica arbitrária, nota-se que a parametrização na Eq. (3.25) é equivalente a

$$u = \frac{\sinh(\zeta)}{\cosh(\zeta) - \cos(\tau + \vartheta - \pi/2)} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\sin(\tau)}{\cosh(\zeta) - \cos(\tau + \vartheta - \pi/2)}. \quad (3.35)$$

¹ O cálculo das soluções hamiltonianas mostra que o oscilador clássico também oscila com frequência $\omega' = 2$, mas como a parametrização τ é arbitrária, pode-se escolhê-la convenientemente para que o oscilador clássico também tenha frequência unitária (cf. 3.26).

Assim, a partir da superposição *quasi*-gaussiana, a dinâmica clássica pode ser obtida como uma solução particular das trajetórias bohmianas.

Para compreender o desvio clássico das outras trajetórias, pode-se obter o potencial quântico \mathcal{Q} a partir do módulo da função de onda da superposição \mathcal{G}_α (3.22),

$$|\mathcal{G}_\alpha(x, \tau)|^2 = R_\alpha(x, \tau) = 2 \frac{u^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \Theta(x) x^{1+2\alpha} \exp(-ux^2), \quad (3.36)$$

de forma que

$$\mathcal{Q}_\alpha(x, \tau) = -\frac{1}{2} \frac{\partial_x^2 R_\alpha^{1/2}}{R_\alpha^{1/2}} = -\frac{1}{2} \left(x^2 u^2 - 2(1+\alpha)u + \frac{4\alpha^2 - 1}{4x^2} \right) \quad (3.37)$$

é um potencial periódico. Nota-se, portanto, que a energia total da partícula,

$$2 \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{(\partial_x S)^2}{2} + \mathcal{U} + \mathcal{Q}, \quad (3.38)$$

calculada ao longo de uma trajetória — em particular, a solução clássica — não é conservada. Isso pode ser observado na Fig. (4), na qual diversas trajetórias são sobrepostas ao potencial (constante em τ) $\mathcal{U}(x)$. Nota-se que as trajetórias acessam regiões classicamente proibidas, pois a energia cinética mais a energia potencial clássica $\mathcal{U}(x_i(\tau))$ não é genericamente constante, excepto, evidentemente, para a trajetória clássica. Consequentemente, ainda que se tenha valores nulos do parâmetro (clássico) de energia ε , as trajetórias quânticas podem penetrar barreiras de potencial, fenômeno conhecido como tunelamento quântico, com uma densidade de probabilidade não-nula nessas regiões. Em particular, a contribuição anarmônica do potencial \mathcal{U} é exatamente cancelada pelo novo potencial efetivo $\mathcal{U} + \mathcal{Q}$ e, portanto, as trajetórias podem se aproximar arbitrariamente da origem.

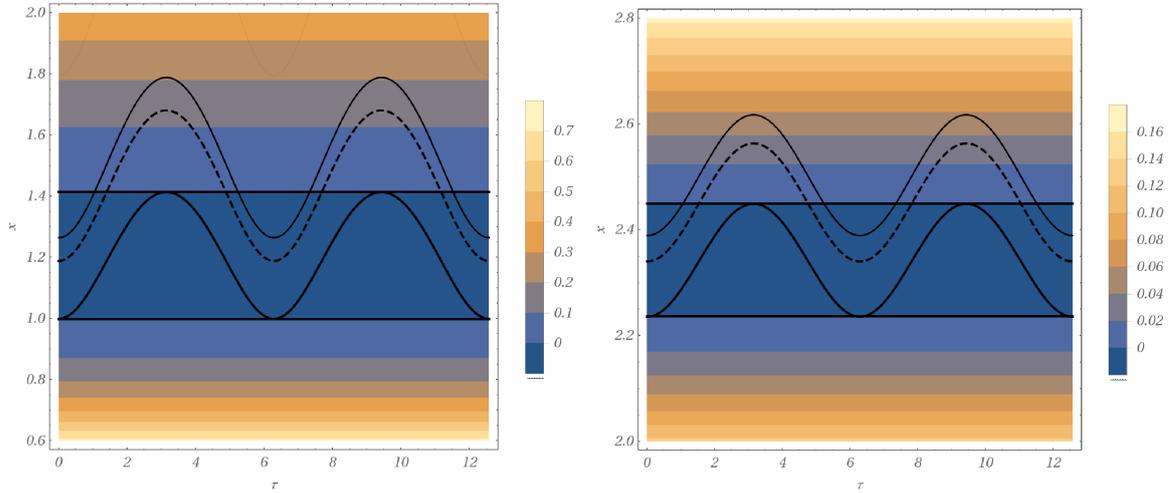
Observando-se a condição $\mathcal{H}_c = \varepsilon$, espera-se que tal parametrização possa ser recuperada em algum limite clássico das trajetórias, ou seja,

$$\left(\frac{(\partial_x S)^2}{2} + \mathcal{U} \right) \Big|_{x=x_i(\tau)} \approx \varepsilon, \quad (3.39)$$

para uma trajetória qualquer. Um simples cálculo permite verificar que, por exemplo, $\mathcal{Q}(x_c(\tau), \tau) \neq 0$. Considerando, por exemplo, que $\varepsilon \gg \alpha$, nota-se que o potencial $\mathcal{Q}(x_i(\tau), \tau)$, calculado ao longo de uma trajetória, vai a zero. Isso pode ser obtido com $\zeta \ll 1$ (cf. 3.34), de modo que $\cosh(\zeta)$ pode ser expandido como $\cosh(\zeta) \approx 1 + \mathcal{O}(\zeta^2)$ e, portanto,

$$x_i(\tau) = x_{0i} \sqrt{1 + \frac{2 \sin^2(\tau/2)}{\cosh(\zeta) - 1}} \approx C_{0i} \left| \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \right|, \quad (3.40)$$

Figura 4 – Trajetórias quânticas sobrepostas ao potencial $\mathcal{U}(x)$. As linhas pretas horizontais correspondem à região classicamente permitida, com $\mathcal{U} < \varepsilon = 0$. O esquema de cores utilizado segue para os valores do potencial constante no tempo. Da esquerda para direita, $\alpha = 3/2$ e $\alpha = 11/2$.



Fonte: Elaboração própria

isto é, as trajetórias bohmianas se aproximam de osciladores harmônicos clássicos que colidem elasticamente na barreira de potencial em $x = 0$. Evidentemente, como $u(\tau)$ também vai a zero (cf. 3.25), o potencial quântico \mathcal{Q} é irrelevante para $C_{0i} \neq 0$.

3.2.1 O oscilador harmônico Bohmiano

Do resultado acima, nota-se que as trajetórias quânticas não possuem uma velocidade definida na origem devido à reflexão na barreira de potencial. Desse modo, o campo de velocidade,

$$\mathbf{v} = -\frac{x \sin(\tau)}{2(\cosh(\zeta) - \cos(\tau))},$$

calculado ao longo das trajetórias da Eq. (3.40) não é definido para $x = 0$. Ao remover a barreira de potencial na origem, com $\alpha = 1/2$ (ou ainda, $\alpha = -1/2$) — o caso harmônico — considera-se novamente $\cosh(\zeta) \approx 1 + \mathcal{O}(\zeta^2)$, de forma que, em primeira ordem de aproximação de $\cosh(\zeta)$, o campo de velocidade torna-se

$$\mathbf{v} \approx -\frac{x \sin(\tau)}{2(1 - \cos(\tau))},$$

cujas trajetórias seguem de $v(x_i(\tau), \tau) = dx_i/d\tau$,

$$x_i(\tau) = C_{0i} \sin\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad (3.41)$$

um oscilador harmônico centrado na origem. Evidentemente, para se obter tal solução, reflete-se a função de onda para $x < 0$, o que na prática corresponde à remoção da função de Heaviside na Eq. (3.36). Em ambos os casos discutidos, as trajetórias são casos assintóticos das trajetórias bohmianas e, portanto, a propriedade do não cruzamento de duas trajetórias é violado, o que é coerente no limite clássico. Por fim, nota-se que as novas constantes C_{0i} estão relacionadas à amplitude do movimento e, portanto, à energia total do sistema, agora conservativo.

Para além do regime de não conservação de energia, a equação de HJQ implica que

$$\frac{d^2x_i}{d\tau^2} = -\partial_x(\mathcal{U}(x) + \mathcal{Q}(x, \tau))\Big|_{x=x_i(\tau)}, \quad (3.42)$$

de forma que uma dinâmica newtoniana pode ser obtida para $\partial_x \mathcal{Q} \approx 0$. Essa imposição é menos restrita que a conservação de energia ($\mathcal{Q} \approx 0$) e uma dinâmica *quasi*-clássica é observada para valores não-nulos do potencial quântico. Portanto, os aspectos dinâmicos do sistema quântico ficam evidentes ao se considerar duas trajetórias em particular, dadas por

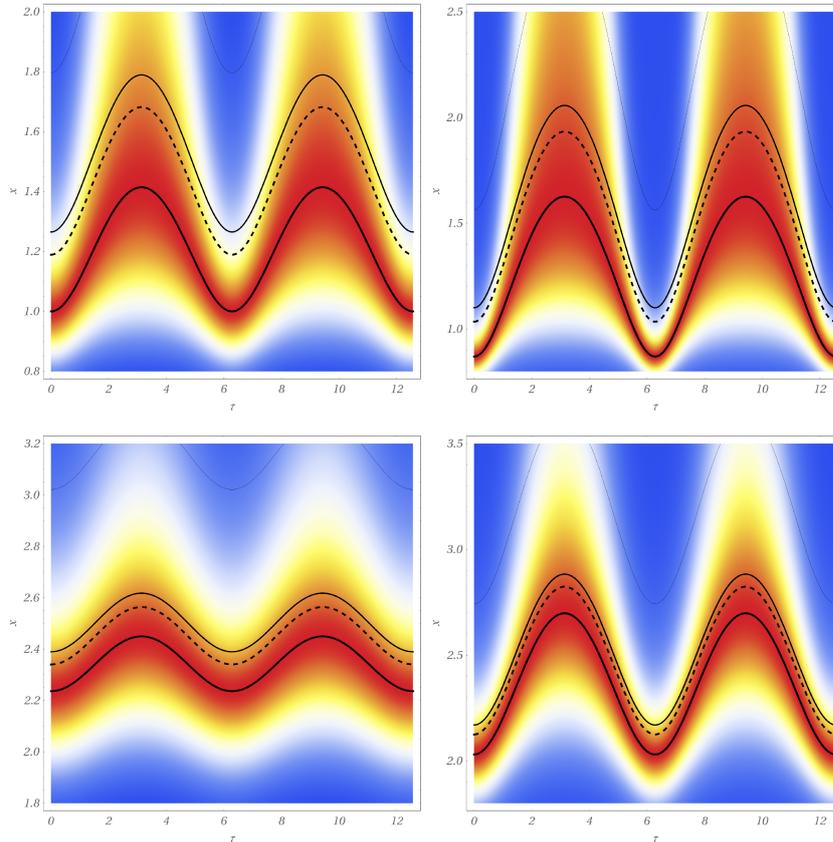
$$x_{0i} = u(0)^{-1/2} (\alpha + 1/2)^{1/2} \quad \text{e} \quad x_{0i} = u(0)^{-1/2} \frac{\Gamma(3/2 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (3.43)$$

as quais identificam o centro do pacote de ondas e o valor esperado do operador posição, $\langle x \rangle$. Isso pode ser verificado por meio das integrais usuais para obtenção de valores esperados. Porém, observa-se que as duas trajetórias são também soluções bohmianas e foram superpostas ao gradiente do potencial quântico $\partial_x \mathcal{Q}$ na Fig. (5).

Como pode ser observado, o período da evolução do sistema é $T = 2\pi$. Para instantes iniciais, a distância entre as trajetórias é mínima, de forma que o pacote de onda está concentrado. Porém, devido à força quântica, as partículas se afastam até $\tau = \pi$, quando ocorre a inversão do movimento, e elas se aproximam novamente até $\tau = 2\pi$. Nota-se que para valores inferiores do parâmetro de anarmonicidade α , as trajetórias quânticas são significativamente aceleradas pela força quântica e, em particular, $\langle x \rangle$ pode ser encontrado nas regiões brancas e azuis (valores intermediários de $\partial_x \mathcal{Q}$) no início da evolução do pacote *quasi*-gaussiano. Por outro lado, dada a expressão analítica de $\langle x \rangle$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(u(0)^{-1/2} \frac{\Gamma(3/2 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)} - (\alpha + \varepsilon - \Delta)^{1/2} \right) = 0. \quad (3.44)$$

Figura 5 – Força quântica $-\partial_x \mathcal{Q}(x, \tau)$ e a evolução de diversas trajetórias bohmianas: a solução clássica (linha grossa contínua), $\langle x \rangle$ (linha tracejada), o centro do pacote de ondas e uma trajetória na cauda da distribuição (linha fina contínua). O esquema de cores segue para $\text{sech}(\partial_x \mathcal{Q}) \approx 1$ (vermelho) e $\text{sech}(\partial_x \mathcal{Q}) \approx 0$ (azul). De cima para baixo, $\alpha = 3/2$ e $\alpha = 11/2$ e, da esquerda para direita, $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon = 0, 2$.

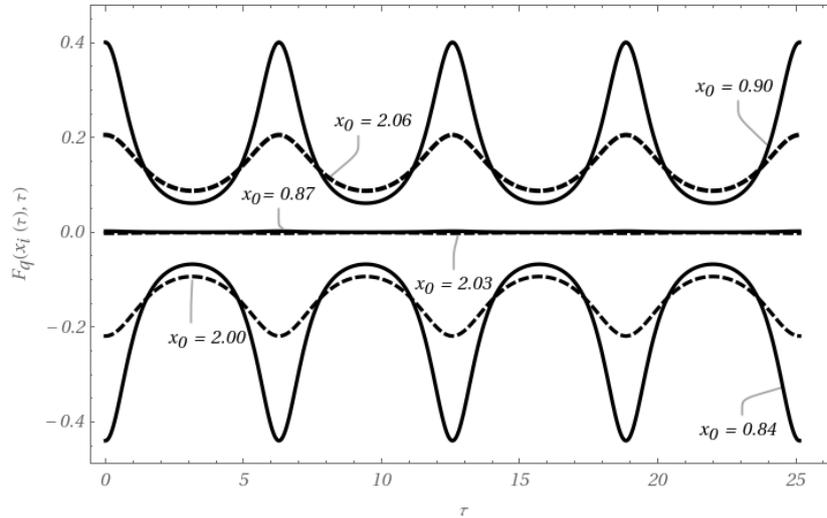


Fonte: Elaboração própria

Portanto, para $\alpha \gg 1$, $\langle x \rangle$ coincide com a solução clássica. Como há uma quantidade infinita de condições iniciais (dado que x_{0i} assume valores contínuos), encontra-se outras trajetórias que exibem uma dinâmica newtoniana em um sistema parametrizado por valores crescentes de α . Nesse caso, a solução hamiltoniana representa o comportamento probabilístico médio do *ensemble* de trajetórias. Similarmente, verifica-se que ela se torna também a solução mais provável.

O perfil qualitativo do potencial quântico discutido acima pode ser explorado numericamente. Na Fig. (6), confirma-se que a força quântica é exatamente nula ao longo da trajetória clássica. Além disso, calculou-se o seu valor para trajetórias vizinhas às clássicas, novamente para dois parâmetros α distintos. Observa-se, portanto, que para $\alpha = 3/2$, o pacote *quasi*-gaussiano, embora inicialmente concentrado, está sujeito a uma

Figura 6 – Força quântica $F_q(x_i(\tau), \tau) = -\partial_x \mathcal{Q}(x, \tau)|_{x=x_i(\tau)}$ para trajetórias equidistantes da solução clássica. Linha contínua para $\alpha = 3/2$ e linha tracejada para $\alpha = 11/2$, com energia $\varepsilon = 0,2$. A notação $x_0 \equiv x_{0i}$ foi utilizada para as posições iniciais.



Fonte: Elaboração própria

força quântica que é aproximadamente o dobro do caso $\alpha = 11/2$. Para valores crescentes de α , a força quântica é atenuada e o espalhamento do pacote de ondas é menos significativo.

