UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Devis Ordoño Vilca

Invariantes de singularidades em característica positiva

São Carlos - SP
30 de março de 2020

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 88882.426785/2019-01

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Invariantes de singularidades em característica positiva

Devis Ordoño Vilca
Bolsista Capes

Orientadora: Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Devis Ordoño Vilca, realizada em 30/03/2020:

Bruna Oréfice Okamoto

Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto
UFSCar

Bruna Oréfice Okamoto

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
UFSCar

Bruna Oréfice Okamoto

Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez
USP

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) João Nivaldo Tomazella, Victor Hugo Jorge Pérez e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Bruna Oréfice Okamoto

Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto

Dedicado a Edith, Gregorio, Sabja, Luisa, Mario e Margarita.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa de Posgraduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, pela oportunidade de continuar meus estudos de Mestrado em Matemática.

Agradeço muito à professora Dra. Bruna Oréfice Okamoto por me aceitar orientar, ensinar, e ajudar durante todo este período. Sua orientação dentro e fora da pesquisa foi muito importante em minha vida.

Agradeço aos professores Dr. João Nivaldo Tomazella e Dr. Víctor Hugo Jorge Pérez pela revisão, sugestões e participação da minha defesa de dissertação. Além ao professor Dr. Dimas Gonçalves por ser parte de minha banca de qualificação.

Agradeço aos professores: Dr. Olimpio Hiroshi, Dr. Waldeck Schützer, Dr. Dirk Töben, Dra. Alessandra Verri, Dr. Rafael Barostichi, Dr. Adilson Presoto e Dr. Guillermo Lobos pelo ensino nas disciplinas do mestrado.

Aos professores: Dr. Edivaldo Lopes dos Santos e Dr. Luiz Hartmann pela recepção no DM e pelos gratos conselhos.

Aos professores da Universidad Nacional Mayor de San Marcos: Dr. Rafael Cabanillas, Dra. Roxana López, MSc. José Pérez, MSc. Adrián Aliaga, MSc. Daniel Lovera, MSc. Martha Gonzáles, Dr. Alberto Rivero e Dr. Rudy Rosas (PUCP) pela motivação que recibí na graduação.

Agradeço a Andreé Ríos, Telmo Acosta, Wilson Aliaga, César Ipanaqué, Carlos Mamani e Juan Nuñez pelas conversas e orientações em distintos tópicos da Matemática que precisei. A meus amigos do mestrado com os quais fiz as disciplinas, em especial a Neilson Castro, Rafael Zampiva e Cícero Santos.

Agradeço a Eliseo Vilca, Guido Vilca, Elard, Rafaela, Bárbara, Jonathan, Pablo, Mynor, Mariano, Juan Carlos, Diana, Braulio, Rodiak, Helmuth, Jessica, Marco, Carlos, Mario, Kevin, Mannaim, Izabella, Dayana, Cristiano, Rafael, Marcos, Lorrayne, André, Débora, Victor, Melissa, Gabriel, Alejandro, Muriel, Eduardo, Felipe, Ronaldo, Maria Carolina, Junio, Renato, Hermano, Leandro, Miguel, Thales, Luciano, Alex, Maykel, Waldir, Esly, Xander, Gladys, Paola, Paula, Regina, Laís, Lucileni, Juedi, Samuel, Raphael, Ángelo, Gisela, Ylse, Omar, Abraham, Yajaira, Nerolie, Ronald, Hilton, Missell e Sandra pelo suporte técnico e amizade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 88882.426785/2019-01

Por último agradeço de coração a Deus por me dar, axiomaticamente, uma família.

"Deixo-vos a paz, dou-vos a minha paz. Não vo-la dou como o mundo a dá. Não se perturbe o vosso coração, nem se atemorize!"
São João, 14:27.

Resumo

A dissertação tem como base os trabalhos de [GrYo12] e [GrPha19].

Considerando um corpo $\mathbb{K}$, algebricamente fechado com característica positiva, apresentamos invariantes de singularidades em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$, a $\mathbb{K}$-álgebra local das séries de potências formais, tais como os números de Milnor e de Tjurina.

Definimos duas relações de equivalência em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$, pela direita e por contato. Definimos o conceito de determinação finita de $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ com respeito a cada uma das relações de equivalência, a determinação finita também é expressa em termos dos números de Milnor e Tjurina.

Mostramos que uma condição necessária para $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ ser finitamente determinada pela direita (resp. por contato) é que f possua uma singularidade isolada (resp. é uma hipersuperfície com singularidade isolada); a condição necessária é baseada em um lema técnico considerando em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ com a topologia $\mathfrak{m}$-ádica. Por último, considerando que uma aplicação órbita, em geral, não é separável em característica positiva, prova-se que a condição é também suficiente.

Abstract

This dissertation mainly follows the works of [GrYo12] and [GrPha19].

Considering $\mathbb{K}$ a field, algebraically closed with positive characteristic, we presented invariants of singularities in $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$, the local $\mathbb{K}$- algebra of the formal power series, such as Milnor and Tjurina numbers.

Two equivalence relations are defined on $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$, right equivalence and contact equivalence. The concept of finite determinancy of $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ is defined with respect to those equivalence relations, the finite determinancy is also expressed in terms of the Milnor and Tjurina numbers.

We show that a necessary condition for $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ to be finitely determined by the right (respectively contact) is that it has an isolated singularity (respectively is a hypersurface with isolated singularity); the necessary condition is based on a technical lemma considering $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ with the $\mathfrak{m}$-adic topology. Finally, considering that the orbit application, in general, is not separable in positive characteristic, it is proved that the condition is also sufficient.

Sumário

Introdução

São estudados desde o século passado invariantes de singularidades sobre os corpos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e em corpos de característica zero, destaca-se os trabalhos de René Thom, John Milnor e outros pesquisadores.

Consideramos $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, $char(\mathbb{K}) \geq 0$ e a $\mathbb{K}$-álgebra local das séries de potências formais $\mathbb{K}[[x_1, ..., x_n]] := \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ com o ideal maximal $\mathfrak{m} := \langle x_1, ..., x_n \rangle$ e dotado de uma topologia, a qual é chamada topologia $\mathfrak{m}-$ádica, assim $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tem as propriedades de ser noetheriano, completo e de Hausdorff.

Seja $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, são chamados os ideais $j(f) = \langle f_{x_1}, ..., f_{x_n} \rangle$ e $tj(f) = \langle f, f_{x_1}, ..., f_{x_n} \rangle$ os ideais Jacobiano e de Tjurina, respectivamente. Definimos $M_f := \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{j(f)}$ e $T_f := \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{tj(f)}$ as álgebras de Milnor e Tjurina, respectivamente. Suas dimensões como espaços vetoriais $\mu(f) := dim_{\mathbb{K}} M_f$ e $\tau(f) := dim_{\mathbb{K}} T_f$ são os números de Milnor e de Tjurina, respectivamente.

Dizemos que f tem singularidade isolada se $\mu(f) < \infty$, equivalentemente se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^k \subset j(f)$. De maneira análoga $R_f := \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle f \rangle}$ tem singularidade isolada se $\tau(f) < \infty$, equivalentemente, se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^k \subset tj(f)$.

Dadas $f, g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$.

a. Se existir um automorfismo $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ tal que $f = \varphi(g)$, dizemos que f está relacionada com f pela direita, denota-se $f \sim_r g$.

b. Se existir $u \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ tal que $f = u \cdot \varphi(g)$, dizemos que f está relacionada com f por contato, escrevemos $f \sim_c g$.

c. Dizemos que $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é finitamente determinada pela direita se existe um número inteiro positivo k tal que para qualquer outra $g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que coincida o k-jato com f, temos que $f \sim_r g$.

d. Dizemos que $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é finitamente determinada por contato se existe um número inteiro positivo k tal que para qualquer outra $g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que coincida o k-jato com f, temos que $f \sim_c g$.

Apresentamos com detalhes, para $char(\mathbb{K}) \geq 0$, um lema técnico tratado em [Bo09] de natureza recursiva. Isto é importante, pois a verificação que $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é finitamente determinada (pela direita ou por contato) não é fácil testando com ferramentas computacionais. Este lema é útil para provar a condição necessária de cada item do Teorema:

Teorema 0.0.1. *Dado $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]], f \neq 0$ e $f \in \mathfrak{m}^2$ com $k \in \mathbb{N}$ fixo. Então:*

1. $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ *se e somente se f é $(2k - ord(f) + 2)$-determinado pela direita.*

2. $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ *se e somente se f é $(2k - ord(f) + 2)$-determinado por contato.*

Também apresentamos, como aplicação do teorema acima, uma relação entre a ordem da determinação finita com os números de Milnor e Tjurina. Isto é desenvolvido tanto para o caso complexo como para característica positiva. Também desenvolvemos exemplos para a melhor compreensão do teorema acima.

O recíproco do teorema acima foi desenvolvido em [GrYo12], mas possui um pequeno erro, ao considerar que toda aplicação órbita é separável, isto é definido nesta dissertação quando a aplicação tangente de Zariski é sobrejetora. Um dos autores em outro artigo [GrPha19] faz a prova desta parte recíproca do teorema faltante como caso particular do estudo de determinação finita em matrizes coluna de séries de potências formais. Apresentamos exemplos, em característica positiva, de aplicações órbita não separáveis.

[GrPha18] desenvolve um estudo de matrizes de séries de potência formais assim como o espaço tangente de Zariski, aplicação tangente, ações de grupos algébricos em variedades algébricas, imagem tangente estendida. Calculamos a imagem tangente para o caso particular no espaço de matrizes 1×1.

Por último desenvolvemos a demonstração do caso recíproco do Teorema 0.0.1 baseados em [GrPha19].

Capítulo

1

Conceitos preliminares

Neste capítulo, apresentamos definições, notações e alguns resultados básicos que serão utilizados ao longo da dissertação. As principais referências são: [GrPf08], [ZSC58] e [ZS60].

1.1 Estrutura de $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$

1.1.1 Notações

Ao longo da dissertação $\mathbb{K}$ denota um corpo algebricamente fechado e de característica positiva, caso contrário fazemos menção explícita.

Dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denotamos o fatorial de α por $\alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!$, também denotamos $\alpha \leq \beta$ quando $\alpha_i \leq \beta_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. A norma de α é definida por $\mid \alpha \mid = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Seja a n-upla de indeterminadas $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$, denotamos $\underline{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$ os monômios e o grau do monômio $\underline{x}^\alpha$ é definido por $deg(\underline{x}^\alpha) = deg(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \mid \alpha \mid$.

1. Uma expressão $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha$, com $a_\alpha \in \mathbb{K}$, é chamada uma série de potências formal a qual também denotamos por $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \underline{x}^\alpha$.

2. Seja $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha$ uma série de potências formal não nula, definimos a *ordem* de f por $ord(f) := min \{\mid \alpha \mid : \alpha \in \mathbb{N}^n, a_\alpha \neq 0\}$.
   Se f é a série de potências formal nula então convencionamos $ord(f) = \infty$.

3. Denotamos $\mathbb{K}[[\underline{x}]] = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha : a_\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}$ o anel das séries de potências formais com a adição e multiplicação, respectivamente:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \underline{x}^\alpha := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (a_\alpha + b_\alpha) \underline{x}^\alpha \tag{1.1}$$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \underline{x}^\alpha := \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} (\sum_{\alpha + \beta = \gamma} a_\alpha b_\beta) \underline{x}^\gamma \tag{1.2}$$

4. Escrevemos recursivamente $f = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x_1, ..., x_{n-1}) x_n^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x_n^i$, onde $b_i = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_n = i}} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in \mathbb{K}[[x_1, ..., x_{n-1}]]$ para $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$.

5. Seja $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \mathbb{K}[[\underline{x}]], k \in \mathbb{N}$ então o k-jato de f é definido por $j_k(f) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \underline{x}^\alpha$, isto é a soma dos termos de ordem $\leq k$.

6. $\mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ denota as unidades de $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e $Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ denota o conjunto de automorfismos $\phi : \mathbb{K}[[\underline{x}]] \to \mathbb{K}[[\underline{x}]]$.

1.1.2 $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ como $\mathbb{K}$-álgebra

Consideremos $h : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Se $a \in A, b \in B$, definimos o produto $ab = h(a)b$. Com esta definição, o anel B torna-se em um A-módulo. O anel B com a estrutura de A-módulo, é chamado de A-álgebra. Assim:

Definição 1.1.1. *([AtiMc69], 30) Uma A-álgebra é um anel B junto com um homomorfismo de anéis $h : A \to B$.*

Observação 1.1.2. *Em particular, se A é um corpo $\mathbb{K}$ e $B \neq \{0\}$, então h é injetora. Assim uma $\mathbb{K}-$álgebra é um anel contendo $\mathbb{K}$ como subanel.*

Verificar que $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra é importante para nosso trabalho, assim enunciamos o lema a seguir, que além disso detalha informação sobre seus ideais.

Lema 1.1.3. *([ZS60],131) $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ com as operações 1.1 e 1.2 é um anel local ($\mathbb{K}$-álgebra local). Isto é,*

1. *Só tem 1 ideal maximal.*

2. *O único ideal maximal de* $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ *é* $\mathfrak{m} := \langle \underline{x} \rangle = \langle x_1, ..., x_n \rangle = \{f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]] : f(0) = 0\}$.

A seguir definimos de uma maneira mais precisa o k-jato de f e a ordem de $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ em termos do ideal maximal.

Definição 1.1.4. *O k-jato de f é a imagem de f em* $\dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\mathfrak{m}^{k+1}}$. *Também podemos denotar o k-jato de f como* $f^{(k)}$ *ou* $j_k(f)$.

Definição 1.1.5. *A ordem de f é* $ord(f) = max\{k \in \mathbb{N} : f \in \mathfrak{m}^k\}$.

A seguir são enunciados lemas importantes relacionados à ordem, o ideal maximal e levantamento de homomorfismos.

Lema 1.1.6. *([GrPf08], 357) Sejam* $f, g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ *então*

$$ord(f + g) \geq min\{ord(f), ord(g)\}$$

$$ord(f \cdot g) = ord(f) + ord(g).$$

Lema 1.1.7. *([GrPf08], 357)* $\bigcap_{i=1}^{\infty} \langle \underline{x} \rangle^i = \langle 0 \rangle$.

Definição 1.1.8. *Dada* $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ *chamamos à* $\mathbb{K}$*-álgebra analítica* $R_f = \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle f \rangle}$ *de hipersuperfície singular induzida.*

Lema 1.1.9. *([Bo09], 14)[Lema de levantamento] Seja* φ *um homomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebras analíticas,*

$$\varphi : \frac{\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]}{I} \to \frac{\mathbb{K}[[y_1, \ldots, y_m]]}{J},$$

onde I e J são ideais de $\mathbb{K}[[x_1, ..., x_n]]$ *e de* $\mathbb{K}[[y_1, ..., y_m]]$ *respectivamente. Se* $n = m$ *e* φ *é um isomorfismo então existe um levantamento*

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]] \to \mathbb{K}[[y_1, ..., y_m]]$$

de φ*, o qual é um isomorfismo. Se* $n \geq m$ *e* φ *é sobrejetora, então existe um levantamento* $\widetilde{\varphi}$ *de* φ *o qual é sobrejetora.*

1.1.3 Convergência e Topologia em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$

Nesta subseção definimos a convergência formal de séries de potências, que chamamos convergência na topologia $\mathfrak{m}$-ádica. Por outro lado definimos uma métrica $d : \mathbb{K}[[\underline{x}]] \times \mathbb{K}[[\underline{x}]] \to \mathbb{R}$ em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ na qual a convergência usual é equivalente à convergencia formal de potências. Em consequência é generalizada para $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ a propiedade de substituição, válida naturalmente no anel de polinômios $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Vemos que $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é noetheriano e enunciamos o lema de Nakayama, este último um lema importante de Álgebra comutativa. Também demostramos um resultado que é útil para determinar, equivalentemente, quando f tem singularidade isolada.

Definição 1.1.10. *Uma sequência $\{f_v\} := \{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ onde $f_v \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, é chamada formalmente convergente na topologia $\mathfrak{m}$-ádica se existe uma série de potências $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f - f_v \in \langle \underline{x} \rangle^k, \forall\ v \geq n_0$. Denotamos $\lim\limits_{v\to+\infty} f_v = f$.*

Exemplo 1. *(A) Seja $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}[[x, y, z]]$ a sequência definida por*

$$f_v := x^v \cdot y^v \cdot z^v, \forall v \in \mathbb{N}.$$

Podemos ver que f_v converge formalmente a $f := 0 \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ na topologia $\mathfrak{m}$-ádica.

(B) Seja $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}[[x, y, z]]$, a sequência definida por

$$f_v := x \cdot y \cdot z, \forall v \in \mathbb{N}.$$

Esta sequência converge na topologia $\mathfrak{m}$-ádica à serie $f := x \cdot y \cdot z$.

