

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

TAMIRIS LUIZA SOARES LANINI

**ESTIMATIVA DA FORÇA DE RUPTURA À PUNÇÃO EM LIGAÇÕES
LAJE-PILAR INTERNO SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO DE
ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO VIA MODELOS DE
REGRESSÃO MÚLTIPLA**

São Carlos
2021

TAMIRIS LUIZA SOARES LANINI

**ESTIMATIVA DA FORÇA DE RUPTURA À PUNÇÃO EM LIGAÇÕES
LAJE-PILAR INTERNO SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO DE
ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO VIA MODELOS DE
REGRESSÃO MÚLTIPLA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil da Universidade Federal de
São Carlos, para obtenção do título de Doutora em
Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Geotecnia

Orientador: Prof. Dr. André Luis Christoforo
Coorientador: Prof. Dr. Fernando Menezes de
Almeida Filho

São Carlos

2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Tamiris Luiza Soares Lanini, realizada em 24/09/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Andre Luis Christoforo (UFSCar)

Prof. Dr. Caio Gorla Nogueira (UNESP)

Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein (UNICAMP)

Prof. Dr. Eduardo Chahud (UFMG)

Prof. Dr. Luiz Antônio Melgaço Nunes Branco (UFMG)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre iluminar meus caminhos e tornar possível minha trajetória até aqui.

Agradeço a minha amada mãe, que sempre lutou bravamente para me proporcionar uma boa educação, com ênfase nos estudos, por me incentivar e me dar condições de cursar uma excelente pós-graduação longe de casa.

À minha irmã, Nubia Lanini, por sempre me incentivar e estar ao meu lado nos momentos que mais precisei. Ao meu sobrinho e afilhado, João Pedro, por ser a luz na minha vida. À minha família, João Felipe, Otavio Lanini e Diogo Link, por meio longe, me apoiar.

Ao meu namorado, Murilo Celli, por me acompanhar ao longo de todos estes anos e ser minha força. Agradeço imensamente todo o apoio, incentivo, e por todas as noites e finais de semana cedidos ao estudo em conjunto, mas, principalmente, por estar ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Ao meu grande amigo e orientador Prof. Dr. André Luis Christoforo, por todo o apoio desde meu início na pós-graduação. Meus agradecimentos por toda orientação, compreensão, incentivo, ajuda e paciência.

Ao Prof. Dr. Fernando Menezes de Almeida Filho, grande orientador e amigo, por tantos ensinamentos, incentivos e companheirismo ao longo destes anos.

Aos meus sogros, Sandra Serreti e Luiz Celli, por todo apoio, carinho e incentivo, por me receber como parte da família e me acolher longe de casa.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos, que contribuíram substancialmente para minha formação acadêmica.

LANINI, T. L. S. **Estimativa da força de ruptura à punção em ligações laje-pilar interno sem armadura de cisalhamento de estruturas em concreto armado via modelos de regressão múltipla**. 2021. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Departamento, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2021.

RESUMO

O ponto crítico do sistema estrutural em lajes lisas ocorre na ligação laje-pilar, por meio da concentração de tensões cisalhantes que podem conduzir ao fenômeno da punção. De acordo com a literatura, há múltiplos fatores que influenciam no fenômeno da punção, e muitas pesquisas teóricas e experimentais têm sido desenvolvidas no intuito de compreender o comportamento, e assim estimar a resistência à punção na ligação laje-pilar. Contudo, ainda não há um modelo de dimensionamento completamente aceito pelo meio técnico científico capaz de estimar e explicar tal fenômeno, e todos os parâmetros que o influenciam. Neste contexto, o presente estudo objetivou propor, por meio da análise estatística aplicada à estudos experimentais, uma equação de previsão da força última de ruptura à punção na ligação laje-pilar interno, sem armadura de cisalhamento e carregamento simétrico, em edificações em concreto armado. Para tanto, foram avaliados os modelos de previsão da resistência à punção apresentados pela literatura e pelas principais normativas, através de um vasto banco de dados composto pelos principais parâmetros influenciadores da punção. O modelo proposto, fundamentado por apenas cinco variáveis do modelo real – Geometria da laje (Geo), dimensão do pilar (L), altura útil da laje (d), resistência à compressão do concreto (f_c) e taxa de armadura de flexão (ρ) – estimou o valor da resistência última à punção (P_u) na ligação laje-pilar interno com erros da ordem de 3%, com R^2 adj = 97,28%.

Palavras-chave: Concreto Armado. Lajes Lisas. Punção. Análise Estatística. Modelos de Regressão.

LANINI, T. L. S. **Internal slab-column connection punching tensile strength estimative of reinforced concrete structures with no shear reinforcement by multiple regression models**. 2021. Thesis (Ph.D. in Civil Engineering) – Federal University of São Carlos, São Carlos, 2021.

ABSTRACT

The structural systems critical point of flat slabs happens on the connection slab-column through the shearing stressing concentrations which may lead to the punching phenomenon. According to the literature, there are multiples factors that influence on the punching phenomenon, and many theoretical and experimental research have been developed willing to comprehend its behavior and then estimate the connection slab-column punching resistance. However, yet there is no sizing model completely accept by the technical scientific community which is able to estimate and explain such phenomenon and all of its influence parameters. In this context, this study aims proposing, by statistical analysis applied to experimental studies, a limit punching tensile strength predictor equation of the internal slab-column connection, with no shear reinforcement and symmetrical loading, on reinforced concrete edifications. Therefore, it has been evaluated the punching resistance predictor models presented by the literature and the mainly norms through a vast database containing the manly punching influencers parameters. The proposed model, based on only five real model variables – Slab geometry (Geo), Pillar dimension (L), useful slab height (d), concrete compression resistance (f_c) and bending bar rate (ρ) – estimated the limit punching tensile strength (P_u) on internal slab-column connection with a 3% error order and R^2 adj = 97.28%.

