**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jessica Cristina Rossinati Rodrigues da Costa

# Involuções fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^{2n}$ e variedades compatíveis com o ponto com respeito à involuções

São Carlos
2020

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jessica Cristina Rossinati Rodrigues da Costa

# Involuções fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^{2n}$ e variedades compatíveis com o ponto com respeito à involuções

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

São Carlos
2020

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jessica Cristina Rossinati Rodrigues da Costa

# Involuções fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^{2n}$ e variedades compatíveis com o ponto com respeito à involuções

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação, para obtenção do título de doutor em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, no dia 25 de novembro de 2020.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher - UFSCar.

**Comissão Julgadora:**
Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
UFSCar
Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino
UFSCar
Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto
UFSCar
Profa. Dra. Denise de Mattos
USP
Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira
USP

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

## Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Jéssica Cristina Rossinati Rodrigues da Costa, realizada em 25/11/2020.

### Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher (UFSCar)

Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino (UFSCar)

Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto (UFSCar)

Profa. Dra. Denise de Mattos (USP)

Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira (USP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Aos meus pais,
Romildo e Zilda,
dedico.

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, pela vida e pela força espiritual durante esta caminhada.

Ao meu orientador Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher, pela orientação, pelo conhecimento transmitido, apoio e paciência que teve comigo durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Romildo e Zilda, pelo amor incondicional, incentivos e conselhos nos momentos difíceis de desânimo. Às minhas avós, Deolinda e Irotides, por todas as orações e carinhos. À tia Regina, por todo o suporte e amor. A todos os meus familiares que sempre torceram e rezaram para que tudo desse certo.

À Rafaela, que se tornou uma irmãzinha pra mim, obrigada por esses anos que moramos juntas, por todo o apoio nas minhas lamentações e por ter me aguentado, que não é fácil. Nunca me esquecerei dos nossos momentos de gordice, das experiências culinárias, e das sessões de fotos. À Sueli, mãe da Rafa, por todas as orações e carinho.

Ao Renato Monteiro, pela parceria, meu irmão de estudos, por sempre me ajudar nas dúvidas que surgiam, nas correções e sugestões que foram muito valiosas nesse processo. À Amanda Ferreira de Lima, por toda a ajuda, conselhos, e principalmente pelas caronas.

Aos guris e às gurias, Marcão, Rodrigo, Ronaldo, Givan, Lauren e Fernanda, por fazerem meus dias mais alegres e divertidos, eu amei ter conhecido cada um de vocês, os levarei pra sempre em meu coração. A todos os alunos da graduação e da pós-graduação da UFSCar que me proporcionaram um ambiente de trabalho mais prazeroso.

Aos meus amigos Ronan e Yagor, que fizeram graduação e mestrado ao meu lado, por manterem contato, amizade e apoio durante esses anos, e principalmente pela troca de conhecimentos.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar, pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas do doutorado.

À CAPES e à CNPq pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse realizar este trabalho.

*A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo.*

(Nelson Mandela)

# Resumo

Nesse trabalho, visamos dois objetivos: o primeiro mora no contexto da classificação, a menos de cobordismo equivariante, dos pares $(M,T)$, onde $M$ é uma variedade fechada e suave e $T : M \to M$ é uma involução suave definida em $M$, com um conjunto de pontos fixos prefixado $F$. Trata-se de um problema bem estabelecido na literatura, e por razões que serão explicadas na introdução deste trabalho um importante caso é quando $F$ é uma união de espaços projetivos reais. Concernente a este caso, para $F = \mathbb{R}P^n$, tal classificação foi determinada por P. E. Conner e E. E. Floyd em [4] quando $n$ é impar, e por R. E. Stong em [25] quando $n$ é par. Em [23], D.C. Royster determinou tal classificação quando $F$ é a união disjunta de dois espaços projetivos reais, $F = \mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$, mas deixou em aberto os casos em que $m$ e $n$ são pares e maiores que zero. P. L. Q. Pergher e A. Ramos trabalharam em tais casos em aberto em [20], resolvendo os casos particulares em que $m$ é uma potência de 2 e $n > 0$ é um par qualquer. Desta forma, levando em conta os trabalhos de Royster, P. Pergher e A. Ramos, o primeiro caso particular em aberto era $F = \mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^{2n}$. Em nosso trabalho, obtemos a classificação para tal caso; mais ainda, estendemos a mesma para pares $(M, \Phi)$, onde $\Phi$ é uma ação do grupo $(\mathbb{Z}_2)^k$ em $M$, sendo que $(\mathbb{Z}_2)^k$ é entendido como o grupo gerado por $k$ involuções comutantes $T_1$, $T_2$,....,$T_k$ definidas em $M$.

Nosso segundo objetivo foi trabalhar com uma definição, por nós criada, relativa a uma determinada propriedade associada a variedades fechadas, suaves e conexas. Seja $F$ uma tal variedade. Dizemos que $F$ satisfaz a *propriedade* $CP$ (*compatível com o ponto*) se existe uma variedade fechada e suave $M$ e uma involução suave $T : M \to M$ tal que o conjunto de pontos fixos de $T$ é $F \cup \{ponto\}$. A inspiração para tal definição foi o fato de que, em [4], Conner e Floyd provaram que, entre as esferas $S^n$, as únicas que satisfaziam tal propriedade eram $S^1$, $S^2$, $S^4$ e $S^8$, e posteriormente, em [19], P. Pergher determinou quais produtos de esferas satisfaziam tal propriedade. Inicialmente determinamos alguns resultados simples de validade e não validade de $CP$, entre os quais destacamos o seguinte intrigante resultado: toda variedade de dimensão 1, 2, 4 ou 8 satisfaz $CP$. No entanto, a parte mais intrincada de nosso estudo foram alguns resultados de não validade da propriedade $CP$ para as variedades de Dold $P(m, n)$.

# Abstract


In this work, we have two objectives: the first lives in the context of the classification, up to equivariant cobordism, of the pairs $(M, T)$, where $M$ is a closed and smooth manifold and $T : M \to M$ is a smooth involution defined in $M$, with a prefixed fixed point set $F$. This is a well-established problem in the literature, and for reasons that will be explained in the introduction of this work, an important case is when $F$ is an union of real projective spaces. Concerning this case, for $F = \mathbb{R}P^n$, such a classification was determined by P. E. Conner and E. E. Floyd in [4] for $n$ odd, and by R. E. Stong in [25] for $n$ even. In [23], D. C. Royster determined such a classification when $F$ is the disjoint union of two real projective spaces, $F = \mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$, but he left open the cases where $m$ and $n$ are even and greater than zero. P. L. Q. Pergher and A. Ramos worked on such open cases in [20], solving the particular cases in which $m$ is a power of 2 and $n > 0$ is any even natural number. Thus, taking into account the works of Royster, P. Pergher and A. Ramos, the first open case was $F = \mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^{2n}$. In our work, we obtain the classification for this open case; furthermore, we extend it to pairs $(M, \Phi)$, where $\Phi$ is an smooth action of the group $(\mathbb{Z}_2)^k$ in $M$, where $(\mathbb{Z}_2)^k$ is understood here as the group generated by $k$ commuting involutions $T_1$, $T_2$,....,$T_k$ defined in $M$.

Our second objective is to deal with a definition, created by us, related to a certain property associated with a closed, connected and smooth manifold. Let $F$ be such a manifold. We say that $F$ satisfies the *property* $CP$ (*compatible with the point*) if there exists a closed and smooth manifold $M$ and a smooth involution $T : M \to M$ such that the fixed point set of $T$ is $F \cup \{point\}$. The inspiration for this definition was the fact that, in [4] , Conner and Floyd proved that, among the spheres $S^n$, the only ones that satisfy such property were $S^1$, $S^2$, $S^4$ and $S^8$, and later, in [19], P. Pergher determined all products of spheres that satisfy this property. Firstly, we determine some simple results of validity and non-validity of $CP$, among which we highlight the following intriguing result: every manifold of dimension 1, 2, 4 or 8 satisfies $CP$. However, the most intricate part of our work was some results of non validity of the property $CP$ for Dold manifolds $P(m, n)$.

# Sumário

# Introdução

Suponha um par $(M, T)$, onde $M$ é uma variedade fechada e suave, e $T : M \to M$ é uma involução suave definida em $M$. O conjunto $F = Fix(T) = \{x \in M; T(x) = x\}$ é chamado conjunto de pontos fixos da involução $T$ em $M$. O conjunto de pontos fixos é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de $M$ (ver [13]). Neste contexto, para um $F$ prefixado, uma questão natural que surge é a classificação, a menos de cobordismo equivariante, dos pares $(M, T)$ para o qual o conjunto de pontos fixos é $F$. Este é um problema bem estabelecido na literatura, e foi iniciado em 1964 com os resultados de Pierre Conner e Edwin Floyd de [5], com $F = S^n \cup \{ponto\}$, onde $S^n$ denota a esfera n-dimensional, $F= \mathbb{R}P^n$ e n ímpar, onde $\mathbb{R}P^n$ denota o espaço projetivo real $n$-dimensional, e $F =$ um conjunto finito de pontos isolados. Tais resultados foram obtidos com o uso da Teoria de Cobordismo Equivariante, introduzida em [5], que estendeu a famosa Teoria de Cobordismo de René Thom de 1954 (o qual proporcionou ao mesmo a Medalha Fields em 1958).

Este tipo de problema, para ser plausível de ser atacado, demanda o conhecimento prévio da K-teoria real de $F$ ou, mais especificamente, o conhecimento de todas as classes de Stiefel-Whitney (ou classes características) de fibrados vetoriais sobre $F$, como é o caso dos espaços projetivos reais, $\mathbb{R}P^n$. De fato, se $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ é o elemento não nulo, então a $K$-teoria real de $\mathbb{R}P^n$ pode ser assim descrita: se $\eta$ é um fibrado vetorial arbitrário sobre $\mathbb{R}P^n$, existe um natural $p \geq 0$ de tal sorte que a classe de Stiefel-Whitney de $\eta$ é dada por $W(\eta) = (1 + \alpha)^p$. Portanto o caso $F =$ uma união disjunta e finita de espaços projetivos tem, na literatura, uma história intensa e ainda longe de ser encerrada, iniciada, como acima mencionado, com o caso $F = \mathbb{R}P^n$, onde $n$ é ímpar, de [5]. Neste caso, P. Conner e E. Floyd provaram que $(M, T)$ borda equivariantemente.

Posteriormente, em [25], Robert E. Stong solucionou o caso $F = \mathbb{R}P^n$ com $n$ par, mostrando neste caso que $(M, T)$ é equivariantemente cobordante à involução $(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n, twist)$, onde $twist$ leva $(x, y)$ em $(y, x)$. O caso em que $F$ possui duas componentes de espaços projetivos foi iniciado com o trabalho de D. C. Royster [23], onde uma classificação parcial foi obtida para o caso $F = \mathbb{R}P^n \cup \mathbb{R}P^m$, deixando em aberto apenas os casos nos quais $m$ e $n$ são pares e maiores que zero (isto é, D. C. Royster resolveu também o caso $F = \mathbb{R}P^0 \cup \mathbb{R}P^n = \{ponto\} \cup \mathbb{R}P^n$ para todo $n \geq 1$). Entre seus resultados, D. C. Royster provou que, se $n$ e $m$ são ímpares, então $(M, T)$ borda equivariantemente. Continuando com o caso de duas componentes, em [20] e [17] Pedro L. Q. Pergher, Adriana Ramos e Rogério de Oliveira resolveram o caso particular do problema deixado em aberto por D. C. Royster, dado por $F = \mathbb{R}P^n \cup \mathbb{R}P^m$, onde $n = 2^s$, $m$ é par e $m \geq 2^{s+1}$, o qual inclui o caso $F = \mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{R}P^m$, $m \geq 4$ par, o qual tinha sido provado em [17]. Ainda, se o número de componentes de $F$ é maior que 2, o único caso conhecido é o Bruce Torrence - Dou Huo teorema de [7]: se $F$ é uma união arbitrária de espaços projetivos reais de dimensão ímpar, então $(M, T)$ borda equivariantemente.

Em resumo, nós temos o caso $F$ conexo completamente resolvido e, com exceção dos casos $(m,n) = (par, par)$, $m,n > 0$ e $m \neq 2^s$, $n \neq 2^s$, o caso onde $F$ possui duas componentes resolvido. Nesta tese, o nosso trabalho se concentrara em dois problemas. Assim, a primeira contribuição será situada em resolver o caso em que $F = \mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, onde $n \geq 10$ par, considerado o primeiro caso em aberto entre os atrás citados. Utilizamos a abordagem empregada por Pedro L. Q. Pergher, Adriana Ramos e Rogério de Oliveira, em [17] que nos proporcionou técnicas para atacar o problema; no entanto, em adição, algumas técnicas originais por nós criadas foram necessárias para liquidar o problema, isto será desenvolvido no Capítulo 3.

A segunda contribuição corresponde a uma certa propriedade, por nós criada, associada a variedades fechadas suaves. Para justificar a mesma, a seguir descrevemos um breve histórico que inspirou a mesma. Em 1958, J. Milnor provou o seguinte resultado: seja $\eta \to S^n$ um fibrado vetorial sobre a esfera n-dimensional com $w_n(\eta) \neq 0$, onde $w_n(\eta)$ denota a $n$-ésima classe de Stiefel-Whitney. Então $n = 1, 2, 4$ ou 8 e em cada caso existe um exemplo de tal fibrado, com espaço base sendo espaços projetivos apropriados (ver [11] ). Em 1964, P. Conner e E. Floyd misturaram suas técnicas com o resultado acima de Milnor e provaram o seguinte resultado: seja $M$ uma variedade fechada suave $m$-dimensional e $T : M \to M$ uma involução suave satisfazendo o fato de que seu conjunto de pontos fixos $F$ é a união disjunta de uma $n$-esfera $S^n$ e um ponto, $F = S^n \cup \{ponto\}$. Então $n = 1, 2, 4$ ou 8 e $m = 2n$ e em cada caso existe um exemplo com o fibrado normal de $S^n$ em $M$ sendo o fibrado de Milnor apropriado (ver [4]). Posteriormente, P. Pergher estendeu este resultado para um produto de esferas do seguinte modo: escrevendo $S^N = S^{n_1} \times S^{n_2} \times ... \times S^{n_p}$ e $N = (n_1, n_2, ..., n_p)$, suponha que $T : M \to M$ é uma involução fixando $F = S^N \cup \{ponto\}$. Então $dim(M) = 2dim(S^N)$, $n_1 + n_2 + ... + n_p = 2^s$ para algum $s \geq 0$ e, se $s \geq 3$, $N$ é um refinamento de $(8, ..., 8)$ ($2^{s-3}$ copias) (por exemplo, $N = (3, 5, 1, 7, 2, 3, 3, 2, 6)$). Existem exemplos realizando cada uma das possibilidades descritas (ver [18]).

Estes resultados nos inspiraram a introduzir a seguinte propriedade: seja $F$ uma variedade fechada, suave e conexa. Dizemos que $F$ satisfaz a propriedade $CP$ (*compatível com o ponto*) se existe uma variedade fechada e suave $M$ e uma involução suave $T : M \to M$ tal que o conjunto de pontos fixos é $F \cup \{ponto\}$. Alguns exemplos de variedades que satisfazem a propriedade $CP$: $S^1$, $S^2$, $S^4$, $S^8$, o produto de esferas descrito acima, todos os espaços projetivos reais $\mathbb{R}P^n$ (basta tomarmos a involução $T : \mathbb{R}P^{n+1} \to \mathbb{R}P^{n+1}$ dada por $T[x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1}] = [-x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1}]$) e de maneira análoga podemos mostrar que os espaços projetivos complexos e quaterniônicos, $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{K}P^n$, também satisfazem a propriedade $CP$.

Além disso, relacionado ao resultado de Conner e Floyd citado anteriormente, provamos o seguinte intrigante resultado: todas as variedades fechadas, suaves e conexas de dimensão $1, 2, 4$ ou 8 satisfazem $CP$. Os principais resultados que obtivemos são relacionados ao estudo da propriedade $CP$ para variedades de Dold. As variedades de Dold $P(m,n)$ foram introduzidas por A. Dold em [6], com o propósito de encontrar geradores ímpar-dimensionais para o anel de cobordismo não orientado. $P(m,n)$ é o espaço das órbitas da involução livre $-1\times$ (conjugação) agindo em $S^m \times \mathbb{C}P^n$; ou seja, $P(m,n)$ é uma variedade fechada suave $(m+2n)$-dimensional. O anel de cohomologia de $P(m,n)$ é dado por $H^*(P(m,n)) = Z_2[c,d]/(c^{m+1} = 0 \text{ e } d^{n+1} = 0)$, onde $c \in H^1(P(m,n)$ e $d \in H^2(P(m,n)$. As ferramentas utilizadas foram a Teoria de Conner-Floyd, um resultado relativamente recente de Stong a respeito da K-teoria real de $P(m,n)$ em [26] e um extensivo trabalho de cálculos de números característicos. Em termos técnicos, a novidade é a introdução de uma nova classe característica, $\widetilde{W}$, associada a fibrados linha sobre variedades fechadas e suaves, esse material será desenvolvido no Capítulo 5.

Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados e definições da teoria de cobordismo equivariante que serão necessários nos próximos capítulos; tais resultados podem ser encontrados em [3] e [4].

Assumiremos que o leitor possua noções de topologia diferencial, homologia, cohomologia, teoria de fibrados e classes de *Stiefel-Whitney*.

Usaremos $H_n(X)$ e $H^n(X)$ para denotar os $n$-ésimos módulos de homologia e cohomologia, respectivamente, de um espaço topológico $X$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

As variedades, aplicações entre variedades e ações sobre variedades serão consideradas como sendo diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^\infty$. Duas variedades difeomorfas serão consideradas como iguais neste trabalho.

## 1.1 Cobordismo de Variedades

Dada uma variedade $m$-dimensional $W^m$ compacta com bordo, denotamos por $\partial W^m$ o bordo de $W^m$, que é uma variedade $(m-1)$-dimensional *fechada*, isto é, compacta e sem bordo.

**Definição 1.1.1** *Uma variedade fechada $n$-dimensional $M^n$* borda *se existe uma variedade $(n+1)$-dimensional $W^{n+1}$ compacta com bordo tal que $\partial W^{n+1} = M^n$. Dizemos que duas variedades fechadas $M^n$ e $N^n$ são* cobordantes *(ou* bordantes*) se a união disjunta $M^n \cup N^n$ borda.*

**Lema 1.1.1** *A relação de cobordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das variedades fechadas $n$-dimensionais.*

Denotaremos por $[M^n]$ a classe de equivalência a qual $M^n$ pertence, denominada *classe de cobordismo de $M^n$* e por $\mathcal{N}_n$ o conjunto das classes de cobordismo das variedades fechadas $n$-dimensionais.

Uma estrutura de grupo abeliano pode ser colocada em $\mathcal{N}_n$, através da operação de união disjunta, dada por $[M^n] + [N^n] = [M^n \cup N^n]$. Com esta operação $\mathcal{N}_n$ tem uma estrutura de $\mathbb{Z}_2$-módulo (ou seja, um grupo abeliano, no qual todo elemento possui ordem 2). O elemento neutro é a classe de cobordismo $[M^n] = 0$ das variedades fechadas $n$-dimensionais $M^n$ que bordam. $\mathcal{N}_n$ é denominado o *grupo de cobordismo não-orientado $n$-dimensional de Thom*.

A soma direta $\mathcal{N}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$ possui estrutura de anel graduado comutativo com unidade. O produto cartesiano de variedades induz uma operação de produto em $\mathcal{N}_*$, que nos elementos homogêneos é dada por $[M^m] \cdot [N^n] = [M^m \times N^n]$. A unidade deste anel é a classe de cobordismo das variedades 0-dimensionais formadas por um número ímpar de pontos. $\mathcal{N}_*$ é denominado o *anel de cobordismo não-orientado de Thom.*

**Definição 1.1.2** *Dada uma variedade fechada n-dimensional $M^n$, definimos a* classe de Stiefel-Whitney *(ou* classe característica*) de $M^n$ como sendo a classe total de* Stiefel-Whitney *do fibrado tangente $\tau(M^n) \to M^n$ de $M^n$, e denotamos por*

$$W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n).$$

*Para denotar a* classe fundamental de homologia módulo2 *de uma variedade fechada $M^n$, usamos $[M^n]$. Para cada $\omega \in H^n(M^n)$, denotamos por $\omega[M^n] \in \mathbb{Z}_2$ o valor de $\omega$ em $[M^n]$, chamado de* o índice de Kronecker*.*

**Definição 1.1.3** *Seja $M^n$ uma variedade fechada e considere sua classe de Stiefel-Whitney $W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n)$. Dados $i_1, i_2, \cdots, i_s$ naturais tais que $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n$, o monômio (via produto cup) $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n) \cdots w_{i_s}(M^n)$ é um elemento de $H^n(M^n)$. O valor*

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n) \cdots w_{i_s}(M^n)[M^n] \in \mathbb{Z}_2$$

*é chamado* número característico *(ou* número de *Stiefel-Whitney) de $M^n$ associado ao monômio $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n) \cdots w_{i_s}(M^n)$.*

Dessa forma, associada a uma variedade fechada $M^n$, existe uma família de inteiros módulo2obtida ao considerarmos todos os possíveis monômios $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n) \cdots w_{i_s}(M^n)$ em $H^n(M^n)$.

Dizemos que duas variedades fechadas $M^n$ e $N^n$ *possuem os mesmos números característicos* se

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n) \cdots w_{i_s}(M^n)[M^n] = w_{i_1}(N^n)w_{i_2}(N^n) \cdots w_{i_s}(N^n)[M^n],$$

para cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n$.

A relação entre números característicos e os elementos de $\mathcal{N}_*$ é dada por

**Teorema 1.1.1** ***(Teorema de Thom)*** *Uma variedade fechada $M^n$ borda se, e somente se, todos os números característicos de $M^n$ são nulos.*

**Demonstração:** Ver [27]. ■

**Exemplo 1.1.1** *Consideremos o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$. Usando o Teorema de Thom acima, a estrutura multiplicativa do anel de cohomologia $H^*(\mathbb{R}P^n)$ e o fato de que $W(\mathbb{R}P^n) = (1 + \alpha)^{n+1}$, onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^n)$, pode-se verificar que $\mathbb{R}P^n$ borda se, e somente se, n é ímpar.*

**Corolário 1.1.1** *Duas variedades fechadas $M^n$ e $N^n$ são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.* ■

Assim, um elemento de $\mathcal{N}_*$ é completamente caracterizado pelos números característicos de qualquer um de seus representantes. A estrutura de $\mathcal{N}_*$ foi completamente determinada pelo

**Teorema 1.1.2** *$\mathcal{N}_*$ é uma álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador $x_n \in \mathcal{N}_n$ em cada dimensão $0 \leq n \neq 2^j - 1$.*

**Demonstração:** Ver [27]. ■

Para cada $n$ par, *Thom* demonstrou que uma possibilidade de gerador é a classe de cobordismo de $\mathbb{R}P^n$. Posteriormente, em [6], *Dold* exibiu representantes para os geradores no caso em que $n$ é ímpar, que são variedades do tipo $P(i,j) = \frac{S^i \times \mathbb{C}P^j}{(s,z)\ (-s,\bar{z})}$, com $i$ e $j$ apropriados, denominadas variedades de *Dold*. A saber, para $n = 2k-1$ ímpar, seja $k = 2^{r-1}(2s+1)$ com inteiros $r > 0$ e $s > 0$ (ou seja, $k$ não é uma potência de 2). Então $P(2^r - 1, 2^r s)$ representa $x_{2k-1}$.

Geometricamente, isto significa que toda variedade fechada que não borda, é cobordante a uma união disjunta de variedades, cada uma delas sendo um produto cartesiano envolvendo espaços projetivos reais pares e variedades de *Dold*.

Alguns grupos cobordismo de baixa dimensão: $\mathcal{N}_0 = \mathbb{Z}_2[\mathbb{R}P^0]$, $\mathcal{N}_1 = 0$, $\mathcal{N}_2 = \mathbb{Z}_2[\mathbb{R}P^2]$, $\mathcal{N}_3 = 0$, $\mathcal{N}_4 = \mathbb{Z}_2[\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2] \oplus \mathbb{Z}_2[\mathbb{R}P^4]$ e $\mathcal{N}_5 = \mathbb{Z}_2[P(1,2)]$.

Por exemplo, qualquer variedade de dimensão 4 que não borda, ou é cobordante a $\mathbb{R}P^4$, ou é cobordante a $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, ou é cobordante a $\mathbb{R}P^4 \cup (\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2)$.

## 1.2 Cobordismo Singular

Fixemos um espaço topológico $X$ e um natural $n$. Uma *variedade singular $n$-dimensional* em $X$ é um par $(M^n, f)$, constituído por uma variedade fechada $M^n$ e uma função contínua $f : M^n \to X$.

**Definição 1.2.1** *Dizemos que uma variedade singular $(M^n, f)$ em $X$* borda *se existem uma variedade $W^{n+1}$ compacta com bordo e uma função contínua $F : W^{n+1} \to X$ tais que $\partial W^{n+1} = M$ e $F|_{M^n} = f$. Dizemos que duas variedades singulares em $X$, $(M^n, f)$ e $(N^n, g)$, são* cobordantes *(ou* bordantes*), se a união disjunta $(M^n \cup N^n, f \cup g)$ borda, onde $f \cup g$ é definida pelas restrições $(f \cup g)|_{M^n} = f$ e $(f \cup g)|_{N^n} = g$.*

**Lema 1.2.1** *A relação de cobordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das variedades singulares $n$-dimensionais em $X$.*

Denotaremos por $[M^n, f]$ a classe de equivalência da variedade singular $n$-dimensional $(M^n, f)$ em $X$, que é chamada de *classe de cobordismo da variedade singular* $(M^n, f)$ em $X$ e, por $\mathcal{N}_n(X)$ o conjunto das classes de cobordismo das variedades singulares $n$-dimensionais em $X$.

Uma estrutura de grupo abeliano pode ser colocada em $\mathcal{N}_n(X)$, através da operação união disjunta, dada por $[M^n, f] + [N^n, g] = [M^n \cup N^n, f \cup g]$. Um representante para o elemento neutro é a variedade singular $(M^n, f)$ em $X$ no qual $M^n$ borda e $f$ é constante. $\mathcal{N}_n(X)$ é denominado o *grupo de cobordismo $n$-dimensional não-orientado de $X$*.

A soma direta $\mathcal{N}_*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(X)$, possui uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado com a operação $\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}_*(X) \to \mathcal{N}_*(X)$ dada por $[V^m] \cdot [M^n, f] = [V^m \times M^n, g]$, onde $g(x,y) = f(y)$. $\mathcal{N}_*(X)$ é chamado de *grupo de cobordismo não-orientado de $X$*.

Note que $\mathcal{N}_*(\{ponto\})$ e $\mathcal{N}_*$ são $\mathcal{N}_*$-isomorfos.

A definição de números característicos para variedades fechadas é estendida para variedades singulares da seguinte forma :

**Definição 1.2.2** *Seja $(M^n, f)$ uma variedade singular em $X$ e considere a classe de Stiefel-Whitney de $M^n$, $W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n)$. Para cada natural $m \leq n$, cada $h \in H^m(X)$ e cada partição $i_1, i_2, \cdots, i_s$ de naturais tais que $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n - m$, o monômio (via produto cup) $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)f^*(h)$ é um elemento de $H^n(M^n)$, onde $f^* : H^*(X) \to H^*(M^n)$ é o homomorfismo induzido em cohomologia por $f : M^n \to X$. O valor*

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)f^*(h)[M^m] \in \mathbb{Z}_2$$

*é chamado um* número característico *(ou* número de *Whitney) de $(M^n, f)$ associado ao monômio $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)f^*(h)$.*

Se tomarmos $h = 1 \in H^0(X)$, os números característicos de $(M^n, f)$ obtidos por esta escolha de $h$ coincidem com os números característicos de $M^n$.

**Teorema 1.2.1** ***(Teorema de Conner-Floyd)*** *Seja $X$ um CW-complexo finito em cada dimensão. Uma variedade singular $(M^n, f)$ em $X$ borda se, e somente se, todos os seus números característicos são nulos.*

**Demonstração:** Ver [3], p. 56, 17.3. ∎

**Corolário 1.2.1** *Seja $X$ um CW-complexo finito em cada dimensão. Duas variedades singulares em $X$ são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.* ∎

## 1.3 Cobordismo de Fibrados

Denotaremos por $\eta^k \to X$ um $k$-fibrado vetorial, com fibra $\mathbb{R}^k$, sobre um espaço $X$. Os $k$-fibrados triviais serão denotados por $\mathbb{R}^k \to X$. Diremos que um fibrado é nulo se a fibra sobre cada componente de X for o espaço vetorial trivial $\{0\}$, e o denotaremos por $0 \to X$.

Dado um fibrado vetorial $\eta^k \to X$ sobre $X$ paracompacto, denotaremos por

$$W(\eta^k) = 1 + w_1(\eta^k) + w_2(\eta^k) + \cdots + w_k(\eta^k)$$

a classe total de *Stiefel-Whitney* de $\eta^k$. Para cada $i = 0, 1, \cdots, k$, temos que $w_i(\eta^k) \in H^i(X)$ é a $i$-ésima classe de *Stiefel-Whitney de $\eta^k$.*

***Definição 1.3.1*** *Um k-fibrado vetorial $\eta^k \to M^n$ sobre uma variedade fechada $M^n$* borda*, se existe um k-fibrado vetorial $\zeta^k \to W^{n+1}$ sobre uma variedade $W^{n+1}$ compacta com bordo, tais que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\zeta^k|_{M^n} = \eta^k$. Dizemos que dois k-fibrados vetoriais $\eta^k \to M^n$ e $\gamma^k \to N^n$ são* cobordantes *se a união disjunta $(\eta^k \to M^n) \cup (\gamma^k \to N^n)$ borda.*

***Observação 1.3.1*** *Note que se $\eta^k \to M^n$ borda então $M^n$ borda.*

***Lema 1.3.1*** *A relação de cobordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto dos k-fibrados vetoriais sobre variedades fechadas n-dimensionais.*

*Denotaremos por* $[\eta^k \to M^n]$, *ou simplesmente por* $[\eta^k]$, *a classe de equivalência do k-fibrado vetorial* $\eta^k \to M^n$, *a qual é chamada de* classe de cobordismo de $\eta^k \to M^n$.

*Fixados n e k naturais, existe uma bijeção natural entre o conjunto das classes* $[\eta^k \to M^n]$ *e* $\mathcal{N}_n(BO(k))$, *sendo* $\mathcal{N}_n(BO(k))$ *o conjunto das classes de cobordismo das variedades singulares n-dimensionais em* $BO(k)$, *onde* $BO(k)$ *é o espaço universal classificante para fibrados vetoriais k-dimensionais. Tal bijeção é definida da seguinte maneira:*

$(\hookrightarrow)$ *Dado* $[M^n, f]$ *em* $\mathcal{N}_n(BO(k))$, *associe a ela a classe de cobordismo do* pullback $f!(\nu^k) \to M^n$, *onde* $\nu^k \to BO(k)$ *denota o fibrado universal k-dimensional.*

$(\hookleftarrow)$ *Dada uma classe de cobordismo* $[\eta^k \to M^n]$, *associe a ela* $[M^n, f]$, *onde* $f$ *é uma função classificante para* $\eta^k$, *a qual sabemos ser única a menos de homotopia.*

*Dessa forma, podemos ver os elementos do* $\mathcal{N}_*$*-módulo* $\mathcal{N}_*(BO(k))$ *como classes de cobordismo de k-fibrados vetoriais. Com esta identificação, a operação de união disjunta dada por* $[\eta^k \to M^n] + [\gamma^k \to N^n] = [(\eta^k \to M^n) \cup (\gamma^k \to N^n)]$, *estabelece uma estrutura de grupo abeliano para* $\mathcal{N}_n(BO(k))$. *O elemento neutro de* $\mathcal{N}_n(BO(k))$ *pode ser representado pelas classes dos k-fibrados triviais sobre variedades n-dimensionais que bordam.*

*Além disso, a operação* $[V^m]\cdot[\eta^k \to M^n] = [p_2!(\eta^k) \to V^m \times M^n]$, *onde* $p_2 : V^m \times M^n \to M^n$ *é a projeção na segunda coordenada, fornece uma estrutura de* $\mathcal{N}_*$*-módulo graduado para* $\mathcal{N}_*(BO(k)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(BO(k))$.

*Fixemos agora uma classe* $[\eta^k \to M^n]$ *identificada com o elemento* $[M^n, f]$ *de* $\mathcal{N}_n(BO(k))$. *Considere a classe de* Stiefel-Whitney *de* $M^n$, $W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n)$. *Pelo Corolário 1.2.1, a classe de cobordismo de* $(M^n, f)$ *é totalmente determinada pelos seus números característicos, os quais têm a forma*

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)f^*(h)[M^n] \in \mathbb{Z}_2,$$

*com* $h \in H^m(BO(k))$ *e* $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n) \in H^{n-m}(M^n)$. *Ocorre que o anel* $H^*(BO(k))$ *é a álgebra polinomial* $\mathbb{Z}_2[w_1(\nu^k), w_2(\nu^k), \cdots, w_k(\nu^k)]$, *onde* $\nu^k \to BO(k)$ *é o k-fibrado universal. Ou seja, cada* $h \in H^m(BO(k))$ *pode ser escrito da forma* $h = \sum w_{j_1}(\nu^k)w_{j_2}(\nu^k)\cdots w_{j_r}(\nu^k)$. *Agora, lembrando que* $f!(\nu^k) = \eta^k$, *temos:*

$$f^*(w_{j_1}(\nu^k)w_{j_2}(\nu^k)\cdots w_{j_r}(\nu^k)) = w_{j_1}(\eta^k)w_{j_2}(\eta^k)\cdots w_{j_r}(\eta^k),$$

*para cada monômio básico* $w_{j_1}(\nu^k)w_{j_2}(\nu^k)\cdots w_{j_r}(\nu^k)$ *em* $H^m(BO(k))$. *Assim, concluímos que os números da forma*

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)w_{j_1}(\eta^k)w_{j_2}(\eta^k)\cdots w_{j_r}(\eta^k)[M^n] \in \mathbb{Z}_2,$$

*com* $i_1 + i_2 + \cdots + i_s + j_1 + j_2 + \cdots + j_r = n$, *determinam a classe de cobordismo de* $\eta^k \to M^n$.

***Definição 1.3.2*** *Seja* $\eta^k \to M^n$ *um k-fibrado vetorial sobre uma variedade fechada n-dimensional* $M^n$. *O valor*

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)w_{j_1}(\eta^k)w_{j_2}(\eta^k)\cdots w_{j_r}(\eta^k)[M^n] \in \mathbb{Z}_2,$$

*com* $i_1 + i_2 + \cdots + i_s + j_1 + j_2 + \cdots + j_r = n$, *é chamado* número característico *(ou* número de Whitney*) de* $\eta^k \to M^n$, *associado ao monômio* $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)w_{j_1}(\eta^k)w_{j_2}(\eta^k)\cdots w_{j_r}(\eta^k)$.