Definição 1.1.11. *Uma sequência $\{f_v\} \subset \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é chamada sequência de Cauchy se para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $f_r - f_v \in \langle \underline{x} \rangle^k, \forall\ r, v \geq n_0$.*

Definição 1.1.12. *Se $\{f_v\}$ é uma sequência formalmente convergente com $\lim\limits_{v\to+\infty} f_v = 0$, então a sequência de somas parciais $\{\sum\limits_{v=0}^{m} f_v\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge formalmente (na topologia $\mathfrak{m}$-ádica) e definimos*

$$\sum_{v=0}^{\infty} f_v := \lim_{m\to+\infty} (\sum_{v=0}^{m} f_v).$$

Observação 1.1.13. *Para a boa definição de 1.1.12 é necessária a condição* $\lim_{v\to+\infty} f_v = 0$ *(na topologia* $\mathfrak{m}$*-ádica). Afirmamos que a sequência de somas parciais* $\{g_p\}$*, tal que* $g_p = \sum_{i=0}^{p} f_i$*, para cada* $p \in \mathbb{N}$ *converge a* $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ *na topologia* $\mathfrak{m}$*-ádica.*

Com efeito dado $k \in \mathbb{N}$*, pela hipótese sabemos que existe* $n_0^k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f_n \in \mathfrak{m}^k$*, para todo* $n \geq n_o^k$*. Então:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i - g_{n_0^k} = \sum_{i=n_0^k+1}^{\infty} f_i,$$

mas como para todo $n \geq n_o^k$*,* $f_n \in \mathfrak{m}^k$*, então:*

$$\sum_{i=n_0^k+1}^{\infty} f_i \in \mathfrak{m}^k.$$

Exemplo 2. *(C) Seguindo o Exemplo 1 (A), definimos as somas parciais de* $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ *por* $g_v := \sum_{i=0}^{v} f_i$*, para cada* $v \in \mathbb{N}$*. Assim* $\{g_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ *converge na topologia* $\mathfrak{m}$*-ádica à série* $f := \sum_{v=0}^{\infty} f_v$*.*

(D) Seguindo o Exemplo 1 (B), definimos as somas parciais de $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ *por* $s_v := \sum_{i=0}^{v} f_i$*, para cada* $v \in \mathbb{N}$*. Pode-se observar que* $\{s_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ *não converge na topologia* $\mathfrak{m}$*-ádica.*

Observação 1.1.14. *([GrPf08], 358) Sejam* $\{f_v\}, \{g_v\}$ *sequências convergentes então:*

$$\lim_{v\to+\infty} (f_v + g_v) = \lim_{v\to+\infty} f_v + \lim_{v\to+\infty} g_v$$

$$\lim_{v\to+\infty} (f_v \cdot g_v) = \lim_{v\to+\infty} f_v \cdot \lim_{v\to+\infty} g_v$$

e se $\lim_{v\to+\infty} f_v = \lim_{v\to+\infty} g_v = 0$ *então*

$$\sum_{v=0}^{\infty} f_v + \sum_{v=0}^{\infty} g_v = \sum_{v=0}^{\infty} (f_v + g_v)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} f_v \cdot \sum_{v=0}^{\infty} g_v = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{v} f_{v-i} \cdot g_i.$$

A seguir definiremos uma métrica em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$.

Definição 1.1.15. *([ZS60], 133) Fixamos $r \in \mathbb{R}$ com $r > 1$. Para $f, g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, seja $d(f,g) = r^{-q}$ onde $q = ord(f-g)$.*

Observação 1.1.16. *d é uma métrica. Com efeito, seja $r > 1$. Se $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ então $ord(f-f) = \infty$, daí $d(f,f) = r^{-\infty} = 0$. Se $g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, $ord(f-g) = ord(g-f)$ e em consequência $d(f,g) = d(g,f)$. A desigualdade triangular decorre do Lema 1.1.6, com efeito, seja $h \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ $ord(f-g) = ord(f-h+h-g) \geq min\,\{ord(f-h), ord(h-g)\}$, assim $ord(f-g) \geq ord(f-h)$ ou $ord(f-g) \geq ord(h-g)$; sem perda de generalidade podemos supor que $ord(f-g) \geq ord(f-h)$, então $-ord(f-g) \leq -ord(f-h)$ então $r^{-ord(f-g)} \leq r^{-ord(f-h)}$ logo em particular $r^{-ord(f-g)} \leq r^{-ord(f-h)} + r^{-ord(h-g)}$. De maneira análoga, em caso supor $ord(f-g) \geq ord(h-g)$, obtém-se completamente a desigualdade triangular.*

O seguinte Teorema mostra que o limite de toda sequência convergente pertence a $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e é único.

Teorema 1.1.17. *([GrPf08], 358) $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é um espaço completo e Hausdorff.*

Teorema 1.1.18. *Uma condição necessária e suficiente para que $\{f_v\}$ seja convergente a f na topologia $\mathfrak{m}$-ádica é que $\{f_v\}$ seja convergente a f no espaço métrico $(\mathbb{K}[[\underline{x}]], d)$.*

Demonstração. Seja $r > 1$. Suponhamos que $\{f_v\}$ converge a f na topologia $\mathfrak{m}$-ádica, isto é,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists v_0 \in \mathbb{N} \;\; talque \;\; f - f_v \in \langle x \rangle^k, \forall v \geq v_0.$$

Assim para cada $v \geq v_0$ tem-se $ord(f-f_v) \geq k$ logo

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\; \frac{1}{r^k} \geq \frac{1}{r^{ord(f-f_v)}} = d(f, f_v)$$

(a seguir fazemos $k \to \infty$). No caso recíproco, sabemos que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists v_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $v \geq v_0$, $d(f_v, f) < \dfrac{1}{r^k}$ então $\dfrac{1}{r^k} \geq \dfrac{1}{r^{ord(f-f_v)}}$ e daí $r^{ord(f-f_v)} \geq r^k$ logo $ord(f-f_v) \geq k$ portanto $\langle \underline{x} \rangle^{ord(f-f_v)} \subseteq \langle \underline{x} \rangle^k$ e segue que $f - f_v \in \langle \underline{x} \rangle^k$. □

Definição 1.1.19. *Uma aplicação $\varphi : A \to B$ de $\mathbb{K}$-álgebras é chamada morfismo se $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \forall x, y \in A$ e $\varphi(c) = c, \forall c \in \mathbb{K}$.*

Definição 1.1.20. *Seja $f, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, assumimos que $ord(g_i) \geq 1, \forall i$ então defina-se a substituição*

$$f(g_1, \ldots, g_m) = \lim_{k \to +\infty} j_k(f)(j_k(g_1), \ldots, j_k(g_n)).$$

Corolário 1.1.21. *([GrPf08], 358)*
Seja $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $\varphi : \mathbb{K}[[\underline{x}]] \to \mathbb{K}[[\underline{y}]]$ um homomorfismo contínuo (na topologia $\mathfrak{m}$-ádica) de $\mathbb{K}$-álgebras com $f_i := \varphi(x_i), i = 1, \ldots, n$. Então $\varphi(g) = g(f_1, \ldots, f_n), \forall g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$.

Observação 1.1.22. *Em todo homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras*

$$\varphi : \mathbb{K}[[\underline{x}]] \to \mathbb{K}[[\underline{y}]], \quad \textit{cumpre-se:} \quad \varphi(\langle \underline{x} \rangle) \subseteq \langle \underline{y} \rangle,$$

isto faz que o homomorfismo seja chamado de local.

Observação 1.1.23. *Todo homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\varphi : \mathbb{K}[[\underline{x}]] \to \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é contínuo e pela conclusão do Corolário 1.1.21, φ é unicamente determinada pela imagem $f_i := \varphi(x_i), i = 1, \ldots, n$, onde as f_i são séries de potência com $f_i \in \mathfrak{m}$.*

O recíproco também é certo. Isto é, toda coleção de séries de potências $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}$, define um único morfismo (contínuo) dado por:

$$\varphi(g) := \varphi\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha f_1^{\alpha_1} \ldots f_n^{\alpha_n} = g(f_1, \ldots, f_n).$$

Lema 1.1.24. *([GrPf08], 362) $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é Noetheriano.*

Lema 1.1.25. *([GrLoShu07], 406)[Lema de Nakayama] Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local, M um $A-$módulo finitamente gerado e $N \subset M$ submódulo. Se $M = \mathfrak{m} \cdot M + N$ então $M = N$, em particular, se $M = \mathfrak{m} \cdot M$ então $M = 0$.*

Teorema 1.1.26. *Dado I um ideal de $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$. Tem-se que $dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I}\right) < \infty$ se e somente se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^k \subset I$*

Demonstração. Suponhamos $dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I}\right) < \infty$. Como $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \ldots$ temos

$$I + \mathbb{K}[[\underline{x}]] \supseteq I + \mathfrak{m} \supseteq \ldots \supseteq I + \mathfrak{m}^p \supseteq \ldots \supseteq I.$$

Assim,

$$\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathbb{K}[[\underline{x}]]} \subseteq \frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathfrak{m}} \subseteq \ldots \subseteq \frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathfrak{m}^p} \subseteq \ldots \subseteq \frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I}.$$

Suponhamos que para todo $p \in \mathbb{N}$, $\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathfrak{m}^p} \neq \frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathfrak{m}^{p+1}}$. Então,

$$dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathbb{K}[[\underline{x}]]}\right) < dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathfrak{m}}\right) < \ldots < dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I}\right).$$

Logo, como a dimensão toma valores inteiros positivos,

$$dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I}\right) = \infty,$$

o qual contradiz a hipótese. Portanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathfrak{m}^k} = \frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I + \mathfrak{m}^{k+1}}.$$

Então $\mathfrak{m}^k \subseteq I + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^k$, pelo Lema de Nakayama 1.1.25, $\mathfrak{m}^k \subseteq I$

No caso recíproco suponhamos que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^k \subseteq I$, então existe aplicação sobrejetora $\dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\mathfrak{m}^k} \to \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I}$. Assim,

$$dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{I}\right) \leq dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\mathfrak{m}^k}\right) < \infty.$$

□

1.2 Variedades Algébricas

A seguir, vamos definir variedade algébrica afim, topologia de Zariski, função regular, morfismos entre variedades algébricas e corpo de funções. Conceitos que serão necessários no decorrer desta dissertação.

Definição 1.2.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. O n-espaço afim sobre $\mathbb{K}$ denotado por $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, é definido como o conjunto de todas as n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$. Seja $\mathbb{K}[\underline{x}]$ o anel de polinômios em n-variáveis sobre $\mathbb{K}$.*

1. *Dado $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$, definimos os zeros de f como o conjunto*

$$Z(f) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} : f(p) = 0\}$$

2. *Se $T \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$ definimos os zeros de T como o conjunto*

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} : f(p) = 0, \forall f \in T\}.$$

É claro que $Z(\langle T \rangle) = Z(T)$, onde $\langle T \rangle$ denota o ideal gerado pelos elementos de T.

3. *Um conjunto* $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *é um conjunto algébrico se existir um subconjunto* $T \subseteq K[\underline{x}]$ *tal que* $Y = Z(T)$.

Proposição 1.2.2. *([Har97], 2)*

1. *A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico.*

2. *A interseção qualquer de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico.*

3. *Os conjuntos vazio e o espaço todo são conjuntos algébricos*

Proposição 1.2.3. *Se* $T_1 \subseteq T_2$ *em* $\mathbb{K}[\underline{x}]$ *então* $Z(T_2) \subseteq Z(T_1)$

Definição 1.2.4. *A topologia de Zariski em* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *consiste em tomar conjuntos abertos como os complementos de conjuntos algébricos, i.e os conjuntos fechados são os conjuntos algébricos. Um aberto na topologia de Zariski é chamado de variedade quasi-afim.*

A seguir definimos espaço irredutível e variedade algébrica afim.

Definição 1.2.5.

1. *Um subconjunto* Y *de um espaço topológico* X *é irredutível se não é possível expressá-lo como união* $Y = Y_1 \cup Y_2$ *de dois subconjuntos próprios e fechados em* Y.

2. *Uma variedade algébrica afim é um subconjunto irredutível e fechado de* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *(com a topologia induzida).*

Observação 1.2.6. *Todo conjunto aberto de um espaço irredutível na topologia de Zariski é irredutível e denso ([Har97], 3).*

Definição 1.2.7. *Seja* $X \neq \emptyset$ *um espaço topológico irredutível. A dimensão,* $dim(X)$*, de* X *é o máximo inteiro* n *tal que existe uma cadeia ascendente*

$$\emptyset \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$$

de subconjuntos fechados irredutíveis de X.

Exemplo 3.

1. *Um ponto tem dimensão 0.*

2. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ *tem dimensão 1, pois os pontos são os únicos subconjuntos fechados e irredutíveis de* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ *distintos de* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$.

Definição 1.2.8. *Seja Y uma variedade quasi-afim em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Uma função $f : Y \to \mathbb{K}$ é regular no ponto $p \in Y$ se existem uma vizinhança aberta $U \subseteq Y$ contendo p e polinômios $g, h \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ onde h não se anula em U e $f = g/h$ em U. Dizemos que f é regular em Y se esta é regular em cada ponto de Y.*

Definição 1.2.9. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e X, Y duas variedades afins, um morfismo $\varphi : X \to Y$ é uma aplicação contínua (na topologia de Zariski) tal que para cada conjunto aberto $V \subseteq Y$ e para cada função regular $f : V \to \mathbb{K}$, a função $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to \mathbb{K}$ é regular.*

Observação 1.2.10. *Necesariamente uma função regular é contínua. Um morfismo entre variedades algébricas é contínuo na topologia de Zariski.*

Definição 1.2.11. *Seja Y uma variedade. Denotamos por $\mathcal{O}(Y)$ o anel de todas as funções regulares em Y. Se $p \in Y$, definimos o anel local de p em Y como o anel de germes de funções regulares em Y perto de p o qual denotamos como $\mathcal{O}_{Y,p}$. Um elemento (germe de uma função regular) de $\mathcal{O}_{Y,p}$ é um par (U, f) onde U é um subconjunto aberto de Y contendo p e f é uma função regular em U. Definimos uma relação de equivalência em $\mathcal{O}_{Y,p}$ identificando os pares (U, f) e (V, g), se $f = g$ em $U \cap V$.*

$\mathcal{O}_{Y,p}$ é um anel local e o ideal maximal é o conjunto de germes de funções regulares que aplicadas no ponto p é zero.

Definição 1.2.12. *Seja Y uma variedade, definimos o corpo de funções $\mathbb{K}(Y)$ de Y. Um elemento de $\mathbb{K}(Y)$ é uma classe de equivalência de pares (U, f) onde U é um conjunto aberto não vazio de Y e f é uma função regular em U e os pares (U, f), (V, g) são identificados se $f = g$ em $U \cap V$. Os elementos de $\mathbb{K}(Y)$ são chamados funções racionais em Y.*

Observação 1.2.13. *$\mathbb{K}(Y)$ é um corpo, desde que Y é irredutível e a interseção de dois conjuntos abertos não é vazio ([Har97], 3).*

Capítulo

2

Invariantes e equivalências em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$

Neste capítulo, veremos duas relações de equivalência em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$: a equivalência à direita e a equivalencia por contato, quando $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado com característica maior ou igual zero. Veremos, também, as álgebras e números de Milnor e de Tjurina. Relacionaremos essas álgebras às relações de equivalência.

2.1 Números de Milnor e Tjurina

Nessa seção, estudaremos dois invariantes bem conhecidos em Teoria de Singularidades: o número de Milnor e o número de Tjurina. O número de Milnor está relacionado às singularidades de uma série. No caso de singularidade isolada em $\mathbb{C}$, ele é igual à quantidade de pontos críticos de Morse que aparecem em uma morsificação da série. O número de Tjurina está relacionado às singularidas da hipersuperfície definida por f.

Definição 2.1.1. *Seja $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$.*

1. *O ideal*
$$j(f) = \langle f_{x_1}, \dots, f_{x_n} \rangle \subseteq \mathbb{K}[[\underline{x}]]$$
é o ideal Jacobiano de f, onde f_{x_i} é a derivada parcial de f com relação a x_i, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

2. *A álgebra associada $M_f = \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{j(f)}$ é chamada álgebra de Milnor de f.*

3. *A dimensão,*
$$\mu(f) := dim_{\mathbb{K}}(M_f),$$

é o número de Milnor de f.

4. *Dizemos que f é uma singularidade isolada se $\mu(f) < \infty$.*

Exemplo 4. 1. *Sejam $\mathbb{K}$ o corpo dos números complexos e*

$$f = x^3 + y^2 \in \mathbb{K}[[x, y]].$$

Nesse caso, $j(f) = \langle 3x^2, 2y\rangle = \langle x^2, y\rangle$ e $M_f = \dfrac{\mathbb{K}[x, y]}{\langle x^2, y\rangle} = \mathbb{K}\langle 1, x\rangle$. Assim $\mu(f) = 2$.

2. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo de característica 3 e*

$$f = x^3 + y^2 \in \mathbb{K}[x, y],$$

então $j(f) = \langle 3x^2, 2y\rangle = \langle y\rangle$ e $M_f = \mathbb{K}\langle 1, x, x^2, \ldots\rangle$. Portanto $\mu(f) = \infty$.

Definição 2.1.2. *Seja $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$.*

1. *O ideal*

$$tj(f) = \langle f, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\rangle = \langle f\rangle + j(f) \subseteq \mathbb{K}[[\underline{x}]]$$

é o ideal de Tjurina de f.

2. *A álgebra associada $T_f = \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{tj(f)}$ é chamada a álgebra de Tjurina de f.*

3. *A dimensão*

$$\tau(f) := dim_{\mathbb{K}}(T_f)$$

é o número de Tjurina de f.