Keyword: Reinforced Concrete. Flat Slabs. Punching. Statistical Analysis. Regression Models.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ruptura por punção - Harbour Cay Condominium (1981).....	13
Figura 2: Inclinação das superfícies de ruptura.	17
Figura 3: Superfícies de ruptura.	18
Figura 4: Modelo mecânico proposto.	27
Figura 5: Modelo de ruptura por punção.	32
Figura 6: Idealização do modelo proposto por Gomes (1991).	34
Figura 7: Representação do tronco de pirâmide na face do pilar.	36
Figura 8: (a) Curva tensão-deformação do concreto. (b) Diagrama simplificado.	38
Figura 9: Diagrama de deformação no aço e no concreto no segmento de laje.	39
Figura 10: Diagrama tensão-deformação do aço (idealizado).	40
Figura 11: Gráfico de χ em função de r_y e r_3	41
Figura 12: Diagrama de forças das armaduras de cisalhamento.	42
Figura 13: Ilustração do raio de contribuição.	43
Figura 14: Perímetros críticos de acordo com a ABNT NBR 6118:2014.	53
Figura 15: Perímetro crítico C" conforme a ABNT NBR 6118:2014.	55
Figura 16: Perímetros críticos de acordo com o ACI 318:2019.	56
Figura 17: Perímetros críticos de acordo com o EC 2:2004.	58
Figura 18: Altura d_v considerada pelo fib MODEL CODE (2010).	61
Figura 19: Perímetros críticos de acordo com fib MODEL CODE (2010).	61
Figura 20: Perímetro crítico reduzido devido à abertura conforme o fib MODEL CODE (2010).	62
Figura 21: Centróide do perímetro de controle conforme o fib MODEL CODE (2010).	62
Figura 22: Rotação da laje (Ψ) de acordo com o fib MODEL CODE (2010).	63
Figura 23: Principais modelos experimentais retratados pela literatura.	68
Figura 24: Modelos das lajes em concreto armado ensaiadas.	70
Figura 25: Lajes da 1ª série de ensaios (medidas em mm).	71
Figura 26: Geometria das lajes ensaiadas por Einpaul <i>et al.</i> (2016).	72
Figura 27: Modelos com ¼ de simetria desenvolvidos por Bocklenberg e Mark (2020).	75
Figura 28: Modelo experimental sq65: geometria e distribuição da armadura de cisalhamento.	76
Figura 29: Histogramas de frequência das variáveis L, d, f_c e ρ para as lajes de geometria quadrada.	93

Figura 30: Histogramas de frequência das variáveis L , d , f_c e ρ para as lajes de geometria circular.....	94
Figura 31: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – Modelo de Yitzhaki (1966).	97
Figura 32: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – Modelo de Long (1975).....	98
Figura 33: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – Modelo de Shehata (1985).	99
Figura 34: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – Modelo de Teng <i>et al.</i> (2018).....	100
Figura 35: Histograma de frequência do erro: (a) Yitzhaki (1966) e (b) Long (1975).	101
Figura 36: Histograma de frequência do erro: (a) Shehata (1985) e (b) Teng <i>et al.</i> (2018)...	102
Figura 37: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – ABNT NBR 6118:2014.....	104
Figura 38: Relação P_u/P_{est} em relação ao efeito de escala e taxa de armadura de flexão e a resistência à compressão nominal do concreto (ABNT NBR 6118:2014).....	106
Figura 39: Relação P_u/P_{est} em relação ao efeito de escala limitado a 2,0.....	107
Figura 40: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – EC2:2004.....	108
Figura 41: Relação P_u/P_{est} em relação ao efeito de escala e taxa de armadura de flexão e a resistência à compressão nominal do concreto (Eurocode).....	109
Figura 42: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – ACI318:2019.....	110
Figura 43: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pela normativa brasileira (a) com coeficiente de segurança; (b) sem coeficiente de segurança.	112
Figura 44: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pela normativa europeia (a) com coeficiente de segurança; (b) sem coeficiente de segurança.	113
Figura 45: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pela normativa americana.	114
Figura 46: Relação entre cada uma das variáveis- L , d , f_c e ρ , frente à P_u , por meio de modelos de regressão linear.	116
Figura 47: Gráfico de Pareto referente ao modelo da Equação 118.....	120
Figura 48: Diagrama de Pareto (a), teste de normalidade de Anderson-Darling (b), gráfico resíduos versus valores ajustados (c), gráfico de resíduos versus ordem (d).	121
Figura 49: Gráfico de Pareto referente ao modelo da Equação 121.....	122
Figura 50: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pelo modelo proposto.	125
Figura 51: Histogramas de frequência das variáveis L , d , f_c e ρ para as lajes de avaliadas. ...	126
Figura 52: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – modelo proposto.....	127
Figura 53: P_{exp}/P_{est} em relação aos modelos propostos por Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) e Teng <i>et al.</i> (2018) e Lanini (2021).	128

Figura 54: P_{exp}/P_{est} em relação aos modelos propostos pela ABNT NBR 6118:2014, EC2:2004, ACI318:2019 e Lanini (2021).	129
Figura 55: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pelo modelo proposto para o novo banco de dados.	130
Figura 56: Diagrama de Pareto (a), transformada de Johnson (b), gráfico resíduos versus valores ajustados (c), gráfico de resíduos versus ordem (d).	131
Figura 57: Gráfico de Pareto referente ao modelo da Equação 122.	132

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Resumo do equacionamento dos modelos apresentados.	49
Quadro 2: Parâmetros influenciadores como variáveis no equacionamento proposto.	52
Quadro 3: Prescrições quanto ao perímetro crítico para ABNT NBR 6118:2014, ACI 318:2014 e EC 2:2004.	65
Quadro 4: Síntese de estudos experimentais para lajes lisas sem armadura de cisalhamento..	77
Quadro 5: Síntese dos parâmetros associados a determinação da resistência à punção conforme os modelos considerados.	81
Quadro 6: Conversão entre resistências de corpos de prova cilíndricos e cúbicos.	85
Quadro 7: Pesquisas das quais foram obtidos os valores das variáveis P_u , d , ρ , L e f_c para os modelos de regressão.....	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Dados referentes aos modelos ensaiados por EinPaul <i>et al.</i> (2016).....	73
Tabela 2: Dados das lajes ensaiadas por Teng <i>et al.</i> (2018).....	74
Tabela 3: Propriedades das lajes ensaiadas por Bocklenberg e Mark (2020).	75
Tabela 4: Síntese dos resultados da literatura referente às lajes de geometria quadrada e circular.	92
Tabela 5: Síntese dos resultados aplicados aos modelos de previsão.....	96
Tabela 6: Valores máximos, mínimos e médios de P_{exp}/P_{est} , CV (%) e MAPE (%) dos modelos.	101
Tabela 7: Equações apresentadas pela ABNT NBR 6118:2014.....	105
Tabela 8: Equações apresentadas pelo Eurocode.	109
Tabela 9: Equações apresentadas pelo ACI.....	111
Tabela 10: Valores máximos, mínimos e médios de P_u/P_{est} , CV (%) e MAPE (%) dos modelos normativos.	112
Tabela 11: Resultados do teste de correlação de Pearson.	115
Tabela 12 : Análise por categorias da altura útil da laje (d) pelo teste de Tukey.....	117
Tabela 13: Análise por categorias da dimensão do pilar (L) pelo teste de Tukey.....	118
Tabela 14: Análise por categorias da resistência à compressão do concreto (f_c) pelo teste de Tukey.....	118
Tabela 15: Análise por categorias da taxa de armadura de flexão (ρ) pelo teste de Tukey. ..	119
Tabela 16: Valores máximos, mínimos e médios de P_u/P_{est} , CV (%) e MAPE (%) do modelo proposto.	124
Tabela 17: Síntese dos resultados da literatura referente ao novo banco de dados.	126
Tabela 18: Valores máximos, mínimos e médios de P_{exp}/P_{est} , CV (%) e MAPE (%) de todos os modelos apresentados.	130

