

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rafaela Soares de Carvalho

Equisingularidades de funções definidas em ICIS e IDS

São Carlos - SP
JANEIRO DE 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equisingularidades de funções definidas em ICIS e IDS

Rafaela Soares de Carvalho

BOLSISTA CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Bruna Oréfica Okamoto

Co-orientador: Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Soares de Carvalho, Rafaela

Equisingularidades de funções definidas em ICIS e IDS / Rafaela Soares de Carvalho. -- 2020.

89 f. : 30 cm.

Tese (doutorado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador: Bruna Oréfice Okamoto

Banca examinadora: João Nivaldo Tomazella, Nivaldo de Góes Grulha Júnior, Marcelo José Saia, Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

Bibliografia

1. Singularidade determinantal isolada. 2. Interseção completa com singularidade isolada. 3. Whitney equisingularidade. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Rafaela Soares de Carvalho, realizada em 10/03/2020:

Prof.ª. Dra. Bruna Oréfice Okamoto
UFSCar

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
UFSCar

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
USP

Prof. Dr. Marcelo José Saia
ICMC/USP

Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP

Aos meus pais, Sueli e Joaquim,
à minha avó, Adélia (in memoriam),
ao meu primeiro professor de
matemática, Edson Tresso e
ao meu amigo Allan (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir alcançar mais este sonho.

Aos meus amados pais, por estarem sempre ao meu lado me incentivando a lutar pela realização dos meus objetivos. Muito obrigada por todas as orações e carinho que me disponibilizaram. Agradeço também toda a minha família, que sempre esteve na torcida por mim. Aos meus avós (in memoriam), em especial a minha querida avó, Adélia, que infelizmente veio a falecer no meu primeiro dia no doutorado.

À minha orientadora Bruna e ao meu co-orientador Tomazella, que sempre estiveram dispostos a me ajudarem com muita atenção, dedicação, paciência e sabedoria. Muito obrigada por terem me aceitado como orientanda de vocês e por tudo o que fizeram por mim, pela amizade e por todos os valiosos ensinamentos durante esses anos de doutorado. Vocês sempre serão inspiração para mim, não só por serem excelentes matemáticos mas também pela humildade e bondade que vocês possuem. Só tenho a agradecer a Deus pela oportunidade de trabalhar com vocês.

À professora Michelle, que me orientou durante minha graduação e mestrado e despertou em mim o encantamento por Teoria de Singularidades. Muito obrigada por tudo o que fez por mim.

Ao professor Juan, por ter aceitado trabalhar comigo no doutorado, por toda a sua atenção e por todos os ótimos ensinamentos.

Aos professores Gaffney, Aldicio e Victor Hugo, pela enorme atenção, prontidão e dedicação na resolução de minhas dúvidas.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar.

Ao Grupo de Singularidades. Em especial agradeço à professora Cidinha e ao professor Saia, por toda a atenção e sugestões durante os eventos. Agradeço também o professor Nivaldo, pela amizade e pela confiança em querer trabalhar comigo no futuro.

À Jessica, que se tornou uma irmã para mim durante o doutorado. Agradeço por todo cuidado e apoio nessa fase que moramos juntas. Aproveito também para agradecer

sua família (Zilda, Romildo e Deolinda), que se tornou uma segunda família para mim. Muito obrigada por todo carinho, atenção e torcida. Eu amo muito vocês!

Ao Eric, pela amizade sincera, por sempre estar ao meu lado pronto pra me ouvir e ajudar. Sua amizade é um grande presente em minha vida.

Aos guris e gurias: Rodrigo, Ronaldo, Marcos, Givan, Lauren e Fernanda, por toda a amizade, sábios conselhos, preocupação e suporte sempre que preciso. Muito obrigada também por todos os momentos tão felizes que passamos juntos.

À Bárbara e à Daiane, irmãs acadêmicas que se tornaram irmãs para a vida, pessoas maravilhosas que me ajudam e incentivam sempre.

Ao Wagner Sgobbi por me ajudar em minhas dúvidas nas disciplinas sempre que precisei. À Maria Carolina pelas conversas e conselhos. Ao Dalton, por todo o suporte enquanto fomos monitores de Álgebra. A todos os demais amigos da pós-graduação que são muito importantes para mim, em especial: Karina, Bruno, Melges, Maykel, Mariane, Amanda, Renata, Renato Diniz, Fernando Gasparotto, Vinicius Rocha, Osmar, Thales, Marco, Diana, Patrícia, Thaís, Renan, Carlos, Cristiano, Renato Monteiro, André, Devis e Dayana. Ao pessoal que participou das minhas monitorias e tornou essa fase do doutorado muito feliz, em especial: Fran, Gui Messias, Kairo, Vinicius Magrini, Guilherme Falsarella, Iana, Elionai e Lia.

Aos professores de Inglês que tive: Victor Zupirolli, Matheus, Victor Lemes. Em especial agradeço ao meu atual professor de Inglês, Felipe Menezes, por toda a ajuda, paciência e amizade.

A todos os funcionários e professores da escola João Deoclécio, na qual estudei o Ensino Fundamental e Médio. A todos os professores do IBILCE, com quem eu tive aula e que contribuíram para a minha formação. Cada um de vocês teve um papel fundamental na minha vida e na escolha dos meus caminhos.

Ao Edson Tresso, meu primeiro professor de matemática. Obrigada pelo incentivo, paciência, conselhos e ensinamentos.

Ao Roberto Alvarenga, que de monitor de Cálculo I se tornou um dos amigos que mais me ajudou tanto na matemática quanto na vida. Agradeço a confiança em ter me indicado para trabalhar com a professora Michelle em minha graduação. Ao Glalco, por sempre dizer as palavras certas na hora certa. Obrigada por estar presente em cada momento. Ao Welington Martins, por todos os sábios conselhos, amizade e apoio.

À Tamara, por toda a amizade desde a infância. Juntas construímos nosso amor

pela matemática. À Dasiane, uma das melhores pessoas que eu conheço, que mesmo já tendo passado por tantos momentos difíceis continua com sua simpatia, doçura e bondade contagiantes. À Laura, que é uma amiga super especial e que sempre está comigo me ajudando em tudo, independentemente da distância. Em especial, muito obrigada por toda a sua ajuda durante a minha graduação e mestrado. À Hellen, por ser tão maravilhosa e atenciosa comigo e por sempre conseguir me acalmar com suas sábias palavras. À Amanda Santana e sua família, por tanta amizade, atenção, carinho e cuidado comigo todos os dias.

Aos meus queridos amigos que conheci no IBILCE, mesmo longe eu sei o quanto vocês torcem por mim. Em especial: Vinícius Vitória, Carlos Vicente, Amanda Monteiro, Marcelo Bongarti, Dani, Taísa, Plínio, Yagor, Ronan, Ana Lívia, Otávio, Bononi, Rafael Paulino, Alisson, Jarne, Willian Nunes, Heloísa, Junior, Luís Fernando, Erica, Carol Signorini, Kumon, Mayara Braz, Daniel Vieira, Fred, Raul, Paraguai, Amanda Souza, Juliana Honda, Letícia Sanches, Pedro Benedini, Liliam, Alex Paulo, Contreras, Luan, Rafa Martins, Rick, Jamielli, Janaína, Amanda Lima, Rodiak, Alex Honorato, José Antônio, Sérgio, Zanon, Lucas Santos, Willian Mazoni, Paulo, Guilherme, Robson e Dim.

Ao pessoal do grupo de caronas de São Carlos para Rio Preto, que tornou cada viagem de volta pra casa dos meus pais mais fácil, rápida e agradável. Em especial aos que acabaram se tornando meus amigos: Eduardo Almeida, Lúcio Felipe, Aline Zuim, Gabrielle Pimentel, Rafael Ferreira, Luan Leite, Rafael Nonato, Júlia Nonato e Gabriel. Foi muito bom viajar na companhia de vocês durante esses anos de doutorado.

Aos demais amigos que são muito importantes para mim, em especial: Pollyane Vieira, Castelo Branco, Lucas Mioranci, Mary Monteiro, Denis Vinha, Sara Vinha, Odair Goes, Cláudia Frizzarini, Flávia Adão, Natiele, Junin, Alex Juara, Renan Liberato, Rapha Vinha, Maisa, Maykon, Lucas Oliveira, Quézia, Viviane Ronda, Simone Godarelli, Kryssia, Bruno Santos, Robert Crepaldi, Renan Bruzadin, Fernando Dias, Caio Samelo, Jaqueline Samelo, Thíssea Samelo e Jô.

Ao meu amigo Allan Dias (in memoriam), que estará sempre presente em minhas orações. Ao Rodrigo Maturana e à Cassia Sales, que me ajudaram com muita atenção nesse momento triste de partida do Allan.

Aos meus bichinhos de estimação, por me distraírem e animarem em todos os momentos e por tornarem a minha vida muito mais feliz e leve.

À Capes, pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

Estudamos a equisingularidade de uma família de germes de funções $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$, onde $\{(X_t, 0)\}$ é uma família de singularidades determinantis isoladas de dimensão d . Definimos a $(d - 1)$ -ésima multiplicidade polar da fibra $X_t \cap f_t^{-1}(0)$, $m_{d-1}(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$, e apresentamos resultados relacionando as constâncias de $m_k(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$ para $k = 0, \dots, d - 1$ e $m_i(X_t, 0)$ para $i = 0, \dots, d$ com a constância do número de Milnor de f_t e à Whitney equisingularidade das famílias $\{(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)\}$ e $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$.

No caso particular em que $\{(X_t, 0)\}$ é uma família de interseções completas com singularidades isoladas fornecemos uma condição para garantir as condições de Whitney em função do fecho integral do ideal que define o conjunto singular de cada membro da família $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$. Relacionamos também a constância do número de Milnor de f_t com o fecho integral estrito do módulo formado pelas derivadas parciais da aplicação que define $X_t \cap f_t^{-1}(0)$.

Abstract

We study the equisingularity of a family of function germs $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$, where $\{(X_t, 0)\}$ is a family of d -dimensional isolated determinantal singularity. We define the $(d - 1)$ th polar multiplicity of the fibers $X_t \cap f_t^{-1}(0)$, $m_{d-1}(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$, and we present results relating the constancy of $m_k(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$ for $k = 0, \dots, d - 1$ and $m_i(X_t, 0)$ for $i = 0, \dots, d$ with the constancy of the Milnor number of f_t and the Whitney equisingularity of the families $\{(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)\}$ and $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$.

In the particular case where $\{(X_t, 0)\}$ is a family of isolated complete intersection singularity we provide a condition to ensure the Whitney conditions in terms of the integral closure of the ideal defining the singular set of each member of family $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$. We also relate the constancy of the Milnor number of f_t with the strict integral closure of the module formed by the partial derivatives of the application that defines $X_t \cap f_t^{-1}(0)$.

Sumário

Introdução	1
1 Pré-requisitos	4
1.1 Álgebra Comutativa	4
1.2 Teoria de Singularidades	7
1.3 Aplicações finitas e semicontínuas superiores	8
1.4 Germes de Variedades	9
1.4.1 Interseções completas e singularidades determinantis	10
1.5 Fecho integral de ideal e módulo	11
1.6 Whitney equisingularidade	13
1.7 Número de Bruce-Roberts	16
1.8 Transversalidade	17
1.9 Obstrução de Euler e característica de Euler	18
2 Equisingularidade de germes de funções em uma IDS	20
2.1 Conjuntos singulares	20
2.2 Equisingularidades de famílias em IDS	24
3 Deformações de funções sobre ICIS	48
3.1 Fecho integral de um ideal e condições de Whitney	52
3.1.1 Deformando apenas a função	53
3.1.2 Deformando a variedade e a função	59
3.2 Fecho integral de um módulo e número de Milnor constante	68
4 Fecho integral através do Poliedro de Newton	71
4.1 Poliedro de Newton	71

4.2 Poliedro de Newton e deformação da função	75
4.3 Poliedro de Newton e deformação da variedade e da função	79
Referências Bibliográficas	85

Introdução

Em Teoria de Singularidades, muitos autores estudam a equisingularidade de determinadas famílias. Por exemplo, Zariski em [55] prova que uma família de curvas planas é Whitney equisingular se, e somente se, seu número de Milnor é constante. Mas isso não é verdade para famílias de hipersuperfícies de dimensão $d \geq 2$ (ver [7]), pois Briançon e Speder dão o célebre exemplo de uma família topologicamente trivial (número de Milnor constante) que não é Whitney equisingular. Teissier em [53] mostra que uma família de hipersuperfícies de dimensão d é Whitney equisingular se, e somente se, a sequência μ^* da família é constante, onde $\mu^* = (\mu^{(N+1)}, \dots, \mu^{(1)}, \mu^{(0)})$. Nesta direção, consideramos as multiplicidades polares, $m_i(X_t, 0)$, com $i = 0, \dots, d-1$, que são definidas para uma variedade qualquer $(X, 0)$ de dimensão d . Gaffney em [17] define a d -ésima multiplicidade polar, $m_d(X_t, 0)$, para ICIS e prova que uma família de ICIS $\{(X_t, 0)\}$ de dimensão d é Whitney equisingular se, e somente se, $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, são constantes. Para uma família de IDS $\{(X_t, 0)\}$ de dimensão d , Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella em [45] definem $m_d(X_t, 0)$ e, em [47], generalizam este resultado de Gaffney, mais precisamente eles provam que uma família boa $\{(X_t, 0)\}$ de IDS de dimensão d é Whitney equisingular se, e somente se, todas as multiplicidades $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, são constantes. Aqui, definimos a $(d-1)$ -ésima multiplicidade polar da fibra de um germe de função, $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, com singularidade isolada definido em uma IDS, $m_{d-1}(X \cap f^{-1}(0), 0)$ (ver Definição 2.2.17). Isto feito relacionamos, inspirados nos resultados supracitados a constância de tal multiplicidade à equisingularidade em famílias (ver Teoremas 2.2.23 e 2.2.24).

Neste trabalho estudamos a Whitney equisingularidade de famílias de funções definidas sobre variedades analíticas. Mais especificamente, no capítulo 1, é apresentada uma revisão dos principais tópicos a serem utilizados.

No capítulo 2, dadas $(X, 0)$ uma IDS de dimensão d definida por um germe de aplicação $\psi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função com singularidade isolada,

consideramos $\Psi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ uma deformação determinantal de $(X, 0)$ e

$$\begin{aligned} F: (\mathcal{X}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) = (t, f_t(x)) \end{aligned}$$

um desdobramento de f . Generalizando resultados de [45] definimos $m_{d-1}(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$ (ver Definição 2.2.17) e graças a isso obtemos uma generalização de resultados de [47], provados para a família de IDS $\{(X_t, 0)\}$, para a família $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$. Mais precisamente, no Corolário 2.2.20, provamos que se $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, e $m_k(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$, $k = 0, \dots, d-1$ são constantes, então F é μ -constante, onde μ é o número de Milnor definido em [45]. Se, além disso, a família $\{(X_t, 0)\}$ é boa, então F é Whitney equisingular (ver Teorema 2.2.24). Estes resultados podem ser encontrados no preprint [12].

Dada $f: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada, no capítulo 3, nos restringimos ao caso particular em que $(X, 0)$ é uma ICIS. Sejam $F: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação de f e $f_t: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ o germe definido por $f_t(x) = F(t, x)$. Se $N \neq 3$, a família f_t tem tipo topológico constante se, e somente se, seu número de Milnor é constante (ver [33], [54]). Para $N = 3$, isso ainda é um problema aberto. Greuel em [25, Teorema 1.1] caracteriza a constância do número de Milnor de F provando que as seguintes afirmações são equivalentes

- (1) F é μ -constante;
- (2) Para toda curva holomorfa $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$

$$\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) > \inf \left\{ \vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \circ \gamma \right) \mid i = 1, \dots, N \right\},$$

onde ϑ denota a valorização usual da curva complexa;

- (3) Mesma condição de (2) com “ $>$ ” substituído por “ \geq ”;

- (4) $\frac{\partial F}{\partial t} \in \bar{J}$, onde \bar{J} denota o fecho integral do ideal Jacobiano $J = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right\rangle$

como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} ;

- (5) $\frac{\partial F}{\partial t} \in \sqrt{J}$, onde \sqrt{J} denota o radical de J como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} ;

- (6) $V(J) = \{(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \mid \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x) = 0, i = 1, \dots, N\} = \mathbb{C} \times \{0\}$ próximo de

$(0, 0)$.

Inspirados por esse resultado, no capítulo 3, estabelecemos versões do teorema de Greuel para $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada,

onde $(X, 0)$ é uma ICIS. Esse estudo pode ser realizado de duas maneiras, a primeira delas deformando apenas a função f e a segunda deformando também a ICIS $(X, 0)$. Os resultados dessa primeira parte podem ser encontrados no artigo [11] e o artigo com os resultados da segunda parte está em preparação. Em ambos os casos também exibimos condições para a Whitney equisingularidade dos pares em função do fecho integral.

No capítulo 4, revisamos a noção de Poliedro de Newton e a relacionamos com fecho integral e aplicamos ao nosso contexto.

Pré-requisitos

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados que aparecem no decorrer do trabalho com o intuito de facilitar a compreensão dos próximos capítulos. Para a parte algébrica indicamos [4]. Mais detalhes sobre Teoria de Singularidades podem ser vistos em [22], [37] e [40]. Os conceitos de fecho integral de ideal e módulo são ferramentas bastante exploradas por Gaffney em [16] e [17]. Conceitos importantes sobre a teoria de Whitney equisingularidade podem ser vistos em [23] e [38]. Sobre o Número de Bruce-Roberts indicamos [9]. Já para a parte de Transversalidade sugerimos [27]. Por fim, como referência básica para a parte de obstrução de Euler indicamos [6].

1.1 Álgebra Comutativa

Nesta seção abordamos conceitos importantes de Álgebra Comutativa com o objetivo de fixar notações.

Seja R um anel comutativo com unidade.

Definição 1.1.1. *Um R -módulo é um par composto por um grupo abeliano M e uma aplicação*

$$\begin{aligned} D: R \times M &\rightarrow M \\ (a, x) &\mapsto ax, \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $a(x + y) = ax + ay$;
- (ii) $(a + b)x = ax + bx$;
- (iii) $(ab)x = a(bx)$;
- (iv) $1x = x$, com $a, b \in R$ e $x, y \in M$.

Por simplicidade, o R -módulo (M, D) será denotado simplesmente por M_R e quando não houver risco de confusão sobre qual anel estamos trabalhando o denotamos por M .

Como exemplo, todo ideal de R é um R -módulo.

Definição 1.1.2. Dizemos que $N \subset M$ é um **submódulo** de M se N é um subgrupo e é fechado com respeito a multiplicação por elementos de R .

Definição 1.1.3. Um R -módulo M é **finitamente gerado** se existem m_1, \dots, m_n em M tais que $M = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \cdot m_i \mid r_i \in R, \forall i = 1, \dots, n \right\}$. Neste caso, denotamos por $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle R$. Se não houver risco de confusão sobre qual anel estamos trabalhando denotamos simplesmente por $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$.

Agora, vamos definir alguns anéis especiais.

Definição 1.1.4. Chamamos $x \in R$ de **nilpotente** se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x^k = 0$. Quando R não possuir elementos nilpotentes dizemos que R é **reduzido**.

Chamamos **cadeia de submódulos** de um módulo M uma sequência (M_i) de submódulos de M , onde $i = 1, \dots, r$, tal que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = \{0\}.$$

Neste caso, r é chamado de **longitude** (ou **comprimento**) da cadeia.

Uma cadeia de submódulos $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_r = \{0\}$ tal que entre M_n e M_{n+1} não existe nenhum R -submódulo de M para $n = 0, \dots, r-1$, recebe o nome de **seção em série** de M .

A longitude (ou comprimento) de uma seção em série de M é chamada de **longitude** (ou **comprimento**) de M , o qual é denotado por $l(M)$. Caso M não tenha uma seção em série, $l(M) = \infty$.

Definição 1.1.5. Seja I um ideal \mathcal{M} -primário. Definimos a **multiplicidade de Samuel** de I , a qual denotamos por $e(I, R)$, da seguinte forma:

$$e(I, R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d!}{n^d} l(R/I^n),$$

onde $d = \dim(R)$.

Outra dimensão importante que descrevemos na sequência é a dimensão de Krull.

Definição 1.1.6. *Seja M um R -módulo finitamente gerado. O conjunto anulador de M é definido por*

$$\text{Ann}_R(M) := \{a \in R \mid aM = 0\}.$$

Definição 1.1.7. *A dimensão de Krull de um anel noetheriano R , a qual denotamos por $\dim(R)$, é definida por*

$$\dim(R) := \sup\{d \mid R \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_d, \text{ onde } I_i \subset R \text{ é primo}\}.$$

A dimensão de Krull de um R -módulo finitamente gerado M , a qual denotamos por $\dim(M)$, é definida por

$$\dim(M) := \dim\left(\frac{R}{\text{Ann}_R(M)}\right).$$

Seja R um anel local com \mathcal{M} seu ideal maximal. Se $\dim(R) = \dim_{\frac{R}{\mathcal{M}}}\left(\frac{M}{\mathcal{M}M}\right)$, então R é dito **regular**.

Definição 1.1.8. *Chamamos $r \in R$ de elemento M -regular se $rm \neq 0$ para todo $m \neq 0$ em M .*

Uma sequência r_1, \dots, r_n de elementos de R é dita uma M -sequência, ou uma sequência M -regular, se satisfaz

- (i) r_1 é M -regular, r_2 é $\frac{M}{r_1M}$ -regular, \dots , r_n é $\frac{M}{\sum_{i=1}^{n-1} r_i M}$ -regular;
- (ii) $\frac{M}{\sum_{i=1}^n r_i M} \neq 0$.

Dizemos que r_1, \dots, r_n é uma M -sequência maximal em I se r_1, \dots, r_n é uma M -sequência mas dado $p \in I$, onde I é um ideal de R , r_1, \dots, r_n, p não é uma M -sequência.

Definição 1.1.9. *Seja I ideal de R , definimos a I -profundidade de M , a qual denotamos por $\text{depth}(I, M)$, como sendo o número de elementos de uma M -sequência maximal em I .*

Dado R um anel local noetheriano cujo ideal maximal é \mathcal{M} denotamos simplesmente por $\text{depth}(M)$ a \mathcal{M} -profundidade de M .

No que segue seja R um anel local noetheriano com ideal maximal \mathcal{M} .

Definição 1.1.10. Consideramos M um R -módulo finitamente gerado. Chamamos M de um **módulo Cohen-Macaulay** se $M \neq 0$ e $\text{depth}(M) = \dim M$ ou se $M = 0$. Dizemos que R é um **anel Cohen-Macaulay** se R é Cohen-Macaulay como um R -módulo.

Teorema 1.1.11. [13] Seja R um anel noetheriano de dimensão d . Seja U uma matriz $p \times q$ com entradas em R e I_r o ideal gerado pelos menores de ordem r de U . Então

$$(i) \dim(R/I_r) \geq d - (p - r + 1)(q - r + 1);$$

(ii) se R é Cohen-Macaulay e $\dim(R/I_r) = d - (p - r + 1)(q - r + 1)$, então o anel R/I_r é Cohen-Macaulay.

1.2 Teoria de Singularidades

Sejam $f_1, f_2: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$ aplicações holomorfas e $x \in \mathbb{C}^N$. Consideramos a seguinte relação de equivalência: f_1 e f_2 são equivalentes em x se existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^N$ com $x \in U$ tal que $f_1|_U = f_2|_U$. As classes de equivalência por essa relação são chamadas **germes de aplicações**. Para $x \in U$, $f: (\mathbb{C}^N, x) \rightarrow \mathbb{C}^p$ denota o germe da aplicação $f: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$ em uma vizinhança de x .

Denotamos por $\mathcal{O}_{N,x}^p$ o conjunto dos germes de aplicações holomorfas $f: (\mathbb{C}^N, x) \rightarrow \mathbb{C}^p$. Quando $p = 1$, escrevemos simplesmente $\mathcal{O}_{N,x}$. Se $x = 0$, escrevemos \mathcal{O}_N ao invés de $\mathcal{O}_{N,0}$. O conjunto \mathcal{O}_N é um anel local cujo ideal maximal é $\mathcal{M}_N = \{f \in \mathcal{O}_N \mid f(0) = 0\} = \langle x_1, \dots, x_N \rangle$. Além disso \mathcal{O}_N é identificado com o anel de séries de potências convergentes $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_N\}$. Assim, cada elemento f de \mathcal{O}_N pode ser identificado com uma série de potências

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} a_\alpha x^\alpha$$

onde se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, escrevemos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$.

Proposição 1.2.1. [4, Corolário 1.5] $f \in \mathcal{O}_N$ é invertível se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Definição 1.2.2. Seja $f: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ um germe de função holomorfa. Chamamos de **singularidade (ponto crítico)** um ponto $p \in \mathbb{C}^N$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, N\}$. Além disso, se existir U vizinhança de p tal que nela p é a única solução do sistema de equações anteriores, dizemos que p é uma **singularidade isolada** de f .

A **matriz Hessiana** de f é:

$$\text{Hess}(f)(p) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(p) \end{pmatrix}.$$

Definição 1.2.3. Um ponto crítico p de f tal que $\det(\text{Hess}(f)(p)) \neq 0$ é chamado **não degenerado**. Quando todos os pontos críticos de f são não degenerados f é dita **função de Morse**.

No decorrer desta seção seja $f: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada.

Milnor em [40] introduziu o seguinte número associado a f .

Definição 1.2.4. O **número de Milnor** de f , o qual denotamos por $\mu(f)$, é definido da seguinte forma

$$\mu(f) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right\rangle}.$$

Definição 1.2.5. Uma **deformação** de f é um germe de função holomorfa

$$\begin{aligned} F: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) = f_t(x) \end{aligned}$$

tal que $f_0 = f$ e $f_t(0) = 0$ para t suficientemente pequeno.

Um **desdobramento** de f é um germe de aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} \tilde{F}: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \\ (t, x) &\mapsto (t, f_t(x)) \end{aligned}$$

tal que $f_0 = f$ e $f_t(0) = 0$ para t suficientemente pequeno.

Notemos que dada uma deformação (respectivamente, um desdobramento) de f obtemos uma família na qual cada t nos fornece um elemento da família.

1.3 Aplicações finitas e semicontínuas superiores

Definição 1.3.1. Dada $f: X \rightarrow Y$, onde X e Y são espaços topológicos, dizemos que f é **finita** se f é contínua, $f^{-1}\{y\}$ é um conjunto finito para todo $y \in Y$ e f é fechada (se D é fechado em X , então $f(D)$ é fechado em Y).

Lema 1.3.2. [29, Teorema 3.4.24] *Seja $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ uma aplicação entre germes de espaço analítico. Então f é finita se, e somente se, $f^{-1}(y) = \{x\}$.*

Lema 1.3.3. [24, Teorema 2] *Se $V \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ é um germe de conjunto analítico e $\pi: V \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é uma aplicação finita, então $\pi(V)$ é um conjunto analítico.*

Definição 1.3.4. *Uma função $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$, onde Y é um espaço topológico é chamada **semicontínua superior** se para cada $y_0 \in Y$ existe uma vizinhança V de y_0 tal que $\varphi(y) \leq \varphi(y_0)$, $\forall y \in V$.*

1.4 Germes de Variedades

Dizemos que dois subconjuntos X_1 e X_2 contidos em \mathbb{C}^N com $0 \in X_1 \cap X_2$, são equivalentes na origem se existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{C}^N tal que $U \cap X_1 = U \cap X_2$. Uma classe de equivalência por essa relação é chamada **germe de conjunto** em \mathbb{C}^N . Denota-se por $(X, 0)$ o germe de conjunto, onde X é um representante do germe.