4. *Dizemos que $R_f = \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle f\rangle}$ é uma hipersuperfície singular isolada se $\tau(f) < \infty$.*

Exemplo 5. 1. *Sejam $\mathbb{K}$ o corpo dos números complexos e*

$$f(x, y) = x^3 + y^2 \in \mathbb{K}[[x, y]],$$

$$tj(f) = \langle x^3 + y^2, 3x^2, 2y\rangle = \langle x^2, y\rangle. \text{ Assim, } \tau(f) = dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[x, y]]}{\langle x^2, y\rangle}\right) = 2.$$

2. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo de característica 3 e*

$$f(x, y) = x^3 + y^2 \in \mathbb{K}[[x, y]],$$

$$tj(f) = \langle x^3 + y^2, 3x^2, 2y\rangle = \langle x^3 + y^2, y\rangle = \langle x^3, y\rangle.$$

Portanto $\tau(f) = dim_{\mathbb{K}}\left(\dfrac{\mathbb{K}[[x,y]]}{\langle x^3, y\rangle}\right) = dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}\langle 1, x, x^2\rangle = 3.$

Teorema 2.1.3. *([GrYo12], 63) Se* $f \in \mathbb{C}[[\underline{x}]]$ *e* $u \in \mathbb{C}[[\underline{x}]]^*$ *então*

$$\mu(f) = \mu(u \cdot f)$$

No exemplo a seguir, vemos que este teorema não é válido quando trocamos $\mathbb{C}$ por um corpo qualquer.

Exemplo 6. *Consideremos* $\mathbb{K}$ *um corpo tal que* $char(\mathbb{K}) = 5$.

Seja

$$f = x^5 + y^4 \in \mathbb{K}[[x,y]].$$

Então

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[x,y]]}{\langle 5x^4, 4y^3\rangle}\right) = dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[[x,y]]}{\langle y^3\rangle}\right) = \infty.$$

Mas se consideramos

$$g = (1+x)\cdot f = x^5 + y^4 + x^6 + xy^4,$$

então $\mu(g) = 15$, *onde* $1 + x \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$, *pois no SINGULAR temos:*

```
> ring r=5,(x,y),ds;
> poly f=x5+y4+x6+xy4;
> ideal j=jacob(f);
> j;
j[1]=y4+x5
j[2]=-y3-xy3
> vdim(std(j));
15.
```

Observação 2.1.4. *1. Segue do Teorema 1.1.26, que:*

(A) f *é uma singularidade isolada se e somente se* $\exists\, k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathfrak{m}^k \subseteq j(f)$.

(B) R_f *é uma hipersuperfície com singularidade isolada se e somente* $\exists\, k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathfrak{m}^k \subseteq tj(f)$.

2. É possível mostrar que no corpo dos números complexos tem-se $\mu(f) < \infty$ *se e somente se* $\tau(f) < \infty$ *([GrLoShu07], 113).*

O mesmo não acontece em característica positiva, como vemos no Exemplo 4 e no Exemplo 5.

2.2 Equivalência pela direita e de contato

Nesta seção, veremos duas relações de equivalências que podem ser definidas em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$: equivalência à direita, a qual está relacionada à álgebra de Milnor e equivalência por contato, que está relacionada à álgebra de Tjurina.

Definição 2.2.1. *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$. Dizemos que f e g são equivalentes pela direita se existe $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ tal que*

$$f = \varphi(g).$$

Se f e g são equivalentes pela direita escrevemos $f \sim_r g$.

Observação 2.2.2. *A equivalência pela direita é uma relação de equivalência.*

Exemplo 7. *Em $\mathbb{K}[[x, y]]$, sejam $f = x + y^2$ e $g = x$. Seja $\varphi : \mathbb{K}[[x, y]] \to \mathbb{K}[[x, y]]$ o automorfismo que leva*

$$x \mapsto x + y^2, \quad y \mapsto y + x^2.$$

Temos,

$$\varphi(g) = f.$$

Assim $f \sim_r g$.

Definição 2.2.3. *$f, g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ são chamadas equivalentes por contato se existe $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$, $u \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ tal que*

$$f = u \cdot \varphi(g).$$

Se f e g são equivalentes por contato escrevemos $f \sim_c g$.

Observação 2.2.4.

1. *A equivalência por contato é uma relação de equivalência. Com efeito, dados $f, g, h \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$. Para cada $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e o automorfismo identidade $Id \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ temos que $f = 1 \cdot Id(f)$ assim a relação é reflexiva. A seguir, se $f \sim_c g$ então existe $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ e $u \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ tal que $f = u \cdot \varphi(g)$, então $g = \frac{1}{u} \cdot \varphi^{-1}(f)$, assim a relação é simétrica. Por último vemos que a relação é transitiva, suponhamos que $f \sim_c g$ e $g \sim_c h$ então existem $\varphi, \phi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$, $u, v \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ tal que $f = u \cdot \varphi(g)$ e $g = v \cdot \phi(h)$ então $f = u \cdot \varphi(v \cdot \phi(h)) = w \cdot \Phi(h)$, onde $w = u \cdot v$ e $\Phi = \varphi \circ \phi$.*

2. $f \sim_r g \Rightarrow f \sim_c g$. *Com efeito, se* $f \sim_r g$, *assim existe* $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ *tal que* $f = \varphi(g)$ *então escolhendo* $1 \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ *temos* $f = 1 \cdot \varphi(g)$.

O exemplo a seguir mostra que a recíproca do item 2. na Observação 2.2.4 não é verdadeira.

Exemplo 8. *Em* $\mathbb{C}$ *sejam* $f_t := x^p + y^q + z^r + txyz$ *e* $f_s := x^p + y^q + z^r + sxyz$, *tal que* $s \neq t$ *e* $1/p + 1/q + 1/r < 1$.
Definamos o automorfismo mudança de coordenadas:

$$\varphi : \mathbb{K}[[x, y, z]] \to \mathbb{K}[[x, y, z]]$$

com

$$x \mapsto \lambda^{1/p}x, \quad y \mapsto \lambda^{1/q}y, \quad z \mapsto \lambda^{1/r}z,$$

tal que

$$\lambda = (\frac{s}{t})^{\frac{1}{m-1}}, \quad m = 1/p + 1/q + 1/r$$

Afirmamos que $f_s \sim_c f_t$, *mais precisamente,* $f_s = \frac{1}{\lambda}\varphi(f_t)$, *com efeito:*

$$\begin{aligned}
\varphi(f_t) &= \varphi(x^p + y^q + z^r + txyz) \\
&= (\lambda^{1/p}x)^p + (\lambda^{1/q}y)^q + (\lambda^{1/r}z)^r + t(\lambda^{1/p}x)(\lambda^{1/q}y)(\lambda^{1/r}z) \\
&= \lambda x^p + \lambda y^q + \lambda z^r + t\lambda^m xyz \\
&= \lambda x^p + \lambda y^q + \lambda z^r + t(\frac{s}{t})^{\frac{m}{m-1}} xyz \\
&= \lambda x^p + \lambda y^q + \lambda z^r + s\lambda xyz \\
&= \lambda \cdot f_s.
\end{aligned}$$

Agora afirmamos que não é possível obter: $f_s \sim_r f_t$. *Com efeito: suponhamos que existe* $\Psi \in Aut(\mathbb{K}[[x, y, z]])$ *tal que* $f_s = \Psi(f_t)$, *fazendo* $x = y = z = 1$, *obtemos que* $s = \Psi(t) = t$, *o que contradiz* $s \neq t$.

Lema 2.2.5. *([Bo09], 4) Consideremos* $\mathbb{K}$ *um corpo algebricamente fechado com caracterítica arbitrária. Sejam* $f, g \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{K}[[\underline{x}]], \varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ *e* $u \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ *uma unidade. Então:*

1. $j(\varphi(f)) = \varphi(j(f))$.

2. $tj(u \cdot f) = tj(f)$

3. $f \sim_r g$ *implica que* $M_f \cong M_g$ *e* $T_f \cong T_g$ *como álgebras analíticas. Em particular,* $\mu(f) = \mu(g)$ *e* $\tau(f) = \tau(g)$.

4. $f \sim_c g$ *implica que* $T_f \cong T_g$ *e portanto* $\tau(f) = \tau(g)$.

Demonstração. 1. Definamos $h_i = \varphi(x_i)$, para cada $i = 1, ..., n$ podemos escrever em termos de suas derivadas parciais formais

$$h_i = (\textstyle\sum_{j=1}^{n}(h_{i,x_j} \mod \mathfrak{m})x_j) + g_i, \text{ onde } g_i \in \mathfrak{m}^2$$

e para cada $k = 1, ..., n$

$$h_{i,x_k} = (h_{i,x_k} \mod \mathfrak{m}) + g_{i,x_k}.$$

Dado $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha$ então

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \varphi(x_1)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \varphi(x_n)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha h_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot h_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

A seguir, para cada $k = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} \varphi(f_{x_k}) &= \varphi\left(\sum a_\alpha \alpha_k x_1^{\alpha_1} ... x_k^{\alpha_k - 1} ... x_n^{\alpha_n}\right) \\ &= \sum a_\alpha \alpha_k \varphi(x_1)^{\alpha_1} ... \varphi(x_k)^{\alpha_k - 1} ... \varphi(x_n)^{\alpha_n} \\ &= \sum a_\alpha \alpha_k h_1^{\alpha_1} ... h_k^{\alpha_k - 1} ... h_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

e por outro lado temos:

$$\begin{aligned} (\varphi(f))_{x_k} &= \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha h_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot h_n^{\alpha_n}\right)_{x_k} \\ &= \sum a_\alpha \alpha_1 h_1^{\alpha_1 - 1} h_{1,x_k} h_2^{\alpha_2} ... h_n^{\alpha_n} + ... + \sum a_\alpha \alpha_n h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} ... h_{n,x_k} h_n^{\alpha_n - 1}. \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{bmatrix}(\varphi(f))_{x_1} & \dots & (\varphi(f))_{x_n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi(f_{x_1}) & \dots & \varphi(f_{x_n})\end{bmatrix} \cdot J(\varphi), \tag{2.1}$$

onde

$$J(\varphi) := \begin{bmatrix} h_{1,x_1} & \dots & h_{1,x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n,x_1} & \dots & h_{n,x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^{n\times n}.$$

Assim, segue a partir de 2.1 que

$$j(\varphi(f)) \subset \varphi(j(f)).$$

Além disso, temos que para a matriz

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^{n\times n},$$

$A = (a_{ij})_{i,j}$ é invertível em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]^{n\times n}$ se e somente se a matriz $(a_{i,j} \mod \mathfrak{m})_{i,j}$ é invertível em $\mathbb{K}^{n\times n}$, assim, como φ é um automorfismo de $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$, logo a matriz jacobiana de φ, o qual é $(h_{i,x_k} \mod \mathfrak{m})_{ik}$, é invertível em $\mathbb{K}^{n\times n}$ e em consequência $J(\varphi)$ é invertível em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]^{n\times n}$. Segue da equação 2.1 acima:

$$\begin{bmatrix}(\varphi(f))_{x_1} & \dots & (\varphi(f))_{x_n}\end{bmatrix} \cdot J(\varphi)^{-1} = \begin{bmatrix}\varphi(f_{x_1}) & \dots & \varphi(f_{x_n})\end{bmatrix}$$

e assim $\varphi(j(f)) \subset j(\varphi(f))$. Por tanto

$$j(\varphi(f)) = \varphi(j(f))$$

2. Seja $g \in tj(u\cdot f) = \langle u \cdot f\rangle + j(u\cdot f)$, então existem $l, l_1, ..., l_n \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que

$$\begin{aligned} g &= l\cdot u\cdot f + l_1(u\cdot f)_{x_1} + ... + l_n(u\cdot f)_{x_n} \\ &= l\cdot u\cdot f + l_1\cdot u_{x_1}\cdot f + ... + l_n\cdot u_{x_n}\cdot f + l_1\cdot u\cdot f_{x_1} + ... + l_n\cdot u\cdot f_{x_n}, \end{aligned}$$

assim $g \in \langle f \rangle + j(f) = tj(f)$. Por outro lado, seja $g \in \langle f \rangle + j(f)$ então existem $r, r_1, ..., r_n \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que

$$\begin{aligned} g &= r \cdot f + r_1 \cdot f_{x_1} + ... + r_n \cdot f_{x_n} \\ &= (\frac{1}{u} \cdot r)u \cdot f + (\frac{1}{u} \cdot r_1)u \cdot f_{x_1} + ... + (\frac{1}{u} \cdot r_n)u \cdot f_{x_n}, \end{aligned}$$

assim $g \in tj(u \cdot f)$ por tanto:

$$tj(u \cdot f) = tj(f)$$

3. Segue da parte 1, pois se $g = \varphi(f)$, então $j(g) = j(\varphi(f)) = \langle \varphi(j(f)) \rangle = \langle j(f) \rangle$.

4. Segue da parte 2, pois se $g = u \cdot \varphi(f)$ então $tj(g) = tj(u \cdot \varphi(f)) = tj(\varphi(f)) = tj(f)$.

$\square$

No exemplo a seguir, veremos que o número de Milnor não é um invariante para a equivalência por contato em característica positiva..

Exemplo 9. *Sejam um corpo $\mathbb{K}$ com $char(\mathbb{K}) = 3$, $f = x^3 + y^4$ um polinômio e $g = u \cdot Id(f)$, onde $u = 1 + x \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$, e $Id \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ é a identidade, assim temos*

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{K}}(M_f) = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle y^3 \rangle} = \infty \ e$$

$$\mu(g) = dim_{\mathbb{K}}(M_g) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\langle 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2 \rangle) = 9.$$

Acompanhamos as contas no SINGULAR.

```
> ring r=3,(x,y),ds;
> poly f=x3+y4;
> ideal j=jacob(f);
> j;
j[1]=0
j[2]=y3
> vdim(std(f));
-1
> poly g=(1+x)*f;
```

> g;

x3+x4+y4+xy4

> ideal z=jacob(g);

> z;

z[1]=x3+y4

z[2]=y3+xy3

> vdim(std(z));

9

Teorema 2.2.6. *$f \sim_c g$ se e somente se $\dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle f \rangle} \cong \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle g \rangle}$, onde $\cong$ denota isomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Suponhamos que $f \sim_c g$. Pela definição, existem

$$u \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*, \;\; \varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$$

tal que $f = u \cdot \varphi(g)$, então,

$$\langle f \rangle = \langle u \cdot \varphi(g) \rangle .$$

Notemos que $\langle u \cdot \varphi(g) \rangle = \langle \varphi(g) \rangle$. De fato, seja $\theta \in \langle \varphi(g) \rangle$, então existe $\alpha \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que $\theta = \alpha \cdot \varphi(g)$ logo

$$\theta = (\alpha \cdot u^{-1}) \cdot u \cdot \varphi(g) \in \langle u \cdot \varphi(g) \rangle.$$

A outra inclusão é trivial. Analogamente, obtemos que $\langle g \rangle = \langle \varphi^{-1}(u^{-1}) \cdot \varphi^{-1}(f) \rangle = \langle \varphi^{-1}(f) \rangle$. Afirmamos que $\langle \varphi(g) \rangle = \langle f \rangle$. De fato, seja $\theta \in \langle \varphi(g) \rangle$ logo existe $\beta \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que $\theta = \beta \cdot \varphi(g)$, logo $\theta = \beta \cdot u^{-1} \cdot f$ então $\theta \in \langle f \rangle$. A inclusão faltante segue-se de maneira análoga. Notemos que $\dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle g \rangle} \cong \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle \varphi(g) \rangle}$, portanto, obtém-se o isomorfismo.

No caso recíproco, se $\dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle f \rangle} \cong \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle g \rangle}$, então existe um isomorfismo

$$\psi : \frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle f \rangle} \to \frac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{\langle g \rangle}.$$

Segue pelo Lema 1.1.9 que existe um levantamento

$$\widetilde{\psi} : \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]] \to \mathbb{K}[[y_1, ..., y_m]]$$

de ψ, o qual é um isomorfismo. A seguir damos um diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[[\underline{x}]] \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "\Pi_{\langle f\rangle}"] & \mathbb{K}[[\underline{x}]] \arrow[d, "\Pi_{\langle g\rangle}"] \\
\mathbb{K}[[\underline{x}]]/\langle f\rangle \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{K}[[\underline{x}]]/\langle g\rangle
\end{tikzcd}$$

onde as aplicações $\Pi_{\langle f\rangle}$ e $\Pi_{\langle g\rangle}$ são as projeções canónicas respeito aos ideais $\langle f\rangle$ e $\langle g\rangle$ respectivamente, tal que o diagrama seja comutativo. Assim $f \sim_r g$ e por tanto $f \sim_c g$. $\square$

Capítulo 3

Determinação finita

Neste capítulo, veremos o conceito de determinação finita. Em linhas gerais, uma série ser finitamente determinada implica que ela é equivalente ao seu k-jato para algum número natural k, o que nos permite trabalhar com polinômios. Somente pela definição, não é fácil saber se uma série é finitamente determinada ou não, para isso existem resultados relacionados às álgebras de Milnor e de Tjurina. Na primeira seção, veremos quando uma série é finitamente determinada em $\mathbb{C}[[\underline{x}]]$, mais precisamente, veremos o Teorema 3.1.3, ver [GrLoShu07]. Na segunda seção, veremos a generalização em característica positiva desse resultado, isto é o Teorema 3.2.2 feita por [GrYo12]. Na terceira seção desenvolvemos o Teorema 3.3.1, a recíproca do 3.2.2, como o caso unidimensional da teoria de matrizes de séries de potências formais, feita por [GrPha19].