*Note que se $\eta^k \to M^n$ for um fibrado vetorial trivial então os números característicos relevantes de $[\eta^k \to M^n]$ são os números característicos de $M^n$.*

## *1.4 Cobordismo de Ações de Grupos*

*Enfatizamos que estamos subentendendo que as variedades, aplicações entre variedades e ações sobre variedades são diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

***Definição 1.4.1*** *Sejam $G$ um grupo de Lie compacto e $M^n$ uma variedade fechada. Uma* ação suave *$\phi$ de $G$ em $M^n$, que será denotada por $(M^n, \phi)$, é uma aplicação suave $\phi : G \times M^n \to M^n$ tal que:*
***i)*** *$\phi(e, m) = m$, para todo $m \in M^n$, onde $e$ é o elemento neutro de $G$;*
***ii)*** *$\phi(g_1, \phi(g_2, m)) = \phi(g_1 g_2, m)$, para todos $g_1, g_2 \in G$ e $m \in M^n$.*
*Uma ação é dita* livre *se $\phi(g, m) = m$ implicar que $g = e$, para todo $m \in M^n$.*

***Definição 1.4.2*** *Uma ação $(M^n, \phi)$* borda equivariantemente*, se existem uma variedade compacta $W^{n+1}$ com bordo e uma ação $\Phi : G \times W^{n+1} \to W^{n+1}$ tais que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\Phi|_{M^n} = \phi$. Dizemos que duas ações $(M^n, \phi)$ e $(N^n, \psi)$ são* equivariantemente cobordantes *se a união disjunta $(M^n \cup N^n, \phi \cup \psi)$ borda equivariantemente.*

***Lema 1.4.1*** *A relação de cobordismo de ações dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das ações $(M^n, \phi)$.*

*A classe de equivalência (ou classe de cobordismo) de uma ação qualquer $(M^n, \phi)$ é denotada por $[M^n, \phi]$. Denotaremos por $\mathcal{I}_n(G)$ o conjunto das classes de cobordismo das ações de $G$ sobre variedades fechadas n-dimensionais, e por $\mathcal{N}_n(G)$ o conjunto das classes de cobordismo das ações livres de $G$ sobre variedades fechadas n-dimensionais.*

*Uma estrutura de grupo abeliano pode ser colocada em $\mathcal{I}_n(G)$, através da operação união disjunta, dada por $[M^n, \phi] + [N^n, \psi] = [M^n \cup N^n, \phi \cup \psi]$. O elemento neutro deste grupo é a classe de cobordismo $[M^n, \phi]$ das $G$-ações $(M^n, \phi)$ que bordam equivariantemente (por exemplo, tome $M^n$ uma variedade que borda e $\phi : G \times M^n \to M^n$ dada por $\phi(g, x) = x$). $\mathcal{I}_n(G)$ é denominado o* grupo de G-cobordismo irrestrito n-dimensional. *Denotamos por $\mathcal{I}_*(G)$ a soma $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n(G)$ e chamamos a mesma de* grupo de G-cobordismo irrestrito.

*De maneira análoga, a operação entre ações livres dada por*

$$[M^n, \phi] + [N^n, \psi] = [M^n \cup N^n, \phi \cup \psi]$$

*(união disjunta), dá a $\mathcal{N}_n(G)$ uma estrutura de grupo abeliano, denominado* grupo de G-cobordismo principal n-dimensional. *Denotamos por $\mathcal{N}_*(G)$ a soma $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(G)$ a qual chamamos de* grupo de G-cobordismo principal.

*Existe uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado em $\mathcal{I}_*(G)$ (analogamente em $\mathcal{N}_*(G)$), dada pela operação $[V^m] \cdot [M^n, \phi] = [M^n \times V^n, \psi]$, onde $\psi : G \times (M^n \times V^n) \to (M^n \times V^n)$ é dada por $\psi(g, (m, v)) = (\phi(g, m), v)$.*

*Agora, vamos analisar com mais detalhes o caso particular em que $G = \mathbb{Z}_2$, o qual será usado neste trabalho.*

***Definição 1.4.3*** *Uma* involução suave *$T$ sobre uma variedade fechada $M^n$, denotada por $(M^n, T)$, é uma aplicação suave $T : M^n \to M^n$ tal que $T \circ T = Id$.*

*Note que uma involução suave $T$ sobre uma variedade fechada $M^n$ define uma ação suave $\phi$ de $\mathbb{Z}_2$ em $M^n$, pois podemos identificar o grupo formado por $T$ e $T^2 = Id$ com a operação de composição, com o grupo $\mathbb{Z}_2$. Assim, $(M^n, \phi)$ é uma $\mathbb{Z}_2$-ação tal que $\phi(\overline{0}, m) = \phi(Id, m) = m$ e $\phi(\overline{1}, m) = \phi(T, m) = T(m)$, para todo $m \in M^n$. Dessa forma, classes de $\mathbb{Z}_2$-cobordismo são* classes de cobordismo de involuções suaves. *Por conveniência, utilizaremos a notação $[M^n, T] \in \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$ ao invés de $[M^n, \phi]$. De maneira análoga, utilizaremos a notação $[M^n, T] \in \mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$, onde $T$ é uma involução suave sem pontos fixos, ao invés de $[M^n, \phi]$, onde $\phi$ é livre.*

*A partir de agora, admitiremos tacitamente que todas as involuções serão suaves.*

*Com esta identificação acima, podemos reescrever a definição de cobordismo de uma $\mathbb{Z}_2$-ação da seguinte maneira:*

***Definição 1.4.4*** *Dizemos que uma involução suave $(M^n, T)$* borda, *se existem uma variedade compacta $W^{n+1}$ e uma involução suave $S$ sobre $W^{n+1}$, tais que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $S|_{M^n} = T$. Duas involuções suaves $(M^n, T)$ e $(N^n, T')$ são* cobordantes *se a união disjunta $(M^n \cup N^n, T \cup T')$ borda.*

*Dada uma involução $(M^n, T)$, o conjunto $F = \{x \in M^n : T(x) = x\}$ é chamado de* conjunto de pontos fixos da involução $T$.

*Dada uma $G$-ação qualquer $(M^n, \phi)$, a teoria de grupos de* Lie *garante que o conjunto de pontos fixos de $\phi$, $F|_\phi = \{x \in M^n : \phi(g, x) = x, \forall g \in G\}$, é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de $M^n$ (ver [13]). Em particular, o resultado é válido para o conjunto de pontos fixos de uma involução.*

*Por outro lado, dados um grupo de* Lie *$G$ compacto e uma união $F$ disjunta e finita de variedades fechadas, é natural questionarmos sobre as classes de cobordismo equivariante das involuções que possuem $F$ como conjunto de pontos fixos. Neste contexto se encontra um dos objetivos desta tese, que é o estudo da questão acima no caso específico em que $F = \mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, $n$ par.*

## *1.5 Sequência de Conner-Floyd*

*Seja $(M^n, T)$ uma involução em uma variedade fechada $n$-dimensional $M^n$ e suponha que $T$ não possua pontos fixos. Então o espaço de órbitas $M^n/T$ também é uma variedade fechada $n$-dimensional.*

***Definição 1.5.1*** *Definimos o* fibrado linha canônico associado a $T$ *como sendo o fibrado $\lambda \to M^n/T$ com espaço total dado pelo espaço quociente $\lambda = \dfrac{M^n \times \mathbb{R}}{(m, r) \sim (T(m), -r)}$, e com projeção $[(m, r)] \mapsto [m]$.*

***Exemplo 1.5.1*** *O fibrado linha canônico $\lambda \to \mathbb{R}P^n$ é o fibrado linha associado à involução antipodal $(S^n, A)$ na esfera $S^n$.*

***Teorema 1.5.1*** *A correspondência $[M^n, T] \mapsto [\lambda \to M^n/T]$ define um isomorfismo natural de $\mathcal{N}_*$-módulos entre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_*(BO(1))$*

***Demonstração:*** *Ver [3], p. 71.* ■

*A classe de cobordismo de uma involução sem pontos fixos $(M^n, T)$ em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ é portanto caracterizada pelos números característicos do fibrado linha associado $\lambda \to M^n/T$, o qual são denominados* números de involução *de $(M^n, T)$.*

*Se $(M^n, T)$ é uma involução cujo conjunto de pontos fixos é não-vazio, então pode ser que $M^n/T$ não seja uma variedade fechada. Por exemplo, se $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $T$ é a reflexão em uma coordenada, então $M/T$ é o disco $D^1$.*

*Assim, não é possível caracterizar a classe de cobordismo irrestrito de tais involuções utilizando números de involução, como é feito com involuções sem pontos fixos. Veremos a seguir uma ferramenta algébrica utilizada para caracterizar as classes de cobordismo de $\mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$ que é obtida da Sequência de* Conner-Floyd.

***Definição 1.5.2*** *Seja $\eta^k \to V^n$ um $k$-fibrado vetorial, $k \geq 1$, sobre uma variedade fechada $n$-dimensional $V^n$. Como o grupo de $\eta^k$ é o grupo ortogonal $O(k)$, podemos considerar o* fibrado em esferas *associado a $\eta^k$, $S(\eta^k) \to V^n$, com fibra $S^{k-1}$ e cujo espaço total $S(\eta^k)$ é uma variedade fechada $(n+k-1)$-dimensional. Existe uma involução $A : S(\eta^k) \to S(\eta^k)$, sem pontos fixos, a qual atua como a antipodal em cada fibra. Chamamos a involução $(S(\eta^k), A)$ de* fibrado involução *associado a $\eta^k$.*

*A projeção do fibrado $\eta^k$ induz uma projeção no quociente $\mathbb{R}P(\eta^k) = S(\eta^k)/A$ de forma que $\mathbb{R}P(\eta^k) \to V^n$ é um fibrado, com fibra $\mathbb{R}P^{k-1}$, e cujo espaço total $\mathbb{R}P(\eta^k)$ é uma variedade fechada $(n+k-1)$-dimensional. Este fibrado é chamado de* fibrado projetivo *associado a $\eta^k$.*

***Definição 1.5.3*** *Seja $\eta^k \to V^n$ um $k$-fibrado vetorial, $k \geq 1$, sobre uma variedade fechada $n$-dimensional $V^n$. Definimos o* fibrado linha associado a $\eta^k$, *$\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$, como sendo o fibrado linha canônico associado à involução $(S(\eta^k), A)$.*

*Consideremos agora uma involução $T : M^n \to M^n$ sobre uma variedade fechada $n$-dimensional $M^n$. Lembremos que, $(M^n, T)$ representa um elemento de $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$. Como o conjunto de pontos fixos de $T$, $F = \{x \in M^n : T(x) = x\}$, é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de $M^n$, podemos escrever $F = \bigcup_{j=0}^{n} F^j$, onde cada $F^j$ é a união (eventualmente vazia) das componentes $j$-dimensionais de $F$.*

***Definição 1.5.4*** *Seja $(\eta \to F) = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$ o fibrado normal de $F$ em $M^n$. Dizemos que $\eta \to F$ é o fixed data de $(M^n, T)$.*

***Exemplo 1.5.2*** *Dada uma variedade fechada $M^n$ arbitrária, o fibrado tangente a $M^n$, $\tau(M^n) \to M^n$, pode ser realizado como o fixed data de uma involução. De fato, a involução $twist : M^n \times M^n \to M^n \times M^n$ dada por $twist(x, y) = (y, x)$, $\forall (x, y) \in M^n \times M^n$, tem como conjunto de pontos fixos a diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in M^n\}$, ou seja, uma cópia de $M^n$. Temos que o fibrado normal de $\Delta$ em $M^n \times M^n$ é equivalente ao fibrado tangente $\tau(M^n) \to M^n$.*

*Lembremos que, de acordo com identificação apresentada na Seção 1.3, cada fibrado* $\eta^{n-j} \to F^j$ *representa um elemento de* $\mathcal{N}_j(BO(n-j))$ *(se* $F^j = \emptyset$*, convenciona-se que* $[\eta^{n-j} \to F^j] = 0$*).*

*Consideremos o* $\mathbb{Z}_2$*-módulo*

$$\mathcal{M}_n = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{N}_j(BO(n-j)),$$

*e a aplicação*

$$j_* : \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{M}_n, \text{ dada por } j_*[M^n, T] = \sum_{j=0}^{n} [\eta^{n-j} \to F^j],$$

*onde* $\bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$ *é o* fixed data *da involução* $(M^n, T)$*; e a aplicação*

$$\partial : \mathcal{M}_n \to \mathcal{N}_{n-1}(BO(1)),$$

*definida aditivamente por*

$$\partial[\eta \to F] = [\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)] \in \mathcal{N}_{n-1}(BO(1)),$$

*onde* $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$ *denota o fibrado linha associado a* $\eta \to F$ *(para o caso em que* $j = n$*,* $\partial : \mathcal{N}_n(BO(0)) \to \mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$ *é o homomorfismo nulo).*

*Além de verificar que tais aplicações estão bem definidas, a nível de cobordismo,* Conner *e* Floyd *mostraram que são homomorfismos e que compõem uma sequência exata curta.*

***Teorema 1.5.2 (Sequência de Conner e Floyd)*** *Para cada* $n$*, a sequência de* $\mathbb{Z}_2$*-módulos*

$$0 \to \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} \mathcal{M}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_{n-1}(BO(1)) \to 0$$

*é exata. Mais ainda,* $\partial|_{\mathcal{N}_{n-1}(BO(1))}$ *é o homomorfismo identidade.*

***Demonstração:*** *Ver [3], p. 88, 25.2.* ■

*Consequências do Teorema 1.5.2.*

***Exemplo 1.5.3*** *Se* $(M^n, T)$ *é uma involução sem pontos fixos então* $[M^n, T] = 0$ *em* $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$*, pois* $j_*[M^n, T] = 0$*. Este fato também pode ser visto geometricamente: façamos* $M^n \times [0,1]$ *e identifiquemos* $(m, 0)$ *com* $(T(m), 0)$*, para cada* $m \in M^n$*. Denotemos por* $\sim$ *esta identificação. Em* $\frac{M^n \times [0,1]}{\sim}$*, definamos a involução* $\overline{T}([m,n]) = [T(m), n]$*. Então* $\frac{M^n \times [0,1]}{\sim}$ *é uma variedade com bordo, equipada com a involução* $\overline{T}$*, e seu bordo é* $M^n \times \{1\} \cong M^n$ *equipada com* $T$*.*

***Exemplo 1.5.4*** *Se* $(M^n, T)$ *é uma involução cujo conjunto de pontos fixos é uma variedade* $F^n$ *de mesma dimensão, então* $F^n$ *é a união das componentes conexas de* $M^n$ *em que* $T$ *atua como identidade. Além disso, em* $M^n \backslash F^n$*,* $T$ *atua sem pontos fixos. Logo,* $[M^n, T] = [F^n, T] + [M^n \backslash F^n, T] = [F^n, Id]$ *em* $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$*.*

***Exemplo 1.5.5*** *Seja $(M^n, T)$ involução com conjunto de pontos fixos $F = \bigcup_{j=0}^{n} F^j$. Se $F$ não borda (ou seja, existe $j$ tal que $F^j \neq \emptyset$ não borda) então $(M^n, T)$ não borda equivariantemente, pois $j_*[M^n, T]$ é necessariamente não nulo.*

***Exemplo 1.5.6*** *Não existe involução $(M^n, T)$, com $n \geq 1$, fixando exatamente 1 ponto. De fato, se existisse tal involução teríamos $j_*[M^n, T] = [\mathbb{R}^n \to \{ponto\}]$. Observe que o fibrado linha associado a $\mathbb{R}^n \to \{ponto\}$ é o fibrado linha canônico $\lambda \to \mathbb{R}P^{n-1}$ sobre $\mathbb{R}P^{n-1}$. Logo, teríamos $\partial j_*[M^n, T] = [\lambda \to \mathbb{R}P^{n-1}] \neq 0$ (conforme veremos na Proposição 2.1.2), o que contraria a exatidão da Sequência de Conner e Floyd.*

*A classe de cobordismo de uma involução arbitrária é determinada, via o homomorfismo $j_*$, pela classe de cobordismo do seu* fixed data*:*

***Corolário 1.5.1*** *Duas involuções $(M^n, T)$ e $(V^n, S)$ são equivariantemente cobordantes se, e somente se, seus fixed data $\eta \to F_T$ e $\gamma \to F_S$ são cobordantes. Equivalentemente, duas involuções $(M^n, T)$ e $(V^n, S)$ são equivariantemente cobordantes se, e somente se, seus fixed data possuem os mesmos números característicos.* ■

*Considere um fibrado qualquer $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$. Se $[\eta \to F] \in \mathcal{M}_n$ está no núcleo de $\partial$, então $[\eta \to F] = j_*[M^n, T]$, para alguma involução $(M^n, T)$. Em outras palavras, se $\partial[\eta \to F] = 0$, então $\eta$ é cobordante a um fibrado que pode ser realizado como um* fixed data*. Na verdade, a demonstração do Teorema 1.5.2 diz algo mais forte: o próprio $\eta$ pode ser realizado como o* fixed data *de uma involução. Dessa forma temos que um fibrado cobordante a um* fixed data *é também um* fixed data*. Obtemos assim o seguinte resultado:*

***Corolário 1.5.2*** *Um fibrado*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$$

*é um fixed data se, e somente se, $\partial[\eta \to F] = 0$. Equivalentemente,*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$$

*é um fixed data se, e somente se, todos os números característicos do fibrado linha*

$$\lambda \to \mathbb{R}P(\eta) = \bigcup_{j=0}^{n} (\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$$

*são nulos.* ■

***Exemplo 1.5.7*** *Seja $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$ um fibrado que borda (ou seja, cada $\eta^{n-j} \to F^j$ borda). Então $\partial[\eta \to F] = 0$ e, portanto, existe uma involução $(M^n, T)$ cujo fixed data é $\eta \to F$ (neste caso $(M^n, T)$ borda equivariantemente).*

*O Corolário 1.5.2 será uma ferramenta muito útil nos capítulos subsequentes. Por causa disso, vamos reescrevê-lo de maneira mais explícita, utilizando a definição de número característico de um fibrado. Em todo este trabalho, a primeira classe de* Stiefel-Whitney *de qualquer fibrado linha associado a um determinado fibrado será denotada pela letra c.*

***Corolário 1.5.3*** *Um fibrado*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$$

*é um fixed data se, e somente se,*

$$\sum_{j=0}^{n-1} w_{i_1}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) \cdots w_{i_s}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))c^t[\mathbb{R}P(\eta^{n-j})] = 0 \in \mathbb{Z}_2,$$

*para toda partição $i_1 + \cdots i_s + t = n - 1$.* ■

***Observação 1.5.1*** *Os corolários acima são de essencial importância para a classificação que será feita nos próximos capítulos. De fato, pelo Corolário 1.5.2, uma união de dois fibrados*

$$\begin{array}{ccc} \eta^{n-j} & & \eta^{n-k} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ F^j & & F^k \end{array}$$

*pode ser realizada como o fixed data de alguma involução suave $(M^n, T)$, a menos de cobordismo equivariante, se, e somente se, a união dos fibrados linha associados aos fibrados em pauta*

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \lambda_2 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P(\eta^{n-j}) & & \mathbb{R}P(\eta^{n-k}) \end{array}$$

*borda, ou seja, se, e somente se, os fibrados $\lambda_1 \to \mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ e $\lambda_2 \to \mathbb{R}P(\eta^{n-k})$ são cobordantes.*

*Assim, supondo que uma união de duas variedades fechadas $F^j \cup F^k$ é o conjunto de pontos fixos de uma involução suave $(M^n, T)$, podemos trabalhar com equações envolvendo os números característicos dos fibrados linha associados aos fibrados projetivos correspondentes aos seus respectivos fibrados normais, a fim de obter alguma informação relevante sobre $(M^n, T)$. Esta técnica é o ponto de partida para obtermos a classificação das involuções que fixam, a menos de cobordismo equivariante, a união dos espaços projetivos $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, n par.*

*Para calcularmos os números característicos dos fibrados linha associados aos fibrados normais, precisamos saber como obter as classes características dos espaços $\mathbb{R}P(\eta)$ e para isto faremos uso do*

***Teorema 1.5.3 (Teorema de Borel-Hirzebruch)*** *Sejam $\eta^k \to M$ um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada, e c a classe característica do fibrado linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ associado a $\eta^k$. Então $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k))$ é um $H^*(M)$-módulo livre graduado, com base $1, c, c^2, \cdots, c^{k-1}$, e a classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P(\eta^k)$ é dada por*

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = W(M) \cdot \left((1+c)^k + w_1(\eta^k)(1+c)^{k-1} + w_2(\eta^k)(1+c)^{k-2} + \cdots + w_k(\eta^k)\right).$$

*Além disso,*

$$c^k + w_1(\eta^k)c^{k-1} + w_2(\eta^k)c^{k-2} + \cdots + w_k(\eta^k) = 0.$$

***Demonstração:*** *Ver [3], p. 75, 21.3.* ■

***Observação 1.5.2*** *Supondo que uma união de duas variedades fechadas $F^j \cup F^k$ é o conjunto de pontos fixos de uma involução suave $(M^n, T)$, vimos na Observação 1.5.1 que podemos trabalhar com equações envolvendo os números característicos dos fibrados linha associados aos fibrados projetivos correspondentes aos seus respectivos fibrados normais, a fim de obter alguma informação relevante sobre $(M^n, T)$, e sabemos que para obtermos tais números característicos, precisamos calcular as classes características das variedades $\mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ e $\mathbb{R}P(\eta^{n-k})$. Para o cálculo destas classes características, vimos no teorema acima que precisamos conhecer as classes características das variedades $F^j$ e $F^k$, e as classes características dos fibrados $\eta^{n-j} \to F^j$ e $\eta^{n-k} \to F^k$ e a dificuldade está no fato de que estes são fibrados genéricos sobre as variedades $F^j$ e $F^k$.*

*A seguir, temos um último corolário do Teorema 1.5.2, importante para os estudos feitos nos próximos capítulos.*

***Corolário 1.5.4*** *Seja $\eta^1 \to V^n$ um fibrado vetorial de dimensão 1 sobre uma variedade fechada $V^n$, o qual é um fixed data. Então $\eta^1 \to V^n$ borda como fibrado e, portanto, $V^n$ borda como variedade.*

***Demonstração:*** *Como $\partial([\eta^1 \to V^n]) = [\eta^1 \to V^n]$, segue o resultado.* ■

## *1.6 Ferramentas para o cálculo de Classes Características*

*Seja $(M^n, T)$ uma involução e considere seu* fixed data, $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{m}(\eta^{n-j} \to F^j)$, $n > m$. *Pelo Corolário 1.5.3 sabemos que, para cada partição $i_1 + \cdots + i_s + t = m + n - 1$,*

$$\sum_{j=0}^{m} w_{i_1}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) \cdots w_{i_s}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))c^t[\mathbb{R}P(\eta^{n-j})] = 0 \in \mathbb{Z}_2,$$

*ou ainda,*

$$\sum_{j=0}^{m} p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))[\mathbb{R}P(\eta^{n-j})] = 0 \in \mathbb{Z}_2,$$

*para cada $p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$ polinômio homogêneo de grau $m + n - 1$ nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta)$ e $c$.*

*Logo, um procedimento razoável em busca de novas informações sobre $\eta$, é utilizar as igualdades acima com polinômios adequados. Deste modo, pode-se obter pistas sobre a classificação pretendida, ou eliminar possibilidades.*

*Apresentamos a seguir recursos técnicos que podem conduzir a equações convenientes ou facilitar o cálculo.*

### 1.6.1 Multiplicação por potências inteiras de $1+c$

***Observação 1.6.1*** *Seja $X$ um espaço topológico qualquer. A coleção de todos os elementos da forma*

$$W = 1 + w_1 + w_2 + \cdots \in H^*(X),$$

*em que $w_i \in H^i(X)$ e o termo de grau zero é $1 \in H^0(X)$, é um grupo comutativo com a operação dada pelo produto cup (ver [12]). Dado um elemento $W = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$, o seu inverso (ou dual)*

$$\frac{1}{W} = \overline{W} = 1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 \cdots,$$

*caracterizado pela relação $W\overline{W} = 1 \in H^*(X)$, pode ser construído indutivamente pelo algoritmo*

$$\overline{w}_0 = 1; \ \overline{w}_n = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w}_{n-i}.$$

*Consideremos agora um* fixed data $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{m} (\eta^{n-j} \to F^j)$, $n > m$.

*O inverso multiplicativo de $1+c$ em $H^*(\mathbb{R}P(\eta))$ é dado por*

$$\overline{1+c} = \frac{1}{1+c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{m+n-1},$$

*lembrando que $c^t = 0$ se $t > m+n-1$, pois $\mathbb{R}P(\eta) = \bigcup_{j=0}^{m} \mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ é uma variedade fechada $(m+n-1)$-dimensional.*

*Mais geralmente, para qualquer inteiro $d$, $(1+c)^d$ pode ser escrito na forma*

$$(1+c)^d = 1 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_{m+n-1} c^{m+n-1},$$

*para certos $a_i \in \{0,1\}$. Assim, fixando um inteiro $d$ qualquer,*

$$(1+c)^d \cdot W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1 + a_1 c + \cdots + a_{m+n-1} c^{m+n-1})(1 + w_1(\mathbb{R}P(\eta)) + \cdots + w_{n-1}(\mathbb{R}P(\eta)))$$

*é tal que sua parte homogênea de grau $i$ é um polinômio homogêneo de grau $i$ nas classes $w_{j's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e $c$. Logo, escrevendo*

$$(1+c)^d \cdot W(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) = 1 + w_{j,1} + w_{j,2} + \cdots + w_{j,m+n-1},$$

*com $w_{j,i} \in H^i(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$, temos que*

$$\sum_{j=0}^{m} w_{j,i_1} w_{j,i_2} \cdots w_{j,i_s} c^t [\mathbb{R}P(\eta^{n-j})] = 0,$$

*para cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_s + t = m+n-1$.*

*A discussão acima fornece então a técnica de efetuar multiplicações por potências inteiras de $1+c$, positivas ou negativas, para obter equações com números característicos. Esta técnica foi bastante explorada por* Pergher *e* Stong*, em [21], através das chamadas classes $W[r]$. A* *ideia central é que cada parte homogênea de $W(\mathbb{R}P(\eta))$ pode ser algebricamente complicada, e a multiplicação por potências de $1+c$ pode dar origem a partes homogêneas mais simples.*

### 1.6.2 *Fórmula de* Conner

*Seja $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial (de dimensão $k \geq 1$) sobre uma variedade fechada e conexa $M^n$. Denotemos*

$$W(\eta^k) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k.$$

*Através do Teorema de* Borel-Hirzebruch *1.5.3 vimos que $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k))$ é um $H^*(M^n)$-módulo livre graduado, com base $\{1, c, c^2, \cdots, c^{k-1}\}$, onde $c$ é a classe característica do fibrado linha associado a $\eta^k$, sujeita à relação $c^k = v_1 c^{k-1} + v_2 c^{k-2} + \cdots + v_k$.*

*Note que $a_n c^{k-1} = 0$ se, e somente se, $a_n = 0$, para $a_n \in H^n(M^n)$. Logo, como $H^n(M^n)$ e $H^{n+k-1}(\mathbb{R}P(\eta^k))$ são isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, temos $a_n[M^n] = a_n c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]$, para todo $a_n \in H^n(M^n)$.*

*Se $a_s \in H^s(M^n)$, com $n < s \leq n+k-1$, então $a_s c^{n-s+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 0$, já que $a_s = 0$.*

*Agora, para calcular $a_s c^{n-s+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]$ no caso em que $0 \leq s < n$, utilizaremos a seguinte ferramenta*

***Teorema 1.6.1 (Fórmula de Conner)*** *Para cada $a_s$ pertencente a $H^s(M^n)$, onde $0 \leq s \leq n$, temos*

$$a_s c^{n-s+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = a_s \overline{v}_{n-s}[M^n],$$

*onde $\overline{v}_i$ denota o termo homogêneo de grau $i$ do inverso de $W(\eta^k)$, $\overline{W(\eta^k)} = \frac{1}{W(\eta^k)} = 1 + \overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_n$.*

***Demonstração:*** *Ver [2].* ■

### 1.6.3 *Operações de* Steenrod

*As operações cohomológicas $Sq^i$, conhecidas como* quadrados de Steenrod, *são completamente caracterizadas pelas quatro propriedades a seguir:*

*Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos arbitrários.*

***(1)*** *Para cada $n$ e cada $i$ inteiros não negativos,*

$$Sq^i : H^n(X) \to H^{n+i}(X)$$

*define um homomorfismo aditivo, satisfazendo as seguintes propriedades:*

***(2) (Naturalidade)*** *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} H^n(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "Sq^i"'] & H^n(X) \arrow[d, "Sq^i"] \\ H^{n+i}(Y) \arrow[r, "f^*"'] & H^{n+i}(X) \end{tikzcd}$$

*é comutativo.*

*(3) Se $a \in H^n(X)$ então $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a^2$ e $Sq^i(a) = 0$, para todo $i > n$.*

***(4) (Fórmula de* Cartan*)*** *Se $a$ e $b$ são elementos homogêneos de $H^*(X)$ e $ab$ denota o produto* cup *entre $a$ e $b$, então vale a identidade*

$$Sq^i(ab) = \sum_{j=0}^{i} Sq^j(a)Sq^{i-j}(b).$$

*Em relação às classes características de um fibrado vetorial, temos o seguinte resultado*

***Teorema 1.6.2 (Fórmula de Wu)*** *Se $\eta^k \to X$ é um fibrado vetorial sobre um espaço $X$ paracompacto, e $W(\eta^k) = 1 + w_1 + \cdots + w_k$ denota a classe de Stiefel-Whitney de $\eta^k$, então*

$$Sq^i(w_j) = \sum_{t=0}^{i} \binom{j-i-1+t}{t} w_{i-t}w_{j+t},$$

*para $i < j$.*

***Demonstração:*** *Ver [12].* ■

*A Fórmula de* Wu *acima é um recurso técnico adicional no que se refere às técnicas computacionais em discussão. De fato, consideremos um* fixed data $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{m}(\eta^{n-j} \to F^j)$ *e vejamos como aplicar as operações $Sq^i$ para obter equações envolvendo números característicos do fibrado linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$.*

*Seja $p(c, w(\mathbb{R}P(\eta)))$ um polinômio homogêneo qualquer, de grau $t \leq m + n - 1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e $c$. Aplicando as fórmulas de* Cartan *e* Wu, *e lembrando que cada $Sq^j$ é um homomorfismo aditivo, vemos que $Sq^{m+n-1-t}(p(c, w(\mathbb{R}P(\eta))))$ é também um polinômio homogêneo, agora de grau $m + n - 1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e $c$. Assim, concluímos que*

$$\sum_{j=0}^{m} Sq^{m+n-1-t}(p(c, w(\mathbb{R}P(\eta))))[\mathbb{R}P(\eta^{n-j})] = 0.$$

*Os quadrados de* Steenrod *possibilitam mostrar que certos elementos simples de $H^*(\mathbb{R}P(\eta))$ são de fato polinômios nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e $c$, o que poderia ser extremamente difícil mostrar diretamente; veremos isso posteriormente de forma prática em nossas computações.*

## *1.7 Secções e o Operador Γ*

*A soma de* Whitney *de um fibrado $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ com o $k$-fibrado trivial $\mathbb{R}^k \to F$ é denotada por $\eta \oplus \mathbb{R}^k \to F = \bigcup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \oplus \mathbb{R}^k \to F^j)$. Neste caso, dizemos que o fibrado $\eta \oplus \mathbb{R}^k$ possui $k$* secções.

*Nesta seção apresentaremos resultados que nos permitirão obter um* fixed data *adicionando ou removendo secções de um outro* fixed data. *Neste contexto, temos o seguinte resultado*

***Teorema 1.7.1*** **(Teorema das Secções)** *Se $\eta \oplus \mathbb{R} \to F$ é o fixed data de uma involução, então $\eta \to F$ também pode ser realizado como fixed data de alguma involução.*

***Demonstração:*** *Ver [3], p. 85, 24.3.* ■

*O teorema acima conduz a um processo chamado "remoção de secções". Veremos a seguir que, sob certas condições, também pode ser possível "adicionar secções".*

*Seja $(M^n, T)$ uma involução sobre uma variedade fechada n-dimensional $M^n$, e consideremos o círculo $S^1$. No produto cartesiano $S^1 \times M^n$, consideremos o seguinte par de involuções comutantes:*

$$T_1(z, x) = (\overline{z}, x); \qquad T_2(z, x) = (-z, T(x)),$$

*onde $\overline{z}$ significa o conjugado complexo de $z$.*

*Como $T_2$ é livre de pontos fixos, o quociente*

$$V^{n+1} = \frac{S^1 \times M^n}{T_2}$$

*é ainda uma variedade fechada.*

*Além disso, como $T_1$ e $T_2$ são comutantes, em $V^{n+1}$ existe uma involução $T_0$ induzida por $T_1$.*

*Definimos o* operador $\Gamma$ *como sendo o $\mathcal{N}_*$-homomorfismo de grau $+1$,*

$$\Gamma : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{I}_{*+1}(\mathbb{Z}_2),$$

*dado por $\Gamma[M^n, T] = [V^{n+1}, T_0]$.*

*O teorema seguinte mostra que a classe de cobordismo de $(V^{n+1}, T_0)$ é completamente determinada pela classe de cobordismo de $(M^n, T)$.*

***Teorema 1.7.2*** *Se $\eta \to F$ é o* fixed data *da involução $(M^n, T)$, então o fixed data de $\Gamma(M^n, T) = (V^{n+1}, T_0)$ é a união disjunta*

$$\begin{array}{ccc} \eta \oplus \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ F & & M^n \end{array}.$$

***Demonstração:*** *Ver [3], p. 90, 25.3.* ■

*Seja $(M^n, T)$ uma involução com* fixed data *$\eta \to F$ e suponha que $M^n$ borda. Então $\mathbb{R} \to M^n$ borda como fibrado, e portanto, pela sequência de Conner-Floyd temos $\Gamma(M^n, T)$ é cobordante a uma involução $(V, S)$ com fixed data $\eta \oplus \mathbb{R} \to F$. Se, novamente, $V$ borda, então $\Gamma(V, S) = \Gamma^2(M^n, T)$ é cobordante a uma involução com fixed data $\eta \oplus \mathbb{R}^2 \to F$, e assim sucessivamente. Suponha que, para algum $j \geq 2$, a variedade subjacente $\Gamma^j(M^n, T)$ não borda . Nesse caso, o processo encerra, e não ocorre mais para nenhum $l > j$, pois nesse caso, removendo secções chegaríamos que $\Gamma^{j+1}(M^n, T)$ é cobordante a uma involução com fixed data $\eta \oplus \mathbb{R}^{j+1} \to F$, o que é um absurdo (uma vez que $\Gamma^{j+1}(M^n, T)$ tem como componente do fixed data $\mathbb{R} \to W$, onde $W$ é a variedade subjacente a $\Gamma^i(M^n, T)$). No caso em pauta, $\Gamma^i(M^n, T)$, $0 \leq i \leq j$ fornece uma família de involuções com conjunto de pontos fixos $F$.*

## 1.8 *Característica de* Euler *módulo 2*

*Seja $X$ um CW-complexo finito.*

***Definição 1.8.1*** *A* característica de *Euler* módulo 2 de $X$ *é definida como sendo o número*

$$\overline{\chi(X)} = \sum dimH_i(X) \ (mod\ 2) = \sum dimH^i(X) \ (mod\ 2) \in \mathbb{Z}_2.$$

***Observação 1.8.1*** *Se $M^n$ é uma variedade fechada de dimensão $n$ ímpar, segue da dualidade de Poincaré que $\overline{\chi(M^n)} = 0$.*

*A característica de* Euler *módulo 2 é um invariante de cobordismo. Este fato decorre do Corolário 1.1.1 juntamente com o seguinte resultado:*

***Teorema 1.8.1*** *Seja $M^n$ uma variedade fechada. Então $\overline{\chi(M^n)}$ coincide com o número característico $w_n(M^n)[M^n]$.*

**Demonstração:** *Ver [11], p. 130, 11.12.* ∎

***Exemplo 1.8.1*** *Se $n$ é par, então*

$$w_n(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{1} \alpha^n = \alpha^n,$$

*onde $\alpha$ é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^n)$. Logo, pelo teorema anterior, $\overline{\chi(\mathbb{R}P^n)} = \alpha^n[\mathbb{R}P^n] = 1$.*

*Destacamos os seguintes resultados no contexto de involuções e conjuntos de pontos fixos:*

***Teorema 1.8.2*** *Seja $(M^n, T)$ uma involução com conjunto de pontos fixos $F = \bigcup_{j=0}^{n} F^j$. Então*

$$\overline{\chi(M^n)} = \overline{\chi(F)} = \sum_{j=0}^{n} \overline{\chi(F^j)}.$$

**Demonstração:** *Ver [3], p. 99, 28.2.* ∎

***Teorema 1.8.3*** *Seja $(M^{2n}, T)$ uma involução com fixed data*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{2n-1} (\eta^{2n-j} \to F^j).$$

*Se $\overline{\chi(M^{2n})} = 1$, então existe $n \leq j < 2n$ tal que $w_{2n-j}(\eta^{2n-j}) \neq 0 \in H^{2n-j}(F^j)$.*

**Demonstração:** *Ver [3], p. 100, 28.3.* ∎

## 1.9 *Teorema de* Lucas

*A expansão 2-ádica, ou* expansão diádica*, será uma ferramenta muito utilizada no estudo feito nos próximos capítulos. Dado um número natural $n$, sua expansão diádica é dada por*

$$n = n_k 2^k + n_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + n_1 2 + n_0, \text{ onde cada } n_i = 0 \text{ ou } 1,$$

*que é equivalente a escrever $n$ como uma soma de potências distintas de 2. Se $n_i = 1$, para algum $0 \leq i \leq k$, dizemos que $2^i$* aparece na expansão diádica de $n$.