Um **germe de variedade analítica** $(X, 0)$ é definido como sendo o germe na origem de um conjunto da forma $X = \{x \in \mathbb{C}^N \mid \phi_1(x) = \dots = \phi_p(x) = 0\}$, onde $\phi_1, \dots, \phi_p \in \mathcal{O}_N$. Chamamos de **hipersuperfície** um germe de variedade analítica $(X, 0)$ que é o conjunto de zeros de um único germe de função $\phi \in \mathcal{O}_N$.

Para um ideal I de \mathcal{O}_N , a **variedade de I** é

$$V(I) = \{x \in \mathbb{C}^N \mid \phi(x) = 0, \forall \phi \in I\}.$$

Dado um germe de variedade analítica X , o **ideal de X** é

$$I(X) = \{\phi \in \mathcal{O}_N \mid \phi(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Seja I um ideal de \mathcal{O}_N definindo o germe de variedade $(X, 0)$. O próximo resultado conhecido como Teorema Nullstellensatz Hilbert nos garante que $I(X)$ é o ideal radical de I , onde o **ideal radical** de I , denotado por \sqrt{I} é definido por

$$\sqrt{I} = \{g \in R \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ com } g^m \in I\}.$$

Teorema 1.4.1. [26, p. 11] (**Nullstellensatz Hilbert-versão local**) *Seja $(X, 0)$ um germe de variedade tal que $X = V(I)$ com I um ideal em \mathcal{O}_N . Então $I(X) = \sqrt{I}$.*

Sejam $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p): (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ um germe de aplicação holomorfa e $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ germe de variedade definido por ϕ , $X = \phi^{-1}(0)$. O **anel local** de $(X, 0)$ é

$$\mathcal{O}_{X,0} = \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle}.$$

Um germe de variedade $(X, 0)$ é dito **irredutível** se para quaisquer germes $(X_1, 0)$ e $(X_2, 0)$ tais que $X = X_1 \cup X_2$ então $X = X_1$ ou $X = X_2$. Caso contrário, $(X, 0)$ é chamado **reduzível**.

1.4.1 Interseções completas e singularidades determinantis

Sejam $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p): (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ um germe de aplicação holomorfa e $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ germe de variedade definido por ϕ .

Definição 1.4.2. *Se a dimensão de $\mathcal{O}_{X,0}$ é $N-p$ então $(X, 0)$ é dita **interseção completa**. Se além disso existe uma vizinhança U de 0 tal que X é regular em y para todo $y \in U \setminus 0$ então $(X, 0)$ é chamada **interseção completa com singularidade isolada (ICIS)**.*

Vamos agora descrever uma generalização especial de ICIS. Para isso, consideramos $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade definido por um germe de aplicação holomorfa $\psi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (M_{m,n}, 0)$, $(X, 0) = (\psi^{-1}(M_{m,n}^s), 0)$ onde $M_{m,n}$ é o conjunto das matrizes complexas de tamanho $m \times n$ e $M_{m,n}^s$ é o subconjunto de $M_{m,n}$ das matrizes complexas com rank menor que s , onde $0 < s \leq m \leq n$ são números naturais. Notemos que $M_{m,n}^s$ é uma variedade algébrica de $M_{m,n}$ de codimensão $(m-s+1)(n-s+1)$ (ver [3]).

Definição 1.4.3. *Se a dimensão de $(X, 0)$ é igual a $N - (m-s+1)(n-s+1)$ dizemos que $(X, 0)$ é um **germe de variedade determinantal** do tipo $(m, n; s)$. Além disso, se $s = 1$ ou $N < (m-s+2)(n-s+2)$ e X é suave em x , para todo $x \neq 0$ em uma vizinhança da origem, então $(X, 0)$ é chamada **singularidade determinantal isolada (IDS)**.*

Destacamos que se $s = 1$, $(X, 0)$ é uma ICIS se, e somente se, $(X, 0)$ é uma IDS.

1.5 Fecho integral de ideal e módulo

Para este trabalho é importante o conceito do seguinte ideal especial obtido a partir de um ideal I em um anel qualquer R .

Definição 1.5.1. *O fecho integral de I , denotado por \bar{I} é definido por*

$$\bar{I} = \{h \in R \mid h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_{k-1} h + a_k = 0 \text{ com } a_i \in I^i\}.$$

Observação 1.5.2. *Notemos que $\bar{I} \subset \sqrt{I}$. De fato, dado $h \in \bar{I}$ temos $h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_{k-1} h + a_k = 0$ com $a_i \in I^i \subset I$. Assim, $h^k = -(a_1 h^{k-1} + \dots + a_{k-1} h + a_k) \in I$, pois I é ideal. Logo, $h \in \sqrt{I}$. Portanto, $\bar{I} \subset \sqrt{I}$.*

O seguinte resultado de Teissier nos fornece uma caracterização para o fecho integral de um ideal no anel $\mathcal{O}_{X,0}$. Antes de enunciá-lo apresentamos a definição de valorização.

Definição 1.5.3. *Seja R um anel comutativo qualquer. Uma **valorização** de R é uma função $\vartheta: R \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que para todo $x, y \in R$*

- (i) $\vartheta(xy) = \vartheta(x) + \vartheta(y)$;
- (ii) $\vartheta(x + y) \geq \min\{\vartheta(x), \vartheta(y)\}$.

Definimos $\vartheta(0) = \infty$.

Dado R um anel comutativo e $f \in R \setminus \{0\}$, supondo que $f = f_n + f_{n+1} + \dots$, com f_j um polinômio homogêneo de grau j e $f_n \neq 0$, chama-se n de **multiplicidade** de f , $m(f)$. Para $f = 0$, $m(f) := \infty$. É fácil ver que a multiplicidade de f é uma valorização.

Teorema 1.5.4. *[53, Proposição 0.4] Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade analítica e I um ideal em $\mathcal{O}_{X,0}$, as seguintes condições são equivalentes*

- (i) $h \in \bar{I}$;
- (ii) *Para cada sistema de geradores h_1, \dots, h_r de I existem uma vizinhança U de 0 e uma constante $c > 0$ tal que $|h(x)| \leq c \sup\{|h_1(x)|, \dots, |h_r(x)|\}$, $\forall x \in U$;*
- (iii) **(Critério Avaliativo)** *Para cada curva analítica $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, 0)$ temos $h \circ \gamma \in (\gamma^*(I))\mathcal{O}_1$, onde $(\gamma^*(I))\mathcal{O}_1$ é o ideal gerado por $h_i \circ \gamma$, $i = 1, \dots, r$;*
- (iv) $\vartheta(h \circ \gamma) \geq \inf\{\vartheta(h_1 \circ \gamma), \dots, \vartheta(h_r \circ \gamma)\}$, onde ϑ é a valorização usual de uma curva complexa que em nosso caso será a multiplicidade da curva.

No decorrer deste trabalho, também precisamos trabalhar com o fecho integral de módulos sobre um anel, definido por Gaffney em [16, Definição 1.3].

Definição 1.5.5. *Sejam $(X, 0)$ um germe analítico complexo e $M \subset \mathcal{O}_{X,0}^p$ um submódulo. Então $h \in \mathcal{O}_{X,0}^p$ pertence ao **fecho integral** de M , denotado por \overline{M} , se para cada curva analítica $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, 0)$ temos $h \circ \gamma \in (\gamma^*(M))\mathcal{O}_1$.*

Trocando \mathcal{O}_1 pelo seu ideal maximal \mathcal{M}_1 temos a definição de fecho integral estrito de M , que é denotado por \overline{M}^\dagger (ver [15]). Neste caso, $h \in \overline{M}^\dagger$ é dito **estritamente dependente** em M .

Analogamente ao Teorema 1.5.4 apresentamos a seguir uma caracterização para o fecho integral de módulo.

Proposição 1.5.6. *[16, Proposição 1.11] Sejam $(X, 0)$ um germe analítico complexo, $M \subset \mathcal{O}_{X,0}^p$ um submódulo e $h \in \mathcal{O}_{X,0}^p$. Então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, para cada conjunto de geradores $\{h_1, \dots, h_r\}$ de M , existe uma vizinhança U de 0 e uma constante $c > 0$ tal que para toda $\gamma \in \Gamma(\text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$ temos*

$$\|\gamma(x)h(x)\| \leq c \sup\{\|\gamma(x)h_1(x)\|, \dots, \|\gamma(x)h_r(x)\|\}, \quad \forall x \in U,$$

onde $\Gamma(\text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$ denota as seções do fibrado vetorial $\text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$.

Para fixar notações, dado um módulo M gerado por $\{m^1, \dots, m^s\}$, onde $m^k = (m_1^k, \dots, m_p^k)$, a matriz $[M]$ associada a M é definida por

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1^1 & \dots & m_1^s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_p^1 & \dots & m_p^s \end{bmatrix}.$$

O resultado a seguir, chamado de *Princípio Jacobiano*, nos fornece a relação, obtida por Gaffney em [16], entre o fechos integrais de ideal e módulo.

Proposição 1.5.7. *[16, Proposição 1.7] Suponha que M é um submódulo de $\mathcal{O}_{X,0}^p$, X é irredutível e $h \in \mathcal{O}_{X,0}^p$. Então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, $I_k(\{h, M\}) \subset \overline{I_k([M])}$, onde k é o maior inteiro tal que $I_k(\{h, M\}) \neq 0$.*

Corolário 1.5.8. *[16, Corolário 1.8] Sejam $(X, 0)$ um germe analítico complexo com componentes irredutíveis $(X_i, 0)$ e M um submódulo de $\mathcal{O}_{X,0}^p$. Então $h \in \overline{M}$ se, e somente*

se, $I_{k_i}(\{h, M_i\}) \subset \overline{I_{k_i}([M_i])}$, onde M_i é o submódulo de $\mathcal{O}_{X_i,0}^p$, induzido por M e k_i é o rank de $\{h, M\}$ em X_i . Se k_i é independente de i , então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, $I_{k_i}(\{h, M\}) \subset \overline{I_{k_i}([M])}$.

1.6 Whitney equisingularidade

Para o estudo de Whitney equisingularidade é preciso trabalhar com a convergência em Grassmannianas adequadas e por isso iniciamos essa seção falando brevemente a respeito dessas variedades. Para mais detalhes, ver [36].

Definição 1.6.1. A *variedade Grassmanniana* de ordem k de \mathbb{C}^N , $Gr(k, N)$, é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de \mathbb{C}^N de dimensão k , onde $k \leq N$.

Seja $Z = \{[M] \in M_{k,N} \mid \text{rank}([M]) = k\}$. Em Z é introduzida a seguinte relação de equivalência: duas matrizes $[M]$ e $[N]$ em Z se relacionam, $[M] \sim [N]$, se existe $[A]$ uma matriz não singular ($\det[A] \neq 0$) com $\text{rank}([A]) = k$, tal que $[X] = [A][Y]$. Denota-se por $[[M]]$ a classe de equivalência por esta relação de equivalência. O quociente de Z por essa relação, o qual é denotado por $\frac{Z}{\sim}$, é o conjunto formado por todas as classes de equivalência por essa relação. Existe uma relação natural sobrejetora

$$\begin{aligned} \pi: \quad Z &\rightarrow \frac{Z}{\sim} \\ [X] &\mapsto [[X]] \end{aligned}$$

chamada aplicação quociente. A topologia coinduzida por π , $\frac{C_Z}{\sim}$, é

$$\frac{C_Z}{\sim} = \{G \subset \frac{Z}{\sim} \mid \pi^{-1}(G) \text{ é aberto em } Z\}.$$

Essa topologia é chamada topologia quociente e é definida como sendo a topologia de $Gr(k, N)$.

Para entendermos melhor a convergência em $Gr(k, N)$, seja $\{x_i\}$ uma sequência em \mathbb{C}^N com $\{x_i\} \rightarrow x_0$. Logo, $[M(x_i)] \rightarrow [M(x_0)]$, onde $[M(x_i)]$ e $[M(x_0)]$ estão em Z . Notemos que $[[M(x_i)]] \rightarrow [[M(x_0)]]$. De fato, como $[[M(x_0)]] \in G \subset \frac{Z}{\sim}$ então $[M(x_0)] \in \pi^{-1}(G) \subset Z$. Assim, como $[M(x_i)] \rightarrow [M(x_0)]$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[M(x_i)] \in \pi^{-1}(G)$, $\forall i > i_0$, ou seja, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[M(x_i)] = \pi([[M(x_i)]]) \in G$, $\forall i > i_0$. Portanto, por definição, $[[M(x_i)]] \rightarrow [[M(x_0)]]$.

Agora apresentamos alguns conceitos importantes sobre a teoria de Whitney equisingularidade. Para mais detalhes ver [23] e [38].

Dados $x, y \in \mathbb{R}^N$ com $x \neq y$, a **secante de x a y** , $sec(x, y)$, é definida como sendo a linha que é paralela a linha juntando x a y e passa pela origem.

Sejam X e Y subvariedades suaves de \mathbb{R}^N e $y \in Y$. Suponha que a dimensão de X seja d . A definição da condição B de Whitney pode ser encontrada em [38] como segue.

Definição 1.6.2. *O par (X, Y) satisfaz a **condição B de Whitney** em y se: Sejam $\{x_i\}$ sequência de pontos em X tal que $\{x_i\} \rightarrow y$ e $\{y_i\}$ sequência de pontos em Y com $\{y_i\} \rightarrow y$ também. Suponha que $\{T_{x_i}X\} \rightarrow T$, onde $T_{x_i}X$ é o espaço tangente a X em x_i e T é um plano d -dimensional, e que a sequência de linhas secantes ligando x_i a y_i converge para a linha L (no espaço projetivo, P^{N-1}). Então $L \subseteq T$.*

Agora, sejam M uma variedade diferenciável, X e Y subvariedades suaves de M . Assuma que $\dim X = d$. As definições das condições de Whitney, descritas a seguir, também podem ser vistas em [38].

Definição 1.6.3. *O par (X, Y) satisfaz a **condição A de Whitney** em $y \in Y$ se: Dada uma sequência $\{x_i\}$ de pontos em X tal que $\{x_i\} \rightarrow y$ e $\{T_{x_i}X\} \rightarrow T$, onde T é um plano d -dimensional, temos $T_y Y \subseteq T$.*

*Se (X, Y) satisfaz a condição A de Whitney em todo $y \in Y$, então é dito que (X, Y) satisfaz a **condição A de Whitney**.*

*O par (X, Y) satisfaz a **condição B de Whitney** em $y \in Y$ se: Para qualquer carta (φ, U) com U vizinhança aberta de y , o par $(\varphi(U \cap X), \varphi(U \cap Y))$ satisfaz a condição B de Whitney em $\varphi(y)$.*

*Se (X, Y) satisfaz a condição B de Whitney em todo $y \in Y$, então (X, Y) satisfaz a **condição B de Whitney**.*

Sejam M uma variedade diferenciável, N um subconjunto de M e \mathcal{P} uma partição localmente finita de N formada por subvariedades diferenciáveis de M .

A seguinte condição recebe o nome de **condição de fronteira**: Se $X, Y \in \mathcal{P}$ e $\overline{X} \cap Y \neq \emptyset$, então $Y \subset \overline{X}$.

Se \mathcal{P} é uma partição cujos elementos satisfazem a condição de fronteira dizemos que \mathcal{P} é uma **estratificação** de N . Neste caso, cada subvariedade diferenciável da partição recebe o nome de **estrato**.

Definição 1.6.4. Uma *estratificação de Whitney* de um subconjunto N de uma variedade diferenciável M é uma estratificação \mathcal{P} de N tal que cada par de estratos, (X, Y) , satisfaz as condições A e B de Whitney.

Resumindo (de acordo com as notações descritas anteriormente): (X, Y) satisfaz as condições A e B de Whitney se:

Condição A :

$$\begin{aligned} \{x_i\} &\rightarrow y \\ \{T_{x_i}X\} &\rightarrow T \text{ (na Grassmanniana adequada)} \end{aligned} \Rightarrow T_y Y \subseteq T;$$

Condição B :

$$\begin{aligned} \{x_i\} &\rightarrow y \\ \{y_i\} &\rightarrow y \\ \{T_{x_i}X\} &\rightarrow T \text{ (na Grassmanniana adequada)} \\ \text{sec}(x_i, y_i) &\rightarrow L \text{ (na Grassmanniana adequada)} \end{aligned} \Rightarrow L \subseteq T.$$

A condição B implica a condição A por [38, Proposição 2.4], mas a recíproca é falsa (ver [14, Exemplo 1.4]).

Sejam $f: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação analítica, $A \subset \mathbb{C}^N$ e $A' \subset \mathbb{C}^p$ subconjuntos tais que $f(A) \subseteq A'$. Uma **estratificação** de $f: A \rightarrow A'$ é um par $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ de estratificações de A e A' respectivamente tal que f leva estrato submersivamente a estrato.

Sejam M e P variedades suaves, $f: M \rightarrow P$ aplicação suave, X e Y subvariedades suaves de M e $y \in Y$. As próximas definições podem ser vistas em [23].

Definição 1.6.5. O par (X, Y) satisfaz a **condição A_f de Thom** se: quando $\{x_i\}$ é uma sequência em X com $\{x_i\} \rightarrow y$ tal que $\{\ker d(f|_X)_{x_i}\} \rightarrow T$ (na Grassmanniana adequada), necessariamente $\ker d(f|_Y)_y \subset T$.

Definição 1.6.6. A estratificação $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ é dita **regular** se $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ satisfazem as condições de Whitney e se qualquer estrato $Y \in \mathcal{A}'$ satisfaz a condição A_f de Thom sobre qualquer estrato $X \in \mathcal{A}$.

1.7 Número de Bruce-Roberts

Define-se \mathcal{R}_X como o subgrupo de \mathcal{R} formado pelos difeomorfismos que preservam X . Restringindo a ação do grupo \mathcal{R} em \mathcal{O}_N temos a ação do grupo \mathcal{R}_X em \mathcal{O}_N . Dizemos que f e g em \mathcal{O}_N são \mathcal{R}_X -**equivalentes**, o qual é denotado por $f \sim_{\mathcal{R}_X} g$, se f e g estão na mesma órbita pela ação do grupo \mathcal{R}_X .

Dizemos que $f \in \mathcal{O}_N$ é k -**determinado** com respeito a \mathcal{R}_X , se para qualquer $g \in \mathcal{O}_N$ com $j^k(g) = j^k(f)$, temos $f \sim_{\mathcal{R}_X} g$, onde $j^k(g)$ denota o k -jato de g .

Se existe um número natural k tal que f é k -determinado dizemos que f é \mathcal{R}_X -**finitamente determinado**.

Denota-se por Θ_X o \mathcal{O}_N -módulo de campos de vetores que são tangentes ao germe de variedade analítica $(X, 0)$, ou seja

$$\Theta_X = \{\xi \in \Theta_N \mid d\phi(\xi) \in I(X), \forall \phi \in I(X)\},$$

onde Θ_N é o \mathcal{O}_N -módulo de campos de vetores de \mathbb{C}^N em \mathbb{C} .

Bruce e Roberts em [9] definem um número análogo ao de Milnor levando em consideração um germe de função e um germe de variedade analítica que pode ser singular. Esse novo invariante é conhecido por número de Bruce-Roberts.

Definição 1.7.1. *O número de Bruce-Roberts de $f: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, germe de função holomorfa, com respeito a $(X, 0)$, o qual é denotado por $\mu_{BR}(X, f)$, é definido por*

$$\mu_{BR}(X, f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{J_f(\Theta_X)},$$

onde $J_f(\Theta_X) = \langle df(\xi) \mid \xi \in \Theta_X \rangle$.

Como $f \in \mathcal{O}_N$ é finitamente determinado se, e somente se, $\mu(f)$ é finito, então o número de Bruce-Roberts é uma generalização do número de Milnor, pois $\mu_{BR}(X, f)$ é finito se, e somente se, f é \mathcal{R}_X -finitamente determinado.

Seja $U \subset \mathbb{C}^N$ uma vizinhança da origem. Suponha que $\Theta_X = \langle \xi_1, \dots, \xi_p \rangle$ em U . Denotamos

$$LC_U(X) := \{(x, \delta) \in T_U^* \mathbb{C}^N \mid \delta(\xi_i(x)) = 0, i = 1, \dots, p\},$$

onde $T_U^* \mathbb{C}^N$ é a restrição do fibrado cotangente (ver [35, p. 276]) de \mathbb{C}^N a U .

A **variedade logarítmica característica** de X , $LC(X)$, é definida como o

germe de $LC_U(X)$ em $T_0^*\mathbb{C}^N$, o espaço cotangente de \mathbb{C}^N em 0.

1.8 Transversalidade

Sejam $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis e W uma subvariedade suave de Y . Dizemos que f **intercepta W transversalmente em $x \in X$** se $f(x)$ não pertence a W ou se

$$T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + (df)_x(T_xX).$$

Se f intercepta W transversalmente em x para todo $x \in X$, então dizemos que f **intercepta W transversalmente**.

Teorema 1.8.1. [27, p. 70] (**Teorema da Homotopia da Transversalidade**) *Sejam X e Y variedades, com Y sem bordo. Para qualquer aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ e qualquer subvariedade sem bordo Z de Y , existe uma aplicação $g: X \rightarrow Y$ homotópica a f tal que g e ∂g são transversais a Z , onde $\partial g := g|_{\partial X}$.*

Sejam X um espaço topológico e $p: E \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Dizemos que p satisfaz a **propriedade do levantamento de homotopia com respeito a X** , se, para qualquer homotopia $f: X \times [0, 1] \rightarrow B$ e para qualquer $\tilde{f}_0: X \rightarrow E$ tal que $f_0 = p\tilde{f}_0$, existe uma homotopia $\tilde{f}: X \times [0, 1] \rightarrow E$ tal que $f = p\tilde{f}$ com $\tilde{f}_0 = \tilde{f}|_{X \times \{0\}}$. Chama-se **fibração** uma aplicação $p: E \rightarrow B$ que satisfaz a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a qualquer espaço topológico X . Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & & \\ \tilde{f} \downarrow & \searrow f & \\ E & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

Dizemos que p é uma **fibração localmente trivial**, se, para todo ponto $b \in B$ existe uma vizinhança U de b e um difeomorfismo $\psi: U \times p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que o diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times p^{-1}(b) & & \\ \psi \downarrow & \searrow \pi & \\ p^{-1}(U) & \xrightarrow{p|_{p^{-1}(U)}} & U, \end{array}$$

onde π é a projeção no primeiro fator.

O próximo resultado fornece um critério para garantir que uma aplicação é uma fibração suave localmente trivial.

Lema 1.8.2. [32, Lema 1.10] (**Lema Ehresmann**) *Seja $\varphi: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, onde M é uma variedade suave com bordo ∂M e N é uma variedade suave. Se*

- (i) *a aplicação φ é própria;*
- (ii) *a restrição de φ a $M \setminus \partial M$ é sobrejetora e submersão;*
- (iii) *o bordo ∂M é não vazio, a restrição de φ ao bordo ∂M é também sobrejetora e submersão.*

Então φ é uma fibração suave localmente trivial em N .

1.9 Obstrução de Euler e característica de Euler

Como a definição da obstrução de Euler é muito técnica ao invés de apresentá-la, nessa seção enunciamos uma fórmula dada por Lê e Teissier em [34].

Dada $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade analítica de dimensão d , Lê e Teissier em [34], considerando uma projeção linear genérica $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ com respeito a X , definem a **k -ésima multiplicidade polar** de $(X, 0)$, para $k = 0, \dots, d-1$, por

$$m_k(X, 0) = m_0(\overline{S(p|_{X^0})}, 0),$$

onde X^0 denota a parte suave de X , $S(p|_{X^0})$ é o conjunto dos pontos críticos de $p|_{X^0}$ e $m_0(Z, 0)$ é a multiplicidade usual de um germe de variedade $(Z, 0)$.

Teorema 1.9.1. [34] *Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ um espaço analítico reduzido de dimensão d . Então*

$$Eu(X, 0) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-i-1} m_i(X, 0),$$

onde $Eu(X, 0)$ denota a obstrução de Euler local de $(X, 0)$.

Em [5, Teorema 3.1], Brasselet, Lê e Seade forneceram uma fórmula para a obstrução de Euler local de $(X, 0)$ em função da característica de Euler de X , cuja definição é a seguinte.

Definição 1.9.2. *Seja X um espaço topológico. A característica de Euler de X , $\chi(X)$, é definida como sendo a seguinte soma alternada*

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \beta_n(X),$$

onde $\beta_n(X)$ é o n -ésimo **número de Betti** de X , ou seja, é a dimensão de $H_n(X, \mathbb{C})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, onde $H_n(X, \mathbb{C})$ é o n -ésimo grupo de homologia de X .

Equisingularidade de germes de funções em uma IDS

Em [47], Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella estudam a equisingularidade de famílias de IDS. Nosso objetivo, neste capítulo, é generalizar esse estudo para a equisingularidade de germes de funções definidos em uma IDS. Para isso, inspirados na definição obtida em [45] para a d -ésima multiplicidade polar da IDS, definimos a $(d - 1)$ -ésima multiplicidade polar da fibra de um germe de função com singularidade isolada sobre uma IDS, isto é, $m_{d-1}(X \cap f^{-1}(0), 0)$, onde $(X, 0)$ é uma IDS de dimensão d e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é um germe de função com singularidade isolada.

Os resultados desse capítulo compõem o preprint [12].

Dados $(X, 0)$ um germe de variedade e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função com singularidade isolada, para falar do número de Milnor de f precisamos da noção de conjunto singular de função. No decorrer do trabalho também vamos precisar do conceito de conjunto singular de germes de variedades, então dedicamos a próxima seção a isso.

2.1 Conjuntos singulares

No decorrer deste trabalho, dada uma matriz A de ordem $k \times l$ e $r \leq \min\{k, l\}$ denotamos por $I_r(A)$ o ideal gerado pelos menores de tamanho r de A . Dados dois vetores $u = (i_1, \dots, i_r) \in \{1, \dots, k\}^r$ e $v = (j_1, \dots, j_r) \in \{1, \dots, l\}^r$ com $i_1 < \dots < i_r$ e $j_1 < \dots < j_r$, denotamos por $A_{u,v}$ o determinante da submatriz de A obtida por escolher as linhas i_1, \dots, i_r e as colunas j_1, \dots, j_r .

Por fim, dado $H: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação holomorfa

denotamos por $J_{(t,x)}H$ a matriz Jacobiana de H (derivadas parciais com respeito a t e $x = (x_1, \dots, x_N)$) e por J_xH a matriz Jacobiana de H (derivadas parciais com respeito a $x = (x_1, \dots, x_N)$ apenas).

Dado $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ germe de variedade analítica, definido pelo conjunto de zeros de ϕ_1, \dots, ϕ_p , denotamos o conjunto singular de X por $S(X)$. Então

$$S(X) = V(\langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle + I_{\text{codim } X}(J_x(\phi_1, \dots, \phi_p))).$$

Definição 2.1.1. *Dado $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função, o **conjunto singular** de f é o conjunto dos pontos onde X é singular unido ao conjunto dos pontos onde X é regular e f não é uma submersão.*

Vamos mostrar que o conjunto singular é de fato um conjunto analítico. Para isso vamos precisar da extensão Jacobiana iterada.