Definição 3.0.1. *Dizemos que $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é k-determinada pela direita se para cada $g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que $j_k(f) = j_k(g)$ tem-se $f \sim_r g$.*

Definição 3.0.2. *Dizemos que $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é k-determinada por contato se para cada $g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que $j_k(f) = j_k(g)$ tem-se $f \sim_c g$.*

Assim, nas duas situações dizemos que f é finitamente determinada se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f seja k-determinada; o menor $k \in \mathbb{N}$ chamamos o índice de determinação de f.

3.1 Determinação finita em $\mathbb{C}$

Apresentamos alguns resultados e exemplos sobre determinação finita quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Teorema 3.1.1. *([GrLoShu07], 119) Considere $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Se f é equivalente a g por contato, então $\mu(f) = \mu(g)$.*

Observação 3.1.2. *A generalização do Teorema 3.1.1 quando $char(\mathbb{K}) = 0$ é provada em [Gre75].*

Exemplo 10. *Sejam um corpo $\mathbb{K}$ com $char(\mathbb{K}) = 0$, $f = x^3 + y^4$ um polinômio e $g = u \cdot Id(f)$, onde $u = 1 + x \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$, e $Id \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ é a identidade, assim temos*

$$M_f \cong \mathbb{K}\langle 1, x, y, xy, y^2, xy^2 \rangle \cong M_g$$

por tanto

$$\mu(f) = \mu(g) = 6.$$

Acompanhamos também as contas no SINGULAR:

```
> ring r=0,(x,y),ds;
> poly f=(x3+y4);
> ideal j=jacob(f);
> j;
j[1]=3x2
j[2]=4y3
> vdim(std(j));
6
> poly g=x3+y4+x4+xy4;
> ideal z=jacob(g);
> z;
z[1]=3x2+4x3+y4
z[2]=4y3+4xy3
> vdim(std(z));
6
```

O seguinte teorema, no caso complexo, é referente para a determinação finita de $f \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[\underline{x}]]$ condicionada a uma inclusão envolvendo potências do ideal maximal, o ideal Jacobiano e o ideal de Tjurina respectivamente.

Teorema 3.1.3. *([GrLoShu07], 129) Seja* $f \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[\underline{x}]]$,

1. *Se* $\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2 \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$ *então* f *é* k*-determinada pela direita.*
2. *Se* $\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2 \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle$ *então* f *é* k*-determinada por contato.*

Exemplo 11. *Dado* $f = x^5 + y^5 + x^2y^2$ *temos que* $j(f) = \langle 5x^4 + 2xy^2, 5y^4 + 2x^2y \rangle$

$$\mathfrak{m}^{5+1} \subset \mathfrak{m}^2 j(f)$$

e por tanto f *é 5-determinada pela direita. Acompanhamos as contas no singular.*

```
> ring r=0,(x,y),ds;
> poly f=x5+y5+x2y2;
> ideal j=jacob(f);
> j;
j[1]=2xy2+5x4
j[2]=2x2y+5y4
> vdim(std(j));
11 //número de Milnor
> ideal t=ideal(f)+j;
> t;
t[1]=x2y2+x5+y5
t[2]=2xy2+5x4
t[3]=2x2y+5y4
> vdim(std(t));
10 //número de Tjurina   > maxideal(2)*jacob(f);
[1]=2xy4+5x4y2
[2]=2x2y3+5y6
[3]=2x2y3+5x5y
[4]=2x3y2+5xy5
[5]=2x3y2+5x6
[6]=2x4y+5x2y4
> size(reduce(maxideal(6),std(maxideal(2)*jacob(f))));
0 // m^{5+1} ⊂ m^2 j(f)
```

Corolário 3.1.4. *([GrLoShu07], 130) Se $f \in \mathbb{C}[[\underline{x}]], f(\boldsymbol{0}) = 0$ tem uma singularidade isolada com número de Milnor μ e número de Tjurina τ, então*

1. *f é $(\mu+1)$-determinada pela direita,*

2. *f é $(\tau+1)$-determinada por contato.*

Exemplo 12. *Dado $f = x^5 + y^5 + x^2y^2$ temos que o número de Milnor e número de Tjurina são $\mu(f) = 11$ e $\tau(f) = 10$ respectivamente, então f é 12-determinada pela direita e 11-determinada por contato respectivamente.*

Lema 3.1.5. *([GrLoShu07], 113) Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $x \in U \subset \mathbb{C}^n$, então as afirmações são equivalentes:*

(a) x é um ponto crítico isolado de f,

(b) $\mu(f, x) < \infty$,

(c) x é uma singularidade isolada de $f^{-1}(f(x)) = V(f - f(x))$,

(d) $\tau(f - f(x), x) < \infty$

onde

$$\mu(f,x) := dim_{\mathbb{C}} M_{f,x}, \quad M_{f,x} := \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{j(f)\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}} \quad e$$
$$\tau(f,x) := dim_{\mathbb{C}} T_{f,x}, \quad T_{f,x} := \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f, j(f)\rangle \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}}$$

Teorema 3.1.6. *([GrLoShu07], 132)[Mather-Yau] Sejam $f, g \in \mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[[\underline{x}]]$. São equivalentes:*

1. *$f \sim_c g$.*

2. *Para todo $b \geq 0$, $\dfrac{\mathbb{C}[[\underline{x}]]}{\langle f, \mathfrak{m}^b \cdot j(f)\rangle} \cong \dfrac{\mathbb{C}[[\underline{x}]]}{\langle g, \mathfrak{m}^b \cdot j(g)\rangle}$ como $\mathbb{C}$-álgebras.*

3. *Existe algum $b \geq 0$ tal que $\dfrac{\mathbb{C}[[\underline{x}]]}{\langle f, \mathfrak{m}^b \cdot j(f)\rangle} \cong \dfrac{\mathbb{C}[[\underline{x}]]}{\langle g, \mathfrak{m}^b \cdot j(g)\rangle}$ como $\mathbb{C}$-álgebras.*

Em particular, $f \sim_c g$ se e somente se $T_f \cong T_g$.

A classificação no corpo $\mathbb{C}$ com respeito às equivalências pela direita e por contato podem ser considerados em termos de ações de grupos algébricos.

Definição 3.1.7 ([GrLoShu07], 136)**.** *Um grupo algébrico afim G é uma variedade algébrica afim com estrutura de grupo. As operações no grupo são morfismos de variedades, isto é, existe o elemento neutro e morfismos de variedades sobre $\mathbb{K}$ (multiplicação e a inversa).*

$$G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

$$G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

satisfazendo os axiomas de grupo usual.

Definição 3.1.8. *Um morfismo de grupos algébricos é um homomorfismo de grupos, o qual é, também, um morfismo de variedades algébricas sobre $\mathbb{K}$.*

Exemplo 13. *O conjunto das matrizes invertíveis de ordem n com entradas no corpo $\mathbb{K}$, $GL(n, \mathbb{K})$ é um grupo algébrico.*

De agora em diante, consideremos G um grupo algébrico com elemento identidade e, consideramos também X como uma variedade algébrica.

Definição 3.1.9.

1. *Uma ação algébrica de G em uma variedade algébrica X é um morfismo de variedades:*

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

que satisfaz $e \cdot x = x, \quad (gh) \cdot x = g \cdot (hx)$ para todo $g, h \in G, x \in X$.

2. *A órbita de $x \in X$ induzida pela ação de G em X é o subconjunto*

$$Gx := G \cdot x := \{g \cdot x \in X : g \in G\} \subseteq X.$$

Gx é a imagem de $G \times \{x\}$ em X induzida pela ação algébrica.

3. *G age transitivamente em X se $Gx = X$ para algum $x \in X$*

4. *O grupo de isotropia de $x \in X$ é o subgrupo $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ de G.*

5. *Dado $A \subset X$, $G_A = \{g \in G : gA = A\}$ é o estabilizador de A.*

Definição 3.1.10.

1. *O grupo $\mathcal{R} = Aut(\mathbb{C}[[\underline{x}]])$ de automorfismos de álgebras analíticas $\mathbb{C}[[\underline{x}]]$ é chamada de grupo pela direita.*

2. *O grupo contato é o produto semidireto* $\mathcal{K} := \mathbb{C}[[\underline{x}]]^* \rtimes \mathcal{R}$, *onde o produto em* $\mathcal{K}$ *é definido por:*
$$(u', \varphi')(u, \varphi) = (u'\varphi'(u), \varphi' \circ \varphi)$$

Os grupos pela direita e por contato agem em $\mathbb{C}[[\underline{x}]]$ *respectivamente:*

a) $\mathcal{R} \times \mathbb{C}[[\underline{x}]] \to \mathbb{C}[[\underline{x}]]$ *definido por* $(\varphi, f) \mapsto \varphi(f)$

b) $\mathcal{K} \times \mathbb{C}[[\underline{x}]] \to \mathbb{C}[[\underline{x}]]$ *definido por* $((u, \varphi), f) \mapsto u \cdot \varphi(f)$

Observação 3.1.11. *1. Da definição de equivalência pela direita e equivalência por contato temos que*

$$f \sim_r g \iff f \in \mathcal{R} \cdot g, \qquad f \sim_c g \iff f \in \mathcal{K} \cdot g,$$

onde $\mathcal{R} \cdot g$ *denota a órbita de* g *sobre* $\mathcal{R}$, *isto é a imagem da ação em* $\mathcal{R} \times \{f\}$ *e* $\mathcal{K} \cdot g$ *denota a órbita de* g *sobre* $\mathcal{K}$, *isto é a imagem da ação em* $\mathcal{K} \times \{f\}$.

2. $\mathcal{R}$, *e* $\mathcal{K}$ *não são grupos algébricos, por isso definimos os* $k-jatos$ *destes grupos:*

$$\mathcal{R}^{(k)} := \{j_k(\varphi) : \varphi \in \mathcal{R}\},$$

$$\mathcal{K}^{(k)} := \{(j_k(u), j_k(\varphi)) : (u, \varphi) \in \mathcal{K}\},$$

onde $j_k(\varphi)(x_i) = j_k(\varphi(x_i), k)$. *Também definimos:*

$$J^{(k)} := \frac{\mathbb{C}[[\underline{x}]]}{\mathfrak{m}^{k+1}},$$

Os grupos $\mathcal{R}^{(k)}$ *e* $\mathcal{K}^{(k)}$ *são grupos algébricos ([GrLoShu07], 136) agindo algebricamente sobre o espaço vetorial de dimensão finita* $J^{(k)}$. *Estas ações são:*

(a) $\mathcal{R}^{(k)} \times \mathbb{C}[[\underline{x}]]/\mathfrak{m}^{k+1} \to \mathbb{C}[[\underline{x}]]/\mathfrak{m}^{k+1}$ *com* $\varphi \cdot f = j_k(\varphi(f))$, *para* $\varphi \in \mathcal{R}^{(k)}$.

(b) $\mathcal{K}^{(k)} \times \mathbb{C}[[\underline{x}]]/\mathfrak{m}^{k+1} \to \mathbb{C}[[\underline{x}]]/\mathfrak{m}^{k+1}$ *com* $(u, \varphi) \cdot f = j_k(u \cdot \varphi(f))$ *para* $(u, \varphi) \in \mathcal{K}^{(k)}$.

Definição 3.1.12. *1. ([Har97], 23) Um morfismo de variedades algébricas* $\varphi : X \to Y$ *é dominante se e somente se* $\varphi(X)$ *é denso em* Y.

2. *([GrLoShu07], 14). Um morfismo* $\varphi : A \to B$ *de* $\mathbb{K}$*-álgebras locais é chamada quasi finita se somente se* $dim_K B/\mathfrak{m}_A B < \infty$. *E é chamado finito se* B *é um* $A-$*módulo finito (via* φ*).*

Proposição 3.1.13. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo dominante de variedades irredutíveis, $W \subset Y$ uma subvariedade fechada e irredutível e Z uma componente irredutível de $f^{-1}(W)$. Seja $r = dimX - dimY$.*

1. *Existe um subconjunto aberto e denso $U \subset Y$ (dependendo apenas de f) tal que $U \subset f(X)$ e $dimZ = dimW + r$ ou $Z \cap f^{-1}(U) = \emptyset$. Em particular, para $y \in U$, toda componente irredutível de $f^{-1}(y)$ tem dimensão igual a r.*

2. *Se X e Y são variedades afins então o conjunto aberto U do item 1 acima, pode-se escolher tal que $f : f^{-1}(U) \to U$ fatora-se no diagrama*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & U \times \mathbb{A}^r \arrow[d, "pr_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

onde π é finito e pr_1 é a projeção no primeiro fator.

Observação 3.1.14. *A Proposição 3.1.13 implica que para morfismos dominantes $f : X \to Y$ existe um subconjunto aberto e denso U de Y tal que $U \subset f(X) \subset Y$*

Definição 3.1.15. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de variedades algébricas, $x \in X$ um ponto e $y = f(x)$.*

1. *O espaço tangente de Zariski de X é*

$$T_xX = Hom_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}^2_{X,x}, \mathbb{K})$$

2. *$f^{\#} : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}, \alpha \mapsto \alpha \circ f$.*

3. *A diferencial de f é a aplicação linear induzida entre espaços tangentes T.*

Proposição 3.1.16. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo dominante de variedades algébricas reduzidas (não possuim elementos nilpotentes) complexas e irredutíveis. Então existe um subconjunto aberto e denso $V \subset X$ tal que para cada $x \in V$ a aplicação*

$$T_xf : T_xX \to T_yY \text{ é sobrejetora.}$$

Proposição 3.1.17. *([GrLoShu07], 140) Seja $G = \mathcal{R}^{(k)}$ ou $\mathcal{K}^{(k)}$ e para $f \in J^{(k)}$ seja Gf a órbita de f sobre a ação de G em $J^{(k)}$. Denotamos por $T_f(Gf)$ o espaço tangente a*

(Gf) em f, considerado como um subespaço linear de $J^{(k)}$. Então, para $k \geq 1$:

$$T_f(\mathcal{R}^{(k)}f) = (\mathfrak{m} \cdot j(f) + \mathfrak{m}^{k+1})/\mathfrak{m}^{k+1},$$

$$T_f(\mathcal{K}^{(k)}f) = (\mathfrak{m} \cdot j(f) + \langle f \rangle + \mathfrak{m}^{k+1})/\mathfrak{m}^{k+1},$$

Teorema 3.1.18. *([GrLoShu07], 141) Seja $f \in \mathbb{C}[[\underline{x}]], f(\mathbf{0}) = 0$ as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) f tem um ponto crítico isolado.

(b) f é finitamente determinada pela direita.

(c) f é finitamente determinada por contato.

Demonstração. $(a) \to (b)$ Se f tem um ponto crítico isolado, pelo Lema 3.1.5 tem-se que $\mu(f) < \infty$ então pelo Corolário 3.1.4, f é $(\mu(f) + 1)$-determinada.

$(b) \to (c)$ Suponhamos que f é k-finitamente determinada, assim, dada $g \in \mathbb{C}[[\underline{x}]]$ com $f^{(k)} = g^{(k)}$ sabemos que $f \sim_r g$, por tanto $f \sim_c g$, assim f é k-determinada por contato.

$(c) \to (a)$ Suponhamos que f é finitamente determinada por contato e $g \in \mathfrak{m}^{k+1}$. Então $f_t = f + tg \in \mathcal{K}^{k+1}f$ mod $\mathfrak{m}^{k+2}$ e portanto

$$g = \left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0} \in \mathfrak{m} \cdot j(f) + \langle f \rangle \bmod \mathfrak{m}^{k+2},$$

isto pela Proposição 3.1.17. Pelo Lema 1.1.25, de Nakayama, sendo este último contido em $j(f) + \langle f \rangle$. Portanto $\tau(f) < \infty$ e f tem um ponto crítico isolado pelo Lema 3.1.5.

□

3.2 Determinação finita em característica positiva

Nesta seção desenvolvemos uma condição necessária para que uma série $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ seja finitamente determinada, quando $\mathbb{K}$ é um corpo algébricamente fechado e de característica arbitrária. Apresentamos um lema técnico que permite a demonstração do teorema e exemplos de ordem de determinação relacionados com o ideal maximal, a ordem de f e os números de Milnor e de Tjurina de f.

O lema a seguir será fundamental na demonstração do resultado principal deste capítulo:

Lema 3.2.1. *Dado $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado com $char(\mathbb{K}) \geq 0$. Seja $M \geq 1$ um número natural, seja*

$$b_{p,0} \in \mathfrak{m}^{M+p-1} \text{ e } b_{p,i} \in \mathfrak{m}^{M+p} \text{ para } i = 1, \ldots, n \text{ e } p \geq 1.$$

Consideramos as unidades

$$v_p = 1 + b_{p,0} \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$$

e os automorfismos

$$\phi_p : x_i \mapsto x_i + b_{p,i} \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Denotamos por

$$\varphi_p = \phi_p \circ \phi_{p-1} \circ \cdots \circ \phi_1 \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$$

a composição dos primeiros p automorfismos. Também defina-se indutivamente

$$u_p = v_p \cdot \phi_p(u_{p-1})$$

onde $u_0 = 1$. Então:

(A) A sequência $(\varphi_p(x_i))_{p\geq 1}$ converge na topologia $\mathfrak{m}-$ádica de $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ a uma série de potências $x_i + b_i$ com $b_i \in \mathfrak{m}^{M+1}$ para $i = 1, \ldots, n$. E, em particular, a aplicação $\varphi : \mathbb{K}[[\underline{x}]] \to \mathbb{K}[[\underline{x}]] : x_i \mapsto x_i + b_i$ é um automorfismo de $\mathbb{K}-$álgebras locais de $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$.