***Exemplo 1.9.1*** *Dado um número natural $t$, a expansão diádica do número $2^t - 1$ é dada por*

$$2^t - 1 = 2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2 + 1.$$

*De fato,*

$$\begin{aligned} 2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 + 1 &= 2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^2 + 2^2 \\ &= 2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^3 + 2^3 \\ &\cdots \\ &= 2^t. \end{aligned}$$

***Exemplo 1.9.2*** *Dados dois naturais $a$ e $b$ tais que $a > b$, temos que*

$$\begin{aligned} 2^a - 2^b &= 2^b 2^{a-b} - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1) \\ &= 2^b(2^{a-b-1} + 2^{a-b-2} + \cdots + 1) \\ &= 2^{a-1} + 2^{a-2} + \cdots + 2^{b+1} + 2^b. \end{aligned}$$

***Teorema 1.9.1 (Teorema de* Lucas*)*** *Seja $p$ um número primo, e tomemos $a$ e $b$ em suas expansões $p$-ádicas:*

$$\begin{aligned} a &= a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_1 p + a_0, \text{ onde } 0 \leq a_i \leq p-1, \ i = 0, \cdots, k, \\ b &= b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \cdots + b_1 p + b_0, \text{ onde } 0 \leq b_i \leq p-1, \ i = 0, \cdots, k. \end{aligned}$$

*Então,*

$$\binom{a}{b} = \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\cdots\binom{a_{k-1}}{b_{k-1}}\binom{a_k}{b_k} (mod\ p)$$

*seguindo a convenção $\binom{a}{b} = 0$ sempre que $a < b$.*

***Demonstração:*** *Ver [10].* ■

*Observemos que $\binom{0}{0} = \binom{1}{0}\binom{1}{1} = 1\ (mod\ 2)$ e $\binom{0}{1} = 0\ (mod\ 2)$.*

*Dessa forma, em relação à expansão diádica, o Teorema de* Lucas *quer dizer que, dados dois naturais $a$ e $b$, então $\binom{a}{b} = 1\ (mod\ 2)$* se, e somente se, toda potência de 2 que aparece na expansão diádica de $b$ também aparece na de $a$*, ou seja, a expansão diádica de $b$* está contida *na expansão diádica de $a$. Em vários cálculos envolvendo números característicos, é importante determinar a paridade de coeficientes binomiais e, assim, o Teorema de* Lucas *é extremamente útil neste contexto.*

Capítulo

2

# Algumas considerações sobre os espaços projetivos reais

*Nesta seção enunciaremos alguns resultados envolvendo os espaços projetivos reais $\mathbb{R}P^n$; para mais detalhes, a principal referência é [12].*

## 2.1 O Espaço $\mathbb{R}P^n$

*O* espaço projetivo real $n$-dimensional $\mathbb{R}P^n$ *é uma variedade fechada e conexa, de dimensão real* $n$*, a qual é o espaço quociente*

$$\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}{\sim} = \{[x]; x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \neq 0\},$$

*onde a relação de equivalência* $\sim$ *é dada por:* $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$*,* $x \sim y$ *se, e somente se,* $x = a \cdot y$*, para algum* $a \in \mathbb{R}$*.*

*Em relação aos grupos de cohomologia deste espaço, sabe se que*

$$H^k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{para } k = 0, 1, ..., n \\ 0, & \text{para } k > n \end{cases},$$

*Além disso, é bem conhecido o fato de que a estrutura multiplicativa do anel* $H^*(\mathbb{R}P^n)$ *é dada por: se* $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n)$ *é o gerador então, para* $0 < j \leq n$*,* $\alpha^j \in H^j(\mathbb{R}P^n)$ *é o gerador; para* $j > n$*, obviamente* $\alpha^j = 0$*.*

*Já em relação às classes de* Stiefel-Whitney*, temos o seguinte resultado:*

***Proposição 2.1.1*** *A classe de Stiefel-Whitney do espaço projetivo* $\mathbb{R}P^n$ *é dada por*

$$W(\mathbb{R}P^n) = (1 + \alpha)^{n+1},$$

*onde* $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n)$ *é o gerador de* $H^*(\mathbb{R}P^n)$*.*

***Demonstração:*** *Ver [12].* ■

*No exemplo 1.1.1 vimos que $\mathbb{R}P^n$ borda se, e somente se, $n$ é ímpar.*

*Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^n$, onde denotaremos por $\lambda_n \to \mathbb{R}P^n$, associado à involução antipodal $A$ sobre $S^n$, segundo a definição 1.5.1.*

***Proposição 2.1.2*** *A classe total de Stiefel-Whitney do fibrado $\lambda_n \to \mathbb{R}P^n$ é dada por*

$$W(\lambda_n) = 1 + \alpha,$$

*onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^n)$*

***Demonstração:*** *Ver [12].* ■

*O fato de que $W(\mathbb{R}P^n) = (1+\alpha)^{n+1}$ decorre do resultado provado em [12], de que se $\tau(\mathbb{R}P^n) \to \mathbb{R}P^n$ é o fibrado tangente a $\mathbb{R}P^n$, então $\tau(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbb{R}$ é equivalente a $(n+1)\lambda_n$.*

***Observação 2.1.1*** *Pela estrutura do anel de Grothendieck do espaço $\mathbb{R}P^n$, todo fibrado $\eta \to \mathbb{R}P^n$ é* estavelmente equivalente *(isto é, equivalente a menos de somas de Whitney de cópias de fibrados triviais) a uma soma de Whitney de cópias do fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^n$, $p\lambda \to \mathbb{R}P^n$, $p \geq 0$, e assim sua classe é da forma $W(\eta) = W(p\lambda_n) = (1+\alpha)^p$. Deste modo, podemos caracterizar o fixed data de uma involução $(M^m, T)$ cujo conjunto de pontos fixos é a união disjunta $\mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$ pesquisando quem são os números naturais $p$ e $q$.*

***Observação 2.1.2*** *Seja $\eta^k \to \mathbb{R}P^n$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}P^n$. Pela Observação 2.1.1 anterior, temos que existe $p \geq 0$ tal que $W(\eta^k) = (1+\alpha)^p$. Seja $r$ o número natural tal que $2^r \leq n < 2^{r+1}$ então*

$$(1+\alpha)^{2^{r+1}} = 1 + \alpha^{2^{r+1}} = 1,$$

*pois $\alpha^{2^{r+1}} \in H^{2^{r+1}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = 0$. Logo, se tomarmos $p' = 2^{r+1} - p$, temos que a classe dual de $\eta^k$ é*

$$\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)} = (1+\alpha)^{p'}.$$

*Note também que, pela Fórmula de Conner 1.6.1 temos, para cada $j = 0, 1, \ldots, n$,*

$$\alpha^{n-j}c^{j+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = \alpha^{n-j}\overline{w_j}(\eta^k)[\mathbb{R}P^n] = \alpha^{n-j}\binom{p'}{j}\alpha^j[\mathbb{R}P^n] = \binom{p'}{j}.$$

## *2.2 Algumas Involuções Especiais*

*Apresentaremos aqui alguns modelos de involuções que possuem como conjunto de pontos fixos sendo a união disjunta $\mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$ de dois espaços projetivos reais.*

*A primeira forma de se obter tais involuções é: se $(M^r, T)$ e $(V^r, S)$ são involuções em variedades fechadas de mesma dimensão $r$, com $F_T = \mathbb{R}P^m$ e $F_S = \mathbb{R}P^n$, então $(M^r \cup V^r, T \cup S)$ é uma involução em $M^r \cup V^r$ com $F_{T\cup S} = \mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$. Por exemplo, se $m$ e $n$ são ímpares, o fibrado trivial $r$-dimensional $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}P^m$ borda e, portanto, é um fixed data. Assim, $(\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}P^m) \cup (\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}P^n)$, com $m + r = n + s$, é um fixed data de uma involução obtida desta forma.*

*Outro modelo de involução fixando dois espaços projetivos é*

$$T_{m,n} : \mathbb{R}P^{m+n+1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{m+n+1},$$

*dada, em coordenadas homogêneas, por*

$$T_{m,n}[x_0, x_1, \cdots, x_m, y_0, y_1 \cdots, y_n] = [-x_0, -x_1, \cdots, -x_m, y_0, y_1 \cdots, y_n].$$

*Note que o conjunto de pontos fixos de $T_{m,n}$ é a união disjunta $F = \mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$. Além disso,*

$$\begin{array}{ccc} (n+1)\lambda_m & & (m+1)\lambda_n \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^m & & \mathbb{R}P^n \end{array}, \tag{2.1}$$

*é o fixed data da involução $(\mathbb{R}P^{m+n+1}, T_{m,n})$, onde $\lambda_m$ e $\lambda_n$ são os correspondentes fibrados linha canônicos. Em particular, para $m = 0$, a involução $(\mathbb{R}P^{n+1}, T_{0,n})$ possui fixed data:*

$$\begin{array}{ccc} \lambda_n & & \mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^n & & \{ponto\} \end{array}. \tag{2.2}$$

*uma vez que $\mathbb{R}P^0 = \{ponto\}$.*

***Observação 2.2.1*** *Se $m + n + 1$ é ímpar, podemos aplicar iterativamente o operador $\Gamma$ em $[\mathbb{R}P^{m+n+1}, T_{m,n}]$ para obter outras involuções com conjunto de pontos fixos $F = \mathbb{R}P^n \cup \mathbb{R}P^m$, conforme discutimos na Seção 1.7. Em particular, no caso em que $m$ e $n$ são pares distintos, $F$ não é bordo e, portanto, existe $k$ com $\varepsilon\Gamma^k[\mathbb{R}P^{m+n+1}, T_{m,n}] \neq 0$, onde aqui estamos denotando $\varepsilon\Gamma^k[\mathbb{R}P^{m+n+1}, T_{m,n}]$ como a variedade subjacente a $\Gamma^k[\mathbb{R}P^{m+n+1}, T_{m,n}]$. Isso decorre do 5/2-*Teorema de Boardman *de [1]. O menor natural $k$ com tal propriedade será denotado por $h(m, n)$, e foi calculado por P. Pergher e A. Ramos em [20]. Assim, em termos de fibrados sobre $F$, temos que*

$$\begin{array}{ccc} (n+1)\lambda_m \oplus \mathbb{R}^i & & (m+1)\lambda_n \oplus \mathbb{R}^i \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^m & & \mathbb{R}P^n \end{array}, \tag{2.3}$$

*é um* fixed data *se, e somente se, $0 \leq i \leq h(m, n)$.*

*O terceiro método para se obter involuções fixando $\mathbb{R}P^n \cup \mathbb{R}P^m$ é dado pela*

***Observação 2.2.2*** *As involuções que fixam a união disjunta de um espaço projetivo com um ponto podem ser utilizadas para a obtenção de involuções com conjunto de pontos fixos da forma $\mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$. De fato, suponha que para certo natural $r$ existam duas involuções $(M^r, T)$ e $(V^r, S)$ com $F_T = \mathbb{R}P^m \cup \{ponto\}$ e $F_S = \mathbb{R}P^n \cup \{ponto\}$. Se*

$$\begin{array}{ccc} \eta^{r-m} & & \mathbb{R}^r \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^m & & \{ponto\} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \xi^{r-n} & & \mathbb{R}^r \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^n & & \{ponto\} \end{array}. \tag{2.4}$$

*são os respectivos* fixed data *de* $(M^r, T)$ *e* $(V^r, S)$*, então*

$$j_*([M^r, T]+[V^r, S]) = \begin{bmatrix} \eta^{r-m} \\ \downarrow \\ \mathbb{R}P^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ \{ponto\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^{r-n} \\ \downarrow \\ \mathbb{R}P^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ \{ponto\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{r-m} \\ \downarrow \\ \mathbb{R}P^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^{r-n} \\ \downarrow \\ \mathbb{R}P^n \end{bmatrix}.$$

*Logo, a classe de cobordismo da união disjunta* $(M^r \cup V^r, T \cup S)$ *contém uma involução com conjunto de pontos fixos* $F = \mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$*.*

Capítulo 3

# Classificação das involuções fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, com $n$ par

*Neste capítulo, realizaremos a classificação, a menos de cobordismo equivariante, das involuções que fixam $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, para $n \geq 10$ par. O histórico deste problema está situado na Introdução. Faremos uso das ferramentas descritas no primeiro capítulo desta tese para mostrar que toda tal involução é equivariantemente cobordante a uma das involuções descritas na Seção 2.2.*

## *3.1 Introdução*

*Seja $(M,T)$ involução suave sobre uma variedade fechada e conexa $M$, fixando $F = \mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, com $n \geq 10$ e par. Denotemos o* fixed data *de $(M,T)$ por*

$$\begin{array}{ccc} \eta^k & & \xi^l \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^6 & & \mathbb{R}P^n \end{array}, \tag{3.1}$$

*com $W(\eta^k) = (1+\alpha)^p$ e $W(\xi^l) = (1+\beta)^q$, $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^6, \mathbb{Z}_2)$ e $\beta \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ os respectivos geradores.*

*Pela sequência de* Conner-Floyd *1.5.2, a união dos fibrados linha associados aos fibrados $\eta^k$ e $\xi^l$, denotada por*

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \lambda_2 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P(\eta^k) & & \mathbb{R}P(\xi^l) \end{array} \tag{3.2}$$

*borda. Logo, estes fibrados são cobordantes. Isto implica que os números característicos correspondentes destes fibrados são iguais. Pelo Teorema de* Borel-Hirzebruch *1.5.3, as classes características dos espaços $\mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\mathbb{R}P(\xi^l)$ são dadas, respectivamente, por*

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha)^7((1+c)^k + (1+c)^{k-1}\binom{p}{1}\alpha + (1+c)^{k-2}\binom{p}{2}\alpha^2 + \cdots),$$

*e*

$$W(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta)^{n+1}((1+c)^l + (1+c)^{l-1}\binom{q}{1}\beta + (1+c)^{l-2}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots),$$

*onde $c$ denota a primeira classe característica tanto de $\lambda_1 \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ quanto a de $\lambda_2 \to \mathbb{R}P(\xi^l)$, por economia de notação.*

*Dado $r$ inteiro, vamos definir as classes $W[r]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\mathbb{R}P(\xi^l)$, conforme vimos na seção 1.6.1, por*

$$W[r](\mathbb{R}P(\eta^k)) = \frac{W(\mathbb{R}P(\eta^k))}{(1+c)^{l-r}}, \tag{3.3}$$

*e*

$$W[r](\mathbb{R}P(\xi^l)) = \frac{W(\mathbb{R}P(\xi^l))}{(1+c)^{l-r}}. \tag{3.4}$$

*Nosso objetivo aqui é mostrar o seguinte teorema:*

***Teorema 3.1.1*** *Seja $(M,T)$ involução suave fixando $F = \mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, com $M$ variedade fechada conexa e $n \geq 10$ e par. Então $(M,T)$ é equivariantemente cobordante a $\Gamma^j(\mathbb{R}P^{n+7}, T_{6,n})$, para algum $0 \leq j \leq h(6,n)$.*

*Para provar o Teorema 3.1.1, é suficiente provar o seguinte lema:*

***Lema 3.1.1*** *Se $n \geq 10$ par, então*
*(i) $W(\eta^k) = (1+\alpha)^{n+1}$,*
*(ii) $W(\xi^l) = (1+\beta)^7$,*
*onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^6, \mathbb{Z}_2)$ e $\beta \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ são os respectivos geradores.*

***Demonstração:*** *De fato, suponha que o Lema 3.1.1 é verdadeiro. Denotemos por $\eta^k \to \mathbb{R}P^6$ e $\xi^l \to \mathbb{R}P^n$ os fibrados normais de $\mathbb{R}P^6$ e $\mathbb{R}P^n$ em $M$, respectivamente. Para $0 \leq j \leq h(6,n)$, a involução $\Gamma^j(\mathbb{R}P^{n+7}, T_{6,n})$ é equivariantemente cobordante a uma involução com* fixed data

$$\begin{array}{ccc} (n+1)\lambda_6 \oplus j\mathbb{R} & & 7\lambda_n \oplus j\mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^6 & & \mathbb{R}P^n \end{array}.$$

*Note que $w_7(\xi^l) = \binom{7}{7}\beta^7 \neq 0$ e assim $l \geq 7$. Então*

$$\eta^k \cup \xi^l \ \text{ e } \ (n+1)\lambda_6 \oplus (l-7)\mathbb{R} \cup 7\lambda_n \oplus (l-7)\mathbb{R}$$

*são cobordantes, pois eles tem os mesmos números característicos. Se $l \leq 7 + h(6,n)$, então temos que $(M,T)$ e $\Gamma^{l-7}(\mathbb{R}P^{n+7}, T_{6,n})$ são equivariantemente cobordantes, provando o resultado. Suponha por contradição que $l > 7 + h(6,n)$. Então,*

$$\begin{array}{ccc} (n+1)\lambda_6 \oplus (l-7)\mathbb{R} & & 7\lambda_n \oplus (l-7)\mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^6 & & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

*é o* fixed data *de uma involução $(W,S)$, e removendo secções se necessário, podemos supor sem perdas, que $dim(W) = n+1+6+h(6,n)+1 = n+8+h(6,n)$. Seja $(N,T')$ uma involução cobordante a $\Gamma^{h(6,n)}(\mathbb{R}P^{n+7}, T_{6,n})$ e com* fixed data

$$\begin{array}{ccc} (n+1)\lambda_6 \oplus h(6,n)\mathbb{R} & & 7\lambda_n \oplus h(6,n)\mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^6 & & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

*Sabemos que $N$ não borda. Então $\Gamma(N,T')\cup(W,S)$ é cobordante a uma involução com* fixed data *$\mathbb{R} \to N$, e então $\mathbb{R} \to N$ borda, que é uma contradição.*

*Resta então demonstrarmos o Lema 3.1.1, o que significa que a classificação pretendida se reduz a mostrar que as classes características dos fibrados normais $\eta^k$ e $\xi^l$ assumem determinada forma. Inicialmente, apresentaremos alguns lemas que serão úteis em nossos argumentos.*

***Lema 3.1.2*** *Seja $\eta^k \to \mathbb{R}P^n$ um $k$-fibrado vetorial sobre um espaço projetivo qualquer, com $k, n > 0$. Se $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ e $c$ é a primeira classe característica do fibrado linha associado $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$, então para cada $v \geq 1$:*

- $Sq^{2^v}(\alpha^{2^v}c) = \alpha^{2^{v+1}}c$,
- $Sq^{2^v}(\alpha c^{2^v}) = \alpha c^{2^{v+1}}$,
- $Sq^{2^v}(c^{2^v+1}) = c^{2^{v+1}+1}$,

*onde $Sq^i$ são as operações de Steenrod (vide seção 1.6.3).*

***Demonstração:*** *Ver [22] p. 81, Lema 4.2.2.*

***Lema 3.1.3*** *Os números $p$ e $q$ são ímpares.*

***Demonstração:*** *Calculamos*

$$w_1(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{7}{1}\alpha + \binom{k}{1}c + \binom{p}{1}\alpha,$$

$$w_1(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{n+1}{1}\beta + \binom{l}{1}c + \binom{q}{1}\beta.$$

*Como $k+6 = n+l$ e $n$ é par segue, via Teorema 1.9.1, que $\binom{k}{1} = \binom{l}{1}$. Assim,*

$$w_1(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \binom{k}{1}c = (1+\binom{p}{1})\alpha \ \text{ e } \ w_1(\mathbb{R}P(\xi^l)) + \binom{l}{1}c = (1+\binom{q}{1})\beta.$$

*Observe que $(w_1(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \binom{k}{1}c)^n = ((1+\binom{p}{1})\alpha)^n = (1+\binom{p}{1})\alpha^n = 0$, pois $n \geq 10$ por hipótese. Então,*

$$\begin{aligned} 0 = (w_1(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \tbinom{k}{1}c)^n c^{l-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (w_1(\mathbb{R}P(\xi^l)) + \tbinom{l}{1}c)^n c^{l-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= ((1+\tbinom{q}{1})\beta)^n c^{l-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (1+\tbinom{q}{1})\beta^n c^{l-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= 1+\tbinom{q}{1}. \end{aligned}$$

*Logo, $\binom{q}{1} = 1$. Em particular,*

$$\begin{aligned} 1+\tbinom{p}{1} &= ((1+\tbinom{p}{1})\alpha)^6 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= (w_1(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \tbinom{k}{1}c)^6 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= (w_1(\mathbb{R}P(\xi^l)) + \tbinom{l}{1}c)^6 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= ((\tbinom{q}{1}+1)\beta)^6 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = 0. \end{aligned}$$

*Desse modo, $\binom{p}{1} = 1$, como queríamos.* ∎

***Observação 3.1.1*** *Se $l=1$, então $\xi^l \to \mathbb{R}P^n$ é o fibrado linha sobre $\mathbb{R}P^n$ e sendo $q$ ímpar, temos $W(\xi^l)=(1+\beta)^q = 1+\binom{q}{1}\beta = 1+\beta$ e então $q=1$.*

*Daí, a involução $(M,T)\cup(\mathbb{R}P^{n+1},T_{0,n})$ é cobordante a uma involução fixando $\mathbb{R}P^6\cup\{ponto\}$, isto é, $(M,T)\cup(\mathbb{R}P^{n+1},T_{0,n})$ é cobordante a $\Gamma^j(\mathbb{R}P^7,T_{0,6})$, para algum $0\leq j\leq h_{0,6}=2$. Assim, $n+1=j+7\leq 9$ e, então $n\leq 8$. Como no nosso caso $n\geq 10$, segue que $l>1$.*

*Denotaremos por $t$ a menor potência de2na expansão diádica de $n$, com $2^t\geq 8$, e por $r$ a maior potência de 2 que aparece na expansão diádica de $n$, isto é, $8\leq 2^r\leq n<2^{r+1}$.*

*Podemos assumir que $p<8$ e $q<2^{r+1}$, onde $W(\eta^k)=(1+\alpha)^p$ e $W(\xi^l)=(1+\beta)^q$. De fato, se $q\geq 2^{r+1}$ então, como $q$ é ímpar, temos $q>2^{r+1}$. Assim, $q=t+2^{r+1}$, para algum $t$ ímpar, com $0<t<2^{r+1}$. Dessa forma,*

$$(1+\beta)^q=(1+\beta)^t(1+\beta)^{2^{r+1}}=(1+\beta)^t(1+\beta^{2^{r+1}})=(1+\beta)^t,$$

*e, neste caso, seguiríamos trabalhando com $t$ ao invés de $q$. Portanto, podemos assumir que $q<2^{r+1}$. Analogamente, podemos assumir que $p<8$.*

*Precisamos mostrar que $p$ e $q$ assumem os valores especificados no Lema 3.1.1. Nessa direção, nossa estratégia será determinar $p$ e $q$ analisando suas expansões diádicas. Para tanto, usaremos basicamente o fato de que*

$$p(c,w(\mathbb{R}P(\eta^k)))[\mathbb{R}P(\eta^k)]=p(c,w(\mathbb{R}P(\xi^l)))[\mathbb{R}P(\xi^l)]$$

*para todo polinômio homogêneo $p(c,w(\mathbb{R}P(-)))$, de grau $k+6-1=l+n-1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(-))$ e $c$. Além disso, $Sq^i$ evaluado em um produto de classes características também nos dá um polinômio nas classes características. Definamos $p'=8-p$ e $q'=2^{r+1}-q$, obtendo as classes duais*

$$\overline{W}(\eta^k)=(1+\alpha)^{p'} \text{ e } \overline{W}(\xi^l)=(1+\beta)^{q'}.$$

*Pelo Lema 3.1.3, sabemos que $p$ e $q$ são ímpares. Assim, $p'$ e $q'$ também são ímpares. Além disso,*

$$\begin{cases}\binom{p}{2^v}+\binom{p'}{2^v}=1, & \text{para cada } v=1,2.\\ \binom{q}{2^v}+\binom{q'}{2^v}=1, & \text{para cada } v=1,\cdots,r.\end{cases}$$

*pois, da maneira como definimos $p+p'=2^3$, e sendo $p,p'$ ímpares, podemos escrever $p+p'-1=2^3-1=1+2+2^2$. Assim, $(p-1)+(p'-1)=2+2^2$, ou seja, vemos que $p$ e $p'$ tem expansões diádicas disjuntas e completas, no sentido de que $2^v$, com $1\leq v<3$, pertence ou a expansão diádica de $p$ ou a de $p'$.*

*De maneira análoga, pela forma como foi definido $q+q'=2^{r+1}$, e sendo também $q,q'$ ímpares, então podemos escrever,*

$$q+q'-1=2^{r+1}-1=1+2+\cdots+2^r.$$

*Assim, $(q-1)+(q'-1)=2+2^2+\cdots+2^r$, ou seja, novamente percebemos que $q$ e $q'$ tem expansões diádicas disjuntas e completas , no sentido de que $2^v$, com $1\leq v\leq r$, pertence ou a expansão diádica de $q$ ou a de $q'$.*

*Note que*

$$(1+\alpha)^{n+1}=1+\binom{n+1}{1}\alpha+\binom{n+1}{2}\alpha^2+\binom{n+1}{3}\alpha^3+\binom{n+1}{4}\alpha^4+\binom{n+1}{5}\alpha^5+\binom{n+1}{6}\alpha^6$$

$$e\ (1+\alpha)^{n+1} = \begin{cases} (1+\alpha) & se\ \binom{n}{2}=0\ e\ \binom{n}{4}=0, \\ (1+\alpha)^3 & se\ \binom{n}{2}=1\ e\ \binom{n}{4}=0, \\ (1+\alpha)^5 & se\ \binom{n}{2}=0\ e\ \binom{n}{4}=1, \\ (1+\alpha)^7 & se\ \binom{n}{2}=1\ e\ \binom{n}{4}=1. \end{cases}$$

*Na seção 3.2, mostramos que $W(\eta^k)=(1+\alpha)^{n+1}$, provando assim o caso (i) do Lema 3.1.1 e na seção 3.3, $W(\xi^l)=(1+\beta)^7$, provando o caso (ii) do Lema 3.1.1.*

# *3.2 Prova do caso (i)*

*Nesta seção, provaremos os Lemas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 e 3.2.4. O caso em que $n=10$ será feito separadamente, no Lema 3.2.5, pois neste caso precisamos considerar outras classes características.*

***Lema 3.2.1** Se $\binom{n}{2}=0$ e $\binom{n}{4}=0$, então $p=1$.*

***Demonstração:** Sendo $\binom{n}{2}=0$ e $\binom{n}{4}=0$ e $n\geq 10$, então temos que $n=8j$, $j\geq 2$ (pois $n\geq 10$). Para mostrar que $p=1$, sendo $p<8$ e ímpar, é suficiente provarmos que $\binom{p}{2}=0$ e $\binom{p}{4}=0$.*

*A resolução deste caso é obtida com o uso das classes $\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = W[1](\mathbb{R}P(-)) = \dfrac{W(\mathbb{R}P(-))}{(1+c)^{l-1}}$. Das equações 3.3 e 3.4, obtemos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(((1+c)^{k-l+1}+(1+c)^{k-l}\alpha+(1+c)^{k-l-1}\binom{p}{2}\alpha^2++\cdots),\ sobre\ \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+1}((1+c)+\beta+(1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2+\cdots),\ sobre\ \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Assim, como $k+6=n+l=8j+l$ e, então $k-l+1=n-5=8j-5$, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-5}+(1+c)^{-6}\alpha+(1+c)^{-7}\binom{p}{2}\alpha^2++\cdots),\ sobre\ \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+1}((1+c)+\beta+(1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2+\cdots),\ sobre\ \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Faremos a prova por contradição.*

*(i) Suponha $\binom{p}{2}=0$ e $\binom{p}{4}=1$. Então $\binom{p'}{2}=1$ e $\binom{p'}{4}=0$. Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-5}+(1+c)^{-6}\alpha+(1+c)^{-9}\alpha^4+(1+c)^{-10}\alpha^5),\ sobre\ \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+1}((1+c)+\beta+(1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2+\cdots),\ sobre\ \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k))=c^3+\alpha^2c$ e $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l))=\binom{q}{2}\beta^2c$. Assim, obtemos*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_3}^2c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (c^6+\alpha^4c^2)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \binom{p'}{6}+\binom{p'}{2}=1 \\ &= \widetilde{w_3}^2c^{n+l-7}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \binom{q}{2}\beta^4c^{n+l-5}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \binom{q}{2}\binom{q'}{n-4}, \end{aligned}$$

*de onde tem-se que*

$$\binom{q}{2}=1,\ e\ \binom{q'}{n-4}=1\ e\ então\ \widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l))=\beta^2c. \qquad (3.5)$$

*Para $t \leq x \leq r$ e usando o Lema 3.1.2, temos*

$$Sq^{2^{x-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(c^3+\alpha^2 c)))) = c^{2^x}c + \alpha^{2^x} = c^{2^x}c$$

*e*

$$Sq^{2^{x-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\beta^2 c)))) = \beta^{2^x}c,$$

*que são classes correspondentes em $\mathbb{R}P^6$ e $\mathbb{R}P^n$. Pela Fórmula de Conner 1.6.1 e pelo fato $2^x \geq 2^t \geq 8$, tem-se*

$$0 = \binom{p'}{6} = c^{2^x}cc^{k+6-1-2^x-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = \beta^{2^x}cc^{l+n-1-2^x-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = \binom{q'}{n-2^x}. \tag{3.6}$$

*Suponha $t = r$, isto é, $n = 2^r$. Assim, pela equação 3.6, temos que $\binom{q'}{n-2^r} = 0$.*

*Por outro lado, $\binom{q'}{n-2^r} = \binom{q'}{0} = 1$, o que nos dá uma contradição.*

*Suponha agora $t < r$, isto é, $n = 2^t + B + 2^r$, onde $B$ representa as potências de 2 maiores que $2^t$ e menores que $2^r$, podendo eventualmente não ocorrerem. Pela equação 3.5,*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2^t + B + 2^r - 4} = \binom{q'}{2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{t-1} + B + 2^r} = 1.$$

*Daí, $\binom{q}{n-2^t} = \binom{q'}{B+2^r} = 1$, contradizendo a equação 3.6. Portanto este caso não ocorre.*

*(ii) Suponha $\binom{p}{2} = 1$ e $\binom{p}{4} = 0$. Então $\binom{p'}{2} = 0$ e $\binom{p'}{4} = 1$. Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-5} + (1+c)^{-6}\alpha + (1+c)^{-7}\alpha^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+1}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c + c^2$ e $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2 + \beta c$. Assim, obtemos*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_2}c^{k+5-2}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2 + \alpha c + c^2)c^{k+3}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \tbinom{p'}{4} + \tbinom{p'}{5} + \tbinom{p'}{6} = 0 \\ &= \widetilde{w_2}c^{n+l-3}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\tbinom{q'}{2}\beta^2 + \beta c)c^{n+l-3}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{2}\tbinom{q'}{n-2} + \tbinom{q'}{n-1} \end{aligned}$$

*implicando que*

$$\binom{q'}{2}\binom{q'}{n-2} + \binom{q'}{n-1} = 0. \tag{3.7}$$

*Para $t \leq x \leq r$, novamente pelo Lema 3.1.2, temos*

$$Sq^{2^{x-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2((\alpha^2 + \alpha c + c^2)c)))) = (c^{2^x+1} + \alpha c^{2^x})$$

*e*

$$Sq^{2^{x-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2((\binom{q'}{2}\beta^2 + \beta c)c)))) = \binom{q'}{2}\beta^{2^x}c + \beta c^{2^x}$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$. *Usando a Fórmula de Conner e pelo fato que* $2^x \geq 2^t \geq 8$, *tem-se*

$$\begin{aligned}(c^{2^x+1} + \alpha c^{2^x})c^{k+5-2^x-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= \tbinom{p'}{6} + \tbinom{p'}{5} = 1 \\ &= (\tbinom{q'}{2}\beta^{2^x}c + \beta c^{2^x})c^{n+l-1-2^x-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{2}\tbinom{q'}{n-2^x} + \tbinom{q'}{n-1}\end{aligned}$$

*de onde obtemos que*

$$\binom{q'}{n-1} + \binom{q'}{2}\binom{q'}{n-2^x} = 1. \tag{3.8}$$

*Somando as equações 3.7 e 3.8 temos que* $\binom{q'}{2} = 1$ *e* $\binom{q'}{n-2} + \binom{q'}{n-2^x} = 1$.