Seja W um ideal em \mathcal{O}_N gerado por g_1, \dots, g_r e $h = (h_1, \dots, h_p): (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ um germe de aplicação. Para cada $m = 1, \dots, N$, Morin em [41] define a **extensão Jacobiana** de rank m de (h, W) como

$$\Delta_m(h, W) = W + W',$$

onde W' é o ideal gerado pelos menores de ordem m da matriz Jacobiana de $(h_1, \dots, h_p, g_1, \dots, g_r)$. Seguindo isto, se deduz indutivamente a extensão Jacobiana iterada de h por

$$J_i(h, W) = \begin{cases} \Delta_{N-i_1+1}(h, W), & \text{se } k=1, \\ \Delta_{N-i_k+1}(h, J_{i_1, \dots, i_{k-1}}(h, W)), & \text{se } k \text{ é maior que } 1, \end{cases}$$

onde $i = (i_1, \dots, i_k)$ é um símbolo de Boardman (ou seja, $N \geq i_1 \geq \dots \geq i_k \geq 0$). Por [48, Lema 2.2] $J_i(h, W)$ não depende da escolha dos geradores de W .

Usando a extensão Jacobiana iterada conseguimos garantir no próximo lema que um conjunto especial é analítico.

Lema 2.1.2. *Seja $Y = \varphi^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^N$ uma variedade analítica de dimensão d onde $\varphi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$ é um germe de aplicação. Seja $g: Y \rightarrow \mathbb{C}$ um germe de função holomorfa. O conjunto dos pontos $y \in Y$ tal que y é um ponto singular de Y ou y é um ponto crítico*

degenerado de g é

$$\tilde{C} = V(J_{d,1}(g, \langle \varphi \rangle)) \cup S(Y),$$

onde $\langle \varphi \rangle$ é o ideal gerado pelas componentes de φ e $S(Y)$ é o conjunto singular de Y .

Demonstração: Primeiro assumimos que 0 é um ponto regular de Y . Pelo *Crítério Jacobiano* ([29, Teorema 4.3.15]), φ tem $\text{rank}(p-d)$ em 0 , então existem $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{p-d}}$ tal que $\hat{\varphi} = (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{p-d}})$ é uma submersão. Além disso, $\langle \varphi \rangle = \langle \hat{\varphi} \rangle$ e $\hat{\varphi}^{-1}(0) = Y$ em uma vizinhança da origem. De fato, claramente $\langle \hat{\varphi} \rangle \subset \langle \varphi \rangle$. Por outro lado, notemos que $V(\langle \hat{\varphi} \rangle)$ é regular de dimensão d em Y que também é regular de dimensão d . Logo, $Y = V(\langle \hat{\varphi} \rangle)$. Então

$$\langle \varphi \rangle \subseteq \sqrt{\langle \varphi \rangle} = \sqrt{\langle \hat{\varphi} \rangle} = \langle \hat{\varphi} \rangle.$$

Seja

$$\begin{aligned} \pi: \quad \Gamma(g) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, g(x)) &\mapsto g(x), \end{aligned}$$

onde $\Gamma(g) = \{(x, g(x)) \mid x \in Y\}$ é o gráfico de g .

Sabemos que $\Gamma(g) = (\varphi')^{-1}(0)$, onde

$$\begin{aligned} \varphi': \quad \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^{p-d+1} \\ (x, s) &\mapsto (\hat{\varphi}(x), g(x) - s). \end{aligned}$$

Por [48, Teorema 5.1], o conjunto dos pontos críticos degenerados de π em $\Gamma(g)$ é

$$V(J_{d,1}(\varphi'; x)) = V(\langle \varphi' \rangle + I_{N-d+1}(J(\varphi'; x)) + I_N(J(\varphi', h'; x))),$$

onde $\langle h'_1, \dots, h'_l \rangle = I_{N-d+1}(J(\varphi'; x))$ e $h' = (h'_1, \dots, h'_l)$. A notação $J_i(\cdot; x)$ significa que construímos os ideais Jacobianos tomando apenas derivadas parciais com respeito as variáveis x_1, \dots, x_N .

Como

$$\begin{aligned} \Gamma: \quad Y &\rightarrow \Gamma(g) \\ x &\mapsto (x, g(x)) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo então, os pontos críticos degenerados de g são imagens inversas dos pontos críticos degenerados de π por Γ , que é igual ao conjunto analítico

$$V(\langle \hat{\varphi} \rangle + I_{N-d+1}(J(\hat{\varphi}, g)) + I_N(J(\hat{\varphi}, g, h))),$$

onde $\langle h_1, \dots, h_l \rangle = I_{N-d+1}(J(\hat{\varphi}, g))$ e $h = (h_1, \dots, h_l)$. Mas de acordo com a definição anterior, isto é igual ao conjunto analítico $V(J_{d,1}(g, \langle \hat{\varphi} \rangle)) = V(J_{d,1}(g, \langle \varphi \rangle))$.

O caso onde 0 não é regular segue facilmente como no caso regular, apenas acrescentando o conjunto singular $S(Y)$. ■

Definição 2.1.3. Dada $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade, $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe com singularidade isolada e $f_t: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação de f , dizemos que f_t é uma **deformação flat** de f , se $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$ é um \mathcal{O}_1 -módulo flat (t não é divisor de zero de $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$) através da aplicação π^* , onde $\pi^*: \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$ dada por $\pi^*(g) = g \circ \pi$ é chamada de **pull-back** de π .

O fato da deformação ser flat nos garante que todas as fibras possuem o mesmo comportamento. Assim, no caso de ICIS, considerando uma deformação flat temos que todas as fibras são ICIS também.

Observação 2.1.4. Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma ICIS definida por um germe de aplicação holomorfa $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$. Sejam $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada e f_t deformação flat de f . Temos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)} = N - p + 1$ e $I_{p+1}(J_x(f_t, \phi))$ é o ideal gerado pelos menores de ordem $p + 1$ de uma matriz de ordem $(p + 1) \times N$. Então $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}}{I_{p+1}(J_x(f_t, \phi))} = 1 = (N - p + 1) - (p + 1 - (p + 1) + 1)(N - (p + 1) + 1)$. Portanto, pelo Teorema 1.1.11, $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}}{I_{p+1}(J_x(f_t, \phi))}$ é Cohen-Macaulay.

Definição 2.1.5. Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade analítica com singularidade isolada e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função com singularidade isolada. Uma **morsificação** de f é uma função $F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tal que

(i) $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$ é uma suavização de $(X, 0)$, ou seja, a projeção $\pi: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dada por $\pi(s, x) = s$ é flat e se $X_s := \pi^{-1}(s)$, então $X_0 = X$ e X_s é suave para $s \neq 0$;

(ii) Se $f_s: X_s \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f_s(x) = F(s, x)$, então $f_0 = f$ e f_s é uma função de Morse para $s \neq 0$.

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade analítica com singularidade isolada. Consideremos $F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma morsificação de f . Fixando um representante de $F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ no conjunto aberto $B_\epsilon \times D_\beta$ com $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{C}^N \mid \|x\| < \epsilon\}$, $D_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < \beta\}$ e $\epsilon, \beta > 0$ suficientemente pequenos, então X_s é um subconjunto analítico fechado de B_ϵ e $f_s: X_s \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa, para cada $s \in D_\beta$.

Teorema 2.1.6. [46, Teorema A.5] *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade analítica com singularidade isolada, com $d = \dim(X, 0)$. Sejam $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ função com singularidade isolada e $F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma morsificação de f . Existem números reais suficientemente pequenos $0 < \beta \ll \delta \ll \epsilon \ll 1$ tais que*

$$\chi(f_s^{-1}(c)) = \chi(X_s) + (-1)^{d+1} \#S(f_s),$$

para qualquer $c \in D_\delta$ um valor regular de f_s e $s \in D_\beta \setminus \{0\}$.

2.2 Equisingularidades de famílias em IDS

Sejam $0 < s \leq m \leq n$ números naturais e $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ a IDS definida por um germe de aplicação holomorfa $\psi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (M_{m,n}, 0)$, ou seja, $(X, 0) = (\psi^{-1}(M_{m,n}^s), 0)$.

Consideramos $X = \psi^{-1}(M_{m,n}^s)$ um representante suficientemente pequeno de $(X, 0)$, onde $\psi: B \rightarrow M_{m,n}$ é definido em uma bola suficientemente pequena $B = B_\epsilon$ centrada na origem em \mathbb{C}^N . Seja $A \in M_{m,n}$ uma matriz genérica e $X_A := \psi_A^{-1}(M_{m,n}^s)$ com $\psi_A: B \rightarrow M_{m,n}$ definida por $\psi_A(x) = \psi(x) + A$. No caso em que $(X, 0)$ é uma ICIS, isto é, $s = 1$, Hamm, em [28], introduz o número de Milnor de $(X, 0)$, $\mu(X, 0)$, como sendo o número de esferas no bouquet que é a fibra de Milnor de $(X, 0)$. Como X_A tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas segue por [37] que

$$\mu(X, 0) = \beta_d(X_A) = (-1)^d (\chi(X_A) - 1),$$

onde d é a dimensão de X . Como uma generalização para o número de Milnor de uma ICIS, a característica de Euler evanescente da IDS $(X, 0)$ é definida em [45] por

$$\nu(X, 0) = (-1)^{\dim X} (\chi(X_A) - 1).$$

Se $\dim X = 2$ esse número coincide com o definido simultaneamente em [50].

Um germe de aplicação $\Psi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ tal que $\Psi(0, x) = \psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}^N$ é chamado **deformação determinantal** de $(X, 0)$. Denotamos $\Psi(t, x) := \psi_t(x)$ e $X_t := \psi_t^{-1}(M_{m,n}^s)$. Uma deformação determinantal é dita uma **suavização determinantal** se X_t é suave para $t \neq 0$ suficientemente pequeno. Neste caso, $\nu(X, 0) = (-1)^{\dim X} (\chi(X_t) - 1)$ (ver [45, Teorema 3.4]). Está demonstrado em [45] que, uma vez fixada a estrutura, esse número não depende da suavização determinantal

escolhida.

Se $(X, 0)$ é uma IDS com dimensão $d = 1$ ou $d = 2$, então $\nu(X, 0) = \mu(X, 0)$ (ver [45, Corolários 3.6 e 3.7]), pois, nesses casos, dada uma suavização de $(X, 0)$, Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella, mostram que $\nu(X, 0) = \beta_d(X_t)$, condição satisfeita pelo número de Milnor, $\mu(X, 0)$. Para $d \neq 1$ e $d \neq 2$, em geral, não é possível mostrar que $\beta_d(X_t)$ é igual a $\nu(X, 0)$.

Para $f: (X, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ um germe de função holomorfa, escolhamos $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ um representante de f , definido no representante de $(X, 0)$ descrito acima. Em [45] o número de Milnor de f é definido por

$$\mu(f) = \#S(f_b|_{X_A}),$$

onde $f_b: X_A \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f_b(x_1, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_N) + b_1x_1 + \dots + b_Nx_N$ para $b = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{C}^N$ genérico e $\#S(f_b|_{X_A})$ é o número de pontos críticos de $f_b|_{X_A}$.

Além disso, em [45], é definida a característica de Euler evanescente da fibra $X \cap f^{-1}(0)$ por

$$\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) := (-1)^{\dim X - 1} (\chi(X_A \cap f_b^{-1}(e)) - 1), \quad (2.1)$$

com $(b, A, e) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ valores genéricos tais que X_A é suave, $f_b|_{X_A}$ é uma função de Morse e e é um valor regular de $f_b|_{X_A}$.

Também, em [45], prova-se uma fórmula do tipo *Lê-Greuel* para esses invariantes, como podemos ver no próximo resultado.

Teorema 2.2.1. [45, Teorema 5.4] *Dada $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função com singularidade isolada e $(X, 0)$ uma IDS. Então*

$$\mu(f) = \nu(X, 0) + \nu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

No caso em que $(X, 0) = ((\phi_1, \dots, \phi_{N-d})^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ é uma ICIS, Gaffney em [17] define a d -ésima multiplicidade polar de $(X, 0)$ da seguinte forma

$$m_d(X, 0) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1, \dots, \phi_{N-d} \rangle + I_{N-d+1}(J_x(\phi_1, \dots, \phi_{N-d}, p))},$$

onde $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função linear genérica. Assim, $m_d(X, 0) = \#S(p|_{X_t})$, onde X_t é a fibra de Milnor de $(X, 0)$.

De forma natural, dada uma IDS $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ de dimensão d , Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella em [45] definem $m_d(X, 0)$ como sendo $\sharp S(p|_{X_A})$, onde $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função linear genérica e $A \in M_{m,n}$ é uma matriz genérica.

Seja $(X, 0)$ uma IDS definida por um germe de aplicação $\psi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função com singularidade isolada, isto é, em uma vizinhança suficientemente pequena de 0 , f é regular em $X \setminus \{0\}$.

Seja $\Psi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ uma deformação determinantal de $(X, 0)$ e

$$\begin{aligned} F: (\mathcal{X}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) := (t, f_t(x)) \end{aligned}$$

um desdobramento de f , onde $\mathcal{X} := \Psi^{-1}(M_{m,n}^s)$. Assumimos que F preserva a origem, isto é, $0 \in X_t$ e $f_t(0) = 0$ para t suficientemente pequeno. Assim, podemos ver o desdobramento F como uma família de germes de funções $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}_{t \in D}$, onde D é uma vizinhança aberta da origem em \mathbb{C} .

Na sequência apresentamos a definição de importantes propriedades das famílias $(\mathcal{X}, 0)$ e F .

Definição 2.2.2. *Dizemos:*

- (1) $(\mathcal{X}, 0)$ é **ν -constante** se $\nu(X_t, 0) = \nu(X, 0)$ para t suficientemente pequeno;
- (2) $(\mathcal{X}, 0)$ é uma família **boa** se existe um representante definido em $D \times U$, onde D e U são vizinhanças abertas na origem em \mathbb{C} e \mathbb{C}^N respectivamente, tal que $X_t \setminus \{0\}$ é suave, para qualquer $t \in D$, isto é, $S(X_t) = \{0\}$ em U , para todo $t \in D$, onde $S(X_t)$ é o conjunto singular de X_t ;
- (3) $(\mathcal{X}, 0)$ é **topologicamente trivial** se existe um homeomorfismo $H: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times X, 0)$ que comuta com a projeção, isto é, $\pi \circ H = \pi$, onde $\pi: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é dada por $\pi(t, x) = t$;
- (4) $(\mathcal{X}, 0)$ é **Whitney equisingular** se é uma família boa e existe um representante como no item (2) tal que $(\mathcal{X} \setminus T, T)$ satisfaz as condições de Whitney, onde $T = D \times \{0\}$;
- (5) F é **μ -constante** se $\mu(f_t) = \mu(f)$ para t suficientemente pequeno;
- (6) F é **boa** se existe um representante definido em $D \times U$, onde D e U são vizinhanças abertas da origem em \mathbb{C} e \mathbb{C}^N respectivamente, tais que $X_t \setminus \{0\}$ é suave e f_t é regular em $X_t \setminus \{0\}$, para qualquer $t \in D$;

(7) F é **topologicamente trivial** se existem germes de homeomorfismos

$$\begin{aligned} G: (\mathcal{X}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C} \times X, 0) \\ (t, x) &\mapsto G(t, x) = (t, g_t(x)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \\ (t, y) &\mapsto H(t, y) = (t, h_t(y)) \end{aligned}$$

tais que G e H são desdobramentos da identidade e $F = H \circ U \circ G$, onde $U(t, x) = (t, f(x))$ é o desdobramento trivial de f ;

(8) F é **Whitney equisingular** se é uma família boa e existe um representante como no item (6) que admite uma estratificação regular dada por $\mathcal{A} = \{\mathcal{X} \setminus F^{-1}(T), F^{-1}(T) \setminus S, S\}$ na fonte e $\mathcal{A}' = \{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus T, T\}$ na meta, onde $S = D \times \{0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ e $T = D \times \{0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Quando consideramos famílias de singularidades é interessante saber qual é a relação entre trivialidade topológica e Whitney equisingularidade da família. Além disso, também queremos invariantes, cuja constância na família caracterize a trivialidade topológica ou a Whitney equisingularidade.

Por exemplo, para famílias de curvas $(\mathcal{X}, 0) = \{(X_t, 0)\}$, podemos ver em [8] e [10]:

- (1) $(\mathcal{X}, 0)$ é topologicamente trivial e boa se, e somente se, $(\mathcal{X}, 0)$ é μ -constante;
- (2) $(\mathcal{X}, 0)$ é Whitney equisingular se, e somente se, $(\mathcal{X}, 0)$ é μ -constante e $m_0(X_t, 0)$ é constante, onde $m_0(X_t, 0)$ é a multiplicidade de $(X_t, 0)$.

Analogamente, para uma família $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$ de funções em curvas podemos encontrar em [43] o seguinte:

- (1) F é topologicamente trivial e boa se, e somente se, F é μ -constante;
- (2) F é Whitney equisingular se, e somente se, F é μ -constante e $m_0(X_t, 0)$ é constante.

Para uma família de hipersuperfícies $(\mathcal{X}, 0) = \{(X_t, 0)\}$ de dimensão d , Teissier em [53] prova que $(\mathcal{X}, 0)$ é Whitney equisingular se, e somente se, as multiplicidades polares $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, são constantes em t . O mesmo resultado é provado para famílias de ICIS por Gaffney em [18]. Este resultado foi estendido recentemente para famílias de IDS como podemos ver a seguir.

Teorema 2.2.3. [47, Teorema 5.3] *Uma família boa de IDS d -dimensional $(\mathcal{X}, 0) =$*

$\{(X_t, 0)\}$ é Whitney equisingular se, e somente se, todas as multiplicidades polares $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, são constantes em $t \in D$.

No caso de famílias de ICIS, também temos que uma família μ -constante é sempre boa, o que não é verdade em geral para famílias de IDS. Se $d \neq 2$, a condição de μ -constância também controla a trivialidade topológica de uma família de hipersuperfícies (ver [33]) ou ICIS (ver [49]). Nesses resultados vemos a importância de relacionar equisingularidades de famílias à constância de invariantes relacionados aos germes. Nosso objetivo, aqui, é estender tais resultados para germes de funções definidos em variedades singulares. Mais precisamente, no Teorema 2.2.24, caracterizamos a Whitney equisingularidade por meio da constância das multiplicidades polares em uma família

$$F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0)$$

de germes de funções em uma IDS.

No decorrer desse capítulo, sejam $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função em uma IDS com singularidade isolada e $F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento de f preservando a origem.

Podemos ver em [47, Lema 5.1] que se $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica, então temos a conservação do número de Milnor de p , isto é,

$$\mu(p|_X) = \sum_{y \in S(p|_{X_t^0})} \mu(p|_{X_t}, y) + \sum_{x \in S(X_t)} \mu(p|_{X_t}, x) = \sum_{x \in S(p|_{X_t})} \mu(p|_{X_t}, x),$$

para todo t suficientemente pequeno. De fato, tal fórmula é apresentada em [47, Lema 5.1] como segue,

$$\mu(p|_X) = \sum_{y \in S(p|_{X_t^0})} \mu(p|_{X_t}, y) + \sum_{x \in S(X_t)} m_d(X_t, x),$$

onde X_t^0 é a parte suave de X_t , $S(X_t)$ é o conjunto singular de X_t e $S(p|_{X_t^0})$ é o conjunto singular de $p|_{X_t^0}$.

Provamos no seguinte teorema que a mesma conservação do número de Milnor acontece para uma família f_t de funções.

Teorema 2.2.4. *Para todo t suficientemente pequeno,*

$$\mu(f) = \sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} \mu(f_t, y) + \sum_{z \in S(X_t)} \mu(f_t, z) = \sum_{y \in S(f_t)} \mu(f_t, y).$$

Demonstração: Escolhemos $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ um representante de f , onde $X = \psi^{-1}(M_{m,n}^s)$ é um representante suficientemente pequeno de $(X, 0)$, com $\psi: B \rightarrow M_{m,n}$ definida em uma bola aberta suficientemente pequena $B = B_\epsilon$ centrada na origem em \mathbb{C}^N tal que em B_ϵ a origem é o único ponto singular de X .

Para uma matriz $A \in M_{m,n}$, seja $\psi_A: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ definida por

$$\psi_A(x) = \psi(x) + A$$

e denotamos $X_A = \psi_A^{-1}(M_{m,n}^s)$.

Considerando $b = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{C}^N$ seja $f_b|_{X_A}: X_A \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f_b(x_1, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_N) + b_1x_1 + \dots + b_Nx_N.$$

Construímos uma nova deformação como soma de X_t e X_A , isto é, para $A \in M_{m,n}$ e $t \in D$ definimos

$$X_{(A,t)} = (\psi_t + A)^{-1}(M_{m,n}^s).$$

Além disso, definimos

$$f_{(b,t)}|_{X_{(A,t)}}: X_{(A,t)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_{(b,t)}(x_1, \dots, x_N) := f_t(x_1, \dots, x_N) + b_1x_1 + \dots + b_Nx_N.$$

Denotamos por z_1, \dots, z_k e y_1, \dots, y_l os pontos singulares de X_t e $f_t|_{X_t^0}$, respectivamente.

Para cada $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, l$, escolhemos um disco de Milnor D_i for (X_t, z_i) e E_j em torno de y_j para $f_t|_{X_t^0}$ tal que estes discos são dois a dois disjuntos.

Temos

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \#S(f_{(b,t)}|_{X_{(A,t)}}) \\
&= \sum_{j=1}^l \#S(f_{(b,t)}|_{X_{(A,t)} \cap E_j}) + \sum_{i=1}^k \#S(f_{(b,t)}|_{X_{(A,t)} \cap D_i}) \\
&= \sum_{j=1}^l \mu(f_t, y_j) + \sum_{i=1}^k \mu(f_t, z_i).
\end{aligned}$$

■

Corolário 2.2.5. *Assuma que $(\mathcal{X}, 0)$ é uma família boa. Então F é μ -constante se, e somente se, F é boa.*

Demonstração: Assuma que F é μ -constante. Como $(\mathcal{X}, 0)$ é boa, pelo Teorema 2.2.4

$$\mu(f) = \sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} \mu(f_t, y) + \mu(f_t).$$

Então $\sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} \mu(f_t, y) = 0$. Logo, $\mu(f_t, y) = 0$ para todo $y \in S(f_t|_{X_t^0})$. Portanto, $S(f_t|_{X_t^0}) = \emptyset$ e, assim, F é boa.

Por outro lado, se F é boa, existe um representante definido em $D \times U$, onde D, U são vizinhanças abertas da origem em \mathbb{C}, \mathbb{C}^N respectivamente, tal que $X_t \setminus \{0\}$ é suave e f_t é regular em $X_t \setminus \{0\}$, para qualquer $t \in D$. Assim, $S(X_t) = \{0\}$ e $S(f_t) = \{0\}$ em U . Portanto, pelo Teorema 2.2.4, $\mu(f) = \mu(f_t)$.

■

Outra consequência do Teorema 2.2.4 é o fato que o número de Milnor de uma função é semicontínuo superior:

Corolário 2.2.6. *Para todo $x \in S(f_t)$ e para todo t suficientemente pequeno,*

$$\mu(f_t, x) \leq \mu(f).$$

O próximo lema é também uma interessante consequência do Teorema 2.2.4. Para sua demonstração usamos [47, Corolário 4.4], que nos garante que se $(\mathcal{X}, 0)$ é uma família

topologicamente trivial, então

$$\sum_{y \in S(X_t)} \nu(X_t, y) = \nu(X, 0). \quad (2.2)$$

Lema 2.2.7. *Se $(\mathcal{X}, 0)$ é uma família boa e topologicamente trivial, então*

$$\sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} \nu(X_t, y) + \sum_{y \in S(f_t)} \nu(X_t \cap f_t^{-1}(0), y) = \nu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Demonstração: Como $(\mathcal{X}, 0)$ é boa, existe um representante definido em $D \times U$, onde D e U são vizinhanças abertas da origem em \mathbb{C} e \mathbb{C}^N respectivamente, tal que $S(X_t) = \{0\}$ em U , para todo $t \in D$. Consideramos F definida neste representante de $(\mathcal{X}, 0)$. Pela fórmula de Lê-Greuel e pelo Teorema 2.2.4,

$$\sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} \mu(f_t, y) + \mu(f_t) = \nu(X, 0) + \nu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Aplicando a fórmula de Lê-Greuel a $\mu(f_t)$,

$$\sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} \mu(f_t, y) + (\nu(X_t, 0) + \nu(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)) = \nu(X, 0) + \nu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Pela Equação (2.2), $\nu(X_t, 0) = \nu(X, 0)$. Portanto,

$$\sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} \mu(f_t, y) + \nu(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0) = \nu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Novamente, pela fórmula de Lê-Greuel aplicada a $\mu(f_t, y)$,

$$\sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} (\nu(X_t, y) + \nu(X_t \cap f_t^{-1}(0), y)) + \nu(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0) = \nu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Então

$$\sum_{y \in S(f_t|_{X_t^0})} \nu(X_t, y) + \sum_{y \in S(f_t)} \nu(X_t \cap f_t^{-1}(0), y) = \nu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

■

Corolário 2.2.8. *Se F é Whitney equisingular, então F é μ -constante e $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, são constantes em $t \in D$, onde d é a dimensão de X e $m_i(X_t, 0)$ é a i -ésima multiplicidade polar de $(X_t, 0)$.*

Demonstração: Como F é Whitney equisingular, $(\mathcal{X}, 0)$ também é Whitney equisingular. Então, pelo Teorema 2.2.3, $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, são constantes em $t \in D$.

Além disso, como F é boa, segue pelo Corolário 2.2.5 que F é μ -constante.

■

No caso particular em que a IDS é uma ICIS ($s = 1$), apresentamos condições suficientes para F ser Whitney equisingular.

Teorema 2.2.9. *Se $s = 1$, F é μ -constante, $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, e $m_k(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$, $k = 0, \dots, d-1$, são constantes em $t \in D$, então F é Whitney equisingular, onde $m_i(X_t, 0)$ é a i -ésima multiplicidade polar de $(X_t, 0)$ e $m_k(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$ é a k -ésima multiplicidade polar de $(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$.*

Demonstração: Como F é μ -constante e $(\mathcal{X}, 0)$ é boa, então F é boa, pelo Corolário 2.2.5. Portanto, existe um representante definido em $D \times U$, onde D e U são vizinhanças abertas da origem em \mathbb{C} e \mathbb{C}^N respectivamente, tais que $X_t \setminus \{0\}$ é suave e f_t é regular em $X_t \setminus \{0\}$, para qualquer $t \in D$.

Este representante de F admite a estratificação

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{X} \setminus F^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\}), F^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\}) \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\}\}$$

e

$$\mathcal{A}' = \{(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\}\}.$$

Denotamos $A = \mathcal{X} \setminus F^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\})$, $B = F^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\}) \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$, $C = \mathbb{C} \times \{0\}$, $A' = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$ e $B' = \mathbb{C} \times \{0\}$.

Notemos que F leva estratos de \mathcal{A} submersivamente a estratos de \mathcal{A}' . De fato, olhando para o primeiro estrato temos

$$\begin{aligned} F|_A: \quad A &\rightarrow A' \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) = (t, f_t(x)). \end{aligned}$$

Se $(t, x) \in A$, então $(t, x) \in \mathcal{X}$ com $f_t(x) \neq 0$. Assim, $x \neq 0$ pois $f_t(0) = 0$. Portanto, $F|_A$ é regular pois F é boa.