(B) A sequência $(u_p)_{p\geq 1}$ converge na topologia $\mathfrak{m}-$ádica a uma unidade $u = 1 + b_0 \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ com $b_0 \in \mathfrak{m}^M$.

(C) Para toda série de potências $f_0 \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ a sequência $(\varphi_p(f_0))_{p\geq 1}$ converge na topologia $\mathfrak{m}$-ádica a $\varphi(f_0)$.

(D) Para toda série de potências $f_0 \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ a sequência $(u_p \cdot \varphi_p(f_0))_{p\geq 1}$ converge na topologia $\mathfrak{m}$-ádica a $u \cdot \varphi(f_0)$.

Demonstração. (A) Afirmamos que para cada $p > 1$: $\varphi_p(x_i) - \varphi_{p-1}(x_i) \in \mathfrak{m}^{M+p}$. Com efeito, por hipóteses podemos escrever convenientemente:

$$\varphi_1(x_i) = \phi_1(x_i) = x_i + b_{1,i},$$

$$\varphi_2(x_i) = \phi_2(x_i + b_{1,i}) = x_i + b_{2,i} + \phi_2(b_{1,i}),$$

$$\varphi_3(x_i) = x_i + b_{3,i} + \phi_3(b_{2,i}) + \phi_3(\phi_2(b_{1,i})), \ \ldots$$

$$\varphi_{p-1}(x_i)=x_i+b_{p-1,i}+\phi_{p-1}(b_{p-2,i})+\phi_{p-1}(\phi_{p-2}(b_{p-3,i}))+\ldots+\phi_{p-1}(\phi_{p-2}(\ldots(\phi_2(b_{1,i}))),$$

de maneira indutiva temos que para cada $p > 1$:

$$\varphi_p(x_i) = x_i + b_{p,i} + \phi_p(b_{p-1,i}) + \phi_p(\phi_{p-1}(b_{p-2,i})) + \cdots + \phi_p(\phi_{p-1}(\ldots(\phi_2(b_{1,i}))) \quad (3.1)$$

Logo

$$\varphi_p(x_i)-\varphi_{p-1}(x_i)=b_{p,i}+\phi_p(b_{p-1,i})-b_{p-1,i}+\phi_p(\phi_{p-1}(b_{p-2,i}))-\phi_{p-1}(b_{p-2,i})+\ldots$$

$$+\phi_p(\phi_{p-1}(\ldots(\phi_2(b_{1,i})))-\phi_{p-1}(\phi_{p-2}(\ldots(\phi_2(b_{1,i}))).$$

Assim bastará observar que

$$\forall p > 1 : \phi_p(b_{p-1,i}) - b_{p-1,i} \in \mathfrak{m}^{M+p}$$

o que implicará

$$\forall p > 1 : \varphi_p(x_i) - \varphi_{p-1}(x_i) \in \mathfrak{m}^{M+p}. \quad (3.2)$$

Com efeito pelo Corolário 1.1.21 da substituição na topologia $\mathfrak{m}-$ádica,

$$\phi_p(b_{p-1,i}) - b_{p-1,i} = \phi_p(\sum_{|\alpha|=M+p-1}^{\infty} a_\alpha \underline{x}^\alpha) - \sum_{|\alpha|=M+p-1}^{\infty} a_\alpha \underline{x}^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|=M+p-1}^{\infty} a_\alpha \phi_p(\underline{x}^\alpha) - \sum_{|\alpha|=M+p-1}^{\infty} a_\alpha \underline{x}^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|=M+p-1}^{\infty} a_\alpha (x_1 + b_{p,1})^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot (x_n + b_{p,n})^{\alpha_n} - \sum_{|\alpha|=M+p-1}^{\infty} a_\alpha \underline{x}^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|=M+p-1}^{\infty} a_\alpha (\sum_{s_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{s_1} x_1^{\alpha_1 - s_1} b_{p,1}^{s_1}) \cdot_{\ldots} \cdot (\sum_{s_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{s_n} x_1^{\alpha_n - s_n} b_{p,n}^{s_n})$$

$$- \sum_{|\alpha|=M+p-1}^{\infty} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathfrak{m}^{M+p},$$

este último devido ao fato de que $b_{p,1}, \ldots, b_{p,n} \in \mathfrak{m}^{M+p}$ e ao colocar em evidência quando $s_1 = \cdots = s_n = 0$.

Dado $b_{1,i} \in \mathfrak{m}^{M+1} \Rightarrow b_{1,i} = \displaystyle\sum_{|\alpha|=M+1}^{\infty} a_\alpha \underline{x}^\alpha$, logo

$$\begin{aligned}
\phi_2(b_{1,i}) &= \sum_{|\alpha|=M+1}^{\infty} a_\alpha \phi_2(x_1)^{\alpha_1} \cdots \phi_2(x_n)^{\alpha_n} \\
&= \sum_{|\alpha|=M+1}^{\infty} a_\alpha (\sum_{s_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{s_1} x_1^{\alpha_1 - s_1} b_{2,1}^{s_1}) \cdots (\sum_{s_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{s_n} x_n^{\alpha_n - s_n} b_{2,n}^{s_n}).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Aplicando ϕ_3 acima; $\phi_3(\phi_2(b_{1,i})) =$

$$\begin{aligned}
&= \phi_3(\sum_{|\alpha|=M+1}^{\infty} a_\alpha (\sum_{s_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{s_1} x_1^{\alpha_1 - s_1} b_{2,1}^{s_1}) \cdots (\sum_{s_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{s_n} x_n^{\alpha_n - s_n} b_{2,n}^{s_n})) \\
&= \sum_{|\alpha|=M+1}^{\infty} [a_\alpha (\textstyle\sum_{s_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{s_1} \phi_3(x_1)^{\alpha_1 - s_1} \phi_3(b_{2,1})^{s_1}) \cdots \\
&\qquad \cdots (\sum_{s_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{s_n} \phi_3(x_n)^{\alpha_n - s_n} \phi_3(b_{2,n})^{s_n})] \\
&= \sum_{|\alpha|=M+1}^{\infty} [a_\alpha (\sum_{s_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{s_1} (x_1 + b_{3,1})^{\alpha_1 - s_1} \phi_3(b_{2,1})^{s_1}) \cdots \\
&\qquad \cdots (\sum_{s_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{s_n} (x_n + b_{3,n})^{\alpha_n - s_n} \phi_3(b_{2,n})^{s_n})],
\end{aligned}$$

assim se $s_1 = \cdots = s_n = 0$,

$$\phi_3(\phi_2(b_{1,i})) - \phi_2(b_{1,i}) \in \mathfrak{m}^{M+3}.$$

logo, analogamente, tem-se que a afirmação é verdadeira.

A seguir completamos a demonstração da parte (A), afirmamos que $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Com efeito, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists\, \mathcal{P}$=max$\{N - M, 1\}$ tal que para cada

$p > q > \mathcal{P}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi_p(x_i) - \varphi_q(x_i) &= \sum_{j=q+1}^{p} \varphi_j(x_i) - \varphi_{j-1}(x_i) \\
&= \varphi_{q+1}(x_i) - \varphi_q(x_i) + \varphi_{q+2}(x_i) - \varphi_{q+1}(x_i) + \ldots \\
&+ \varphi_{p-1}(x_i) - \varphi_{p-2}(x_i) + \varphi_p(x_i) - \varphi_{p-1}(x_i) \in \mathfrak{m}^{M+\mathcal{P}} \subseteq \mathfrak{m}^N,
\end{aligned}$$

pois $\mathfrak{m}^{M+p} \subset \mathfrak{m}^{M+p-1} \subset \ldots \mathfrak{m}^{M+q} \subset \mathfrak{m}^{M+q+1} \subset \mathfrak{m}^{M+\mathcal{P}} \subset \mathfrak{m}^N$, $(M + \mathcal{P} \geq N)$.

Logo, pelo desenvolvimento de $\varphi_p(x_i)$ em (3.1) e do fato que $\mathfrak{m}^{M+p} \subseteq \mathfrak{m}^{M+1}, \forall p \geq 1$ além de que o espaço $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é completo e Hausdorff então converge a uma única série de potência $x_i + b_i$ tal que $b_i \in \mathfrak{m}^{M+1}$.

(B) Como $u_0 = 1$, $v_p = 1 + b_{p,0}$, $u_p = v_p \cdot \phi_p(u_{p-1})$ e $\phi_p(x_i) = x_i + b_{p,i}$, temos que

$$\phi_p(u_{p-1}) - u_{p-1} \in \mathfrak{m}^{M+p},$$

desenvolvendo

$$\begin{aligned}
\phi_p(u_{p-1}) &= \phi_p(v_{p-1}) \cdot (\phi_p \circ \phi_{p-1}(v_{p-2})) \cdot \ldots \cdot (\phi_p \circ \cdots \circ \phi_2(v_1)) \\
&= \phi_p \circ \phi_{p-1} \circ \ldots \phi_2(v_{p-1} \cdot \ldots \cdot v_1) \\
&= \phi_p(1 + z) \\
&= 1 + \phi_p(z)
\end{aligned}$$

onde $z \in \mathfrak{m}^{M+p-1}$, e também podemos desenvolver:

$$\begin{aligned}
u_{p-1} &= v_{p-1} \cdot \phi_{p-1}(v_{p-2}) \cdot (\phi_{p-1} \circ \phi_{p-2}(v_{p-3})) \cdot \ldots \cdot (\phi_{p-1} \circ \cdots \circ \phi_2(v_1)) \\
&= \phi_{p-1} \circ \phi_{p-2} \circ \ldots \circ \phi_2(v_{p-1} \cdot \ldots \cdot v_1) \\
&= 1 + z
\end{aligned}$$

onde $z \in \mathfrak{m}^{M+p-1}$

Assim $\phi_p(u_{p-1}) - u_{p-1} = \phi_p(z) - z \in \mathfrak{m}^{M+p}$ pelo resultado (3.2).

Notemos que $u_p - u_{p-1} = (1 + b_{p,0}) \cdot \phi_p(u_{p-1}) - u_{p-1} = b_{p,0} \cdot \phi_p(u_{p-1}) + \phi_p(u_{p-1}) - u_{p-1} \in \mathfrak{m}^{M+p-1}$.

Por último afirmamos que $(u_p)_{p \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy. Dado $N \in \mathbb{N}$ existe

$\mathcal{P} = max\,\{N - M, 1\}$ tal que para todo $p > q > \mathcal{P}$ tem-se: $u_p - u_q = \sum_{i=q+1}^{p} u_i - u_{i-1} \in \mathfrak{m}^{M+\mathcal{P}} \subseteq \mathfrak{m}^N$. Logo como $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ é completo e Hausdorff, a sequência $(u_p)_{p\geq 1}$ converge unicamente a uma série de potências da forma $u := 1 + b_0$ com $b_0 \in \mathfrak{m}^M$

(C) Pelo resultado da parte A) tem-se que $(\varphi_p(x_i))_{p\geq 1}$ converge a $\varphi(x_i)$ e da parte B) tem-se que $(u_p)_{p\geq 1}$ converge a u. Assim dado $f_0 \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e dado $N \in \mathbb{N}$ arbitrário, $\exists P \geq 1$ suficientemente grande tal que $\forall p \geq P$ e para cada $i = 1, \ldots, n$ cumple-se

$$\varphi(x_i) - \varphi_p(x_i) \in \mathfrak{m}^N$$

e

$$u - u_p \in \mathfrak{m}^N.$$

De maneira análoga à demonstração do resultado (3.2) concluimos que

$$\varphi(f_0) - \varphi_p(f_0) \in \mathfrak{m}^N.$$

(D) Utilizando o resultado C) tem-se que

$$u \cdot \varphi(f_0) - u_p \cdot \varphi_p(f_0) = u \cdot (\varphi(f_0) - \varphi_p(f_0)) + (u - u_p) \cdot \varphi_p(f_0) \in \mathfrak{m}^N, \forall p \geq P$$

com P suficientemente grande.

□

Teorema 3.2.2. *Seja $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]], f \neq 0$ e $f \in \mathfrak{m}^2$ com $k \in \mathbb{N}$ fixo e arbitrário. Então:*

1. *Se $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ então f é $(2k - ord(f) + 2)$-determinado pela direita.*

2. *Se $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ então f é $(2k - ord(f) + 2)$-determinado por contato.*

Demonstração. 2) Vamos denotar $o = ord(f)$. Assim segue que $ord(f_{x_i}) \geq o - 1, \forall i = 1, \ldots, n$.

Da hipótese se sabe que $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot \langle f_{x_1}, \ldots f_{x_n} \rangle$ e como $\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{m}^o$ e $j(f) \subseteq \mathfrak{m}^{o-1}$ então $\mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle \subseteq \mathfrak{m}^{o+1}$ e $\mathfrak{m}^2 \cdot j(f) \subseteq \mathfrak{m}^{o+1}$. Daqui como $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^{o+1}$ então $k + 2 \geq o + 1$ e em consequência $k \geq o - 1$, e

$$k + k - o + 2 = k + (k + 2) - o \geq k + (o + 1) - o = k + 1. \tag{3.5}$$

Agora fixamos $N = 2k - o + 2$.

Seja $g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ tal que $g - f \in \mathfrak{m}^{N+1}$ (equivalentemente $f^{(N)} = g^{(N)}$). Temos que mostrar $f \sim_c g$, isto é que existe $u \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ e $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ tal que

$$g = u \cdot \varphi(f).$$

Isto será feito por construção indutiva.

Definamos $M = N - k \geq 1$.

Agora, como $g - f \in \mathfrak{m}^{N+1}$, por hipótese, temos: $g - f \in \mathfrak{m}^{M-1} \cdot \mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^{M-1} \cdot (\mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)) = \mathfrak{m}^M \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^{M+1} \cdot j(f)$, então

$$g - f \in \mathfrak{m}^M \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^{M+1} \cdot j(f). \tag{3.6}$$

Por consequência, existem séries $b_{1,0} \in \mathfrak{m}^M$ e $b_{1,i} \in \mathfrak{m}^{M+1}$ para $i = 1, \ldots, n$ tais que

$$g - f = b_{1,0} \cdot f + \sum_{i=1}^{n} b_{1,i} \cdot f_{x_i} \tag{3.7}$$

Em principio, definimos $u_0 = 1$, $u_1 := v_1 := 1 + b_{1,0} \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ e $\varphi_1 := \phi_1 \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ com $\phi_1 : x_i \mapsto x_i + b_{1,i}$.

Vamos mostrar que $g - u_1 \cdot \varphi_1(f) \in \mathfrak{m}^{(N+1)+1} \subseteq \mathfrak{m}^1$. Como

$$(x_1 + z_1)^{\beta_1} \ldots (x_n + z_n)^{\beta_n} = \sum_{\gamma_1=0}^{\beta_1} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\beta_n} c_{\beta,\gamma} \cdot \underline{x}^{\beta-\gamma} \cdot \underline{z}^{\gamma}$$

onde $c_{\beta,\gamma} = \binom{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot \binom{\beta_n}{\gamma_n} \in \mathbb{Z}$, e $f \in \mathfrak{m}^o$, podemos escrever $f = \sum_{|\beta| \geq o}^{\infty} a_\beta \underline{x}^\beta$ e temos

$$\begin{aligned}
f(x_1 + z_1, \ldots, x_n + z_n) &= \sum_{|\beta| \geq o}^{\infty} a_\beta \cdot (x_1 + z_1)^{\beta_1} \ldots (x_n + z_n)^{\beta_n} && (3.8)\\
&= \sum_{|\beta| \geq o}^{\infty} a_\beta \cdot \sum_{\gamma_1=0}^{\beta_1} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\beta_n} c_{\beta,\gamma} \cdot \underline{x}^{\beta-\gamma} \cdot \underline{z}^{\gamma} && (3.9)\\
&= \sum_{|\beta| \geq o}^{\infty} h_\alpha \underline{z}^\alpha && (3.10)
\end{aligned}$$

onde se denota $h_\alpha = \sum_{|\alpha|\geq o,\beta\geq\alpha}^{\infty} a_\beta \cdot c_{\beta,\alpha} \cdot \underline{x}^{\beta-\alpha}$.

Se definimos $\beta \geq \alpha$ e $\beta_i \geq \alpha_i, \forall i = 1, \ldots, n$, segue que

$$ord(h_\alpha) = min\{\mid \beta \mid - \mid \alpha \mid, \text{tal que} \mid \beta \mid \geq o, \beta \geq \alpha\} \geq o - \mid \alpha \mid$$

Se $\alpha_i < char(\mathbb{K})$ tem-se que $h_\alpha = \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}$. Também temos que $h_{e_i} = f_{x_i}$.