*Agora, considerando os números característicos associados a* $\widetilde{w_2}^2 c^{k+5-4}$, *obtemos*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_2}^2 c^{k+5-4}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4 + \alpha^2c^2 + c^4)c^{k+1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \tbinom{p'}{6} + \tbinom{p'}{2} + \tbinom{p'}{4} = 1 \\ &= \widetilde{w_2}^2 c^{l+n-1-4}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^4 + \beta^2c^2)c^{n+l-5}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-4} + \tbinom{q'}{n-2}\end{aligned}$$

*o que acarreta*

$$\binom{q'}{n-2} + \binom{q'}{n-4} = 1. \tag{3.9}$$

*Suponha* $t = r$, *isto é,* $n = 2^r$. *Se* $\binom{q'}{n-2} = 1$, *então*

$$\binom{q'}{n-2} = \binom{q'}{2 + 2^2 + \cdots + 2^{r-1}} = 1,$$

*daí* $2, 2^2, \cdots, 2^{r-1}$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Logo,*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{r-1}} = 1,$$

*o que contradiz a equação 3.9. Assim,*

$$\binom{q'}{n-2} = \binom{q'}{2 + 2^2 + \cdots + 2^{r-1}} = 0,$$

*ou seja, existe pelo menos uma potência* $2^s$, *com* $s \geq 2$ *(pois* $\binom{q'}{2} = 1$*) que pertence à expansão diádica de* $n-2$ *e que não pertence à expansão diádica de* $q'$. *Isto implica que*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{r-1}} = 0,$$

*o que novamente contradiz a equação 3.9.*

*Agora suponha que* $t < r$, *isto é,* $n = 2^t + B + 2^r$, *onde* $B$ *representa as potências de 2 maiores que* $2^t$ *e menores que* $2^r$, *podendo eventualmente não ocorrerem.*

*Novamente, se* $\binom{q'}{n-2} = 1$*, então*

$$\binom{q'}{n-2} = \binom{q'}{2+2^2+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1,$$

*e daí* $2, 2^2, \cdots, 2^{t-1}, B, 2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$*. Logo,*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2^2+2^3+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1,$$

*o que contradiz a equação 3.9. Assim,*

$$\binom{q'}{n-2} = \binom{q'}{2+2^2+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 0,$$

*ou seja, existe pelo menos uma potência* $2^s$*, com* $s \geq 2$ *(pois* $\binom{q'}{2} = 1$*) que pertence à expansão diádica de* $n-2$ *e que não pertence à expansão diádica de* $q'$*. Isto implica que*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2^2+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 0,$$

*o que novamente contradiz a equação 3.9. Portanto este caso não ocorre.*

*(iii) Suponha* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 1$*. Então* $\binom{p'}{2} = 0$ *e* $\binom{p'}{4} = 0$*. Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-5}+(1+c)^{-6}\alpha+(1+c)^{-7}\alpha^2+\cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+1}((1+c)+\beta+(1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2+\cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então temos* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2+\alpha c+c^2$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2+\beta c$*. Também temos* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^4+\alpha c^3$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2c^2+\binom{q}{2}\beta^3c+[\binom{q}{3}+\binom{q}{4}]\beta^4$*.*

*Suponha que* $\binom{q'}{2} = 0$*. Então*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (c^2+\alpha^2+\alpha c)^6 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1 \\ &= \widetilde{w_2}^6 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta c)^6 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \binom{q'}{n-6} \end{aligned}$$

*e isto implica que*

$$\binom{q'}{n-6} = 1. \tag{3.10}$$

*Suponha que* $t = r$*, isto é,* $n = 2^r$*. Assim, pela equação 3.10,*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2+2^3+2^4+\cdots+2^{r-1}} = 1,$$

*daí,* $2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^{r-1}$ *pertencem à expansão diádica do* $q'$*, o que é impossível pois supomos que* $\binom{q'}{2} = 0$*.*

*Agora, suponha que* $t < r$*, isto é,* $n = 2^t + B + 2^r$*, onde* $B$ *representa as potências de 2* *maiores que $2^t$ e menores que $2^r$, podendo eventualmente não ocorrerem. Assim, pela equação 3.10,*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2+2^3+2^4+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1,$$

*daí, $2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^{t-1}, B, 2^r$ pertencem à expansão diádica do $q'$. Novamente isto é impossível pois supomos que $\binom{q'}{2} = 0$. Portanto, $\binom{q'}{2} = 1$.*

*Considerando os números característicos associados a $\widetilde{w_2}^4 c^{k+5-8}$ e $\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^4 c^{k+5-12}$, obtemos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}^4 c^{k+5-8}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c+c^2)^4 c^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= \tbinom{p'}{2} + \tbinom{p'}{6} = 0\\
&= \widetilde{w_2}^4 c^{n+l-1-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^2+\beta c)^4 c^{n+l-9}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{n-8} + \tbinom{q'}{n-4}
\end{aligned}$$

*e isto implica que*

$$\binom{q'}{n-8} + \binom{q'}{n-4} = 0 \tag{3.11}$$

*e*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^4 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha c^3)(\alpha^2+\alpha c+c^2)^4 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= \tbinom{p'}{2} + \tbinom{p'}{1} + \tbinom{p'}{5} = 1\\
&= \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^4 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q}{4}\beta^4(\beta^2+\beta c)^4 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q}{4}\left[\tbinom{q'}{n-12} + \tbinom{q'}{n-8}\right].
\end{aligned}$$

*Segue que*

$$\binom{q'}{n-12} + \binom{q'}{n-8} = 1 \text{ e } \binom{q}{4} = 1. \tag{3.12}$$

*Suponha $t = r$, isto é, $n = 2^r$. Pela equação 3.12, temos que $\binom{q}{4} = 1$, então*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2^2+2^3+\cdots+2^{r-1}} = 0.$$

*Assim, pela equação 3.11, segue que $\binom{q'}{n-8} = 0$. Logo, pela equação 3.12, temos $\binom{q'}{n-12} = 1$. Por outro lado,*

$$\binom{q'}{n-12} = \binom{q'}{2^2+2^4+2^5+\cdots+2^{r-1}} = 0,$$

*pois 4 não pertence à expansão diádica de $q'$, o que é uma contradição.*

*Agora suponha $t < r$, isto é, $n = 2^t+B+2^r$, onde $B$ representa as potências de 2 maiores do que $2^t$ e menores do que $2^r$, podendo eventualmente não ocorrerem. Pela equação 3.12, temos que $\binom{q}{4} = 1$, e então*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2^2+2^3+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 0.$$

*Assim, pela equação 3.11, segue que* $\binom{q'}{n-8} = 0$. *Logo, pela equação 3.12, temos* $\binom{q'}{n-12} = 1$. *Por outro lado,*

$$\binom{q'}{n-12} = \binom{q'}{2^2 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{t-1} + B + 2^r} = 0,$$

*pois 4 não pertence à expansão diádica de* $q'$, *o que é uma contradição. Portanto, este caso também não ocorre.*

*Logo, devemos ter* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 0$, *o que acarreta que* $p = 1$. ■

***Lema 3.2.2*** *Se* $\binom{n}{2} = 1$ *e* $\binom{n}{4} = 0$, *então* $p = 3$.

***Demonstração:*** *Sendo* $\binom{n}{2} = 1$ *e* $\binom{n}{4} = 0$ *e* $n \geq 10$, *podemos supor que* $n = 8j + 2$, $j \geq 2$. *O caso* $n = 10$ *será feito separadamente.*

*Para mostrar que* $p = 3$, *sendo* $p < 8$ *e ímpar, é suficiente provarmos que* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 0$. *A resolução deste caso é obtida com o uso das classes* $\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = W[1](\mathbb{R}P(-)) = \dfrac{W(\mathbb{R}P(-))}{(1+c)^{l-1}}$. *Das equações 3.3 e 3.4, obtemos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(((1+c)^{k-l+1} + (1+c)^{k-l}\alpha + (1+c)^{k-l-1}\binom{p}{2}\alpha^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+3}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Assim, como* $k + 6 = n + l = 8j + 2 + l$ *e, então* $k - l + 1 = n - 5 = 8j - 3$, *temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-3} + (1+c)^{-4}\alpha + (1+c)^{-5}\binom{p}{2}\alpha^2 + + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+3}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Faremos a prova por contradição.*

*(i) Suponha* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 0$. *Então* $\binom{p'}{2} = 1$ *e* $\binom{p'}{4} = 1$. *Pela Fórmula de Conner 1.6.1, temos que*

$$1 = \binom{p'}{6} = c^{k+5}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = c^{n+l-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = \binom{q'}{n} \tag{3.13}$$

*ou seja, a expansão diádica de* $n$ *está contida na expansão diádica de* $q'$.

*Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-3} + (1+c)^{-4}\alpha), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+3}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2 c = \beta^2 c$ *pois 2 pertence à expansão diádica de* $n$.

*Pelo Lema 3.1.2, temos que*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\alpha^2 c)))) = \alpha^{2^r} c$$

*e*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\beta^2 c)))) = \beta^{2^r} c$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$*. Então*

$$0 = (\alpha^{2^r}c)c^{k+5-2^r-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = (\beta^{2^r}c)c^{l+n-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = \binom{q'}{n-2^r},$$

*o que nos dá uma contradição, pois* $2^r$ *é a maior potência de 2 que pertence à expansão diádica de* $n$ *e pela equação 3.13 temos que a expansão diádica de* $n$ *está contida na de* $q'$*. Daí, a expansão diádica de* $n-2^r$ *também deve estar contida na de* $q'$*, e assim,* $\binom{q'}{n-2^r} = 1$*.*
*Portanto, este caso não ocorre.*

*(ii) Suponha* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 1$*. Então* $\binom{p'}{2} = 1$ *e* $\binom{p'}{4} = 0$*. Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-3} + (1+c)^{-4}\alpha + (1+c)^{-7}\alpha^4 + (1+c)^{-8}\alpha^5), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+3}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2 c$*. Assim, obtemos*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4 c^2)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \tbinom{p'}{2} = 1 \\ &= \widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\tbinom{q'}{2}\beta^4 c^2)c^{n+l-7}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{2}\tbinom{q'}{n-4} \end{aligned}$$

*e isto implica que*

$$\binom{q'}{2}\binom{q'}{n-4} = 1, \text{ e então } \widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2 c. \tag{3.14}$$

*Para* $t \leq x \leq r$*, pelo Lema 3.1.2, temos que*

$$Sq^{2^{x-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\alpha^2 c)))) = \alpha^{2^x}c = 0$$

*e*

$$Sq^{2^{x-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\beta^2 c)))) = \beta^{2^x}c$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$*. Pela Fórmula de Conner 1.6.1 e pelo fato de que* $2^x \geq 2^t \geq 8$*, tem-se*

$$0 = \alpha^{2^x}cc^{k+5-2^x-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = \beta^{2^x}cc^{n+l-1-2^x-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = \binom{q'}{n-2^x} \tag{3.15}$$

*Suponha* $t = r$*, isto é,* $n = 2 + 2^r$*. Pela equação 3.15, segue que*

$$\binom{q'}{n-2^r} = \binom{q'}{2} = 0.$$

*Por outro lado,* $\binom{q'}{2} = 1$ *pela equação 3.14, o que é uma contradição.*

*Agora suponha* $t < r$*, isto é,* $n = 2 + 2^t + B + 2^r$*, onde* $B$ *representa as potências de 2 maiores que* $2^t$ *e menores que* $2^r$*, podendo eventualmente não ocorrerem. Pela equação 3.15, segue que*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2+2^2+2^3+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1,$$

*daí* $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{t-1}, B, 2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Logo,*

$$\binom{q'}{n-2^t} = \binom{q'}{2+B+2^r} = 1,$$

*o que contradiz a equação 3.15. Portanto, este caso não ocorre.*

*(iii) Suponha* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 1$. *Então* $\binom{p'}{2} = 0$ *e* $\binom{p'}{4} = 0$. *Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-3} + (1+c)^{-4}\alpha + (1+c)^{-5}\alpha^2 + (1+c)^{-6}\alpha^3 + (1+c)^{-7}\alpha^4 + (1+c) \\ (1+\beta)^{8j+3}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \; sobre \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então temos* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 + \beta c$. *Também temos que* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = c^4 + \alpha^2 c^2 + \alpha^4$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 c^2 + \binom{q'}{2}\beta^3 c + \binom{q'}{4}\beta^4$.

*Suponha que* $\binom{q}{2} = 0$, *ou equivalentemente,* $\binom{q'}{2} = 1$. *Assim, considerando os números característicos associados a* $\widetilde{w_2}^4 c^{k+5-8}$ *e* $\widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}$, *obtemos*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_2}^4 c^{k+5-8}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)^4 c^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = \binom{p'}{2} = 0 \\ &= \widetilde{w_2}^4 c^{n+l-1-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta c)^4 c^{n+l-9}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \binom{q'}{n-4} \end{aligned}$$

*e isto implica que*

$$\binom{q'}{n-4} = 0 \tag{3.16}$$

*e*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)^6 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1 \\ &= \widetilde{w_2}^6 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta c)^6 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \binom{q'}{n-6}. \end{aligned}$$

*Segue que*

$$\binom{q'}{n-6} = 1. \tag{3.17}$$

*Suponha* $t = r$, *ou seja,* $n = 2 + 2^r$. *Então, pela equação 3.17, temos*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{r-1}} = 1,$$

*daí* $2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^{r-1}$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Além disso, pela equação 3.16,*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2 + 2^2 + \cdots + 2^{r-1}} = 0.$$

*Logo, 2 não pertence a expansão diádica de* $q'$, *o que é uma contradição, pois supomos que* $\binom{q'}{2} = 1$.

*Agora suponha* $t < r$, *ou seja,* $n = 2 + 2^t + B + 2^r$, *onde* $B$ *representa as potências de*$2$*maiores que* $2^t$ *e menores que* $2^r$, *podendo eventualmente não ocorrerem. Então, pela equação 3.17,* *temos*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1,$$

*daí* $2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^{t-1}, B, 2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Além disso, pela equação 3.16,*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{2+2^2+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 0.$$

*Logo, 2 não pertence à expansão diádica de* $q'$, *o que é uma contradição, pois supomos que* $\binom{q'}{2} = 1$.

*Portanto,* $\binom{q'}{2} = 0$ *e* $\binom{q}{2} = 1$.

*Agora, considerando os números característicos associados a* $\widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}$ *e* $\widetilde{w_4}^2\widetilde{w_2}^2 c^{k+5-12}$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)^6 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1\\
&= \widetilde{w_2}^6 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^2+\beta c)^6 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{n-6} + \tbinom{q'}{n-8} + \tbinom{q'}{n-10} + \tbinom{q'}{n-12}
\end{aligned}$$

*e isto implica que*

$$\binom{q'}{n-6} + \binom{q'}{n-8} + \binom{q'}{n-10} + \binom{q'}{n-12} = 1. \tag{3.18}$$

*Então*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}^2\widetilde{w_2}^2 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (c^4+\alpha^2c^2+\alpha^4)^2(\alpha^2+\alpha c)^2 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= \tbinom{p'}{2} + \tbinom{p'}{4} + 1 = 1\\
&= \widetilde{w_4}^2\widetilde{w_2}^2 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\tbinom{q'}{4}\beta^4)^2(\beta^2+\beta c)^2 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{n-6} + \tbinom{q'}{n-8} + \tbinom{q'}{4}\left[\tbinom{q'}{n-10} + \tbinom{q'}{n-12}\right],
\end{aligned}$$

*de onde segue que*

$$\binom{q'}{n-6} + \binom{q'}{n-8} + \binom{q'}{4}\left[\binom{q'}{n-10} + \binom{q'}{n-12}\right] = 1. \tag{3.19}$$

*Suponha* $t = r$, *ou seja,* $n = 2+2^r$. *Então, como temos que* $\binom{q'}{2} = 0$, *segue que* $\binom{q'}{n-8} = \binom{q'}{2+2^3+2^4+\cdots+2^{r-1}} = 0$ *e* $\binom{q'}{n-12} = \binom{q'}{2+2^2+2^4+\cdots+2^{r-1}} = 0$. *Assim,*

$$\begin{cases}
\dbinom{q'}{n-6} + \dbinom{q'}{n-10} = 1 & (3.20)\\[2ex]
\dbinom{q'}{n-6} + \dbinom{q'}{4}\dbinom{q'}{n-10} = 1 & (3.21)
\end{cases}$$

*Se*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2^2+2^3+\cdots+2^{r-1}} = 1,$$

*então* $2^2, 2^3, \cdots, 2^{r-1}$ *pertencem a expansão diádica de* $q'$. *Daí,*

$$\binom{q'}{n-10} = \binom{q'}{2^3+\cdots+2^{r-1}} = 1,$$

*o que contradiz a equação 3.20. Assim,* $\binom{q'}{n-6} = 0$.

*Daí, pela equação 3.21, temos que* $\binom{q'}{4}\binom{q'}{n-10} = 1$. *Como*

$$\binom{q'}{n-10} = \binom{q'}{2^3+\cdots+2^{r-1}} = 1 \ e \ \binom{q'}{4} = 1,$$

*temos que* $2^2, 2^3, \cdots, 2^{r-1}$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Logo,*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2^2+2^3+\cdots+2^{r-1}} = 1,$$

*o que novamente contradiz a equação 3.20.*

*Suponha agora que* $t < r$, *ou seja,* $n = 2 + 2^t + B + 2^r$, *onde* $B$ *representa as potências de 2 maiores do que* $2^t$ *e menores do que* $2^r$, *podendo eventualmente não ocorrerem. Como* $\binom{q'}{2} = 0$, *segue que* $\binom{q'}{n-8} = \binom{q'}{2+2^3+2^4+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 0$ *e* $\binom{q'}{n-12} = \binom{q'}{2+2^2+2^4+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 0$. *Assim temos as seguintes equações:*

$$\begin{cases} \binom{q'}{n-6} + \binom{q'}{n-10} = 1 & (3.22) \\ \binom{q'}{n-6} + \binom{q'}{4}\binom{q'}{n-10} = 1 & (3.23) \end{cases}$$

*Se*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2^2+2^3+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1$$

*então* $2^2, 2^3, \cdots, 2^{t-1} + B + 2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Daí,*

$$\binom{q'}{n-10} = \binom{q'}{2^3+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1,$$

*o que contradiz a equação 3.22. Assim,* $\binom{q'}{n-6} = 0$. *Daí, pela equação 3.23, temos que* $\binom{q'}{4}\binom{q'}{n-10} = 1$. *Como*

$$\binom{q'}{n-10} = \binom{q'}{2^3+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1 \ e \ \binom{q'}{4} = 1,$$

*temos que* $2^2, 2^3, \cdots, 2^{t-1} + B + 2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Logo,*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2^2+2^3+\cdots+2^{r-1}} = 1,$$

*o que novamente contradiz a equação 3.22. Portanto este caso não ocorre.*

*Logo, devemos ter* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 0$. *Ou seja, concluimos que,* $p = 3$. ■

***Lema 3.2.3*** *Se* $\binom{n}{2} = 0$ *e* $\binom{n}{4} = 1$, *então* $p = 5$.

***Demonstração:*** *Sendo* $\binom{n}{2} = 0$, $\binom{n}{4} = 1$ *e* $n \geq 10$, *podemos supor que* $n = 8j + 4$, $j \geq 1$. *Para mostrar que* $p = 5$, *sendo* $p < 8$ *e ímpar, é suficiente mostrar que* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 1$. *A*

*resolução deste caso é obtida com o uso das classes* $\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = W[1](\mathbb{R}P(-)) = \dfrac{W(\mathbb{R}P(-))}{(1+c)^{l-1}}$.
*Das equações 3.3 e 3.4, obtemos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(((1+c)^{k-l+1} + (1+c)^{k-l}\alpha + (1+c)^{k-l-1}\binom{p}{2}\alpha^2 + + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+3}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Assim, como* $k+6 = n+l = 8j+4+l$ *e, então* $k-l+1 = n-5 = 8j+4-5 = 8j-1$, *temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-1} + (1+c)^{-2}\alpha + (1+c)^{-3}\binom{p}{2}\alpha^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+5}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Novamente faremos a prova por contradição.*

*(i)Suponha* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 0$. *Então* $\binom{p'}{2} = 1$ *e* $\binom{p'}{4} = 1$. *Pela Fórmula de Conner 1.6.1, temos que*

$$1 = \binom{p'}{6} = c^{k+5}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = c^{n+l-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = \binom{q'}{n} \tag{3.24}$$

*ou seja, a expansão diádica de* $n$ *está contida na expansão diádica de* $q'$.

*Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-1} + (1+c)^{-2}\alpha), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k), \\ (1+\beta)^{8j+5}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = c^3 + \alpha^2 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 c$. *Pela Lema 3.1.2, temos que*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(c^3+\alpha^2 c)))) = c^{2^r+1} + \alpha^{2^r}c = c^{2^r+1}$$

*e*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\binom{q}{2}\beta^2 c)))) = \binom{q}{2}\beta^{2^r}c$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$. *Assim,*

$$\begin{aligned} c^{2^r+1}c^{k+5-2^r-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= \tbinom{p'}{6} = 1 \\ &= \tbinom{q}{2}\beta^{2^r}cc^{l+n-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q}{2}\tbinom{q'}{n-2^r} \end{aligned}$$

*de onde temos que*

$$\binom{q}{2}\binom{q'}{n-2^r} = 1. \tag{3.25}$$

*Assim,* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 c = \beta^2 c$.

*Agora, considerando o número característico associado a* $\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6}$*, obtemos*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (c^6+\alpha^4c^2)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \tbinom{p'}{6}+\tbinom{p'}{2}=0\\ &= \widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\tbinom{q}{2}\beta^4c^2)(c^{k-1})[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{n-4}\end{aligned}$$

*e isto implica que*

$$\binom{q'}{n-4}=0. \tag{3.26}$$

*Suponha* $t=r$*, ou seja,* $n=4+2^r$*. Então pela equação 3.24, temos que* $4$ *e* $2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$*. Daí,* $\binom{q'}{n-4}=\binom{q'}{2^r}=1$*, o que contradiz a equação 3.26.*

*Suponha agora que* $t<r$*, ou seja,* $n=4+2^t+B+2^r$*, onde* $B$ *representa as potências de* $2$ *maiores que* $2^t$ *e menores que* $2^r$*, podendo eventualmente não ocorrerem. Então, pela equação 3.24 temos que* $4,2^t,B,2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$*. Daí,* $\binom{q'}{n-4}=\binom{q'}{2^t+B+2^r}=1$*, o que novamente contradiz a equação 3.26.*

*Portanto este caso não ocorre.*

*(ii) Suponha* $\binom{p}{2}=1$ *e* $\binom{p}{4}=0$*. Então* $\binom{p'}{2}=0$ *e* $\binom{p'}{4}=1$*. Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-))=\begin{cases}(1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-1}+(1+c)^{-2}\alpha+(1+c)^{-3}\alpha^2+(1+c)^{-4}\alpha^3), & em\ \mathbb{R}P(\eta^k),\\ (1+\beta)^{8j+5}((1+c)+\beta+(1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2+\cdots), & em\ \mathbb{R}P(\xi^l).\end{cases}$$

*Então* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k))=\alpha^2+\alpha c+c^2$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l))=\binom{q'}{2}\beta^2+\beta c$*. Assim,*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_2}c^{k+5-2}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c+c^2)c^{k+3}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \tbinom{p'}{4}+\tbinom{p'}{5}+\tbinom{p'}{6}=0\\ &= \widetilde{w_2}c^{n+l-1-2}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\tbinom{q'}{2}\beta^2+\beta c)c^{n+l-3}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{2}\tbinom{q'}{n-2}+\tbinom{q'}{n-1},\end{aligned}$$

*e portanto,*

$$\binom{q'}{2}\binom{q'}{n-2}+\binom{q'}{n-1}=0. \tag{3.27}$$

*Para* $t\le x\le r$*, temos que*

$$Sq^{2^{x-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2((\alpha^2+\alpha c+c^2)c))))=\alpha^{2^x}c+\alpha c^{2^x}+c^{2^x+1}=\alpha c^{2^x}+c^{2^x+1}$$

*e*

$$Sq^{2^{x-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2((\binom{q'}{2}\beta^2c+\beta c)c))))=\binom{q'}{2}\beta^{2^x}c+\beta c^{2^x}$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$*. Segue que*

$$\begin{aligned}(\alpha c^{2^x}+c^{2^x+1})c^{k+5-2^x-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= \tbinom{p'}{5}+\tbinom{p'}{6}=1\\ &= (\tbinom{q'}{2}\beta^{2^x}c+\beta c^{2^x})c^{n+l-1-2^x-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{2}\tbinom{q'}{n-2^x}+\tbinom{q'}{n-1}\end{aligned}$$

*de onde temos que*

$$\binom{q'}{2}\binom{q'}{n-2^x}+\binom{q'}{n-1}=1. \tag{3.28}$$

*Também consideramos o número característico associado a* $\widetilde{w_2}^2c^{k+5-4}$, *e assim obtemos*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_2}^2c^{k+5-4}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^2c^2+c^4)c^{k+1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \tbinom{p'}{2}+\tbinom{p'}{4}+\tbinom{p'}{6}=1\\ &= \widetilde{w_2}^2c^{n+l-1-4}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^4+\beta^2c^2)(c^{n+l-5})[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{n-4}+\tbinom{q'}{n-2}.\end{aligned}$$

*Segue que*

$$\binom{q'}{n-4}+\binom{q'}{n-2}=1. \tag{3.29}$$

*Somando as equações 3.27 e 3.28, obtemos*

$$\binom{q'}{2}=1 \ e \ \binom{q'}{n-2^x}+\binom{q'}{n-2}=1. \tag{3.30}$$

*Suponha* $t=r$, *isto é,* $n=4+2^r$. *Se* $\binom{q'}{n-2^r}=1$, *então* $2^r$ *é a única potência de 2 que pertence à expansão diádica de* $n$ *e não pertence à de* $q'$. *Daí, pela equação 3.30 temos* $\binom{q'}{n-2}=\binom{q'}{2+2^r}=0$. *Note também que* $\binom{q'}{n-4}=\binom{q'}{2^r}=0$, *o que é uma contradiz a equação 3.29. Assim,* $\binom{q'}{n-2^r}=0$, *e então, pela equação 3.30, temos* $\binom{q'}{n-2}=\binom{q'}{2+2^r}=1$, *e então 2 e* $2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Assim,* $\binom{q'}{n-4}=\binom{q'}{2^r}=1$, *o que novamente contradiz a equação 3.29.*

*Suponha agora* $t<r$, *isto é,* $n=4+2^t+B+2^r$. *Se* $\binom{q'}{n-2^r}=1$, *então* $2^r$ *é a única potência de2que pertence à expansão diádica de* $n$ *e não pertence à de* $q'$. *Daí, pela equação 3.30, temos* $\binom{q'}{n-2}=\binom{q'}{2+2^t+B+2^r}=0$. *Note também que* $\binom{q'}{n-4}=\binom{q'}{2^t+B+2^r}=0$, *o que contradiz a equação 3.29. Assim,* $\binom{q'}{n-2^r}=0$, *e então pela equação 3.30 temos* $\binom{q'}{n-2}=\binom{q'}{2+2^t+B+2^r}=1$.

*Daí,* $2,2^t,B,2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Assim,* $\binom{q'}{n-4}=\binom{q'}{2^t+B+2^r}=1$, *o que contradiz a equação 3.29.*

*Portanto este caso não ocorre.*

*(iii) Suponha* $\binom{p}{2}=1$ *e* $\binom{p}{4}=1$. *Então* $\binom{p'}{2}=0$ *e* $\binom{p'}{4}=0$. *Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-))=\begin{cases}(1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-1}+(1+c)^{-2}\alpha+(1+c)^{-3}\alpha^2+(1+c)^{-4}\alpha^3+\cdots),\ em\ \mathbb{R}P(\eta^k),\\ (1+\beta)^{8j+5}((1+c)+\beta+(1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2+\cdots),\ em\ \mathbb{R}P(\xi^l).\end{cases}$$

*Então* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k))=\alpha^2+\alpha c+c^2$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l))=\binom{q'}{2}\beta^2+\beta c$. *Também,* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k))=\alpha^4+\alpha c^3+c^4$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l))=\binom{q}{2}\beta^2c^2+\binom{q}{2}\beta^3c+[\binom{q}{3}+\binom{q'}{4}]\beta^4$.

*Suponha que* $\binom{q'}{2}=0$*, ou equivalentemente* $\binom{q}{2}=1$*. Assim,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}^6c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c+c^2)^6c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= 1+\tbinom{p'}{4}+\tbinom{p'}{6}=1\\
&= \widetilde{w_2}^6c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta c)^6c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{n-6}.
\end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\binom{q'}{n-6}=1. \tag{3.31}$$

*Suponha* $t=r$*, isto é,* $n=4+2^r$*. Então, pela equação 3.31,*

$$\binom{q'}{n-6}=\binom{q'}{2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{r-1}}=1,$$

*e então temos que* $2,2^2,2^3,2^4,\cdots,2^{r-1}$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$*. Absurdo, pois supomos* $\binom{q'}{2}=0$*.*

*Suponha agora* $t<r$*, isto é,* $n=4+2^t+B+2^r$*, onde* $B$ *representa as potências de 2 maiores que* $2^t$ *e menores que* $2^r$*, podendo eventualmente não ocorrerem. Então, pela equação 3.31, temos*

$$\binom{q'}{n-6}=\binom{q'}{2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{t-1}+B+2^r}=1,$$

*o que implica que* $2,2^2,2^3,2^4,\cdots,2^{t-1},B,2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$*. Absurdo, pois supomos* $\binom{q'}{2}=0$*.*

*Portanto,* $\binom{q'}{2}=1$ *e* $\binom{q}{2}=0$*.*

*Agora, consideramos os números característicos associados a* $\widetilde{w_2}^4c^{k+5-8}$*,* $\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^2c^{k+5-8}$*,* $\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^4c^{k+5-12}$ *e* $\widetilde{w_4}c^{k+5-4}$*. Temos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}^4c^{k+5-8}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c+c^2)^4c^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= \tbinom{p'}{2}+\tbinom{p'}{6}=0\\
&= \widetilde{w_2}^4c^{n+l-1-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^2+\beta c)^4c^{n+l-9}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{n-8}+\tbinom{q'}{n-4},
\end{aligned}$$

*e portanto,*

$$\binom{q'}{n-8}+\binom{q'}{n-4}=0. \tag{3.32}$$

*Também,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^2c^{k+5-8}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha c^3+c^4)(\alpha^2+\alpha c+c^2)^2c^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= 1+\tbinom{p'}{1}+\tbinom{p'}{3}+\tbinom{p'}{5}+\tbinom{p'}{4}+\tbinom{p'}{6}\\
&= \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^2c^{n+l-1-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\tbinom{q'}{4}\beta^4)(\beta^2+\beta c)^2c^{n+l-9}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{4}\left[\tbinom{q'}{n-8}+\tbinom{q'}{n-6}\right]
\end{aligned}$$

*o que acarreta*

$$\binom{q'}{4}\left[\binom{q'}{n-8}+\binom{q'}{n-6}\right]=0. \tag{3.33}$$

*Agora,*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^4c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha c^3+c^4)(\alpha^2+\alpha c+c^2)^4c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \tbinom{p'}{1}+\tbinom{p'}{5}+\tbinom{p'}{6}=1\\ &= \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^4c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\tbinom{q'}{4}\beta^4)(\beta^2+\beta c)^4c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{4}\left[\tbinom{q'}{n-12}+\tbinom{q'}{n-8}\right],\end{aligned}$$

*o que implica que*

$$\binom{q'}{4}\left[\binom{q'}{n-12}+\binom{q'}{n-8}\right]=1. \tag{3.34}$$

*Finalmente,*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_4}c^{k+5-4}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha c^3+c^4)c^{k+1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \tbinom{p'}{2}+\tbinom{p'}{5}+\tbinom{p'}{6}=0\\ &= \widetilde{w_4}c^{n+l-1-4}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\tbinom{q'}{4}\beta^4)c^{n+l-5}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{4}\tbinom{q'}{n-4},\end{aligned}$$

*de onde temos que*

$$\binom{q'}{4}\binom{q'}{n-4}=0. \tag{3.35}$$

*Pela equação 3.34, temos que* $\binom{q'}{4}=1$*, e então* $\binom{q'}{n-4}=0$*. Daí, pela equação 3.32, segue que* $\binom{q'}{n-8}=0$*. Assim, pelas equações 3.33 e 3.34, temos que*

$$\binom{q'}{n-6}=0 \text{ e } \binom{q'}{n-12}=1. \tag{3.36}$$

*Suponha que* $t=r$*, isto é,* $n=4+2^r$*. Então*

$$\binom{q'}{n-12}=\binom{q'}{2^3+2^4+\cdots+2^{r-1}}=1,$$

*e assim,* $2^3,\cdots,2^{r-1}$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$*. Daí, como* $\binom{q'}{2}=1$ *e* $\binom{q'}{4}=1$*, segue que*

$$\binom{q'}{n-6}=\binom{q'}{2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{r-1}}=1,$$

*o que contradiz a equação 3.36.*

*Suponha agora* $t<r$*, isto é,* $n=4+2^t+B+2^r$*, onde* $B$ *representa as potências de 2 maiores que* $2^t$ *e menores que* $2^r$*, podendo eventualmente não ocorrerem. Então*

$$\binom{q'}{n-12}=\binom{q'}{2^3+2^4+\cdots+2^{t-1}+B+2^r}=1,$$

*e assim,* $2^3, \cdots, 2^{t-1}, B, 2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$*. Daí, como* $\binom{q'}{2} = 1$ *e* $\binom{q'}{4} = 1$*, segue que*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2+2^3+2^4+\cdots+2^{t-1}+B+2^r} = 1,$$

*o que contradiz a equação 3.36.*

*Portanto, este caso não ocorre. Logo, devemos ter* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 1$*. Segue que,* $p = 5$. ■

***Lema 3.2.4*** *Se* $\binom{n}{2} = 1$ *e* $\binom{n}{4} = 1$*, então* $p = 7$.

***Demonstração:*** *Sendo* $\binom{n}{2} = 1$, $\binom{n}{4} = 1$ *e* $n \geq 10$*, podemos supor que* $n = 8j+6$, $j \geq 1$ *. Para mostrar que* $p = 7$*, sendo* $p < 8$ *e ímpar, é suficiente mostrar que* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 1$*. A resolução deste caso é obtida com o uso das classes* $\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = W[1](\mathbb{R}P(-)) = \dfrac{W(\mathbb{R}P(-))}{(1+c)^{l-1}}$.
*Das equações 3.3 e 3.4, obtemos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(((1+c)^{k-l+1} + (1+c)^{k-l}\alpha + (1+c)^{k-l-1}\binom{p}{2}\alpha^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+7}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Assim, como* $k+6 = n+l = 8j+6+l$ *e, então* $k-l+1 = n-5 = 8j+6-5 = 8j+1$*, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^1 + \alpha + (1+c)^{-1}\binom{p}{2}\alpha^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+7}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Os argumentos seguintes são novamente obtidos usando contradição.*

*(i) Suponha* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 0$*. Então* $\binom{p'}{2} = 1$ *e* $\binom{p'}{4} = 1$*. Pela Fórmula de Conner 1.6.1, temos que:*

$$1 = \binom{p'}{6} = c^{k+5}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = c^{n+l-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = \binom{q'}{n}, \tag{3.37}$$

*ou seja, a expansão diádica de* $n$ *pertence à expansão diádica de* $q'$*. Neste caso temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^1 + \alpha), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+7}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2 c = \beta^2 c$*, pois 2 pertence à expansão diádica de* $n$.