Para o segundo estrato,

$$\begin{aligned} F|_B: \quad B &\rightarrow B' \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) = (t, 0) \end{aligned}$$

é uma submersão pois a dimensão da $\text{Im } dF|_B$ é 1 que é igual ao rank da matriz Jacobiana de $F|_B$.

Além disso,

$$\begin{aligned} F|_C: \quad C &\rightarrow B' \\ (t, 0) &\mapsto (t, 0) \end{aligned}$$

é uma submersão pois é a “aplicação identidade”.

Mostraremos agora que os pares de estratos de \mathcal{A} satisfazem as condições de Whitney. Temos A um conjunto aberto em \mathcal{X}^0 , onde $\mathcal{X}^0 = \mathcal{X} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$. Como $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, são constantes em $t \in D$, então (\mathcal{X}^0, C) satisfaz as condições de Whitney (ver [17, Teorema 1]). Então (A, C) também satisfaz as condições de Whitney. Além disso, $m_k(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$, $k = 0, \dots, d-1$, são constantes em $t \in D$, portanto (B, C) satisfaz as condições de Whitney, novamente utilizando o Teorema 1 de [17].

O par (A, B) , por definição, satisfaz as condições de Whitney pois para cada $(t, y) \in B$, como \mathcal{X} é uma variedade, existe um difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow U'$, onde U e U' são vizinhanças abertas em \mathbb{C}^{d+1} e $\mathcal{X} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$ respectivamente com $(t, y) \in U$ e d é a dimensão de X tal que o par $(\varphi^{-1}(A \cap U'), \varphi^{-1}(B \cap U'))$ satisfaz as condições de Whitney pois $\varphi^{-1}(A \cap U')$ é um aberto em \mathbb{C}^{d+1} e assim $\varphi^{-1}(A \cap U')$ contém todas as secantes.

O par de estratos de \mathcal{A}' claramente satisfaz as condições de Whitney.

Além disso, (A, C) e (B, C) satisfazem a condição A_F de Thom pois dada $\{(t_i, x_i)\}$ sequência em A (respectivamente em B) com $\{(t_i, x_i)\} \rightarrow (t, 0)$, onde $(t, 0) \in C$, tal que $\{\ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}\} \rightarrow T$ temos $F|_C(t, 0) = (t, 0)$ e portanto $\ker d(F|_C)_{(t, 0)} = \{0\} \subset T$.

O par (A, B) satisfaz a condição A_F de Thom pois F é uma submersão em \mathcal{X}^0 . De fato, seja $\{(t_i, x_i)\}$ sequência em A com $\{(t_i, x_i)\} \rightarrow (t, x)$, onde $(t, x) \in B$, tal que $\{\ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}\} \rightarrow T$. Como F é boa, segue que F é submersão em \mathcal{X}^0 . Logo, $\{\ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}\} \rightarrow \ker d(F|_A)_{(t, x)}$.

Agora, $\ker d(F|_{\mathcal{X}^0})_{(t_i, x_i)} = \ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}$ pois A é aberto em \mathcal{X}^0 . Assim, $\{\ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}\} \rightarrow \ker d(F|_{\mathcal{X}^0})_{(t, x)}$. Portanto, $T = \ker d(F|_{\mathcal{X}^0})_{(t, x)}$.

Além disso,

$$\ker d(F|_B)_{(t,x)} = \ker dF_{(t,x)}|_{T_{(t,x)}B} = \ker dF_{(t,x)} \cap T_{(t,x)}B \subset \ker dF_{(t,x)} = \ker d(F|_{\mathcal{X}^0})_{(t,x)} = T.$$

Assim, F é Whitney equisingular. ■

Nosso objetivo é estudar o teorema anterior para uma IDS (Teorema 2.2.24). Para isso, vamos introduzir a $(d-1)$ -ésima multiplicidade polar da fibra $Y := X \cap f^{-1}(0)$ de uma IDS $(X, 0)$ (Definição 2.2.17). Para garantir sua boa definição precisamos do Lema 2.2.14 e do Teorema 2.2.15.

Considerando $(X, 0)$ uma IDS, $f: (X, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada, $b = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{C}^N$ e $f_b|_{X_A}: X_A \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f_b(x_1, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_N) + b_1x_1 + \dots + b_Nx_N,$$

Ament, Nuño-Ballesteros, Oréface-Okamoto e Tomazella em [2] obtêm o seguinte resultado relacionado à fibra da IDS.

Lema 2.2.10. *[2, Lema 3.1] Existe um aberto de Zariski não vazio $W \subset \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ tal que para todo $(b, A, e) \in W$ temos $X_A \cap f_b^{-1}(e)$ é suave e $\text{rank}(\psi_A(x)) = s - 1$, para todo $x \in X_A \cap f_b^{-1}(e)$.*

Lema 2.2.11. *Assumimos que $(\mathcal{X}, 0)$ é uma suavização determinantal de $(X, 0)$ e F é tal que f_t é regular, para $t \neq 0$ suficientemente pequeno. Então*

$$\nu(Y, 0) = (-1)^{d-1}(\chi(Y_t) - 1),$$

onde $Y_t = X_t \cap f_t^{-1}(0)$.

Demonstração: Tomamos um representante $\Psi: D \times U \rightarrow M_{m,n}$, onde D, U são bolas abertas suficientemente pequenas centradas na origem em \mathbb{C}, \mathbb{C}^N respectivamente tais que Y_t é suave e $\text{rank}(\psi_t(x)) = s - 1$ para todo $x \in Y_t$ e para todo $t \in D \setminus \{0\}$. Seja W o conjunto aberto de Zariski dado pelo Lema 2.2.10, isto é,

$$W = \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \setminus K,$$

onde

$$K = \{\alpha = (b, A, e) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \mid Y_\alpha \text{ não é regular ou } \text{rank}(\psi_A(x)) < s - 1, \text{ para algum } x \in Y_\alpha\}.$$

Construímos uma nova deformação como soma das duas deformações X_t e X_A , isto é, para cada $(\alpha, t) = (b, A, e, t) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times D$ denotamos

$$X_{(A,t)} = (\psi_t + A)^{-1}(M_{m,n}^s),$$

$$f_{(b,t)}|_{X_{(A,t)}}: X_{(A,t)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_{(b,t)}(x_1, \dots, x_N) := f_t(x_1, \dots, x_N) + b_1x_1 + \dots + b_Nx_N \text{ e}$$

$$Y_{(\alpha,t)} := X_{(A,t)} \cap f_{(b,t)}^{-1}(e).$$

Mostraremos que existe um subconjunto aberto de Zariski $W_0 \subset \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times D$ tal que

(1) $Y_{(\alpha,t)}$ é suave e $\text{rank}(\psi_t(x) + A) = s - 1$, para todo $x \in Y_{(\alpha,t)}$ e para todo $(\alpha, t) \in W_0$;

(2) $\chi(Y_{(\alpha,t)})$ não depende de $(\alpha, t) \in W_0$.

Para a primeira parte, consideramos

$$\tilde{C} = \{(\alpha, t, x) \mid x \text{ é um ponto singular de } Y_{(\alpha,t)} \text{ ou } \text{rank}(\psi_t(x) + A) < s - 1\}$$

e $W_0 = (\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus C$, onde

$$C = \{(\alpha, t) \mid Y_{(\alpha,t)} \text{ não é regular ou } \text{rank}(\psi_t(x) + A) < s - 1 \text{ para algum } x \in Y_{(\alpha,t)}\}.$$

Usando o Critério Jacobiano obtemos que \tilde{C} é um conjunto analítico (ver [29, Teorema 4.3.15]).

Consideramos $\pi_1: (\tilde{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0)$, $\pi_1(\alpha, t, x) := (\alpha, t)$. É fácil ver que $\pi_1^{-1}(0) = \{0\}$, pois f tem singularidade em 0. Então, pelo Lema 1.3.2, π_1 é uma aplicação finita. Assim, pelo Lema 1.3.3, a imagem $C = \pi_1(\tilde{C})$ é analítica.

Tomamos $B \subset U$ uma bola fechada perto da origem em \mathbb{C}^N , suficientemente pequena, tal que 0 é a única singularidade de X em B e ∂B é transversal a X e a $X \cap f^{-1}(0)$.

Seja

$$\begin{aligned} \xi: \quad \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times B &\rightarrow M_{m,n} \times \mathbb{C} \\ (\alpha, t, x) &\mapsto (\psi_t(x) + A, f_{(b,t)}(x) - e). \end{aligned}$$

Temos que as aplicações ξ e $\partial\xi = \xi|_{\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \partial B}$ são submersões. Então, pelo Teorema 1.8.1 para quase todo (α, t) , $\xi_{(\alpha,t)}$ e $\partial\xi_{(\alpha,t)}$ são transversais a $\Sigma^{s-i} \times \{0\}$, onde $\xi_{(\alpha,t)}(x) = \partial\xi_{(\alpha,t)}(x) = \xi(\alpha, t, x)$. Mas

$$\dim \mathbb{C}^N + \dim \Sigma^{s-i} \times \{0\} = N + mn - (m - s + i)(n - s + i) < mn$$

se $i > 1$. Assim, $\xi_{(\alpha,t)}(\mathbb{C}^N) \cap (\Sigma^{s-i} \times \{0\}) = \emptyset$.

Então $Y_{(\alpha,t)} = \xi_{(\alpha,t)}^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\})$ é suave e C é próprio.

Mostraremos agora a segunda parte. Seja

$$\begin{aligned} \pi: \quad \xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) &\rightarrow W_0 \\ (\alpha, t, x) &\mapsto (\alpha, t). \end{aligned}$$

Usamos o Lema 1.8.2 para mostrar que π é uma fibração. Para isso provamos primeiro que π é própria. De fato, seja $K \subset W_0$ compacto. Então K é fechado e limitado. Notamos que

$$\pi^{-1}(K) \subseteq K \times B \subseteq \xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}).$$

Como $\pi: \xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) \rightarrow W_0$ é contínua, então $\pi^{-1}(K)$ é fechado em $\xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\})$. Assim, $\pi^{-1}(K)$ é fechado em $K \times B$. Portanto, $\pi^{-1}(K)$ é fechado no espaço ambiente.

Além disso, K é limitado então existe $R \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\alpha, t, x) \in \pi^{-1}(K) \text{ então } \|(\alpha, t)\| < R.$$

Como $x \in B$, então $\|(\alpha, t, x)\| < R + \epsilon$, onde ϵ é o raio de B . Assim, $\pi^{-1}(K)$ é limitado e, portanto, π é própria.

Se $(\alpha, t) \in W_0$, então $\xi_{(\alpha,t)}$ é transversal a $\Sigma^{s-1} \times \{0\}$ e $\partial\xi_{(\alpha,t)}$ é transversal a $\Sigma^{s-1} \times \{0\}$ (Teorema 1.8.1). Usando primeiro que $\xi_{(\alpha,t)}$ é transversal a $\Sigma^{s-1} \times \{0\}$,

$$d\xi_{(\alpha,t)}|_x(T_x \mathbb{C}^N) + T_{\xi_{(\alpha,t)}(x)}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) = T_{\xi_{(\alpha,t)}(x)}(M_{m,n} \times \mathbb{C}).$$

Então

$$d\xi_{(\alpha,t,x)}(0 \times 0 \times 0 \times 0 \times T_x \mathbb{C}^N) + T_{\xi_{(\alpha,t,x)}}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) = T_{\xi_{(\alpha,t,x)}}(M_{m,n} \times \mathbb{C}).$$

Temos

$$\begin{aligned}
& T_{(\alpha,t,x)}(\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N) \\
&= (d\xi_{(\alpha,t,x)})^{-1}(T_{\xi_{(\alpha,t,x)}}(M_{m,n} \times \mathbb{C})) \\
&= 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times T_x \mathbb{C}^N + (d\xi_{(\alpha,t,x)})^{-1}(T_{\xi_{(\alpha,t,x)}}(\Sigma^{s-1} \times \{0\})) \\
&= 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times T_x \mathbb{C}^N + T_{(\alpha,t,x)} \xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}).
\end{aligned}$$

Assim

$$d\pi|_{(\alpha,t,x)}(T_{(\alpha,t,x)} \xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\})) = T_{(\alpha,t)}(\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}).$$

Então (α, t) é um valor regular de $\pi|_{\xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) \setminus \partial(\xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}))}$.

Portanto, $\pi|_{\xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) \setminus \partial(\xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}))}$ é uma submersão.

Agora, usando que $\partial\xi_{(\alpha,t)}$ é transversal a $\Sigma^{s-1} \times \{0\}$ e repetindo o raciocínio anterior concluímos que (α, t) é um valor regular de $\pi|_{\partial(\xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}))}$. Assim, $\pi|_{\partial(\xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}))}$ é uma submersão.

Portanto, π é uma fibração sobre o conjunto conexo W_0 . Temos

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\alpha, t) &= \{(\alpha, t, x) \mid (\alpha, t, x) \in \xi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\})\} \\
&= \{(\alpha, t, x) \mid \xi(\alpha, t, x) \in \Sigma^{s-1} \times \{0\}\} \\
&= \{(\alpha, t, x) \mid \xi_{(\alpha,t)}(x) \in \Sigma^{s-1} \times \{0\}\} \\
&= \{(\alpha, t, x) \mid x \in Y_{(\alpha,t)}\} \\
&= \{(\alpha, t)\} \times Y_{(\alpha,t)}.
\end{aligned}$$

Então

$$\chi(Y_{(\alpha,t)}) = \chi(\{(\alpha, t)\} \times Y_{(\alpha,t)}) = \chi(\pi^{-1}(\alpha, t)).$$

Portanto, $\chi(Y_{(\alpha,t)})$ não depende de (α, t) em W_0 .

Consideramos agora $\alpha \in W$ e $t \in D \setminus \{0\}$. Então $(\alpha, 0) \in W_0$ e $(0, 0, 0, t) \in W_0$ pois $Y_{(\alpha,0)} = Y_\alpha$ que é suave pelo Lema 2.2.10 e $\text{rank}(\psi_0(x) + A) = \text{rank}(\psi(x) + A) = s - 1$, para todo $x \in Y_\alpha$. Além disso, $X_{(0,t)} \cap f_{(0,t)} = X_t \cap f_t^{-1}(0)$ é suave e $\text{rank}(\psi_t(x)) = s - 1$, para todo $x \in X_t \cap f_t^{-1}(0)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\nu(Y, 0) &= (-1)^{d-1}(\chi(Y_\alpha) - 1) \\
&= (-1)^{d-1}(\chi(X_A \cap f_b^{-1}(e)) - 1) \\
&= (-1)^{d-1}(\chi(X_{(A,0)} \cap f_{(b,0)}^{-1}(e)) - 1) \\
&= (-1)^{d-1}(\chi(X_{(0,t)} \cap f_{(0,t)}^{-1}(0)) - 1) \\
&= (-1)^{d-1}(\chi(Y_t) - 1).
\end{aligned}$$

■

Para a demonstração do Lema 2.2.13 vamos precisar do seguinte resultado que nos garante que uma determinada função restrita a um conjunto analítico suave é Morse em quase todo ponto.

Lema 2.2.12. [45, Lema A.2] *Sejam $V \subset \mathbb{C}^N$ um subconjunto analítico suave e $f: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Denotamos $f_a(x_1, \dots, x_N) := f(x_1, \dots, x_N) + a_1x_1 + \dots + a_Nx_N$ se $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$. Então $f_a|_V$ é uma função de Morse para quase todo ponto $a \in \mathbb{C}^N$.*

Lema 2.2.13. *Nas notações da prova do Lema 2.2.11, existe uma função linear $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ tal que o conjunto $W \subset \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de pontos $(\alpha, t) = (b, A, e, t)$ nos quais $p|_{Y_{(\alpha,t)}}$ é uma função de Morse é um conjunto aberto de Zariski não vazio.*

Demonstração: Tomamos $(\alpha_0, t_0) = (b_0, A_0, e_0, t_0) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tal que $Y_{(\alpha_0, t_0)}$ é suave (existe (α_0, t_0) , pela primeira parte da prova do Lema 2.2.11). Consideramos $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ e denotamos por $p_a: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ a função linear $p_a(x_1, \dots, x_N) = a_1x_1 + \dots + a_Nx_N$. Pelo Lema 2.2.12, tomando $f \equiv 0$, podemos escolher um ponto $a \in \mathbb{C}^N$ tal que $p_a|_{Y_{(\alpha_0, t_0)}}$ e $p_a|_{Y \setminus \{0\}}$ são funções de Morse. Escolhemos uma destas p_a 's.

Definimos \tilde{C} como o subconjunto de pontos $(\alpha, t, x) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ tal que cada x é um ponto singular de $Y_{(\alpha,t)}$ ou x é um ponto crítico degenerado de $p_a|_{Y_{(\alpha,t)}}$.

Pelo Lema 2.1.2, \tilde{C} é analítico.

Seja

$$\begin{aligned}
\pi: \quad (\tilde{C}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \\
(\alpha, t, x) &\mapsto (\alpha, t).
\end{aligned}$$

Temos $\pi^{-1}(0) = \{0\}$ pois se x é um ponto singular de Y então $x = 0$ devido ao fato que f tem singularidade em 0. Agora, se x é um ponto degenerado de Y , então $x = 0$

pois p_a foi escolhida tal que $p_a|_{Y \setminus \{0\}}$ é uma função de Morse. Então, pelo Lema 1.3.2, π é uma aplicação finita. Assim, pelo Lema 1.3.3, a imagem $C := \pi(\tilde{C})$ é analítica. Portanto, $W = \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus C$ é um conjunto aberto de Zariski. Como $(\alpha_0, t_0) \in W$, W é não vazio. ■

Lema 2.2.14. *Seja $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ uma função linear genérica e $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno. Então*

$$\begin{aligned} \nu(Y \cap p^{-1}(0), 0) &= (-1)^{d-2}(\chi(Y \cap p^{-1}(c)) - 1) \\ &= (-1)^{d-2}(\chi(Y_\alpha \cap p^{-1}(0)) - 1) \\ &= (-1)^{d-2}(\chi(Y_\alpha \cap p^{-1}(c)) - 1), \end{aligned}$$

onde $d = \dim(X, 0)$ e $Y_\alpha = X_A \cap f_b^{-1}(e)$ com $\alpha = (b, A, e) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ genérico.

Demonstração: Tomando uma mudança linear de coordenadas, podemos assumir que $p(x_1, \dots, x_N) = x_N$. Denotamos para cada $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\psi_c(x_1, \dots, x_{N-1}) = \psi(x_1, \dots, x_{N-1}, c).$$

Temos as seguintes identificações:

(1) $(Y \cap p^{-1}(0), 0)$ corresponde com $(Z \cap f^{-1}(0), 0)$, onde $(Z, 0) = (\psi_0^{-1}(M_{m,n}^s), 0)$.

De fato, $Z \cap f^{-1}(0) = \psi_0^{-1}(M_{m,n}^s) \cap f^{-1}(0)$ mas $\psi_0(x_1, \dots, x_{N-1}) = \psi(x_1, \dots, x_{N-1}, 0) = \psi(x_1, \dots, x_{N-1}, p(x_1, \dots, x_{N-1}, 0))$. Logo, $Z \cap f^{-1}(0) = \psi_0^{-1}(M_{m,n}^s) \cap f^{-1}(0)$ corresponde a $\psi^{-1}(M_{m,n}^s) \cap p^{-1}(0) \cap f^{-1}(0) = Y \cap p^{-1}(0)$.

Analogamente, temos as demais correspondências.

(2) $Y_\alpha \cap p^{-1}(0)$ corresponde com $Z_A \cap f_b^{-1}(e)$, onde $Z_A = (\psi_0 + A)^{-1}(M_{m,n}^s)$;

(3) $Y \cap p^{-1}(c)$ é homeomorfo a $Z_c \cap f^{-1}(0)$, onde $Z_c = (\psi_c)^{-1}(M_{m,n}^s)$;

(4) $Y_\alpha \cap p^{-1}(c)$ é isomorfo a $Z_{(A,c)} \cap f_{(b,c)}^{-1}(e)$, onde $Z_{(A,c)} = (\psi_c + A)^{-1}(M_{m,n}^s)$.

Usando os mesmos resultados da prova do Lema 2.2.11 temos o desejado. ■

Seja $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ uma função linear genérica. Temos que $(X \cap p^{-1}(0), 0)$ é também uma IDS no hiperplano $p^{-1}(0)$.

Temos $(X \cap p^{-1}(0))_A = X_A \cap p^{-1}(0)$. De fato, nas notações do Lema 2.2.14,

$$(X \cap p^{-1}(0))_A = (\psi_0 + A)^{-1}(M_{m,n}^s) = (\psi + A)^{-1}(M_{m,n}^s) \cap p^{-1}(0) = X_A \cap p^{-1}(0),$$

aplicando a Equação (2.1) para a fibra da IDS $(X \cap p^{-1}(0), 0)$ temos

$$\nu(X \cap p^{-1}(0) \cap f^{-1}(0), 0) := (-1)^{d-2}(\chi(X_A \cap p^{-1}(0) \cap f_b^{-1}(e)) - 1),$$

com $(b, A, e) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ valores genéricos tais que $X_A \cap p^{-1}(0)$ é suave, $f_b|_{X_A \cap p^{-1}(0)}$ é uma função de Morse e e é um valor regular de $f_b|_{X_A \cap p^{-1}(0)}$.

Teorema 2.2.15. *Seja $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função com singularidade isolada em uma IDS $(X, 0)$. Seja $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ uma função linear genérica, $\alpha = (b, A, e) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ genérico e $Y_\alpha = X_A \cap f_b^{-1}(e)$. Então*

$$\sharp S(p|_{Y_\alpha}) = \nu(Y, 0) + \nu(Y \cap p^{-1}(0), 0).$$

Demonstração: Escolhemos $\alpha = (b, A, e) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ genérico tal que Y_α é suave e $p|_{Y_\alpha}$ é uma função de Morse (existe α , pelo Lema 2.2.10 e pela prova do Lema 2.2.13 para $t = 0$). Seja $c \in \mathbb{C}$ um valor regular de $p|_{Y_\alpha}$. Pelo Teorema 2.1.6 e pelo Lema 2.2.14,

$$\begin{aligned} \sharp S(p|_{Y_\alpha}) &= (-1)^d(\chi(p^{-1}(c) \cap Y_\alpha) - \chi(Y_\alpha)) \\ &= (-1)^d(\chi(p^{-1}(c) \cap Y_\alpha) - 1 + 1 - \chi(Y_\alpha)) \\ &= (-1)^d((-1)^{d-2}\nu(Y \cap p^{-1}(0), 0) + (-1)(-1)^{d-1}\nu(Y, 0)) \\ &= \nu(Y \cap p^{-1}(0), 0) + \nu(Y, 0). \end{aligned}$$

■

Observação 2.2.16. *Notamos que $\sharp S(p|_{Y_\alpha})$ não depende da escolha da função linear p e nem de α .*

De fato, por Lê e Teissier em [34] e pelo Lema 2.2.14 temos

$$Eu(Y, 0) = \chi(Y \cap p^{-1}(t)) = (-1)^{d-2}\nu(Y \cap p^{-1}(0), 0) + 1,$$

onde $Eu(Y, 0)$ é a obstrução de Euler local.

Pelo Teorema 2.2.15

$$\sharp S(p|_{Y_\alpha}) = \nu(Y, 0) + (-1)^{d-2} Eu(Y, 0) + (-1)^{d-1}.$$

A partir dessa observação fica bem definida a seguinte:

Definição 2.2.17. *A $(d-1)$ -ésima multiplicidade polar da fibra é*

$$m_{d-1}(Y, 0) := \sharp S(p|_{Y_\alpha}),$$

onde $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função linear, $\alpha = (b, A, e) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ é genérico e d é a dimensão de $(X, 0)$.

No caso de uma ICIS de dimensão d , Jorge Perez e Saia em [30] provaram que

$$1 + (-1)^d \mu(X, 0) = \sum_{i=0}^d (-1)^i m_i(X, 0). \quad (2.3)$$

Como, para $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada temos que $(X \cap f^{-1}(0), 0)$ é também uma ICIS, de dimensão $d-1$, podemos aplicar a fórmula acima para $(X \cap f^{-1}(0), 0)$.

Em [45, Teorema 4.5] é provado um resultado similar para uma IDS $(X, 0)$ de dimensão d , isto é,

$$Eu(X, 0) + (-1)^d m_d(X, 0) = 1 + (-1)^d \nu(X, 0).$$

Temos o seguinte resultado que nos garante que esta fórmula é também válida para a fibra, $Y = X \cap f^{-1}(0)$, da IDS $(X, 0)$.

Corolário 2.2.18. *Sejam $(X, 0)$ uma IDS e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada. Então*

$$Eu(Y, 0) + (-1)^{d-1} m_{d-1}(Y, 0) = 1 + (-1)^{d-1} \nu(Y, 0).$$

Com isso, obtemos para $(Y, 0)$ uma fórmula semelhante à provada em [47,

Corolário 3.3] para uma IDS $(X, 0)$ d -dimensional

$$\nu(X, 0) = (-1)^d \left(\sum_{i=0}^d (-1)^i m_i(X, 0) - 1 \right).$$

Corolário 2.2.19. *Sejam $(X, 0)$ uma IDS e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada. Então*

$$\nu(Y, 0) = (-1)^{d-1} \left(\sum_{i=0}^{d-2} (-1)^{d-i-2} m_i(Y, 0) - 1 \right) + m_{d-1}(Y, 0).$$

Demonstração: Pelo Corolário 2.2.18,

$$\nu(Y, 0) = (-1)^{d-1} Eu(Y, 0) + m_{d-1}(Y, 0) + (-1)^d.$$

Pelo Teorema 1.9.1,

$$Eu(Y, 0) = \sum_{i=0}^{d-2} (-1)^{d-i-2} m_i(Y, 0).$$

Portanto,

$$\nu(Y, 0) = (-1)^{d-1} \left(\sum_{i=0}^{d-2} (-1)^{d-i-2} m_i(Y, 0) - 1 \right) + m_{d-1}(Y, 0).$$

■

Como $\nu(X, 0)$ e $\nu(Y, 0)$ podem ser escritas em termos das multiplicidades $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, e $m_k(Y_t, 0)$, $k = 0, \dots, d - 1$, respectivamente, então pela fórmula de Lê-Greuel temos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.20. *Sejam $F = \{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}_{t \in D}$ uma família de funções com singularidade isolada em IDS. Se $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, e $m_k(Y_t, 0)$, $k = 0, \dots, d - 1$, são constantes em $t \in D$, então F é μ -constante.*

Nosso objetivo agora é provar, no Teorema 2.2.23, que se $m_k(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$ são constantes, para todo $k = 1, \dots, d - 1$, então $(F^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\}) \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz as condições de Whitney. Para isto precisamos estudar alguns resultados de [47] para a fibra $(Y, 0)$.

Lema 2.2.21. *Seja $F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento qualquer de uma função $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com singularidade isolada em uma IDS $(X, 0)$. Para todo t suficientemente pequeno,*

$$m_{d-1}(Y, 0) = \sum_{y \in S(p|_{Y_t^0})} \mu(p|_{Y_t}, y) + \sum_{z \in S(Y_t)} m_{d-1}(Y_t, z),$$

onde $S(Y_t)$ é o conjunto singular de Y_t e $Y_t^0 = Y_t \setminus S(Y_t)$.

Demonstração: Escolhemos uma vizinhança aberta B_ϵ de Y tal que em B_ϵ a origem é o único ponto singular de Y .