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1 OBJETIVOS.....	14
1.2 JUSTIFICATIVA	15
1.3 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS	16
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1 O FENÔMENO DA PUNÇÃO.....	17
2.2 PARÂMETROS INFLUENCIADORES DO FENÔMENO	19
2.2.1 Resistência à Compressão do Concreto	20
2.2.2 Espessura da Laje.....	21
2.2.3 Efeito de Escala ou Size Effect.....	22
2.2.4 Geometria, Dimensões e Posicionamento dos Pilares.....	23
2.2.5 Taxa de Armadura de Flexão	24
2.2.6 Armadura de Cisalhamento	24
2.3 MODELOS DE PREVISÃO	25
2.3.1 Talbot (1913)	25
2.3.2 Hognestad (1953)	26
2.3.3 Kinnunen e Nylander (1960).....	27
2.3.4 Moe (1961).....	30
2.3.5 Yitzhaki (1966).....	30
2.3.6 Long (1975).....	30
2.3.7 Shehata (1985).....	31
2.3.8 Gomes (1991).....	34
2.3.9 Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (2008).....	46
2.3.10 Teng, Chanthabouala, Lim e Hidayat (2018)	48
2.3.11 Comparação entre modelos de previsão	49
2.4 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS	52
2.4.1 ABNT NBR 6118:2014	52
2.4.2 ACI318:2019	55
2.4.3 EUROCODE 2:2004.....	58

2.4.4	fib MODEL CODE (2010)	60
2.4.5	Comparações entre Recomendações Normativas.....	65
2.5	MODELOS EXPERIMENTAIS	67
2.6	CONCLUSÕES DA REVISÃO	78
3.	MATERIAL E MÉTODOS	80
3.1	COMPOSIÇÃO DO BANCO DE DADOS	80
3.2	ANÁLISE ESTATÍSTICA.....	88
4.	RESULTADOS E DISCUSSÃO	92
4.1	ANÁLISE DO BANCO DE DADOS	92
4.2	COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS DE PREVISÃO.....	95
4.3	COMPARAÇÃO ENTRE RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS.....	103
4.4	MODELO DE PREVISÃO PROPOSTO.....	114
4.5	VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO	125
5.	CONCLUSÕES.....	134
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	138
	REFERÊNCIAS.....	139

1. INTRODUÇÃO

Na etapa de concepção estrutural, a escolha do tipo de laje empregada é fundamental quanto aos parâmetros de resistência e estabilidade da edificação. Dentre as soluções, tem-se o aumento do emprego de lajes lisas, definidas como estruturas laminares horizontais em concreto armado ou protendido, que se apoiam rígida e diretamente nos pilares sem a presença de vigas ou capitéis para transferência de esforços (BOCKLENBERG e MARK, 2020; JOSEPH e LAKSHMI, 2018; FERREIRA, 2010; SACRAMENTO *et al.*, 2012).

O aumento da popularidade deste sistema se justifica pela maior agilidade imposta ao processo construtivo, em que pode haver simplificação das fôrmas e arranjo das armaduras do pavimento, reduzindo custos com mão de obra. Ainda, este sistema proporciona a redução da altura do pavimento e, portanto, do edifício, e atribui maior flexibilidade ao seu *layout*. Em contrapartida, lajes lisas podem apresentar desvantagens relacionadas à estabilidade global, deslocamentos transversais e punção na ligação laje-pilar (BOCKLENBERG e MARK, 2020; LANTSOGHT, 2009; FERREIRA, 2010; SACRAMENTO *et al.*, 2012).

Assim, o ponto crítico deste sistema ocorre na ligação laje-pilar por meio da concentração de tensões cisalhantes que podem conduzir ao fenômeno da punção, modo de ruptura frágil (sem aviso) que ocorre por cisalhamento em regiões relativamente pequenas (ABNT NBR 6118:2014). Atenta-se que a punção pode ocasionar a ruína de uma estrutura, por meio do colapso progressivo. Segundo Melo (1990) a ruptura por punção do edifício *Prest-o-Lite* em Indianápolis (1911) foi o primeiro caso registrado, com a ocorrência de vários outros posteriormente. A exemplo, a Figura 1 apresenta o colapso do edifício *Harbour Cay Condominium* localizado na cidade de Cocoa Beach - Flórida (EUA).

Figura 1: Ruptura por punção - Harbour Cay Condominium (1981).



Fonte: Melges (1995), adaptado.

Diante da relevância e complexidade do fenômeno, desde a publicação da primeira teoria de cálculo em 1921, de autoria de Westergaard e Slater, muitas pesquisas teóricas e experimentais têm sido desenvolvidas no intuito de compreender o comportamento, e assim estimar a resistência à punção na ligação laje-pilar. Contudo, ainda não há um modelo de dimensionamento completamente aceito pelo meio técnico científico capaz de estimar e explicar tal fenômeno, e todos os parâmetros que o influenciam (ABDULNABI e ALSHARIF, 2019; FILATOV *et al.*, 2020; RASHWAN *et al.*, 2020; ABDUL RASOUL e TAHER, 2019; SOUSA e EL DEBS, 2019).

De acordo com a literatura, há múltiplos fatores que influenciam no fenômeno da punção. Tem-se a resistência à compressão do concreto, a altura útil da laje, a geometria, dimensões e posicionamento dos pilares, relação entre momento fletor e esforço cortante, taxa de armadura de flexão, *size effect* (efeito de escala) e a presença de armadura de punção, como os principais retratados (ALHUSSAINAWA *et al.*, 2017; SARVAICOVA, BORZOVIC e AUGUSTIN, 2019; SCHMIDT, KUERES e HEGGER, 2020).

Visto a complexidade e, ainda, falta de mais informações sobre o fenômeno, as normas e códigos, no intuito de garantir a segurança das estruturas, bem como padronizar o sistema de lajes sem vigas, apresentam recomendações para projetos baseadas empiricamente. Tal fundamentação pode acarretar o dimensionamento contra à segurança (FILATOV *et al.*, 2020; RASHWAN *et al.*, 2020; ABDUL RASOUL e TAHER, 2019; SCHMIDT, KUERES e HEGGER, 2020; SOUSA e EL DEBS, 2019). Modelos mais detalhados, como a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (MUTTONI, 2008), são de difícil aplicação por causa da quantidade de variáveis envolvidas.

Ainda, de acordo com o panorama da literatura técnica, há grande limitação: a falta de padronização dos modelos experimentais ensaiados. Os modelos utilizados se aproximam de um modelo ideal, mas, devido às distinções de geometria e carregamentos, possivelmente apresentam diferenças nos resultados analisados. Assim sendo, não é possível estabelecer relação comparativa entre resultados obtidos para contribuir na constatação e compreensão dos parâmetros que influenciam no fenômeno da punção em lajes lisas, que por muitas vezes se apresentam na literatura como controversos.