Logo aplicando ϕ_1 a f equivale a substituir z_i por $b_{1,i}$ em (3.8) e pelo Corolário 1.1.21 calculamos

$$\phi_1(f) = f(x_1 + b_{1,1}, \ldots, x_n + b_{1,n}) = f + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \cdot b_{1,i} + h \tag{3.11}$$

onde $h = \sum_{|\alpha|\geq 2}^{\infty} h_\alpha \cdot b_{1,1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot b_{1,n}^{\alpha_n} \in \mathfrak{m}^{N+2}$, isto pois $ord(h_\alpha \cdot b_{1,1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot b_{1,n}^{\alpha_n}) \geq ord(h_\alpha) + \sum_{i=1}^{n} ord(b_{1,i}) \cdot \alpha_i \geq o - \mid \alpha \mid + (M+1) \cdot \mid \alpha \mid \geq o + 2M = N + 2$, pois $N = 2k + o + 2$ e $M = N - k$.

Seguidamente por (3.11)

$$g - u_1 \cdot \varphi_1(f) = g - v_1 \cdot \phi_1(f) = g - (1 + b_{1,0}) \cdot (f + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \cdot b_{1,i} + h)$$

logo por (3.7)

$$g - u_1 \cdot \varphi_1(f) = -\sum_{i=1}^{n} b_{1,0} \cdot b_{1,i} \cdot f_{x_i} - (1 + b_{1,0}) \cdot h \in \mathfrak{m}^{N+2} \tag{3.12}$$

pois

$$ord(b_{1,0} \cdot b_{1,i} \cdot f_{x_i}) \geq M + (M+1) + (o-1) = (2k + 2 - N) + (2N - 2k) = N + 2$$

Assim por (3.7) e (3.12) podemos construir indutivamente as sequências $(b_{p,i})_{p\geq 1}$ para cada $i = 0, \ldots, n$ que satisfaz $g - u_p \cdot \varphi_p(f) \in \mathfrak{m}^{N+1+p}$ e logo pelo Lema 3.2.1 tem-se que existe $u \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]^*$ e $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ tal que $\lim_{p\to+\infty} u_p \cdot \varphi_p(f) = u \cdot \varphi(f)$ na topologia $\mathfrak{m}-$ádica e portanto $g = u \cdot \varphi(f)$, assim $f \sim_c g$.

1) A prova para equivalência pela direita é feita do mesmo jeito. Pois,

como $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^2 j(f) \subseteq \mathfrak{m}^{o+1}$, isto implica que $k+2 \geq o+1$ então $k \geq o-1$ e que $\forall g \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ com $g - f \in \mathfrak{m}^{N+1} = \mathfrak{m}^{M-1} \cdot \mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^{M+1} \cdot j(f)$, pois $j(f) \in \mathfrak{m}^{o-1}$ onde fixamos $N = 2k - o + 2 \geq k + k - o + 2 \geq k + o - 1 - o + 2 = k+1$, assim $N \geq k+1$ e $M = N - k \geq 1$, por tando existen $b_{1,i} \in \mathfrak{m}^{M+1}$ com $g - f = b_{1,1} \cdot f_{x_1} + \cdots + b_{1,n} f_{x_n}$ e logo definimos $\phi_1 : x_i \mapsto x_i + b_{1,i}$ com a propriedade $g - \phi_1(f) \in \mathfrak{m}^{N+2}$.

Com referência à demonstração da parte 2) do Teorema 3.2.2 pode-se construir as sequências $(b_{p,i})_{p \geq 1}$ para cada $i = 1, \ldots, n$ tal que $\lim\limits_{p \to +\infty} \varphi_p(f) = \varphi(f)$ na topologia $\mathfrak{m}-$ádica. E análogamente temos que existe $\varphi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ tal que $g = \varphi(f)$, isto é $f \sim_r g$

$\square$

Observação 3.2.3. *Notamos que o limite de determinação fornecido pelo Teorema 3.2.2 é maior ou igual que o fornecido pelo Teorema 3.1.3, pois da equação (3.5) na demostração acima tem-se que* $2k - ord(f) + 2 \geq k+1$.

Comentário 3.2.4.

1. *Por ([Bo09], 64), quando* $char(\mathbb{K}) = 0$ *e* $f \in \mathfrak{m} \subseteq \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ *se* $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ *então* f *é* $(k+1)$*-determinada pela direita, e se* $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ *então* f *é* $(k+1)$*-determinada por contato. De maneira particular quando* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, pode-se ver em ([GrLoShu07], 130)*

2. *Os limites de determinação não são sempre iguais quando muda a característica do corpo. Por exemplo: Consideremos* $char(\mathbb{K}) = 2$*, seja* $f = y^2 + x^3 y \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$*,* $ord(f) = 2$*,* $f \in \mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{m}$*,*

$$j(f) = \left\langle x^2 y, x^3 \right\rangle$$

e

$$tj(f) = \langle f \rangle + \langle j(f) \rangle = \left\langle y^2 + x^3 y, 3x^2 y, 2y + x^3 \right\rangle = \left\langle y^2 + x^3 y, x^2 y, x^3 \right\rangle = \left\langle y^2, x^2 y, x^3 \right\rangle$$

então o número de tjurina é $\tau(f) = 5$*. Em particular,* f *define uma hipersuperfície singular isolada* R_f*. Além disso tem-se*

$$\langle f \rangle + \mathfrak{m} \cdot j(f) = \left\langle y^2 + x^3 y \right\rangle + \langle x, y \rangle \cdot \left\langle x^2 y, x^3 \right\rangle = \left\langle y^2 + x^3 y \right\rangle + \left\langle x^3 y, x^4, x^2 y^2, x^3 y \right\rangle = \left\langle y^2, x^3 y, x^4 \right\rangle.$$

E como $\mathfrak{m}^4 \subseteq \langle y^2, x^3 y, x^4 \rangle = \langle f \rangle + \mathfrak{m} \langle j(f) \rangle$ *temos que*

$$\mathfrak{m}^5 \subseteq \mathfrak{m} \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \langle j(f) \rangle.$$

Daqui sabemos que f é $(2 \cdot 3 - ord(f) + 2 = 6)$ - determinado por contato.

3. *Como $\mathfrak{m}^{4+1} \subseteq \mathfrak{m}\langle f\rangle + \mathfrak{m}^2\langle j(f)\rangle$, e se o limite de determinação fosse como quando $char(K) = 0$ teríamos que f seria 4-determinada por contato, mas este fato não é certo. Pois dado $g := f + x^5 = y^2 + x^3y + x^5$, temos que $f^{(4)} = g^{(4)}$ e como $f = (y + x^3) \cdot y$ é redutível e $g = y^2 + x^3y + x^5$ é irredutível, R_f não pode ser isomorfo a R_g, por tanto f não está relacionado por contato com g.*

É interesante saber a melhora dos limites de determinação. Comentaremos isso em uma proposição e um teorema respectivamente.

Proposição 3.2.5 ([Bo09], 67)**.** *Seja $f \in \mathfrak{m}^2 \subset \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, com $char(\mathbb{K}) \geq 0$ então:*

1. *Se $\mu(f) < \infty$ então $\mathfrak{m}^{\mu(f)} \subset j(f)$*
2. *Se $\tau(f) < \infty$ então $\mathfrak{m}^{\tau(f)} \subset tj(f)$*

Demonstração. 1. Considerando $M_f = \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{j(f)}$ e

$$dim_{\mathbb{K}} M_f = \mu(f) := \mu$$

a dimensão deste $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Definimos para cada $s \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\mathfrak{m}}^s := \frac{\mathfrak{m}^s + j(f)}{j(f)},$$

a imagem de $\mathfrak{m}^s$ em M_f. Notemos que para cada s, $\overline{\mathfrak{m}}^s$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial finito de M_f.

Afirmamos que qualquer s tal que $1 \leq s \leq \mu$, tem-se que

$$dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}}^s) \leq \mu - s.$$

Com efeito, faremos por indução.

Para $s = 1$, como $\overline{\mathfrak{m}}^s$ é o ideal maximal da $\mathbb{K}$-álgebra local M_f, então $dim_{\mathbb{K}} \dfrac{M_f}{\overline{\mathfrak{m}}} = 1$ logo $dim_{\mathbb{K}} M_f - dim_{\mathbb{K}} \overline{\mathfrak{m}} = 1$ então $dim_{\mathbb{K}} \overline{\mathfrak{m}} = \mu - 1$. Agora seja s tal que $1 \leq s < \mu$ e suponha que $dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}}^s) \leq \mu - s$, aquí temos duas posibilidades: Se $\overline{\mathfrak{m}}^{s+1} = \overline{\mathfrak{m}}^s$, então se segue do Lema de Nakayama 1.1.25 que $\overline{\mathfrak{m}^s} = 0$ (pois $\overline{\mathfrak{m}^{s+1}} = \mathfrak{m} \cdot 0 + \overline{\mathfrak{m}^s}$ então $0 = \overline{\mathfrak{m}^s}$). E ao supor que $\overline{\mathfrak{m}^{s+1}} \subset \overline{\mathfrak{m}^s}$ subespaço próprio, então temos $dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}^{s+1}}) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}^s}) - 1 \leq \mu - s - 1 = \mu - (s+1)$, logo temos $dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}^{s+1}}) \leq \mu - (s+1)$. Com o qual terminamos a prova da afirmação.

Agora como temos que, para todo s, tal que $1 \leq s \leq \mu$ tem-se $dim_{\mathbb{K}}\overline{\mathfrak{m}^s} \leq \mu - s$ e em particular $dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}^\mu}) = 0$ então $dim_{\mathbb{K}}\left(\dfrac{\mathfrak{m}^\mu + j(f)}{j(f)}\right) = 0$ então $\mathfrak{m}^\mu \subset j(f)$.

2. Sabemos que $T_f = \dfrac{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}{tj(f)}$ e a dimensão deste $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $\tau(f) := \tau$. Definamos para cada $s \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\mathfrak{m}}^s := \frac{\mathfrak{m}^s + tj(f)}{tj(f)},$$

a imagem de $\mathfrak{m}^s$ em T_f. Notamos que para cada s, $\overline{\mathfrak{m}}^s$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial finito de T_f.

Afirmamos que para cada s tal que $1 \leq s \leq \tau$, tem-se que

$$dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}}^s) \leq \tau - s.$$

Com efeito, faremos por indução.

Para $s = 1$, como $\overline{\mathfrak{m}}^s$ é o ideal maximal da $\mathbb{K}$-álgebra local T_f, então $dim_{\mathbb{K}}\dfrac{T_f}{\overline{\mathfrak{m}}} = 1$ logo $dim_{\mathbb{K}}T_f - dim_{\mathbb{K}}\overline{\mathfrak{m}} = 1$ então $dim_{\mathbb{K}}\overline{\mathfrak{m}} = \tau - 1$. Agora seja s tal que $1 \leq s < \tau$ e suponha que $dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}}^s) \leq \tau - s$, aquí temos duas posibilidades: Se $\overline{\mathfrak{m}}^{s+1} = \overline{\mathfrak{m}}^s$, então se segue pelo Lema de Nakayama 1.1.25 que $\overline{\mathfrak{m}^s} = 0$ (pois $\overline{\mathfrak{m}^{s+1}} = \mathfrak{m} \cdot 0 + \overline{\mathfrak{m}^s}$ então $0 = \overline{\mathfrak{m}^s}$). E ao supor que $\overline{\mathfrak{m}^{s+1}} \subset \overline{\mathfrak{m}^s}$ subespaço próprio, então temos $dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}^{s+1}}) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}^s}) - 1 \leq \tau - s - 1 = \tau - (s+1)$, logo temos $dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}^{s+1}}) \leq \tau - (s+1)$. Com o qual terminamos a prova da afirmação.

Agora como temos que, para todo s, tal que $1 \leq s \leq \tau$ tem-se $dim_{\mathbb{K}}\overline{\mathfrak{m}^s} \leq \tau - s$ e em particular $dim_{\mathbb{K}}(\overline{\mathfrak{m}^\tau}) = 0$ então $dim_{\mathbb{K}}\left(\dfrac{\mathfrak{m}^\tau + tj(f)}{tj(f)}\right) = 0$ então $\mathfrak{m}^\tau \subset tj(f)$.

□

Da Proposição 3.2.5 e o Teorema 3.2.2 acima escrevemos:

1. Se $\mu(f) < \infty$ então $\mathfrak{m}^{\mu(f)} \subseteq j(f)$ então $\mathfrak{m}^{\mu(f)+2} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$, assim f é $(2 \cdot \mu(f) - ord(f) + 2)$-determinada pela direita.

2. Se $\tau(f) < \infty$ então $\mathfrak{m}^{\tau(f)} \subseteq tj(f)$ logo $\mathfrak{m}^{\tau(f)+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$, assim f é $(2 \cdot \tau(f) - ord(f) + 2)$-determinada por contato.

O seguinte Teorema dá a determinacão em termos exclusivamente dos números de Milnor e de Tjurina respectivamente se f é uma singularidade isolada e R_f é uma hipersuperfície com singularidade isolada.

Teorema 3.2.6. *Seja $char(\mathbb{K}) \geq 0$ e seja $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$.*

1. *Se $\mu(f) < \infty$ então f é $2 \cdot \mu(f)$ - determinada pela direita.*

2. *Se $\tau(f) < \infty$ então f é $2 \cdot \tau(f)$ - determinada por contato.*

Demonstração. Pode-se encontrar em ([GrKö90], 345). □

Observação 3.2.7. 1. *Os limites de determinação são melhores no Teorema 3.2.2 comparado com o Teorema 3.2.6. Com efeito, como $\tau(f) < \infty$ então existe k_0 que é o mínimo dos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^k \subset tj(f)$ em conseqüência $\mathfrak{m}^{\tau(f)} \subseteq \mathfrak{m}^{k_0} \subset tj(f)$ e daqui $\tau(f) \geq 2 \cdot k_0 \geq 2 \cdot k_0 - ord(f) + 2$.*

2. *No software SINGULAR pode-se estimar os valores k que são potências do $\mathfrak{m}$ no Teorema 3.2.6.*

Exemplo 14. *Seja $char(\mathbb{K}) = 23$ e $f = y^8 + x^8y^4 + x^{23} \in \mathbb{K}[[x,y]]$ e o cálculo mediante o software da resultados como $\tau(f) = 105$, $ord(f) = 8$ e $\mathfrak{m}^{23} \subset tj(f)$, onde $23 = deg(x^{22}y^2) - 1$. Enquanto pelo Teorema 3.2.6 a determinação por contato é 210 e pelo Teorema 3.2.2 a determinação por contato é $2 \cdot 23 - ord(f) + 2 = 40$.*

Cálculo do número de Milnor e número de Tjurina respectivamente

```
> ring r=23, (x,y),ds;
> poly f=y8+x8y4+x23;
> ideal j=jacob(f);
> vdim(std(j));
-1 (isto significa que μ(f) = ∞)
> ideal t=ideal(f)+j;
> vdim(std(t));
105 (número de tjurina)
> ideal I=maxideal(1)*f+maxideal(2)*jacob(f);
> I=std(I);
> highcorner(I); x22y2
```

O recíproco do Teorema 3.2.2 quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é certo.

Teorema 3.2.8. *([GrLoShu07], 141) Seja* $f \in \mathbb{C}[[\underline{x}]], f(\boldsymbol{0}) = 0$ *as seguintes enunciados são equivalentes.*

(a) f *tem um ponto crítico isolado*

(b) f *é finitamente determinada pela direita*

(c) f *é finitamente determinada por contato*

Quando $char(\mathbb{K}) \geq 0$ a prova não é trivial.

3.3 A volta do Teorema 3.2.2

Uma prova foi dada em [GrYo12], considerando, como no caso complexo que toda aplicação órbita é separável (Proposição 3.1.16), mas em característica positiva isto não é verdade. O mesmo autor fez uma prova deste teorema em [GrPha19], como caso particular de resultados em matrizes coluna de séries de potências formais sem fazer uso da propiedade de separabilidade da aplicação órbita. Nesta seção apresentamos exemplos de aplicações órbitas não separáveis e desenvolvemos a prova do recíproco do Teorema 3.2.2 que enunciamos a seguir:

Teorema 3.3.1. *Seja* $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]], f \neq 0, f \in \mathfrak{m}$, *verifica-se:*

1. *Se* f *é* k*-determinada pela direita então* $\mathfrak{m}^{k+1} \subseteq \mathfrak{m} \cdot j(f)$. *Assim em particular implica que* f *é uma singularidade isolada.*

2. *Se* f *é* k*-determinada por contato então* $\mathfrak{m}^{k+1} \subseteq \langle f \rangle + \mathfrak{m} \cdot j(f)$. *Em particular implica que* R_f *é uma hipersuperfície com singularidade isolada.*

Observação 3.3.2. *([GrKö90], 344-345) Martin Greuel exibe uma prova do Teorema 3.3.1 usando Teoria de Deformações. Uma singularidade de deformação de tipo finito é necessariamente isolada, pois desde que uma singularidade não isolada* $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ *pode ser deformada em singularidades de alto número arbitrário de Tjurina. O qual seria uma contradição.*

A prova do Teorema 3.3.1 será desde o ponto de vista de ações de grupos algébricos e o espaço tangente de Zariski.