Denotamos por z_1, \dots, z_k e y_1, \dots, y_l os pontos singulares de Y_t e $p|_{Y_t^0}$, respectivamente.

Para cada $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, l$, escolhemos um disco de Milnor D_i para (Y_t, z_i) e E_j em torno de y_j para $p|_{Y_t^0}$ tal que os discos são dois a dois disjuntos.

Seja p_a uma deformação linear genérica de p tal que $p_a|_{Y_{(\alpha, t)}}$ é uma função de Morse (existe tal p_a devido a prova do Lema 2.2.13).

Assim,

$$\begin{aligned} m_{d-1}(Y, 0) &= \#S(p_a|_{Y_{(\alpha, t)}}) \\ &= \sum_{j=1}^l \#S(p_a|_{Y_{(\alpha, t)} \cap E_j}) + \sum_{i=1}^k \#S(p_a|_{Y_{(\alpha, t)} \cap D_i}) \\ &= \sum_{j=1}^l \mu(p|_{Y_t}, y_j) + \sum_{i=1}^k m_{d-1}(Y_t, z_i). \end{aligned}$$

■

Sejam $(\mathcal{X}, 0)$ uma variedade $(d+1)$ -dimensional e $\pi: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a projeção $\pi(t, x) = t$. Em [53] estão definidas as multiplicidades polares relativas, $m_i(\mathcal{X}, \pi, 0)$, como a multiplicidade polar relativa da variedade polar $\overline{\{(t, x) \mid x \in S(p|_{X_t^0})\}}$, onde $p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-i+1}$ é uma projeção linear genérica e $i = 0, \dots, d$.

Lema 2.2.22. *Se $(\mathcal{Y}, 0)$ é uma família boa e $m_{d-1}(Y_t, 0)$ é constante, então $m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, 0) = 0$, onde $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \cap F^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\})$ e $\pi: (\mathcal{Y}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é a projeção $\pi(t, x) = t$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.2.21,

$$m_{d-1}(Y, 0) = \sum_{y \in S(p|_{Y_t^0})} \mu(p|_{Y_t}, y) + m_{d-1}(Y_t, 0).$$

Como $m_{d-1}(Y_t, 0)$ é constante, $\sum_{y \in S(p|_{Y_t^0})} \mu(p|_{Y_t}, y) = 0$. Então $\mu(p|_{Y_t}, y) = 0$ para todo $y \in S(p|_{Y_t^0})$. Logo, $S(p|_{Y_t^0}) = \emptyset$. Denotamos $P(t, x) = (t, p(x))$ e temos

$$m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, 0) = m_0(\overline{S(P|_{\mathcal{Y}^0})}, 0) = m_0(\overline{\{(t, x) \mid x \in S(p|_{Y_t^0})\}}, 0) = m_0(\emptyset, 0) = 0.$$

■

Teorema 2.2.23. *Se $(\mathcal{Y}, 0) = (\mathcal{X} \cap F^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\}), 0)$ é uma família boa, então $m_k(Y_t, 0)$, $k = 0, \dots, d-1$, são constantes em $t \in D$ se, e somente se, o par $(\mathcal{Y} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz as condições de Whitney.*

Demonstração: Como $m_k(Y_t, 0)$, $k = 0, \dots, d-1$, são constantes em $t \in D$, então $m_{d-1}(Y_t, 0)$ é constante. Logo, pelo Lema 2.2.22, $m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, 0) = 0$. Assim, por [18, Corolário 5.12], $(\mathcal{Y} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz as condições de Whitney.

Reciprocamente, assumimos que $(\mathcal{Y} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz as condições de Whitney. Por resultados de Teissier em [53], $m_k(\mathcal{Y}, \pi, (t, 0))$ é constante em $t \in D$ para $k = 1, \dots, d-1$. Assim, $m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, (t, 0))$ é constante em $t \in D$.

Suponha que $m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, (t, 0)) = m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, 0) \neq 0$ para $t \in D$.

Como $(t, 0) \notin S(P|_{\mathcal{Y}^0})$ pois $Y_t^0 = Y_t \setminus \{0\}$, então $T = D \times \{0\} \subset \overline{S(P|_{\mathcal{Y}^0})} \setminus S(P|_{\mathcal{Y}^0})$. Por outro lado, como $\overline{S(P|_{\mathcal{Y}^0})}$ é analítico de dimensão 1, então $\overline{S(P|_{\mathcal{Y}^0})} \setminus S(P|_{\mathcal{Y}^0})$ tem dimensão 0. Portanto, $T = D \times \{0\}$ está contido em um conjunto de dimensão 0, mas isso é um absurdo. Então $m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, (t, 0)) = m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, 0) = 0$ para $t \in D$.

Portanto,

$$m_{d-1}(\mathcal{Y}, \pi, 0) = m_0(\overline{S(P|_{\mathcal{Y}^0})}, 0) = m_0(\overline{\{(t, x) \mid x \in S(p|_{Y_t^0})\}}, 0) = 0.$$

Então $S(P|_{\mathcal{Y}^0}) = \emptyset$ e, assim, $S(p|_{Y_t^0}) = \emptyset$. Portanto, $\sum_{y \in S(p|_{Y_t^0})} \mu(p|_{Y_t}, y) = 0$. Pelo

Lema 2.2.21,

$$m_{d-1}(Y, 0) = m_{d-1}(Y_t, 0),$$

então $m_{d-1}(Y_t, 0)$ é constante.

Para $k = 0, \dots, d-2$, $m_k(Y_t, 0)$ são constantes por [18, Teorema 5.6].

■

Teorema 2.2.24. *Se $(\mathcal{X}, 0)$ é uma família boa, $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, e $m_k(Y_t, 0)$, $k = 0, \dots, d-1$, são constantes em $t \in D$, então F é Whitney equisingular.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.2.20, F é μ -constante. Além disso, $(\mathcal{X}, 0)$ é boa. Então F é boa, pelo Corolário 2.2.5. Portanto, existe um representante definido em $D \times U$, onde D e U são vizinhanças abertas da origem em \mathbb{C} e \mathbb{C}^N respectivamente, tais que $X_t \setminus \{0\}$ é suave e f_t é regular em $X_t \setminus \{0\}$, para qualquer $t \in D$.

Este representante de F admite a estratificação

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\}\}$$

e

$$\mathcal{A}' = \{(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\}\},$$

onde $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \cap F^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\})$, \mathcal{A} é uma estratificação de \mathcal{X} e \mathcal{A}' é uma estratificação de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Denotamos $A = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, $B = \mathcal{Y} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$, $C = \mathbb{C} \times \{0\}$, $A' = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$ e $B' = \mathbb{C} \times \{0\}$.

Notemos que F leva estratos de \mathcal{A} submersivamente a estratos de \mathcal{A}' . De fato, olhando para o primeiro estrato temos

$$\begin{aligned} F|_A: \quad A &\rightarrow A' \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) = (t, f_t(x)). \end{aligned}$$

Se $(t, x) \in A$, então $(t, x) \in \mathcal{X}$ com $f_t(x) \neq 0$. Assim, $x \neq 0$ pois $f_t(0) = 0$. Portanto, $F|_A$ é regular pois F é boa.

Para o segundo estrato,

$$\begin{aligned} F|_B: \quad B &\rightarrow B' \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) = (t, 0) \end{aligned}$$

é uma submersão pois a dimensão da $\text{Im } dF|_B$ é 1 que é igual ao rank da matriz Jacobiana de $F|_B$.

Além disso,

$$\begin{aligned} F|_C: \quad C &\rightarrow B' \\ (t, 0) &\mapsto (t, 0) \end{aligned}$$

é uma submersão pois é a “aplicação identidade”.

Mostraremos agora que os pares de estratos de \mathcal{A} satisfazem as condições de Whitney. Temos A um conjunto aberto em \mathcal{X}^0 , onde $\mathcal{X}^0 = \mathcal{X} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$. Como $(\mathcal{X}, 0)$ é boa e $m_i(X_t, 0)$, $i = 0, \dots, d$, são constantes em $t \in D$, então (\mathcal{X}^0, C) satisfaz as condições de Whitney, pelo Teorema 2.2.3. Então (A, C) também satisfaz as condições de Whitney.

Como F é boa, então $(\mathcal{Y}, 0)$ é boa. Logo, o par (B, C) satisfaz as condições de Whitney, pelo Teorema 2.2.23.

O par (A, B) , por definição, satisfaz as condições de Whitney, pois para cada $(t, y) \in B$, como \mathcal{X} é variedade, existe um difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow U'$, onde U e U' são vizinhanças abertas em \mathbb{C}^{d+1} e $\mathcal{X} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$ respectivamente, com $(t, y) \in U$ e d é a dimensão de X tal que o par $(\varphi^{-1}(A \cap U'), \varphi^{-1}(B \cap U'))$ satisfaz as condições de Whitney pois $\varphi^{-1}(A \cap U')$ é um aberto em \mathbb{C}^{d+1} e assim $\varphi^{-1}(A \cap U')$ contém todas as secantes.

O par de estratos de \mathcal{A}' claramente satisfaz as condições de Whitney.

Além disso, (A, C) e (B, C) satisfazem a condição A_F de Thom pois dada $\{(t_i, x_i)\}$ sequência em A (respectivamente em B) com $\{(t_i, x_i)\} \rightarrow (t, 0)$, onde $(t, 0) \in C$, tal que $\{\ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}\} \rightarrow T$ (respectivamente para B) temos $F|_C(t, 0) = (t, 0)$ e portanto $\ker d(F|_C)_{(t, 0)} = \{0\} \subset T$.

O par (A, B) satisfaz a condição A_F de Thom pois F é uma submersão em \mathcal{X}^0 . De fato, seja $\{(t_i, x_i)\}$ sequência em A com $\{(t_i, x_i)\} \rightarrow (t, x)$, onde $(t, x) \in B$, tal que $\{\ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}\} \rightarrow T$. Como F é boa, segue que F é submersão em \mathcal{X}^0 . Logo, $\{\ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}\} \rightarrow \ker d(F|_A)_{(t, x)}$.

Agora, $\ker d(F|_{\mathcal{X}^0})_{(t_i, x_i)} = \ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}$ pois A é aberto em \mathcal{X}^0 . Assim, $\{\ker d(F|_A)_{(t_i, x_i)}\} \rightarrow \ker d(F|_{\mathcal{X}^0})_{(t, x)}$. Portanto, $T = \ker d(F|_{\mathcal{X}^0})_{(t, x)}$. Então

$$\ker d(F|_B)_{(t, x)} = \ker dF_{(t, x)}|_{T_{(t, x)}B} = \ker dF_{(t, x)} \cap T_{(t, x)}B \subset \ker dF_{(t, x)} = \ker d(F|_{\mathcal{X}^0})_{(t, x)} = T.$$

Assim, F é Whitney equisingular. ■

Por Teissier [53, Definição 1.5] temos

$$\nu^*(X_t, 0) := (\nu_0(X_t, 0), \dots, \nu_d(X_t, 0)),$$

onde $\nu_j(X_t, 0) = \nu(X \cap H^{N-(d-j)}, 0)$ com $\nu(X \cap H^{N-(d-j)}, 0)$ denotando a característica de Euler da IDS $X \cap H^{N-(d-j)}$ no hiperplano genérico $H^{N-(d-j)}$.

Por [53, Observação 1.6], $\nu_0(X_t, 0) = m_0(X_t, 0) - 1$. Além disso, para $i > 0$ $m_i(X_t, 0) = \nu_i(X_t, 0) + \nu_{i-1}(X_t, 0)$. Então $m_i(X_t, 0)$ são constantes se, e somente se, $\nu^*(X_t, 0)$ é constante.

Deformações de funções sobre ICIS

Em 1986, Greuel estudou a relação entre a constância do número de Milnor de uma família de germes de funções holomorfas $\{f_t: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$ e o fecho integral do ideal jacobiano (sem derivar com relação ao parâmetro) dessa família. O resultado de Greuel se resume em:

Teorema 3.0.1. [25, Teorema 1.1] *Seja $f: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada. Para qualquer deformação $F: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de f , as seguintes condições são equivalentes*

- (1) F é μ -constante;
- (2) Para toda curva holomorfa $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$

$$\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) > \inf \left\{ \vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \circ \gamma \right) \mid i = 1, \dots, N \right\},$$

onde ϑ denota a valorização usual da curva complexa, ou seja, é a valorização de \mathcal{O}_N que leva uma série de potências em seu menor grau;

- (3) Mesma condição de (2) com “ $>$ ” substituído por “ \geq ”;

(4) $\frac{\partial F}{\partial t} \in \bar{J}$, onde \bar{J} denota o fecho integral do ideal Jacobiano $J = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right\rangle$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} ;

- (5) $\frac{\partial F}{\partial t} \in \sqrt{J}$, onde \sqrt{J} denota o radical de J como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} ;

(6) $V(J) = \{(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \mid \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x) = 0, i = 1, \dots, N\} = \mathbb{C} \times \{0\}$ próximo de $(0, 0)$.

Ahmed, Ruas e Tomazella, em [1], estudam o Teorema 3.0.1 para o número de Bruce-Roberts. Nesse estudo, os itens (1) a (6) do Teorema 3.0.1 foram adaptados para o número de Bruce-Roberts e denotados por (1_r) a (6_r) . Eles mostram que $(2_r) \Rightarrow (3_r)$

$\Leftrightarrow (4_r) \Rightarrow (5_r), (1_r) \Rightarrow (6_r)$ e se, $C := \{(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \mid dF(\xi_i(x)) = 0, \forall i = 1, \dots, p\}$, é uma variedade Cohen-Macaulay, então $(6_r) \Rightarrow (1_r)$. Além disso, podemos ver em [1], que $(4_r) \Rightarrow (1_r)$ se $(X, 0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada cuja variedade logarítmica característica de X , $LC(X)$, é Cohen-Macaulay. Recentemente, em [42], foi provado que se $(X, 0)$ é uma hipersuperfície com singularidade isolada, então $LC(X)$ é Cohen-Macaulay.

Nosso objetivo, neste capítulo, é produzir teoremas como o de Greuel para famílias de germes de funções definidas sobre variedades singulares e relacionar as condições de Whitney com o fecho integral do ideal que define o conjunto singular de cada membro dessas famílias. Existem duas maneiras para se realizar esse estudo. A primeira é deformar apenas a função e a segunda é deformar a função e a variedade. Para a primeira opção descrevemos nossos resultados obtidos no artigo [11]. Nesse capítulo apresentamos também o estudo da segunda opção, cujo artigo está sendo preparado.

A constância do número de Milnor de uma ICIS satisfaz propriedades interessantes, como por exemplo, se o número de Milnor da ICIS é constante então o tipo topológico de uma família de ICIS de dimensão $d \neq 2$ é constante (ver em [49]).

O próximo teorema nos fornece uma fórmula para calcular o número de Milnor de uma ICIS, conhecida como *fórmula de Lê-Greuel*.

Teorema 3.0.2. [37, p.77] *Sejam $\phi_1, \dots, \phi_p \in \mathcal{O}_N$ e suponhamos que $X_1 = V(\phi_1, \dots, \phi_{p-1})$ e $X_2 = V(\phi_1, \dots, \phi_{p-1}, \phi_p)$ são ICIS. Então*

$$\mu(X_1, 0) + \mu(X_2, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1, \dots, \phi_{p-1} \rangle + I_p(J_x(\phi_1, \dots, \phi_p))}.$$

Sejam $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação holomorfa cujo conjunto de zeros define uma ICIS, $(X, 0)$, e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada.

Seja

$$\Phi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

deformação de ϕ , tal que $\phi_0 = \phi$, onde $\phi_s(x) = \Phi(s, x)$. Denotamos $\mathcal{X} = \Phi^{-1}(0)$, $(X_s, 0) := (\phi_s^{-1}(0), 0)$ e assumimos que $(X_s, 0)$ é suave para $s \neq 0$ suficientemente pequeno. Dizemos que $(\mathcal{X}, 0)$ é uma suavização de $(X, 0)$.

Além disso, seja

$$\tilde{f}: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

um germe de função holomorfa tal que para todo $s \neq 0$ suficientemente pequeno, o germe

$$\begin{aligned} f_s: (X_s, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ x &\mapsto \tilde{f}(s, x) \end{aligned}$$

é uma função de Morse.

Inspirado por [40], com o objetivo de definir o número de Milnor de f , tomamos um representante de $(\mathcal{X}, 0)$, $\mathcal{X} = \Phi^{-1}(0)$, onde $\Phi: B \rightarrow \mathbb{C}^p$ é definida em uma bola suficientemente pequena $B = B_\epsilon$ centrada na origem em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$, e o representante de \tilde{f} , $\tilde{f}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definição 3.0.3. *O número de Milnor de f é*

$$\mu(f) := \#S(f_s),$$

onde $S(f_s)$ é o conjunto dos pontos críticos do representante de f_s definido pelo representante de \tilde{f} acima.

Notamos que

$$\mu(f) = \mu(X, 0) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

De fato, se $D = \{(s, x) \in \mathcal{X} \mid x \text{ é um ponto singular de } f_s\}$ e $\pi: D \rightarrow \mathbb{C}$ é a restrição da projeção na primeira coordenada, então

$$\mu(f) = \deg(\pi).$$

Portanto,

$$\mu(f) = e \left(\langle s \rangle, \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}}{I_{p+1}(J_x(f_s, \phi_s))} \right).$$

Como $\frac{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}}{I_{p+1}(J_x(f_s, \phi_s))}$ é um anel determinantal, é Cohen-Macaulay. Assim, $e \left(\langle s \rangle, \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}}{I_{p+1}(J_x(f_s, \phi_s))} \right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}}{\langle s \rangle + I_{p+1}(J_x(f_s, \phi_s))}$ (ver [39]). Então

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle s \rangle + I_{p+1}(J_x(f_s, \phi_s))} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\mathcal{O}_{N+1}}{\langle \Phi \rangle}}{\langle s \rangle + I_{p+1}(J_x(f_s, \phi_s))} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(f, \phi))} \\
&= \mu(X, 0) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Teorema 3.0.2.

Exemplo 3.0.4. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ uma ICIS definida por $\phi(x, y) = x^2 - y^3$ e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por $f(x, y) = x$. Notemos que*

$$J_{\underline{x}}(f, \phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -3y^2 \end{vmatrix},$$

onde $\underline{x} = (x, y)$.

Assim, $\langle \phi \rangle + I_2(J_{\underline{x}}(f, \phi)) = \langle x^2 - y^3, -3y^2 \rangle$. Temos

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle \phi \rangle + I_2(J_{\underline{x}}(f, \phi))} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^2 - y^3, y^2 \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^2, y^2 \rangle} = 4.$$

Seja $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada, onde $(X, 0)$ é uma ICIS. Consideremos

$$\begin{aligned}
F: (\mathbb{C} \times X, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}, 0) \\
(t, x) &\mapsto f_t(x)
\end{aligned}$$

uma deformação (flat) de f .

Definição 3.0.5. *Dizemos que F é μ -constante se $\mu(f_t) = \mu(f)$, para t suficientemente pequeno.*

Exemplo 3.0.6. *Nas notações do Exemplo 3.0.4 consideremos a deformação de f dada por $F((x, y), t) = x + ty$. Notemos que*

$$J_{\underline{x}}(F, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2x & -3y^2 \end{pmatrix},$$

onde $\underline{x} = (x, y)$.

$$\text{Assim, } \langle \phi \rangle + I_2(J_{\underline{x}}(F, \phi)) = \langle x^2 - y^3, 3y^2 + 2tx \rangle.$$

Se $t \neq 0$ temos

$$\mu(f_t) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle \phi \rangle + I_2(J_{\underline{x}}(F, \phi))} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^2 - y^3, 3y^2 + 2tx \rangle}.$$

Notemos que $x^2 - y^3 + \frac{1}{3}y(3y^2 + 2tx) = x^2 + \frac{2}{3}txy$ e $\frac{x}{2t}(3y^2 + 2tx) = \frac{3}{2t}xy^2 + x^2$. Além disso, $(x^2 + \frac{2}{3}txy) - (\frac{3}{2t}xy^2 + x^2) = \frac{2}{3}txy - \frac{3}{2t}xy^2 = xy(\frac{2}{3}t - \frac{3}{2t}y)$. Pela Proposição 1.2.1, $(\frac{2}{3}t - \frac{3}{2t}y)$ é um elemento inversível. Assim, $xy(\frac{2}{3}t - \frac{3}{2t}y) \simeq xy$ (quando tivermos hg com g invertível dizemos que hg é identificado com h , o qual denotamos por $hg \simeq h$). Portanto, $y(3y^2 + 2tx) \simeq y^3$ e, então $x^2 - y^3 \simeq x^2$. Logo, $\mu(f_t) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{1, x, y, y^2\}$. Agora, x e y^2 não podem ficar juntos no quociente pois $3y^2 + 2tx \in \langle \phi \rangle + I_2(J_{\underline{x}}(F, \phi))$ e como estamos pensando na dimensão, a escolha de qualquer um deles para estar no quociente é independente, então vamos escolher x e assim $\mu(f_t) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{1, x, y\} = 3$.

Vimos no Exemplo 3.0.4 que $\mu(f) = 4$.

Portanto, $\mu(f) \neq \mu(f_t)$. Logo, F não é μ -constante,

Observação 3.0.7. O cálculo do número de Milnor pode ser feito também com o auxílio do software SINGULAR.

Para $\mu(f)$, do Exemplo 3.0.4, no SINGULAR digitamos:

> ring r = 0, (x, y), ds;

> ideal I = x2 - y3, -3y2;

> vdim(std(I));

4 (isto significa que $\mu(f) = 4$).

3.1 Fecho integral de um ideal e condições de Whitney

Dividimos esse estudo em duas subseções. Na primeira, dada $\{f_t: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$ uma família de germes de funções, onde $(X, 0)$ é uma ICIS vamos produzir um teorema do tipo Greuel e relacionar as condições de Whitney ao fecho integral do ideal que define o conjunto singular de cada membro da família $\{f_t: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$. Na segunda subseção, dada $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$ uma família de germes de funções, onde $\{(X_t, 0)\}$ é uma família de ICIS vamos primeiro relacionar as condições de Whitney ao fecho integral do ideal que define o conjunto singular de cada membro da família $\{(X_t, 0)\}$. Em seguida

relacionamos as condições de Whitney ao fecho integral do ideal que define o conjunto singular de cada membro da família $\{f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)\}$ e produzimos outra versão do Teorema de Greuel.

3.1.1 Deformando apenas a função

Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma ICIS definida por um germe de aplicação holomorfa $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, com $p+1 \leq N$, e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada. Consideramos

$$\begin{aligned} F: (\mathbb{C} \times X, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (t, x) &\mapsto f_t(x) \end{aligned}$$

uma deformação (flat) de f , tal que $f_t(0) = 0$ para t suficientemente pequeno.

Queremos estudar como o teorema de Greuel se comporta nesse caso. O ideal J que aparece no Teorema 3.0.1 é o ideal que define o conjunto singular de cada germe f_t se consideramos t como uma constante. Então é natural olhar o ideal definindo o conjunto singular de cada membro da família $f_t: (X, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, isto é, o ideal J_G gerado pelos menores de ordem máxima da matriz Jacobiana de $G = (\phi, \tilde{F})$ (com respeito a x apenas) como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$, onde $\tilde{F}: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{F}|_{\mathbb{C} \times X} = F$.

Se M é a matriz Jacobiana de G (com respeito a x apenas) denotamos os geradores de J_G por M_v , com

$$v = (j_1, \dots, j_{p+1}), \text{ com } j_1 < \dots < j_{p+1} \text{ e } j_1, \dots, j_{p+1} \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.1)$$

As afirmações do Teorema 3.0.1 nesse contexto são

- (1_X) F é μ -constante;
- (2_X) Para cada curva holomorfa $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times X, 0)$

$$\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) > \inf \{ \vartheta(M_v \circ \gamma), \text{ para todo } v \text{ em (3.1)} \},$$

onde ϑ denota a valorização usual de uma curva complexa, ou seja, é a valorização de \mathcal{O}_N que leva uma série de potências em seu menor grau;

- (3_X) Mesma condição que em (2_X) com “ $>$ ” substituído por “ \geq ”;
- (4_X) $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$;

(5_X) $\frac{\partial F}{\partial t} \in \sqrt{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}$;

(6_X) $V(J_G) = \{(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \mid M_v(t, x) = 0, \text{ para todo } v \text{ em (3.1)}\} = \mathbb{C} \times \{0\}$ perto de $(0, 0)$ em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}$.

Note que a condição (6_X) é equivalente a dizer que a família F é boa.

Escrevemos (1), ..., (6) no lugar de (1_X), ..., (6_X).

Infelizmente, as afirmações (1) a (6) não são equivalentes. Mas mostramos que

$$(2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Rightarrow (5),$$

$$(1) \Leftrightarrow (6) \Rightarrow (5),$$

e apresentamos contra-exemplos para algumas das demais implicações.

Gaffney em [16] prova o seguinte resultado relacionando as condições de Whitney ao fecho integral de módulo.

Teorema 3.1.1. [16, Teorema 2.5] *Sejam $G: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$, $(t, x) \mapsto G(t, x)$, definindo $X = G^{-1}(0)$ com estrutura reduzida, $Y = \mathbb{C} \times \{0\}$ e X^0 a parte suave de X . Então $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$ para todo vetor tangente $\frac{\partial}{\partial t}$ em $\mathbb{C} \times \{0\}$ se, e somente se, (X^0, Y) satisfaz as condições de Whitney, onde $\overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$ denota o fecho integral do $\mathcal{O}_{X,0}$ -módulo $\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}$.*

Ressaltamos aqui que para simplificar notações estamos denotando o módulo gerado por $\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \mid i, j = 1, \dots, N\}$ simplesmente por $\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}$.

Teorema 3.1.2. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma ICIS definida por $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ (não suave em 0) e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada. Sejam $F: (\mathbb{C} \times X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação (flat) de f e $G: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, 0)$ a aplicação definida por $G(t, x) = (\phi(x), \tilde{F}(t, x))$, onde $\tilde{F}: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{F}|_{\mathbb{C} \times X} = F$. Se $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}$ então*

$$(1) \frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}};$$

(2) $((\mathbb{C} \times X) \cap F^{-1}(0))^0, \mathbb{C} \times \{0\}$ satisfaz as condições de Whitney, onde $((\mathbb{C} \times X) \cap F^{-1}(0))^0$ é a parte suave de $(\mathbb{C} \times X) \cap F^{-1}(0)$.

Demonstração: Novamente, denotando a matriz Jacobiana de G (com relação a x apenas) por M e calculando cada menor em J_G pela última linha, obtemos para cada $v = (j_1, \dots, j_{p+1})$,

$$M_v = (-1)^{p+2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{j_1}} M_{v_1} + (-1)^{p+3} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{j_2}} M_{v_2} + \dots + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{j_{p+1}}} M_{v_{p+1}},$$

onde $v_k = (j_1, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_{p+1})$.

Então

$$(0, \dots, 0, M_v) = \left(\sum_{l=1}^{p+1} (-1)^{p+1+l} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{j_l}} M_{v_l}, \dots, \sum_{l=1}^{p+1} (-1)^{p+1+l} \frac{\partial \phi_p}{\partial x_{j_l}} M_{v_l}, \sum_{l=1}^{p+1} (-1)^{p+1+l} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_{j_l}} M_{v_l} \right).$$

Assim,

$$(0, \dots, 0, M_v) \in \left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}},$$

pois M_{v_l} , para $l = 1, \dots, p+1$, compõem o conjunto singular de ϕ e como ϕ é não suave em 0, então a matriz Jacobiana de ϕ não atinge rank máximo em 0.