*Sabendo que* $\binom{q'}{2} = 1$ *e usando o Lema 3.1.2, temos que*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\alpha^2 c)))) = \alpha^{2^r}c = 0$$

*e*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\beta^2 c)))) = \beta^{2^r}c$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$*. Assim,*

$$0 = (\alpha^{2^r}c)c^{k+5-2^r-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = (\beta^{2^r}c)c^{l+n-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = \binom{q'}{n-2^r}. \tag{3.38}$$

*Como $2^r$ é a maior potência de 2 na expansão diádica de $n$, pela equação 3.37 temos que $\binom{q'}{n} = 1$. Então a expansão diádica de $n-2^r$ também está contida na de $q'$, ou seja, $\binom{q'}{n-2^r} = 1$. Portanto, este caso não ocorre.*

*(ii) Suponha $\binom{p}{2} = 1$ e $\binom{p}{4} = 0$. Então $\binom{p'}{2} = 0$ e $\binom{p'}{4} = 1$. Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^1 + \alpha + (1+c)^{-1}\alpha^2 + (1+c)^{-2}\alpha^3), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+7}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então temos $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c$ e $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 + \beta c$. Também temos, $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 c^2$ e $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{4}\beta^4 + \binom{q'}{2}\beta^3 c + \binom{q}{2}\beta^2 c^2$. Assim,*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_2}c^{k+5-2}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)c^{k+3}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \tbinom{p'}{4} + \tbinom{p'}{5} = 0 \\ &= \widetilde{w_2}c^{n+l-1-2}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\tbinom{q}{2}\beta^2 + \beta c)c^{n+l-3}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q}{2}\tbinom{q'}{n-2} + \tbinom{q'}{n-1}. \end{aligned}$$

*Portanto,*

$$\binom{q}{2}\binom{q'}{n-2} + \binom{q'}{n-1} = 0. \tag{3.39}$$

*Pelo Lema 3.1.2, temos que*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2((\alpha^2+\alpha c)c)))) = \alpha^{2^r}c + \alpha c^{2^r} = \alpha c^{2^r}$$

*e*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2((\binom{q}{2}\beta^2 c + \beta c)c)))) = \binom{q}{2}\beta^{2^r}c + \beta c^{2^r}$$

*são classes correspondentes em $\mathbb{R}P^6$ e $\mathbb{R}P^n$, e então*

$$\begin{aligned} (\alpha c^{2^r})c^{k+5-2^r-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= \tbinom{p'}{5} = 1 \\ &= (\tbinom{q}{2}\beta^{2^r}c + \beta c^{2^r})c^{n+l-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q}{2}\tbinom{q'}{n-2^r} + \tbinom{q'}{n-1}, \end{aligned}$$

*o que implica que*

$$\binom{q}{2}\binom{q'}{n-2^r} + \binom{q'}{n-1} = 1. \tag{3.40}$$

*Somando as equações 3.39 e 3.40 temos*

$$\binom{q}{2} = 1 \text{ e } \binom{q'}{n-2^r} + \binom{q'}{n-2} = 1. \tag{3.41}$$

*Escreva $n = 2+2^2+2^t+B+2^r$, com $t \geq 3$, onde $B$ representa as potências de 2 maiores que $2^t$ e menores que $2^r$, podendo eventualmente não ocorrerem. Note que $\binom{q'}{n-2^r} = \binom{q'}{2+2^2+2^t+B} = 0$, pois $\binom{q'}{2} = 0$. Então segue da equação 3.41 que $\binom{q'}{n-2} = 1$, e isto implica que $2^2, 2^t, B, 2^r$ pertencem à expansão diádica de $q'$.*

*A estratégia para resolver este caso depende do valor de $t$, isto é, para cada $t$, consideraremos os números característicos associados a*

$$\begin{cases} \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^2} c^{k+5-12}; \\ \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^3} c^{k+5-20}; \\ \vdots \\ \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^{t-1}} c^{k+5-4-2^t}. \end{cases}$$

*Por exemplo, se $t = 3$, então é suficiente considerarmos o número característico associado a $\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^{t-1}} = \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^2}$. Assim,*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^2} c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2c^2)(\alpha^2+\alpha c)^4 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1 \\ &= \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^2} c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^2c^2)(\beta^2+\beta c)^4 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-10} + \tbinom{q'}{n-6}. \end{aligned}$$

*Note que $\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{2^t+B+2^r} = 1$ e, assim, temos*

$$\binom{q'}{n-10} = 0. \tag{3.42}$$

*Por outro lado, usando que $n = 2 + 2^2 + 2^t + B + 2^r$ e $t = 3$, obtemos*

$$\binom{q'}{n-10} = \binom{q'}{2+2^2+2^t+B+2^r-2-2^3} = \binom{q'}{2^2+B+2^r} = 1,$$

*pois vimos que $2^2, 2^t, B, 2^r$ pertencem à expansão diádica de $q'$. Isto contradiz a equação 3.42.*

*Se $t = 4$, então temos que considerar os números característicos associados a $\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^2} c^{k+5-12}$ e $\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^3} c^{k+5-20} = \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^{t-1}} c^{k+5-4-2^t}$. Ou seja, temos que*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^2} c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2c^2)(\alpha^2+\alpha c)^4 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1 \\ &= \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^2} c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^2c^2)(\beta^2+\beta c)^4 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-10} + \tbinom{q'}{n-6} \\ &= \tbinom{q'}{n-10} + 1, \end{aligned}$$

*implicando que $\binom{q'}{n-10} = 0$.*

*Mais ainda,*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^3} c^{k+5-20}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2c^2)(\alpha^2+\alpha c)^8 c^{k-15}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1 \\ &= \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^3} c^{n+l-1-20}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^2c^2)(\beta^2+\beta c)^8 c^{n+l-21}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-18} + \tbinom{q'}{n-10} \\ &= \tbinom{q'}{n-18} \end{aligned}$$

*de onde segue que $\binom{q'}{n-18} = 1$.*

*Entretanto, sendo* $n = 2 + 2^2 + 2^t + B + 2^r$ *e* $t = 4$, *temos*

$$\binom{q'}{n-18} = \binom{q'}{2+2^2+2^t+B+2^r-2-2^4} = \binom{q'}{2^2+B+2^r} = 1,$$

*o que é uma contradição.*

*Repetindo este processo para* $t > 4$, *temos que considerar os números característicos associados a*

$$\begin{cases} \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^2}c^{k+5-12}, \\ \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^3}c^{k+5-20}, \\ \vdots \\ \widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^{2^{t-1}}c^{k+5-4-2^t}. \end{cases}$$

*Assim, obtemos o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} \binom{q'}{n-10} + \binom{q'}{n-6} = 1 \\ \binom{q'}{n-18} + \binom{q'}{n-10} = 0 \\ \binom{q'}{n-34} + \binom{q'}{n-18} = 0 \\ \vdots \\ \binom{q'}{n-2^{t-1}-2} + \binom{q'}{n-2^{t-2}-2} = 0 \\ \binom{q'}{n-2^t-2} + \binom{q'}{n-2^{t-1}-2} = 0. \end{cases}$$

*Sendo* $\binom{q'}{n-6} = 1$, *então* $\binom{q'}{n-10} = 0$, *e assim* $\binom{q'}{n-18} = 0$, *e daí* $\binom{q'}{n-34} = 0, \cdots, \binom{q'}{n-2^{t-1}-2} = 0$, *e finalmente* $\binom{q'}{n-2^t-2} = 0$.

*Por outro lado, como* $\binom{q'}{n-2} = 1$ *temos que* $2^2, 2^t, B, 2^r$ *pertencem à expansão diádica de* $q'$. *Daí,*

$$\binom{q'}{n-2^t-2} = \binom{q'}{2+2^2+2^t+B+2^r-2^t-2} = \binom{q'}{2^2+B+2^r} = 1,$$

*o que é uma contradição. Portanto este caso não ocorre.*

**Nota** : *Observamos que este truque envolvendo um sistema de equações com o número de equações dependendo de* $t$ *não foi necessário para elucidar o caso* $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{R}P^{2n}$ *de [20], portanto é uma novidade técnica.*

*(iii)Suponha* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 1$. *Então* $\binom{p'}{2} = 1$ *e* $\binom{p'}{4} = 0$. *Neste caso, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^1 + \alpha + (1+c)^{-3}\alpha^4 + (1+c)^{-4}\alpha^5), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k), \\ (1+\beta)^{8j+7}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Então temos* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2 c$. *Também temos* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^4 + \alpha^3 c$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{4}\beta^4 + \binom{q'}{2}\beta^3 c + \binom{q}{2}\beta^2 c^2$. *Assim, obtemos*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4 c^2)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \binom{p'}{2} = 1\\ &= \widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\binom{q'}{2}\beta^4 c^2)c^{n+l-7}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \binom{q'}{2}\binom{q'}{n-4}\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_3} c^{k+5-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2 c)c^{k+2}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \binom{p'}{4} = 0\\ &= \widetilde{w_3} c^{n+l-1-3}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^2 c)c^{n+l-4}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \binom{q'}{n-2}.\end{aligned}$$

*Concluímos que 4 é a única potência de 2 que pertence à expansão diádica de $n$ e não pertence à expansão diádica de $q'$. Escreva $n = 2 + 2^2 + 2^t + B + 2^r$, com $t \geq 3$, onde $B$ representa as potências de 2 maiores que $2^t$ e menores que $2^r$, podendo eventualmente não ocorrerem.*

*Se $t = 3$, isto é, $n = 2 + 2^2 + 2^3 + B + 2^r$, então consideramos o número característico associado a $\widetilde{w_4}^2\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-14}$, e obtendo*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_4}^2\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-14}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4 + \alpha^3 c)^2(\alpha^2 c)^2 c^{k-9}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 0\\ &= \widetilde{w_4}^2\widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-14}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^4 + \beta^3 c)^2(\beta^2 c)^2 c^{n+l-15}\\ &= \binom{q'}{n-12} + \binom{q'}{n-10}.\end{aligned}$$

*Como $\binom{q'}{n-12} = \binom{q'}{2+2^2+2^3+B+2^r-2^2-2^3} = \binom{q'}{2+B+2^r} = 1$, segue que $\binom{q'}{n-10} = 1$. Entretanto, $\binom{q'}{n-10} = \binom{q'}{2+2^2+2^3+B+2^r-2-2^3} = \binom{q'}{2^2+B+2^r} = 0$. Então temos uma contradição, e assim $t \geq 4$.*

*Agora dividimos a prova em dois casos, quando $t$ é par e quando $t$ é ímpar.*

*Primeiro supomos que $t$ é par. Consideremos os números característicos associados a*

$$\begin{cases}\widetilde{w_4}^{2^{t-2}}\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6-2^t},\\ \widetilde{w_4}^{2^{t-4}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}} c^{k+5-6-2^t},\\ \widetilde{w_4}^{2^{t-6}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+2^{t-4}} c^{k+5-6-2^t},\\ \vdots\\ \widetilde{w_4}^{2^{t-(s-2)}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+\cdots+2^{t-(s-4)}} c^{k+5-6-2^t},\\ \widetilde{w_4}^{2^{t-s}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+\cdots+2^{t-(s-2)}} c^{k+5-6-2^t},\end{cases}$$

*onde $s$ é par e $4 \leq s \leq t-2$.*

*Por exemplo, se $t = 4$, então a única possibilidade para $s$ é $s = 2$, isto é, é suficiente considerarmos o número característico associado a $\widetilde{w_4}^{2^2}\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-16-6}$. Assim,*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_4}^{2^2}\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-16-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4 + \alpha^3 c)^{2^2}(\alpha^2 c)^2 c^{k-17}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 0\\ &= \widetilde{w_4}^{2^2}\widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-16-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^4 + \beta^3 c)^{2^2}(\beta^2 c)^2 c^{n+l-23}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^{16} + \beta^{12}c^4)\beta^4 cn + l - 21[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \binom{q'}{n-20} + \binom{q'}{n-16}.\end{aligned}$$

*Entretanto,*

$$\binom{q'}{n-20} = \binom{q'}{2+2^2+2^4+B+2^r-2^2-2^4} = \binom{q'}{2+B+2^r} = 1$$

*e*

$$\binom{q'}{n-16} = \binom{q'}{2+2^2+2^4+B+2^r-2^4} = \binom{q'}{2+2^2+B+2^r} = 0,$$

*o que é uma contradição.*

*Para $t=6$, tem-se $s=2$ e 4, isto é, temos que considerar os números característicos associados a*

$$\widetilde{w_4}^{2^{t-2}}\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-2^t-6} = \widetilde{w_4}^{2^4}\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-2^4-6}$$

*e*

$$\widetilde{w_4}^{2^{t-4}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}} c^{k+5-2^t-6} = \widetilde{w_4}^{2^2}\widetilde{w_3}^{2+2^4} c^{k+5-2^4-6}.$$

*Assim, obtemos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}^{2^4}\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-16-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^3c)^{2^4}(\alpha^2c)^2c^{k-17}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 0\\
&= \widetilde{w_4}^{2^4}\widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-16-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^4+\beta^3c)^{2^4}(\beta^2c)^2c^{n+l-23}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^{64}+\beta^{48}c^{16})\beta^4cn+l-21[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{n-68}+\tbinom{q'}{n-52}
\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}^{2^2}\widetilde{w_3}^{2+2^4} c^{k+5-16-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^3c)^{2^2}(\alpha^2c)^{2+2^4}c^{k-17}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 0\\
&= \widetilde{w_4}^{2^2}\widetilde{w_3}^{2+2^4} c^{n+l-1-16-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^4+\beta^3c)^{2^2}(\beta^2c)^{2+2^4}c^{n+l-23}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^{16}+\beta^{12}c^4)\beta^{36}c^{n+l-5}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{n-52}+\tbinom{q'}{n-48}.
\end{aligned}$$

*Então, como*

$$\binom{q'}{n-68} = \binom{q'}{2+2^2+2^6+B+2^r-2^2-2^6} = \binom{q'}{2+B+2^r} = 1,$$

*segue que $\binom{q'}{n-52}=1$, e daí $\binom{q'}{n-48}=1$. Entretanto,*

$$\binom{q'}{n-48} = \binom{q'}{2+2^2+2^6+B+2^r-2^4-2^5} = \binom{q'}{2+2^2+2^4+B+2^r} = 0,$$

*pois 4 não pertence à expansão diádica de $q'$, o que é uma contradição.*

*Repetindo este processo para qualquer $t \geq 8$, teremos que considerar os números característicos associados a*

$$\begin{cases} \widetilde{w_4}^{2^{t-2}}\widetilde{w_3}^{2}c^{k+5-6-2^t}, \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-4}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}}c^{k+5-6-2^t}, \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-6}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+2^{t-4}}c^{k+5-6-2^t}, \\ \vdots \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-(s-2)}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+\cdots+2^{t-(s-4)}}c^{k+5-6-2^t}, \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-s}}\widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+\cdots+2^{t-(s-2)}}c^{k+5-6-2^t}. \end{cases}$$

*Assim obtemos,*

$$\begin{cases} \binom{q'}{n-2^2-2^t} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-2}} = 0, \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-2}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-4}} = 0, \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-4}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-5}-2^{t-6}} = 0, \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-5}-2^{t-6}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-5}-2^{t-7}-2^{t-8}} = 0, \\ \vdots \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^{t-s+5}-2^{t-s+4}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^{t-s+3}-2^{t-s+2}} = 0, \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^{t-s+3}-2^{t-s+2}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^{t-s+1}-2^{t-s}} = 0. \end{cases}$$

*Note que*

$$\binom{q'}{n-2^2-2^t} = \binom{q'}{2+2^2+2^t+B+2^r-2^2-2^t} = \binom{q'}{2+B+2^r} = 1,$$

*e assim* $\binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-2}} = 1,$ *e daí* $\binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-4}} = 1, \cdots,$ *e finalmente*

$$\binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^{t-s+1}-2^{t-s}} = 1.$$

*Fazendo* $s = t-2$, *temos*

$$\binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots 2^5-2^3-2^2} = 1.$$

*Entretanto, se escrevermos* $n$ *na seguinte forma,*

$$n = 2+2^2+(2^t-1+1)+B+2^r = 2+2^2+(1+2^2+\cdots+2^{t-1}+1)+B+2^r,$$

*segue que*

$$\begin{aligned} n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots 2^5-2^3-2^2 &= n-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots 2^5-2^4 \\ &= 2+2^2+(1+2^2\cdots+2^{t-1}+1)+B+2^r-2^{t-1}\cdots-2^5-2^4 \\ &= 2+2^2+2^4+2^6+2^8+\cdots+2^{t-2}+B+2^r. \end{aligned}$$

*Como* 4 *pertence à expansão diádica de* $n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots 2^5-2^3-2^2$, *temos*

$$\binom{q'}{n-2^{t-1}-\cdots-2^7-2^5-2^4-2^3} = 0.$$

*Isto é uma contradição.*

**Nota** : *Novamente, este procedimento técnico iterativo envolvendo sistemas de muitas equações é uma novidade técnica em relação àquelas usadas por P. Pergher e A. Ramos no caso $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{R}P^{2n}$ em [20].*

*Agora, suponha $t$ ímpar. Então, como vimos que $t = 3$ não pode ocorrer, temos $t \geq 5$. Então consideraremos os números característicos associados a*

$$\begin{cases} \widetilde{w_4}^{2^{t-2}} \widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6-2^t}, \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-4}} \widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}} c^{k+5-6-2^t}, \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-6}} \widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+2^{t-4}} c^{k+5-6-2^t}, \\ \vdots \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-s}} \widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+2^{t-4}+\cdots+2^{t-s+2}} c^{k+5-6-2^t}, \end{cases}$$

*onde $s$ é par e $2 \leq s \leq t-1$.*

*Por exemplo, se $t = 5$, temos que $s = 2$ e $s = 4$, ou seja, temos que considerar os números característicos associados a*

$$\widetilde{w_4}^{2^{t-2}} \widetilde{w_3}^2 c^{k+5-2^t-6} = \widetilde{w_4}^{2^3} \widetilde{w_3}^2 c^{k+5-2^5-6}$$

*e*

$$\widetilde{w_4}^{2^{t-4}} \widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}} c^{k+5-2^t-6} = \widetilde{w_4}^2 \widetilde{w_3}^{2+2^3} c^{k+5-2^5-6}.$$

*Assim, obtemos*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_4}^{2^3} \widetilde{w_3}^2 c^{k+5-32-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^3 c)^{2^3} (\alpha^2 c)^2 c^{k-33}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 0 \\ &= \widetilde{w_4}^{2^3} \widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-32-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^4+\beta^3 c)^{2^3} (\beta^2 c)^2 c^{n+l-39}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^{32}+\beta^{24} c^8)\beta^4 cn+l-37[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-36} + \tbinom{q'}{n-28}, \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_4}^2 \widetilde{w_3}^{2+2^3} c^{k+5-32-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^3 c)^2 (\alpha^2 c)^{2+2^3} c^{k-33}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 0 \\ &= \widetilde{w_4}^2 \widetilde{w_3}^{2+2^3} c^{n+l-1-32-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^4+\beta^3 c)^2 (\beta^2 c)^{2+2^3} c^{n+l-39}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^8+\beta^6 c^2)\beta^{20} c^{n+l-29}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-28} + \tbinom{q'}{n-26}. \end{aligned}$$

*Então, como*

$$\binom{q'}{n-36} = \binom{q'}{2+2^2+2^5+B+2^r-2^5-2^2} = \binom{q'}{2+B+2^r} = 1,$$

*segue que $\binom{q'}{n-28} = 1$, e assim, $\binom{q'}{n-26} = 1$. Entretanto,*

$$\binom{q'}{n-26} = \binom{q'}{2+2^2+2^5+B+2^r-2^4-2^3-2} = \binom{q'}{2^2+2^3+B+2^r} = 0,$$

*pois 4 não pertence à expansão diádica de $q'$, o que é uma contradição.*

*Repetindo este processo para qualquer* $t \geq 7$*, teremos que considerar os números característicos associados a*

$$\begin{cases} \widetilde{w_4}^{2^{t-2}} \widetilde{w_3}^{2} c^{k+5-6-2^t}, \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-4}} \widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}} c^{k+5-6-2^t}, \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-6}} \widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+2^{t-4}} c^{k+5-6-2^t}, \\ \vdots \\ \widetilde{w_4}^{2^{t-s}} \widetilde{w_3}^{2+2^{t-2}+2^{t-4}+\cdots+2^{t-s+2}} c^{k+5-6-2^t}, \end{cases}$$

*onde* $s$ *é par e* $2 \leq s \leq t-1$*. Assim, obtemos o sistema de equações:*

$$\begin{cases} \binom{q'}{n-2^2-2^t} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-2}} = 0, \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-2}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-4}} = 0, \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-4}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-5}-2^{t-6}} = 0, \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-5}-2^{t-6}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-5}-2^{t-7}-2^{t-8}} = 0, \\ \vdots \\ \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^{t-s+3}-2^{t-s+2}} + \binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^{t-s+1}-2^{t-s}} = 0. \end{cases}$$

*Então, como* $4$ *é a única potência de* $2$ *que não pertence à expansão diádica de* $q'$*, segue que*

$$\binom{q'}{n-2^2-2^t} = \binom{q'}{2+2^t+B+2^r} = 1,$$

*e então* $\binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-2}} = 1$*, e assim,* $\binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-2^{t-4}} = 1$*,* $\cdots$*, e finalmente, iterativamente,* $\binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^{t-s+1}-2^{t-s}} = 1$*. Fazendo* $s = t-1$*, obtemos*

$$\binom{q'}{n-2^2-2^{t-1}-\cdots-2^4+2^2-2} = 1.$$

*Entretanto, se escrevermos* $n$ *na seguinte forma*

$$n = 2+2^2+(2^t-1+1)+B+2^r = 2+2^2+(1+2^2+\cdots+2^{t-1}+1)+B+2^r,$$

*teremos que*

$$\begin{aligned} n-2^2-2^{t-1}-\cdots-2^4+2^2-2 &= n-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots-2^6-2^4-2^3-2 \\ &= 2+2^2+(1+2^2\cdots+2^{t-1}+1)+B+2^r-2^{t-1}\cdots-2^4-2^3-2 \\ &= 2+2^2+2^5+2^7+2^9+\cdots+2^{t-2}+B+2^r. \end{aligned}$$

*Como* $4$ *pertence à expansão diádica de* $n-2^{t-1}-2^{t-3}-\cdots 2^6-2^4-2^3-2$*, temos*

$$\binom{q'}{n-2^{t-1}-\cdots-2^6-2^4-2^3-2} = 0,$$

*o que é uma contradição. Portanto este caso não ocorre.*

*Logo, devemos ter* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 1$*, o que implica que,* $p = 7$*, como queríamos.* ■

***Lema 3.2.5*** *Se* $n = 10$ *então* $p = 3$*.*

***Demonstração:*** *Para mostrar que $p = 3$, sendo $p < 8$ ímpar, é suficiente mostrar que $\binom{p}{2} = 1$ e $\binom{p}{4} = 0$. A resolução deste caso é obtida com o uso das classes $\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = W[1](\mathbb{R}P(-)) = \dfrac{W(\mathbb{R}P(-))}{(1+c)^{l-1}}$. Das equações 3.3 e 3.4, obtemos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(-)) = \begin{cases} (1+\alpha)^7(((1+c)^{k-l+1} + (1+c)^{k-l}\alpha + (1+c)^{k-l-1}\binom{p}{2}\alpha^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\eta^k); \\ (1+\beta)^{8j+3}((1+c) + \beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + \cdots), \text{ em } \mathbb{R}P(\xi^l). \end{cases}$$

*Assim, como $k + 6 = n + l = 10 + l$ e, então, $k - l + 1 = 10 - 5 = 5$, temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^5 + (1+c)^4\binom{p}{1}\alpha + (1+c)^3\binom{p}{2}\alpha^2 + (1+c)^2\binom{p}{3}\alpha^3 + \cdots),$$

*e*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta)^{11}((1+c) + \binom{q}{1}\beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + (1+c)^{-2}\binom{q}{3}\beta^3 + \cdots).$$

*Provaremos por contradição.*

*(i) Suponha $\binom{p}{2} = 0$ e $\binom{p}{4} = 0$. Então $\binom{p'}{2} = 1$ e $\binom{p'}{4} = 1$. Pela Fórmula de Conner 1.6.1, temos que*

$$1 = \binom{p'}{6} = c^{k+5}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = c^{n+l-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] = \binom{q'}{10}, \tag{3.43}$$

*ou seja, a expansão diádica de $n = 10 = 2 + 8$ está contida na expansão diádica de $q'$. Neste caso temos*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha)^7((1+c)^5 + (1+c)^4\alpha)$$

*e*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta)^{11}((1+c) + \binom{q}{1}\beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + (1+c)^{-2}\binom{q}{3}\beta^3 + \cdots).$$

*Então $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha c$ e $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 + \beta c = \beta c$, pois $\binom{q'}{2} = 1$. Também temos $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 c$ e $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2 c = \beta^2 c$. Assim,*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_3}^3\widetilde{w_2}c^{k+5-11}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2 c)^3(\alpha c)c^{k-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \alpha^7 c^{k-2}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 0 \\ &= \widetilde{w_3}^3\widetilde{w_2}c^{n+l-1-11}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^2 c)^3(\beta c)(c^{n+l-12})[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \beta^7 c^{n+l-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \binom{q'}{3} \end{aligned}$$

*o que contradiz a equação 3.43. Portanto este caso não ocorre.*

*(ii) Suponha $\binom{p}{2} = 0$ e $\binom{p}{4} = 1$. Então $\binom{p'}{2} = 1$ e $\binom{p'}{4} = 0$. Neste caso, temos que*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha)^7((1+c)^5 + (1+c)^4\alpha + (1+c)\alpha^4 + \alpha^5)$$

*e*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta)^{11}((1+c) + \binom{q}{1}\beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + (1+c)^{-2}\binom{q}{3}\beta^3 + \cdots).$$

*Então* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2 c$. *Também,* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^4 + \alpha^3 c + c^4$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{4}\beta^4 + \binom{q'}{2}\beta^3 c + \binom{q}{2}\beta^2 c^2$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4 c^2)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\
&= \tbinom{p'}{2} = 1 \\
&= \widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= (\tbinom{q'}{2}\beta^4 c^2)c^{n+l-7}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q'}{2}\tbinom{q'}{6}
\end{aligned}$$

*de onde segue que*

$$\binom{q'}{2}\binom{q'}{6} = 1. \tag{3.44}$$

*Agora, temos que*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}^2 c^{k+5-8}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^8 + \alpha^6 c^2 + c^8)c^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\
&= 1 + \tbinom{p'}{6} = 1 \\
&= \widetilde{w_4}^2 c^{n+l-1-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= (\beta^8 + \beta^6 c^2)c^{n+l-9}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q'}{2} + \tbinom{q'}{4},
\end{aligned}$$

*o que contradiz a equação 3.44. Portanto este caso não ocorre.*

*(iii) Suponha* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 1$. *Então* $\binom{p'}{2} = 0$ *e* $\binom{p'}{4} = 0$. *Neste caso temos que*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^5+(1+c)^4\alpha+(1+c)^3\alpha^2+(1+c)^2\alpha^3+(1+c)\alpha^4+\alpha^5+(1+c)^{-1}\alpha^6)$$

*e*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta)^{11}((1+c) + \binom{q}{1}\beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + (1+c)^{-2}\binom{q}{3}\beta^3 + \cdots).$$

*Então* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 + \beta c$, *e também* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = 0$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2}\beta^2 c$, *e por último* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^4 + \alpha^2 c^2 + c^4$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{4}\beta^4 + \binom{q'}{2}\beta^3 c + \binom{q}{2}\beta^2 c^2$.

*Suponha que* $\binom{q}{2} = 0$, *ou equivalentemente* $\binom{q'}{2} = 1$. *Então*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}^4 c^{k+5-8}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2 + \alpha c)^4 c^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\
&= \tbinom{p'}{2} = 0 \\
&= \widetilde{w_2}^4 c^{n+l-1-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= (\beta c)^4 c^{n+l-9}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q'}{6}.
\end{aligned}$$

*Como* $\binom{q'}{2} = 1$, *então* $\binom{q'}{4} = 0$, *e assim* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^3 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2 c$. *Daí,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}^2\widetilde{w_3}c^{k+5-11}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= 0\\
&= \widetilde{w_4}^2\widetilde{w_3}c^{n+l-1-11}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^3 c)^2(\beta^2 c)c^{n+l-1-11}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \binom{q'}{2},
\end{aligned}$$

*o que contradiz a suposição de que* $\binom{q'}{2} = 1$. *Portanto,* $\binom{q}{2} = 1$ *e* $\binom{q'}{2} = 0$.

*Note que* $w_3(\xi^l) = \binom{q}{3}\beta^3 = \beta^3 \neq 0$. *Então* $l \geq 3$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)^6 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1\\
&= \widetilde{w_2}^6 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^2+\beta c)^6 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= 1 + \binom{q'}{2} + \binom{q'}{4}
\end{aligned}$$

*implica que*

$$\binom{q'}{4} = 0. \tag{3.45}$$

*Além disso, temos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}^2\widetilde{w_2}^2 c^{k+5-10}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^2c^2+c^4)^2(\alpha^2+\alpha c)^2 c^{k-5}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= 1 + \binom{p'}{2} + \binom{p'}{4} = 1\\
&= \widetilde{w_4}^2\widetilde{w_2}^2 c^{n+l-1-10}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^2c^2)^2(\beta^2+\beta c)^2 c^{n+l-11}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \binom{q'}{2} + \binom{q'}{4},
\end{aligned}$$

*e portanto,*

$$\binom{q'}{4} = 1. \tag{3.46}$$

*Assim, das equações 3.45 e 3.46, temos uma contradição. Portanto este caso não ocorre. Logo, devemos ter* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 0$, *o que implica que* $p = 3$, *como queríamos.* ∎

## *3.3 Prova do caso (ii) do Lema 3.1.1*

*Nesta seção, provaremos que* $q = 7$. *Para isto, primeiro provaremos que* $\binom{q}{2} = 1$ *e* $\binom{q}{4} = 1$. *Daí, como* $q$ *é ímpar, segue que* $q \geq 7$.

***Lema 3.3.1*** $\binom{q}{2} = 1$ *e* $\binom{q}{4} = 1$. *Em particular,* $q \geq 7$.

***Demonstração:*** *(i) Primeiro considere o caso* $n = 8j$, $j \geq 2$. *Neste caso, sabemos que* $\binom{p}{2} = 0$ *e* $\binom{p}{4} = 0$. *Então* $\binom{p'}{2} = 1$ *e* $\binom{p'}{4} = 1$. *Assim,*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-5} + (1+c)^{-6}\binom{p}{1}\alpha)$$

*e*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta)^{8j+1}((1+c) + \binom{q}{1}\beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + (1+c)^{-2}\binom{q}{3}\beta^3 + \cdots).$$

*Então* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = c^3+\alpha^2 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 c$*. Mais ainda,* $\widetilde{w_5}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2c^3+\alpha^4 c$ *e* $\widetilde{w_5}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2c^3 + \binom{q}{4}\beta^4 c$*. Pelo Lema 3.1.2, temos que*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(c^3+\alpha^2c)))) = c^{2^r}c + \alpha^{2^r} = c^{2^r}c$$

*e*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\binom{q}{2}\beta^2c)))) = \binom{q}{2}\beta^{2^r}c,$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$*, o que acarreta*

$$\begin{aligned} c^{2^r}cc^{k+6-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= \tbinom{p'}{6} = 1 \\ &= \tbinom{q}{2}\beta^{2^r}cc^{l+n-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q}{2}\tbinom{q'}{n-2^r}. \end{aligned}$$

*Assim,* $\binom{q}{2} = 1$.

*Além disso,*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_3}^2c^{k+5-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (c^3+\alpha^2c)^2c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \tbinom{p'}{6} + \tbinom{p'}{2} = 0 \\ &= \widetilde{w_3}^2c^{n+l-1-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^2c)^2c^{n+l-7}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-4} \end{aligned}$$

*de onde temos que*

$$\binom{q'}{n-4} = 0. \tag{3.47}$$

*Também temos que*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_5}^2c^{k+5-10}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2c^3+\alpha^4c)^2c^{k-5}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \tbinom{p'}{2} = 1 \\ &= \widetilde{w_5}^2c^{n+l-1-10}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta^2c^3 + \tbinom{q}{4}\beta^4c)^2c^{n+l-11}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-4} + \tbinom{q}{4}\tbinom{q'}{n-8} \\ &= 0 + \tbinom{q}{4}\tbinom{q'}{n-8}. \end{aligned}$$

*Então,* $\binom{q}{4} = 1$.

*(ii) Agora suponha* $n = 8j+2$*, para* $j \geq 1$*. Neste caso,* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 0$*. Então* $\binom{p'}{2} = 0$ *e* $\binom{p'}{4} = 1$*. Assim,*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-3} + (1+c)^{-4}\alpha + (1+c)^{-5}\alpha^2 + (1+c)^{-6}\alpha^3)$$

*e*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta)^{8j+3}((1+c) + \binom{q}{1}\beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + (1+c)^{-2}\binom{q}{3}\beta^3 + \cdots).$$

*Então* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 + \beta c$. *Também* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = c^4 + \alpha^2 c^2$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2 c^2 + \binom{q'}{4}\beta^4$.

*Deste modo, segue que*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}c^{k+5-2}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2 + \alpha c)c^{k+3}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\
&= \tbinom{p'}{4} + \tbinom{p'}{5} = 0 \\
&= \widetilde{w_2}c^{n+l-1-2}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q}{2}\beta^2 + \beta c)c^{n+l-3}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q}{2}\tbinom{q'}{n-2} + \tbinom{q'}{n-1}
\end{aligned}$$

*de onde temos que*

$$\binom{q}{2}\binom{q'}{n-2} + \binom{q'}{n-1} = 0. \tag{3.48}$$

*Pelo Lema 3.1.2, temos que*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\alpha^2 c + \alpha c^2)))) = \alpha^{2^r}c + \alpha c^{2^r} = \alpha c^{2^r}$$

*e*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\binom{q}{2}\beta^2 c + \beta c^2)))) = \binom{q}{2}\beta^{2^r}c + \beta c^{2^r}$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$. *Portanto,*

$$\begin{aligned}
\alpha c^{2^r} c c^{k+6-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= \tbinom{p'}{5} = 1 \\
&= (\tbinom{q}{2}\beta^{2^r} + \beta c^{2^r})c^{l+n-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q}{2}\tbinom{q'}{n-2^r} + \tbinom{q'}{n-1},
\end{aligned}$$

*e portanto*

$$\binom{q}{2}\binom{q'}{n-2^r} + \binom{q'}{n-1} = 1. \tag{3.49}$$

*Somando as equações 3.48 e 3.49, obtemos* $\binom{q}{2} = 1$.

*Agora, considerando o número característico associado a* $\widetilde{w_4}\widetilde{w_2}^2 c^{k+5-8}$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}^2\widetilde{w_2}^2 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2 c^2 + c^4)^2(\alpha^2 + \alpha c)^2 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\
&= \tbinom{p'}{4} + \tbinom{p'}{2} + 1 = 0 \\
&= \widetilde{w_4}^2\widetilde{w_2}^2 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= (\beta^2 c^2 + \tbinom{q'}{4}\beta^4)^2(\beta^2 + \beta c)^2 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q'}{n-6} + \tbinom{q'}{n-8} + \tbinom{q'}{4}\left[\tbinom{q'}{n-10} + \tbinom{q'}{n-12}\right]
\end{aligned}$$

*ou seja,*

$$\binom{q'}{n-6} + \binom{q'}{n-8} + \binom{q'}{4}\left[\binom{q'}{n-10} + \binom{q'}{n-12}\right] = 0. \tag{3.50}$$

*Considerando o número característico associado a* $\widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)^6 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1\\
&= \widetilde{w_2}^6 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\beta^2+\beta c)^6 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q'}{n-6}+\tbinom{q'}{n-8}+\tbinom{q'}{n-10}+\tbinom{q'}{n-12},
\end{aligned}$$

*ou seja,*

$$\binom{q'}{n-6}+\binom{q'}{n-8}+\binom{q'}{n-10}+\binom{q'}{n-12}=1. \tag{3.51}$$

*Somando as equações 3.50 e 3.51, temos*

$$\binom{q}{4}\left[\binom{q'}{n-10}+\binom{q'}{n-12}\right]=1. \tag{3.52}$$

*Portanto,* $\binom{q'}{4}=1$.

*(iii) Considere o caso* $n=8j+4$, $j\geq 1$. *Neste caso,* $\binom{p}{2}=0$ *e* $\binom{p}{4}=1$. *Então* $\binom{p'}{2}=1$ *e* $\binom{p'}{4}=0$. *Assim,*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\eta^k))=(1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c)^{-1}+(1+c)^{-2}\alpha+(1+c)^{-5}\alpha^4+\cdots)$$

*e*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\xi^l))=(1+\beta)^{8j+5}((1+c)+\binom{q}{1}\beta+(1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2+(1+c)^{-2}\binom{q}{3}\beta^3+\cdots).$$

*Então* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\eta^k))=c^3+\alpha^2 c$ *e* $\widetilde{w_3}(\mathbb{R}P(\xi^l))=\binom{q}{2}\beta^2 c$. *Também temos* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k))=c^4+\alpha c^3+\alpha^3 c+\alpha^4$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l))=\binom{q}{4}\beta^4+\beta^3 c+\beta^2 c^2$.