Na seção 2.2.1, introduziu-se o regime de curtos comprimentos de onda de de Broglie, o qual assume a forma

$$\frac{\lambda}{L} \equiv \frac{1}{|\partial_x \mathcal{S}| L_{cl}} \ll 1,$$

com L_{cl} a escala de variação adimensional para o potencial anarmônico,

$$L_{cl} = \sqrt{\left| \frac{\mathcal{U}'}{\mathcal{U}'''} \right|} \propto x_{cl}. \quad (3.45)$$

Dessa forma, utilizando as variáveis adimensionalizadas do oscilador singular, obtém-se naturalmente a escala de variação do potencial clássico a partir da solução hamiltoniana. Nota-se, então, que no limite de altas energias com $\varepsilon \rightarrow \infty$, como C_{0i} na Eq. (3.40) é proporcional à energia cinética da partícula, isso leva imediatamente a $\lambda/L \ll 1$. Nesse caso, todas as trajetórias bohmianas se tornam clássicas. Por outro lado, para valores crescentes de α , as trajetórias se tornam estacionárias, com $\partial_x \mathcal{S} = 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$, e o critério não é satisfeito, de modo que o potencial quântico ainda é apreciável ao longo das trajetórias bohmianas. Isso foi verificado ao longo da seção e é coerente com a expressão da fase quântica (Eq. 3.24), na qual o termo explicitamente dependente de α é linear em

\hbar . Portanto, para $\alpha \rightarrow \infty$, o termo independente de \hbar é suprimido. Como ele é o único termo dependente da variável canônica x , o critério apresentado,

$$\frac{(\partial_x S)^2}{2} \gg Q,$$

não pode ser satisfeito. Ainda assim, mostrou-se que valores crescentes de α reproduzem uma dinâmica newtoniana não-conservativa para um grande número de condições iniciais, de modo que a solução hamiltoniana reproduz o comportamento probabilístico médio das trajetórias. Em contraste com o caso de altas energias, o sistema preserva a sua natureza quântica.

Em suma, a mecânica bohmiana foi utilizada para obter um regime em que se observou rápidas oscilações da fase quântica, com as trajetórias bohmianas descrevendo soluções clássicas, seja no caso harmônico, seja no caso de altas energias, em que a contribuição anarmônica é suprimida. Como foi mostrado, o comportamento *quasi*-clássico só foi possível a partir da construção de uma superposição de infinitas soluções estacionárias, o que mostra intuitivamente como uma dinâmica clássica pode ser observada, não a partir de um único estado quântico, mas da contribuição de todos eles. Além disso, os aspectos mais profícuos para a correção anarmônica também foram investigados, de modo que se observou o desvio quântico das trajetórias para regiões proibidas classicamente. Para valores crescentes de α , embora o potencial quântico se mantivesse finito (com violação da conservação de energia), uma dinâmica *quasi*-newtoniana (com $\partial_x Q \approx 0$) foi observada para diversas trajetórias quânticas.

O resultado discutido acima é coerente com a transição quântico-clássica observada no cenário cosmológico de Hořava-Lifshitz (BERNARDINI; LEAL; BERTOLAMI, 2018), no qual a função de Wigner correspondente à superposição *quasi*-gaussiana (3.22) foi analiticamente calculada. As regiões probabilisticamente dominantes da função de Wigner seguem as trajetórias clássicas correspondentes ao universo descrito por esse modelo para valores crescentes de α , associado à contribuição de matéria rígida, de forma que as correntes de Wigner se aproximam de um fluido de fase aproximadamente *liouvilliano*. Portanto, ambos os casos refletem uma dinâmica *quasi*-clássica para sistemas anarmônicos, aqui relacionada ao comportamento probabilístico médio do *ensemble* de trajetórias, para o qual a força quântica se anula.

A discussão do problema cosmológico será retomada na última seção, onde a emergência de um cenário clássico também pode ser explorada a partir de um modelo de

decoerência quântica para um universo de Hořava-Lifshitz em equilíbrio térmico. Para isso, o formalismo de Weyl-Wigner será aplicado no contexto de misturas estatísticas na próxima seção.

3.3 Estado termalizado

Nesta seção, explorar-se-á a relação entre o equilíbrio termodinâmico e os aspectos de decoerência para um fluido de fase quântico, isto é, os efeitos da interação entre um sistema quântico e um banho térmico. Para isso, o conceito de estados mistos será introduzido e, a partir das correntes de Wigner, a influência da temperatura no fluxo de fase será investigada. A pureza da mistura estatística será quantificada dentro do formalismo. Por fim, equações de conservação clássico-quânticas serão discutidas a partir de quantificadores de informação no espaço de fases.

Até agora, assumiu-se um conhecimento preciso sobre o estado inicial de um sistema quântico, identificado pela sua função de onda. Porém, a situação mais genérica corresponde a uma preparação probabilística de estados, chamada mistura estatística. Tais estados estão associados a uma informação incompleta sobre o estado do sistema e são descritos pelo seu operador densidade, $\hat{\rho}$, genericamente dado por (BALLENTINE, 1998)

$$\hat{\rho}_{\text{mistura}} = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (3.46)$$

para uma base de estados puros, isto é, cujo operador densidade é sempre na forma $\hat{\rho}_{\text{puro}} = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$. Intuitivamente, a preparação probabilística dos estados descritos pela Eq. (3.46) se aproxima da noção clássica de mistura, isto é, pode-se preparar um estado ϕ_i com probabilidade p_i . Desse modo, um estado misto se diferencia de uma superposição — uma característica quântica — pois os efeitos de interferência não podem ser observados.

Para um sistema em equilíbrio térmico, o operador densidade do oscilador singular pode ser imediatamente calculado a partir do seu propagador. Para isso, suponha que inicialmente um determinado sistema físico seja descrito pelo autoestado do operador posição $|\phi(x', \tau = 0) = |x', 0\rangle = |x'\rangle$, e, portanto, em um instante τ , o estado do sistema é dado por (DUTRA, 1988)

$$U(\tau, 0)|x'\rangle = \exp\left(-i\hat{H}\tau\right)|x'\rangle = |x', \tau\rangle. \quad (3.47)$$

Nota-se que exponenciais de operadores podem ser interpretados, genericamente, a partir da sua série de Taylor,

$$\exp(-i\hat{\mathcal{H}}\tau) = \mathbb{I} + (-i\hat{\mathcal{H}}\tau) + \frac{(-i\hat{\mathcal{H}}\tau)^2}{2!} + \dots = \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{(-i\hat{\mathcal{H}}\tau)^\eta}{\eta!}. \quad (3.48)$$

A amplitude de probabilidade da transição $|x', \tau\rangle \rightarrow |x, \tau\rangle$, isto é, de um estado inicial $|x', \tau\rangle$ para um estado final $|x, \tau\rangle$, é dada por

$$G(x, \tau; x', 0) = \langle x | \exp(-i\hat{\mathcal{H}}\tau) | x' \rangle, \quad (3.49)$$

a qual é conhecida como função de Green², extensamente utilizada na resolução de equações diferenciais com condições de contorno (cf. (ODASHIMA; PRADO; VERNEK, 2017) para mais detalhes).

Retornando para o caso da mistura estatística, Landau e Lifshitz (1980) mostraram como uma função de Green termalizada pode ser obtida a partir da função de Green usual. A partir de uma rotação de Wick, $\tau \rightarrow -i\beta\hbar\omega$, com $\beta = 1/k_B\mathcal{T}$ para k_B a constante de Boltzmann e a temperatura de equilíbrio \mathcal{T} ,

$$\begin{aligned} G(x, \tau; x', 0) \rightarrow \mathfrak{G}(x, \mathcal{T}; x', 0) &= \langle x | \exp(-\hat{\mathcal{H}}\beta\hbar\omega) | x' \rangle \\ &= \sum_n \langle x | n \rangle \exp(-\hat{\mathcal{H}}\beta\hbar\omega) \langle n | x' \rangle \\ &= \sum_n \phi_n(x) \exp(-\varepsilon_n\beta\hbar\omega) \phi_n(x'), \end{aligned} \quad (3.50)$$

na qual uma relação de completeza $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I}$ na base dos autoestados do hamiltoniano foi inserida e $\varepsilon_n = 2n + 1$ para o oscilador singular. Nesse caso, inclui-se o parâmetro de anarmonicidade

$$\mathfrak{G}(x, \mathcal{T}; x', 0) \rightarrow \mathfrak{G}^\alpha(x, \mathcal{T}; x', 0) \equiv \mathfrak{G}^\alpha(x, x'; \beta) \quad (3.51)$$

² Recuperando as unidades da equação de Schrödinger,

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_q^2 \right] \psi(q, t) = V(q, t)\psi(q, t),$$

a função de Green $G(q, q', t, t')$ satisfaz

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_q^2 \right] G(q, q', t, t') = \delta(q - q')\delta(t - t')$$

Nota-se que $\mathfrak{G}^\alpha(x, x'; \beta)$ são os elementos de fora da diagonal (para $x' \neq x$) do operador densidade termalizado na representação das posições, cuja representação no espaço de fases segue ao redefinir $x \rightarrow x + y$ e $x' \rightarrow x - y$ na sua transformada de Fourier,

$$\mathfrak{G}^{TF}(x + y, x - y; \beta) \equiv \mathfrak{G}^\alpha(x, k; \beta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(2i k y) \mathfrak{G}^\alpha(x + y, x - y; \beta). \quad (3.52)$$

Portanto, $\mathfrak{G}^\alpha(x, k; \beta)$ é a representação não-normalizada no espaço de fases do operador densidade, a qual obedece à equação de Bloch para *ensembles* canônicos (HILLERY *et al.*, 1984),

$$\frac{\partial \hat{\mathfrak{G}}^\alpha}{\partial \beta} = -\hbar\omega \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathfrak{G}}^\alpha = -\hbar\omega \hat{\mathfrak{G}}^\alpha \hat{\mathcal{H}}, \quad (3.53)$$

cuja solução pode ser escrita como

$$\hat{\mathfrak{G}}^\alpha = \exp\left(-\beta \hbar\omega \hat{\mathcal{H}}\right), \quad (3.54)$$

com $\hat{\mathfrak{G}}^\alpha(\beta = 0) = \mathbb{I}$. Para normalizar $\mathfrak{G}^\alpha(x, k; \beta)$, calcula-se o seu traço (BERNARDINI; SILVA, 2020),

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}[\exp(-\beta \hbar\omega \hat{\mathcal{H}})] = \text{Tr}[\hat{\mathfrak{G}}^\alpha], \quad (3.55)$$

onde $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}^\alpha(\beta)$ é conhecida como função de partição de um *ensemble* canônico, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^\alpha(\beta) &= \sum_n \langle n | \exp(-\beta \hbar\omega \hat{\mathcal{H}}) | n \rangle = \sum_n \exp(-\beta \hbar\omega \varepsilon_n) \\ &= \exp(-\beta \hbar\omega) \left(\sum_n \exp(-2n \beta \hbar\omega) \right) \\ &= \frac{\exp(-\beta \hbar\omega)}{1 - \exp(-2 \beta \hbar\omega)} = \frac{1}{2 \sinh(\beta \hbar\omega)}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde nota-se que $\sum_n \exp(-2n \beta \hbar\omega)$ é uma progressão geométrica. Formalmente, a função de partição satisfaz a Eq. (2.10), ou seja,

$$\mathcal{Z}^\alpha(\beta) = \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk \mathfrak{G}^\alpha(x, k; \beta), \quad (3.57)$$

Nota-se que tal função desempenha um papel fundamental na descrição de propriedades estatísticas de um sistema em equilíbrio termodinâmico, de forma que as outras grandezas observáveis podem ser expressas como função dela ou de suas derivadas (FEYNMAN, 1982). O resultado obtido na Eq. (3.56) é relevante, pois ele reproduz a mesma função de partição de um oscilador harmônico com frequência 2ω , o que poderia ter sido antecipado pelo espectro de energia similar entre os dois sistemas. Deve-se, portanto, investigar mais

a fundo se, e como, o parâmetro de interação α afeta a dinâmica do sistema em equilíbrio térmico.

Assim, ao incluir a normalização de $\mathfrak{G}^\alpha(x, k; \beta)$, obtém-se a função de Wigner, formalmente dada por

$$\mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta) = (\mathcal{Z} \pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(2 i k y) \mathfrak{G}^\alpha(x + y, x - y; \beta). \quad (3.58)$$

A partir da Eq. (3.50), portanto, aplica-se a transformada de Fourier em ambos os lados da equação (e incluindo a normalização), resultando em

$$\mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta) = \frac{\exp(-\beta \hbar \omega)}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n^\alpha(x, k) \exp(-2n \beta \hbar \omega). \quad (3.59)$$

O cálculo das componentes $\mathcal{W}_n^\alpha(x, k)$ é dado por (BERNARDINI, 2018)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n^\alpha(x, k) &= 2(N_n^{(\alpha)})^2 \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \Theta(x + y) \Theta(x - y) (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2} + \alpha} \exp(2 i k y) \\ &\quad \exp[-(x^2 + y^2)] L_n^\alpha((x + y)^2) L_n^\alpha((x - y)^2) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-x}^{+x} dy \exp(2 i k y) \exp[-(x^2 + y^2)] \sum_{j=0}^n \frac{L_{n-j}^{\alpha+2j}(2(x^2 + y^2))}{\Gamma(\alpha + j + 1)} \frac{(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2} + \alpha + 2j}}{j!}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde a seguinte relação foi utilizada (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014, p. 1002),

$$L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{L_{n-j}^{\alpha+2j}(x + y) x^j y^j}{\Gamma(\alpha + j + 1) j!}. \quad (3.61)$$

Ao inserir $\mathcal{W}_n^\alpha(x, k)$ na Eq. (3.59),

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta) &= \frac{2 \exp(-\beta \hbar \omega)}{\mathcal{Z}(\beta) \pi} \int_{-x}^{+x} dy \exp(2 i k y) \exp[-(x^2 + y^2)] (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2} + \alpha} \times \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp(-2n \beta \hbar \omega) \frac{n!}{\Gamma(\alpha + n + 1)} L_n^\alpha((x + y)^2) L_n^\alpha((x - y)^2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde o somatório pode ser simplificado para (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014, p. 1002)

$$\frac{(x^2 - y^2)^{-\alpha}}{(1 - \lambda) \lambda^{\frac{\alpha}{2}}} \exp\left[-\frac{2\lambda}{1 - \lambda}(x^2 + y^2)\right] \mathcal{I}_\alpha\left(\frac{2\lambda^{\frac{1}{2}}}{1 - \lambda}(x^2 - y^2)\right),$$

com $\lambda = \exp(-2\beta \hbar \omega)$ e \mathcal{I}_α a função de Bessel modificada de primeira espécie. Finalmente, obtém-se uma representação integral para a função de Wigner termalizada (BERNARDINI; SILVA, 2020),

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta) &= \frac{\exp(\alpha \beta \hbar \omega)}{\sinh(\beta \hbar \omega) \mathcal{Z}(\beta) \pi} \int_{-x}^{+x} dy \exp(2 i k y) (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \exp[-\coth(\beta \hbar \omega)(x^2 + y^2)] \mathcal{I}_\alpha\left(\frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta \hbar \omega)}\right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

A representação integral acima obtida permite diversas manipulações algébricas, como será visto nos cálculos futuros. Porém, no limite de baixas temperaturas, a expansão da função de Bessel pode ser truncada em um número finito de termos. Para isso, utiliza-se a expansão em série da função de Bessel,

$$\mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta) = \frac{2 \exp(\alpha \beta \hbar \omega) x^2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x^2}{2 \sinh(\beta \hbar \omega)} \right)^{2m+\alpha} \times \int_{-1}^1 d\sigma \exp(2ik\sigma) (1-\sigma^2)^{1/2+2m+\alpha} \exp[-\coth(\beta \hbar \omega) x^2 (1+\sigma^2)], \quad (3.64)$$

com $\sigma = y/x$ e valores semi-inteiros de α , obtém-se a soma finita a partir dos coeficientes binomiais ,

$$(1-\sigma^2)^{1/2+2m+\alpha} = \sum_{j=0}^{1/2+\alpha+2m} \frac{\Gamma(3/2+\alpha+2m)}{\Gamma(3/2+\alpha+2m-j)\Gamma(j+1)} (-1)^j \sigma^{2j}.$$

Portanto, o integrando restante é na forma de uma gaussiana multiplicada por um polinômio, cuja integral pode ser calculada simbolicamente a partir de uma função geradora. O resultado é

$$\mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta) = \left(\frac{\exp(\beta \hbar \omega) x^2}{\sinh(\beta \hbar \omega) 2} \right)^\alpha \frac{x^2}{\pi^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2+\alpha+2m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+1)} \mathcal{K}_m^\alpha(x, k), \quad (3.65)$$

para

$$\mathcal{K}_m^\alpha(x, k) = \exp(-\zeta x^2) \sum_{j=0}^{1/2+\alpha+2m} \frac{d^j \zeta}{d\zeta^j} \left[\zeta^{-1/2} \exp\left(-\frac{k^2}{\zeta}\right) 2\Re \left\{ \text{Erf}\left(\zeta^{1/2}(x + i \zeta^{-1/2} k)\right) \right\} \right] \Big|_{\zeta=\coth(\beta \hbar \omega)},$$

onde $\text{Erf}(\dots)$ é a função erro. Evidentemente, a série infinita não contribui para aplicações numéricas, para as quais a forma integral é mais vantajosa. No entanto, no limite de baixas temperaturas, $\beta \rightarrow \infty$ e apenas o termo $m = 0$ precisa ser considerado.