Por hipótese, $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}$ então pelo Teorema 1.5.4, para toda curva $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times X, 0)$, $\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \in \langle M_v \circ \gamma \rangle$ e, portanto,

$$\frac{\partial G}{\partial t} \circ \gamma = \left(0, \dots, 0, \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \circ \gamma \right) \in \{(0, \dots, 0, M_v \circ \gamma)\} \subset \left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \circ \gamma \right\}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}}.$$

Novamente, pelo Teorema 1.5.4, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}}$, o que conclui a prova de (1).

Provamos agora (2). Por (1), $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}}$. Então, como $X \cap f_t^{-1}(0) \subset \mathbb{C} \times X$, concluímos que $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{X \cap f_t^{-1}(0), 0}}$.

Então, pelo Teorema 3.1.1, $(((\mathbb{C} \times X) \cap F^{-1}(0))^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz as condições de Whitney. ■

Teorema 3.1.3. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma ICIS definida por $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função com singularidade isolada. Seja $F: (\mathbb{C} \times X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação (flat) de f . Então*

$$(2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Rightarrow (5),$$

$$(1) \Leftrightarrow (6) \Rightarrow (5).$$

Demonstração: É trivial que (2) \Rightarrow (3). A equivalência (3) \Leftrightarrow (4) segue por (i) \Leftrightarrow (iv) no Teorema 1.5.4. Além disso, pela Observação 1.5.2, $\overline{J_G} \subset \sqrt{J_G}$ como ideais em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}$, então (5) segue diretamente de (4). Agora, vamos trabalhar nas demais implicações.

Tomamos um representante de $(X, 0)$, $X = \phi^{-1}(0)$, onde $\phi: B \rightarrow \mathbb{C}^p$ é definida em uma bola suficientemente pequena $B = B_\epsilon$ centrada na origem em \mathbb{C}^N , e um representante

de $F, \tilde{F}: D \times X \rightarrow \mathbb{C}$, onde D é um disco suficientemente pequeno em torno da origem em \mathbb{C} . Denotamos por f_t o representante de $f_t: (X, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ determinado por \tilde{F} . Além disso, escrevemos f ao invés de f_0 .

(1) \Rightarrow (6):

Pela Observação 2.1.4, $\frac{\mathcal{O}_{N+1}}{\langle \phi \rangle + J_G}$ é Cohen-Macaulay. Então, pelo *Princípio da Conservação do Número* ([29, Teorema 6.4.7]), para cada $t \in \mathbb{C}$ suficientemente pequeno,

$$\mu(f) = \sum_{(t,x) \in V(J_G) \cap (\{t\} \times \mathbb{C}^N)} \mu(f_t, x).$$

Por hipótese, $\mu(f_t) = \mu(f)$, então $\mu(f_t, x) = 0$ para todo $x \neq 0$.

Agora, se $(t, x) \in V(J_G)$ temos $V(J_G) \neq \emptyset$. Assim, $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)} \neq J_G$. Logo, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}}{J_G} \neq 0$, ou seja, $\mu(f_t, x) \neq 0$. Então $x = 0$.

Portanto, $V(J_G) = \mathbb{C} \times \{0\}$ perto de $(0, 0)$.

(6) \Rightarrow (1):

Por hipótese, $V(J_G) = \mathbb{C} \times \{0\}$ próximo de $(0, 0)$.

Novamente pelo Princípio da Conservação do Número,

$$\mu(f) = \sum_{(t,x) \in V(J_G) \cap (\{t\} \times \mathbb{C}^N)} \mu(f_t, x).$$

Como $(t, x) \in V(J_G)$ então $x = 0$. Logo, $\mu(f) = \mu(f_t)$.

(6) \Rightarrow (5):

Por hipótese, $V(J_G) = \mathbb{C} \times \{0\}$ próximo de $(0, 0)$. Temos, $f_t \in \mathcal{M}_N$, pois $f_t(0) = 0$. Logo, $F(t, x) = x_1 g_1(t, x) + \dots + x_N g_N(t, x)$ com $g_i(t, x) \in \mathcal{O}_{N+1}$ para $i = 1, \dots, N$. Assim, $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = x_1 \frac{\partial g_1}{\partial t}(t, x) + \dots + x_N \frac{\partial g_N}{\partial t}(t, x)$. Então $\frac{\partial F}{\partial t}|_{V(J_G)} = \frac{\partial F}{\partial t}|_{\mathbb{C} \times \{0\}} \equiv 0$, ou seja, $V(J_G) \subset V\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)$. Assim, $\frac{\partial F}{\partial t} \in \sqrt{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}$ pelo Teorema 1.4.1. ■

Nosso objetivo agora é apresentar contra-exemplos para algumas implicações que não são válidas. Para nos auxiliar vamos descrever na sequência um critério, provado em [44], para garantir que o número de Milnor de uma família de funções é constante.

Definição 3.1.4. *Um germe de aplicação $f = (f_1, \dots, f_p): (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é **quase***

homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_N; d_1, \dots, d_p)$ com $w_i, d_j \in \mathbb{Z}^+$ se para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$f(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_N}x_N) = (\lambda^{d_1}f_1(x), \dots, \lambda^{d_p}f_p(x)).$$

Chama-se d_j de **filtração** de f_j e o valor w_i é dito **peso da variável** x_i .

Exemplo 3.1.5. Seja $\phi(x, y) = x^5 - y^3$. Temos ϕ quase homogêneo do tipo $(3, 5; 15)$ pois

$$\phi(\lambda^3x, \lambda^5y) = \lambda^{15}x^5 - \lambda^{15}y^3 = \lambda^{15}(x^5 - y^3) = \lambda^{15}\phi(x, y).$$

Definição 3.1.6. Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade, onde $X = \phi^{-1}(0)$. Se ϕ é quase homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_N; d_1, \dots, d_p)$, então $(X, 0)$ é dito **quase homogêneo** do tipo $(w_1, \dots, w_N; d_1, \dots, d_p)$.

Exemplo 3.1.7. Novamente, seja $\phi(x, y) = x^5 - y^3$. Consideremos $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0)$. Assim, $(X, 0)$ é quase homogêneo do tipo $(3, 5; 15)$.

Definição 3.1.8. Se $f: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é um germe de função quase homogêneo e

$$f_t(x) = f(x) + \sum_{i=1}^k \sigma_i(t)\alpha_i(x),$$

com $\alpha_i: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, dizemos que a deformação f_t é **não negativa** se os monômios que aparecem em cada α_i tem filtrações maiores ou iguais a de f .

Exemplo 3.1.9. Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ a ICIS definida por $\phi(x, y) = x^5 - y^3$. Vimos que ϕ é quase homogêneo do tipo $(3, 5; 15)$. Temos $\phi_t(x, y) = x^5 - y^3 + tx^6 + tx^2y^2$ uma deformação não negativa de ϕ pois nas notações acima $\alpha_1 = x^6$, $\alpha_2 = x^2y^2$, filtração de α_1 é 18 e a filtração de α_2 é 16.

Teorema 3.1.10. [44, Teorema 4.4] Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma ICIS definida por um germe de aplicação quase homogêneo e $\tilde{f}: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ um germe de função quase homogêneo com singularidade isolada com os mesmos pesos de $(X, 0)$, onde \tilde{f} é tal que $\tilde{f}|_X = f$. Seja f_t uma deformação de f . Se f_t é uma deformação não negativa de f , então $\mu(f_t)$ é constante.

Exemplo 3.1.11. Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\phi(x, y) = x^4 - y^3$ e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por $f(x, y) = x$. Consideramos a deformação de f dada por $F(t, (x, y)) = x + ty$. Como ϕ e f são quase homogêneos do tipo $(3, 4; 12)$ e $(3, 4; 3)$, respectivamente

e f_t é uma deformação não negativa de f , segue diretamente, pelo Teorema 3.1.10, que $\mu(f_t)$ é constante.

Usamos este resultado no seguinte exemplo para mostrar que (1) não implica (2) nem (3).

Exemplo 3.1.12. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ definida pelo conjunto de zeros de $\phi(x, y) = x^p - y^q$, com $q \geq 3$ e $p > q$, e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por $f(x, y) = x$. Consideramos a deformação de f dada por $F(t, (x, y)) = x + ty$. Neste caso, $J_G = \langle qy^{q-1} + ptx^{p-1} \rangle$, onde $G = (\phi, F)$.*

Seja $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times X, 0)$ a curva definida por $\gamma(s) = (0, s^q, s^p)$. É fácil provar que

$$\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) = p \text{ e } \vartheta((qy^{q-1} + ptx^{p-1}) \circ \gamma) = (q-1)p.$$

Portanto, (2) e (3) não são verdadeiras.

Por outro lado, ϕ e f são quase homogêneos do tipo $(q, p; pq)$ e $(q, p; q)$, respectivamente, e f_t é uma deformação não negativa de f . Portanto, $\mu(f_t)$ é constante pelo Teorema 3.1.10. Assim, (1) é verdadeira.

No próximo exemplo mostramos que (3) e (5) não implicam (2).

Exemplo 3.1.13. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ definida pelo conjunto de zeros de $\phi(x, y) = x^{2q} - y^q$ com $q \geq 2$ e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por $f(x, y) = x^{2q} + y^q$. Seja F uma deformação de f definida por $F(t, (x, y)) = x^{2q} + y^q + tx^{4q-3}$. Nesse caso $G = (\phi, F)$ e*

$$J_G = \langle 4q^2 x^{2q-1} y^{q-1} + q(4q-3)tx^{4q-4}y^{q-1} \rangle.$$

Seja $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times X, 0)$ uma curva $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ tal que $\gamma_2^{2q} - \gamma_3^q = 0$. Assim, $\gamma_2^{2q} = \gamma_3^q$.

Como $\frac{\partial F}{\partial t}(x, y) = x^{4q-3}$ então $\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) = (4q-3)\vartheta(\gamma_2)$. Temos também,

$$\begin{aligned} \vartheta((4q^2 x^{2q-1} y^{q-1} + q(4q-3)tx^{4q-4}y^{q-1}) \circ \gamma) &= \vartheta(4q^2 \gamma_2^{2q-1} \gamma_3^{q-1} + q(4q-3)\gamma_1 \gamma_2^{4q-4} \gamma_3^{q-1}) \\ &= (2q-1)\vartheta(\gamma_2) + 2(q-1)\vartheta(\gamma_2) \\ &= (4q-3)\vartheta(\gamma_2). \end{aligned}$$

Assim, (3) é verdadeira. Consequentemente, pelo Teorema 3.1.3, (4) e (5) são verdadeiras.

Por outro lado, seja $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times X, 0)$ a curva definida por $\gamma(s) = (0, s, s^2)$. Nesse caso, $\vartheta\left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma\right) = 4q - 3$ e $\vartheta((4q^2x^{2q-1}y^{q-1} + q(4q-3)tx^{4q-4}y^{q-1}) \circ \gamma) = 4q - 3$. Assim, (2) não é verdadeira.

3.1.2 Deformando a variedade e a função

Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ a ICIS definida por um germe de aplicação holomorfa $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, com $p+1 \leq N$, e

$$\begin{aligned} \Phi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p, 0) \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) = \phi_t(x) \end{aligned}$$

uma deformação (flat) de ϕ . Denotamos

$$(\mathcal{X}, 0) := (\Phi^{-1}(0), 0), \quad \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p) \text{ e } \Phi_k(t, x) := \phi_{kt}(x), \quad k = 1, \dots, p.$$

Dado um germe de função holomorfa com singularidade isolada, $f: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ sejam

$$\begin{aligned} F: (\mathcal{X}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) = f_t(x) \end{aligned}$$

uma deformação (flat) de f tal que $f_t(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} G: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N &\rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}, 0) \\ (t, x) &\mapsto (\Phi_1(t, x), \dots, \Phi_p(t, x), \tilde{F}(t, x)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{F}: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{F}|_{\mathcal{X}} = F$. Nosso objetivo é estudar o Teorema 3.0.1 nesse contexto. Novamente, observamos que, para cada parâmetro t fixado, o ideal J do Teorema 3.0.1 é o ideal que define o conjunto singular de cada membro da família F . É natural, então, que no caso singular tal ideal seja substituído pelo ideal o qual, com t fixo, define o conjunto singular de $f_t: (X_t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Então, pelo Critério Jacobiano, J que em nosso caso denotamos por J_G , é $I_{p+1}(J_x G)$.

Gaffney em [16] prova que $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}}}$ se, e somente se, (\mathcal{X}^0, Y) satisfaz as condições de Whitney, onde \mathcal{X}^0 é a parte suave de \mathcal{X} e $Y = \mathbb{C} \times \{0\}$. Ele também prova em [17] que a família $(\mathcal{X}, 0)$ é boa e (\mathcal{X}^0, Y) satisfaz as condições de Whitney se, e somente se, as multiplicidades polares $m_i(X_t, 0)$ são constantes para $i = 1, \dots, d$, onde d

é a dimensão de $(X, 0)$. Pela Equação (2.3) temos

$$1 + (-1)^d \mu(X, 0) = \sum_{i=0}^d (-1)^i m_i(X, 0).$$

Assim, se $(\mathcal{X}, 0)$ é boa e (\mathcal{X}^0, Y) satisfaz as condições de Whitney, então $\mu(X_t, 0)$ é constante. Dessa forma podemos ver, no caso de ICIS, o quão é importante o estudo de propriedades relacionadas ao fecho integral.

Lema 3.1.14. *Se $p \geq 2$, $\Phi_k(t, x) \in \mathcal{M}_{N+1}^2$ e $\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{I_p(J_x \Phi)}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$, para todo $k = 1, \dots, p$, então $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}}$.*

Demonstração: Pelo Corolário 1.5.8, basta mostrarmos que

$$I_p \left(\left[\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right] \right) \subset \overline{I_p \left(\left[\left[\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right] \right)}$$

como ideais em $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$.

Por hipótese, $\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{I_p(J_x \Phi)}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$. Então, para todo $k = 1, \dots, p$, pelo Teorema 1.5.4, para toda $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathcal{X}, 0)$, $\vartheta(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \circ \gamma) \geq \vartheta((J_x \Phi)_{\bar{v}} \circ \gamma)$, para algum $\bar{v} = (\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_p)$, onde $\bar{j}_1 < \dots < \bar{j}_p$ e $\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_p \in \{1, \dots, N\}$.

Para demonstrar que $I_p(\left[\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right) \subset \overline{I_p(\left[\left[\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right)}$ como ideais em $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$ precisamos apenas nos preocupar com menores da forma $\left[\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right]_v$ onde $v = (j_1, \dots, j_p)$ com $j_1 = 1$.

As colunas j_2, \dots, j_p são formadas por vetores da forma

$$x_{a_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{b_2}}, \dots, x_{a_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{b_p}}, \dots, x_{a_p} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{b_2}}, \dots, x_{a_p} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{b_p}}.$$

Assim,

$$\left[\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right]_v = x_{a_2} \dots x_{a_p} \left[\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right]_w,$$

onde $w = (1, b_2, \dots, b_p)$.

Calculando o determinante $\left[\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right]_w$ através da *Regra de Laplace* pela primeira coluna, temos

$$\vartheta \left(\left[\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right]_v \circ \gamma \right) = \vartheta(\gamma_{a_2}) + \dots + \vartheta(\gamma_{a_p}) + \vartheta \left(\sum_{r=1}^p (-1)^{r+1} \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} (J_x \Phi)_{\hat{u}_r, \hat{v}} \circ \gamma \right),$$

onde $\widehat{u}_r = (1, \dots, \widehat{r}, \dots, p)$ e $\widehat{v} = (b_2, \dots, b_p)$.

Portanto,

$$\vartheta \left(\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right]_v \circ \gamma \right) \geq \vartheta(\gamma_{a_2}) + \dots + \vartheta(\gamma_{a_p}) + \inf_{r \in \{1, \dots, p\}} \left\{ \vartheta \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial t} \circ \gamma \right) + \vartheta((J_x \Phi)_{\widehat{u}_r, \widehat{v}} \circ \gamma) \right\}.$$

Assim, $\vartheta \left(\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right]_v \circ \gamma \right) \geq \vartheta(\gamma_{a_2}) + \dots + \vartheta(\gamma_{a_p}) + \vartheta((J_x \Phi)_{\bar{v}} \circ \gamma) + \vartheta(\gamma_m)$, para algum $m \in \{1, \dots, N\}$, pois $\vartheta \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \circ \gamma \right) \geq \vartheta((J_x \Phi)_{\bar{v}} \circ \gamma)$ e $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \in \mathcal{M}_{N+1}$, para todo $k = 1, \dots, p$ e $i \in \{1, \dots, N\}$.

Por outro lado, se $v' = (j_1, \dots, j_p, j^m)$ então

$$\left[\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right]_{v'} = x_{a_2} \dots x_{a_p} x_m [(J_x \Phi)]_{\bar{w}},$$

onde a coluna j^m é o vetor $x_m \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}$ e $\bar{w} = (b_2, \dots, b_p, m)$.

Portanto,

$$\vartheta \left(\left[\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right]_{v'} \circ \gamma \right) = \vartheta(\gamma_{a_2}) + \dots + \vartheta(\gamma_{a_p}) + \vartheta(\gamma_m) + \vartheta((J_x \Phi)_{\bar{w}} \circ \gamma).$$

Assim, para $\bar{w} = \bar{v}$,

$$\vartheta \left(\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right]_v \circ \gamma \right) \geq \vartheta \left(\left[\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right]_{v'} \circ \gamma \right).$$

Então $I_p(\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\}) \subset \overline{I_p(\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\})}$ como ideais em $\mathcal{O}_{X,0}$. ■

Observação 3.1.15. *A demonstração do Lema 3.1.14 não se aplica para o caso de hipersuperfície pois não é possível usar o Corolário 1.5.8 nesse contexto. De fato, se $(X, 0)$ é uma hipersuperfície, então $p = 1$ e assim a condição*

$$I_p \left(\left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}, x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right) \subset \overline{I_p \left(\left[\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} \right] \right)}$$

como ideais em $\mathcal{O}_{X,0}$, que aparece no Corolário 1.5.8, é justamente $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in \overline{\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$.

Teorema 3.1.16. *Se $p \geq 2$, $\Phi_k(t, x) \in \mathcal{M}_{N+1}^2$ e $\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{I_p(J_x \Phi)}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$ para todo $k = 1, \dots, p$, então (\mathcal{X}^0, Y) satisfaz as condições de Whitney, onde \mathcal{X}^0 é a parte suave de X e $Y = \mathbb{C} \times \{0\}$.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.14, $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}$. Portanto, pelo Teorema 3.1.1, (\mathcal{X}^0, Y) satisfaz as condições de Whitney. ■

Se $p \geq 2$, $\Phi_k(t, x) \in \mathcal{M}_{N+1}^2$ e $\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{I_p(J_x \Phi)}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} , para todo $k = 1, \dots, p$, então $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{N+1}}$. Para demonstrar isso, é suficiente repetir a demonstração do Lema 3.1.14 para $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$.

Lema 3.1.17. *Se $p \geq 2$, $\Phi_k(t, x) \in \mathcal{M}_{N+1}^2$, $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, para todo $k = 1, \dots, p$, então $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}$.*

Demonstração: Claramente, $\overline{J_G} \subset \overline{I_p(J_x \Phi)}$ como ideais em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$. Logo, $\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{I_p(J_x \Phi)}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, para todo $k = 1, \dots, p$. Assim, pelo Lema 3.1.14, $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}$.

Temos que mostrar que $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}$. Pelo Corolário 1.5.8, é suficiente mostrarmos que

$$I_{p+1} \left(\left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right] \right) \subset \overline{I_{p+1} \left(\left[\left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right] \right)},$$

como ideais em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$.

Por hipótese, $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$ para todo $k = 1, \dots, p$, então, pelo Teorema 1.5.4, para toda $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathcal{X}, 0)$, $\vartheta(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma) \geq \vartheta((J_x G)_{\bar{v}} \circ \gamma)$ e, para todo $k = 1, \dots, p$, $\vartheta(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \circ \gamma) \geq \vartheta((J_x G)_{\bar{v}} \circ \gamma)$, para algum vetor $\bar{v} = (\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{p+1})$, onde $\bar{j}_1 < \dots < \bar{j}_{p+1}$ e $\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{p+1} \in \{1, \dots, N\}$.

Para demonstrar que $I_{p+1}(\{\frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}) \subset \overline{I_{p+1}(\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\})}$ como ideais em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$ precisamos apenas nos preocupar com menores da forma $[\{\frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}]_v$ onde $v = (j_1, \dots, j_{p+1})$ com $j_1 = 1$. As colunas j_2, \dots, j_{p+1} são formadas por vetores da forma

$$x_{a_2} \frac{\partial G}{\partial x_{b_2}}, \dots, x_{a_2} \frac{\partial G}{\partial x_{b_{p+1}}}, \dots, x_{a_{p+1}} \frac{\partial G}{\partial x_{b_2}}, \dots, x_{a_{p+1}} \frac{\partial G}{\partial x_{b_{p+1}}}.$$

Assim,

$$\left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_v = x_{a_2} \dots x_{a_{p+1}} \left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_w,$$

onde $w = (1, b_2, \dots, b_{p+1})$.

Calculando o determinante $\left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_w$ através da Regra de Laplace pela primeira coluna, temos

$$\vartheta \left(\left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_v \circ \gamma \right) = \vartheta(\gamma_{a_2}) + \dots + \vartheta(\gamma_{a_{p+1}}) +$$

$$\vartheta \left(\sum_{r=1}^p (-1)^{r+1} \frac{\partial \Phi_{i_r}}{\partial t} (J_x G)_{\hat{u}_r, \hat{v}} \circ \gamma + (-1)^{p+2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} (J_x G)_{\hat{u}_{p+1}, \hat{v}} \circ \gamma \right),$$

para $\hat{u}_c = (1, \dots, \hat{c}, \dots, p+1)$ e $\hat{v} = (b_2, \dots, b_{p+1})$ com $c = 1, \dots, p+1$.

Portanto,

$$\vartheta \left(\left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_v \circ \gamma \right) \geq \vartheta(\gamma_{a_2}) + \dots + \vartheta(\gamma_{a_{p+1}}) +$$

$$\inf_{r \in \{1, \dots, p\}} \left\{ \vartheta \left(\frac{\partial h}{\partial t} \circ \gamma \right) + \vartheta((J_x G)_{\hat{u}_r, \hat{v}} \circ \gamma) \right\},$$

onde $h \in \{\Phi_1, \dots, \Phi_p, \tilde{F}\}$ e $\hat{u} \in \{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{p+1}\}$.

Assim,

$$\vartheta \left(\left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_v \circ \gamma \right) \geq \vartheta(\gamma_{a_2}) + \dots + \vartheta(\gamma_{a_{p+1}}) + \vartheta((J_x G)_{\bar{v}} \circ \gamma) + \vartheta(\gamma_m),$$

para algum $m \in \{1, \dots, N\}$, pois $\vartheta(\frac{\partial h}{\partial t} \circ \gamma) \geq \vartheta((J_x G)_{\bar{v}} \circ \gamma)$ e $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \in \mathcal{M}_{N+1}$ para todo $k = 1, \dots, p$ e $i \in \{1, \dots, N\}$.

Por outro lado, se $v' = (j_2, \dots, j_{p+1}, j^m)$ então

$$\left[\left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_{v'} = x_{a_2} \dots x_{a_{p+1}} x_m \{J_x G\}_{\bar{w}},$$

onde a coluna j^m é o vetor $x_m \frac{\partial G}{\partial x_m}$ e $\bar{w} = (b_2, \dots, b_{p+1}, m)$.

Logo,

$$\vartheta \left(\left[\left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_{v'} \circ \gamma \right) = \vartheta(\gamma_{a_2}) + \dots + \vartheta(\gamma_{a_{p+1}}) + \vartheta(\gamma_m) + \vartheta((J_x G)_{\bar{w}} \circ \gamma).$$

Assim, para $\bar{w} = \bar{v}$,

$$\vartheta \left(\left[\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_v \circ \gamma \right) \geq \vartheta \left(\left[\left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\} \right]_{v'} \circ \gamma \right).$$

Então $I_{p+1}(\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}) \subset \overline{I_{p+1}(\left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\})}$ como ideais em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$.

Portanto, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}$.

■

Teorema 3.1.18. *Se $p \geq 2$, $\Phi_k(t, x) \in \mathcal{M}_{N+1}^2$, $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, para todo $k = 1, \dots, p$, então $((\mathcal{X} \cap F^{-1}(0))^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ e $(\mathcal{X}^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfazem as condições de Whitney, onde \mathcal{X}^0 e $(\mathcal{X} \cap F^{-1}(0))^0$ são as partes suaves de \mathcal{X} e $\mathcal{X} \cap F^{-1}(0)$, respectivamente.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.17, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in \overline{\left\{ x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}$. Como $\mathcal{X} \cap F^{-1}(0) \subset \mathcal{X}$ temos $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ x_i \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \cap F^{-1}(0),0}}$. Assim, $((\mathcal{X} \cap F^{-1}(0))^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ e $(\mathcal{X}^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfazem as condições de Whitney, pelo Teorema 3.1.1.

■

Temos $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} então pelo Teorema 1.5.4, para toda $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$, $\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \circ \gamma \in J_G \circ \gamma$. Logo, para toda $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$, $\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \circ \gamma \in J_G \circ \gamma$. Pelo Teorema 1.5.4, $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, para $k = 1, \dots, p$. Como consequência imediata disso e do teorema anterior temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1.19. *Se $p \geq 2$, $\Phi_k(t, x) \in \mathcal{M}_{N+1}^2$, $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} , para todo $k = 1, \dots, p$, então $((\mathcal{X} \cap F^{-1}(0))^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ e $(\mathcal{X}^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfazem as condições de Whitney.*

Vamos agora descrever o análogo do Teorema 3.0.1 para uma família de funções em ICIS. Novamente, denotamos os geradores de J_G por M_v , onde

$$v = (j_1, \dots, j_{p+1}), \text{ com } j_1 < \dots < j_{p+1} \text{ e } j_1, \dots, j_{p+1} \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.2)$$

As condições do Teorema 3.0.1 nesse contexto são

$(1_{\mathcal{X}_t}) F$ é μ -constante;

(2_{X_t}) Para cada curva holomorfa $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathcal{X}, 0)$

$$\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) > \inf \{ \vartheta(M_v \circ \gamma), \text{ para todo } v \text{ em (3.2)} \}$$

e para todo $k = 1, \dots, p$,

$$\vartheta \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \circ \gamma \right) > \inf \{ \vartheta(M_v \circ \gamma), \text{ para todo } v \text{ em (3.2)} \},$$

onde ϑ denota a valorização usual da curva complexa;

(3_{X_t}) Mesma condição que em (2_{X_t}) com “ $>$ ” substituído por “ \geq ”;

(4_{X_t}) $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$ para todo $k = 1, \dots, p$;

(5_{X_t}) $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \sqrt{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$ para todo $k = 1, \dots, p$;

(6_{X_t}) $V(J_G) = \{(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \mid M_v(t, x) = 0, \text{ para todo } v \text{ em (3.2)}\} = \mathbb{C} \times \{0\}$

próximo de $(0, 0)$ em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$.

No restante do trabalho, escrevemos (1), \dots , (6) no lugar de (1_{X_t}), \dots , (6_{X_t}).

Infelizmente, as afirmações (1) a (6) não são equivalentes. Mas mostramos o seguinte teorema.