*Considerando o número característico associado a* $\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6}$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_3}^2 c^{k+5-6}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4c^2+c^6)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= \tbinom{p'}{2}+\tbinom{p'}{6}=1\\
&= \widetilde{w_3}^2 c^{n+l-1-6}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= (\tbinom{q}{2}\beta^4c^2)c^{n+l-7}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q}{2}\tbinom{q'}{n-4},
\end{aligned}$$

*ou seja,*

$$\binom{q}{2}=1 \ e \ \binom{q'}{n-4}=1. \tag{3.53}$$

*Além disso, considerando o número característico associado a* $\widetilde{w_4}c^{k+5-4}$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_4}c^{k+5-4}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^3c+\alpha c^3+c^4)c^{k+1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\
&= \tbinom{p'}{2}+\tbinom{p'}{3}+\tbinom{p'}{5}+\tbinom{p'}{6}=0\\
&= \widetilde{w_4}c^{n+l-1-4}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= ((\tbinom{q}{4})\beta^4+\beta^3c+\beta^2c^2)c^{n+l-5}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\
&= \tbinom{q}{4}\tbinom{q'}{n-4}+\tbinom{q'}{n-3}+\tbinom{q'}{n-2},
\end{aligned}$$

*ou seja,*

$$\binom{q}{4} + \binom{q'}{n-3} + \binom{q'}{n-2} = 0. \tag{3.54}$$

*Note que* $\binom{q'}{n-2} = \binom{q'}{8j+2} = 0$, *pois 2 não pertence à expansão diadica de* $q'$. *Pela equação 3.53, tem-se* $\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{8j} = 1$, *e como* $q'$ *é ímpar, segue que* $\binom{q'}{n-3} = \binom{q'}{8j+1} = 1$ . *Portanto, pela equação 3.54, temos* $\binom{q}{4} = 1$.

*(iv) Finalmente, considere* $n = 8j+6$, $j \geq 1$. *Neste caso,* $\binom{p}{2} = 1$ *e* $\binom{p}{4} = 1$. *Então* $\binom{p'}{2} = 0$ *e* $\binom{p'}{4} = 0$. *Assim,*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha)^7(1+c)^{8j}((1+c) + \alpha + (1+c)^{-1}\alpha^2 + (1+c)^{-2}\alpha^3 + (1+c)^{-3}\alpha^4 + \cdots)$$

*e*

$$\widetilde{W}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta)^{8j+7}((1+c) + \binom{q}{1}\beta + (1+c)^{-1}\binom{q}{2}\beta^2 + (1+c)^{-2}\binom{q}{3}\beta^3 + \cdots).$$

*Então* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2}\beta^2 + \beta c$. *Também* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2c^2 + \alpha^4$ *e* $\widetilde{w_4}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2c^2 + \binom{q}{4}\beta^4$.

*Suponha* $\binom{q}{2} = 0$. *Então,*

$$\begin{aligned} \widetilde{w_2}^6 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)^6 c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1 \\ &= \widetilde{w_2}^6 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta c)^6 c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-6}, \end{aligned}$$

*ou seja,*

$$\binom{q'}{n-6} = 1. \tag{3.55}$$

*Mais ainda,*

$$\begin{aligned} 0 = \tbinom{p'}{2} &= (\alpha^2+\alpha c)^4 c^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \widetilde{w_2}^4 c^{k+5-8}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\ &= \widetilde{w_2}^4 c^{n+l-1-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= (\beta c)^4 c^{n+l-9}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\ &= \tbinom{q'}{n-4}, \end{aligned}$$

*ou seja,*

$$\binom{q'}{n-4} = 0. \tag{3.56}$$

*Pela equação 3.55, temos*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{8j} = 1,$$

*isto é, a expansão diádica de* $n-6$ *está contida na expansão diádica de* $q'$. *Como supomos* $\binom{q'}{2} = 1$, *temos*

$$\binom{q'}{n-4} = \binom{q'}{8j+2} = 1,$$

*o que contradiz a equação 3.56. Portanto,* $\binom{q}{2} = 1$.

*Agora, suponha* $\binom{q}{4} = 0$. *Então, temos*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_4}^3 c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^2c^2)^3c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1\\ &= \widetilde{w_4}^3 c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^2c^2)^3c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{n-6},\end{aligned}$$

*ou seja,*

$$\binom{q'}{n-6} = 1. \tag{3.57}$$

*Além disso, temos*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_4} c^{k+5-4}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^4+\alpha^2c^2)c^{k+1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \tbinom{p'}{2} + \tbinom{p'}{4} = 0\\ &= \widetilde{w_4} c^{n+l-1-4}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^2c^2)c^{n+l-5}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{n-2},\end{aligned}$$

*ou seja,*

$$\binom{q'}{n-2} = 0. \tag{3.58}$$

*Pela equação 3.57, temos*

$$\binom{q'}{n-6} = \binom{q'}{8j} = 1,$$

*isto é, a expansão diádica de* $n-6$ *está contida na expansão diádica de* $q'$. *Como supomos* $\binom{q'}{4} = 1$, *temos*

$$\binom{q'}{n-2} = \binom{q'}{4+8j} = 1,$$

*o que contradiz a equação 3.58. Portanto,* $\binom{q}{4} = 1$. ■

*Mostraremos agora que* $q \leq 7$. *A estratégia consiste em encontrar um número característico não nulo trazendo informações das classes características envolvendo* $\alpha^{q-1}$. *Para fazer isto, precisamos do seguinte lema :*

***Lema 3.3.2*** $n+l-1 > 2(q-1)$.

***Demonstração:*** *(i) Primeiro suponha que* $n = 8j$, *para* $j \geq 2$. *Da prova do Lema 3.2.1, temos* $\binom{p'}{6} = \binom{q'}{n} = 1$, *implicando que* $\binom{q'}{2^r} = 1$. *Assim,* $q' > 2^r$.

*(ii) Suponha que* $n = 8j+2$, *para* $j \geq 1$. *Neste caso, sabemos que* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c$ *e*

$\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2 + \beta c$. *Então*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_2}c^{k+5-2}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)c^{k+3}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \tbinom{p'}{4} + \tbinom{p'}{5} = 0\\ &= \widetilde{w_2}c^{n+l-1-2}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^2+\beta c)c^{n+l-3}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{n-2} + \tbinom{q'}{n-1},\end{aligned}$$

*ou seja*

$$\binom{q'}{n-2} + \binom{q'}{n-1} = 0. \tag{3.59}$$

*Pelo Lema 3.1.2 temos que*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k))c)))) = Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\widetilde{w_2}(\alpha^2c+\alpha c^2)))) = \alpha^{2^r}c+\alpha c^{2^r} = \alpha c^{2^r}$$

*e*

$$Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l))c)))) = Sq^{2^{r-1}}(\cdots(Sq^4(Sq^2(\widetilde{w_2}(\beta^2c+\beta c^2)))) = \beta^{2^r}c+\beta c^{2^r}$$

*são classes correspondentes em* $\mathbb{R}P^6$ *e* $\mathbb{R}P^n$. *Daí,*

$$\begin{aligned}(\alpha c^{2^r})c^{k+5-2^r-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= \tbinom{p'}{5} = 1\\ &= (\beta^{2^r}c+\beta c^{2^r})c^{n+l-1-2^r-1}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{n-2^r} + \tbinom{q'}{n-1},\end{aligned}$$

*de onde obtemos que*

$$\binom{q'}{n-2^r} + \binom{q'}{n-1} = 1. \tag{3.60}$$

*Somando as equações 3.59 e 3.60, tem se* $\binom{q'}{n-2^r} + \binom{q'}{n-2} = 1$. *Como* $\binom{q}{2} = 1$, *temos que* $\binom{q'}{n-2^r} = 0$, *e então* $\binom{q'}{n-2} = 1$. *Daí,* $\binom{q'}{2^r} = 1$. *Assim* $q' > 2^r$.

*(iii) Suponha* $n = 8j+4$, *para* $j \geq 1$. *Neste caso, temos que* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha c + c^2$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta c$. *Então*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_2}^4c^{k+5-8}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha c+c^2)^4c^{k-3}[\mathbb{R}P(\eta^k)]\\ &= \tbinom{p'}{2} + \tbinom{p'}{6} = 1\\ &= \widetilde{w_2}^4c^{n+l-1-8}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta c)^4c^{n+l-9}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{n-4}.\end{aligned}$$

*Daí,* $\binom{q'}{n-4} = 1$ *e então* $\binom{q'}{2^r} = 1$. *Assim,* $q' > 2^r$.

*(iv) Por último, suponha* $n = 8j+6$, *para* $j \geq 1$. *Neste caso, temos que* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2+\alpha c$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2+\beta c$. *Então*

$$\begin{aligned}\widetilde{w_2}^6c^{k+5-12}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^2+\alpha c)^6c^{k-7}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = 1\\ &= \widetilde{w_2}^6c^{n+l-1-12}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= (\beta^2+\beta c)^6c^{n+l-13}[\mathbb{R}P(\xi^l)]\\ &= \tbinom{q'}{n-6} + \tbinom{q'}{n-8} + \tbinom{q'}{n-10} + \tbinom{q'}{n-12}.\end{aligned}$$

*Escreva* $n = 2 + 4 + 2^t + B + 2^r$, *e note que* $n - 8 = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{t-1} + B + 2^r$. *Daí,* $n - 10 = 2^2 + \cdots + 2^{t-1} + B + 2^r$ *e* $n - 12 = 2 + 2^3 \cdots + 2^{t-1} + B + 2^r$ *e então*

$$\binom{q'}{n-8} = \binom{q'}{n-10} = \binom{q'}{n-12} = 0.$$

*Logo,* $\binom{q'}{n-6} = 1$, *e então* $\binom{q'}{2^r} = 1$. *Assim,* $q' > 2^r$.

*Com isso vemos que em todos os casos* $q' > 2^r$, *e então temos que* $q' + q > 2^r + q$. *Como* $q + q' = 2^{r+1}$, *segue que* $2^{r+1} > 2^r + q$, *e assim* $2^r > q$.

*Daí,* $q < 2^r \leq n$. *Note que como* $q < n$, *tem se* $w_q(\xi^l) = \beta^q \neq 0$ *e assim* $l \geq q$. *Portanto,* $n + l - 1 > q + q - 1 > 2(q-1)$ *como queríamos.* ■

*O Lema 3.3.2 nos permite considerar números característicos envolvendo a classe* $\widetilde{w_2}^{q-1}$.

*O lema a seguir é um resultado técnico que será útil em algumas computações.*

***Lema 3.3.3*** *Seja* $\eta^k \to \mathbb{R}P^n$ *um* $k$*-fibrado vetorial de dimensão* $k > 0$ *sobre um espaço projetivo* $\mathbb{R}P^n$ *com* $n > 0$. *Se*

$$\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)} = (1+\alpha)^p,$$

*onde* $\alpha$ *denota o gerador de* $H^1(\mathbb{R}P^n)$, *então*

$$\alpha^{n-f}(\alpha + c)^g c^{k-1+f-g}[\mathbb{R}P(\eta^k)] = \overline{\binom{g+p}{f}}$$

*para cada* $f$, $g$ *naturais tais que* $f \leq n$ *e* $g \leq k - 1 + f$.

***Demonstração:*** *Ver [22], p.70, 3.5.1.* ■

***Lema 3.3.4*** $q \leq 7$.

***Demonstração:*** *(i) Primeiro suponha* $n = 8j$, *para* $j \geq 2$. *Neste caso,*
$\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) + c^2 = \alpha c$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) + c^2 = \beta c + c^2 = (\beta + c)c$.

*Então, do Lema 3.3.3, segue que*

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_2}^{q-1} c^{k+5-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\eta^k)] &= (\alpha^{q-1}c^{q-1})c^{n+l-1-2(q-1)}[(\mathbb{R}P(\eta^k))] \\
&= \widetilde{w_2}^{q-1} c^{n+l-1-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= (\beta + c)^{q-1} c^{q-1} c^{n+l-1-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q'+q-1}{n}.
\end{aligned}$$

*Note que* $q' + q - 1 = 2^{r+1} - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^r$ *e a expansão diádica de* $n$ *está contida em* $1 + 2 + \cdots + 2^r$. *Logo,* $\binom{q'+q-1}{n} = 1$. *Assim,* $\alpha^{q-1} \neq 0$, *ou seja,* $q - 1 \leq 6$ *e então,* $q \leq 7$.

*(ii) Suponha* $n = 8j + 2$, *para* $j \geq 1$. *Neste caso,* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c = \alpha(\alpha + c)$ *e* $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2 + \beta c = \beta(\beta + c)$.

*Então, do Lema 3.3.3, segue que*

$$\begin{aligned}
(\alpha^{q-1}(\alpha + c)^{q-1})c^{n+l-1-2(q-1)}[(\mathbb{R}P(\eta^k))] &= \widetilde{w_2}^{q-1} c^{k+5-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\
&= \widetilde{w_2}^{q-1} c^{n+l-1-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \beta^{q-1}(\beta + c)^{q-1} c^{n+l-1-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q'+q-1}{n-q+1}.
\end{aligned}$$

*Note que $q' + q - 1 = 2^{r+1} - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^r$ e a expansão diádica de $n$ está contida em $1 + 2 + \cdots + 2^r$. Então $n < q' + q - 1$.*

*Suponha $n + q - 1 \leq q' + q - 1$; como $n \geq n - q + 1$, temos que $n \geq n - q + 1 > q' + q - 1$. Daí, $n > q' + q - 1$, que não ocorre. Então, $\binom{q'+q-1}{n-q+1} = 1$. Assim, $\alpha^{q-1} \neq 0$, isto é, $q - 1 \leq 6$. Portanto, $q \leq 7$.*

*(iii) Suponha $n = 8j+4$, para $j \geq 1$. Neste caso, $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) + c^2 = \alpha c$ e $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) + c^2 = \beta c + c^2 = (\beta + c)c$.*

*Então, do Lema 3.3.3, segue que*

$$\begin{aligned}
(\alpha^{q-1}c^{q-1})c^{n+l-1-2(q-1)}[(\mathbb{R}P(\eta^k))] &= \widetilde{w_2}^{q-1}c^{k+5-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\
&= \widetilde{w_2}^{q-1}c^{n+l-1-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= (\beta + c)^{q-1}c^{q-1}c^{n+l-1-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q'+q-1}{n}.
\end{aligned}$$

*Note que $q' + q - 1 = 2^{r+1} - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^r$ e a expansão diádica de $n$ está contida em $\{1, 2, 2^2, \cdots, 2^r\}$. Logo, $\binom{q'+q-1}{n} = 1$. Assim, $\alpha^{q-1} \neq 0$, isto é, $q - 1 \leq 6$ e então $q \leq 7$.*

*(iv) Finalmente, tome $n = 8j+6$, para $j \geq 1$. Neste caso, $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha^2 + \alpha c = \alpha(\alpha + c)$ e $\widetilde{w_2}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta^2 + \beta c = \beta(\beta + c)$.*

*Então, do Lema 3.3.3, segue que*

$$\begin{aligned}
(\alpha^{q-1}(\alpha + c)^{q-1})c^{n+l-1-2(q-1)}[(\mathbb{R}P(\eta^k))] &= \widetilde{w_2}^{q-1}c^{k+5-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\eta^k)] \\
&= \widetilde{w_2}^{q-1}c^{n+l-1-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \beta^{q-1}(\beta + c)^{q-1}c^{n+l-1-2(q-1)}[\mathbb{R}P(\xi^l)] \\
&= \tbinom{q'+q-1}{n-q+1}.
\end{aligned}$$

*Note que $q' + q - 1 = 2^{r+1} - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^r$ e a expansão diádica de $n$ está contida em $\{1 + 2 + \cdots + 2^r\}$. Então $n < q' + q - 1$.*

*Suponha $n + q - 1 \leq q' + q - 1$. Como $n \geq n - q + 1$, temos $n \geq n - q + 1 > q' + q - 1$. Daí, $n > q' + q - 1$, o que não ocorre. Então, $\binom{q'+q-1}{n-q+1} = 1$. Assim, $\alpha^{q-1} \neq 0$, isto é, $q - 1 \leq 6$ e então, $q \leq 7$.* ■

*Portanto, em todos os casos, $q \leq 7$ e assim $q = 7$, o que encerra a prova do Lema 3.1.1.*

Capítulo

4

# Classificação das ações de $\mathbb{Z}_2^k$ que fixam $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, com $n$ par

*No capítulo anterior realizamos a classificação das involuções que fixam $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, com $n \geq 10$ par, a menos de cobordismo equivariante. Neste capítulo, vamos inicialmente apresentar alguns conceitos e resultados importantes sobre a teoria de cobordismo de $\mathbb{Z}_2^k$-ações e a caracterização do fixed data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação. Aqui, $\mathbb{Z}_2^k$ será entendido como o grupo gerado por k involuções comutantes $T_1, T_2, \cdots, T_k$. Também apresentaremos alguns modelos de $\mathbb{Z}_2^k$-ações que são obtidas a partir de uma involução $(M,T)$, e denotadas por $\Gamma_t^k(M,T)$.*

*Por fim, vamos apresentar a classificação das $\mathbb{Z}_2^k$-ações que fixam $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, com $n \geq 10$ par, a menos de cobordismo equivariante, obtida através do teorema que foi provado por P. L. Q. Pergher e R. Oliveira em [16]. Ou seja, a classificação em pauta decorre da junção da nossa classificação de involuções com o Teorema de P. Pergher e R. Oliveira.*

*Para mais detalhes ver [14].*

## *4.1 Cobordismo de Ações de $\mathbb{Z}_2^k$*

*Nesta seção vamos desenvolver os conceitos de cobordismo simultâneo de listas de fibrados e de fixed data associado a uma ação do grupo $\mathbb{Z}_2^k$. Por uma questão de notação, nesta seção vamos considerar $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$, onde $1$ é o elemento nulo e $-1$ é o não-nulo.*

*Na seção 1.4 vimos a definição de cobordismo de uma ação suave $(M^n, \phi)$ de um grupo de* Lie *$G$ sobre uma variedade fechada $M^n$. Vimos também que toda ação do grupo $\mathbb{Z}_2$ sobre uma variedade fechada $M^n$ pode ser identificada com uma involução $T$ sobre $M^n$, denotada por $(M^n, T)$, determinando assim o conceito de cobordismo de involuções.*

*Consideremos $(M^n, \phi)$ uma variedade fechada $M^n$ e uma $\phi$ ação do grupo $\mathbb{Z}_2^k = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (k-vezes), ou uma $\mathbb{Z}_2^k$-*ação *sobre $M^n$. Dada uma coleção ordenada $T_1, T_2 \cdots, T_k$ de involuções diferenciáveis comutantes definidas em $M^n$, considere o grupo gerado por estas involuções, $G = < T_1, \cdots, T_k >$, com a operação de composição $\circ$. Existe um isomorfismo natural entre $\mathbb{Z}_2^k$ e $G$, associando cada involução $T_i$ com o elemento $(1, \cdots, 1, -1, 1 \cdots, 1)$ (i-ésima coordenada não nula) de $\mathbb{Z}_2^k$. Desta forma, como acima dito uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ pode ser entendida como uma coleção ordenada $T_1, T_2 \cdots, T_k$ de involuções diferenciáveis comutantes definidas em $M^n$. Denotaremos uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação sobre $M^n$ por $(M^n; T_1, T_2, \cdots, T_k)$.*

***Observação 4.1.1*** *Se $(M^n; T_1, T_2, \cdots, T_k) = (M^n, \phi)$ é uma $\mathbb{Z}_2^k$- ação e $\sigma : G \to G$ é um automorfismo, então $(M^n, \psi) = (M^n; \sigma T_1, \sigma T_2, \cdots, \sigma T_k)$ é uma nova ação sobre $M^n$, a qual em geral pode ser diferente de $\phi$.*

*Vamos relembrar a noção de* fixed data *de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação. Para isso, precisamos primeiramente introduzir a noção de listas de fibrados.*

***Definição 4.1.1*** *Uma* lista de fibrados *$(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ é um objeto constituído por uma variedade n-dimensional $M^n$ e s fibrados vetoriais ordenados sobre $M^n$, com dimensões $r_1, \cdots, r_s$.*

***Definição 4.1.2*** *Dizemos que uma lista de fibrados $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$* borda simultaneamente *se existem uma variedade (n+1)-dimensional $W^{n+1}$ compacta com bordo, e uma lista de fibrados vetoriais $(W^{n+1}; \zeta_1, \cdots, \zeta_s)$ sobre $W^{n+1}$ tais que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\zeta_i|M = \eta_i$, para cada $1 \leq i \leq s$. Dizemos que duas listas $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ e $(N^n; \nu_1, \cdots, \nu_s)$, são* simultaneamente cobordantes (bordantes) *se a união disjunta $(M^n \cup N^n; \eta_1 \cup \nu_1, \cdots, \eta_s \cup \nu_s)$ borda simultaneamente.*

***Lema 4.1.1*** *A relação de cobordismo simultâneo dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das listas de fibrados sobre variedades fechadas n-dimensionais.*

*Denotaremos por $[M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s]$ a classe de equivalência de uma lista de fibrados $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$, denominada* classe de cobordismo simultâneo *de $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ e por $\mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\cdots,r_s}$ o conjunto das classes de cobordismo simultâneo de listas de s fibrados ordenados, com dimensões $r_1, r_2, \cdots, r_s$, sobre variedades fechadas n-dimensionais.*

*Além disso, denotaremos por $\mathcal{N}_{*;r_1,r_2,\cdots,r_s} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\cdots,r_s}$, o conjunto das classes de cobordismo simultâneo de listas de s fibrados ordenados, com dimensões $r_1, r_2, \cdots, r_s$, sobre variedades de qualquer dimensão.*

*Note que, se duas listas $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ e $(N^n; \nu_1, \cdots, \nu_s)$ são simultaneamente cobordantes, então $\eta_i \to M^n$ é cobordante a $\nu_i \to N^n$, para todo i. Mas se $\eta_i \to M^n$ é cobordante a $\nu_i \to N^n$, para todo i, não é necessariamente verdade que ocorra o cobordismo simultâneo. Isso porque, na definição acima, todos os fibrados $\zeta_i$ estão sobre a mesma base $W^{n+1}$, e o cobordismo entre cada fibrado separadamente poderia usar uma base diferente para cada i. Por isso o cobordismo acima é chamado de cobordismo simultâneo.*

*Notemos também que o cobordismo simultâneo entre duas listas implica que os fibrados totais obtidos pelas somas de* Whitney *$\eta_1 \oplus \cdots \oplus \eta_s \to M$ e $\nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_s \to N$ são cobordantes como fibrados, ou seja, cobordismo simultâneo implica em cobordismo dos fibrados resultantes da soma de Whitney. Mas a recíproca não é verdadeira, como veremos após a introdução de números característicos associados a listas de fibrados.*

*A aplicação*

$$\begin{array}{lll} I^n : & \mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\cdots,r_s} & \longrightarrow \mathcal{N}_n(BO(r_1) \times BO(r_2) \cdots \times BO(r_s)) \\ & [M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s] & \longrightarrow [M^n, (f_1, \cdots, f_s)] \end{array}$$

*onde cada função coordenada $f_i : M^n \to BO(r_i)$ é uma função classificante para o fibrado $\eta_i \to M^n$, é bijetora.*

*Esta bijeção permite introduzir uma estrutura de grupo abeliano em $\mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\cdots,r_s}$, com a operação união disjunta*

$$[M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s]+[N^n;\nu_1,\cdots,\nu_s]=[M^n\cup N^n;\eta_1\cup\nu_1,\cdots,\eta_s\cup\nu_s],$$

*e uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo em $\mathcal{N}_{*;r_1,r_2,\cdots,r_s}$, com a operação*

$$[V^m]\cdot[M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s]=[V^m\times M^n;p_2!(\eta_1),\cdots,p_2!(\eta_s)],$$

*onde $p_2:V^m\times M^n\to M^n$ é a projeção na segunda coordenada.*

*Pelo Teorema 1.2.1, uma classe $[M^n,f]$ é totalmente determinada pelos números característicos de $(M^n,f)$. Assim, uma classe $[M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s]$ também será totalmente determinada pelos números característicos correspondentes através da aplicação $I^n$.*

***Teorema 4.1.1*** *Seja $(M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s)$ uma lista de fibrados sobre a variedade fechada $M^n$, com $W(M^n)=1+w_1+\cdots+w_n$ e $W(\eta_i)=1+v_1^i+\cdots+v_{r_s}^i$, para cada $1\leq i\leq s$. Os* números característicos *(ou* números de Whitney*) de $(M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s)$ são números da forma*

$$w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_t}v^1_{j_{1_1}}v^1_{j_{1_2}}\cdots v^1_{j_{1_l}}\cdots v^s_{j_{s_1}}v^s_{j_{s_2}}\cdots v^s_{j_{s_k}}[M^n]\in\mathbb{Z}_2,$$

*com $\Sigma i_p+\Sigma j_{1_p}+\cdots+\Sigma j_{s_p}=n$.*

***Demonstração:*** *Basta observar o efeito da induzida em cohomologia da aplicação $f_1\times f_2\times\cdots\times f_s$ e a identificação acima dada por $I^n$.* ■

*Os números característicos de cada fibrado $\eta_i$ estão entre os números característicos de $(M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s)$. Dessa forma, cobordismo simultâneo implica no cobordismo de cada fibrado componente da lista, como já foi dito anteriormente. Informalmente falando, os números característicos de uma lista de fibrados são provenientes de produtos arbitrários envolvendo classes tangenciais de $M^n$ e classes características dos componentes da lista.*

***Exemplo 4.1.1*** *Seja $\lambda^1\to S^1$ o fibrado linha canônico. Então, através de cálculos de números característicos, pode-se mostrar que $\lambda^1\oplus\lambda^1\to S^1$ é cobordante a $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\to S^1$. Apesar de no caso não haver cobordismo simultâneo, já que $\lambda^1\to S^1$ não é cobordante a $\mathbb{R}\to S^1$.*

*Para definirmos o* fixed data *de uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ em uma variedade fechada, consideremos $(M^n,\phi)=(M^n;T_1,T_2,\cdots,T_k)$ uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$. Denote por $\mathcal{P}=Hom(\mathbb{Z}_2^k,\mathbb{Z}_2)-\{1\}$ o conjunto de todos os homomorfismos de $\mathbb{Z}_2^k$ em $\mathbb{Z}_2$ não triviais. Seja $\eta\to F_\phi$ é o fibrado normal de $F_\phi$ em $M^n$, então $\eta$ se decompõe em uma soma de Whitney de $2^k-1$ subfibrados, ou seja,*

$$\eta=\bigoplus_{\rho\in\mathcal{P}}\varepsilon_\rho,$$

*onde $\varepsilon_\rho$ é o subfibrado de $\eta$ no qual cada $T_j$ atua como a multiplicação por $\rho(T_j)$. Com isso temos a seguinte definição:*

***Definição 4.1.3*** *Dada uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, $(M^n,\phi)=(M^n;T_1,T_2,\cdots,T_k)$, definimos o seu fixed data como sendo uma lista indexada de fibrados $(F_\phi,\{\varepsilon_\rho\})$, onde $\rho\in\mathcal{P}$ sobre o conjunto de pontos fixos de $\phi$, a qual pode ser considerada como elemento do grupo de bordismo singular $N_n(\Pi_{\rho\neq 1}BO(n_\rho))$, em que $n=\dim(F_\phi)$, $n_\rho=\dim(\varepsilon_\rho)$, e $BO(n_\rho)$ é o espaço classificante para fibrados vetoriais de dimensão $n_\rho$.*

*A conexão entre os conceitos de cobordismo de $\mathbb{Z}_2^k$-ações e cobordismo simultâneo de uma lista de fibrados é devida à R. E. Stong, que em [24] provou*

***Teorema 4.1.2*** *Duas $\mathbb{Z}_2^k$-ações são cobordantes se, e somente se, seus fixed data forem simultaneamente cobordantes.* ■

***Corolário 4.1.1*** *Se $(M^n, \phi)$ é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação tal que $F_\phi = \emptyset$ então $(M^n, \phi)$ borda equivariantemente.* ■

## *4.1.1 $\mathbb{Z}_2^k$-ações especiais*

*Nesta seção apresentaremos a construção de algumas $\mathbb{Z}_2^k$-ações especiais em variedades que, em geral, são obtidas indutivamente a partir de uma involução. Tais ações terão papel fundamental na classificação obtida no final deste capítulo.*

***Definição 4.1.4*** *Se $M$ é uma variedade, definimos a* involução *twist sobre $M \times M$ por $twist(x, y) = (y, x)$. Então $(M \times M; twist)$ é uma $\mathbb{Z}_2$-ação, chamada de $\mathbb{Z}_2$-*ação *twist.*

***Teorema 4.1.3*** *O fixed data da $\mathbb{Z}_2$-ação twist é $(\Delta, TM)$, onde $\Delta = \{(x, y) \in M \times M / x = y\}$ é a diagonal de $M \times M$, a qual é difeomorfa à $M$, e $\tau(M)$ é o fibrado tangente à $M$.*

***Demonstração:*** *Ver [14], p. 40.* ■

*Definiremos a seguir uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação a qual é uma generalização da $\mathbb{Z}_2$-ação twist e que é chamada de $\mathbb{Z}_2^k$-*ação *twist.*

***Definição 4.1.5*** *Seja $M$ uma variedade. Definiremos indutivamente uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação sobre $M^{2^k} = M \times \cdots \times M$ ($2^k$-cópias).*

- *Para $k = 1$, é a $\mathbb{Z}_2$-ação twist, $(M \times M; twist)$ .*
- *Para $k = 2$, é a $\mathbb{Z}_2^2$-ação twist sobre $M^4 = (M \times M) \times (M \times M)$, $(M \times M \times M \times M; T_1, T_2)$, onde $T_1 = twist \times twist$ e $T_2$ é dada por $T_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, x_1, x_2)$.*
- *Suponhamos definida a $\mathbb{Z}_2^{k-1}$-ação twist, $(M^{2^{k-1}}; T_1, \cdots, T_{k-1})$.*
- *Definimos $(M^{2^k}; T_1', \cdots, T_k')$ como sendo a $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist sobre $M^{2^k}$, onde $M^{2^k} = M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}}$, e $T_i' : M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}} \to M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}}$, para $1 \le i \le k-1$, é dada por $T_i' = T_i \times T_i$, e $T_k' : M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}} \to M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}}$ é dada por $T_k'(x, y) = (y, x)$.*

***Teorema 4.1.4*** *O fixed data da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist acima definida é $(M, TM, \cdots, TM)$ ($2^k - 1$ cópias de $TM$).*

***Demonstração:*** *Ver [14], p. 42.* ■

**Nota** : *Observe que, no fixed data acima, todos os fibrados da lista são iguais, portanto a indexação é redundante.*

*Descreveremos agora, outra $\mathbb{Z}_2^k$-ação especial, que é obtida a partir de uma involução $(M, T)$.*

***Definição 4.1.6*** *Seja $(M, T)$ uma involução comfixed data $\eta \to F$. Vamos definir indutivamente uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação sobre $M^{2^{k-1}}$, a partir de $T$, a qual vamos denotar por $\Gamma_k^k(M, T)$.*

- *Para $k = 1$, $\Gamma_1^1(M, T) = (M; T)$.*
- *Para $k = 2$, $\Gamma_2^2(M, T) = (M^2; T_1, T_2)$ onde $T_1 = T \times T$ e $T_2(x, y) = (y, x)$.*

- *Suponhamos definida* $\Gamma_{k-1}^{k-1}(M,T) = (M^{2^{k-2}}; T_1, \cdots, T_{k-1})$.
- *Definimos* $\Gamma_k^k(M,T) = (M^{2^{k-1}}; T'_1, \cdots, T'_k)$, *onde*

$$(M^{2^{k-1}}; T'_1, \cdots, T'_{k-1}) = (M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}}; T_1 \times T_1, \cdots, T_{k-1} \times T_{k-1})$$

*e* $T'_k : M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}} \to M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}}$ *dada por* $T'_k(x,y) = (y,x)$.

*Em relação ao* fixed data *desta ação, temos*

***Teorema 4.1.5*** *O fixed data da* $\mathbb{Z}_2^k$*-ação* $\Gamma_k^k(M,T)$ *definida acima é* $(F, \{\varepsilon_\rho\})$, *onde* $\rho \in \mathcal{P}$. *Então, para cada* $\rho \in \mathcal{P}$, *temos*

**i)** *Se* $\rho(T_1) = -1$ *(temos* $2^{k-1}$ *representações deste tipo), então* $\varepsilon_\rho = \eta$, *onde* $\eta \to F$ *é o fixed data de* $(M,T)$.

**ii)** *Se* $\rho(T_1) = 1$ *(temos* $2^{k-1}-1$ *representações deste tipo), então* $\varepsilon_\rho = \tau(F)$, *onde* $\tau(F) \to F$ *é o fibrado tangente a* $F$.

***Demonstração:*** *Ver [14], p. 43.* ■

***Teorema 4.1.6*** *Seja* $(M,\phi) = (M; T_1, \cdots, T_k)$ *uma* $\mathbb{Z}_2^k$*-ação com fixed data* $(F_\phi, \{\varepsilon_\rho\}_{\rho\in\mathcal{P}})$. *Então o fixed data da* $\mathbb{Z}_2^{k+1}$*-ação* $(M,\psi) = (M; T_1, \cdots, T_k, Id)$, *onde* $Id$ *é a involução identidade, é* $(F_\psi, \{\varepsilon_{\rho'}\}_{\rho'\in\mathcal{P}'}) = (F_\phi, \{\varepsilon_\rho\}_{\rho\in\mathcal{P}}, \{0\})$ *onde* $\mathcal{P}' = Hom(\mathbb{Z}_2^{k+1}, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, *(*$2^k$ *fibrados nulos acrescentados aos* $2^k - 1$ *fibrados do fixed data de* $\phi$*), ou seja, se* $\rho'(Id) = -1$ *então* $\varepsilon_{\rho'}$ *é o fibrado nulo, enquanto que se* $\rho'(Id) = 1$ *então* $\varepsilon_{\rho'} = \varepsilon_\rho$.