Retornando para a representação integral da função de Wigner, observa-se que a distribuição marginal na posição pode ser obtida com

$$\int dk \mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta) = \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \mathfrak{G}^\alpha(x, \mathcal{T}; x' = x, 0), \quad (3.66)$$

a qual fornece os elementos da diagonal do operador densidade normalizado, e similarmente para a integração ao longo do eixo x , obtém-se a distribuição nos momentos. A normalização do operador densidade garante, portanto, que a função de Wigner é normalizada no espaço de fases. Embora a função de Wigner tenha sido calculada no limite de baixas temperaturas, é evidente que os casos em que uma solução analítica pode ser encontrada

são bastante raros. Felizmente, a representação integral da função de Wigner também pode ser útil em contextos gerais que exijam cálculos numéricos (KAKOFENGITIS; OLIVA; STEUERNAGEL, 2017).

A pureza quântica do *ensemble* canônico pode ser calculado a partir da Eq. (2.15), cuja forma adimensionalizada é

$$\mathcal{P}^\alpha(\beta) = 2\pi \int dx \int dk (\mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta))^2, \quad (3.67)$$

a qual fornece, após algumas manipulações, (cf. Apêndice D)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\alpha(\beta) &= \frac{8 \exp(2\alpha\beta\hbar\omega)}{\pi} \int_0^\infty dx \int_{-x}^{+x} dz \int_{-x}^{+x} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(2ik(y+z)) \times \\ &\quad [(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)]^{\frac{1}{2}} \exp[-\coth(\beta\hbar\omega)(2x^2 + y^2 + z^2)] \times \\ &\quad \mathcal{I}_\alpha\left(\frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta\hbar\omega)}\right) \mathcal{I}_\alpha\left(\frac{x^2 - z^2}{\sinh(\beta\hbar\omega)}\right) \\ &= \tanh(\beta\hbar\omega), \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde o resultado analítico foi obtido para valores semi-inteiros de α . Porém, dado que $\mathcal{P}^\alpha(\beta) \equiv \mathcal{P}(\beta)$ não depende deste, ele é válido de forma geral. Dessa forma, no limite de altas temperaturas, $\mathcal{P}(\beta = 0) = 0$, e obtém-se estados maximalmente mistos, por outro lado, estados puros para $\mathcal{P}(\beta \rightarrow \infty) = 1$, ou seja, $\mathcal{T} = 0$.

A pureza acima calculada corrobora a hipótese inicial de que o oscilador singular é termodinamicamente equivalente a um oscilador harmônico, pois os quantificadores quânticos de informação até agora são independentes do parâmetro de interação. Isso é coerente com a conclusão de que o equilíbrio termodinâmico está associado à decoerência de um sistema quântico arbitrário, na qual o ambiente destrói estados puros (HU; ZHANG, 1993; MOKARZEL, 2000; ZUREK, 2003). A seguir, investigar-se-á como as flutuações térmicas afetam a evolução do fluxo de Wigner no espaço de fases, descrita a partir da equação de Liouville quântica.

3.3.1 Correntes de Wigner dependentes da temperatura

A partir das Eqs. (3.11) e (3.12), obtém-se as correntes termalizadas. Destarte, para a componente no momento, deve-se calcular as derivadas em k da função da Wigner e as

derivadas em x do potencial anarmônico. A primeira delas pode ser obtida da representação integral da função de Wigner obtida na Eq. (3.63), com

$$\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{2\eta} \mathcal{W}^\alpha(x, k) = \frac{2 \exp(\alpha\beta\omega\hbar)}{\pi} \int_{-x}^x dy (2iy)^{2\eta} \exp(2iky) (x^2 - y^2)^{1/2} \times \exp[-\cosh(\beta\omega\hbar)(x^2 + y^2)] I_\alpha\left(\frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta\omega\hbar)}\right). \quad (3.70)$$

Por outro lado, deve-se considerar as derivadas do potencial $\mathcal{U}(x)$ (3.6). Como apenas a contribuição anarmônica proporcional a $1/x^2$ sobrevive a ordens arbitrárias das derivadas, ela será considerada primeiro. Assim,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2\eta+1} \left(\frac{1}{x^2}\right) = -(2\eta + 2) \frac{(2\eta + 1)!}{x^{2\eta+3}}, \quad (3.71)$$

de forma que o somatório infinito, juntamente com a contribuição $(2iy)^{2\eta}$ da Eq. (3.70), torna-se

$$\sum_{\eta=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{2\eta} (2iy)^{2\eta} \frac{2\eta + 2}{x^{2\eta+3}} = \frac{1}{x^3} \sum_{\eta=0}^{\infty} (2\eta + 2) \epsilon^\eta, \quad \text{para } \epsilon = \left(\frac{y}{x}\right)^2. \quad (3.72)$$

Ao introduzir o operador $d/d\epsilon$, o somatório infinito pode ser simplificado para uma expressão analítica,

$$\frac{2}{x^3} \frac{d}{d\epsilon} \sum_{\eta=0}^{\infty} \epsilon^{\eta+1} = \frac{2}{x^3} \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \right] = \frac{2}{x^3} \frac{1}{(1 - \epsilon)^2}, \quad (3.73)$$

na qual a primeira igualdade segue da progressão geométrica $\sum_{\eta=0}^{\infty} \epsilon^{\eta+1}$. O resultado acima, juntamente com os termos restantes da Eq. (3.70) permitem calcular a componente k da corrente de Wigner,

$$\frac{4x \exp(\alpha\beta\hbar\omega)}{\pi} \int_{-x}^x dy \frac{\exp(2iky) (x^2 - y^2)^{1/2}}{(x^2 - y^2)^2} \exp[-\coth(\beta\hbar\omega)(x^2 + y^2)] I_\alpha\left(\frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta\omega\hbar)}\right). \quad (3.74)$$

Nota-se que as funções de Bessel $I_\alpha(z)$ apresentam a seguinte relação de recorrência (OLVER *et al.*, 2010, p. 251),

$$\frac{I_\alpha(z)}{z} = \frac{1}{2\alpha} \left(I_{\alpha-1}(z) - I_{\alpha+1}(z) \right), \quad (3.75)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{I_\alpha(z)}{z^2} = \frac{1}{4\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)} \left((\alpha+1)I_{\alpha-2}(z) - 2\alpha I_\alpha(z) + (\alpha+1)I_{\alpha+2}(z) \right), \quad (3.76)$$

a qual pode ser utilizada na Eq. (3.74), para $z = \frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta\omega\hbar)}$, de modo que ela resulta em

$$\begin{aligned}
&= \frac{4x \exp(\alpha\beta\hbar\omega)}{\pi \sinh^2(\beta\omega\hbar)} \frac{1}{4\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)} \int_{-x}^x dy \exp(2iky) (x^2 - y^2)^{1/2} \exp[-\coth(\beta\hbar\omega)(x^2 + y^2)] \times \\
&\quad (\alpha+1) I_{\alpha-2} \left(\frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta\omega\hbar)} \right) - 2\alpha I_{\alpha} \left(\frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta\omega\hbar)} \right) + (\alpha-1) I_{\alpha+2} \left(\frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta\omega\hbar)} \right) \\
&= \frac{-x\mathcal{W}^\alpha}{\sinh^2(\beta\omega\hbar)(\alpha-1)(\alpha+1)} + \frac{x\mathcal{W}^{\alpha-2} \exp(2\beta\hbar\omega)}{2\sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha-1)} + \frac{x\mathcal{W}^{\alpha+2} \exp(-2\beta\hbar\omega)}{2\sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha+1)}. \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Ao considerar o fator multiplicativo da contribuição anarmônica (cf. 3.6) e a contribuição harmônica, a componente k da corrente de Wigner se torna

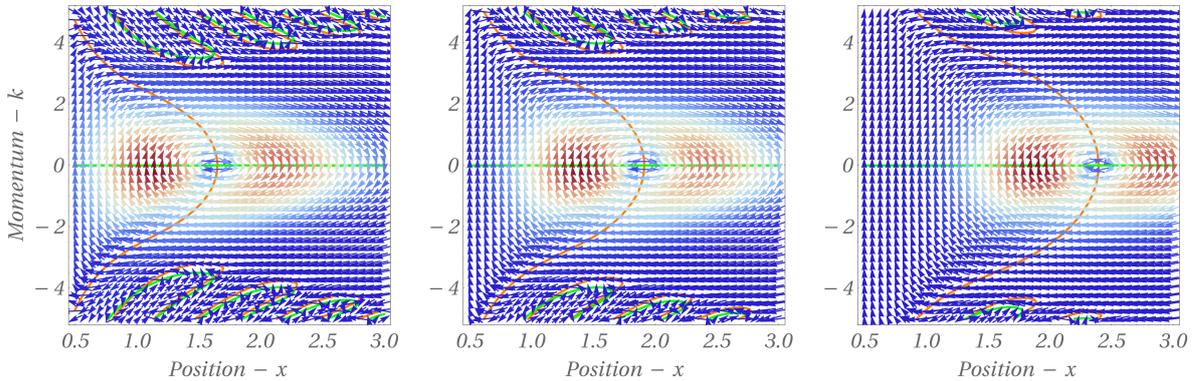
$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_k^\alpha = & -x\mathcal{W}^\alpha + \frac{4\alpha^2 - 1}{8} \left(-\frac{x\mathcal{W}^\alpha}{\sinh^2(\beta\omega\hbar)(\alpha-1)(\alpha+1)} + \right. \\
& \left. \frac{x\mathcal{W}^{\alpha-2} \exp(2\beta\hbar\omega)}{2\sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha-1)} + \frac{x\mathcal{W}^{\alpha+2} \exp(-2\beta\hbar\omega)}{2\sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha+1)} \right). \quad (3.78)
\end{aligned}$$

A componente x é imediata,

$$\mathcal{J}_x^\alpha = k\mathcal{W}^\alpha. \quad (3.79)$$

O primeiro termo à direita da igualdade na Eq. (3.78) corresponde à contribuição

Figura 7 – Dependência da corrente de Wigner \mathcal{J}^α com o parâmetro de interação α . O esquema de cores é dado a partir $\mathcal{J}^\alpha/\mathcal{J}^\alpha$ — o módulo normalizado da corrente de Wigner — de valores nulos (setas azuis) para valores unitários (setas vermelhas). As linhas verdes e laranjas correspondem a $\mathcal{J}_x^\alpha = 0$ e $\mathcal{J}_k^\alpha = 0$, respectivamente. Da esquerda para direita, $\alpha = 5/2, 7/2, 11/2$ e, em todos os casos, $\beta = 2(\hbar\omega)^{-1}$.



Fonte: Elaboração própria

harmônica, enquanto as componentes adicionais, $\mathcal{W}^{\alpha+2}$ e $\mathcal{W}^{\alpha-2}$, introduzem efeitos de *backreaction* quântico no fluxo de Wigner, além da explícita dependência com a temperatura,

ambos ausentes na equação de Liouville clássica. Isso é evidenciado a partir da corrente clássica de Wigner obtida ao truncar a série na Eq. (3.12) em $\eta = 0$,

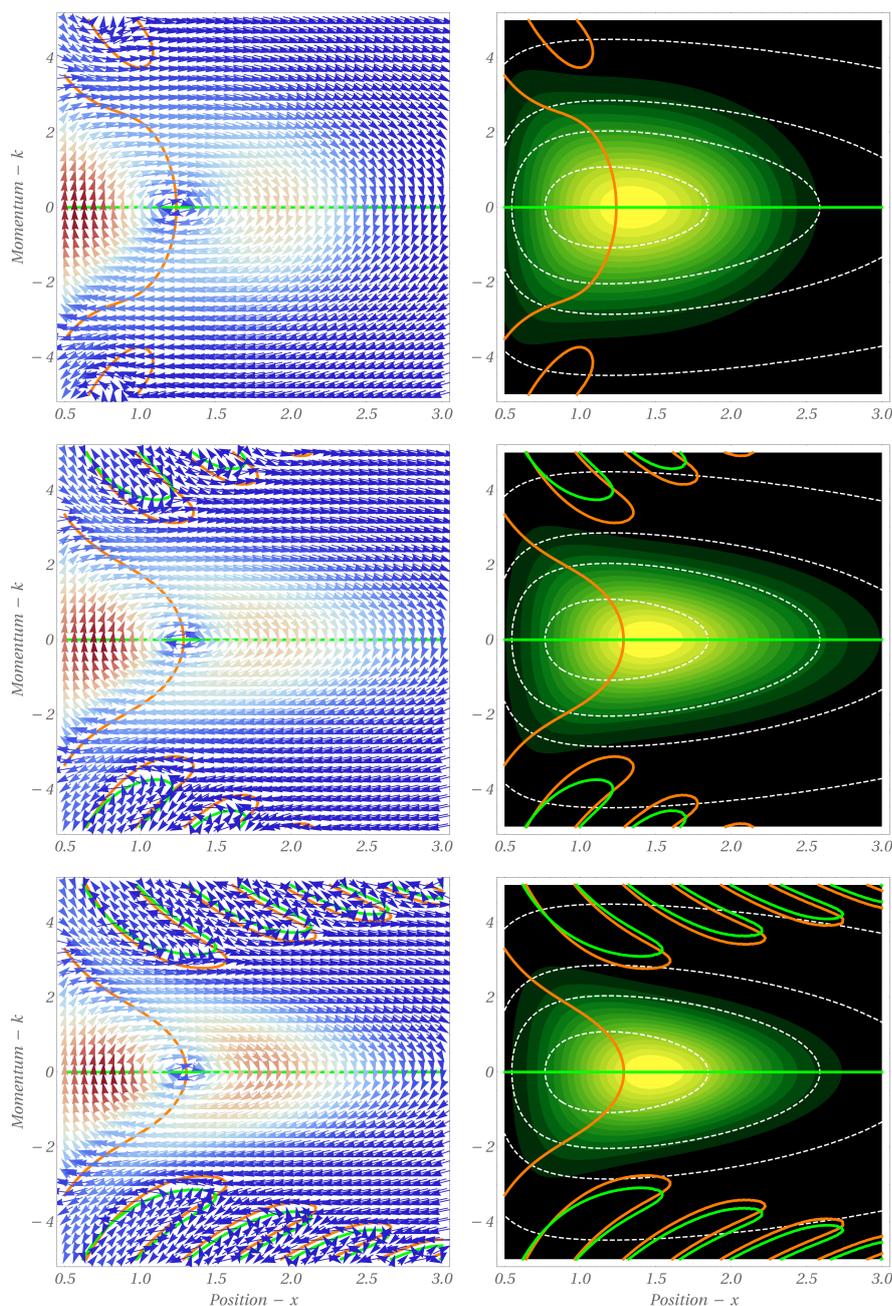
$$\mathcal{J}^{\alpha(cl)} = \left(k, -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right) \mathcal{W}^\alpha = \left(k, -x - \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^3} \right) \mathcal{W}^\alpha. \quad (3.80)$$

Evidentemente, ainda que a função de Wigner quântica para o caso harmônico possa assumir valores negativos, a sua equação de movimento seria *Liouvillian* (KAKOFENGITIS; STEUERNAGEL, 2014), de forma que as correntes de Wigner quântica e clássica só seriam idênticas se $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}$ fosse um polinômio de primeiro grau. O retrato do fluxo de Wigner no espaço de fases pode ser observado na Fig. (7), para diversos parâmetros α . Observa-se que o aspecto quântico relevante no retrato de fase é dado pelos pontos de estagnação do fluxo de Wigner, com $\mathcal{J}^\alpha = 0$, não necessariamente restrito a $k = 0$. Como um efeito compensatório, regiões de inversão de fluxo, identificadas pelas linhas laranjas ($\mathcal{J}_k = 0$) e verdes ($\mathcal{J}_x = 0$) aceleram ou retardam o fluxo de Wigner na vizinhança da intersecção dessas linhas. Classicamente, o único ponto de estagnação se encontra na região onde potencial \mathcal{U} assume valor mínimo ($\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0$), ao longo do eixo k . Assim, para valores crescentes de α , o fluxo de Wigner se aproxima de um fluido de fase clássico, o que vai ao encontro de resultados discutidos na literatura (BERNARDINI, 2018; BERNARDINI; LEAL; BERTOLAMI, 2018). Enfatiza-se que a existência das linhas verdes para $\mathcal{W}^\alpha = 0$ é prevista classicamente (regiões com densidade de probabilidade nula no espaço de fases), embora a inversão do fluxo para $\mathcal{W}^\alpha < 0$ não ocorra.