Portanto, o maior desafio é estabelecer um modelo realista que represente, de modo simples, o comportamento à punção de uma ligação laje-pilar. Neste sentido, é de suma importância o desenvolvimento de um modelo de previsão fundamentado pelos principais parâmetros influenciadores da punção (SHEMBADE, 2017).

1.1 OBJETIVOS

O trabalho desenvolvido teve como objetivo propor, por meio da análise estatística aplicada à estudos experimentais, uma equação de previsão da força última de ruptura à punção na ligação laje-pilar interno, sem armadura de cisalhamento e carregamento simétrico, fundamentado pelos principais parâmetros influenciadores da punção, em edificações em concreto armado.

De modo a restringir as variáveis existentes, foram analisados modelos homotéticos circulares e quadrados, com pilares internos e carregamentos simétricos. Para o cumprimento do objetivo proposto, os seguintes objetivos específicos foram vistos:

- Identificar e compreender as principais constatações apresentados pela literatura quanto aos parâmetros influenciadores do fenômeno da punção;
- Avaliar os modelos de previsão da resistência à punção apresentados pela literatura e pelas principais normativas (TALBOT, 1913; HOGNESTAD, 1953; KINNUNEN e NYLANDER, 1960; MOE, 1961; YITZHAKI, 1966; LONG, 1975; SHEHATA, 1985; GOMES, 1991; Teoria Da Fissura Crítica de Cisalhamento – MUTTONI, 2008; TENG *et al.*, 2018; ABNT NBR 6118:2014; ACI 318:2019; EC2:2004; fib MODEL CODE 2010) quanto às premissas de cálculo, parâmetros comuns, principais considerações e dificuldades de aplicação;

- Compor, por meio de estudos experimentais realizados disponíveis nas principais bases de dados, tais como *Web of Science*, Portal Capes Periódicos, *Scopus*, *Engineering Village*, *Google Scholar*, um banco de dados;
- Comparar os valores de força última à punção componentes do banco de dados aos estimados pelos modelos de previsão da resistência à punção apresentados pela literatura e pelas principais normativas;
- Identificar, por meio da análise estatística aplicada ao banco de dados, quais parâmetros têm influência na resistência à punção da ligação laje-pilar, e estabelecer uma ordem de significância entre os fatores selecionados;
- Avaliar a precisão do modelo de regressão proposto aplicado a um novo banco de dados; considerando um novo banco de dados;
- Comparar os resultados obtidos através do modelo de regressão frente aos estimados pelos modelos de previsão da resistência à punção apresentados pela literatura e pelas principais normativas quanto ao novo banco de dados;

Por fim, espera-se que este trabalho contribua significativamente como ferramenta de auxílio às pesquisas experimentais e numéricas no âmbito da punção para compreensão do comportamento da ligação laje maciça-pilar internos em lajes lisas em concreto armado.

1.2 JUSTIFICATIVA

A solução estrutural em lajes lisas se mostra em ascensão no mercado da construção civil. Ressalta-se aqui o fenômeno da punção na ligação laje-pilar como fator crítico do sistema. A complexidade do fenômeno dificulta a compreensão do comportamento da ligação, e, portanto, ainda não há um modelo de dimensionamento completamente aceito pelo meio técnico científico (BOCKLENBERG e MARK, 2020; FILATOV *et al.*, 2020; JOSEPH e LAKSHMI, 2018; MOSTOFINEJAD *et al.*, 2020).

Do ponto de vista prático, a punção é relacionada a carga última (P_u) suportada pelo modelo experimental (laje maciça-pilar). A literatura apresenta que os modelos teóricos para estimativa da carga última apresentam duas condições limitantes: os modelos fundamentados empiricamente podem conduzir a um dimensionamento inseguro; e os modelos baseados em observações experimentais são de difícil aplicação devido à complexidade de análise e número de variáveis envolvidas.

Em relação aos modelos experimentais, não há recomendações ou propostas para padronização dos modelos de ensaio. Os modelos componentes dos estudos apresentados divergem quanto à forma, dimensões, aplicação de carga e pontos de análise do deslocamento. Assim sendo, os resultados apresentados são por muitas vezes controversos, e não há uma convenção quanto à influência de determinados parâmetros no fenômeno da punção.

Deste modo, justifica-se aqui a necessidade do desenvolvimento de um modelo de previsão da força última (P_u) que considere os parâmetros influenciadores da punção, bem como a ordem de significância destes. A definição da ordem de significância possibilita a análise do comportamento da ligação de modo integrado, e se relaciona diretamente à segurança das estruturas.

1.3 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

O trabalho desenvolvido apresenta, ao total, seis capítulos.

O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica na qual esta pesquisa é fundamentada. Para tanto, tem-se inicialmente a caracterização do fenômeno da punção e os principais parâmetros influenciadores apresentados pela literatura até o momento. Sequencialmente, há a exposição dos principais modelos de previsão da força última à punção e os modelos apresentados pelas principais recomendações normativas (TALBOT, 1913; HOGNESTAD, 1953; KINNUNEN e NYLANDER, 1960; MOE, 1961; YITZHAKI, 1966; LONG, 1975; SHEHATA, 1985; GOMES, 1991; Teoria Da Fissura Crítica de Cisalhamento – MUTTONI, 2008; TENG *et al.*, 2018; ABNT NBR 6118:2014; ACI 318:2019; EC2:2004; fib MODEL CODE 2010). Ainda, são apresentados os principais estudos experimentais relativos ao contexto, bem como suas principais constatações, abordados pela literatura recente,

O capítulo 3 mostra os materiais e métodos pertinentes à esta pesquisa.

O capítulo 4 apresenta os resultados e discussões pertinentes ao estudo.

O capítulo 5 evidencia as conclusões obtidas pelo presente trabalho.

E, por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas que fundamentam este trabalho.

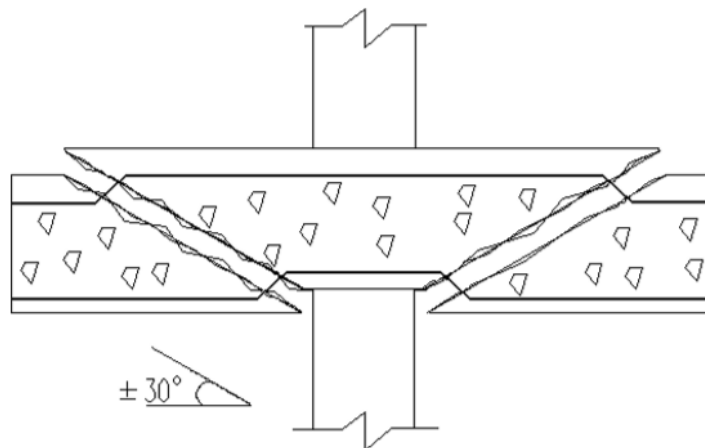
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta as principais considerações teóricas a respeito do fenômeno da punção, bem como os principais modelos de previsão da força última à punção na ligação laje-pilar. Ainda, expõe-se análises experimentais já realizadas e suas principais constatações.