Teorema 3.1.20. *Temos*

$$(2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Rightarrow (5),$$

$$(1) \Leftrightarrow (6) \Rightarrow (5).$$

Demonstração: É trivial que (2) \Rightarrow (3). A equivalência (3) \Leftrightarrow (4) segue por (i) \Leftrightarrow (iv) no Teorema 1.5.4. Além disso, pela Observação 1.5.2, $\overline{J_G} \subset \sqrt{J_G}$ como ideais em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, então (5) segue diretamente de (4). Agora, vamos trabalhar nas demais implicações.

Tomamos um representante de $(X, 0)$, $X = \phi^{-1}(0)$, onde $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}^p$ e um representante de F , $\tilde{F}: D \times U \rightarrow \mathbb{C}$, onde D e U são vizinhanças abertas da origem em \mathbb{C} e \mathbb{C}^N , respectivamente. Denotamos por f_t o representante de $f_t: (X_t, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ determinado por \tilde{F} . Além disso, escrevemos f ao invés de f_0 .

(1) \Rightarrow (6):

Pela Observação 2.1.4, $\frac{\mathcal{O}_{N+1}}{\langle \Phi \rangle + J_G}$ é Cohen-Macaulay. Então, pelo Princípio da Conservação do Número, para cada $t \in \mathbb{C}$ suficientemente pequeno,

$$\mu(f) = \sum_{(t,x) \in V(J_G) \cap (\{t\} \times \mathbb{C}^N)} \mu(f_t, x).$$

Como, por hipótese, $\mu(f_t) = \mu(f)$, concluímos que $\mu(f_t, x) = 0$ para todo $x \neq 0$.

Agora, se $(t, x) \in V(J_G)$ temos $V(J_G) \neq \emptyset$. Assim, $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0} \neq J_G$. Logo, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}{J_G} \neq 0$, ou seja, $\mu(f_t, x) \neq 0$. Então $x = 0$.

Portanto, $V(J_G) = \mathbb{C} \times \{0\}$ próximo de $(0, 0)$.

(6) \Rightarrow (1):

Por hipótese $V(J_G) = \mathbb{C} \times \{0\}$ próximo de $(0, 0)$. Novamente, pelo Princípio da Conservação do Número,

$$\mu(f) = \sum_{(t,x) \in V(J_G) \cap (\{t\} \times \mathbb{C}^N)} \mu(f_t, x).$$

Como $(t, x) \in V(J_G)$ então $x = 0$.

Logo, $\mu(f) = \mu(f_t)$. Portanto, F é μ -constante.

(6) \Rightarrow (5):

Por hipótese $V(J_G) = \mathbb{C} \times \{0\}$ próximo de $(0, 0)$. Temos $f_t \in \mathcal{M}_N$ e $\phi_{kt} \in \mathcal{M}_N$ para todo $k = 1, \dots, p$, pois $f_t(0) = 0$ e $\phi_{kt}(0) = 0$ para todo $k = 1, \dots, p$. Logo, $F(t, x) = x_1 g_1(t, x) + \dots + x_N g_N(t, x)$ com $g_i(t, x) \in \mathcal{O}_{N+1}$ para $i = 1, \dots, N$ e $\Phi_k(t, x) = x_1 h_1(t, x) + \dots + x_N h_N(t, x)$ com $h_i(t, x) \in \mathcal{O}_{N+1}$ para $i = 1, \dots, N$.

Com isso, $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = x_1 \frac{\partial g_1}{\partial t}(t, x) + \dots + x_N \frac{\partial g_N}{\partial t}(t, x)$ e $\frac{\partial \Phi_k}{\partial t}(t, x) = x_1 \frac{\partial h_1}{\partial t}(t, x) + \dots + x_N \frac{\partial h_N}{\partial t}(t, x)$. Assim, $\frac{\partial F}{\partial t}|_{V(J_G)} = \frac{\partial F}{\partial t}|_{\mathbb{C} \times \{0\}} \equiv 0$ e $\frac{\partial \Phi_k}{\partial t}|_{V(J_G)} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}|_{\mathbb{C} \times \{0\}} \equiv 0$, ou seja, $V(J_G) \subset V(\frac{\partial F}{\partial t})$ e $V(J_G) \subset V(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t})$. Então $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \sqrt{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$ para todo $k = 1, \dots, p$, pelo Teorema 1.4.1. ■

O próximo exemplo mostra que (1) não implica (2) nem (3).

Exemplo 3.1.21. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ definida pelo conjunto de zeros de $\phi(x, y) = x^4 - y^3$ e $\Phi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a deformação de ϕ , definida por*

$$\Phi(t, (x, y)) = \phi_t(x, y) = x^4 - y^3 + tx^3y.$$

Denotamos por $(X_t, 0) := (\phi_t^{-1}(0), 0)$ e $(\mathcal{X}, 0) = (\Phi^{-1}(0), 0)$.

Seja $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por $f(x, y) = x$. Consideramos a deformação de f definida por $F(t, (x, y)) = x + ty$. Neste caso, $G(t, (x, y)) = (x^4 - y^3 + tx^3y, x + ty)$ e

$$J_G = \left\langle \begin{vmatrix} 4x^3 + 3tx^2y & -3y^2 + tx^3 \\ 1 & t \end{vmatrix} \right\rangle = \langle -3y^2 - 3tx^3 - 3t^2x^2y \rangle$$

como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$.

Notemos que $(X,0)$ é quase homogêneo do tipo $(3,4;12)$ e $(X_t,0)$ é uma deformação não negativa de X . Temos ainda que f_t é uma deformação não negativa de f . Portanto, pelo Teorema 3.1.10, $\mu(f_t)$ é constante.

Então (1) é verdadeira.

Agora, consideramos $\gamma: (\mathbb{C},0) \rightarrow (\mathcal{X},0)$ dada por $\gamma(s) = (0, s^3, s^4)$. Assim,

$$\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) = 4 \text{ e } \vartheta(J_G \circ \gamma) = 8.$$

Então $\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) < \vartheta(J_G \circ \gamma)$. Portanto, (2) e (3) não são verdadeiras.

No próximo exemplo, mostramos que (3) e (5) não implicam (2).

Exemplo 3.1.22. Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ definida pelo conjunto de zeros de $\phi(x,y) = x^4 - y^2$ e seja $\Phi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2,0) \rightarrow (\mathbb{C},0)$ a deformação de ϕ , definida por

$$\Phi(t, (x,y)) = \phi_t(x,y) = x^4 - y^2 + tx^5.$$

Denotamos por $(X_t,0) := (\phi_t^{-1}(0),0)$ e $(\mathcal{X},0) = (\Phi^{-1}(0),0)$.

Seja $f: (\mathbb{C}^2,0) \rightarrow (\mathbb{C},0)$ definida por $f(x,y) = x^4 + y^2$. Seja F a deformação de f definida por $F(t, (x,y)) = x^4 + y^2 + tx^5$. Neste caso, $G(t, (x,y)) = (x^4 - y^2 + tx^5, x^4 + y^2 + tx^5)$ e

$$J_G = \left\langle \begin{vmatrix} 4x^3 + 5tx^4 & -2y \\ 4x^3 + 5tx^4 & 2y \end{vmatrix} \right\rangle = \langle 16x^3y + 20tx^4y \rangle$$

como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$.

Seja $\gamma: (\mathbb{C},0) \rightarrow (\mathcal{X},0)$, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ tal que $\gamma_2^4 - \gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_2^5 = 0$. Por um lado, $\vartheta(\gamma_2^4) = \vartheta(\gamma_3^2 - \gamma_1\gamma_2^5)$. Então $2\vartheta(\gamma_2) \geq \vartheta(\gamma_3)$. Por outro lado, $\vartheta(\gamma_3^2) = \vartheta(\gamma_2^4 + \gamma_1\gamma_2^5)$. Assim $\vartheta(\gamma_3) \geq 2\vartheta(\gamma_2)$. Então $2\vartheta(\gamma_2) = \vartheta(\gamma_3)$.

Temos $\vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) = 5\vartheta(\gamma_2)$ e $\vartheta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \gamma \right) = 5\vartheta(\gamma_2)$.

Além disso, $\vartheta(J_G \circ \gamma) = 3\vartheta(\gamma_2) + \vartheta(\gamma_3) = 5\vartheta(\gamma_2)$.

Assim, (3) é verdadeira, conseqüentemente, pelo Teorema 3.1.20, (5) também é verdadeira.

Agora, consideramos $\gamma: (\mathbb{C},0) \rightarrow (\mathcal{X},0)$ dada por $\gamma(s) = (0, s, s^2)$ e temos

$$\vartheta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \gamma \right) = \vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma \right) = 5 = \vartheta(J_G \circ \gamma).$$

Portanto, (2) não é verdadeira.

3.2 Fecho integral de um módulo e número de Milnor constante

Nesta seção estamos nas mesmas notações da última subseção. Sabemos, pelo Teorema 3.1.1 que se $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{x_i \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \cap F^{-1}(0), 0}}$ então $((\mathcal{X} \cap F^{-1}(0))^0, Y)$ satisfaz as condições de Whitney, onde $(\mathcal{X} \cap F^{-1}(0))^0$ é o conjunto de pontos suaves de $\mathcal{X} \cap F^{-1}(0)$. Relacionado ao fecho estrito em [20] foi provado o seguinte resultado.

Lema 3.2.1. [20, Lema 5.1] *Sejam $(X, 0)$ um germe analítico complexo definido por $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $Y = \mathbb{C} \times \{0\}$. Seja $f: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa, $G = (\phi, f)$. Então $(X \setminus Y, Y)$ satisfaz a condição A_f se, e somente se, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{\frac{\partial G}{\partial x_j} \mid j = 1, \dots, N\}}_{\mathcal{O}_{X, 0}}^\dagger$.*

Então nos perguntamos se a constância do número de Milnor da família F está relacionada à $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{X, 0}}^\dagger$ e obtivemos o próximo teorema, antes disso enunciaremos um resultado necessário para sua demonstração. Ressaltamos aqui que para facilitar a notação vamos escrever simplesmente $\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}$ ao invés de $\{\frac{\partial G}{\partial x_j} \mid j = 1, \dots, N\}$.

Teorema 3.2.2. [21, Teorema 5.8] *Suponha que $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$ é uma interseção completa, $\mathcal{X} = \Phi^{-1}(0)$, $\Phi: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$, $Y = \mathbb{C} \times \{0\}$. Seja $F: (X, Y) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tal que $Z = F^{-1}(0)$ é também uma interseção completa, que não é densa em X . As seguintes condições são equivalentes*

(i) *Suponha que X_t e Z_t são interseções completas com singularidades isoladas com números de Milnor constantes. Então a união dos pontos singulares de F_t é Y ou é vazio, e $(X \setminus Y, Y)$ satisfaz a condição A_F de Thom;*

(ii) *Suponha que $S(F)$ é Y ou é vazio e que o par $(X \setminus Y, Y)$ satisfaz a condição A_F de Thom. Então os números de Milnor de X_t e Z_t são constantes.*

Teorema 3.2.3. *Assuma que $(\mathcal{X}, 0)$ é boa. Se F é μ -constante, então $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{X, 0}}^\dagger$.*

Demonstração: Suponha que F é μ -constante. Pela fórmula de Lê-Greuel,

$$\mu(f_t) = \mu(X_t, 0) + \mu(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0).$$

Assim, $\mu(X_t, 0)$ e $\mu(X_t \cap f_t^{-1}(0), 0)$ são constantes pois são semicontínuos superiores. Então, pelo Teorema 3.2.2, o par (\mathcal{X}^0, Y) satisfaz a condição A_F , onde \mathcal{X}^0 é

a parte suave de \mathcal{X} que nesse caso é $\mathcal{X}^0 = \mathcal{X} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$. Portanto, pelo Lema 3.2.1, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}^\dagger$.

■

Agora, vamos mostrar que se F boa, então $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$ se, e somente se, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}^\dagger$. Para isso precisamos de algumas definições e resultados.

Dado M um submódulo de um \mathcal{O}_X módulo livre F de rank p temos as definições da álgebra de Rees de M , $\mathcal{R}(M)$, e a definição do espectro projetivo analítico, denotado por $\text{Proj}(\mathcal{R}(M))$. São definições técnicas, para mais detalhes ver [19].

Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ conjunto analítico. O **espaço conormal** de X , o qual é denotado por $C(X)$, é definido como sendo o fecho do conjunto de pares de pontos (x, H) em $\mathbb{C}^N \times P^{N-1}$ onde x é um ponto suave de X e H é um hiperplano tangente a X em x .

O **espaço conormal de f** , o qual é denotado por $C(X, f)$, é definido como sendo o fecho do conjunto de pares (x, H) em $\mathbb{C}^N \times P^{N-1}$ onde f é uma submersão em $x \in X$ e H é um hiperplano tangente a fibra de f em x .

Suponha que $(X, 0)$ é um germe analítico complexo, M um submódulo de $\mathcal{O}_{X,0}$. Se N é um submódulo de M e $\overline{M} = \overline{N}$ dizemos que N é uma **redução** de M .

Proposição 3.2.4. [14, Corolário 2.30] *Sejam $M \subset N \subset \mathcal{O}_{X,0}$, $\mathcal{O}_{X,0}$ -módulos. São equivalentes:*

- (i) M é redução de N .
- (ii) A aplicação induzida $c: \text{Proj}(\mathcal{R}(N)) \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{R}(M))$ é finita.

A pré-imagem de U em $C(X, f)$ onde U é uma vizinhança de 0 em Y , é denotada por $C(X, f)|_U$.

Observação 3.2.5. *Assuma F boa. Então $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$ se, e somente se, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}^\dagger$.*

De fato, claramente se $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}^\dagger$, então $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$.

Resta mostrar que se $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$, então $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}^\dagger$. Pelo Lema 3.2.1, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}^\dagger$ se, e somente se, $(\mathcal{X} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz a condição A_F . Logo, mostramos que se $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$, então $(\mathcal{X} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz a condição A_F .

Como $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$, então $\overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}} = \overline{\left\{ \frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial x_j} \right\}}$.

Assim, $\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\} \subset \{\frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial x_j}\}$ com $\overline{\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}} = \overline{\{\frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial x_j}\}}$. Logo, $\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}$ é uma redução de $\{\frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial x_j}\}$.

Pela Proposição 3.2.4 temos

$$c: \text{Proj}(\mathcal{R}(\{\frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial x_j}\})) \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{R}(\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}))$$

é finita.

Agora, $\text{Proj}(\mathcal{R}(\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}))$ é um subconjunto de $X \times P^{N-1}$. Assim, pelo Lema 1.3.3, se V é uma componente de $C(X, f)|_Y$ sua imagem em $\text{Proj}(\mathcal{R}(JM_x(G)))$ deve ser um conjunto analítico de $Y \times P^{N-1}$ de mesma dimensão que V . Por [21, Lema 5.7] segue que V tem dimensão $n + p - 2 = n$ pois p é o rank de $\{\frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial x_j}\}$. Logo, V deve sobrejetar em Y . Assim, $C(X, f)|_Y$ é um subconjunto de $C(Y)$ e então $(\mathcal{X} \setminus (\mathbb{C} \times \{0\}), \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfaz a condição A_F .

Portanto, $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$ implica que $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}}^\dagger_{\mathcal{O}_{X,0}}$.

Observação 3.2.6. Assuma que $(\mathcal{X}, 0)$ é boa. Pelo Teorema 3.2.3 e pela Observação 3.2.5 se F é μ -constante, então $\frac{\partial G}{\partial t} \in \overline{\{\frac{\partial G}{\partial x_j}\}}_{\mathcal{O}_{X,0}}$.

Fecho integral através do Poliedro de Newton

No capítulo anterior, estudamos a equisingularidade de famílias de germes de funções definidas em uma ICIS usando o fecho integral do ideal que define o conjunto singular de cada membro dessas famílias. Então é importante a busca de alternativas que garantam as condições de fecho integral, introduzidas no item (4), das nossas versões do teorema de Greuel descritas no capítulo 3. Dividimos esse capítulo em três seções. Na primeira delas trazemos um pouco da teoria de poliedro de Newton. Nas segunda e terceira seções, através de poliedro de Newton, fornecemos uma maneira de garantir o item (4) das seções 3.1.1 e 3.1.2.

4.1 Poliedro de Newton

Nesta seção estudamos o conceito de poliedro de Newton, mais detalhes podem ser vistos em [52].

Seja $g \in \mathcal{O}_N$, então $g(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} a_\alpha x^\alpha$.

Definição 4.1.1. O **suporte de g** é definido por $\text{supp } g := \{\alpha \in \mathbb{Z}^N \mid a_\alpha \neq 0\}$.

Seja I um ideal em \mathcal{O}_N , definimos o **suporte de I** por

$$\text{supp } I = \bigcup \{\text{supp } g \mid g \in I\}.$$

Definição 4.1.2. O **poliedro de Newton de g** , denotado por $\Gamma_+(g)$, é o fecho convexo em \mathbb{R}_+^N do conjunto $\text{supp } g$.

O **poliedro de Newton de I** , denotado por $\Gamma_+(I)$, é o fecho convexo em \mathbb{R}_+^N do conjunto $\bigcup \{\alpha + v \mid \alpha \in \text{supp } I, v \in \mathbb{R}_+^N\}$.

Exemplo 4.1.3. Seja $g = x^2 - y^3$. A Figura 4.1 representa o poliedro de Newton de g .

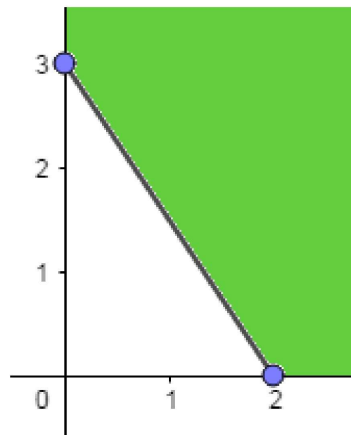


Figura 4.1: Poliedro $\Gamma_+(g)$

Temos que os vértices de $\Gamma_+(g)$ são $\{(2, 0), (0, 3)\}$.

Exemplo 4.1.4. *Seja $I = \langle x^5 + x^2y^2, x^7 + y^4 \rangle$. Na Figura 4.2 temos o poliedro de Newton de I .*

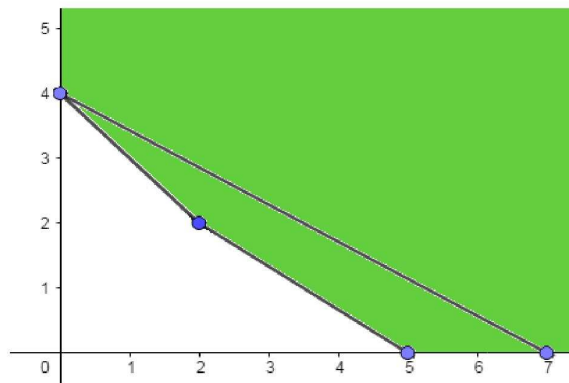


Figura 4.2: Poliedro $\Gamma_+(I)$

Notemos que os vértices de $\Gamma_+(I)$ são $\{(5, 0), (2, 2), (0, 4)\}$.

A união de todas as faces compactas de $\Gamma_+(I)$ será denotada por $\Gamma(I)$.

Seja $\Delta \subset \Gamma_+(I)$ um subconjunto finito e $g(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$, defini-se $g_\Delta = \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha x^\alpha$.

Dado Δ uma face de $\Gamma_+(I)$, denota-se por $C(\Delta)$ o cone de semi-raios saindo da origem e passando por Δ . Defini-se $C[[\Delta]]$ como sendo o anel das séries de potências com monômios não nulos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}$ tal que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in C(\Delta)$.

Definição 4.1.5. Uma face compacta $\Delta \subset \Gamma(I)$ é **Newton não degenerada** se o ideal gerado por $g_{1\Delta}, g_{2\Delta}, \dots, g_{s\Delta}$ tem codimensão finita em $C[[\Delta]]$.

Definição 4.1.6. Um ideal I é **Newton não degenerado** se todas as faces compactas de $\Gamma(I)$ são Newton não degeneradas. Caso contrário, I é dito **Newton degenerado**.

Equivalentemente:

Observação 4.1.7. [52, p. 2] I é Newton não degenerado se para toda face compacta $\Delta \subset \Gamma(I)$, as equações $g_{1\Delta}(x) = g_{2\Delta}(x) = \dots = g_{s\Delta}(x) = 0$ não têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^N$.

Exemplo 4.1.8. Seja $I = \langle g_1, g_2 \rangle$, onde $g_1 = x^8 + y^8$ e $g_2 = xy^5 + x^5y$. O poliedro de Newton de I é representado na Figura 4.3.

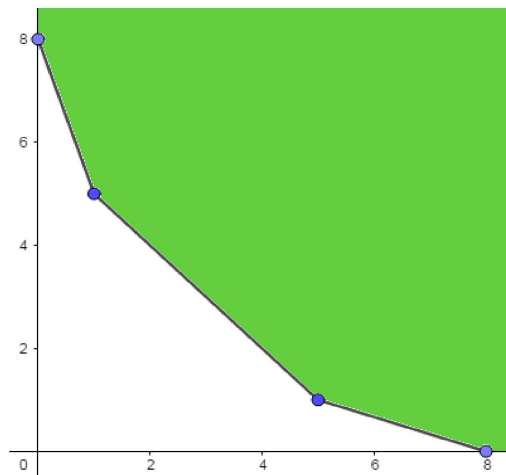


Figura 4.3: Poliedro $\Gamma_+(I)$

Para $\Delta_1 = \{(0, 8), (1, 5)\}$ vamos analisar $g_{1\Delta_1} = g_{2\Delta_1} = 0$, ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} y^8 = 0 \\ xy^5 = 0 \end{cases}.$$

Logo, $y = 0$. Portanto, $g_{1\Delta_1} = g_{2\Delta_1} = 0$ não têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^2$.

Para $\Delta_2 = \{(5, 1), (8, 0)\}$ vamos analisar $g_{1\Delta_2} = g_{2\Delta_2} = 0$, ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^8 = 0 \\ x^5y = 0 \end{cases}.$$

Logo, $x = 0$. Portanto, $g_{1\Delta_2} = g_{2\Delta_2} = 0$ não têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^2$.

Por outro lado, para $\Delta_3 = \{(1, 5), (5, 1)\}$ vamos analisar $g_{1\Delta_3} = g_{2\Delta_3} = 0$, ou seja, precisamos resolver $g_{2\Delta_3} = 0$. Assim, $xy^5 - x^5y = 0$. Então $xy(y^4 - x^4) = 0$. Logo, $g_{1\Delta_3} = g_{2\Delta_3} = 0$ têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^2$.

Portanto, I é Newton degenerado.

Agora, seja $J = \langle h_1, h_2 \rangle$, onde $h_1 = x^8 + xy^5$ e $h_2 = y^8 + x^5y$. Notemos que $\Gamma_+(J) = \Gamma_+(I)$.

Para $\Delta_1 = \{(0, 8), (1, 5)\}$ vamos analisar $h_{1\Delta_1} = h_{2\Delta_1} = 0$, ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} xy^5 = 0 \\ y^8 = 0 \end{cases}.$$

Logo, $y = 0$. Portanto, $h_{1\Delta_1} = h_{2\Delta_1} = 0$ não têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^2$.

Para $\Delta_2 = \{(1, 5), (5, 1)\}$ vamos analisar $h_{1\Delta_2} = h_{2\Delta_2} = 0$, ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} xy^5 = 0 \\ x^5y = 0 \end{cases}.$$

Logo, $x = 0$ ou $y = 0$. Portanto, $h_{1\Delta_2} = h_{2\Delta_2} = 0$ não têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^2$.

Por fim, para $\Delta_3 = \{(5, 1), (8, 0)\}$ vamos analisar $h_{1\Delta_3} = h_{2\Delta_3} = 0$, ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^8 = 0 \\ x^5y = 0 \end{cases}.$$

Logo, $x = 0$. Portanto, $h_{1\Delta_3} = h_{2\Delta_3} = 0$ não têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^2$.

Portanto, J é Newton não degenerado.

Definição 4.1.9. Denotamos por $C(\bar{I})$ o fecho convexo em \mathbb{R}_+^N do conjunto

$$\bigcup \{m \mid x^m \in \bar{I}\}.$$

Teorema 4.1.10. [52, Teorema 3.4] Seja $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$ um ideal de codimensão finita em \mathcal{O}_N . Então I é Newton não degenerado se, e somente se, $\Gamma_+(I) = C(\bar{I})$.

4.2 Poliedro de Newton e deformação da função

Em toda esta seção, sejam $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação holomorfa definindo uma ICIS $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0)$ e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada. Seja $F: (\mathbb{C} \times X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a deformação de f definida por $F(t, x) = f(x) + tg(x)$, onde g é um germe de função holomorfa tal que $g(0) = 0$.

Para cada

$$v = (j_1, \dots, j_{p+1}), \text{ com } j_1 < \dots < j_{p+1} \text{ e } j_1, \dots, j_{p+1} \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.1)$$

denotamos por M_v^f e M_v^g os menores de ordem maximal da matriz Jacobiana das aplicações (ϕ, \tilde{f}) e (ϕ, \tilde{g}) , respectivamente, onde $\tilde{f}: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{f}|_X = f$ e $\tilde{g}: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{g}|_X = g$, obtidos tomando as colunas j_1, \dots, j_{p+1} . Pela multilinearidade do determinante, $M_v = M_v^f + tM_v^g$, onde M_v é o menor correspondente da matriz Jacobiana de $G = (\phi, \tilde{F})$, onde $\tilde{F}: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{F}|_{\mathbb{C} \times X} = F$ (não derivando com respeito ao parâmetro t).

Nesta seção fornecemos critérios para garantir que $g \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$, ou seja, $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$. Os resultados que aparecem nessa seção podem também ser lidos no artigo [11].

Lema 4.2.1. *Se $g, M_v^g \in \overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} , para todos os vetores v definidos em (4.1), então $g \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$.*

Demonstração: Como $M_v^g \in \overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))}$, podemos assumir, pelo Teorema 1.5.4, que existe uma vizinhança U de 0 e uma constante $c > 0$ tal que

$$|t| |M_v^g| \leq |t| c \sup_v \{|\phi|, |M_v^f|\},$$

então

$$\begin{aligned} \sup_v \{|\phi|, |M_v|\} &= \sup_v \{|\phi|, |M_v^f + tM_v^g|\} \\ &\geq \sup_v \{|\phi|, |M_v^f|\} - |t| \sup_v \{|\phi|, |M_v^g|\} \\ &\geq \sup_v \{|\phi|, |M_v^f|\} - |t| c \sup_v \{|\phi|, |M_v^f|\} \\ &\geq (1 - \alpha) \sup_v \{|\phi|, |M_v^f|\}, \end{aligned}$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $|t| \leq \frac{\alpha}{c}$.

Portanto, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sup_v \{|\phi|, |M_v|\} \geq K \sup_v \{|\phi|, |M_v^f|\},$$

para t suficientemente pequeno. Então, pelo Teorema 1.5.4,

$$\overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))} \subseteq \overline{\langle \phi \rangle + J_G}$$

como ideais em \mathcal{O}_{N+1} . Logo, usando a hipótese, concluímos que $g \in \overline{\langle \phi \rangle + J_G}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} . Assim, pelo Teorema 1.5.4, para toda $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$ temos $g \circ \gamma \in \langle \phi \circ \gamma, M_v \circ \gamma \rangle$. Então para toda $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times X, 0) \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$ temos $g \circ \gamma \in \langle M_v \circ \gamma \rangle$. Novamente, pelo Teorema 1.5.4, $g \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$. ■

Corolário 4.2.2. *Se $\Gamma_+(g), \Gamma_+(M_v^g) \subset C(\overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))})$, para todo v definido em (4.1), então $g \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$.*

Demonstração: Como $\Gamma_+(g), \Gamma_+(M_v^g) \subset C(\overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))})$ então, pela definição de $C(\overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))})$, cada monômio de g e M_v^g pertence a $\overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} . Logo, $g, M_v^g \in \overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} .