Qualitativamente, o comportamento discutido acima é coerente com os resultados obtidos na seção (3.2), na qual alguns aspectos clássicos também puderam ser observados para valores crescentes de α . Se por um lado, as trajetórias bohmianas apresentaram uma dinâmica newtoniana para valores finitos do potencial quântico, por outro, a amplitude das flutuações quânticas no espaço de fases é significativamente reduzida, ainda que se tenha uma função de Wigner negativa. Para obter fenômenos qualitativamente novos a partir do fluxo de Wigner, pode-se verificar a dependência dele com a temperatura. Para um parâmetro $\alpha = 3/2$, variou-se valores de β para a corrente de Wigner obtida, o que é mostrado na Fig. (8). Nela, observa-se a influência das flutuações térmicas no retrato de fases. Além disso, o conjunto de trajetórias hamiltonianas também é exibido, o que evidencia o desvio quântico a partir da intersecção das linhas verdes e laranjas. Confirma-se que as flutuações quânticas são completamente suprimidas para $\beta \ll (\hbar\omega)^{-1}$, isto é, altas temperaturas. Contrariamente, para sistemas que se aproximam do zero absoluto,

$\beta \gg (\hbar\omega)^{-1}$, as flutuações térmicas se tornam desprezíveis e o sistema é dominado por flutuações quânticas. Para valores de $\beta > 2(\hbar\omega)^{-1}$, já não se observa uma mudança qualitativa na figura apresentada.

Figura 8 – Fluxo de Wigner termalizado no espaço de fases. À esquerda, o esquema de cores segue da Fig. (7) e, à direita, observa-se os contornos das regiões dominantes da função de Wigner, sobreposta por trajetórias hamiltonianas arbitrárias. O parâmetro $\alpha = 3/2$ foi mantido fixo e, de cima para baixo, $\beta = 1/2(\hbar\omega)^{-1}, (\hbar\omega)^{-1}, 2(\hbar\omega)^{-1}$.



Fonte: Elaboração própria

3.3.2 Quantificador de Liouillianidade

Como ilustra as trajetórias hamiltonianas na Fig. (8), o vetor de fluxo clássico $\mathcal{J}^{\alpha(cl)} = \mathbf{v}\mathcal{W}^\alpha$ descreve um campo de velocidade no espaço de fases (obtido a partir das equações de Hamilton $\mathbf{v} = (\dot{x}_c, \dot{k}_c)$) que é solenoidal,

$$\nabla_\xi \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.81)$$

Por outro lado, o equivalente quântico da velocidade \mathbf{v} no espaço de fases, \mathbf{w} (KAKO-FENGITIS; STEUERNAGEL, 2014), claramente não apresenta tal propriedade, devido à formação dos pontos de estagnação discutidos na seção anterior. De fato, como

$$\mathbf{w} = \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{W}}, \quad (3.82)$$

segue, após algumas manipulações,

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} &= \frac{\mathcal{W}\nabla_\xi \cdot \mathcal{J} - \mathcal{J} \cdot \nabla_\xi \mathcal{W}}{\mathcal{W}^2} \\ &= \frac{1}{\mathcal{W}} \frac{\partial \mathcal{J}_k}{\partial k} - \frac{\mathcal{J}_k}{\mathcal{W}} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial k}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

o qual é genericamente não-nulo. Em regiões nas quais a funções de Wigner vai a zero, a Eq. (3.83) diverge. Nota-se ainda que ela não depende da componente \mathcal{J}_x , já que ela também não contribui para $\nabla_\xi \cdot \mathbf{v}$. Assim, para a corrente de Wigner obtida na Eq. (3.78), recupera-se o índice α ,

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} &= \left(\frac{4\alpha^2 - 1}{8} \right) \left\{ \frac{1}{\mathcal{W}^\alpha} \left(\frac{x \exp(2\beta\hbar\omega)}{2 \sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha-1)} \frac{\partial \mathcal{W}^{\alpha-2}}{\partial k} + \frac{x \exp(-2\beta\hbar\omega)}{2 \sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha+1)} \frac{\partial \mathcal{W}^{\alpha+2}}{\partial k} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{\mathcal{W}^\alpha} \right)^2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial k} \left(\frac{x \mathcal{W}^{\alpha-2} \exp(2\beta\hbar\omega)}{2 \sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha-1)} + \frac{x \mathcal{W}^{\alpha+2} \exp(-2\beta\hbar\omega)}{2 \sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha+1)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

o que pode ser reescrito compactamente, com

$$-\frac{1}{\mathcal{W}^2} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{W}^{-1},$$

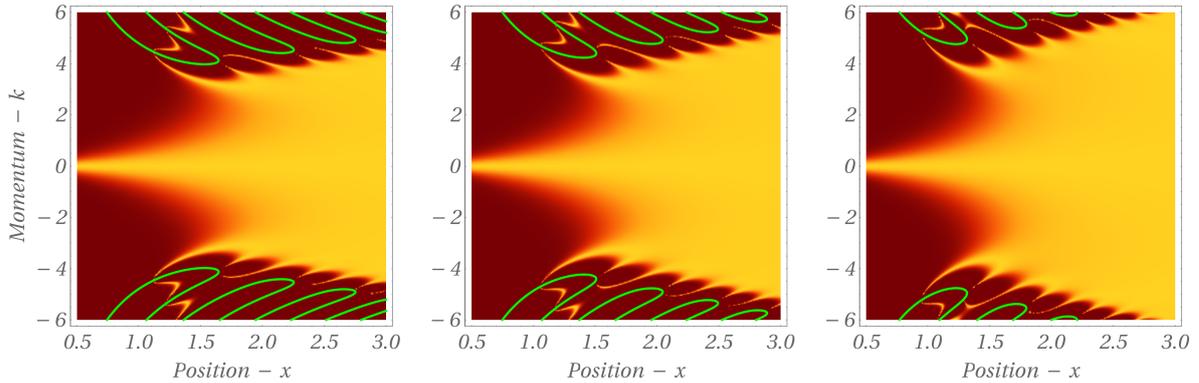
logo

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} &= \left(\frac{4\alpha^2 - 1}{8} \right) \left(\frac{x \exp(2\beta\hbar\omega)}{2 \sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha-1)} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\mathcal{W}^{\alpha-2}}{\mathcal{W}^\alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{x \exp(-2\beta\hbar\omega)}{2 \sinh^2(\beta\omega\hbar)\alpha(\alpha+1)} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\mathcal{W}^{\alpha+2}}{\mathcal{W}^\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Desta forma, $\nabla_\xi \cdot \mathbf{w}$ pode ser interpretado como um quantificador do caráter *liouillian* do fluxo de Wigner. Para o caso harmônico, $\nabla_\xi \cdot \mathbf{w} = 0$, como esperado. Além disso, verifica-se que o valor esperado do caráter *liouillian* se anula, porquanto

$$\langle \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} \rangle = \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk \mathcal{W}^\alpha \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (3.86)$$

Figura 9 – Quantificador do caráter *liouviliano* ($\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{w}$) dependente da temperatura e normalizado por $\text{sech}(\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{w})$. O esquema de cores segue de $(\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{w}) = 0$ (cor clara), ou localmente *liouviliano*, para $(\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{w}) \rightarrow \infty$ (cor escura), não-*liouviliano*. Novamente, as linhas verdes identificam os zeros da função de Wigner, onde o sistema é maximalmente não-*liouviliano*. Da esquerda para direita, $\beta = 2(\hbar\omega)^{-1}$, $1.5(\hbar\omega)^{-1}$, $(\hbar\omega)^{-1}$ e $\alpha = 7/2$, para todos os casos.



Fonte: Elaboração própria

o qual segue do integrando ímpar em k .

Qualitativamente, observa-se que para valores crescentes de α , $\alpha \pm 2 \approx \alpha$ e o retrato de fases é aproximadamente *liouviliano*. Por essa razão, na Fig. (9), fixou-se um valor de α intermediário para uma melhor visualização e exibiu-se a dependência $\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{w}(\mathcal{T})$. Nota-se que as linhas verdes confinam as regiões *Liouvilianas* do fluxo, dado que os contornos $\mathcal{W} = 0$ delimitam microestados irrealizáveis classicamente. Para valores crescente da temperatura, observa-se que a amplitude dessas curvas diminui gradualmente, e a região representada se aproxima novamente do perfil *liouviliano*. Quantitativamente, para valores de $\beta \approx 3/4(\hbar\omega)^{-1}$, as linhas verdes já não podem ser mais observadas. Os resultados são coerentes com a Fig. (8), pois quando $k_B\mathcal{T} \gg \hbar\omega$, os pontos de estagnação e regiões não-*Liouvilianas* estão ausentes, e as flutuações térmicas suprimem as correções quânticas que distorcem as trajetórias hamiltonianas.

3.3.3 Fluxo de informação no espaço de fases

Na seção anterior, o fluxo de Wigner foi localmente caracterizado a partir da sua velocidade \mathbf{w} , a qual está relacionada à formação dos pontos de estagnação, ou ainda, a regiões não-*Liouvilianas*. Agora, a discussão será estendida para compreender como

tais aspectos caracterizam sistemas globalmente não-conservativos a partir de equações de continuidade clássico-quânticas para quantificadores de informação.

Para construir equações de conservação, a analogia com a mecânica dos fluidos é bastante útil. Por exemplo, a derivada material no espaço de fases,

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \mathbf{v}_\xi \cdot \nabla_\xi \quad (3.87)$$

para \mathbf{v}_ξ um campo de velocidade qualquer, quantifica a variação de uma propriedade arbitrária no referencial de um fluido que se desloca com velocidade \mathbf{v}_ξ . A taxa de variação da função de Wigner fornece

$$\frac{D\mathcal{W}}{D\tau} = \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\tau} + \mathbf{v}_\xi \cdot \nabla_\xi \mathcal{W} = -\nabla_\xi(\mathbf{v}_\xi \mathcal{W}) + \mathbf{v}_\xi \cdot \nabla_\xi \mathcal{W} = -\mathcal{W} \nabla_\xi \cdot \mathbf{v}_\xi, \quad (3.88)$$

onde a segunda igualdade segue da equação de continuidade. A equação acima se anula para sistemas hamiltonianos e, portanto, $\frac{D\mathcal{W}}{D\tau} = 0$ identifica (localmente) uma equação de conservação para um fluxo de Wigner clássico. Porém, de forma mais genérica, almeja-se quantificar os efeitos não-clássicos em uma região finita no espaço de fases, o que pode ser obtido ao integrar a derivada material ([GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014](#), seção 10.811),

$$\int_V dV \frac{Df}{D\tau} = \frac{D}{D\tau} \int_V dV f - \int_V dV f \nabla_\xi \cdot \mathbf{v}_\xi, \quad (3.89)$$

onde a grandeza f é arbitrária. Um exemplo trivial pode ser obtido ao se considerar novamente um sistema hamiltoniano e $f = \mathcal{W}$, com $V \rightarrow \infty$, de forma que

$$\int_{V \rightarrow \infty} dV \frac{D\mathcal{W}}{D\tau} = \frac{D}{D\tau} \int_{V \rightarrow \infty} dV \mathcal{W} = 0, \quad (3.90)$$

devido à normalização da função de Wigner no espaço de fases. Evidentemente, como $V \rightarrow \infty$, tal relação não permite obter uma equação equivalente no caso quântico.

Um cenário mais relevante é obtido para soluções hamiltonianas periódicas, de forma que se pode definir um caminho clássico \mathcal{C} no espaço de fases, que delimita um determinado volume (finito) bidimensional $V_{\mathcal{C}}$ e, nesse caso, $\mathbf{v}_\xi \equiv \mathbf{v}_{\xi(\mathcal{C})}$. Ao se definir ([BERNARDINI; BERTOLAMI, 2017](#))

$$\varsigma_{(\mathcal{C})} = \int_{V_{\mathcal{C}}} dV \mathcal{W}, \quad (3.91)$$

o fluxo de probabilidade integrada, de forma que a sua equação de continuidade é obtida com a Eq. (3.89),

$$\begin{aligned} \frac{D\varsigma_{(c)}}{D\tau} &= \int_{V_c} dV \left[\frac{D\mathcal{W}}{D\tau} + \mathcal{W} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}_{\xi(c)} \right] \\ &= \int_{V_c} dV \left[\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tau} + \mathbf{v}_{\xi(c)} \cdot \nabla_{\xi} \mathcal{W} + \mathcal{W} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}_{\xi(c)} \right] \\ &= \int_{V_c} dV \left[-\nabla_{\xi}(\mathbf{w}\mathcal{W}) + \nabla_{\xi}(\mathbf{v}_{\xi(c)}\mathcal{W}) \right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Novamente, a derivada parcial da função de Wigner foi substituída a partir da equação de continuidade para uma velocidade \mathbf{w} . Ao introduzir o vetor $\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J} - \mathbf{v}_{\xi(c)}\mathcal{W}$ correspondente à correção quântica do fluxo de Wigner, é possível expressar o integrando como o divergente de uma grandeza vetorial, o que sugere utilizar o teorema de Gauss,

$$\begin{aligned} \frac{D\varsigma_{(c)}}{D\tau} &= - \int_{V_c} dV \nabla_{\xi} \cdot \Delta\mathcal{J} = - \oint_{\mathcal{C}} d\ell \Delta\mathcal{J} \cdot \mathbf{n} \\ &= - \int_0^T d\tau \Delta\mathcal{J}_k(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau) \frac{d}{d\tau} x_c(\tau), \end{aligned} \quad (3.93)$$

onde T é o período clássico, e \mathbf{n} é um vetor unitário no espaço de fases dado por $\mathbf{n} = (-dk_c/d\tau, dx_c/d\tau)|\mathbf{v}_{\xi}|^{-1}$, ortogonal ao vetor $\mathbf{v}_{\xi(c)}$, ou seja, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\xi(c)} = 0$. É evidente que $\varsigma_{(c)}$ é conservado para o fluxo de Wigner clássico, pois $\Delta\mathcal{J} = 0$.

De forma similar, outras equações de continuidade podem ser construídas (BERNARDINI, 2018). Para a pureza quântica (cf. Apêndice E),

$$\begin{aligned} \left. \frac{D}{D\tau} \mathcal{P}_{(c)} \right|_{\tau=T} &= - \oint_{\mathcal{C}} d\ell \mathcal{W} \Delta\mathcal{J} \cdot \mathbf{n} \\ &= - \int_0^T d\tau \mathcal{W}(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau) \Delta\mathcal{J}_k(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau) \frac{d}{d\tau} x_c(\tau), \end{aligned} \quad (3.94)$$

e entropia de von Neumann, definida como

$$S_{vN} = - \int_V dV \mathcal{W} \ln |\mathcal{W}|, \quad (3.95)$$

cuja equação da continuidade leva a

$$\begin{aligned} \left. \frac{D}{D\tau} S_{vN(c)} \right|_{\tau=T} &= \oint_{\mathcal{C}} d\ell \ln(\mathcal{W}) (\Delta\mathcal{J} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \int_0^T d\tau \ln(\mathcal{W}(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau)) \Delta\mathcal{J}_k(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau) \frac{d}{d\tau} x_c(\tau). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Em ambos os casos, considerou-se potenciais simétricos na posição. Verifica-se que a entropia de von Neumann e a pureza também são conservadas para um fluxo clássico, pois o integrando também depende de $\Delta\mathcal{J}$.

Assim, as equações de continuidade acima podem ser utilizadas para as correntes de Wigner termalizadas (Eq. 3.78). As soluções hamiltonianas já obtidas são (cf. 3.33),

$$\begin{aligned} x_c(\tau) &= \sqrt{(\alpha + \varepsilon) + \Delta \cos(\tau)}, \\ k_c(\tau) &= \frac{\Delta \sin(\tau)}{2\sqrt{(\alpha + \varepsilon) + \Delta \cos(\tau)}}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

e $\mathcal{W}^\alpha(x_c(\tau), k_c(\tau); \beta)$ corresponde à função de Wigner cujos argumentos evoluem ao longo da solução clássica. Como a função de Wigner termalizada não depende explicitamente do tempo, $\Delta \mathcal{J}^\alpha(x_c(\tau), k_c(\tau); \beta)$ é uma função periódica com o mesmo período clássico $T = 2\pi$. Assim, da Eq. (3.93) e a propriedade de integrandos periódicos,

$$\frac{D\varsigma_{(c)}}{D\tau} = - \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \Delta \mathcal{J}^\alpha(x_c(\tau), k_c(\tau); \beta) k_c(\tau). \quad (3.98)$$

Por fim, como a função de Wigner é uma função par em ambas as variáveis, segue que $\Delta \mathcal{J}^\alpha(x_c(\tau), k_c(\tau); \beta)$ é também par em τ e o integrando da Eq. (3.98) é uma função ímpar em τ , resultando em $\frac{D\varsigma_{(c)}}{D\tau} = 0$. Evidentemente, as soluções hamiltonianas são arbitrárias, na forma

$$x_c(\tau) = \sqrt{(\alpha + \varepsilon) + \Delta \sin(\tau + \vartheta)}.$$

Ainda assim, como o integrando é sempre uma função periódica, o intervalo de integração é arbitrário e pode ser convenientemente escolhido como $\tau_0 < \tau < \tau_0 + 2\pi$, de modo que o integrando se torne uma função ímpar em relação à origem τ_0 . Semelhantemente, é possível verificar que todos os quantificadores introduzidos são conservados para o fluxo de Wigner termalizado,

$$\frac{D}{D\tau} S_{vN(c)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{D}{D\tau} \mathcal{P}_{(c)} = 0, \quad (3.99)$$

dadas as mesmas considerações acima. Enfatiza-se que isso se deve à propriedade de paridade $\Delta \mathcal{J}_k(x, -k) = \Delta \mathcal{J}_k(x, k)$ e também ao fato de que o fluxo é estático. Essas são condições bastante especiais para um sistema quântico, de forma que o fluxo de Wigner é perfeitamente simétrico em relação ao eixo dos momentos. Conseqüentemente, todos os pontos de estagnação observados nas Figs. (7) e (8) ocorrem em pares dentro de uma trajetória clássica e apresentam um *winding number* total nulo, isto é, para cada ponto de estagnação em uma coordenada k que o fluxo de Wigner percorre no sentido horário, há um outro ponto de estagnação com coordenada $-k$ que o fluxo de Wigner percorre no sentido anti-horário (e vice-versa). Para uma trajetória hamiltoniana fechada, as flutuações quânticas distorcem o fluxo de Wigner clássico com um efeito que se cancela na média

devido ao processo de termalização e os quantificadores informacionais são globalmente conservados.