2.1 O FENÔMENO DA PUNÇÃO

O fenômeno da punção consiste na atuação de forças concentradas em um elemento estrutural de superfície, que origina em seu entorno elevadas tensões cisalhantes as quais podem ocasionar a ruína da estrutura. Em lajes lisas, o fenômeno se dá na ligação laje-pilar (BOCKLENBERG e MARK 2020; TRAUTWEIN, 2006). Para pilares internos e lajes simetricamente carregadas, a literatura mostra uma superfície de ruptura com forma de tronco de cone ou de pirâmide, com inclinação entre 30° e 35° em relação ao plano da laje, conforme apresenta a Figura 2 (CARVALHO e PINHEIRO, 2009; MELGES, 1995).

Figura 2: Inclinação das superfícies de ruptura.

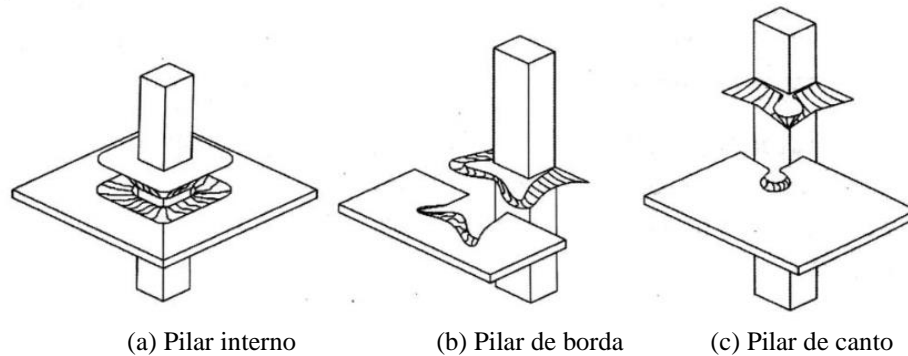


Fonte: Melges (1995), adaptado.

Ainda, para pilares de borda e de canto, na região da ligação laje-pilar pode haver momentos fletores não balanceados agravando a situação devido à menor área de contato entre a laje e o entorno do pilar. Tal situação também ocorre por ações laterais, carregamentos distintos entre painéis adjacentes e espaçamentos desiguais entre pilares. As superfícies de ruína para pilares de borda e de canto são mais irregulares e de análise complexa devido à influência

dos fenômenos de flexão e torção (RASHWAN *et al.*, 2020). A literatura apresenta que, para pilares de borda e de canto, a ruptura ocorre junto à borda interna. O mesmo ocorre para pilares de borda, como apresenta a Figura 3.

Figura 3: Superfícies de ruptura.



(a) Pilar interno

(b) Pilar de borda

(c) Pilar de canto

Fonte: Carvalho e Pinheiro (2009), adaptado.

A aplicação de cargas concentradas em elementos de superfície (ou em pequenas áreas) pode provocar, além da ruína por punção, a ruína por flexão ou pela associação entre punção e flexão. Tem-se que a ruína por flexão, relacionada ao momento fletor, implica no esmagamento do concreto comprimido, ou na deformação plástica excessiva da armadura de tração. Quanto a ruína por punção, relacionada à força cortante, há ruptura frágil (sem aviso) por cisalhamento antes da capacidade última à flexão ser atingida.

No dimensionamento à flexão, tem-se a redistribuição de esforços devido ao comportamento plástico das lajes. Todavia, ainda é incerta a contribuição de tal redistribuição no caso da punção (RASHWANA *et al.*, 2020; ROMBACH, 2004). Teng *et al.* (2018) observaram que a ruptura ocasionada puramente por punção tende à formação de um padrão de fissuras circular, à medida que a ruptura por flexão tende a formar um padrão de fissuras radiais ao pilar.

Menétrey (2002) sintetizou em seu estudo as rupturas por punção em concreto armado. A análise foi realizada considerando quatro lajes similares, variando-se apenas o diâmetro da armadura de flexão (ϕ 4 – 10 mm). Lajes com menores diâmetros e, portanto, menores taxas de armadura, apresentaram falha por flexão caracterizada por uma suave redução da carga aplicada com deslocamento crescente. Lajes com maiores taxas de armadura de flexão exibiram modo de falha por punção, em que houve um pico de crescimento, e diminuição repentina da carga após este.

Conforme os autores, foi perceptível a diferença entre modos de falha, bem como a fragilidade da falha por punção. Considera-se que as curvas carga *versus* deslocamento geradas

para lajes com diferentes cones de punção revelaram a transição entre ruína por flexão e ruína por punção, determinadas conforme as inclinações da superfície de ruptura.

Por fim, sustenta-se a hipótese de ruína associada, na qual houve influência do momento fletor e esforço cortante. Entretanto, diferentemente da ruína por punção, a influência do momento fletor proporcionou satisfatória ductilidade ao conjunto, o que permite significativas deformações antes da ruína total.

Diante da complexidade associada aos modos de falha apresentados, tem-se que grande parte dos modelos de análise e dimensionamento estrutural simplificaram a análise da resistência à punção na ligação laje-pilar por meio das características geométricas do sistema e da estimativa da força última suportada (P_u), excluindo-se a interpretação quanto ao modo de falha obtido.

Assim sendo, a falha por flexão de um sistema pode ser erroneamente interpretada como falha por punção pura. Ainda, além das dificuldades relacionadas à interpretação dos modos de falha, houve falta de detalhamento destas e demais informações na literatura, tais como: modo de introdução da carga, detalhamento das armaduras de flexão e cisalhamento utilizadas, deslocamentos da superfície, parâmetros dos materiais adotados e dimensões do sistema. Por fim, não há um modelo de ensaio padrão recomendado, e, portanto, cada estudo contempla um modelo experimental distinto.

Deste modo, com base na revisão da literatura, o estudo do fenômeno da punção é complexo e os dados apresentados pela literatura são de difícil análise. O entendimento do fenômeno de modo isolado, e, portanto, a criação de um modelo experimental realista que represente, de modo simples, o comportamento à punção de uma ligação laje-pilar, depende do entendimento dos parâmetros influenciadores da punção, ainda pouco conhecidos.

2.2 PARÂMETROS INFLUENCIADORES DO FENÔMENO

Estudos teóricos e experimentais têm sido desenvolvidos no intuito de compreender os parâmetros que influenciam à punção e o comportamento da ligação laje-pilar. Tem-se a resistência à compressão do concreto, a espessura da laje, o *size effect* (efeito de escala), a geometria, dimensões e posicionamento do pilar, a relação entre momento fletor e esforço cortante, a taxa de armadura de flexão e a presença da armadura de punção como os principais parâmetros citados pela literatura (JOSEPH E LAKSHMI, 2018).

2.2.1 Resistência à Compressão do Concreto

A resistência à compressão é a característica mecânica primordial do concreto, a partir da qual se obtém numericamente características como a resistência à tração e módulo de elasticidade do concreto. A ruptura por cisalhamento em estruturas sem armadura transversal é intimamente relacionada à resistência à tração e, portanto, à resistência à compressão (CRUZEIRO, 2018; JOSEPH e LAKSHMI, 2018; FERREIRA, 2010).