Portanto, pelo Lema 4.2.1, $g \in \overline{\langle \phi \rangle + J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$. ■

Teorema 4.2.3. *Se $\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))$ é Newton não degenerado e para todo v como em (4.1), $\Gamma_+(g), \Gamma_+(M_v^g) \subset \Gamma_+(\overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))})$, então $g \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$.*

Demonstração: Como $\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))$ é Newton não degenerado, pelo Teorema 4.1.10

$$\Gamma_+(\overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))}) = C(\overline{\langle \phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\phi, f))}).$$

Portanto, pelo Corolário 4.2.2, $g \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t, 0)}$. ■

Exemplo 4.2.4. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ definida pelo conjunto de zeros de $\phi(x, y, z) = (xy, x^{15} + y^{10} + z^6)$ e $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por $f(x, y, z) = x + z$. Seja $F: (\mathbb{C} \times X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a deformação de f definida por $F(t, (x, y, z)) = x + z + ty^{11}$.*

Neste caso,

$$I_3(J_{\underline{x}}(\phi, f)) = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 15x^{14} & 10y^9 & 6z^5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle 6xz^5 + 10y^{10} - 15x^{15} \rangle$$

como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}$, onde $\underline{x} = (x, y, z)$.

Portanto, $\langle \phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\phi, f)) = \langle xy, x^{15} + y^{10} + z^6, 6xz^5 + 10y^{10} - 15x^{15} \rangle$, o qual denotamos a seguir por L .

Temos representado na Figura 4.4 o poliedro de Newton de $\langle \phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\phi, f))$.

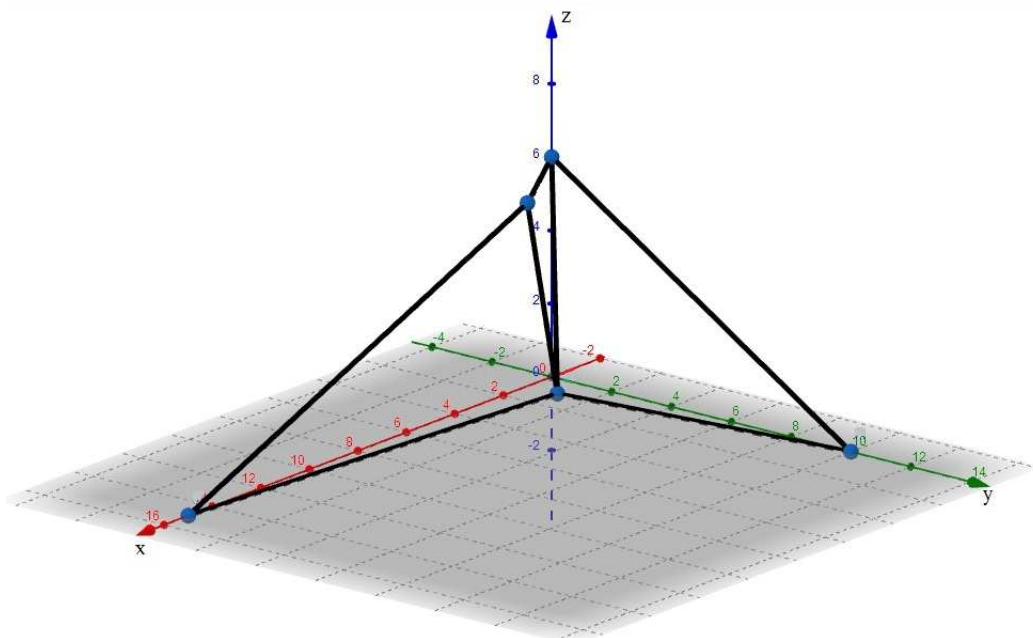


Figura 4.4: Poliedro $\Gamma_+(\langle \phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\phi, f)))$

Vamos garantir que as condições do Teorema 4.2.3 são válidas para esse exemplo. Mostraremos inicialmente que $\langle \phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\phi, f))$ é Newton não degenerado. Pela Observação 4.1.7, basta verificarmos que para toda face compacta Δ do poliedro de Newton de L , as equações que definem L_Δ não têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^3$.

Temos as seguintes faces compactas:

$$\Delta_1 = \{(0, 0, 6), (0, 10, 0)\},$$

$$\Delta_2 = \{(1, 1, 0), (0, 10, 0)\},$$

$$\Delta_3 = \{(1, 1, 0), (0, 0, 6)\},$$

$$\Delta_4 = \{(1, 0, 5), (0, 0, 6)\},$$

$$\Delta_5 = \{(1, 0, 5), (1, 1, 0)\},$$

$$\Delta_6 = \{(15, 0, 0), (1, 0, 5)\},$$

$$\Delta_7 = \{(15, 0, 0), (1, 1, 0)\},$$

$$\Delta_8 = \{(0, 0, 6), (0, 10, 0), (1, 1, 0)\},$$

$$\Delta_9 = \{(0, 0, 6), (1, 0, 5), (1, 1, 0)\},$$

$$\Delta_{10} = \{(15, 0, 0), (1, 0, 5), (1, 1, 0)\} \text{ e}$$

L_{Δ_i} são dadas respectivamente pelos sistemas, para $i = 1, \dots, 10$,

$$\begin{cases} y^{10} + z^6 = 0 \\ 10y^{10} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ y^{10} = 0 \\ 10y^{10} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ z^6 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} z^6 = 0 \\ 6xz^5 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 6xz^5 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^{15} = 0 \\ 6xz^5 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^{15} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ y^{10} + z^6 = 0 \\ 10y^9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ z^6 = 0 \\ 6xz^5 = 0 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^{15} = 0 \\ 6xz^5 - 15x^{15} = 0 \end{cases},$$

para os quais obtemos facilmente que as soluções não estão em $(\mathbb{C} - \{0\})^3$.

Portanto, $\langle \phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\phi, f))$ é Newton não degenerado.

Temos $M_v^g = \langle -66y^{11}z^5 \rangle$, onde M_v^g é o único menor de $I_3(J_{\underline{x}}(\phi, g))$ com $g = y^{11}$. Então $\Gamma_+(g), \Gamma_+(M_v^g) \subset \Gamma_+(\langle \phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\phi, f)))$. Assim, pelo Teorema 4.2.3, $g = \frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X, (t,0)}$, onde $G = (\phi, \tilde{F})$ com $\tilde{F}|_{\mathbb{C} \times X} = F$. Portanto, pelo Teorema 3.1.2 temos que $((\mathbb{C} \times X) \cap F^{-1}(0))^0, \mathbb{C} \times \{0\}$ satisfaz as condições de Whitney, onde $((\mathbb{C} \times X) \cap F^{-1}(0))^0$ é a parte suave de $(\mathbb{C} \times X) \cap F^{-1}(0)$.

4.3 Poliedro de Newton e deformação da variedade e da função

No decorrer desta seção, sejam $\phi: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação holomorfa definindo uma ICIS $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0)$ e

$$\begin{aligned} \Phi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p, 0) \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) = \phi_t(x) \end{aligned}$$

uma deformação (flat) de ϕ tal que $\phi_0 = \phi$, $\phi_t(0) = 0$ e $(X_t, 0) := (\phi_t^{-1}(0), 0)$ é uma ICIS para t suficientemente pequeno. Denotamos

$$(\mathcal{X}, 0) := (\Phi^{-1}(0), 0), \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p) \text{ e } \Phi_k(t, x) := \phi_{kt}(x), k = 1, \dots, p.$$

Escrevemos $\Phi_k(t, x) = \phi_k(x) + th_k(x)$ para $k = 1, \dots, p$, onde h_k é um germe de função holomorfa tal que $h_k(0) = 0$.

Sejam $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade

isolada e $F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a deformação de f definida por $F(t, x) = f(x) + tg(x)$, onde g é um germe de função holomorfa tal que $g(0) = 0$.

Como na seção anterior, para cada

$$v = (j_1, \dots, j_{p+1}), \text{ com } j_1 < \dots < j_{p+1} \text{ e } j_1, \dots, j_{p+1} \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.2)$$

denotamos por M_v^f e M_v^g os menores de ordem maximal da matriz Jacobiana das aplicações (Φ, \tilde{f}) e (Φ, \tilde{g}) , respectivamente, onde $\tilde{f}: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{f}|_X = f$ e $\tilde{g}: (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{g}|_X = g$, obtidos tomando as colunas j_1, \dots, j_{p+1} . Pela multilinearidade do determinante, $M_v = M_v^f + tM_v^g$, onde M_v é o menor correspondente da matriz Jacobiana de $G = (\Phi, \tilde{F})$, onde $\tilde{F}: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é tal que $\tilde{F}|_X = F$ (não derivando com respeito ao parâmetro t).

Nesta seção fornecemos critérios para garantir que $g, h_k \in \overline{J_G} = \overline{I_{p+1}(J_x G)}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$, ou seja, $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$, para $k = 1, \dots, p$.

Lema 4.3.1. *Se $g, h_k, M_v^g \in \overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} , para $k = 1, \dots, p$ e para todos os vetores v definidos em (4.2), então $g, h_k \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, 0}$.*

Demonstração: Como $M_v^g \in \overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))}$, podemos assumir, pelo Teorema 1.5.4, que existe uma vizinhança U de 0 e uma constante $c > 0$ tal que

$$|t|M_v^g \leq |t|c \sup_v \{|\Phi|, |M_v^f|\},$$

então

$$\begin{aligned} \sup_v \{|\Phi|, |M_v|\} &= \sup_v \{|\Phi|, |M_v^f + tM_v^g|\} \\ &\geq \sup_v \{|\Phi|, |M_v^f|\} - |t| \sup_v \{|\Phi|, |M_v^g|\} \\ &\geq \sup_v \{|\Phi|, |M_v^f|\} - |t|c \sup_v \{|\Phi|, |M_v^f|\} \\ &\geq (1 - \alpha) \sup_v \{|\Phi|, |M_v^f|\}, \end{aligned}$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $|t| \leq \frac{\alpha}{c}$.

Portanto, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sup_v \{|\Phi|, |M_v|\} \geq K \sup_v \{|\Phi|, |M_v^f|\},$$

para t suficientemente pequeno. Então, pelo Teorema 1.5.4,

$$\overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))} \subseteq \overline{\langle \Phi \rangle + J_G}$$

como ideais em \mathcal{O}_{N+1} . Logo, usando a hipótese, concluimos que $g, h_k \in \overline{\langle \Phi \rangle + J_G}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} , para $k = 1, \dots, p$. Assim, pelo Teorema 1.5.4, para toda $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$ temos $g \circ \gamma, h_k \circ \gamma \in \langle \Phi \circ \gamma, M_v \circ \gamma \rangle$, para $k = 1, \dots, p$. Então para toda $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$ temos $g \circ \gamma, h_k \circ \gamma \in \langle M_v \circ \gamma \rangle$, para $k = 1, \dots, p$. Novamente, pelo Teorema 1.5.4, $g, h_k \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, para $k = 1, \dots, p$. ■

Corolário 4.3.2. *Se $\Gamma_+(g), \Gamma_+(h_k), \Gamma_+(M_v^g) \subset C(\overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))})$, para $k = 1, \dots, p$ e para todo v definido em (4.2), então $g, h_k \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$.*

Demonstração: Como $\Gamma_+(g), \Gamma_+(h_k), \Gamma_+(M_v^g) \subset C(\overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))})$ então, pela definição de $C(\overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))})$, cada monômio de g, h_k e M_v^g pertence a $\overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} . Logo, $g, h_k, M_v^g \in \overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))}$ como um ideal em \mathcal{O}_{N+1} .

Portanto, pelo Lema 4.3.1, $g \in \overline{\langle \Phi \rangle + J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$. ■

Teorema 4.3.3. *Se $\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))$ é Newton não degenerado e para todo v como em (4.2), $\Gamma_+(g), \Gamma_+(h_k), \Gamma_+(M_v^g) \subset \Gamma_+(\overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))})$, então $g, h_k \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, para $k = 1, \dots, p$.*

Demonstração: Como $\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))$ é Newton não degenerado, pelo Teorema 4.1.10

$$\Gamma_+(\overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))}) = C(\overline{\langle \Phi \rangle + I_{p+1}(J_x(\Phi, f))}).$$

Portanto, pelo Corolário 4.3.2, $g, h_k \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$. ■

Exemplo 4.3.4. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ definida pelo conjunto de zeros de $\phi(x, y, z) = (xy, x^{15} + y^{10} + z^6)$ e $(\mathcal{X}, 0)$ definida pelo conjunto de zeros da deformação $\Phi(x, y, z) = (xy - tz^7, x^{15} + y^{10} + z^6)$ de ϕ . Sejam $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por $f(x, y, z) = x + z$ e $F: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a deformação de f definida por $F(t, (x, y, z)) = x + z + ty^{11}$.*

Neste caso,

$$I_3(J_{\underline{x}}(\Phi, f)) = \begin{vmatrix} y & x & -7tz^6 \\ 15x^{14} & 10y^9 & 6z^5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle 6xz^5 + 10y^{10} - 15x^{15} + 70ty^9z^6 \rangle$$

como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, onde $\underline{x} = (x, y, z)$.

Portanto, $\langle \Phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\Phi, f)) = \langle xy - tz^7, x^{15} + y^{10} + z^6, 6xz^5 + 10y^{10} - 15x^{15} + 70ty^9z^6 \rangle$, o qual denotamos por L .

Temos representado na Figura 4.5 o poliedro de Newton de $\langle \Phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\Phi, f))$.

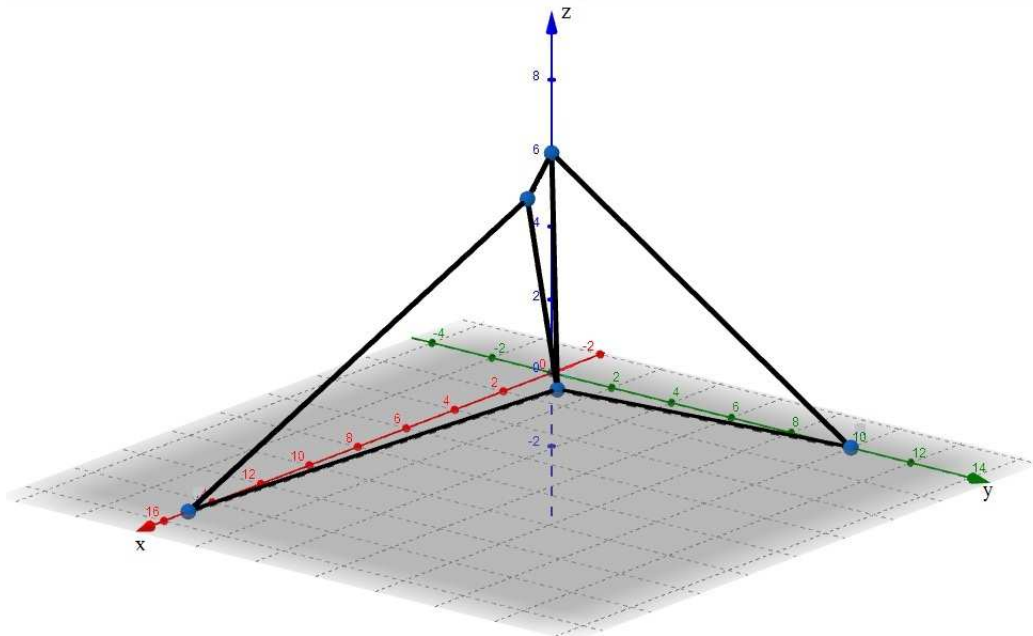


Figura 4.5: Poliedro $\Gamma_+(\langle \Phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\Phi, f)))$

Vamos garantir as hipóteses do Teorema 4.3.3 e assim concluir que $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{J_G}$ e $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$, onde $\Phi_1(x, y, z) = xy - tz^7$ e $G = (\Phi, \tilde{F})$ com $\tilde{F}|_{\mathcal{X}} = F$. Mostraremos inicialmente que L é Newton não degenerado. Pela Observação 4.1.7, basta verificarmos que para toda face compacta Δ do poliedro de Newton de L , as equações que definem L_Δ não têm solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^3$.

Temos as seguintes faces compactas:

$$\Delta_1 = \{(0, 0, 6), (0, 10, 0)\},$$

$$\Delta_2 = \{(1, 1, 0), (0, 10, 0)\},$$

$$\Delta_3 = \{(1, 1, 0), (0, 0, 6)\},$$

$$\Delta_4 = \{(1, 0, 5), (0, 0, 6)\},$$

$$\Delta_5 = \{(1, 0, 5), (1, 1, 0)\},$$

$$\Delta_6 = \{(15, 0, 0), (1, 0, 5)\},$$

$$\Delta_7 = \{(15, 0, 0), (1, 1, 0)\},$$

$$\Delta_8 = \{(0, 0, 6), (0, 10, 0), (1, 1, 0)\},$$

$$\Delta_9 = \{(0, 0, 6), (1, 0, 5), (1, 1, 0)\},$$

$$\Delta_{10} = \{(15, 0, 0), (1, 0, 5), (1, 1, 0)\} \text{ e}$$

L_{Δ_i} são dadas respectivamente pelos sistemas, para $i = 1, \dots, 10$,

$$\begin{cases} y^{10} + z^6 = 0 \\ 10y^{10} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ y^{10} = 0 \\ 10y^{10} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ z^6 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} z^6 = 0 \\ 6xz^5 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 6xz^5 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^{15} = 0 \\ 6xz^5 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^{15} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ y^{10} + z^6 = 0 \\ 10y^9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ z^6 = 0 \\ 6xz^5 = 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^{15} = 0 \\ 6xz^5 - 15x^{14} = 0 \end{cases},$$

para os quais obtemos facilmente que as soluções não estão em $(\mathbb{C} - \{0\})^3$.

Portanto, $\langle \Phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\Phi, f))$ é Newton não degenerado.

Temos $M_v^g = \langle -66y^{11}z^5 - 1155tx^{14}y^{10}z^6 \rangle$, onde M_v^g é o único menor de $I_3(J_{\underline{x}}(\Phi, g))$ com $g = y^{11}$. Então $\Gamma_+(g), \Gamma_+(h_1), \Gamma_+(M_v^g) \subset \Gamma_+(\langle \Phi \rangle + I_3(J_{\underline{x}}(\Phi, f)))$, onde $h_1 = -z^7$. Assim, pelo Teorema 4.3.3, $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{J_G}$ e $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \in \overline{J_G}$ como um ideal em $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$. Portanto, pelo Teorema 3.1.18, $(\mathcal{X} \cap F^{-1}(0))^0, \mathbb{C} \times \{0\}$ e $(\mathcal{X}^0, \mathbb{C} \times \{0\})$ satisfazem as condições de Whitney.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Ahmed, M. A. S. Ruas and J. N. Tomazella, *Invariants of topological relative right equivalences*, Math. Proc. Cambridge Philos Soc. **155** (2013), No. 2, 307-315. DOI: 10.1017/s0305004113000297
- [2] D. A. H. Ament, J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto and J. N. Tomazella, *The Euler obstruction of a function on a determinantal variety and on a curve*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S) **47** (2016), No. 3, 955-970.
- [3] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Vol. I. Springer-Verlag, New York, (1985), xvi+386 pp.
- [4] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. (1969), ix+128 pp.
- [5] J.-P. Brasselet, D. T. Lê and J. Seade, *Euler obstruction and indices of vector fields*, Topology, **39**, (2000), No. 6, 1193-1208.
- [6] J.-P. Brasselet, J. Seade and T. Suwa, *Vector fields on singular varieties*, Lecture Notes in Mathematics, 1987. Springer-Verlag, Berlin, (2009), xx+225 pp.
- [7] J. Briançon and J. -P. Speder, *La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), No. 6, A365-A367.
- [8] J. Briançon, A. Galligo and M. Granger, *Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites*, Mém. Soc. Math. France (N.S.), (1980/81), No. 1, 69 pp.
- [9] J. W. Bruce and R. M. Roberts, *Critical points of functions on analytic varieties*, Topology **27**, (1988), No. 1, 57-90. DOI: 10.1016/0040-9383(88)90007-9
- [10] R.-O. Buchweitz and G.-M Greuel, *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*, Invent. Math. **58** (1980), No. 3, 241-281.

-
- [11] R. S. Carvalho, B. Oréface-Okamoto and J. N. Tomazella, *μ -constant deformations of functions on ICIS*, J. Singul. **19** (2019), 163-176. DOI: 10.5427/jsing.2019.19i
- [12] R. S. Carvalho, J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto and J. N. Tomazella, *Equisingularity of families of functions on isolated determinantal singularities*, preprint.
- [13] J. A. Eagon and M. Hochster, *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*, Amer. J. Math. **93**, (1971), 1020-1058.
- [14] T. Gaffney, *Equisingularity and the Theory of Integral Closure*, Singularities and foliations. geometry, topology and applications, 89-131, Springer Proc. Math. Stat., **222**, Springer, Cham, (2018).
- [15] T. Gaffney, *Equisingularity of plane sections, t_1 condition and the integral closure of modules*, Real and complex singularities (São Carlos, 1994), Pitman Res. Notes Math. Ser. **333**, Longman, Harlow, (1995), 95-111.
- [16] T. Gaffney, *Integral closure of modules and Whitney equisingularity*, Invent. Math. **107** (1992), No. 2, 301-322. DOI: 10.1007/bf01231892
- [17] T. Gaffney, *Multiplicities and equisingularity of ICIS germs*, Invent. Math. **123** (1996), No. 2, 209-220.
- [18] T. Gaffney, *Polar multiplicities and equisingularity of map germs*, Topology **32** (1993), No. 1, 185-223. DOI: 10.1016/0040-9383(93)90045-w
- [19] T. Gaffney, *Polar methods, invariants of pairs of modules and equisingularity*, Real and complex singularities, Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI **354** (2004), 113-135.
- [20] T. Gaffney and S. L. Kleiman, *Specialization of integral dependence for modules*, Invent. Math. **137** (1999), No. 3, 541-574.
- [21] T. Gaffney and D. Massey, *Trends in equisingularity theory*, Singularity theory (Liverpool, 1996), xix-xx, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **263**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1999), 207-248.
- [22] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Pitman Publishing-London (1979).

-
- [23] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis and E. J. N. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **552**. Springer-Verlag, Berlin-New York (1976), iv+155 pp.
- [24] H. Grauert and R. Remmert, *Theory of Stein spaces*, Translated from the German by Alan Huckleberry. Reprint of the 1979 translation. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (2004), xxii+255 pp.
- [25] G. M. Greuel, *Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities*, Manuscripta Math. **56** (1986), No. 2, 159-166. DOI: 0.1007/bf01172153
- [26] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley and Sons], New York, (1978), xii+813 pp.
- [27] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1974), xvi+222 pp.
- [28] H. Hamm, *Lokale topologische Eigenschaften Komplexer Räume*, Math. Ann. **191** (1971), 235-252. DOI: 10.1007/bf01578709
- [29] T. de Jong and G. Pfister, *Local analytic geometry*, Basic theory and applications. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, (2000), xii+382 pp.
- [30] V. H. Jorge Perez and M. J. Saia, *Euler obstruction, polar multiplicities and equisingularity of map germs in $\mathcal{O}(n, p)$, $n < p$* , Internat. J. Math. **17** (2006), No. 8, 887–903.
- [31] S. L. Kleiman, *Equisingularity, Multiplicity, and Dependence*, Commutative algebra and algebraic geometry (Ferrara), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **206** Dekker, New York, (1999), 211-225.
- [32] D. T. Lê, J. J. Nuño-Ballesteros and J. Seade, *The topology of the Milnor Fibration*, preprint.
- [33] D. T. Lê and C. P. Ramanujam, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of topological type*, Amer. J. Math. **98** (1976), No. 1, 67-78.

-
- [34] D. T. Lê and B. Teissier, *Variétés polaires locales et classes de Chern de variétés singulières*, Ann. of Math. (2), **114** (1981), No. 3, 457–491.
- [35] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **218**. Springer, New York, (2013). xvi+708 pp.
- [36] E. L. Lima, *Variiedades diferenciáveis*, [Differentiable manifolds] Monografias de Matemática [Mathematical Monographs], **15**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1977), ii+369 pp.
- [37] E. J. N. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **77**. Cambridge University Press (1984).
- [38] J. Mather, *Notes on topological stability*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **49** (2012), No. 4, 475–506.
- [39] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, (1989).
- [40] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press (1968).
- [41] B. Morin, *Calcul jacobien*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **8**, (1975), 1-98.
- [42] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto, B. K. L. Pereira and J. N. Tomazella, *The Bruce-Roberts number of a function on a hypersurface*, preprint.
- [43] J. J. Nuño-Ballesteros and J. N. Tomazella, *The Milnor number of a function on a space curve germ*, Bull. Lond. Math. Soc. **40** (2008), No. 1, 129–138.
- [44] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto and J. N. Tomazella, *Non-negative deformations of weighted homogeneous singularities*, Glasg. Math. J. **60** (2018), No. 1, 175-185.
- [45] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto and J. N. Tomazella, *The vanishing Euler characteristic of an isolated determinantal singularity*, Israel J. Math. **197** (2013), No. 1, 475–495.
- [46] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto and J. N. Tomazella, *Erratum to "The vanishing Euler characteristic of an isolated determinantal singularity"*, Israel J. Math. **197** (2013), 475–495. Israel J. Math. **224** (2018), No. 1, 505–512.

-
- [47] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto and J. N. Tomazella, *Equisingularity of families of isolated determinantal singularities*, Math. Z. **289** (2018), No. 3-4, 1409-1425.
- [48] J. J. Nuño-Ballesteros and M. J. Saia, *Multiplicity of Boardman strata and deformations of map germs*. Glasgow Math. J. **40** (1998), No. 1, 21–32.
- [49] A. J. Parameswaran, *Topological equisingularity for isolated complete intersection singularities*, Compositio Math. **80** (1991), No. 3, 323-336.
- [50] M. S. Pereira and M. A. S. Ruas, *Codimension two determinantal varieties with isolated singularities*, Mathematica Scandinavica, (2014), 161-172.
- [51] M. A. S. Ruas and J. N. Tomazella, *An infinitesimal criterion for topological triviality of families of sections of analytic varieties*, Singularity theory and its applications, Adv. Stud. Pure Math. **43** (2006), 421-436. DOI: 10.2969/aspm/04310421
- [52] M. J. Saia, *The integral closure of ideals and the Newton filtration*, J. Algebraic Geom. **5** (1996), No. 1, 1-11.
- [53] B. Teissier, *Cycles évanescents: sections planes et conditions de Whitney*, (French) Singularités à Cargèse, (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972) Astérisque, Nos. 7 et 8, Soc. Math. France, Paris (1973), 285-362.
- [54] J. G. Timourian, *Invariance of Milnor's number implies topological triviality*, Amer. J. Math. **99** (1977), No. 2, 437-446. DOI: 10.2307/2373829
- [55] O. Zariski, *Some open questions in the theory of singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 481-491.