Dos resultados obtidos, evidencia-se que muitas propriedades estatísticas do oscilador singular em equilíbrio termodinâmico são idênticas ao oscilador harmônico, dado que a função de partição, pureza, e equações de continuidade são insensíveis ao parâmetro de anarmonicidade. Apenas a partir deles, não é possível distinguir os dois sistemas, embora o retrato de fases para o primeiro seja, evidentemente, não-clássico. É razoável supor que a função de Wigner anarmônica em equilíbrio termodinâmico codifique uma informação mensurável distinta da função de Wigner para um sistema harmônico, mas cuja aplicação foge ao escopo desse trabalho.

Conforme os resultados obtidos ao longo dessa seção, uma aplicação no contexto da cosmologia quântica será discutida. Como será visto, a equação de Wheeler-DeWitt para a função de onda do universo apresenta uma forte similaridade com a equação de Schrödinger aqui discutida. Destarte, pode-se reparametrizar as variáveis canônicas para descrever a evolução do fator de escala e , conseqüentemente, a métrica espacial.

4 COSMOLOGIA DE HOŘAVA-LIFSHITZ

A teoria da relatividade de Einstein se mostrou bem-sucedida na previsão de diversos fenômenos físicos, do movimento de planetas à formação de estruturas de larga escala, tornando-a uma teoria elementar para a descrição da natureza. Porém, a descrição dos problemas em escalas cosmológicas pode se tornar complexa quando se busca compreender como o universo evoluiu a partir de específicas configurações iniciais. Em particular, ao considerar os efeitos associados à escala de Planck, é razoável supor que a teoria quântica distorça as previsões cosmológicas clássicas. De fato, diversas formulações teóricas tentaram incorporar as interações gravitacionais em uma descrição quântica (cf. extensiva lista em (STAMATESCU; SEILER, 2007)), o que deu origem a uma área de estudo chamada de cosmologia quântica.

As tentativas em se desenvolver uma teoria quântica da gravidade remontam ao início da física moderna, dado que as dificuldades matemáticas prejudicam uma unificação de ambas as teorias. Um problema bastante conhecido se trata da não-renormalizabilidade da Relatividade Geral (WEINBERG, 1979), o qual pode ser compreendido sucintamente no contexto da teoria quântica de campos. Nela, as interações relevantes são descritas a partir das constantes de acoplamento, as quais garantem que a ação seja adimensional, com $\hbar = c = 1$, na linguagem da cosmologia. Como a constante gravitacional de Newton, G_N , possui dimensão de massa $[G_N] = -2$ em quatro dimensões, uma expansão perturbativa da métrica resulta em potências de $G_N m^2 \equiv G_N E^2$ (LITIM, 2011), isto é, a constante de Newton multiplicada por uma escala de energia ao quadrado. No limite de baixas energias para $E \ll M_{Pl}$, onde M_{Pl} é a massa de Planck, espera-se que os termos da expansão sejam fortemente suprimidos e não afetem a teoria residual. Por outro lado, para $E \gg M_{Pl}$, ou limite ultravioleta, os termos sucessivos na série tornam-se mais significativos a cada ordem da expansão. Portanto, não é possível obter uma Lagrangeana com um número finito de termos e a teoria é chamada de não-renormalizável no ultravioleta (cf. introdução ao tema em (DESER, 2000)). Assim, Peskin e Schroeder (1995) classificaram as

interações a partir da constante de acoplamento de uma teoria genérica. Para constantes de acoplamento adimensionais ou com dimensões de massa positivas, a teoria é renormalizável e super-renormalizável, respectivamente. Para constantes de acoplamento com dimensões de massa negativas, a teoria é não-renormalizável. Nota-se que a constante gravitacional cai no último caso, de forma que ela descreve um tipo excepcional de interações.

A teoria da gravitação de Hořava-Lifshitz oferece uma solução para as dificuldades acima (HOŘAVA, 2009). Para isso, ela propõe uma reescala anisotrópica das coordenadas espaço-temporais na forma $x \rightarrow lx$ e $t \rightarrow l^z t$ para um expoente dinâmico z e uma escala l (SOTIRIOU; VISSER; WEINFURTNER, 2009). Isso introduz dimensões físicas distintas para as coordenadas espaciais e temporais, de forma que a ação seja descrita por objetos adimensionais, como será visto a seguir. Como esperado, a anisotropia introduzida viola a simetria de Lorentz, que é recuperada para $z = 1$ no limite de baixas energias. Nota-se que $z = 2$ é compatível com as transformações de Galileu e para valores genéricos de z , perde-se a simetria de *boosts* (HOYOS; KIM; OZ, 2013). Pragmaticamente, a teoria é construída com a ação de Hořava-Lifshitz, a qual será introduzida a partir de potências dos tensores de curvaturas dimensionalmente permitidos pelas considerações acima.

Naturalmente, o formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM) fornece uma forma intuitiva de se separar os graus de liberdade espaciais ou temporais da métrica, isto é, na forma $(3 + 1)$. Para isso, adota-se a convenção usual para índices gregos (μ, ν) assumindo valores $0, 1, 2, 3$ e índices latinos (i, j) assumindo valores $1, 2, 3$ (índices espaciais). Assim, para a métrica escrita como (KIRITSIS; KOFINAS, 2009)

$$ds^2 = \sigma^2(a^2\gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (N dt)^2), \quad (4.1)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} g_{00} &= \sigma^2(N_i N^i - N^2), \\ g_{0i} &= \sigma^2 N_i, \\ g_{ij} &= \sigma^2 a^2 \gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde γ_{ij} é a métrica espacial definida na hipersuperfície parametrizada por t constante e σ é um fator de normalização. As funções $N \equiv N(t)$ são chamadas de função *lapse* e

$N_i = \gamma_{ij} N^j$ a função *shift*, as quais definem a geometria das tri-superfícies no espaço-tempo.

As componentes contravariantes da métrica são escritas como

$$\begin{aligned} g^{00} &= \sigma^{-2}(-N^{-2}), \\ g^{0i} &= \sigma^{-2}N^i N^{-2}, \\ g^{ij} &= \sigma^{-2} \left(a^{-2}\gamma^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

satisfazendo $g_{\mu\nu}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\alpha$.

Como é usual, a hamiltoniana do sistema depende dos diversos tensores de curvatura, cujo cálculo preliminar será útil. A curvatura extrínseca é dada por (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973)

$$K_{ij} = -\nabla_j n_i = -n_{i,j} + \Gamma_{ij}^\mu n_\mu, \quad (4.4)$$

onde ∇_j é a derivada covariante e $n_{i,j} = \frac{\partial n_i}{\partial x^j}$,

$$\Gamma_{ij}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{i\nu,j} + g_{j\nu,i} - g_{ij,\nu}) \quad (4.5)$$

são os símbolos de Christoffel e n_μ são as componentes covariantes do vetor \mathbf{n} que define a direção ortogonal à superfície, dado por

$$n_\mu = (-\sigma N, \mathbf{0}) \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu}n_\nu = n^\mu = \sigma^{-1}(N^{-1}, -N^{-1}N^i), \quad (4.6)$$

com

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_\mu n^\mu = -1, \quad (4.7)$$

onde os \mathbf{e}_i são tangentes à tri-superfície. Para calcular K_{ij} na Eq. (4.4), nota-se que apenas a componente $\mu = 0$ é não-nula,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{0k}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) + \frac{1}{2}g^{00}(g_{i0,j} + g_{j0,i} - g_{ij,0}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{N^k}{\sigma^2 N^2} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) - \frac{1}{2} \frac{N^{-2}}{\sigma^2} \left(N_{i,j} + N_{j,i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2 N^2} \left(+ \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - N_{i,j} - N_{j,i} + N^k (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Logo

$$K_{ij} = \frac{1}{2N\sigma} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + N_{i,j} + N_{j,i} - N^k (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \right). \quad (4.9)$$

Usualmente, a expressão acima pode ser reescrita em termos de uma derivada covariante espacial,

$${}^{(3)}\nabla_j N_i = N_{i,j} - \Gamma_{ij}^k N_k, \quad (4.10)$$

onde os índices mudos em $\Gamma_{ij}^k N_k$ são somados apenas nas componentes espaciais. Assim, como a Eq. (4.9) é simétrica nos índices i e j (MAEDA; MISONOH; KOBAYASHI, 2010),

$$K_{ij} = \frac{1}{2N\sigma} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + {}^{(3)}\nabla_j N_i + {}^{(3)}\nabla_j N_j \right). \quad (4.11)$$

A análise será restrita para métricas do tipo Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) para $N_i = 0$, portanto os vetores da base satisfazem $g_{0i} = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_i = 0$, isto é, os deslocamentos ortogonais às superfícies ocorrem ao longo de coordenadas espaciais constantes. A Eq. (4.9) é simplificada para

$$K_{ij} = \frac{-1}{2\sigma N} \frac{\partial(\sigma^2 a^2 \gamma_{ij})}{\partial t} = -\frac{\dot{a}}{\sigma N a} g_{ij}, \quad (4.12)$$

cujo traço fornece

$$Tr[K_{ij}] = g^{ij} K_{ij} = g^{ij} g_{ij} \frac{-\dot{a}}{\sigma N a} = -\frac{3\dot{a}}{\sigma N a}, \quad (4.13)$$

onde $g^{ij} g_{ij} = 4 - 1$ é a dimensão espacial. Assumindo ainda isotropia para o tri-espaco, é razoável supor que a curvatura não dependa de uma direção particular, de modo que o tensor de Riemann espacial pode ser escrito na forma (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973)

$${}^{(3)}R_{ijkl} = K_c(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (4.14)$$

logo

$${}^{(3)}R_{jkl}^i = \gamma^{im} {}^{(3)}R_{mjkl} = K_c(\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}). \quad (4.15)$$

Para calcular o tensor de Ricci, basta contrair os índices $i = k$,

$$\begin{aligned} R_{jl} = {}^{(3)}R_{jkl}^k &= K_c(\delta_k^k \gamma_{ij} - \delta_l^k \gamma_{jk}) \\ &= K_c(3\gamma_{jl} - \gamma_{lj}) = 2K_c \gamma_{jl}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

cujo traço fornece

$$Tr[{}^{(3)}R_{jl}] = 2K_c \gamma^{jl} \gamma_{jl} = 6K_c = {}^{(3)}R, \quad (4.17)$$

onde R é o escalar de Ricci. Para a métrica introduzida,

$$K_c = \frac{1}{\sigma^2 a^2}, \quad (4.18)$$

de modo que o *ansatz* na Eq. (4.14) é coerente com o resultado obtido, pois a curvatura é espacialmente isotrópica e apresenta valor constante para todos os pontos que estão nas tri-superfícies. Incluindo a curvatura no elemento de linha para a métrica espacial

$\gamma_{ij} = \delta_{ij}$, pode-se reescrever a métrica utilizando coordenadas esféricas, como a métrica de Schwarzschild (MOORE, 2013),

$$ds^2 = -\sigma^2 \left[N^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - k_c r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \right], \quad (4.19)$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido usual com $k_c \in \{-1, 0, 1\}$ descrevendo as geometrias possíveis das superfícies. Portanto, $k_c = 0$ descreve geometrias espaciais planas, em \mathbf{R}^3 , $k_c = -1$ descreve o espaço hiperbólico H^3 e $k_c = +1$, a tri-esfera S^3 (PERDIGÃO, 1993). Ao identificar $K_c/|K_c| = k_c$ a partir de uma reescala da coordenada radial $r \rightarrow |K_c|^{-1/2}r$, restringi-se a análise para universos com curvatura espacial positiva, de forma que a hiper-superfície é definida para $0 < r < 1$ (distância comóvel). Nota-se que o escalar de Ricci é determinado unicamente pelo fator de escala $a(t)$, cujas equações dinâmicas podem ser obtidas a partir do formalismo da quantização canônica.

4.1 A ação clássica

O primeiro passo é construir a ação do modelo cosmológico de Hořava-Lifshitz, dada por (SOTIRIOU; VISSER; WEINFURTNER, 2009; KIRITSIS; KOFINAS, 2009)

$$\begin{aligned} S_{HL} = & \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^3x dt \sigma N \sqrt{g} \left\{ K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - g_0 M_{Pl}^2 - g_1 R - g_2 M_{Pl}^{-2} R^2 - \right. \\ & g_3 M_{Pl}^{-2} R_{ij} R^{ij} - g_4 M_{Pl}^{-4} R^3 - g_5 M_{Pl}^{-4} R (R_j^i R_i^j) - g_6 M_{Pl}^{-4} R_j^i R_k^j R_i^k \\ & \left. - g_7 M_{Pl}^{-4} R \nabla^2 R - g_8 M_{Pl}^{-4} \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} \right\}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde M_{Pl} é a massa de Planck, e o índice espacial em ${}^{(3)}\nabla$ e ${}^{(3)}g$ foi suprimido por conveniência. A ação apresenta, genericamente, todas as combinações possíveis dos tensores de curvatura e suas contrações que garantem a adimensionalidade das constantes de acoplamento g_0, g_1, \dots, g_8 . Aqui, sumarizou-se o resultado nas unidades de Planck. Nota-se que os quatro primeiros termos do integrando estão presentes na ação de Einstein-Hilbert no formalismo (3+1) para $\lambda = 1$ (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973, p. 519-520), sendo os dois primeiros o termo cinético e $g_0 M_{Pl}^2 = 2\Lambda$, onde Λ é a constante cosmológica. Além disso, pode-se escolher $g_1 = -1$, o que pode ser feito a partir de uma mudança de variável no intervalo de integração, para que o sinal do escalar de Ricci seja compatível com a formulação da relatividade geral. Em suma, há dois termos qualitativamente distintos na ação de Hořava-Lifshitz que violam a simetria de Lorentz. O primeiro deles é dado pelo

conjunto das constantes g_2, \dots, g_8 , as quais podem ser suprimidas em uma escala apropriada (pois são adimensionais) a ser determinada fenomenologicamente. O segundo deles, no entanto, refere-se ao termo cinético, para λ arbitrário. Considera-se, dessa forma, que λ é também um parâmetro dinâmico a ser confrontado experimentalmente (SOTIRIOU, 2011).

Antes de substituir os resultados acima, observa-se que todos os tensores de curvatura são independentes das coordenadas espaciais, de forma que a integral espacial segue imediatamente para a métrica definida em coordenadas esféricas, com

$$g = \frac{r^4 \sin^2(\theta)}{1 - r^2}, \quad (4.21)$$

o que leva a

$$\int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi g^{1/2} = 2\pi^2, \quad (4.22)$$

para uma tri-esfera unitária. O resultado acima deve ser multiplicado por $a^3(t)\sigma^3$, pois se considera a normalização na coordenada radial para obter o parâmetro de curvatura unitário, ou seja, $2a^3\sigma^3\pi^2$ corresponde ao volume da tri-esfera cujo raio é dado por $R(t) = \sigma a(t)$. Desse modo, para um espaço euclidiano, $a(t) \rightarrow \infty$, e a integral diverge. Para introduzir um conteúdo físico mais intuitivo à ação obtida, pode-se agrupar os termos com a mesma dependência com o fator de escala, o que permite distingui-los para diversas fases de evolução do universo. A constante g_c representará o parâmetro de curvatura e os componentes que descrevem o conteúdo material e energético do universo serão dados por: g_Λ , a constante cosmológica, g_r , a radiação e g_s , a matéria rígida (CHAVANIS, 2015; FRACALOSSI, 2018). Esses componentes são identificados pela sua relação entre pressão e densidade de energia na equação de estado para fluidos perfeitos (DODELSON, 2003). Assim, seguindo a notação em (BERTOLAMI; ZARRO, 2011), essas constantes são explicitamente dadas em termos dos antigos parâmetros,

$$g_c = \frac{2}{3\lambda - 1}, \quad g_\Lambda = \frac{\Lambda M_{Pl}^{-2}}{18\pi^2(3\lambda - 1)^2}, \quad g_r = 24\pi^2(3g_2 + g_3), \quad (4.23)$$

$$g_s = 288\pi^4(3\lambda - 1)(9g_4 + 3g_5 + g_6). \quad (4.24)$$

de forma que a ação é simplificada para

$$S_{HL} = \frac{2\pi^2 M_{Pl}^2 3(3\lambda - 1)\sigma^2}{2} \int dt \frac{N}{a} \left[- \left(\frac{a}{N} \dot{a} \right)^2 + g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_r - \frac{g_s}{a^2} \right], \quad (4.25)$$

onde pode-se sempre escolher convenientemente as unidades apropriadas para

$$2\pi^2 M_{Pl}^2 3(3\lambda - 1)\sigma^2 = 1,$$

de modo que S_{HL} é reescrita como

$$S_{HL} = \frac{1}{2} \int dt \frac{N}{a} \left[- \left(\frac{a}{N} \dot{a} \right)^2 + g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_r - \frac{g_s}{a^2} \right]. \quad (4.26)$$

As constantes de acoplamento g_c e g_s invertem o sinal para $\lambda = 1/3$. Desse modo, para garantir uma barreira de potencial com $g_s > 0$, assume-se que $\lambda > 1/3$.