A influência da resistência à compressão quanto ao fenômeno da punção ainda é controversa. Graf¹ (1933 *apud* FARIA *et al.*, 2018) foi o primeiro a verificar tal influência, constatando relação não-linear entre a resistência à compressão e a resistência última à punção na ligação. Ensaio realizado pelo autor apontaram que o aumento da resistência do concreto acarreta muito pouco acréscimo na resistência à força cortante. O autor justifica esta relação por meio da fissuração ocasionada pela flexão.

Menétrey (2002) apresentou a resistência à compressão do concreto como fator pouco influente na resistência à punção. O autor justificou tal afirmação devido à consideração de um estado de tensão axial em seu modelo numérico, que poderia negligenciar a realidade de um estado triaxial. Atenta-se, portanto, que a metodologia de análise era de suma importância para verificação da relação.

De modo contraditório à Menétrey (2002), Faria *et al.* (2011) apresentaram, por meio da comparação entre resultados experimentais e numéricos, e proposições normativas, que a resistência à punção era influenciada pelo módulo de elasticidade do material, e que esta aumenta como função da raiz cúbica da resistência à compressão do concreto. Esta condição é exibida também pela normativa europeia EC 2:2004.

De modo controverso, os autores constataram que não houve influência significativa da resistência à tração na resistência a punção. O modelo numérico proposto apresentou, inclusive, um decréscimo de 10% da resistência à punção quando do aumento em 100% da resistência à tração. Tal fato, conforme os autores, se justificou pelo aumento da fragilidade do sistema, e ressaltou a necessidade de maior investigação quanto à relação.

Joseph e Lakshmi (2018) verificaram que o aumento da resistência do concreto implicou no aumento da tensão de cisalhamento na ligação laje-pilar. Comparando-se concretos com resistência à compressão de 20 MPa à 50 MPa, experimentalmente teve-se o aumento de 40%

¹ GRAF, O. Tests of reinforced concrete slabs under concentrated load applied near one support (Versuche über die widerstandsfähigkeit von eisenbetonplatten unter konzentrierter last nahe einem auflager). **Deutscher Ausschuss für Eisenbeton**, Berlim, n.73, p.28, 1933.

na tensão de cisalhamento. É interessante ressaltar que, conforme Schmidt, Kueres e Hegger (2020), devido à complexidade do fenômeno e elaboração de um modelo em escala real, não foi possível a análise isolada da influência da resistência à compressão.

2.2.2 Espessura da Laje

A espessura da laje empregada é outro fator influente na resistência da ligação laje-pilar. A primeira questão, há tempos discutida por Alexander e Simmonds (1992) e Braestrup e Regan (1985), foi o emprego do termo altura útil (d) e não da altura total (h) nas equações das principais normativas. Os autores afirmam que, experimentalmente, a variação do posicionamento da armadura e, portanto, da altura útil d , é pouco influente no fenômeno e, então, o uso da altura total (h) seria mais apropriado. Ainda hoje a altura útil é o parâmetro relacionado aos modelos teóricos.

Em 1948, Richart submeteu 164 sapatas à ensaios experimentais, das quais 24 sob muro e 140 sob pilar. Verificou-se, para tanto, que a tensão convencional limite é aumentada com a redução da altura d , justificada pelo aumento da armadura de flexão a medida da redução da altura útil d .

Birkle e Dilger (2008) analisaram experimentalmente a influência da espessura da laje na resistência a punção, considerando nove modelos experimentais, contemplando lajes octogonais com espessuras de 160 mm, 230 mm e 300 mm, divididas em três séries: 1 - sem armadura de cisalhamento; 2 - com armadura de cisalhamento, e projeção de ruptura na zona armada; e 3 - com armadura de punção, e projeção de ruptura além da zona armada.

Para lajes sem armadura de cisalhamento, verificou-se a alarmante diminuição da resistência ao cisalhamento no ponto crítico localizado a $d/2$ da face do pilar conforme o aumento da espessura da laje. Os autores constataram que, para lajes com altura de 300 mm, a resistência ao cisalhamento experimental correspondente a 89% do valor estimado pela normativa americana (ACI 318:2005). A tendência de resultados confirmou o raciocínio apresentado por Guandalini e Muttoni (2004) para lajes com 500 mm de espessura, em que a resistência ao cisalhamento correspondente à 63% do valor estimado pela norma americana. Em lajes com pouca armadura de cisalhamento, o aumento da espessura da laje ocasionou um pequeno decréscimo na resistência à punção.

Bocklenberg e Mark (2020) investigaram a influência da espessura da laje na resistência à punção, considerando modelos experimentais circulares com raios de 1,12 m a 2,45 m, e espessura de 0,30 m a 0,65 m, sem armadura de cisalhamento. Todos foram projetados para

falha à punção, e a inclinação do cone de ruptura foi de aproximadamente 30°. Inicialmente, constatou-se que para lajes mais espessas as deflexões são levemente aumentadas.

Outro aspecto importante observado foi de que lajes com espessuras de 0,30 m ensaiadas apresentaram efeito de confinamento do concreto na zona de compressão. Tal fato não ocorreu nas lajes com 0,50 m e 0,65 m ensaiadas, demonstrando que não há somente a influência da espessura da laje, mas também o efeito de escala do modelo no fenômeno da punção.

2.2.3 Efeito de Escala ou *Size Effect*

O efeito de escala, ou *size-effect*, contempla a influência das dimensões da estrutura sobre o fenômeno analisado e sua validação experimental. Considerando-se as normativas brasileira e europeia, tem-se o *size-effect* como função da altura útil (d). Para norma europeia (EC 2:2004), há a limitação do efeito de escala em no máximo 2. Ressalta-se que não há base científica para tal limitação, e Bartolac, Damjanović e Duvnjak (2015) apresentaram que os resultados obtidos pela normativa sem a limitação seriam mais próximos aos obtidos experimentalmente. Tal limitação não é feita pela norma brasileira.

Faria *et al.* (2011) avaliaram o *size effect* como parâmetro influenciador do comportamento à punção e constataram que a consideração deste apenas por meio da altura útil (d) é insuficiente. Birkle e Dilger (2008) afirmaram que também era necessário considerar a influência da taxa de armadura de flexão (ρ) no efeito de escala. Ainda, Faria *et al.* (2011) sugeriram a inserção da consideração de um comprimento característico (l_{ch}) na relação normativa, proporcionando resultados menos dispersos.

Einpaul *et al.* (2016), por meio de resultados experimentais, afirmaram que a esbeltez da amostra influencia a rigidez do sistema considerando a análise carregamento *versus* rotação, interferindo na sua fissuração. Conforme os autores, este efeito foi maior em lajes com armadura de cisalhamento e deve ser considerado para escolha das dimensões do modelo experimental.