***Demonstração:*** *Ver [14], p. 44.* ■

*Aplicando o teorema anterior repetidas vezes, obtemos*

***Corolário 4.1.2*** *Seja* $(M,\phi) = (M; T_1, \cdots, T_k)$ *uma* $\mathbb{Z}_2^k$*-ação com fixed data* $(F_\phi, \{\varepsilon_\rho\}_{\rho\in\mathcal{P}})$. *Então o fixed data da* $\mathbb{Z}_2^{k+s}$*-ação* $(M,\psi) = (M; T_1, \cdots, T_k, Id, \cdots, Id)$, *onde foram acrescentadas* $s$ *identidades, é* $(F_\psi, \{\varepsilon_{\rho'}\}_{\rho'\in\mathcal{P}'}) = (F_\phi, \{\varepsilon_\rho\}_{\rho\in\mathcal{P}}, \{0\})$ *(*$2^s - 1$ *fibrados nulos acrescentados para cada* $\varepsilon_\rho$ *e mais o fibrado nulo* $\varepsilon_{\rho''}$, *onde* $\rho''(T_i) = 1$ *para* $1 \leq i \leq k+s-1$ *e* $\rho''(T_{k+s}) = 1$, *totalizando* $(2^k - 1)(2^s - 1) + 1$ *fibrados nulos acrescentados ao fixed data de* $\phi$*), ou seja, se* $\rho'(T_{k+i}) = -1$ *para algum* $1 \leq i \leq s$ *então* $\varepsilon_{\rho'}$ *é o fibrado nulo, enquanto que se* $\rho'(T_{k+i}) = 1$ *para todo* $1 \leq i \leq s$, *então* $\varepsilon_{\rho'} = \varepsilon_\rho$. ■

*Podemos observar que, se tivermos* $\rho(T_i) = -1$ *e* $T_i = Id$, *então* $\varepsilon_\rho$ *é o fibrado nulo.*

*Aplicando o corolário acima às* $\mathbb{Z}_2^k$*-ações definidas anteriormente, obtemos novas ações*

***Definição 4.1.7*** *Seja* $(M,T)$ *uma involução com fixed data* $\eta \to F$ *e um inteiro* $1 \leq t \leq k$. *Então definimos a* $\mathbb{Z}_2^k$*-ação* $\Gamma_t^k(M,T)$ *sobre* $M^{2^{t-1}}$ *da seguinte forma:*
*se* $\Gamma_t^t(M,T) = (M^{2^{t-1}}; T_1, \cdots, T_t)$, *fazemos* $\Gamma_t^k(M,T) = (M^{2^{t-1}}; T_1, \cdots, T_t, Id, \cdots, Id)$ *(Acréscimo de* $k-t$ *identidades à* $\Gamma_t^t$*).*

*Pelo Teorema 4.1.6 e Corolário 4.1.2, concluímos o*

***Teorema 4.1.7*** *O fixed data de $\Gamma_t^k(M,T)$ tem a seguinte descrição: para cada $\rho \in \mathcal{P}$, lembrando que $T_1 = T \times \cdots \times T$, temos:*

**i)** *Se $\rho(T_i) = 1$ para $i > t$ e se $\rho(T_1) = -1$ (temos $2^{t-1}$ representações deste tipo) então $\varepsilon_\rho = \eta$.*

**ii)** *Se $\rho(T_i) = 1$ para $i > t$ e se $\rho(T_1) = 1$ (temos $2^{t-1} - 1$ representações deste tipo) então $\varepsilon_\rho = \tau(F)$.*

**iii)** *Se $\rho(T_i) = -1$ para algum $i > t$ (temos $2^k - 2^t$ representações deste tipo) então $\varepsilon_\rho = 0$.*

■

### *4.1.2 $\mathbb{Z}_2^k$-ações sobre variedades que possuem a propriedade $\mathcal{H}$*

*Agora apresentaremos o conceito de* propriedade *$\mathcal{H}$, que foi introduzido por P. L. Q. Pergher e R. Oliveira em [16]. Tal propriedade nos permite conhecer, a menos de cobordismo equivariante, todas as $\mathbb{Z}_2^k$-ações que fixam uma união de duas variedades fechadas, desde que estas variedades possuam a chamada* propriedade *$\mathcal{H}$. Este resultado foi obtido por P. L. Q. Pergher e R. Oliveira em [15].*

***Definição 4.1.8 (Propriedade $\mathcal{H}$)*** *Seja $F^n$ uma variedade conexa, fechada e $n$-dimensional. Dizemos que $F^n$ possui a* propriedade *$\mathcal{H}$ se vale o seguinte: se $N^m$ é uma variedade fechada m-dimensional com $m > n$, e $T : N^m \to N^m$ é uma involução cujo conjunto de pontos fixos é igual a $F^n$, então $m = 2n$.*

**Nota** : *Em [9], C. Kosniowski e R. E. Stong provaram o seguinte resultado: Se $(N^m, T)$ fixa $F^n$ e $m = 2n$, então $(N^m, T)$ é cobordante a $(F^n \times F^n, twist)$. Segue que $F^n$ possui a* propriedade *$\mathcal{H}$ se, e só se, a menos de cobordismo equivariante, as únicas involuções fixando $F^n$ são $(F^n, Id)$ e $(F^n \times F^n, twist)$.*

*São exemplos de variedades com a propriedade $\mathcal{H}$: os espaços projetivos real, complexo e quaterniônico com dimensão par, $\mathbb{R}P^{2n}$, $\mathbb{C}P^{2n}$ e $\mathbb{H}P^{2n}$, qualquer variedade bidimensional que não borda e qualquer variedade 4-dimensional simplesmente conexa que não borda.*

*Dada uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação $(M, \phi) = (M; T_1, \cdots, T_k)$, podemos obter uma coleção de novas $\mathbb{Z}_2^k$-ações, da seguinte maneira: primeiramente, cada automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ fornece uma nova $\mathbb{Z}_2^k$-ação, dada por $\sigma(M, \phi) = (M; \sigma T_1, \cdots, \sigma T_k)$, como vimos na observação 4.1.1.*

*Em [19], P. L. Q. Pergher provou que, se $(M, \phi)$ possui* fixed data *$(F, \{\varepsilon_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}})$ e um dos seus fibrados componentes $\varepsilon_{\rho'}$ é isomorfo a uma soma de* Whitney *$\varepsilon'_{\rho'} \oplus \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R} \to F$ é o fibrado linha trivial, então existe uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação $(N, \psi)$ cujo* fixed data *é $(F, \{\mu_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}})$, onde $\mu_\rho = \varepsilon_\rho$, para todo $\rho \neq \rho'$, e $\mu_{\rho'} = \varepsilon'_{\rho'}$. Em outras palavras, a partir do* fixed data *de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação, podemos obter novo* fixed data *de $\mathbb{Z}_2^k$-ações através do processo de remoção de secções.*

*Resumidamente, temos que, dada uma involução $(M, T)$, podemos obter uma coleção de $\mathbb{Z}_2^k$-ações por aplicar as operações $\sigma\Gamma_t^k(M, T)$, para cada $1 \leq t \leq k$ e para cada $\sigma \in Aut(\mathbb{Z}_2^k)$, onde as $\mathbb{Z}_2^k$-ações $\Gamma_t^k(M, T)$ são as definidas na Seção 4.1.1, e em seguida por remover as possíveis secções dos resultantes fibrados componentes do* fixed data.

***Observação 4.1.2*** *Temos que, se $(M, T)$ e $(N, S)$ são involuções equivariantemente cobordantes, então as ações obtidas por remover as mesmas secções de $\sigma\Gamma_t^k(M, T)$ e $\sigma\Gamma_t^k(N, S)$ são $\mathbb{Z}_2^k$-cobordantes, e a recíproca também é verdadeira. Além disso, se $(M, T)$ fixa $F$, então toda $\mathbb{Z}_2^k$-ação obtida como acima fixa $F$.*

*Agora, dada uma variedade fechada $F$, denotemos por $\mathcal{A}_1(F)$ a coleção de todas as classes de cobordismo de involuções $[M,T]$, contendo um representante, cujo conjunto de pontos fixos é $F$. Fixado $k > 1$, obtemos então a coleção $\mathcal{A}_k(F)$, formada pelas classes de cobordismo de ações de $\mathbb{Z}_2^k$ contendo um representante, cujo conjunto de pontos fixos é $F$. Ou seja, para cada $[M,T] \in \mathcal{A}_1(F)$, obtemos a família de classes de cobordismo de ações de $\mathbb{Z}_2^k$,*

$$\{[\sigma\Gamma_t^k(M,T)],\ 1 \leq t \leq k,\ \sigma \in Aut(\mathbb{Z}_2^k)\},$$

*e a seguir a família (eventualmente maior, no mínimo igual) obtida a partir desta, removendo paulatinamente todas as secções dos* fixed data. *Pode ser que esta família não seja a coleção completa de classes de cobordismo de $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $F$. Caso ela seja, $F$ é dita satisfazer a* propriedade *$\mathcal{P}_k(F)$, conceito que foi introduzido por P. L. Q. Pergher e R. Oliveira em [15]. Ou seja, dada $F$, $\mathcal{P}_k(F)$ é ou não válida. Em [16], P. L. Q. Pergher e R. Oliveira provaram o seguinte teorema*

***Teorema 4.1.8*** *Se $F = K \cup L$ é uma união disjunta de duas variedades que satisfazem a propriedade $\mathcal{H}$, com $dim(K) \neq dim(L)$, então $\mathcal{P}_k(F)$ é válida.* ■

*Na seção seguinte, utilizaremos o teorema acima para classificar, a menos de cobordismo equivariante, as $\mathbb{Z}_2^k$-ações que fixam a união dos espaços projetivos reais, $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, com $n \geq 10$ e par.*

## *4.2 $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$ com $n \geq 10$ par*

*Seja $(M^m, T)$ uma involução fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$ com $n \geq 10$ par, conforme vimos no capítulo anterior.*

*Vimos na Seção 4.1.2 que podemos obter uma coleção de $\mathbb{Z}_2^k$-ações por aplicar as operações $\sigma\Gamma_t^k(M^m,T)$, para cada automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ e para cada $1 \leq t \leq k$, onde as $\mathbb{Z}_2^k$-ações $\Gamma_t^k(M^m,T)$ são as definidas na Seção 4.1.1, e em seguida por remover as possíveis secções dos resultantes fibrados componentes do* fixed data.

*Mais ainda, o Teorema 4.1.8 nos diz que, se $6 \neq n$, a menos de cobordismo equivariante, estas são todas as possíveis $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$ neste caso, já que $\mathbb{R}P^6$ e $\mathbb{R}P^n$ possuem a propriedade $\mathcal{H}$.*

*Portanto, juntando o Teorema 4.1.8 com a $\mathbb{Z}_2-$classificação feita nesta tese, podemos obter, a menos de cobordismo equivariante, todas as $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, com $n \geq 10$ par.*

***Teorema 4.2.1*** *Seja $(M^m, \phi)$ uma $\mathbb{Z}_2^k$- ação fixando $\mathbb{R}P^6 \cup \mathbb{R}P^n$, onde $n \geq 10$ e par. Então $(M^m, \phi)$ é equivariantemente cobordante a uma ação que pertence ao conjunto $A \cup B$, onde os conjuntos $A$ e $B$ são descritos abaixo em termos de $n$.*

*(i)* $n - 6 = 2^a b$, *com $b$ ímpar e $a > 1$ :*
*$A = \emptyset =$ o conjunto vazio;*
*$B =$ conjunto obtido de $\{\sigma\Gamma_r^k\Gamma^{2^a-1}(\mathbb{R}P^{n+7}, T_{6,n}),\ \sigma \in Aut(\mathbb{Z}_2^k),\ 1 \leq r \leq k\}$ removendo as possíveis secções.*

*(ii)* $n - 6 = 2b$, *com $b$ ímpar e $n$ não é uma potência de $2$ :*
*$A = \emptyset =$ o conjunto vazio;*
*$B =$ conjunto obtido de $\{\sigma\Gamma_r^k\Gamma^2(\mathbb{R}P^{n+7}, T_{6,n}),\ \sigma \in Aut(\mathbb{Z}_2^k),\ 1 \leq r \leq k\}$ removendo as possíveis secções.*

*(iii)* $n = 6.2^t$, *é um multiplo de 6 com* $t \geq 1$ :
$A = \{\sigma\Gamma_r^k(\mathbb{R}P^6 \times \mathbb{R}P^6, twist) \cup \{\sigma'\Gamma_{r-t}^k(\mathbb{R}P^{6.2^t} \times \mathbb{R}P^{6.2^t}, twist), \sigma, \sigma' \in Aut(\mathbb{Z}_2^k),$
$t \leq r \leq k\}$;
$B =$ *conjunto obtido de* $\{\sigma\Gamma_r^k\Gamma^2(\mathbb{R}P^{n+7}, T_{6,n}), \sigma \in Aut(\mathbb{Z}_2^k), 1 \leq r \leq k\}$ *removendo as possíveis secções (por razões dimensionais, neste caso* $A = \emptyset$ *se* $t > k$*).*

$\blacksquare$

# Capítulo 5

# Variedades compatíveis com o ponto com respeito à involuções

*Neste capítulo, apresentaremos a definição da propriedade $CP$ (*compatível com o ponto*) com respeito às involuções, por nós criada, seguida por alguns exemplos e resultados que providenciam exemplos de validade ou não validade da mesma. Os principais resultados são relacionados ao estudo da propriedade $CP$ para variedades de Dold.*

## 5.1 Definição e Exemplos

*Conforme apresentamos na introdução desta tese, inspirados por certos resultados concernentes a involuções com conjunto de pontos fixos do tipo $F \cup \{ponto\}$, introduzimos a seguinte definição*

***Definição 5.1.1*** *Seja $F$ uma variedade suave fechada conexa. Dizemos que $F$ satisfaz a propriedade $CP$ (compatível com o ponto )* se existe uma variedade fechada suave $M$ e uma involução suave $T : M \to M$ tal que o conjunto de pontos fixos é $F \cup \{ponto\}$.

*Alguns exemplos de variedades que satisfazem a propriedade $CP$*

1. $S^1$, $S^2$, $S^4$, $S^8$ ;
2. *O produto de esferas descritos na introdução, vide resultado de Pergher [18];*
3. *Todos os espaços projetivos reais $\mathbb{R}P^n$ satisfazem a propriedade $CP$: para isso basta tomarmos a involução $T : \mathbb{R}P^{n+1} \to \mathbb{R}P^{n+1}$ dada por*

$$T[x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1}] = [-x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1}];$$

4. *De maneira análoga podemos mostrar que satisfazem a propriedade $CP$ os espaços projetivos complexos e quaterniônicos , $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{K}P^n$.*

***Teorema 5.1.1*** *A propriedade $CP$ não é invariante por cobordismo.*

***Demonstração:*** *Para $n$ ímpar, $S^n$ e $\mathbb{R}P^n$ são cobordantes. No entanto, para $n > 1$ e ímpar, temos que $S^n$ não satisfaz a propriedade $CP$, mas $\mathbb{R}P^n$ satisfaz.* ■

## *5.2 Resultados*

*Nesta seção introduziremos alguns resultados preliminares, por nós obtidos,com respeito a validade ou não validade da propriedade $CP$. Denotaremos sempre por $\lambda_n \to \mathbb{R}P^n$ o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^n$.*

*A principal ferramenta utilizada nesta seção será o lema 5.2.1, que é uma consequência imediata da sequência de Conner-Floyd 1.5.2: se $\eta \to F$ é o fixed data de uma involução $(M,T)$, então o fibrado linha de Hopf $\lambda \to RP(\eta)$ borda como fibrado; e assim temos*

***Lema 5.2.1** Seja $F$ uma variedade que satisfaz a propriedade $CP$ e $(M,T)$ uma involução com fixed data $(\eta \to F) \cup (n\mathbb{R} \to \{ponto\})$, ou seja, $dim(M) = n$. Então o fibrado linha de Hopf $\lambda \to RP(\eta)$ é cobordante a $\lambda_{n-1} \to RP^{n-1}$.*

***Demonstração:** Da sequência de Conner-Floyd 1.5.2, temos que, como $(\eta \to F) \cup (n\mathbb{R} \to \{ponto\})$ é o fixed data de uma involução, então $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta) \cup \lambda_{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ borda como fibrado. Então é suficiente notar que o fibrado linha de Hopf correspondente ao fibrado $n\mathbb{R} \to \{ponto\}$ é $\lambda_{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$. Assim, $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$ é cobordante a $\lambda_{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$.* ■

***Teorema 5.2.1** Se $F$ satisfaz a propriedade $CP$, então o produto cartesiano $F^{2^s}$ de $2^s$ cópias de $F$ $(s \geq 1)$ também satisfaz.*

***Demonstração:** É suficiente provarmos o resultado para $s = 1$. Suponha que $(M,T)$ é uma involução com fixed data $(\eta \to F) \cup (n\mathbb{R} \to \{ponto\})$. Então a involução produto $(M \times M, T \times T)$ tem como fixed data*

$$(\eta \times \eta \to F \times F) \cup (\eta \times nR \to F) \cup (\eta \times n\mathbb{R} \to F) \cup (2n\mathbb{R} \to \{ponto\}),$$

*e assim, pela sequência de Conner-Floyd 1.5.2, temos que a involução produto é cobordante a uma involução com fixed data $(\eta \times \eta \to F \times F) \cup (2n\mathbb{R} \to \{ponto\})$.* ■

*Em [23], D. Royster provou o seguinte resultado: suponha $(M,S)$ uma involução com conjunto de pontos fixos sendo da forma $F \cup \{ponto\}$, onde $M$ e $F$ são $m$ e $n$-dimensionais, respectivamente, com $n$ ímpar. Então $m = n+1$ e $(M,S)$ é cobordante a involução $(RP^{n+1}, T)$, onde $T : \mathbb{R}P^{n+1} \to \mathbb{R}P^{n+1}$ é dada por*

$$T[x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1}] = [-x_0, x_1, x_2, ..., x_{n+1}].$$

***Teorema 5.2.2** Seja $F$ uma variedade $n$-dimensional que não borda com $n$ ímpar. Então $F$ não satisfaz a propriedade $CP$.*

***Demonstração:** Suponha que $F$ satisfaça a propriedade $CP$, e que $(M,T)$ é uma involução com fixed data $(\eta \to F) \cup (n\mathbb{R} \to \{ponto\})$. Então pelo resultado acima de Royster temos que $F$ é cobordante a $\mathbb{R}P^n$, que para $n$ ímpar borda, o que é um absurdo.* ■

***Lema 5.2.2** Seja $F$ uma variedade $n$-dimensional com as seguintes propriedades:*
*i) $n$ é ímpar; ii) se $x \in H^1(F, Z_2)$, então $x^n[F] = 0$. Então $F$ não satisfaz a propriedade $CP$.*

***Demonstração:** Suponha que $(M,S)$ é uma involução com fixed data $(\eta \to F) \cup (m\mathbb{R} \to \{ponto\})$, ou seja, $dim(M) = m$. Então, pelo resultado de Royster, $m = n+1$ e assim $\eta \to F$ é um fibrado linha. Portanto $\partial$ é a aplicação identidade, isto é, $\partial(\eta \to F) = \eta \to F$, o qual, pelo Lema 5.2.1, é cobordante a $\lambda_n \to \mathbb{R}P^n$. Tomando o gerador $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n, Z_2)$, temos $w_1(\lambda_n)^n[\mathbb{R}P^n] = \alpha^n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$. Assim a propriedade ii) de $F$ nos dá uma contradição.* ■

***Corolário 5.2.1*** *Se $F$ é uma variedade $n$-dimensional simplesmente conexa com $n$ ímpar então $F$ não satisfaz a propriedade $CP$.*

***Demonstração:*** *Basta lembrar que para $F$ simplesmente conexa, $H^1(F, Z_2) = 0$.* ■

***Teorema 5.2.3*** *Sejam $W^n$ e $V^m$ variedades fechadas suaves com dimensões $n$ e $m$, respectivamente, tal que $n + m$ é ímpar e $n$ e $m$ tem expansões diádicas não disjuntas. Então $W^n \times V^m$ não satisfaz a propriedade $CP$.*

***Demonstração:*** *Para provar este resultado utilizaremos o lema 5.2.2, e para isso basta mostrar que a propriedade ii) do lema 5.2.2 ocorre.*

*Assim, se $x \in H^1(W^n \times V^m, Z_2)$, então $x$ é da forma $x = w_1 \times 1 + 1 \times v_1$, onde $w_1 \in H^1(W^n; Z_2)$, $v_1 \in H^1(V^m; Z_2)$ e $\times$ é o produto cross. Então*

$$x^{n+m} = (w_1 \times 1 + 1 \times v_1)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} (w_1 \times 1)^{n+m-i} (1 \times v_1)^i.$$

*Por razões dimensionais, $(w_1 \times 1)^{n+m-i} = 0$ se $i < m$ e $(1 \times v_1)^i = 0$ se $i > m$. Para $i = m$, $\binom{m+n}{m} = 0$ pois $n$ e $m$ tem expansões diádicas não disjuntas. O teorema segue do Lema 5.2.2.* ■

*Do teorema 5.2.3, temos o seguinte*

***Teorema 5.2.4*** *A propriedade $CP$ não é compatível com o produto cartesiano.*

***Demonstração:*** *Se $m + n$ é ímpar e $m$ e $n$ tem expansões diádicas não disjuntas, então $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$ não satisfaz a propriedade $CP$. No entanto, já vimos que $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{R}P^m$ satisfazem. Por outro lado, $S^3 \times S^5$ satisfaz a propriedade $CP$, pelo resultado de Pergher [18], apesar de $S^3$ e $S^5$ não satisfazerem.* ■

*Provaremos agora o seguinte intrigante resultado:*

***Teorema 5.2.5*** *Suponha que $F$ é uma variedade fechada suave $n$-dimensional, onde $n = 1$, $2$, $4$ ou $8$. Então $F$ satisfaz $CP$.*

***Demonstração:*** *Se $n = 1$, o teorema é redundante. Então, suponha que $n = 2$, $4$ ou $8$. Considere $(M, T)$ a involução de Conner-Floyd, com fixed data $(\eta \to S^n) \cup (2n\mathbb{R} \to \{ponto\})$ (ou seja, $dim(M) = 2n$), e a involução twist $(F \times F, S)$, $S(x, y) = (y, x)$.* O fixed data de $S$ é $\tau \to F$, onde $\tau$ é o fibrado tangente de $F$.

A involução $(M, T) \cup (F \times F, S)$ tem como fixed data $(\eta \to S^n) \cup (2n\mathbb{R} \to \{ponto\}) \cup (\tau \to F)$.

Podemos construir um novo fibrado vetorial $n$-dimensional sobre a soma conexa $S^n \sharp F = F$, a *soma conexa de fibrados $\eta$ e $\tau$, $\eta \sharp \tau$;* isto é possível pois fibrados sobre $n$-bolas são triviais.

O argumento padrão usado para provar que $S^n \sharp F$ é cobordante a união disjunta $S^n \cup F$ pode ser realizado com fibrados sobre $S^n$ e $F$, mostrando que $\eta \sharp \tau$ é cobordante a união disjunta $(\eta \to S^n) \cup (\tau \to F)$.

Assim, pela sequência de Conner-Floyd , $(\eta \sharp \tau \to F) \cup (2n\mathbb{R} \to \{ponto\})$ é o fixed data de uma involução cobordante a $(M, T) \cup (F \times F, S)$. ■

**Observação 5.2.1** *O Teorema 5.2.5 pode ser reescrito como segue: se $n \geq 1$ é um número natural tal que toda variedade fechada suave $n$-dimensional $F$ satisfaz $CP$, então $n = 1$, $2$, $4$ ou $8$.*

**Observação 5.2.2** *Tome um produto de esferas $S^N = S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_p}$ satisfazendo $CP$, como descrito por Pergher, e considere $F$ qualquer variedade fechada suave com $dim(F) = dim(S^N)$. O mesmo argumento do Teorema 5.2.5 mostra que a soma conexa $F \sharp S^N$ satisfaz $CP$.*

## 5.3 Variedades de Dold e a propriedade CP

As variedades de Dold $P(m,n)$ foram introduzidas por A. Dold em [6], com o propósito de encontrar geradores de dimensão ímpar para o anel de cobordismo não orientado. $P(m,n)$ é o espaço de órbitas da involução livre $-1\times$ (conjugation) agindo em $S^m \times \mathbb{C}P^n$; ou seja, $P(m,n)$ é uma variedade fechada suave $(m+2n)$-dimensional. O anel de cohomologia de $P(m,n)$ é dado por

$$H^*(P(m,n)) = Z_2[c,d]/(c^{m+1} = 0 \text{ e } d^{n+1} = 0),$$

onde $c \in H^1(P(m,n)$ e $d \in H^2(P(m,n)$. A ação da álgebra de Steenrod é completamente determinada sabendo que $Sq^1(d) = cd$.

As principais ferramentas desta seção foram o resultado relativamente recente de R. E. Stong a respeito da $K$-teoria real de $P(m,n)$, ver em [26], o qual determinou todas as possibilidades para as classes características de fibrados vetoriais sobre variedades de Dold, completando a descrição parcial dada por J. J. Ucci [28], além de árduos cálculos de números característicos; e em alguns lugares, precisamos usar alguns teoremas bem conhecidos, como o Teorema 5/2 de J. Boardman de [1] e a classificação de involuções dada por Royster que fixa duas cópias dos espaços projetivos reais [23]. Em termos de técnicos, a novidade será a introdução de uma nova classe de característica, $\widetilde{W}$, associada a fibrados linha sobre variedades fechadas e suaves. Precisamos desta descrição de Stong: sobre $P(m,n)$ existe um fibrado linha real $l \to P(m,n)$ com $W(l) = 1 + c$, e um fibrado real 2-dimensional $\eta \to P(m,n)$ com $W(\eta) = 1+c+d$. Assim, existem fibrados vetoriais sobre $P(m,n)$ com classes de Stiefel-Whitney dadas por $(1+c)^a(1+c+d)^b$. Além desses fibrados, Stong mostrou que existem também os assim chamados fibrados vetoriais exóticos com classes de Stiefel-Whitney dadas por

1. $1 + c + (d + c^2)$, para $m = 2$ e $n \geq 1$ ;
2. $(1 + c + (d + c^2))^2$, para $m = 4$ ou 5 e $n \geq 2$;
3. $(1 + c + (d + c^2))^2(1 + c + d) + c^6$, para $m = 6$ e $n \geq 1$;
4. $1 + c^2d^3$, para $m = 2$ e $n = 3$.

Então Stong completou a descrição, mostrando que as classes de Stiefel-Whitney de qualquer fibrado vetorial sobre $P(m,n)$ é um produto destas classes com as classes $1 + c$ e $1 + c + d$.

**Observação 5.3.1** *Como todas as variedades fechadas suaves de dimensão* 1, 2, 4 *ou* 8 *satisfazem* $CP$, *em particular,* $P(2,1)$, $P(2,3)$, $P(4,2)$ *e* $P(6,1)$ *satisfazem* $CP$.

A partir de agora apresentaremos resultados de não validade da propriedade $CP$ para variedades de Dold.

**Teorema 5.3.1** $P(m,n)$ *não satisfaz* $CP$ *se* $m$ *é ímpar .*

**Demonstração:** Como $m + 2n$ é ímpar, o resultado segue imediatamente do Lema 5.2.2 e da estrutura do anel de cohomologia de $P(m,n)$. ■

Assim, assumiremos a partir de agora que $m$ é par. De maneira genérica, vamos considerar uma involução $(M,T)$ com conjunto de pontos fixos sendo $P(m,n) \cup \{ponto\}$ e denotaremos por $\nu \to P(m,n)$ o fibrado normal de $P(m,n)$ em $M$, com $dim(\nu) = r \geq 1$.

Para provar os próximos resultados, precisaremos de alguns lemas técnicos com relação ao fato de que $r$ não pode assumir certos valores pequenos; mais especificamente, provaremos que $r = 1$, 2 e 3 não podem ocorrer. Note que a prova do Lema 5.2.2 mostra que $r = 1$ não pode ocorrer; então, nossa próxima tarefa é mostrar que $r = 2$ não pode ocorrer. Mas antes, precisamos do seguinte

**Lema 5.3.1** *O elemento $d \in H^2(P(m,n))$ ocorre em $W(\nu)$; isto é, $W(\nu)$ não é uma polinomial envolvendo apenas $c \in H^1(P(m,n))$.*

**Demonstração:** Do lema 5.2.1, temos que o fibrados linha de Hopf $\lambda \to \mathbb{R}P(\nu)$ e $\lambda_{m+2n+r-1} \to \mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$ são cobordantes. Escrevendo $W(\lambda) = 1+e$ e $W(\lambda_{m+2n+r-1}) = 1+\alpha$, segue que

$$0 \neq \alpha^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}] = e^{m+2n+r-1}[RP(\nu)].$$

Considere a classe dual de Stiefel-Whitney

$$\overline{W(\nu)} = \frac{1}{W(\nu)} = 1 + \overline{u}_1 + \cdots + \overline{u}_{m+2n}.$$

Pela fórmula de Conner, Teorema 1.6.1, segue que

$$e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P(\nu)] = \overline{u}_{m+2n}[P(m,n)].$$

Assim , $\overline{u}_{m+2n} = c^m d^n \neq 0$, e o lema segue. ■

O lema a seguir mostrará que $r = 2$ não pode ocorrer

**Lema 5.3.2** *Escreva $W(\nu) = 1 + u_1 + \cdots + u_r$ como sendo a classe de Stiefel-Whitney de $\nu \to P(m,n)$, o fibrado normal de $P(m,n)$ em $M$. Então $u_s \neq 0$ para algum $s \geq 3$.*

**Demonstração:** Por contradição, vamos supor que $W(\nu) = 1 + u_1 + u_2$, ou seja, $u_s = 0$ para $s \geq 3$. Assim, podemos escrever $W(\nu) = 1 + \xi c + \beta c^2 + \gamma d$ com $\xi, \beta, \gamma = 0$ ou 1. Pelo lema 5.3.1 devemos ter $\gamma = 1$. Da fórmula de Wu 1.6.2, temos $Sq^1(u_2) = u_1 u_2 + u_0 u_3 = u_1 u_2$, onde $Sq^i$ é a operação de Steenrod; ou seja,

$$Sq^1(\beta c^2 + d) = Sq^1((u_2) = u_1 u_2 = \xi\beta c^3 + \xi cd$$

. Mas, usando a fórmula de Cartan 1.6.3, temos que

$$Sq^1(\beta c^2 + d) = \beta Sq^1(c^2) + Sq^1(d) = Sq^1(d) = cd,$$

e assim, $\xi\beta c^3 + \xi cd = cd$. Então temos duas possibilidades: (1) $\xi = 1$ e $\beta = 0$, ou (2) $\xi = 1$ e $m = 2$.

No primeiro caso, (1) $\xi = 1$ e $\beta = 0$, temos $W(\nu) = 1+c+d$. Considerando o fibrado vetorial 2-dimensional $\eta \to P(m,n)$ com $W(\eta) = 1 + c + d$, que é citado no trabalho de Stong [26], teremos então que, $\nu$ é cobordante a $\eta \oplus (r-2)\mathbb{R}$. Pelo teorema 1.7.1, podemos remover secções, e assim, temos que existe uma involução com $r = 2$ e fixed data $(\eta \to P(m,n)) \cup ((m+2n+2)\mathbb{R} \to \{ponto\})$.

Podemos definir em $S^m \times \mathbb{C}P^{n+1}$ as seguintes involuções:

$$S(z, [z_0, \cdots, z_n, z_{n+1}]) = (-z, [\overline{z_0}, \cdots, \overline{z_n}, \overline{z_{n+1}}])$$

e

$$\overline{T}(z,[z_0,\cdots,z_n,z_{n+1}])=(z,[z_0,\cdots,z_n,-z_{n+1}]).$$

Note que tais involuções comutam e que $S$ não tem pontos fixos. Assim $\overline{T}$ induz uma involução $\tau$ em $\frac{S^m\times CP^{n+1}}{S}=P(m,n+1)$ com fixed data

$$\begin{array}{ccc} (n+1)l\oplus(n+1)\mathbb{R} & & \eta \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^m & & P(m,n) \end{array},$$

e então, pela sequência de Conner-Floyd 1.5.2, $(M,T)\cup(P(m,n+1),\tau)$ é cobordante a uma involução $(W,S')$ com conjunto de pontos fixos $\mathbb{R}P^m\cup\{ponto\}$ e fixed data

$$\begin{array}{ccc} (n+1)l\oplus(n+1)\mathbb{R} & & (m+2n+2)\mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^m & & \{ponto\}. \end{array}$$

Em [23], Royster descreveu, a menos de cobordismo equivariante, as involuções cujo conjunto de pontos fixos é $\mathbb{R}P^m\cup\{ponto\}$ com $m$ par: ele mostrou que , para tais involuções, o fibrado normal sobre $RP^m$ é cobordante a $\lambda_m\oplus p\ R\to\mathbb{R}P^m$ para algum $p\geq 0$ (em [21], Pergher e Stong calcularam o limitante superior para $p$). Segue que $(n+1)\lambda_m\to\mathbb{R}P^m$ é cobordante a $\lambda_m\oplus n\mathbb{R}\to\mathbb{R}P^m$. Suponha $1\leq n<m$, isto é, $2\leq n+1\leq m$. Tome $2^x\leq m$, $x\geq 1$, qualquer potência de 2 da expansão diádica de $n+1$. Se $\alpha\in H^1(RP^m)$ é o gerador, então temos $w_1((n+1)\lambda_m)^{m-2^x}.w_{2^x}((n+1)\lambda_m)[RP^m]=\alpha^m[RP^m]=1$ pois $m$ é par e $\binom{n+1}{2^x}=1$. Entretanto, o correspondente número característico de $\lambda_m\oplus n\mathbb{R}\to\mathbb{R}P^m$ é zero pois $w_{2^x}(\lambda_m\oplus n\mathbb{R})=0$, uma contradição. Assim, $n\geq m$. Returnando a involução $(W,S')$ com fixed data $((n+1)(l\oplus\mathbb{R})\to\mathbb{R}P^m)\cup((m+2n+2)\mathbb{R}\to\{ponto\})$, note que $dim(W)=m+2n+2\geq 3m+2>3m$, o que contradiz o 5/2-Teorema de J. Boardman de [1], o qual diz que $dim(W)\leq 5/2m$.

No segundo caso, (2) $\xi=1$ e $m=2$, temos $W(\nu)=1+c+(c^2+d)$. Considerando o fibrado vetorial exótico 2-dimensional $\zeta\to P(2,n)$ com $W(\zeta)=(1+c)^2(1+c+d)(1+\frac{c^2d}{1+d})=1+c+(c^2+d)$, que é citado no trabalho do Stong [26], temos que $\nu$ é cobordante a $\zeta\oplus(r-2)\mathbb{R}$ . Novamente removendo secções, pelo Teorema 1.7.1, temos que existe uma involução com $r=2$ e fixed data $\zeta\to P(m,n))\cup((m+2n+2)\mathbb{R}\to\{ponto\})$

Temos

$$\begin{aligned}
\overline{W(\nu)} &= \frac{1}{W(\nu)}\\
&= \frac{1}{(1+c+c^2+d)}\\
&= \frac{1}{(1+c)\left(1+\frac{c^2+d}{1+c}\right)}\\
&= \frac{1}{(1+c)}\left(1+\frac{c^2+d}{1+c}+\left(\frac{c^2+d}{1+c}\right)^2+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{1+c}\sum_{i=0}^{m+2n}\left(\frac{c^2+d}{1+c}\right)^i\\
&= \sum_{i=0}^{m+2n}\frac{(c^2+d)^i}{(1+c)^{i+1}}.
\end{aligned}$$

Note que se $i>n+1$ ou $i<n$ o termo $c^2d^n$ não ocorre, ou seja, o termo $c^2d^n$ só pode ocorrer quando $i=n$ ou $i=n+1$.

Para $i = n$, temos

$$\begin{aligned}
\tfrac{(c^2+d)^n}{(1+c)^{n+1}} &= (1+c+c^2)^{n+1}(c^2+d)^n \\
&= (1+c+c^2)^{n+1}(d^n + \text{ termos com potências de d menores}) \\
&= \tbinom{n+1}{2}c^2d^n + \tbinom{n+1}{1}c^2d^n + \text{ termos com potências de d menores} \\
&= \left\{\tbinom{n+1}{2} + \tbinom{n+1}{1}\right\} c^2d^n + \text{ termos com potências de d menores} \\
&= \tbinom{n+2}{2}c^2d^n + \text{ termos com potências de d menores .}
\end{aligned}$$

Para $i = n+1$, temos

$$\begin{aligned}
\tfrac{(c^2+d)^{n+1}}{(1+c)^{n+2}} &= (1+c+c^2)^{n+2}(c^2+d)^{n+1} \\
&= (1+c+c^2)^{n+2}(d^{n+1} + \tbinom{n+1}{n}c^2d^n + \text{ termos com potências de d menores}) \\
&= \tbinom{n+1}{n}c^2d^n + \text{ termos com potências de d menores.}
\end{aligned}$$

Da prova do lema 5.3.1, temos que $\overline{u_{m+2n}} \neq 0$, o que acarreta, $\left\{\binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{n}\right\} c^2d^n \neq 0$, ou seja, $\binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{n} \neq 0$.