Considerando a densidade lagrangeana \mathcal{L} em $S_{HL} = \int dt \mathcal{L}$, pode-se construir o momento canônico conjugado Π_a ,

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = - \frac{a \dot{a}}{N}, \quad (4.27)$$

de forma que a hamiltoniana segue imediatamente,

$$H = \Pi_a \dot{a} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{N}{a} \left(-\Pi_a^2 - g_c a^2 + g_\Lambda^2 a^4 + g_r + \frac{g_s}{a^2} \right). \quad (4.28)$$

4.2 Equação de Wheeler-DeWitt

Prosseguindo com o formalismo usual da quantização canônica, promove-se o momento canônico a um operador $\Pi_a \rightarrow -i \frac{d}{da}$, e escolhe-se $\Pi_a^2 \rightarrow -\frac{d^2}{da^2}$. Tal escolha não é única, porquanto o termo $\Pi_a \dot{a}$ pode ser classicamente permutado pela troca $a \rightarrow \dot{a}$, o que leva a uma ambiguidade ao se definir o operador correspondente. No entanto, espera-se que no limite semiclássico, todas as escolhas possíveis levem a resultados equivalentes, o que justifica a escolha para Π_a^2 (KOLB; TURNER, 1990). Substituindo acima, o operador H é, portanto, promovido a um operador, o qual aniquila a função de onda do universo (FRACALOSSO, 2018)

$$\left[\frac{d^2}{da^2} - g_c a^2 + g_\Lambda a^4 + g_r + \frac{g_s}{a^2} \right] \psi(a) = 0. \quad (4.29)$$

Essa equação é uma equação tipo-Schrödinger para autovalores nulos do operador H entre os colchetes, $H\psi(a) = 0$, também conhecida como equação de Wheeler-DeWitt para a função de onda do universo $\psi(a)$. A análise dessa equação foi discutida em (MAEDA; MISONOH; KOBAYASHI, 2010), de modo que para obter uma solução analítica, $g_\Lambda = 0$. Ao desconsiderar a contribuição da constante cosmológica, pode-se reconstruir a equação diferencial para o oscilador singular discutido na seção 3, como será visto a seguir.

Como pode ser observado acima, a equação para $\psi(a)$ não fornece a sua evolução dinâmica a partir dos autovalores do operador H , mas sim uma constante a ser imposta

nas possíveis soluções para a função de onda do universo, a qual, conseqüentemente, não depende explicitamente do tempo. Aparentemente, a função de onda está ‘congelada’ no tempo, caso exista uma definição precisa para ele no cenário cosmológico, o que motivou discussões conceituais acerca das diferentes concepções de tempo na teoria quântica e na relatividade geral (ROVELLI, 2015; ANDERSON, 2017).

Para que se possa observar a evolução do sistema parametrizado por uma coordenada τ arbitrária, pode-se, convenientemente, reparametrizar as constantes de acoplamento para que se introduza os autovalores esperados e o parâmetro anarmônico, como discutido na seção anterior. Desse modo, seguindo (BERNARDINI; LEAL; BERTOLAMI, 2018), pode-se identificar um operador $\mathcal{H} = -i\partial/\partial\tau$, o qual gera translações na nova coordenada τ . Evidentemente, tal definição sugere que se possa interpretar τ como uma coordenada temporal, muito embora a Eq. (4.29) mostre que essa parametrização é arbitrária. Assim, ao reparametrizar o fator de escala $a = g_c^{-1/4}x$, no qual $g_c^{1/2}$ é dado nas unidades de Planck, introduz-se o parâmetro de anarmonicidade α (cf. Eq. 3.1),

$$g_s = -\frac{(4\alpha^2 - 1)}{4} \quad (4.30)$$

$$g_r = 2\alpha g_c^{1/2} + 2E, \quad (4.31)$$

onde $E \equiv E_n$ corresponde aos autovalores do operador hamiltoniano \mathcal{H} , com $E_n = g_c^{1/2}(2n + 1)$. Ademais, $\psi(a) = g_c^{1/8}\phi(x)$, onde

$$\phi(x) = 2^{1/2}\Theta(x)N_n(\alpha)x^{\alpha+1/2}\exp(-x^2/2)L_n^\alpha(x^2) \quad (4.32)$$

é a solução obtida para o oscilador singular introduzida na Eq. (3.15). Toda a análise subsequente pode ser obtida para as novas variáveis aqui introduzidas, com $g_c^{1/2} = \omega/2$ recuperando as autoenergias do oscilador harmônico (para $\hbar = 1$).

Para as trajetórias quânticas construídas a partir da superposição *quasi*-gaussiana, obtém-se (cf. 3.2)

$$a_i(\tau) = g_c^{-1/4}x_i(\tau) = a_{0i}\sqrt{\frac{\cosh(\zeta) - \cos(2g_c^{1/2}\tau)}{\cosh(\zeta) - 1}}, \quad (4.33)$$

onde ζ também é dado em termos do parâmetro de curvatura,

$$\zeta = \left(\frac{\alpha + E g_c^{-1/2}}{\left(1/4 + E^2 g_c^{-1} + 2\alpha E g_c^{-1/2}\right)^{1/2}} \right), \quad (4.34)$$

e E corresponde à energia clássica. O limite $Eg_c^{-1/2} \gg \alpha$ na Eq. (4.34) é equivalente ao limite de altas energias obtido anteriormente (Eq. 3.40), para o qual o parâmetro anarmônico α é suprimido. Nesse caso, recupera-se um oscilador harmônico clássico, o que é coerente com o limite $a \gg 1$ ($\cosh(\zeta) \approx 1$) na Eq. (4.29), pois apenas a contribuição da curvatura é relevante. Assim, o modelo cosmológico fornece um universo oscilante entre dois fatores de escala,

$$a_{0i} < a_i(\tau) < a_{0i} \sqrt{\frac{\cosh(\zeta) + 1}{\cosh(\zeta) - 1}}, \quad (4.35)$$

para uma escala temporal $g_c^{-1/2}$. Os resultados da seção anterior mostraram que as oscilações dos fatores de escala identificam um comportamento *quasi*-clássico corroborado pela evolução do fator de escala médio $\langle a \rangle$. Ainda assim, é possível identificar as regiões proibidas classicamente, para valores finitos do potencial quântico. O modelo aqui discutido não apresenta singularidades, pois $a = 0$ apenas se $g_c \rightarrow \infty$, para o qual a solução é congelada na origem. Qualitativamente, a inclusão da constante cosmológica fornece resultados distintos dependendo do sinal de g_Λ . Para $g_\Lambda < 0$ (acompanha o sinal da contribuição da curvatura g_c), o comportamento qualitativo da função de onda é semelhante ao caso discutido aqui, pois ela é suprimida para $a \gg 1$ devido à barreira de potencial e o fator de escala é também uma função oscilante (cf. Fig. 4 de (OLIVEIRA-NETO *et al.*, 2019)). Por outro lado, para $g_\Lambda > 0$ e $a \gg 1$, o potencial inverte de sinal e obtém-se uma função de onda oscilante, com um fator de escala cuja dependência temporal é exponencial (cf. Eq. 56 de (BERTOLAMI; ZARRO, 2011)). Em ambos os cenários, pode-se obter apenas uma solução numérica para o problema. Enfatiza-se que o cenário cosmológico é dominado pela constante cosmológica apenas para $a \gg 1$, sendo ela irrelevante no início do universo para o modelo proposto, quando a contribuição a^{-2} é dominante.

Para confrontar fenomenologicamente o modelo cosmológico de Hořava-Lifshitz termalizado, nota-se que $g_c \approx 1$ (pois $\lambda \approx 1$) (SOTIRIOU, 2011), nas unidades de Planck. Deste modo,

$$g_c^{1/2} = \frac{\ell c^2}{G} \equiv M_{Pl} c^2 \equiv \hbar \omega, \quad (4.36)$$

para ℓ o comprimento de Planck, e $g_c^{1/2} = M_{Pl} c^2$ corresponde a uma geometria espacial aproximadamente plana (para $a \gg 1$). Desse modo, calcula-se a pureza do *ensemble* para uma temperatura dada por $\mathcal{T}_{\text{atual}} = 2,73K$, a qual corresponde a uma escala de energia (térmica)

$$k_B \mathcal{T}_{\text{atual}} \approx 0,2 \text{ meV}. \quad (4.37)$$

Por outro lado,

$$M_{Pl}c^2 \approx 2,4 \cdot 10^{18} \text{ GeV}, \quad (4.38)$$

o que leva a uma pureza para o *ensemble* canônico

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}_{\text{atual}}) = \tanh\left(\frac{M_{Pl}c^2}{k_B \mathcal{T}_{\text{atual}}}\right) \approx 1. \quad (4.39)$$

Evidentemente, para uma escala de energia de Planck $E_{Pl} \gg k_B \mathcal{T}_{\text{atual}}$, as flutuações térmicas não são suficientes para excitar o sistema para estados mais energéticos. Nesse caso, obtém-se um estado puro como foi verificado na seção anterior. Além disso, as flutuações quânticas dominam sobre as flutuações térmicas, e o sistema apresenta um perfil maximamente não-*liouviliano*. Dado que as propriedades estatísticas são equivalentes a um oscilador harmônico, a contribuição da matéria rígida g_s da Eq. (4.30) não parece influenciar o conteúdo informacional mensurável do modelo cosmológico discutido, o que certamente motiva uma análise similar para sistemas fora do equilíbrio.

5 CONCLUSÕES

O formalismo usual da mecânica quântica, para funções de onda descrevendo estados físicos, ofusca algumas propriedades interessantes que surgem na fronteira semiclássica. Uma mudança de paradigma não está apenas amparada em uma nova interpretação de fenômenos quânticos, mas na possibilidade em se implementar algoritmos para determinar aspectos quânticos em diversos sistemas físicos, seja a partir da construção da função de Wigner, por exemplo, na área de tomografia quântica (MANCINI; MAN'KO; TOMBESI, 1996; AMOSOV; KORENNOY; MAN'KO, 2012; VANNER; PIKOVSKI; KIM, 2015), e possíveis aplicações para a construção de quantificadores de informação quântica (BERNARDINI, 2018), seja pela determinação experimental de trajetórias quânticas (MAHLER *et al.*, 2016) em sistemas mais complexos.

A primeira parte do trabalho foi dedicada à análise da dinâmica das trajetórias quânticas correspondentes ao oscilador singular. Para isso, introduziu-se variáveis adimensionalizadas que evidentemente simplificaram o foco principal do trabalho. O caso mais trivial, os estados estacionários, não fornece uma dinâmica relevante, e o caráter estacionário dessas soluções é herdado pelas trajetórias bohmianas. Mais genericamente, portanto, investigou-se uma superposição infinita desses estados, obtida por meio da construção de um pacote de onda *quasi*-gaussiano. Para condições iniciais apropriadas, uma das trajetórias correspondeu a precisamente uma solução hamiltoniana. Além disso, mostrou-se que a conservação de energia ao longo das trajetórias só pode ser obtida como uma aproximação, válida quando a energia clássica é muito maior do que o *quantum* de energia. Nesse caso, todas as trajetórias se aproximam de osciladores harmônicos.

Para quantificar as correções quânticas das trajetórias, considerou-se o efeito do potencial quântico, o qual introduz uma dependência espaço-temporal na equação de Hamilton-Jacobi clássica, de modo que as trajetórias quânticas podem acessar regiões classicamente proibidas. Ademais, em analogia à força newtoniana, é possível também identificar uma força quântica, dada pelo gradiente desse potencial. Embora se observe

valores finitos para o potencial quântico ao longo da trajetória clássica, a força quântica deve ser nula para garantir que ela obedeça à equação de movimento newtoniana. Para a evolução do *ensemble* de trajetórias, o parâmetro anarmônico α quantifica o efeito da força quântica ao longo das trajetória não-clássicas, com o caso harmônico recuperando novamente as soluções clássicas esperadas. Para valores crescentes de anarmonicidade, a trajetória clássica descreve probabilisticamente o comportamento médio do *ensemble* de trajetórias, sendo também a solução mais provável. Ademais, a força quântica é significativamente atenuada, e o pacote ondas mantém o seu perfil *quasi*-gaussiano.

A segunda parte do trabalho considerou um *ensemble* canônico quântico para o oscilador singular, para o qual se analisou a interação do ambiente, idealizado por um banho térmico, com o sistema quântico de interesse. Esperava-se constatar uma relação entre essa interação e aspectos de decoerência que levariam o sistema para um regime *quasi*-clássico e como ele se manifestaria no retrato de fases. Assim, o propagador termalizado foi obtido a partir da conhecida rotação de Wick na coordenada temporal, a qual identifica sistemas em equilíbrio térmico. Em seguida, calculou-se a função de partição correspondente, confirmando que as propriedades estatísticas do oscilador singular no equilíbrio termodinâmico são similares a um oscilador harmônico usual (BERNARDINI; SILVA, 2020).

O resultado central referente ao oscilador singular em equilíbrio termodinâmico trata-se da construção da função de Wigner a uma temperatura finita, a qual apresenta uma representação integral que possui um alto grau de manipulabilidade analítica. Dessa forma, calculou-se a pureza quântica correspondente do sistema e, novamente, verificou-se que tal resultado não depende do parâmetro de interação, mas apenas da temperatura. Ainda assim, dado que a função de Wigner é explicitamente dependente de α , esperava-se que a informação armazenada pelo oscilador singular fosse, em algum aspecto, distinta da função de Wigner termalizada para um oscilador harmônico. Para avançar nessa discussão, calculou-se a evolução da função de Wigner a partir da equação de Liouville quântica. Considerou-se a influência do parâmetro anarmônico e da temperatura no retrato de fases do fluxo quântico. Particularmente, analisou-se as regiões de inversão de fluxo, cujas intersecções estão associadas a pontos de vórtices, sela, ou intersecções de separatrizes, os quais são ausentes no fluxo de fase clássico (STEUERNAGEL; KAKOFENGITIS; RITTER, 2013). Os resultados aqui obtidos foram coerentes com a análise feita para a função de Wigner para o estado *quasi*-gaussiano puro (BERNARDINI; LEAL; BERTOLAMI, 2018),

isto é, valores crescentes de α suprimem os pontos de estagnação no fluxo de Wigner. Esse critério de classicalidade é também coerente com o resultado preliminar obtido anteriormente para as trajetórias newtonianas para o estado puro.

Para discutir aspectos qualitativamente novos, o novo parâmetro a ser investigado foi a temperatura. No retrato de fases obtido, identificou-se novamente a amplitude das flutuações quânticas associadas a regiões de inversão de fluxo, agora dependentes da temperatura de equilíbrio. Conforme a temperatura do sistema é aumentada, o valor médio da energia se aproxima do valor clássico, e as flutuações térmicas se tornam dominantes, onde se observa a transição para um regime térmico. Embora tenha se identificado uma transição quântico-clássica, é evidente que alguns aspectos quânticos ainda foram detectados para temperaturas arbitrariamente grandes. O ponto relevante, no entanto, é que a equação de evolução da função de Wigner se torna *Liouwilliana* para valores crescentes da temperatura, e ainda que se possa observar valores negativos para a função de Wigner — um aspecto quântico (FERRARO; PARIS, 2012) — a sua dinâmica reproduz a evolução de uma densidade de probabilidade clássica no espaço de fases. Isso foi confirmado com o quantificador de *Liouwillianidade* do fluxo de Wigner, dado na forma da divergência de uma velocidade quântica no espaço de fases (KAKOFENGITIS; STEUERNAGEL, 2014). Como o divergente da velocidade hamiltoniana se anula ao longo do espaço de fases, o divergente da velocidade quântica detecta (e quantifica) as regiões nas quais o fluxo é não-*liouwilliano*, as quais estão ausentes no regime térmico.