Bocklenberg e Mark (2020) concluíram, ao final de testes experimentais, que o efeito de escala foi um fator relacionado não somente com a altura útil (d) da laje, bem como à taxa de armadura e propriedades dos materiais empregados, confirmando o apresentado anteriormente. Estudos recentes mostraram que o uso de multicamadas de armaduras com menores diâmetros, ao invés de uma camada com maiores diâmetros, reduzia a fissuração e manteria a transferência de carga via interface de agregados, em maior extensão.

Os autores também compararam os resultados de previsão da resistência última à punção considerando o Eurocode 2 (2004) e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento - TFCC

(MUTTONI, 2008) aos experimentais, e constataram que a diferença entre os valores de previsão teórica e os resultados experimentais aumentaram conforme o acréscimo da espessura da laje. Tal fato sugere que o efeito de escala, para lajes mais espessas, era superestimado pelos modelos teóricos.

Após as constatações da literatura quanto à influência do efeito de escala no fenômeno da punção, a revisão normativa americana ACI318 (2019) recentemente publicada introduziu a consideração do fator de escala através do coeficiente λ_s no cálculo da força cortante resistente.

2.2.4 Geometria, Dimensões e Posicionamento dos Pilares

Excedente aos parâmetros já mencionados, ainda se tem a distinção entre sistemas analisados. Devido à ausência de um modelo de ensaio padronizado, os estudos desenvolvidos por pesquisadores da área contemplaram diversas dimensões, geometrias e até mesmo posicionamento dos pilares, influenciando significativamente na distribuição de tensões na ligação laje-pilar e, portanto, no fenômeno da punção.

Joseph e Lakshmi (2018) constataram, por meio de resultados experimentais, significativa influência da geometria dos pilares utilizados nos modelos no comportamento da ligação. A distinção na geometria implicava na variação de tensão de cisalhamento na ligação e, comparando-se o emprego de pilares quadrados à pilares retangulares, havia redução de 15% na tensão de cisalhamento. Ainda, a tensão de cisalhamento era superior em pilares de borda e de canto quando comparados à pilares intermediários, evidenciando também a influência das condições de contorno do modelo.

Hawkins *et al.* (1971) afirmaram que para pilares com índice de retangularidade superior a 2, o aumento da seção, contrário ao esperado, não acarretava um aumento proporcional da força última de punção. Tal fato se justificava pelo surgimento de concentração de tensões nos cantos dos pilares. A constatação era de suma importância no caso de edifícios, em que pilares possuem índices na ordem de 4 a 5.

Por sua vez, Mouro (2006) apresentou, por meio de resultados experimentais, que o aumento do índice de retangularidade dos pilares acarretava a diminuição da resistência última à punção para um mesmo perímetro crítico. O autor sugeriu que o combate ao fenômeno da punção pode ser mais efetivo em regiões próximas às extremidades dos pilares por causa da maior concentração de esforço cortante.

Paiva *et al.* (2015) afirmaram que as condições de contorno também influenciam na distribuição de tensões na ligação laje-pilar. Painéis de lajes unidirecionais tendem a concentrar tensões de cisalhamento nas faces do pilar paralelas ao maior vão. Por meio da análise

computacional linear-elástica para tal caso, verificou-se que o aumento do índice de retangularidade do pilar acarretava o aumento da concentração de tensões e, portanto, redução da resistência última à punção. Os autores evidenciaram que tal fato não era tratado em nenhuma normativa.

Sarvaicova, Borzovic e Augustin (2019) evidenciaram que a influência das condições de contorno era ainda maior para pilares esbeltos. Por meio da análise linear, constatou-se concentração de tensões próxima aos cantos do pilar, o que sugeria a redução do perímetro de controle considerado teoricamente. Os autores também ressaltaram que, após a fissuração, havia uma nova redistribuição de tensões no sistema.

2.2.5 Taxa de Armadura de Flexão

A taxa de armadura de flexão tracionada (ρ) é a relação entre a área de armadura de flexão tracionada (A_s) e a área de concreto (A_c) – dada pelo produto da altura útil da laje (d) pela largura a ser considerada. Regan (1986) afirmou que o aumento da quantidade de armadura de flexão provocava aumento da zona comprimida, e, portanto, da área de concreto não fissurado disponível para resistir ao cisalhamento. Ainda, observou que a espessura das fissuras de flexão foi reduzida, auxiliando na transferência de forças (denominado engrenamento de agregados), de modo a aumentar o efeito pino. Ainda, o autor afirmou que a largura a ser considerada para contribuição deve ser de três vezes a altura útil da laje ($3d$) a partir das extremidades do pilar.

Conforme discutido anteriormente, Menétrey (2002) afirmou que a taxa de armadura de flexão era fator substancial no modo de falha do sistema. Ainda, o aumento da taxa acarretava o acréscimo de resistência à punção, como evidenciam os estudos de Kinnunen e Nylander (1960), Long (1975), Braestrup e Regan (1985), Marzouk e Hussein (1991), Sherif e Dilger (2000), Rombach (2004), Broms (2005), Faria *et al.* (2011), Einpaul, Ruiz e Muttoni, (2015), Joseph e Lakshmi (2018), Teng *et al.* (2018), Rashwana *et al.* (2020).

2.2.6 Armadura de Cisalhamento

O dimensionamento da ligação laje-pilar prevê a verificação da segurança à punção. Caso esta não seja atendida, pode-se utilizar, dentre outros recursos, da armadura de cisalhamento. Para tanto, tais armaduras devem atender aos critérios de ancoragem estabelecidos em norma, bem como a praticidade de execução.

O tipo e a quantidade de armadura de cisalhamento empregada afetam significativamente o fenômeno da punção. Por causa da complexidade do fenômeno e elaboração de um modelo em escala real, não é possível a análise isolada da armadura de

cisalhamento. Faria *et al.* (2011), constataram numericamente e experimentalmente que havia significativa relação da taxa de armadura de punção na resistência à punção na ligação laje-pilar, em que esta aumenta como função da raiz cúbica da taxa de armadura. Os resultados confirmaram o estudo de Ozbolt, Vocke e Eligehausen (2000), e se justificavam pelo aumento da zona comprimida da região, que acarretava um acréscimo da carga última à punção.

Teng *et al.* (2018) também afirmaram que a resistência à punção tem proporcionalidade com a taxa de armadura de punção. No entanto, tal afirmação ocorreu apenas considerando armadura a distância máxima de 1,5.h da face do pilar. Ainda, os autores constataram que para pequenas taxas de armadura de cisalhamento, a ruptura por flexão (dúctil) ocorre anteriormente à ruptura por punção. Portanto, a carga de ruptura pode ser inferior a obtida conforme especificações da normativa americana (ACI 318: 2014).