Para $n$ ímpar, tem-se $\binom{n+1}{n} = 0$, e assim, $\binom{n+2}{2} = 1$, logo devemos ter $n \equiv 1\,(mod\ 4)$. Para $n$ par, tem-se $\binom{n+1}{n} = 1$, e assim, $\binom{n+2}{2} = 0$, logo temos $n \equiv 2\,(mod\ 4)$.

Portanto, $n \equiv 1$ ou $2\,(mod\,4)$; em ambos os casos, obteremos uma contradição do tipo $0 = 1$ usando o Lema 5.2.1.

Do Teorema 1.5.3, temos $W(\mathbb{R}P(\nu)) = (1+c)^2(1+c+d)^{n+1}\{(1+e)^2 + (1+e)u_1 + u_2\}$, sujeito à relação $e^2 + eu_1 + u_2 = 0$, o que implica que $W(\mathbb{R}P(\nu)) = (1+c)^2(1+c+d)^{n+1}(1+c) = (1+c)^3(1+c+d)^{n+1}$. Temos também que $W(\mathbb{R}P^{2+2n+1}) = (1+e)^{2n+4}$.

Se $n \equiv 1\ (mod\ 4)$, isto é, $n = 4k+1$, então $W(\mathbb{R}P(\nu)) = (1+c)^3(1+c+d)^{4k+2}$ e $W(\mathbb{R}P^{2+2n+1}) = (1+e)^{8k+6}$. Assim, $w_2(\mathbb{R}P(\nu)) = 0$ e $w_2(\mathbb{R}P^{2+2n+1}) = e^2$, o que implica que

$$\begin{aligned}
1 = e^2e^{8k+3}[\mathbb{R}P^{8k+5}] &= w_2(RP^{2+2n+1})e^{m+2n+r-1-2}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}] \\
&= w_2(RP(\nu))e^{m+2n+r-1-2}[\mathbb{R}P(\nu)] = 0,
\end{aligned}$$

contradição.

Suponha então $n \equiv 2(mod\,4)$, ou seja, $n = 4k+2$, e então $W(\mathbb{R}P(\nu)) = (1+c)^3(1+c+d)^{4k+3}$ e $W(\mathbb{R}P^{2+2n+1}) = (1+e)^{8k+8}$. Assim, $w_2(\mathbb{R}P(\nu)) = c^2+d$ e $w_2(\mathbb{R}P^{2+2n+1}) = 0$; também $w_3(\mathbb{R}P(\nu)) = cd$ e $w_3(\mathbb{R}P^{2+2n+1}) = 0$, o que implica que

$$\begin{aligned}
0 = w_2^{4k}w_3^2e[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}] &= w_2^{4k}w_3^2e[\mathbb{R}P(\nu)] \\
&= (c^2+d)^{4k}(cd)^2e[\mathbb{R}P(\nu)] \\
&= c^2d^{4k+2}[P(2,4k+2)] = 1,
\end{aligned}$$

contradição. Portanto, segue o resultado, ou seja, $r = 2$ não pode ocorrer. ∎

A seguir mostraremos que $r = 3$ não pode ocorrer. Isso será uma consequência do

**Lema 5.3.3** *Escreva $W(\nu) = 1 + u_1 + \cdots + u_r$ como sendo a classe de Stiefel-Whitney de $\nu \to P(m,n)$, o fibrado normal de $P(m,n)$ em $M$. Então $u_s \neq 0$ para algum $s \geq 4$.*

**Demonstração:** Por contradição, vamos supor que $W(\nu) = 1 + u_1 + u_2 + u_3$, ou seja, $u_s = 0$, para $s \geq 4$. Assim, podemos escrever $W(\nu) = 1 + \alpha c + \beta d + \gamma c^2 + \delta cd + \epsilon c^3$ com $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon = 0$ ou 1.

Vamos dividir a prova em dois casos, i) $m = 2$; ii) $m > 2$.

Se $m = 2$ então $W(\nu) = 1 + \alpha c + \beta d + \gamma c^2 + \delta cd$. Pelo caso prévio, $u_3 \neq 0$, e assim $\delta = 1$. Pela fórmula de Wu 1.6.2, $Sq^1(u_3) = u_1 u_3 = (\alpha c)(cd) = \alpha c^2 d$, isto é, $Sq^1(cd) = \alpha c^2 d$. Por outro lado, pela formula de Cartan 1.6.3, temos $Sq^1(cd) = c^2 d + c^2 d = 0$. Daí, $\alpha c^2 d = 0$, e então $\alpha = 0$.

Novamente usando a fórmula de Wu 1.6.2, temos $Sq^1(u_2) = u_1 u_2 + u_0 u_3 = u_3 = cd$. Mas, pela formula de Cartan 1.6.3, temos $Sq^1(u_2) = Sq^1(\beta d + \gamma c^2) = \beta cd$. Logo, $\beta = 1$ e então $W(\nu) = 1 + d + \gamma c^2 + cd$.

Se $\gamma = 1$, $W(\nu) = 1 + d + c^2 + cd$; considere o fibrado vetorial 3-dimensional $\eta \oplus l \to P(2, n)$ com $W(\eta \oplus l) = (1 + c)(1 + c + d) = W(\nu)$. Se $\gamma = 0$, $W(\nu) = 1 + d + cd$, o qual tem a mesma classe característica do fibrado vetorial exótico 3-dimensional $\zeta \oplus l \to P(2, n)$ com $W(\zeta \oplus l) = (1 + c)(1 + c + d + c^2)$.

Assim, o fibrado $\nu$ é cobordante ou a $\eta \oplus l \oplus (r-3)\mathbb{R}$, ou a $\zeta \oplus (r-3)\mathbb{R}$, respectivamente. Pelo teorema 1.7.1, podemos remover secções, e assim, temos que existe uma involução com $r = 3$ e fixed data ou $\eta \oplus l \to P(m, n)) \cup ((m+2n+3)\mathbb{R} \to \{ponto\})$ ou $\zeta \to P(m, n)) \cup ((m+2n+3)\mathbb{R} \to \{ponto\})$.

Se $m > 2$, então $W(\nu) = 1 + \alpha c + \beta d + \gamma c^2 + \delta cd + \epsilon c^3$. Pela fórmula de Wu 1.6.2, $Sq^1(u_3) = u_1 u_3 = (\alpha c)(\delta cd + \epsilon c^3) = \alpha\delta c^2 d + \alpha\epsilon c^4$. Por outro lado, pela formula de Cartan 1.6.3, temos $Sq^1(u_3) = Sq^1(\delta cd + \epsilon c^3) = \delta Sq^1(cd) + \epsilon Sq^1(c^3) = \delta(c^2 d + c^2 d) + \epsilon(c^4) = \epsilon c^4$. Daí, $\alpha\delta c^2 d + \alpha\epsilon c^4 = \epsilon c^4$, e assim,

$$\alpha\delta = 0; \tag{5.1}$$

e

$$\alpha\epsilon = \epsilon. \tag{5.2}$$

Agora, $Sq^2(u_3) = u_2 u_3 = (\beta d + \gamma c^2)(\delta cd + \epsilon c^3) = \beta\delta cd^2 + (\beta\epsilon + \gamma\delta)c^3 d + \gamma\epsilon c^5$.

Por outro lado, $Sq^2(u_3) = Sq^2(\delta cd + \epsilon c^3) = \delta Sq^2(cd) + \epsilon Sq^2(c^3) = \delta cd^2 + \delta c^3 d + \epsilon c^5$ Então $\beta\delta cd^2 + (\beta\epsilon + \gamma\delta)c^3 d + \gamma\epsilon c^5 = \delta cd^2 + \delta c^3 d + \epsilon c^5$, e assim

$$\delta = \beta\delta; \tag{5.3}$$

$$\delta = \beta\epsilon + \gamma\delta; \tag{5.4}$$

e

$$\epsilon = \gamma\epsilon. \tag{5.5}$$

Se $\alpha = 1$, a relação (5.1) nos dá $\delta = 0$. Como $u_3 \neq 0$, temos $\epsilon = 1$ e então pela relação (5.5), $\gamma = 1$. Finalmente, a relação (5.4) implica que $\beta = 0$. Assim, $W(\nu) = 1 + c + c^2 + c^3$, a qual não envolve $d$, contradizendo o Lema 5.3.1.

Logo $\alpha = 0$, e então a relação (5.2) nos dá $\epsilon = 0$. Como $u_3 \neq 0$, temos $\delta = 1$. Pela relação (5.3), $\beta = 1$, e por (5.4), $\gamma = 1$. Então $W(\nu) = 1+d+c^2+cd$, e temos que existe o fibrado vetorial 3-dimensional $\eta \oplus l \to P(2, n)$ com $W(\eta \oplus l) = (1+c)(1+c+d) = W(\nu)$. Segue que $\nu$ é cobordante a $(\eta \oplus l) \oplus (r-3)\mathbb{R}$. Novamente usando o teorema 1.7.1, podemos remover secções, e assim, temos que existe uma involução com $r = 3$ e fixed data $\eta \oplus l \to P(m, n)) \cup ((m+2n+3)\mathbb{R} \to \{ponto\})$.

Resumindo, em ambos os casos, $m = 2$ ou $m > 2$, temos que existem involuções $r = 3$ e com os fixed data acima descritos. Vamos mostrar que isso é impossível dividindo a prova nos casos $n$ ímpar e $n$ par.

Primeiro vamos considerar $n$ ímpar. Em [8], Khare mostrou que para $n$ ímpar, $P(m, n)$ borda e então, pelo Teorema 1.1.1, temos que todos os seus números característicos são nulos, e em particular $w_{m+2n}[P(m,n)] = 0$. De [9], temos que

$$\chi(P(m,n)) \equiv w_{m+2n}[P(m,n)]\ (mod\ 2),$$

onde $\chi$ é a característica de Euler, e assim,

$$\chi(P(m,n)) \equiv 0\ (mod\ 2).$$

Por outro lado, do Teorema 1.8.2, segue que

$$\chi(M) \equiv (\chi(P(m,n) + \chi(\{ponto\}))\ (mod\ 2) \equiv 1\ (mod\ 2).$$

Mas, sendo que $dim\ M = m + 2n + r = m + 2n + 3$ é ímpar, pela observação 1.8.1 temos $\chi(M^n) = 0$, o que é uma contradição.

Agora vamos considerar $n$ par. Tem-se

$$W(RP(\nu)) = W(P(m,n))((1+e)^3 + (1+e)^2u_1 + (1+e)u_2 + u_3),$$

que esta sujeito a relação $e^3 + e^2u_1 + eu_2 + u_3 = 0$, o que acarreta

$$W(RP(\nu)) = W(P(m,n))(1 + e + e^2 + u_1 + u_2).$$

Também tem-se,

$$W(RP^{m+2n+2}) = (1+e)^{m+2n+3}.$$

Observamos que, para as duas possibilidades de fixed data, $u_1 = 0$. Assim , $w_1(RP(\nu)) = \binom{m}{1}c + \binom{n+1}{1}c + e + u_1 = c + e$ e $w_1(RP^{m+2n+r-1}) = \binom{m+2n+3}{1}e = e$, e também, $w_{2n}(RP(\nu)) = w_{2n}(P(m,n)) + w_{2n-1}(P(m,n))(e + u_1) + w_{2n-2}(P(m,n))(e^2 + u_2)$ e $w_{2n}(RP^{m+2n+r-1}) = \binom{m+2n+3}{2n}e^{2n}$. Sendo que $W(\nu)\overline{W(\nu)} = 1$, segue que

$$u_1 + \overline{u_1} = 0 \text{ e assim } u_1 = \overline{u_1} = 0; \text{ também } u_2 + u_1\overline{u_1} + \overline{u_2} = 0, \text{ daí } u_2 = \overline{u_2}.$$

Portanto, usando a fórmula de Conner 1.6.1, temos

$$\begin{aligned}
(w_1 + e)^m w_{2n} e^2[\mathbb{R}P(\nu)] &= c^m(w_{2n} + w_{2n-1}e + w_{2n-2}(e^2 + u_2))e^2[\mathbb{R}P(\nu)] \\
&= (c^m w_{2n} + c^m w_{2n-1}\overline{u_1} + c^m w_{2n-2}\overline{u_2} + c^m w_{2n-2}u_2)[P(m,n)] \\
&= c^m w_{2n}[P(m,n)] \\
&= c^m \left(\binom{n+1}{n}d^n + \text{ termos com potência positiva de c}\right)[P(m,n)] \\
&= c^m d^n[P(m,n)] = 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(w_1(RP^{m+2n+r-1}) + e)^m w_{2n} e^2[\mathbb{R}P^{m+2n+2}] = 0,$$

o que é uma contradição. Então segue o resultado, ou seja, $r = 3$ não pode ocorrer. ∎

Para continuar, vamos introduzir uma nova classe característica associada a fibrados linha sobre variedades fechadas suaves. Essa classe é uma novidade técnica no contexto subjacente a tais computações. Seja $\lambda \to P^n$ um fibrado linha sobre uma variedade fechada e suave n-dimensional . Considere a classe

$$\widetilde{W} = W((\tau(P^n) \otimes \lambda) \oplus \lambda),$$

onde $\tau(P^n) \to P^n$ é o fibrado tangente de $P^n$.

Se $W(\lambda) = 1 + c$ e $W(\tau(P^n)) = 1 + w_1 + \cdots + w_n$, então

$$\widetilde{W} = [(1+c)^n + (1+c)^{n-1}w_1 + \cdots w_n](1+c) = (1+c)^{n+1} + (1+c)^n w_1 + \cdots (1+c)w_n.$$

Segue que cada $\widetilde{W}_i$ é uma polinomial nos $w_i's$ e $c$, e como consequência todo número característico de $\tau(P^n) \otimes \lambda) \oplus \lambda \to P^n$ é um número característico de $\lambda \to P^n$ .

Se $\xi^j \to F^i$ é um fibrado vetorial j-dimensional sobre $F^i$ e $\lambda \to P^n = \mathbb{R}P(\xi^j)$ é o fibrado linha de Hopf, podemos então usar $\widetilde{W}$ para obter novos números característicos para $\lambda \to P^n = \mathbb{R}P(\xi^j)$. Temos que

$$\tau(RP(\xi^j)) = \tau(F^i) \oplus \theta,$$

onde $\theta$ é o fibrado tangente ao longo das fibras de $\mathbb{R}P(\xi^j)$ (cada tal fibra é $\mathbb{R}P^{j-1}$; vide [4].)

Sabemos, pelo Teorema 1.5.3, que

$$\theta \oplus \mathbb{R} = \pi!(\xi^j) \otimes \lambda,$$

onde $\pi : \mathbb{R}P(\xi^j) \to F^i$ é a projeção, e $\pi!(\xi^j)$ é o pullback. Então , colocando $P^n = \mathbb{R}P(\xi^j)$, temos

$$\begin{aligned}
(\tau(P^n) \otimes \lambda) \oplus \lambda &= (\tau(P^n) \otimes \lambda) \oplus (\mathbb{R} \otimes \lambda) \\
&= (\tau(P^n) \oplus \mathbb{R}) \otimes \lambda \\
&= ((\tau(F^i) \oplus \theta) \oplus \mathbb{R}) \otimes \lambda \\
&= (\tau(F^i) \otimes \lambda) \oplus ((\theta \oplus R) \otimes \lambda) \\
&= (\tau(F^i) \otimes \lambda) \oplus ((\pi!(\xi^j) \otimes \lambda) \otimes \lambda) \\
&= (\tau(F^i) \otimes \lambda) \oplus ((\pi!(\xi^j) \otimes (\lambda \otimes \lambda)) \\
&= (\tau(F^i) \otimes \lambda) \oplus (\pi!(\xi^j)).
\end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{W} &= W((\tau(F^i) \otimes \lambda) \oplus (\pi!(\xi^j)) \\
&= W(\tau(F^i) \otimes \lambda) W(\xi^j).
\end{aligned}$$

Tomando agora uma involução $(M, T)$ cujo conjunto de pontos fixos é $P(m, n) \cup \{ponto\}$, e com fixed data sendo

$$\begin{array}{ccc}
\nu & & (m+2n+r)\mathbb{R} \\
\downarrow & \cup & \downarrow \\
P(m,n) & & \{ponto\},
\end{array}$$

temos que $\widetilde{W}$, associado ao fibrado de Hopf $\lambda_1 \to \mathbb{R}P(\nu)$, é

$$\widetilde{W} = W(\tau(P(m,n)) \otimes \lambda_1) W(\nu) = ((1+e)^{m+2n} + (1+e)^{m+2n-1} w_1 + \cdots w_{m+2n})(1 + u_1 + \cdots u_r))$$

enquanto $\widetilde{W}$ associado ao fibrado de Hopf $\lambda_2 \to \mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$ , é

$$\widetilde{W} = W(\tau(\{ponto\}) \otimes \lambda_2) W((m+2n+r)\mathbb{R}) = 1.$$

Conforme atrás visto, números característicos envolvendo os $\widetilde{W}_i$ produzem números característicos dos correspondentes fibrados de Hopf. Em particular, para $t \geq 1$, um número da forma

$$\widetilde{W}_t e^{m+2n+r-1-t}[\mathbb{R}P(\nu)] = \widetilde{W}_t e^{m+2n+r-1-t}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}]$$

é nulo. Portanto, o único número desta forma não nulo é

$$e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P(\nu)] = e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}].$$

Estamos agora em condições de provar o primeiro resultado forte de não validade de $CP$ para $P(m,n)$, conforme atrás enunciado.

**Teorema 5.3.2** *Se $m \equiv 0\,(mod\ 4)$ e $n$ é ímpar então $P(m,n)$ não satisfaz a propriedade $CP$ .*

**Demonstração:** Faremos a prova por contradição.
Temos que $W(P(m,n)) = (1+c)^m(1+c+d)^{n+1}$ é a classe de Stiefel-Whitney do fibrado tangente a $P(m,n)$. Então $w_1 = \binom{m}{1}c + \binom{n+1}{1}c = 0$.

Agora vamos utilizar a nova classe característica que foi introduzida acima. Manteremos as notações prévias, de que $(M,T)$ é uma involução com fixed data

$$\begin{array}{ccc} \nu & & (m+2n+r)\mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ P(m,n) & & \{ponto\}. \end{array}$$

Na componente $\mathbb{R}P(\nu)$, temos

$$\widetilde{W}_1 = \binom{m+2n}{1} e + w_1 + u_1 = u_1$$

e

$$\widetilde{W}_2 = \binom{m+2n}{2} e^2 + \binom{m+2n-1}{1} e w_1 + w_2 + (\binom{m+2n}{1} + w_1)u_1 + u_2) = e^2 + (w_2+u_2),$$

pois $m \equiv 0\,(mod\ 4)$ e $n$ é ímpar.

Na componente $\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$, temos

$$\widetilde{W}_1 = 0 \text{ e } \widetilde{W}_2 = 0.$$

Escreva $m+2n+2 = 2k$, com $k \geq 4$. Note que $m+2n+r-1-2k > 0$, pois $r \geq 4$. Assim,

$$\begin{aligned} 1 = e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}] &= e^{m+2n+r-1-2k}(\widetilde{W}_2 + e^2)^k[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}] \\ &= e^{m+2n+r-1-2k}(\widetilde{W}_2 + e^2)^k[\mathbb{R}P(\nu)] \\ &= e^{m+2n+r-1-2k}(w_2+u_2)^k[\mathbb{R}P(\nu)] = 0, \end{aligned}$$

pois $(w_2+u_2)^k \in H^{m+2n+2}(P(m,n);Z_2)$. Então $m+2n+r-1-2k < 0$, o que é uma contradição. ■

A seguir, outro resultado de não validade de $CP$.

**Teorema 5.3.3** *Se $m = 2$ e $n$ é par então $P(m,n)$ não satisfaz a propriedade $CP$.*

**Demonstração:** Suponha que $P(m,n)$ satisfaça a propriedade $CP$, com as mesmas notações prévias.

Sendo $\widetilde{W} = ((1+e)^{2+2n} + w_1(1+e)^{2+2n-1} + \ldots + w_{2+2n})(1+u_1+\ldots+u_r)$ então

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_2 &= \tbinom{2+2n}{2}e^2 + \tbinom{2+2n}{1}w_1e + w_2 + w_1u_1 + \tbinom{2+2n-1}{1}eu_1 + u_2\\ &= e^2 + w_2 + w_1u_1 + eu_1 + u_2.\end{aligned}$$

Temos então duas situações possíveis i) $u_1 = 0$ ou ii) $u_1 = c$.

Primeiro vamos supor $u_1 = 0$. Então $\widetilde{W}_2 + e^2 = w_2 + u_2$. Escreva $2+2n+2 = 2k$, com $k \geq 4$. Note que $2+2n+r-1-2k > 0$, pois $r \geq 4$. Assim,

$$e^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] = e^{r-3}e^{2k}[[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}]] = 1$$

Por outro lado,

$$e^{r-3}e^{2k}[\mathbb{R}P(\nu)] = e^{r-3}(e^2+\widetilde{W}_2)^k[\mathbb{R}P(\nu)] = e^{r-3}(w_2+u_2)^k[\mathbb{R}P(\nu)] = 0$$

pois $(w_2+u_2)^k = (w_2+u_2)^{2+2n+2} \in H^{2+2n+2}(P(m,n))$, contradição.

Suponha agora, $u_1 = c$.

Sendo $n$ par, podemos dividir em dois casos: $n = 4t$ ou $n = 4t+2$, $t \geq 1$.

Para $n = 4t+2$, temos

$$\widetilde{W}_2 + e^2 = w_2 + w_1u_1 + eu_1 + u_2 = ec + w_2 + w_1u_1 + u_2.$$

Denote $2+2n+2 = 2k$, com $k \geq 4$. Note que $2+2n+r-1-2k > 0$, pois $r \geq 4$. Assim,

$$\begin{aligned}1 = e^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] &= e^{r-3}e^{2k}[\mathbb{R}P(\nu)]\\ &= e^{r-3}(e^2+\widetilde{W}_2)^k[\mathbb{R}P(\nu)]\\ &= e^{r-3}(ec+w_2+w_1u_1+u_2)^k[\mathbb{R}P(\nu)]\\ &= e^{r-3}(\sum_{i=0}^{2+n}\tbinom{2+n}{i}(ec)^i(w_2+w_1u_1+u_2)^{2+n-i})[\mathbb{R}P(\nu)].\end{aligned}$$

Para $i > 2$, $c^i = 0$. Para $i < 2$,

$$c^i(w_2+w_1u_1+u_2)^{2+n-i} \in H^{4+2n-i}(P(m,n))$$

e como $4+2n-i > 2+2n$, temos $c^i(w_2+w_1u_1+u_2)^{2+n-i} = 0$; e para $i = 2$, temos $\binom{2+n}{2}(ec)^2(w_2+w_1u_1+u_2)^{2+n-2} = 0$, pois $n = 4k+2$.

Assim,

$$e^{r-3}(\sum_{i=0}^{2+n}\binom{2+n}{i}(ec)^i(w_2+w_1u_1+u_2)^{2+n-i})[\mathbb{R}P(\nu)] = 0,$$

o que nos dá a contradição. Agora resta analisar o caso em que $n = 4$. Denote $4+2n+2 = 2k$. Temos que $r \geq 4$, pela exclusão prévia dos casos $r = 1$, 2 e 3. Primeiro, suponha $r \geq 5$, então $2+2n+r-1-2k = r-1-2-2 = r-5 \geq 0$. Assim

$$\begin{aligned} 1 = e^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] &= e^{r-5}e^{2k}[\mathbb{R}P(\nu)] \\ &= e^{r-5}(\widetilde{W}_2 + e^2)^k[\mathbb{R}P(\nu)] \\ &= e^{r-5}(ec + w_2 + w_1u_1 + u_2)^k[\mathbb{R}P(\nu)] \\ &= e^{r-3}(\sum_{i=0}^{2+n} \tbinom{2+n+1}{i}(ec)^i(w_2 + w_1u_1 + u_2)^{2+n-i})[\mathbb{R}P(\nu)]. \end{aligned}$$

Para $i > 2$, $c^i = 0$. Para $i \leq 2$, temos

$$c^i(w_2 + w_1u_1 + u_2)^{2+n+1-i} \in H^{4+2n+2-i}(P(m,n))$$

e como $4 + 2n + 2 - i \geq 2 + 2n + 2$ temos $c^i(w_2 + w_1u_1 + u_2)^{2+n+1-i} = 0$. Assim,

$$e^{r-3}(\sum_{i=0}^{2+n} \binom{2+n+1}{i}(ec)^i(w_2 + w_1u_1 + u_2)^{2+n-i})[\mathbb{R}P(\nu)] = 0$$

contradição, e então $r = 4$.

Denotemos $W(\nu) = 1+u_1+u_2+u_3+u_4$ com $u_1 = c$, $u_4 = \alpha d^2+\beta c^2 d$ onde $\alpha, \beta = 0$ ou 1. Da fórmula de Wu 1.6.2, temos $Sq^1(u_4) = u_1u_4 = \alpha cd^2+\beta c^3 d = \alpha cd^2$. Por outro lado, pela fórmula de Cartan 1.6.3, segue que $Sq^1(u_4) = Sq^1(\alpha d^2 + \beta c^2 d) = \alpha Sq^1(d^2) + \beta Sq^1(c^2 d) = \beta c^3 d = 0$, pois $m = 2$. Então $\alpha cd^2 = 0$, isto é, $\alpha = 0$. Como, pelo fato de que $r = 4$ e pelo Lema 5.3.3, $u_4 \neq 0$. Portanto, $\beta \neq 0$. Assim, $u_4 = c^2 d$.

Escreva $u_2 = \gamma d + \delta c^2$, então novamente da fórmula de Wu 1.6.2, temos $Sq^2(u_4) = u_2u_4 = (\gamma d + \delta c^2)c^2 d = \gamma c^2 d^2 + \delta c^4 d = \gamma c^2 d^2$. Por outro lado, pela fórmula de Cartan 1.6.3, temos que $Sq^2(u_4) = Sq^2(c^2 d) = c^2 d^2$. Assim, $\gamma c^2 d^2 = c^2 d^2$, isto é, $\gamma = 1$. Portanto, $u_2 = d + \delta c^2$. Note que $w_1 = c$ e $w_2 = c^2 + d$, e então

$$\widetilde{W}_2 = e^2 + ew_1 + w_2 + u_1w_1 + u_2 = e^2 + ec + (c^2 + d) + c^2 + (d + \delta c^2) = e^2 + ec + \delta c^2,$$

ou seja , $\widetilde{W}_2 + e^2 = ec + \delta c^2$. Logo,

$$\begin{aligned} 1 = e^{2+2n+3}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] &= e^{2n-1}e^6[\mathbb{R}P(\nu)] \\ &= e^{2n-1}(\widetilde{W}_2 + e^2)^3[\mathbb{R}P(\nu)] \\ &= e^{2n-1}(ec + \delta c^2)^3[\mathbb{R}P(\nu)] = 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. ■

Finalmente, nosso último resultado de não validade da propriedade $CP$ para variedade de Dold.

**Teorema 5.3.4** *Se $m > 6$, $n$ é ímpar e $m \leq n$, então $P(m,n)$ não satisfaz a propriedade $CP$.*

**Demonstração:** Vamos mostrar que se existe uma involução fixando $P(m,n) \cup \{ponto\}$ com $n$ ímpar e $m > 6$, então devemos ter $m > n$. Do teorema 5.3.2, podemos assumir que $m \equiv 2\,(mod\,4)$.

Em [8], Khare mostrou que para $n$ ímpar, $P(m,n)$ borda. Repetindo argumento prévio, temos que $w_{m+2n}[P(m,n)] = 0$ e então

$$\chi(P(m,n)) \equiv w_{m+2n}[P(m,n)]\ (mod\ 2) = 0\ (mod\ 2),$$

onde $\chi$ é a característica de Euler.

Logo, do teorema 1.8.2, segue que

$$\chi(M) \equiv (\chi(P(m,n) + \chi(\{ponto\}))(mod\ 2) \equiv 1(mod\ 2).$$

Daí, pela observação 1.8.1, temos que $r$ é par.

Sejam $2^s$ e $2^t$ tais que $2^{s-1} \leq m < 2^s$ e $2^{t-1} \leq n < 2^t$, isto é, $2^s$ é a menor potência de2maior do que $m$ e $2^t$ é a menor potência de2maior do que $n$.

Sendo $m > 6$, temos pelo trabalho de Stong [26] que $\nu$ é não exótico, ou seja,

$$W(\nu) = (1+c)^a(1+c+d)^b$$

e podemos supor que $0 \leq a < 2^s$ e $0 \leq b < 2^t$.

Note que, como $P(m,n)$ borda e $\nu \to P(m,n)$ não borda, $W(\nu)$ deve ter alguma potência ímpar de $d$, e então $b$ deve ser ímpar. Assim, temos $u_1 = (a+1)c$ e $u_2 = \binom{b}{1}d + \binom{a}{2}c^2 + \binom{b}{2}c^2 + \binom{a}{1}\binom{b}{1}c^2 = d + N_1c^2$ com $N_1 = \binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{a}{1}\binom{b}{1}$.

Por outro lado, $w_1 = mc + (n+1)c = 0$ e $w_2 = \binom{m}{2}c^2 + \binom{n+1}{2} + \binom{m}{1}\binom{n+1}{1}c^2 + \binom{n+1}{1}d = (\binom{m}{2} + \binom{n+1}{2})c^2 = \binom{m+n+1}{2}c^2$.

Assim $\widetilde{W}_1 = (a+b)c = (a+1)c$ e $\widetilde{W} = \binom{m+2n}{2}e^2 + \binom{m+2n-1}{1}ew_1 + w_2 + (\binom{m+2n}{1}e + w_1)u_1 + u_2 = w_2 + u_2 = d + N_2c^2$ com $N_2 = N_1 + \binom{m+n+1}{2}$.

Se $a$ for par, segue que $\widetilde{W}_1 = c$, e então

$$0 = \widetilde{W}_1^m\widetilde{W}_2^n e^r[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}] = c^m(d+N_2c^2)^n e^r[\mathbb{R}P(\nu)] = c^m d^n[P(m,n)] = 1,$$

o que é uma contradição. Portanto $a$ deve ser ímpar, e então $\widetilde{W}_1 = 0$. Assim, pela fórmula de Wu 1.6.2, tem-se

$$Sq^1(\widetilde{W}_2) = \widetilde{W}_1\widetilde{W}_2 + \binom{2-1-1+1}{1}\widetilde{W}_0\widetilde{W}_3 = \widetilde{W}_3.$$

Por outro lado, pela fórmula de Cartan 1.6.3, segue que $Sq^1(\widetilde{W}_2) = Sq^1(d+N_1c^2) = cd$, isto é, $\widetilde{W}_3 = cd$. Se $m \leq n$ então

$$0 = \widetilde{W}_2^{n-m}\widetilde{W}_3^m e^r[\mathbb{R}P^{m+2n+r}] = (d+N_1c^2)^{n-m}(cd)^n e^r[\mathbb{R}P(\nu)] = c^m d^n[P(m,n)] = 1,$$

absurdo. Portanto, $m > n$. ■

# Referências Bibliográficas


[1] BOARDMAN, J. M. *On manifolds with involution*, Bull. Amer. Math. Soc. 73, 136-138, 1967.

[2] CONNER, P. E. *Diffeomorphisms of period two*. Michigan Math. Journal 10, 341-352, 1963.

[3] CONNER, P. E. *Differentiable periodic maps*. second edition. Springer-Verlag, 1979.

[4] CONNER, P. E.; FLOYD, E. E. *Differentiable periodic maps*. Springer-Verlag, 1964.

[5] CONNER, P. E.; FLOYD, E. E. *Fibring within a cobordism class*. Michigan Math. Journal 12, 33-47, 1964.

[6] DOLD, A. *Erzeugend der Thomshen algebra* $\mathcal{N}$. Math. Z., Vol. 65, 25-35, 1956.

[7] HOU, D.; TORRENCE, B. *Involutions fixing the union of odd-dimensional projective spaces*. Canadian Math. Bull. 37, 66-74, 1994.

[8] KHARE, S. S. *On Dold Manifolds*, Topology and Its Applications 33, 297-307, 1989.

[9] KOSNIOWSKI, C.; STONG, R.E. *Involutions and characteristic numbers*, Topology. Vol. 17, 309-330, 1978.

[10] LUCAS, E. *Théorie des nombres*. 1878; reprint, Librarie Blanchard, Paris, 1961.

[11] MILNOR, J. W. *Some consequences of a theorem of Bott*. Annals of Mathem. (2) 68, 444-449, 1958.

[12] MILNOR, J. W.; STASHEFF, J. D. *Characteristic classes*. Princenton University Press, 1974.

[13] MONTGOMERY, D.; ZIPPIN, L. *Topological Transformation Groups*. Interscience Publishers, New York - London, 1955.

[14] OLIVEIRA, R. *Involuções Comutantes Fixando Dois Espaços Projetivos Pares*. 2002. 97f. Tese de Doutorado - UFSCar, São Carlos, 2002.

[15] OLIVEIRA, R; PERGHER, P. L. Q. $\mathbb{Z}_2^k$*-actions with a special fixed point set* . Fund. Math. 186, 97-109, 2005.

[16] OLIVEIRA, R; PERGHER, P. L. Q. *Commuting involutions whose fixed point set consists of two sapecial components*. Fundamenta Mathematicae, 201, 241-259, 2008.

[17] OLIVEIRA, R; PERGHER, P. L. Q. ; RAMOS, A. $\mathbb{Z}_2^k$-*Actions fixing* $\mathbb{R}P(2) \cup \mathbb{R}P(even)$. Algebraic and Geometric Topology, Vol. 7, 29-45, 2007.

[18] PERGHER, P. L. Q. *Involutions fixing an arbitrary product of spheres and a point*. Manuscripta Mathem 89, 471-474, 1996.

[19] PERGHER, P. L. Q.$\mathbb{Z}_2^k$-*actions whose fixed data has a section*. Trans. Amer. Math. Soc., 353, 175-189, 2001.

[20] PERGHER, P. L. Q.; RAMOS, A. $\mathbb{Z}_2^k$-*actions fixing* $K_dP^{2^s} \cup K_dP^{even}$. Topology and its Applications, Vol.156, 629-642, 2009.

[21] PERGHER, P. L. Q.; STONG, R. E. *Involutions fixing* $\{point\} \cup F^n$. Transform. Groups 6, 79-86, 2001.

[22] RAMOS, A. *Involuções Fixando Espaços Projetivos*. 2007. 133f. Tese de Doutorado - UFSCar, São Carlos, 2007.

[23] ROYSTER, D. C. *Involutions fixing the disjoint union of two projective spaces*. Indiana University Mathematics, Journal 29, n.2, 267-276, 1980.

[24] STONG, R. E. *Equivariant Bordism and* $(\mathbb{Z}_2)^k$-*Actions*. Duke Math. Journal 37, 779-785, 1970.

[25] STONG, R. E. *Involutions fixing projective spaces*. Michigan Math. Journal 13, 445-447, 1966.

[26] STONG, R. E. *Vector bundles over Dold manifolds*, Fundamenta Mathematicae 169, 85-95, 2001.

[27] THOM, R. *Quelques propriétés globales des variétés differentiables*. Comm. Math. Helv. 28, 18-88, 1954.

[28] UCCI, J. J. *Immersions and embeddings of Dold manifolds*. Topology V. 4, 283-293, 1965.

# Índice Remissivo