Ainda no contexto do fluxo de Wigner termalizado, uma análise adicional foi introduzida para verificar o efeito global das flutuações topológicas no fluxo de Wigner em equilíbrio termodinâmico. Equações de continuidade de probabilidade, pureza e entropia foram discutidas para fluxos clássicos e quânticos. Elas quantificam o efeito global das flutuações topológicas no fluxo de Wigner (BERNARDINI; BERTOLAMI, 2017; BERNARDINI, 2018), visto que elas são ausentes no fluxo clássico. Especificamente, as equações de continuidade quantificam os aspectos quânticos relacionados a decoerência, perda ou produção de pureza e entropia para um domínio fechado no espaço de fases. Surpreendentemente, para um domínio clássico identificado a partir das trajetórias hamiltonianas no espaço de fases, o oscilador singular em equilíbrio termodinâmico conserva todos os quantificadores discutidos, ou seja, ele satisfaz globalmente a mesma equação de um sistema *liouwilliano* para temperaturas arbitrárias. Isso se deve a um efeito global nulo das flutuações quânticas ao longo de uma solução clássica periódica.

Na última etapa do trabalho, o oscilador singular foi discutido no contexto cosmológico de Hořava-Lifshitz (MAEDA; MISONOH; KOBAYASHI, 2010; BERTOLAMI; ZARRO, 2011; OLIVEIRA-NETO *et al.*, 2018). A partir de considerações de homogeneidade e isotropia, o formalismo ADM foi utilizado para separar a métrica na forma $(3 + 1)$, para a qual calculou-se os parâmetros de curvaturas dependentes do fator de escala $a(t)$. A ação clássica foi apresentada e a partir dela, algumas reparametrizações contextualizaram a contribuição dos diversos componentes de matéria e energia para a evolução do universo. A partir da quantização canônica, uma equação semelhante tipo-Schrödinger para o oscilador singular pôde ser construída para a função de onda do universo parametrizada pelo fator de escala. Essa equação é, na realidade, a equação de Wheeler-DeWitt para um operador hamiltoniano com autovalores nulos. Embora essa equação não apresente uma dependência temporal e, desse modo, uma dinâmica, reparametrizou-se a equação para a obtenção de soluções estacionárias. Com uma escolha apropriada das novas variáveis, a solução discutida no começo do trabalho pôde ser recuperada. As soluções se relacionam às antigas a partir do parâmetro de curvatura espacial, o que permite analisar o comportamento qualitativo para universos com curvatura espacial arbitrária.

Nesse modelo, o universo de Hořava-Lifshitz oscila entre dois fatores de escala para uma contribuição da constante cosmológica nula. Os resultados obtidos ao longo do trabalho mostraram que o fator de escala clássico é, na realidade, uma solução particular das infinitas soluções quânticas. As singularidades estão ausentes, e para um universo parametrizado para valores crescentes de α , mostrou-se que o universo clássico é o modelo com máxima probabilidade dentre as possíveis evoluções, ainda que seja possível detectar aspectos não-clássicos. Por fim, descrevendo um *ensemble* canônico associado a esse modelo, identificou-se uma escala de energia dada pela curvatura espacial residual, nas unidades de Planck, para a qual a função de Wigner do universo se encontra num estado puro, no qual as flutuações quânticas apresentam amplitude máxima.

Por fim, o modelo aqui discutido foi motivado pela sua manipulabilidade analítica. Evidentemente, generalizações para potenciais arbitrários são esperadas, dado que se pode recorrer a métodos numéricos. Ainda assim, as ferramentas aqui utilizadas podem ser estendidas a esses casos. Além disso, o caso obtido aqui não analisou a dependência temporal da evolução de um estado puro para o estado termalizado. Espera-se, portanto, que o formalismo de Weyl-Wigner possa investigar sistemas transientes. Finalmente, o formalismo de Wigner pode ser estendido para descrever sistemas relativísticos com *spin*,

para os quais se deve considerar a equação de Dirac (VASAK; GYULASSY; ELZE, 1987; MITRA; RAMANATHAN, 1998; BITTENCOURT; BERNARDINI; BLASONE, 2018; BLASONE; BITTENCOURT; BERNARDINI, 2019). Particularmente, efeitos quânticos em sistemas macroscópicos têm sido considerados recentemente, por exemplo, ao se estudar os efeitos de um campo magnético externo em sistemas quirais (WU; HOU; REN, 2016; SHENG *et al.*, 2018; GAO *et al.*, 2018), fenômenos que merecem uma investigação à parte.

Apêndice A - Função de Wigner para o oscilador harmônico

O cálculo da função de Wigner para

$$\psi_n(q) = \mathcal{N}_n^{1/2} H_n(\xi q) \exp\left(-\frac{\xi^2 q^2}{2}\right), \quad (\text{A.1})$$

com

$$\mathcal{N}_n = \left[\frac{\xi}{\pi^{1/2} 2^n \Gamma(n+1)} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Ao inserir

$$\begin{aligned} W_n(q, p) &= \frac{\mathcal{N}_n}{h} \int dw \exp(ipw/\hbar) H_n(\xi(q+w/2)) H_n(\xi(q-w/2)) \times \\ &\quad \exp\left(\frac{\xi^2}{2}(q+w/2)^2\right) \exp\left(\frac{\xi^2}{2}(q-w/2)^2\right) \\ &= \frac{2\mathcal{N}_n}{\xi h} \exp\left(-\xi^2 x^2 - \frac{p^2}{\hbar^2 \xi^2}\right) \int dw' \exp(-w'^2) \times \\ &\quad H_n\left(\xi q + w' - \frac{ip}{\hbar \xi}\right) H_n\left(\xi q - w' + \frac{ip}{\hbar \xi}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

nas quais foi utilizada uma substituição de variável $iw' = i\xi w 2^{-1} + p(\hbar \xi)^{-1}$. A paridade dos polinômios de Hermite pode ser utilizada, $H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$ e, juntamente com (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014, p. 804)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_n(x+z_1) H_n(x-z_2) = \pi^{1/2} 2^n \Gamma(n+1) L_n(-2z_1 z_2), \quad (\text{A.4})$$

a Eq. (A.3) se torna

$$W_n(q, p) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \exp\left(-\xi^2 q^2 - \frac{p^2}{\hbar^2 \xi^2}\right) L_n\left(2\xi^2 q^2 + 2\frac{p^2}{\hbar^2 \xi^2}\right) \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B - Adimensionalização

Para adimensionalizar todas as grandezas físicas relevantes, basta multiplicá-las por uma combinação particular de m , ω e \hbar que as torne adimensionais. Assim, da condição de normalização $\int dq |\psi(q, t)|^2 = 1$, obtém-se que a função de onda é dada em unidades de

$$[\psi] = [q]^{-1/2} = \left[\frac{m\omega}{\hbar} \right]^{1/4}. \quad (\text{B.1})$$

Além disso, o expoente de $\exp(iS/\hbar)$ deve ser adimensional e, portanto,

$$[S] = [\hbar]. \quad (\text{B.2})$$

Por outro lado, da normalização do traço do operador densidade (cf. Eq. (2.11)) implica imediatamente que

$$[W] = [\hbar]^{-1}. \quad (\text{B.3})$$

As correntes de Wigner seguem imediatamente,

$$[\partial_q J_q] = \left[\frac{p}{m} W \right] = \left[\frac{\omega}{\hbar} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Pela equação da continuidade (cf. 2.21), decorre que

$$[\partial_p J_p] = [\partial_q J_q] = \left[\frac{\omega}{\hbar} \right]. \quad (\text{B.5})$$

Assim, as novas correntes adimensionais no espaço de fases podem ser relacionadas às antigas correntes com

$$\mathcal{W}(x, k; \tau) \equiv \hbar W(q, p; t) \quad (\text{B.6})$$

$$\omega \partial_x \mathcal{J}_x(x, k; \tau) \equiv \hbar \partial_q J_q(q, p; t) \quad (\text{B.7})$$

$$\omega \partial_k \mathcal{J}_k(x, k; \tau) \equiv \hbar \partial_p J_p(q, p; t), \quad (\text{B.8})$$

e a equação da continuidade pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \frac{\partial J_q}{\partial q} + \frac{\partial J_p}{\partial p} \equiv \frac{\omega}{\hbar} \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{J}_k}{\partial k} \right) = 0. \quad (\text{B.9})$$

para

$$\mathcal{W}(x, k; \tau) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(2iky) \phi(x-y; \tau) \phi^*(x+y; \tau), \quad \text{para } y = (m\omega\hbar^{-1})^{1/2} w, \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{J}_x(x, k; \tau) = k \mathcal{W}(x, k; \tau), \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{J}_k(x, k; \tau) = - \sum_{\eta=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^{2\eta} \frac{1}{(2\eta+1)!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{2\eta+1} \mathcal{U}(x) \right] \left(\frac{\partial}{\partial k} \right)^{2\eta} \mathcal{W}(x, k; \tau), \quad (\text{B.12})$$

Apêndice C - Fase quântica para o pacote *quasi*-gaussiano

Para o cálculo da fase para superposição

$$\mathcal{G}_\alpha(x, \tau) = \mathcal{N}\Theta(x)x^{\alpha+\frac{1}{2}}(1-\chi)^{-(1+\alpha)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right)x^2\right] \exp\left(\frac{-i\tau}{2}\right), \quad (\text{C.1})$$

com $\chi = \exp(-\zeta - i\tau)$, pode-se ignorar os fatores reais, pois eles são absorvidos pela densidade de probabilidade. Assim, a forma polar, $\mathcal{G}_\alpha = R_\alpha^{1/2} \exp(i\mathcal{S}_\alpha)$, pode ser obtida notando que

$$\exp\left[-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right)\right] = \exp\left[-\frac{x^2u}{2} - i\frac{x^2v}{2}\right] \quad (\text{C.2})$$

para

$$u(\tau) = \frac{\sinh(\zeta)}{\cosh(\zeta) - \cos(\tau)} \quad \text{e} \quad v(\tau) = -\frac{\sin(\tau)}{\cosh(\zeta) - \cos(\tau)}. \quad (\text{C.3})$$

Por simplicidade de notação, $u \equiv u(\tau)$ e $v \equiv v(\tau)$. O fator $(1-\chi)^{-(1+\alpha)}$ também deve ser colocado na forma polar, com

$$\left(\frac{1}{1-\chi}\right)^{1+\alpha} = \left(\frac{1+u+iv}{2}\right)^{1+\alpha}. \quad (\text{C.4})$$

O numerador pode ser escrito como $r \exp(i\theta)$ para $r = \sqrt{(1+u)^2 + v^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{v}{1+u}\right)$.

Por fim, coletando todas as exponenciais complexas,

$$\mathcal{S}_\alpha(x, \tau) = \arctan\left(\frac{v}{1+u}\right)(1+\alpha) - \frac{vx^2}{2} - \frac{\tau}{2}. \quad (\text{C.5})$$

Apêndice D - Pureza da função de Wigner termalizada

Para a pureza definida como

$$\mathcal{P}^\alpha(\beta) = 2\pi \int dx \int dk (\mathcal{W}^\alpha(x, k; \beta))^2, \quad (\text{D.1})$$

obtém-se (BERNARDINI; SILVA, 2020)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\alpha(\beta) &= \frac{8 \exp(2\alpha\beta\hbar\omega)}{\pi} \int_0^\infty dx \int_{-x}^{+x} dz \int_{-x}^{+x} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(2ik(y+z)) \times \\ &\quad [(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)]^{\frac{1}{2}} \exp[-\coth(\beta\hbar\omega)(2x^2 + y^2 + z^2)] \times \\ &\quad \mathcal{I}_\alpha\left(\frac{x^2 - y^2}{\sinh(\beta\hbar\omega)}\right) \mathcal{I}_\alpha\left(\frac{x^2 - z^2}{\sinh(\beta\hbar\omega)}\right) \\ &= 8 \exp(2\alpha\beta\hbar\omega) \int_0^\infty dx \int_{-x}^{+x} dz (x^2 - z^2) \exp[-2\coth(\beta\hbar\omega)(x^2 + z^2)] \mathcal{I}_\alpha^2\left(\frac{x^2 - z^2}{\sinh(\beta\hbar\omega)}\right) \\ &= 8 \exp(2\alpha\beta\hbar\omega) \int_{-1}^{+1} ds (1 - s^2) \int_0^\infty dx x^3 \exp[-2x^2 \coth(\beta\hbar\omega)(1 + s^2)] \mathcal{I}_\alpha^2\left(x^2 \frac{1 - s^2}{\sinh(\beta\hbar\omega)}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Com a mudança de variável $x' = x^2$, a integral em x torna-se

$$2^{-1} \int_0^\infty dx' x' \exp[-2x' \coth(\beta\hbar\omega)(1 + s^2)] \mathcal{I}_\alpha^2\left(x' \frac{1 - s^2}{\sinh(\beta\hbar\omega)}\right), \quad (\text{D.3})$$

a qual, para valores semi-inteiros de α , pode ser simplificada,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\alpha(\beta) &= \frac{1}{2^{2\alpha-1}\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha + 3/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} \exp(2\alpha\beta\hbar\omega) \tanh^2(\beta\hbar\omega) \operatorname{sech}^{2\alpha}(\beta\hbar\omega) \times \\ &\quad \int_{-1}^{+1} ds \frac{(1 - s^2)^{2\alpha+1}}{(1 + s^2)^{2\alpha+2}} {}_2\mathcal{F}_1\left[\alpha + 1/2, \alpha + 3/2, 2\alpha + 1, \left(\frac{1 - s^2}{1 + s^2} \operatorname{sech}(\beta\hbar\omega)\right)^2\right], \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

onde ${}_2\mathcal{F}_1[\dots]$ é a Função Hipergeométrica Ordinária, ou Função Hipergeométrica gaussiana, dada por (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014, p. 1010),

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha + 1/2)_k (\alpha + 3/2)_k}{(2\alpha + 1)_k} \frac{\left(\frac{1-s^2}{1+s^2} \operatorname{sech}(\beta\hbar\omega)\right)^{2k}}{k!}, \quad (\text{D.5})$$

onde

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{D.6})$$

é o símbolo de Pochhammer e $k! = \Gamma(k + 1)$ para k natural. Deste modo, a integral restante pode ser calculada,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} ds \frac{(1 - s^2)^{2\alpha+2k+1}}{(1 + s^2)^{2\alpha+2k+2}} &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2 + 2k + 2\alpha)}{\Gamma(5/2 + 2k + 2\alpha)} {}_2\mathcal{F}_1\left[1/2, 2 + 2k + 2\alpha, 5/2 + 2k + 2\alpha, -1\right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \alpha + k)}{2\Gamma(3/2 + \alpha + k)}, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

onde o teorema de Kummer foi utilizado. Ao notar que (para α semi-inteiro)

$$\Gamma(\alpha + k + 1) = \frac{\Gamma(2\alpha + 2k + 1)\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha+2k}\Gamma(\alpha + k + 1/2)},$$

o somatório na Eq. (D.5) é simplificado para

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)2^{2k}} \frac{\Gamma(2\alpha+2k+1)}{\Gamma(2\alpha+k+1)} &= {}_2\mathcal{F}_1 \left[\alpha + 1/2, \alpha + 1, 2\alpha + 1, z \right] \Big|_{z=\text{sech}^2(\alpha\beta\hbar\omega)} \\ &= \frac{2^{2\alpha} (1 + \tanh(\beta\hbar\omega))^{-2\alpha}}{\tanh(\beta\hbar\omega)}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

onde a seguinte propriedade foi utilizada (GESSEL; STANTON, 1982)

$${}_2\mathcal{F}_1 \left[\alpha + 1/2, \alpha + 1, 2\alpha + 1, 4y(1-y) \right] = \frac{1}{(1-y)^{2\alpha}(1-2y)}. \quad (\text{D.9})$$

A Eq. (D.8) pode ser reescrita como

$$\frac{2^{2\alpha} (\exp(\beta\hbar\omega) \cosh^{-1}(\beta\hbar\omega))^{-2\alpha}}{\tanh(\beta\hbar\omega)} = \frac{2^{2\alpha} \exp(-2\alpha \beta\hbar\omega) \cosh^{2\alpha}(\beta\hbar\omega)}{\tanh(\beta\hbar\omega)}. \quad (\text{D.10})$$