Definição 3.3.3. *([GrPha18], 762) O espaço tangente de Zariski de X em $x \in X$ é*

$$T_xX := \{f : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}[\epsilon] \text{ homomorfismo de } \mathbb{K}\text{-álgebras: } \pi \circ f = \chi_x\},$$

onde $\mathcal{O}_{X,x}$ é o anel local de X em x,

$$\mathbb{K}[\epsilon] = \mathbb{K}[t]/\langle t^2 \rangle = \{a + b\epsilon : a, b \in \mathbb{K},\ \ \epsilon^2 = 0\},$$

$\pi : \mathbb{K}[\epsilon] \to \mathbb{K}[\epsilon]/\langle\epsilon\rangle = \mathbb{K}$ e $\chi : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = \mathbb{K}$ são as aplicações canônicas residuais onde $\mathfrak{m}_x$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Observação 3.3.4. *Sobre o espaço tangente de Zariski a Definição 3.3.3 e a Definição 3.1.15 são equivalentes ([Mil05], 91).*

Definição 3.3.5. *([GrPha18], 762) Seja G um grupo algébrico definido sobre $\mathbb{K}$, com elemento neutro e agindo $\mathbb{K}$-algebricamente sobre uma $\mathbb{K}$-variedade algébrica X, fixamos $x \in X$ vamos considerar a aplicação órbita o e a aplicação induzida $o^{\#}$:*

$$o : G \to X,\ g \mapsto gx,$$

$$o_e^{\#} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{H,e}, f \mapsto o_e^{\#}(f) = f \circ o$$

1. *A aplicação tangente $To : T_eG \to T_xX$ da aplicação órbita, o, é definida sobre $\mathbb{K}$:*

$$w \mapsto To(w) = w \circ o_e^{\#}$$

2. *Definimos $\tilde{T}_x(Gx) := im(To : T_eG \to T_xX)$*

Definição 3.3.6. *([GrPha18], 763) Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, X uma $\mathbb{K}$-variedade e G um grupo algébrico sobre $\mathbb{K}$ agindo algebricamente em X. Para $x \in X$ a aplicação órbita $o : G \to Gx$ é chamada separável se a aplicação tangente $To : T_eG \to T_x(Gx)$ é sobrejetora.*

Observação 3.3.7. *Usualmente esta não é a definição. Um morfismo $f : X \to Y$ de $\mathbb{K}$-variedades algébricas é chamada separável se $\mathbb{K}(Y)$ é uma extensão separável de $\mathbb{K}(X)$.*

Observação 3.3.8. *No artigo ([GrYo12], 70) assume que a aplicação órbita, como na Definição 3.3.6, é separável ainda quando a característica do corpo $\mathbb{K}$ seja positiva. Mas isto não é certo, como observado em ([GrPha19], 12).*

A continuação, vamos enunciar em uma proposição que se uma aplicação órbita é separável, as dimensões da órbita em x e a imagem tangente da órbita em x, coincidem; além isto é equivalente que a imagem tangente da órbita em x é igual ao espaço tangente da órbita em x.

Enunciamos um lema que descreve a fórmula de Taylor em característica positiva. Damos exemplos de órbitas não separáveis em corpos de característica positiva. Logo desenvolveremos a prova do Teorema 3.3.1 baseada integralmente em [GrPha19].

Proposição 3.3.9. *([GrPha18], 763) Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, X uma $\mathbb{K}$-variedade algébrica e G um grupo algébrico sobre $\mathbb{K}$ em X. São equivalentes:*

1. *A aplicação órbita $o : G \to Gx$ é separável.*
2. $dim_{\mathbb{K}}\tilde{T}_x(Gx) = dim_x Gx$
3. $\tilde{T}_x(Gx) = T_x(Gx)$

Estas condições são válidas em particular quando $char(\mathbb{K}) = 0$

O seguinte lema é a Série de Taylor em característica positiva. É importante para determinar explícitamente a imagem tangente da aplicação tangente.

Lema 3.3.10 ([GrPha18], 763)**.** *Seja $f(\underline{x}) = \sum_{|\alpha| \geq ord(f)} c_\alpha \underline{x}^\alpha \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ novas indeterminadas. Então*

$$f(\underline{x} + \underline{z}) = f(\underline{x}) + \sum_{|\alpha| \geq ord(f)} c_\alpha \Big(\sum_{|\gamma| \geq 2, \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\gamma_n} \underline{x}^{\alpha - \gamma} \underline{z}^\gamma \Big)$$

onde $\gamma \leq \alpha$ significa que $\gamma_i \leq \alpha_i, \forall i = 1, \ldots, n$, $\binom{\alpha_i}{\gamma_i} \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \ldots, n$ e se $char(\mathbb{K}) = p > 0$ denotamos para $k \in \mathbb{Z}$

$$k\underline{x}^{\alpha-\gamma}\underline{z}^\gamma = \begin{cases} 0 & se \quad p \mid k \\ k(mod\ p)\underline{x}^{\alpha-\gamma}\underline{z}^\gamma, & se \quad p \nmid k \end{cases} \tag{3.13}$$

Sejam $\mathcal{R} := Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ o grupo pela direita e seja $(Id_R) \in \mathcal{R}^{(k)}$ o elemento neutro do grupo $\mathcal{R}^{(k)}$. $\mathcal{K} := \mathbb{K}[[\underline{x}]]^* \rtimes \mathcal{R}$ o grupo contato e seja $(1, Id_{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}) \in \mathcal{K}^{(k)}$ o elemento neutro do grupo $\mathcal{K}^{(k)}$.

Em ambos casos sem perda de generalidade chamamos o grupo G ou $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{K}$ e Id o elemento neutro de $G^{(k)}$.

A seguinte proposição calcula explicitamente a cara da imagem tangente. A demonstração é um caso particular do espaço de matrizes $M_{1,1}$ com entradas em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$, feito em caso geral para $M_{m,n}$ em ([GrPha18], 763).

Proposição 3.3.11. *Dada $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e $k \geq 1$. Dada a aplicação tangente*

$$T_e G^{(k)} \to T_{j_k(f)}(G^{(k)} j_k(f)),$$

a imagem tangente é considerada como um subespaço de $\mathbb{K}[[\underline{x}]]^{(k)}$, isto é o submódulo

$$\tilde{T}_{j_k(f)}(\mathcal{R}^{(k)} j_k(f)) := \left(\mathfrak{m} \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + \mathfrak{m}^{k+1}\right) / \mathfrak{m}^{k+1}, \textit{no caso } G = \mathcal{R}.$$

$$\tilde{T}_{j_k(f)}(\mathcal{K}^{(k)} j_k(f)) := \left(\langle f \rangle + \mathfrak{m} \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + \mathfrak{m}^{k+1}\right) / \mathfrak{m}^{k+1}, \textit{no caso } G = \mathcal{K}.$$

Demonstração. A aplicação órbita induzida pela ação algébrica é

$$o^{(k)} : \mathcal{K}^{(k)} \to \mathcal{K}^{(k)} j_k(f),$$

$$(j_k(u), j_k(\phi)) \mapsto j_k(u \cdot \phi(f))$$

e a aplicação órbita induz a aplicação tangente

$$T_{(1, Id_R)} \mathcal{K}^{(k)} \to T_{j_k(f)}(\mathcal{K}^{(k)} j_k(f)).$$

Cada elemento de $T_{(1,Id_R)}\mathcal{K}^{(k)}$ pode ser representado ([Mil05], 93) pelo par

$$(j_k(1 + \epsilon \cdot u), j_k(Id_R + \epsilon \cdot \phi))$$

onde $u \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e $\phi \in Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])$ com $\phi(x_v) := \phi_v \in \mathfrak{m}, \forall v = 1, \ldots, n$. Fazendo este par agir em $j_k(f)$ temos

$$j_k((1 + \epsilon \cdot u) \cdot (Id_R + \epsilon \cdot \phi)(f)) = j_k((1 + \epsilon \cdot u) \cdot f(\underline{x} + \epsilon\phi(\underline{x}))),$$

isto pelo Corolário 1.1.21, onde $\phi(\underline{x}) := (\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) = (\phi_1, \ldots, \phi_s)$. Agora como $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$,

$$f = \sum_{|\alpha| \geq ord(f)} c_\alpha \underline{x}^\alpha, \tag{3.14}$$

seja $\underline{z} = \epsilon \cdot \phi(\underline{x})$, aplicamos o Lema 3.3.10 à identidade (3.14) e desde que $\epsilon^2 = 0$ temos

$$f(\underline{x} + \underline{z}) = f(\underline{x}) + \epsilon \cdot \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_v} \cdot \phi_v. \tag{3.15}$$

Logo fazendo uso de (3.15), temos:

$$(1 + \epsilon \cdot u) \cdot f(\underline{x} + \epsilon\phi(\underline{x})) = f(\underline{x}) + \epsilon \cdot \left(u \cdot f(\underline{x}) + \sum_{v=1}^{n} \phi_v \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_v} \right) \tag{3.16}$$

assim tomamos a imagem ao par sobre a aplicação tangente, isto é tomar o k-jato de (3.16), portanto

$$\tilde{T}_{j_k(f)}(\mathcal{K}^{(k)} j_k(f)) := \left(\langle f \rangle + \mathfrak{m} \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + \mathfrak{m}^{k+1} \right) / \mathfrak{m}^{k+1}$$

A prova no caso do grupo algébrico $\mathcal{R}^{(k)}$ é análoga ao caso de grupo algébrico contato $\mathcal{K}^{(k)}$.

□

Então, definimos os espaços tangentes da seguinte maneira:

Definição 3.3.12. *Dado $f \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, os submódulos*

$$\tilde{T}_f(\mathcal{R}f) := \mathfrak{m} \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

$$\tilde{T}_f(\mathcal{K}f) := \langle f \rangle + \mathfrak{m} \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

são chamadas as imagens tangentes de f na órbita de f sobre a ação de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{K}$, respectivamente.

Proposição 3.3.13. *([GrPha17], 7) Com as mesmas notações de 3.3.11, dado $A \in \mathbb{K}[[\underline{x}]]$, tem-se*

$$dimG^{(k)}A = dimG^{(k)} - dimG_A^{(k)},$$

onde $G_A^{(k)}$ denota o estabilizador de A em $G^{(k)}$.

Exemplo 15. *Os exemplos a seguir dão casos onde a imagem tangente está estritamente contida no espaço tangente. Isto é que a aplicação tangente*

$$T_e G^{(k)} \to T_{j_k(f)}(G^{(k)} j_k(f)).$$

não é sobrejetora e por tanto a aplicação órbita $o^{(k)} : G^{(k)} \to G^{(k)} j_k(f)$ não é separável, pela Definição 3.3.6.

1. *Seja $char(\mathbb{K}) = p > 0$ e $k \geq p$. Seja o grupo pela direita $\mathcal{R}$ agindo em $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ e seja $f = x_1^p + \cdots + x_n^p$. Como $j(f) = \langle p x_1^{p-1}, \ldots p x_n^{p-1} \rangle = 0$, portanto a imagem tangente*
$$\tilde{T}_{j_k(f)}(\mathcal{R}^{(k)} j_k(f)) = \mathfrak{m} \cdot j(f) = 0.$$
Notemos que $j_k(f) = x_1^p + \cdots + x_n^p$ e agora consideremos $\phi \in \mathcal{R}, \phi = (ax_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $a \neq 0$ e $a^p - 1 \neq 0$, temos que $\phi \cdot f = j_k(f \circ \phi) = a^p x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p$. Assim $j_k(f \circ \phi) \neq j_k(f)$, logo $\{f\}$ não é um conjunto invariante pela acão dada por $\mathcal{R}$, logo, como o estabilizador de $j_k(f)$: $\mathcal{R}^{(k)}_{j_k(f)}$, é uma subvariedade fechada estritamente contida de $\mathcal{R}^{(k)}$, pela Proposição 3.3.13 tem-se $dim_{j_k(f)} \mathcal{R}^k j_k(f) \geq 1$ e como a órbita $\mathcal{R}^{(k)} j_k(f)$ é suave ([SaRi05], 121) o espaço tangente da órbita tem a mesma dimensão, então $dim_{\mathbb{K}} T_{j_k(f)}(\mathcal{R}^{(k)} j_k(f)) \geq 1$.

   Notemos que f não é finitamente determinada, pois $f \sim_r (f \circ \phi)$ mas
$$j_k(f \circ \phi) \neq j_k(f).$$

2. *Consideremos $char(\mathbb{K}) = 2$, seja $f = x^2 + y^3$, $ord(f) = 2$, assim $j(f) = \langle 2x, 3y^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$ e como $\mathfrak{m} = \langle x, y \rangle, \mathfrak{m}^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$. Temos*
$$\mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle = \langle x, y \rangle \cdot \langle x^2 + y^3 \rangle = \langle x^3 + xy^3, yx^2 + y^4 \rangle$$
e
$$\mathfrak{m}^2 \cdot j(f) = \langle x^2, xy, y^2 \rangle \cdot \langle y^2 \rangle = \langle x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle$$
então:
$$\mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f) = \langle x^3 + xy^3, yx^2 + y^4, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle = \langle x^3, yx^2, y^4, xy^3 \rangle,$$

notemos que $\mathfrak{m}^3 \nsubseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ *pois* $xy^2 \notin \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$*, assim*

$$\mathfrak{m}^{2+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f),$$

(a) *logo pelo Teorema 3.2.2,* f *é* $(2{\cdot}2{-}ord(f){+}2)$*-determinada (i.e 4-determinada).*

(b) *A imagem tangente* $\tilde{T}_f(\mathcal{K}f) = \langle f \rangle + \mathfrak{m} \cdot j(f) = \langle x^2 + y^3 \rangle + \langle x, y \rangle \cdot \langle y^2 \rangle = \langle x^2, xy^2, y^3 \rangle$

(c)
$$\begin{aligned}\tilde{T}_{j_4(f)}(\mathcal{K}^{(4)}j_4(f)) &:= \frac{\langle f \rangle + \mathfrak{m} \cdot j(f) + \mathfrak{m}^{4+1}}{\mathfrak{m}^{4+1}} = \frac{\langle x^2, xy^2, y^3 \rangle + \mathfrak{m}^5}{\mathfrak{m}^5} \\ &= \frac{\langle x^2, xy^2, y^3 \rangle}{\mathfrak{m}^5 \cap \langle x^2, xy^2, y^3 \rangle} = \frac{\langle x^2 + y^3, xy^2, y^3 \rangle}{\langle x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 \rangle} \\ &= \langle x^2, x^3, xy^2, y^3, x^2y, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle.\end{aligned}$$

Portanto a dimensão de $\tilde{T}_{j_4(f)}(\mathcal{K}^{(4)}j_4(f))$ *em* $\mathbb{K}[[\underline{x}]]^{(4)} = \mathbb{K}[[\underline{x}]]/\mathfrak{m}^5$ *tem dimensão 10. Pode-se verificar com os algoritmos dados em [GrPha17].*

(d) *([GrPha18], 766) Usando o SINGULAR, o grupo* $\mathcal{K}^{(4)}$ *tem dimensão 43, o estabilizador de* $j_4(f)$ *tem dimensão 32 em* $Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])^{(4)}$*. Pela Proposição 3.3.13, a órbita* $\mathcal{K}^{(4)}j_4(f)$ *tem dimensão 11 em* $Aut(\mathbb{K}[[\underline{x}]])^{(4)}$*. E como a imagem tangente tem dimensão 10 e o espaço tangente tem dimensão 11, então*

$$\tilde{T}_f(\mathcal{K}f) \neq T_f(\mathcal{K}f)$$

daqui que a órbita em f *não é separável.*

Observação 3.3.14. *Se consideramos* $char(\mathbb{K}) = 3$ *então*

$$\tilde{T}_f(\mathcal{K}f) = T_f(\mathcal{K}f),$$

assim a aplicação órbita é separável.

Para poder provar o Teorema 3.3.1 vamos enunciar definições, resultados previos como proposições e lemas.

Consideramos $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica arbitrária. A seguir vamos definir o conjunto de matrizes com entradas $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$, definimos neste conjunto uma relação de equivalência e definimos quando um elemento é finitamente determinada.

Definição 3.3.15. *1. Denotamos como antes* $R := \mathbb{K}[[\underline{x}]] = \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ *com ideal maximal* $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. *Denota-se* $M_{l,s} := Mat(l, s, R)$ *o conjunto de todas as matrizes* $l \times s$ *(l linhas, s colunas) com entradas em* R.

2. *Duas matrizes* $A, B \in M_{l,s}$ *são chamadas de equivalentes direita-esquerda, denotado por* $A \sim_G B$, *se estão na mesma órbita do grupo direita-esquerda*

$$G := (GL(l, R) \times GL(s, R)^{op}) \rtimes \mathcal{R},$$

onde G^{op} *é o grupo oposto de um grupo* G, *isto consiste do mesmo conjunto com a operação binaria invertida. Denotamos* $\mathcal{R} := Aut(R)$. *O grupo* G *age em* $M_{m,n}$ *por*

$$(U, V, \phi, A) \mapsto U \cdot \phi(A) \cdot V,$$

com $U \in GL(l, R), V \in GL(s, R), \phi \in Aut(R)$.

3. *Se* $A = [a_{ij}(\underline{x})]$ *então* $\phi(A) = [a_{ij}(\phi(\underline{x}))]$ *com* $\phi(\underline{x}) = (\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$.

4. *Uma matriz* $A \in M_{m,n}$ *é chamada* G k*-determinada se para cada matriz* $B \in M_{m,n}$ *com* $B - A \in \mathfrak{m}^{k+1} M_{m,n}$ *tem-se* $B \sim_G A$.

5. A *é chamada de* G *finitamente determinada se existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que esta seja* G k*-determinada.*

Definição 3.3.16. *1. Seja* $F \in Mat(l, s, P)$, *onde* P *um anel comutativo Noetheriano, fixamos* $t \in \mathbb{N}$, *denotamos* $I_t(F)$ *o ideal de* P *gerado pelos menores* $t \times t$ *de* F.