O resultado acima, juntamente com os termos independentes de k e s na Eq. (D.5) e as constantes multiplicativas na Eq. (D.4) resultam finalmente em (BERNARDINI; SILVA, 2020)

$$\mathcal{P}^\alpha(\beta) = \tanh(\beta\hbar\omega). \quad (\text{D.11})$$

Apêndice E - Equações de continuidade para pureza e entropia

Resultados extraídos de [Bernardini \(2018\)](#). Para a pureza definida como

$$\mathcal{P} = 2\pi \int_V dV \mathcal{W}^2, \quad (\text{E.1})$$

a sua taxa de variação é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{D\mathcal{P}}{D\tau} &= \frac{D}{D\tau} \left(\int_V dV \mathcal{W}^2 \right) \\ &= \int_V dV \left[\frac{D}{D\tau} \mathcal{W}^2 + \mathcal{W}^2 \nabla_\xi \cdot \mathbf{v}_{\xi(c)} \right] \\ &= \int_V dV \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{W}^2 + \nabla_\xi \cdot (\mathbf{v}_{\xi(c)} \mathcal{W}^2) \right] \\ &= - \int_V dV \left[\mathcal{W}^2 \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} + \nabla_\xi \cdot (\mathcal{J} \mathcal{W} - \mathbf{v}_{\xi(c)} \mathcal{W}^2) \right] \\ &= \int_V dV \mathcal{W}^2 \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} + \oint d\ell \mathcal{W} (\Delta \mathcal{J} \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde derivadas parciais são obtidas a partir da equação da continuidade, para uma velocidade \mathbf{w} . Para potenciais simétricos na posição, a função de Wigner terá paridade definida em k , e a integral de volume se anula em um intervalo simétrico (cf. Eq. 3.86). Ao identificar $V = V_c$, a taxa de produção de pureza através do volume clássica pode ser calculada com o teorema de Gauss,

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \mathcal{P}_{(c)} \Big|_{\tau=T} &= - \oint_c d\ell \mathcal{W} \Delta \mathcal{J} \cdot \mathbf{n} \\ &= - \int_0^T d\tau \mathcal{W}(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau) \Delta \mathcal{J}_k(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau) \frac{d}{d\tau} x_c(\tau), \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Semelhantemente, para a entropia de von Neumann,

$$S_{vN} = - \int_V dV \mathcal{W} \ln |\mathcal{W}|, \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{DS_{vN}}{D\tau} &= - \frac{D}{D\tau} \left(\int_V dV \mathcal{W} \ln(\mathcal{W}) \right) \\ &= - \int_V dV \left[\frac{D}{D\tau} (\mathcal{W} \ln(\mathcal{W})) + \mathcal{W} \ln(\mathcal{W}) \nabla_\xi \cdot \mathbf{v}_{\xi(c)} \right] \\ &= - \int_V dV \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathcal{W} \ln(\mathcal{W})) + \nabla_\xi \cdot (\mathbf{v}_{\xi(c)} \mathcal{W} \ln(\mathcal{W})) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} &= \int_V dV \left[\mathcal{W} \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} + \nabla_\xi \cdot (\mathcal{J} \ln(\mathcal{W}) - \mathbf{v}_{\xi(c)} \mathcal{W} \ln(\mathcal{W})) \right] \\ &= \int_V dV \mathcal{W} \nabla_\xi \cdot \mathbf{w} + \oint d\ell \ln(\mathcal{W}) (\Delta \mathcal{J} \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Novamente, com $V = V_c$,

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} S_{vN(c)} \Big|_{\tau=T} &= \oint_{\mathcal{C}} d\ell \ln(\mathcal{W}) (\Delta \mathcal{J} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \int_0^T d\tau \ln(\mathcal{W}(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau)) \Delta \mathcal{J}_k(x_c(\tau), k_c(\tau); \tau) \frac{d}{d\tau} x_c(\tau). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Referências Bibliográficas

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. 10. ed. Washington D.C.: US Government printing office, 1972. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, n. 55).

ALLORI, V. *Decoherence and the Classical Limit of Quantum Mechanics*. Tese (Doutorado) — Università degli Studi di Genova, Dipartimento di Fisica, Genova, 2001. 104f.

ALLORI, V.; DÜRR, D.; GOLDSTEIN, S.; ZANGHÌ, N. Seven steps towards the classical world. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, IOP Publishing, v. 4, n. 4, p. S482, 2002.

AMOSOV, G.; KORENNOY, Y. A.; MAN'KO, V. Description and measurement of observables in the optical tomographic probability representation of quantum mechanics. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 5, p. 052119, 2012.

ANDERSON, E. *The Problem of Time: Quantum Mechanics Versus General Relativity*. [S.l.]: Springer, 2017. (Fundamental Theories of Physics, v. 190).

BAGROV, V. G.; GITMAN, D. *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. (Mathematics and its applications - Soviet Series, v. 39).

BALLENTINE, L. E. Einstein's interpretation of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 40, n. 12, p. 1763–1771, 1972.

BALLENTINE, L. E. *Quantum Mechanics: a Modern Development*. [Hackensack]: World Scientific Publishing Company, 1998.

BERNARDINI, A. E. Testing nonclassicality with exact wigner currents for an anharmonic quantum system. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 5, p. 052128, 2018.

BERNARDINI, A. E.; BERTOLAMI, O. Non-classicality from the phase-space flow analysis of the weyl-wigner quantum mechanics. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 120, n. 2, p. 20002, 2017.

BERNARDINI, A. E.; BERTOLAMI, O. Phase-space continuity equations for quantum decoherence, purity, von neumann and rényi entropies. *arXiv preprint arXiv:1901.01900*, 2019.

BERNARDINI, A. E.; LEAL, P.; BERTOLAMI, O. Quantum to classical transition in the hořava-lifshitz quantum cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2018, n. 02, p. 025, 2018.

- BERNARDINI, A. E.; SILVA, C. F. Anharmonic effects on phase-space quantum profiles: an exact approach. *arXiv preprint arXiv:2001.03785*, 2020.
- BERTOLAMI, O.; ZARRO, C. A. Hořava-lifshitz quantum cosmology. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 4, p. 044042, 2011.
- BITTENCOURT, V. A.; BERNARDINI, A. E.; BLASONE, M. Global dirac bispinor entanglement under lorentz boosts. *Physical Review A*, APS, v. 97, n. 3, p. 032106, 2018.
- BLASONE, M.; BITTENCOURT, V. A.; BERNARDINI, A. E. Helicity rotation induced by lorentz boosts. *International Journal of Quantum Information*, World Scientific, v. 17, n. 08, p. 1941005, 2019.
- BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. i. *Physical review*, APS, v. 85, n. 2, p. 166, 1952.
- BRANDÃO FILHO, P. C. A. *Singularidades de fase em luz clássica*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin, Campinas, 2016. 100f.
- BURGHARDT, I.; MØLLER, K. B. Quantum dynamics for dissipative systems: A hydrodynamic perspective. *The Journal of chemical physics*, AIP, v. 117, n. 16, p. 7409–7425, 2002.
- BURGHARDT, I.; MØLLER, K. B.; PARLANT, G.; CEDERBAUM, L. S.; BITTNER, E. R. Quantum hydrodynamics: Mixed states, dissipation, and a new hybrid quantum-classical approach. *International journal of quantum chemistry*, Wiley Online Library, v. 100, n. 6, p. 1153–1162, 2004.
- CARDOSO, F. R. *Superposição de estados comprimidos de dois modos e aplicações em informação quântica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. 109f.
- CASE, W. B. Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 76, n. 10, p. 937–946, 2008.
- CHAVANIS, P.-H. Cosmology with a stiff matter era. *Physical Review D*, APS, v. 92, n. 10, p. 103004, 2015.
- COLOMÉS, E.; ZHAN, Z.; ORIOLS, X. Comparing wigner, husimi and bohmian distributions: which one is a true probability distribution in phase space? *Journal of Computational Electronics*, Springer, v. 14, n. 4, p. 894–906, 2015.
- CURTRIGHT, T.; FAIRLIE, D.; ZACHOS, C. Features of time-independent Wigner functions. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 2, p. 025002, 1998.
- DENNIS, M. R.; O’HOLLERAN, K.; PADGETT, M. J. Singular optics: optical vortices and polarization singularities. In: WOLF, E. (Ed.). *Progress in Optics*. 1. ed. [S.l.]: Elsevier, 2009. v. 53, cap. 5, p. 293–363.
- DESER, S. Infinities in quantum gravities. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 9, n. 3-5, p. 299–306, 2000.
- DODELSON, S. *Modern Cosmology*. Amsterdam: Elsevier, 2003.

DÜRR, D.; TEUFEL, S. *Bohmian Mechanics: The Physics and Mathematics of Quantum Theory*. Dordrecht: Elsevier, 2009.

DUTRA, A. d. S. *Cálculo de propagadores na mecânica quântica não relativística*. Dissertação (Mestrado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1988. 94f.

EFTEKHARZADEH, A.; HU, B. The classical and commutative limits of noncommutative quantum mechanics: a superstar* Wigner-Moyal equation. *Brazilian journal of physics*, SciELO Brasil, v. 35, n. 2A, p. 333–342, 2005.

EINSTEIN, A. Einstein's proposal of the photon concept: a translation of the annalen der physik paper of 1905. *Ann. Physik*, v. 17, p. 132, 1905.

FERRARO, A.; PARIS, M. G. Nonclassicality criteria from phase-space representations and information-theoretical constraints are maximally inequivalent. *Physical review letters*, APS, v. 108, n. 26, p. 260403, 2012.

FEYNMAN, R. P. *Statistical Mechanics: A Set of Lectures*. 7. ed. Reading: The Benjamin Cummings Publishing Company, 1982. (Frontiers in Physics Series).

FRACALOSSO, R. *Modelos cosmológicos quânticos com fluido de matéria rígida e outros graus de liberdade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Física, Vitória, 2018. 96f.

GAO, J.-H.; LIANG, Z.-T.; WANG, Q.; WANG, X.-N. Disentangling covariant wigner functions for chiral fermions. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 3, p. 036019, 2018.

GESSEL, I.; STANTON, D. Strange evaluations of hypergeometric series. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 13, n. 2, p. 295–308, 1982.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: AAPT, 2002.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. 7. ed. Amsterdam: Academic press, 2014.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 1. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1994.

HILLERY, M.; O'CONNELL, R. F.; SCULLY, M. O.; WIGNER, E. P. Distribution functions in physics: fundamentals. *Physics reports*, Elsevier, v. 106, n. 3, p. 121–167, 1984.

HOLLAND, P. R. *The Quantum Theory of Motion: an Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.

HOŘAVA, P. Quantum gravity at a lifshitz point. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 8, p. 084008, 2009.

HOYOS, C.; KIM, B. S.; OZ, Y. Lifshitz hydrodynamics. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2013, n. 11, p. 145, 2013.

HU, B.; ZHANG, Y. Squeezed states and uncertainty relation at finite temperature. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 8, n. 37, p. 3575–3584, 1993.

- KAKOFENGITIS, D.; OLIVA, M.; STEUERNAGEL, O. Wigner's representation of quantum mechanics in integral form and its applications. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 2, p. 022127, 2017.
- KAKOFENGITIS, D.; STEUERNAGEL, O. The quantum liouville equation is non-liouvillian. *arXiv preprint arXiv:1410.4367*, 2014.
- KENFACK, A.; ŻYCZKOWSKI, K. Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, IOP Publishing, v. 6, n. 10, p. 396, 2004.
- KIRITSIS, E.; KOFINAS, G. Hořava–lifshitz cosmology. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 821, n. 3, p. 467–480, 2009.
- KOLB, E. W.; TURNER, M. S. *The Early Universe*. Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company, 1990. Frontiers in Physics Series, v. 69.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Statistical Physics Part 2: Theory of the Condensed State*. 2. ed. Oxford: Pergamon, 1980. (Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics, v.9).
- LEMOIS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Livraria da Física, 2007.
- LITIM, D. F. Renormalization group and the planck scale. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 369, n. 1946, p. 2759–2778, 2011.
- MADELUNG, E. Quantentheorie in hydrodynamischer form. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Springer, v. 40, n. 3, p. 322–326, 1927.
- MAEDA, K.; MISONOH, Y.; KOBAYASHI, T. Oscillating universe in hořava-lifshitz gravity. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 6, p. 064024, 2010.
- MAHLER, D. H.; ROZEMA, L.; FISHER, K.; VERMEYDEN, L.; RESCH, K. J.; WISEMAN, H. M.; STEINBERG, A. Experimental nonlocal and surreal bohmian trajectories. *Science advances*, American Association for the Advancement of Science, v. 2, n. 2, p. e1501466, 2016.
- MANCINI, S.; MAN'KO, V.; TOMBESI, P. Symplectic tomography as classical approach to quantum systems. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 213, n. 1-2, p. 1–6, 1996.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1973. (Physics Series, v. 1).
- MITRA, A. N.; RAMANATHAN, R. On simulating liouvillian flow from quantum mechanics via wigner functions. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 39, n. 9, p. 4492–4498, 1998.
- MOKARZEL, S. G. *Decoerência e dissipação de sistemas quânticos: Técnicas e aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2000. 103f.
- MOORE, T. A. *A General Relativity Workbook*. Mill Valley: University Science Books, 2013.

- ODASHIMA, M. M.; PRADO, B. G.; VERNEK, E. Pedagogical introduction to equilibrium green's functions: condensed-matter examples with numerical implementations. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 39, n. 1, 2017.
- OLIVEIRA-NETO, G.; MARTINS, L.; MONERAT, G.; SILVA, E. C. De broglie–bohm interpretation of a hořava–lifshitz quantum cosmology model. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 33, n. 02, p. 1850014, 2018.
- OLIVEIRA-NETO, G.; MARTINS, L.; MONERAT, G.; SILVA, E. Quantum cosmology of a hořava–lifshitz model coupled to radiation. *arXiv preprint arXiv:1901.04640*, 2019.
- OLVER, F.; LOZIER, D.; BOISVERT, R.; CLARK, C. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- PAN, A. K. Understanding the spreading of a gaussian wave packet using the bohmian machinery. *Pramana–J. Phys*, v. 74, n. 6, 2010.
- PEAK, D.; INOMATA, A. Summation over feynman histories in polar coordinates. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 10, n. 8, p. 1422–1428, 1969.
- PERDIGÃO, M. C. *Riemannian Geometry*. 2. ed. Boston: Birkhäuser, 1993. (Mathematics Series).
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. 1. ed. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- PINTO-NETO, N.; PANTOJA, D. M. Bohmian quantization of the big-brake singularity. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 23, n. 06, p. 1450054, 2014.
- PLANCK, M. On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Annalen der physik*, v. 4, n. 553, p. 1, 1901.
- ROVELLI, C. The strange equation of quantum gravity. *arXiv preprint arXiv:1506.00927*, 2015.
- SANZ, A.; MIRET-ARTÉS, S. Quantum phase analysis with quantum trajectories: A step towards the creation of a bohmian thinking. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 80, n. 6, p. 525–533, 2012.
- SHENG, X.-l.; RISCHKE, D. H.; VASAK, D.; WANG, Q. Wigner functions for fermions in strong magnetic fields. *The European Physical Journal A*, Springer, v. 54, n. 2, p. 21, 2018.
- SOTIRIOU, T. P. Hořava–lifshitz gravity: a status report. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2011. v. 283, n. 1, p. 012034.
- SOTIRIOU, T. P.; VISSER, M.; WEINFURTNER, S. Quantum gravity without lorentz invariance. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2009, n. 10, p. 033, 2009.
- STAMATESCU, I.-O.; SEILER, E. *Approaches to Fundamental Physics: An Assessment of Current Theoretical Ideas*. Berlin: Springer, 2007. (Lecture Notes in Physics, v. 721).

- STEUERNAGEL, O.; KAKOFENGITIS, D.; RITTER, G. Wigner flow reveals topological order in quantum phase space dynamics. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 3, p. 030401, 2013.
- STYER, D. F.; BALKIN, M. S.; BECKER, K. M.; BURNS, M. R.; DUDLEY, C. E.; FORTH, S. T.; GAUMER, J. S.; KRAMER, M. A.; OERTEL, D. C.; PARK, L. H. *et al.* Nine formulations of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 70, n. 3, p. 288–297, 2002.
- TEICH, M. C.; SALEH, B. E. Squeezed state of light. *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, IOP Publishing, v. 1, n. 2, p. 153, 1989.
- VANNER, M. R.; PIKOVSKI, I.; KIM, M. Towards optomechanical quantum state reconstruction of mechanical motion. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 527, n. 1-2, p. 15–26, 2015.
- VASAK, D.; GYULASSY, M.; ELZE, H.-T. Quantum transport theory for abelian plasmas. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 173, n. 2, p. 462–492, 1987.
- WANG, J.; LI, K.; DULAT, S. Wigner functions for harmonic oscillator in noncommutative phase space. *arXiv preprint arXiv:0908.1703*, 2009.
- WEINBERG, S. Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. In: HAWKING, S. W.; ISREAL, W. (Ed.). *General Relativity: An Einstein centenary survey*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. cap. 16.
- WEYL, H. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. [New York]: Dover Publications, 1931. p. 275.
- WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, APS, v. 40, n. 5, p. 749, 1932.
- WU, Y.; HOU, D.; REN, H.-c. The subtleties of the wigner function formulation of the chiral magnetic effect. *arXiv preprint arXiv:1601.06520*, 2016.
- ZUREK, W. H. Decoherence and the transition from quantum to classical—revisited. *arXiv preprint quant-ph/0306072*, 2003.