2. *Seja* A *um anel e* J *um ideal de* A. *Definimos o anulador de* J *ao conjunto* $Ann_A(J) := \{x \in A : xy = 0, \forall y \in J\}$.

3. *Sejam* M, N, P *três* A*-módulos. Uma função* $f : M \times N \to P$ *é chamada* A*-bilinear se para cada* $x \in M$ *fixado, a função* $N \to P$ *com* $y \mapsto f(x, y)$ *é* A*-linear (homomorfismo de* A*-módulos), e para cada* $y \in N$ *fixado, a função* $M \to P$ *com* $x \to f(x, y)$ *é* A*-linear.*

Proposição 3.3.17. *Sejam* M, N *dois módulos. Então existe um par* (T, g) *consistindo de um* A*-módulo* T *e uma função* A*-bilinear* $g : M \times N \to T$ *com as seguintes propriedades:*

(a) Dado qualquer A-módulo P e qualquer função A-bilinear $f : M \times N \to P$, existe uma única função A-linear: $\overline{f} : T \to P$ tal que $f = \overline{f} \circ g$.

(b) Se $(\overline{T}, \overline{g})$ é outro par satisfazendo as propriedades acima, então existe um único A-isomorfismo $\varphi : T \to \overline{T}$ tal que $\overline{g} = \varphi \circ g$.

4. O A-módulo T da Proposição 3.3.17 é chamado de produto tensorial de M e N e será denotado por $M \otimes_A N$.

5. Para uma matriz

$$A = [f_1, \ldots, f_l]^t := \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{bmatrix} \in Mat(l, 1, R) \tag{3.17}$$

denotamos por

$$Jac(A) := [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in Mat(l, n, R) \tag{3.18}$$

a matriz jacobiana do vetor $(f_1, \ldots, f_l) \in R^l$.

Definição 3.3.18. 1. A imagem tangente estendida $\tilde{T}^e_A(GA)$ é um submódulo de $\mathbb{K}[[\underline{x}]]^l = Mat(l, 1, R)$, definido assim:

$$\tilde{T}^e_A(GA) = IR^l + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \cdot R^n,$$

onde

$$I = \langle f_1, \ldots, f_l \rangle$$

é o ideal em $\mathbb{K}[[\underline{x}]]$ gerado pelas entradas de A.

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \cdot R^n$$

é o $R-$submódulo de R^l gerado pelas colunas de $Jac(A)$.

2. *Uma matriz apresentação de* $M_{l,1}/\tilde{T}^e_A$ *é a seguinte matriz de dois blocos de* $l\times(l^2+n)$:

$$\Theta_{(G,A)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \vec{a} & \vec{0} & \dots & \vec{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \frac{\partial f_l}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} & \vec{0} & \vec{0} & \dots & \vec{a} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

onde $\vec{a} := (a_1, \dots, a_l)$ *e* $\vec{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^l$.

Enunciamos um resultado que exerce um papel fundamental na conclusão da Proposição 3.3.22 e na conclusão do Teorema 3.3.26 é o caso particular do lema a seguir:

Lema 3.3.19. *([GrPha19], 7) Seja* $A = [f_1, \dots, f_l]^t \in Mat(l, 1, \mathfrak{m})$ *tal que* $l \leq n$ *(número de linhas menor ao número de variáveis). Seja* $\Theta_{(G,A)}$ *a matriz apresentação de* $M_{m1}/\tilde{T}^e_A(GA)$*, onde* $\tilde{T}^e_A(GA)$ *é a imagem tangente estendida em* A *na órbita* GA*. Então*

$$\sqrt{I_1(A) + I_l(Jac(A))} = \sqrt{I_l(\Theta_{(G,A)})} = \sqrt{Ann_R(M_{l,1}/\tilde{T}^e_A(GA)}$$

Em particular temos,

$$dim_{\mathbb{K}}(M_{l,1}/\tilde{T}^e_A(GA)) < \infty \iff dim_{\mathbb{K}}(R/(I_1(A) + I_l(Jac(A)))) < \infty$$

Observação 3.3.20. *Se* $l = 1$*, o Lema 3.3.19 verifica-se de maneira rápida.*

A seguinte proposição apresenta condições equivalentes, necessárias para que $A \in \mathfrak{m} \cdot M_{l,s}$ seja G-finitamente determinada, em particular o item *3.* Não apresentamos a prova pela extensão desta. Esta proposição é substancial na conclusão da prova da Proposição 3.3.22.

Proposição 3.3.21. *([GrPha18], 771) Seja* $A \in \mathfrak{m} \cdot M_{l,s}$*. Então* A *é* G*-finitamente determinada se um dos seguintes enunciados equivalentes for válido:*

1. $\mathfrak{m}^{q+1} \cdot M_{l,s} \subset \tilde{T}_A(GA)$ *para algum* $q \in \mathbb{N}$.

2. $dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m} \cdot M_{l,s}/\tilde{T}_A(GA)) := d < \infty$.

3. $dim_{\mathbb{K}}(M_{l,s}/\tilde{T}^e_A(GA)) := d_e < \infty$.

4. $\mathfrak{m}^h \cdot M_{l,s} \subset \tilde{T}^e_A(GA)$ *para algum* $h \in \mathbb{N}$.

A proposição a seguir, que será usada na Proposição 3.3.22, nos permite criar uma matriz $A \in Mat(l, 1, \mathbb{K}[\underline{x}])$ tal que esta seja finitamente determinada.

Proposição 3.3.22. *([GrPha19], 8) Seja $R = \mathbb{K}[[\underline{x}]]$ e $M_{l,1} = Mat(l, 1, R)$ com $l \leq n$. Seja $char(\mathbb{K}) = p \geq 0$ e seja $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ e se $p > 0$ consideremos $p \nmid N$. Assumamos que existe $c_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, l$ e $j = 1, \ldots, n$ tal que*

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \ldots & c_{ln} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{l \times n}$$

não tem nenhum menor máximo $m_1, \ldots, m_r$ (determinante de submatrizes de ordem $l \times l$) igual a zero (o qual sempre é possível se $\mathbb{K}$ é infinito ou se $\mathbb{K}$ é arbitrário e $l = 1$). Seja

$$f_i := c_{i1}x_1^N + \cdots + c_{in}x_n^N, i = 1, \ldots, l.$$

Então a matriz $A := [f_1, \ldots, f_l]^{\boldsymbol{t}}$ é G-finitamente determinada.

Demonstração. Dada a matriz jacobiana de A:

$$Jac(A) = \begin{bmatrix} Nc_{11}x_1^{N-1} & \ldots & Nc_{1s}x_s^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Nc_{l1}x_1^{N-1} & \ldots & Nc_{ls}x_s^{N-1} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

definimos $J = \langle I_1(A) + I_l(Jac(A)) \rangle$ o ideal de $\mathbb{K}[\underline{x}]$ gerado por $f_1, \ldots, f_l$ e todos os menores $l \times l$ de $Jac(A)$.

Afirmamos que $V(J) = \{0\}$ em $\mathbb{K}^n$. Claramente $\{0\} \subseteq V(J)$. Provaremos a outra inclusão. Sem perda de generalidade, escolhemos um menor de ordem $l \times l$ de $Jac(A)$ como

$$det \begin{bmatrix} Nc_{11}x_1^{N-1} & \ldots & Nc_{1l}x_l^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Nc_{l1}x_1^{N-1} & \ldots & Nc_{ll}x_l^{N-1} \end{bmatrix} = \tag{3.21}$$

$$= (N^l x_1^{N-1} \cdots x_l^{N-1}) \cdot det \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \ldots & c_{ll} \end{bmatrix},$$

logo pela hipótese

$$det \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \dots & c_{ll} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Assim dado $a = (a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, \dots, a_n) \in V(J)$ podemos dizer que pelo menos $n - l + 1$ componentes de a devem ser 0, pois a é zero de todos os produtos $x_{j_1}^{N-1} \cdot x_{j_2}^{N-1} \cdots x_{j_l}^{N-1}$, onde $j_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ para todo $i = 1, \dots, l$ e $j_i \neq j_k$ para todo $i \neq k$ e $l \leq n$. Por tanto sem perda de generalidade assumimos que as últimas $n - k$ componentes de a são zero para algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq l - 1$, pois $n - k \geq n - l + 1$. Assim:

$$f_i(a) = c_{i1}a_1^N + c_{i2}a_2^N + \dots + c_{ik}a_k^N.$$

Consideremos o sistema homogêneo (H) de l equações lineares e k variáveis $y_1, \dots, y_k$

$$(H) : \begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1k}y_k = 0 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2k}y_k = 0 \\ \vdots \\ c_{l1}y_1 + c_{l2}y_2 + \dots + c_{lk}y_k = 0 \end{cases}$$

e como a é também zero de $f_1 \dots f_l$ temos que para cada $j = 1, \dots, k$, $y_j = a_j^N$ é solução de (H). Além, da escolha dos elementos c_{ij}, pela hipótese todos os menores de ordem $l \times l$ não são zeros, portanto existe uma submatriz de ordem $k \times k$ tal que o determinante é não zero. Assim, tem-se que o sistema (H) admite a solução trivial só. Por tanto $a = 0$.

Logo como $V(J) = 0 \Rightarrow dim(\mathbb{K}[\underline{x}]/J) = 0$ e assim

$$dim(\mathbb{K}[[\underline{x}]]/J \cdot \mathbb{K}[[\underline{x}]]) = 0 \Rightarrow dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[[\underline{x}]]/J \cdot \mathbb{K}[[\underline{x}]]) < \infty,$$

([GrLoShu07], 401), segue do Lema 3.3.19

$$dim_{\mathbb{K}}(M_{l,1}/\tilde{T}_A^e(GA)) < \infty$$

e, portanto, pela parte *3.* da Proposição 3.3.21 segue que A é G-finitamente determinada. □

A seguir vamos definir um tipo especial de módulo finitamente gerado para enunciar a semicontinuidade da dimensão (como $\mathbb{K}$-espaço vetorial).

Definição 3.3.23. *Seja $P = \mathbb{K}[t][[\underline{x}]], \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbb{K}$ um corpo arbitrario e M um $P-$módulo finitamente gerado. Para $t_0 \in \mathbb{K} = \mathbb{A}^1$ definimos*

$$M(t_0) := M \otimes_{\mathbb{K}[t]} (\mathbb{K}[t]/\langle t - t_0 \rangle) \cong M/\langle t - t_0 \rangle \cdot M,$$

$\mathfrak{m}_{t_0} := \langle x_1, \ldots, x_n, t - t_0 \rangle \subset P.$

Observação 3.3.24. $M(t_0) \cong M_{\mathfrak{m}_{t_0}}/\langle t - t_0 \rangle \cdot M_{\mathfrak{m}_{t_0}}.$

Proposição 3.3.25. *([GrPha19], 9) Com as notações anteriores, para todo $o \in \mathbb{A}^1$, existe uma vizinhança aberta U de o tal que para todo $t_0 \in U$, temos*

$$dim_{\mathbb{K}} M(t_0) \leq dim_{\mathbb{K}} M(o)$$

Por último enunciamos e mostramos o teorema mais importante desta seção, provando assim, como caso particular o Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.26. *([GrPha19], 10) Seja $A := [f_1, \ldots, f_l]^{\mathbf{t}} \in \mathfrak{m} \cdot M_{m,1}$, $l \geq 1$. Para $1 < l < n$ assumamos que $\mathbb{K}$ é infinito. Então os seguintes enunciados são equivalentes:*

1. *A é G-finitamente determinada.*
2. *$dim_{\mathbb{K}}(M_{m,1}/\tilde{T}^e_A(GA)) := d_e < \infty$*

A condição de $\mathbb{K}$ ser infinito não é necessário para 2. $\Rightarrow$ 1. Além, se a segunda condição é satisfeita então A é $(2d_e - ord(A) + 2)$ - G determinada.

Demonstração. A prova da implicação 2. $\Rightarrow$ 1 é provada em ([GrPha18], 767) quando $char(\mathbb{K}) = p \geq 0$. A implicação 1. $\Rightarrow$ 2. é verdade quando $char(\mathbb{K}) = 0$.

Agora suponhamos que $char(\mathbb{K}) = p > 0$ e assumamos que A é G $k-$determinada. O caso é relevante nesta disertação é supor que $l \leq n$.

Pela determinação finita podemos assumir que $A = [f_1, \ldots, f_l]^{\mathbf{t}}$ é uma matriz de polinômios.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > k$ e $p \nmid N$. Agora consideremos $B = [g_1, \ldots, g_l]^{\mathbf{t}} \in Mat(l, 1, \mathfrak{m})$, onde para $i = 1, \ldots, l$,

$$g_i = c_{i1}x_1^N + c_{i2}x_2^N + \cdots + c_{in}x_n^N$$

e $c_{ij} \in \mathbb{K}$ como na construção na prova da Proposição 3.3.22. Agora denotemos a matriz

$$B_t = B + tA = [g_1 + tf_1 \; \dots \; g_l + tf_l]^{\mathbf{t}} \in Mat(l, 1, \mathbb{K}[t][\underline{x}]).$$

$$Jac(B_t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(g_1 + tf_1)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial(g_1 + tf_1)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial(g_l + tf_l)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial(g_l + tf_l)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Definamos $Q_t = I_1(B_t) + I_l(Jac(B_t))$ como o ideal gerado pelas entradas da matriz B_t e $I_m([\dfrac{\partial B_t}{\partial x_j}])$. Consideremos

$$M_t = \frac{\mathbb{K}[t][[\underline{x}]]}{\langle g_1 + tf_1, \dots, g_l + tf_l \rangle + I_l(Jac(B_t))},$$

o $\mathbb{K}[t][[\underline{x}]]-$módulo finitamente gerado.

Então pela Proposição 3.3.25 existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ de 0 tal que para todo $t_0 \in U$,

$$dim_{\mathbb{K}} M_t(t_0) \leq dim_{\mathbb{K}} M_t(0),$$

logo pelo teorema de isomorfismo de módulos temos:

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[[\underline{x}]]/Q_{t_0}) \leq dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[[\underline{x}]]/Q_0)$$

e pela Proposição 3.3.25 $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[[\underline{x}]]/Q_0) < \infty$.

Logo pelo Lema 3.3.19 temos que $dim_{\mathbb{K}}(M_{l,1}/\tilde{T}^e_{B_{t_0}}(GB_{t_0})) < \infty$. Para $t_0 \in U, t_0 \neq 0$. Desde que $B_{t_0} \sim_G t_0 A \sim_G A$ obtemos

$$dim_{\mathbb{K}}(M_{l,1}/\tilde{T}^e_A(GA)) = dim_{\mathbb{K}}(M_{l,1}/\tilde{T}^e_{B_{t_0}}(GB_{t_0})) < \infty.$$

$\square$

Por último considerando para o grupo G, quando $l = s = 0$ (respectivamente $l = 1, s = 0$) na Definição 3.3.15, agindo em $Mat(l, 1, R)$ e aplicando o Teorema 3.3.26 concluímos com o resultado principal de esta subseção, o Teorema 3.3.1.

Referências Bibliográficas

[AtiMc69] Michael Atiyah; I. G. McDonald. *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, (1969).

[Bo09] Yousra Boubakri. *Hypersurface singularities in positive characteristic*. Ph.D. thesis, Technischen Universität Kaiserslautern, (2009). https://kluedo.ub.uni-kl.de/frontdoor/deliver/index/docId/2212/file/Mainfile.pdf

[Har97] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Springer, (1997).

[GrKö90] Gert-Martin Greuel; H. Kröning. *Simple Singularities in Positive Characteristic*, Mathematische Zeitschrift. **203**, 339-354 (1990).

[GrLoShu07] Gert-Martin Greuel; C. Lossen; E. Shustin. *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007).

[GrYo12] Gert-Martin Greuel; Yousra Boubakri. *Invariants of hypersurface singularities in positive characteristic*, Revista Matemática Complutense. **25**, 61-85 (2012).

[GrPf08] Gert-Martin Greuel; Gerhard Pfister. *A Singular Introduction to Commutative Algebra, Second Extended Edition*, Springer Berlin Heidelberg New York, (2008).

[GrPha18] Gert-Martin Greuel; Thuy Huong Pham. *On finite determinacy for matrices of power series*, Mathematische Zeitschrift. **290**, 759-774 (2018).

[GrPha19] Gert-Martin Greuel; Thuy Huong Pham. *Finite determinacy of matrices and ideals*, Journal of Algebra. **530**, 195-214 (2019).

[GrPha17] Gert-Martin Greuel; Thuy Huong Pham. *Algorithms for group actions in arbitrary characteristic and a problem in singularity theory*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. **31**, 87–100 (2019). https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00200-019-00395-x.pdf

[Gre75] Gert-Martin Greuel. *Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten.* Math. Ann. **214**, 234–266 (1975).

[Mil05] J. S. Milne. *Algebraic Geometry*, Taiaroa Publishing Erehwon, (2005). https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AG500.pdf

[SaRi05] Walter Ferrer; Alvaro Rittatore. *Actions and invariants of algebraic groups, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), vol 269*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, (2005).

[ZS60] Oscar Zariski; Pierre Samuel. *Commutative Algebra, Vol. 2*, D. Van Nostrand Company, (1960).

[ZSC58] Oscar Zariski; Pierre Samuel; I.S. Cohen. *Commutative Algebra, Vol. 1*, D. Van Nostrand Company, (1958).