Schmidt, Kueres e Hegger (2020) apresentaram a resistência à punção como uma soma da parcela resistente do concreto à parcela resistente da armadura de punção (quando utilizada). A contribuição da armadura de punção era relacionada à tensão do material e às deformações medidas e, portanto, dependiam fundamentalmente da calibração do modelo de ensaio. Resultados experimentais indicaram que há um elevado grau de ativação da armadura de cisalhamento (em torno de 80% da tensão de escoamento do material) independente da taxa de armadura de cisalhamento empregada.

Ainda, os autores sugeriram a existência de uma redução da contribuição do concreto à medida que há aumento da taxa de armadura de cisalhamento (estribos fechados), limitada a 50% da resistência última à punção estimada para modelos sem armadura de cisalhamento.

2.3 MODELOS DE PREVISÃO

Este Item apresenta os principais modelos de previsão da força última à punção, para lajes sem armadura de cisalhamento, dados pela literatura.

2.3.1 Talbot (1913)

O início dos estudos relacionados ao fenômeno da punção é atribuído a Talbot (1913). O autor investigou, através de 197 modelos experimentais de sapatas, a atuação da força cortante em tais elementos. Assim sendo, observou-se a ruptura por punção em 20 modelos, através da formação de uma superfície tronco-cônica inclinada em 45° em relação do plano da laje. Ainda, verificou-se que a resistência à punção é superior para sapatas com mais armadura de flexão.

Deste modo, o autor propôs uma verificação por meio de “tensão convencional – τ ” dada por:

$$\tau = \frac{V}{u \cdot d} \quad (1)$$

Em que V é a força de cisalhamento solicitante, d a altura útil da sapata e u é o perímetro do denominado “contorno crítico” paralelo ao pilar a uma distância d .

Assim, há separação entre o cálculo à força cortante e à flexão, e, portanto, o equacionamento proposto é o fundamento das principais normas regulamentadoras.

2.3.2 Hognestad (1953)

Após a constatação da influência da resistência à flexão na resistência à força cortante, Hognestad (1953) através de resultados de ensaios experimentais, propôs a quantificação desta influência através da seguinte expressão:

$$\frac{V_p}{u \cdot d} = 8 + \left(0,03 + \frac{0,06}{\frac{V_p}{V_f}} \right) f_c \quad (2)$$

Em que:

V_p é a força de ruína à punção;

V_f é a força de ruína obtida através da teoria das charneiras plásticas;

f_c é a resistência à compressão do concreto;

u é o perímetro do contorno do pilar.

As unidades de aplicação são daN e cm.

Posteriormente, em 1956, Hognestad juntamente com Elstner realizaram ensaios experimentais em 38 lajes e modificaram a Equação 3 conforme:

$$\frac{V_p}{u \cdot d} = 20 + 0,04 \frac{f_c}{\frac{V_p}{V_f}} \quad (3)$$

Deste modo, é possível obter força de ruína à punção.

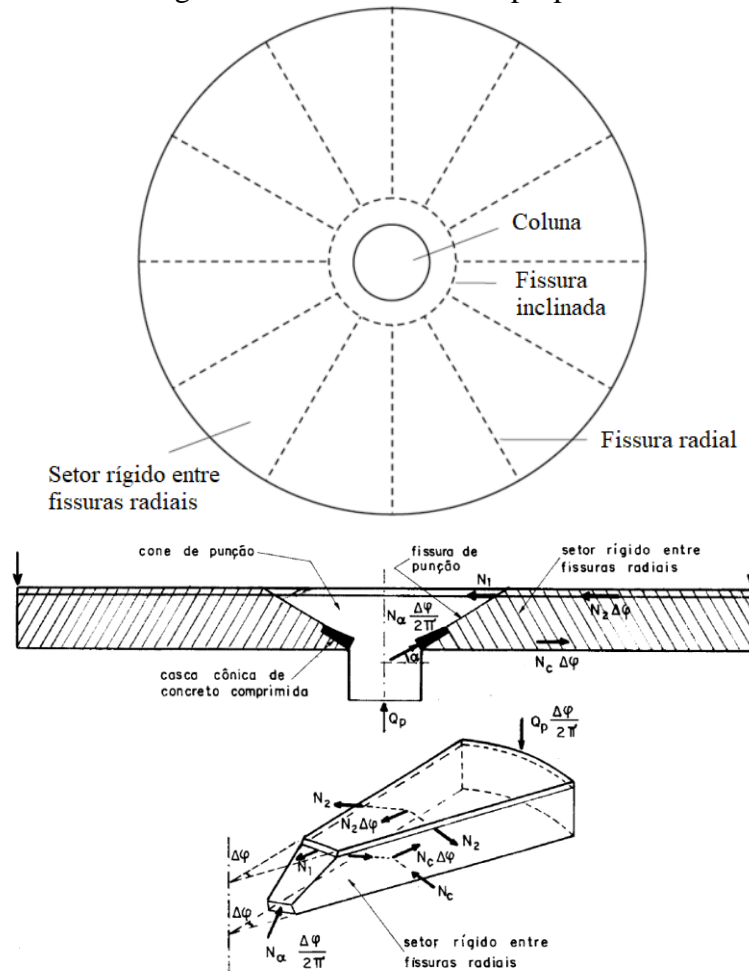
2.3.3 Kinnunen e Nylander (1960)

Após a realização de ensaios experimentais em lajes circulares sem armadura de cisalhamento com pilar central, Kinnunen e Nylander (1960), Kinnunen (1963) e Nylander (1964) desenvolveram o primeiro equacionamento fundamentado em um modelo mecânico (Figura 4) que considera a influência da flexão e da força cortante no fenômeno da punção.

O modelo proposto é formado pelos seguintes componentes:

- I. Um elemento central rígido, dado pelo cone de punção;
- II. Elementos rígidos dados pelos segmentos de laje limitados pelo contorno externo da laje, pelas fissuras radiais e pela fissura inclinada;
- III. Elementos de ligação os quais são a casca cônica de concreto que transmite os esforços de compressão entre os elementos a e b, e a armadura de flexão que transmite os esforços de tração.

Figura 4: Modelo mecânico proposto.



Fonte: Kinnunen & Nylander (1960), adaptado.

Em que:

N_1 é a resultante dos esforços de tração nas armaduras que cruzam a fissura inclinada;

N_2 é a resultante dos esforços de tração nas armaduras que cruzam as fissuras radiais;

N_c é a resultante dos esforços de compressão no concreto, normais às fissuras radiais;

$N_\alpha \frac{\Delta\phi}{2\pi}$ é a força de compressão atuante sobre o elemento de casca cônica;

A força de cisalhamento é assumida igual a zero. A carga de punção é determinada através do equilíbrio dos esforços no elemento no setor em análise.

A força vertical Q_p transmitida através da casca cônica é dada por:

$$Q_p = N_\alpha \sin\alpha = 2\pi \frac{B}{2h} \frac{y}{h} \frac{1 + 2\frac{y}{B}}{1 + \frac{y}{B}} \sigma_t f(\alpha) h^2 \quad (4)$$

Em que:

h é a altura efetiva da laje;

$f(\alpha)$ equivale a $\sin\alpha \cdot \cos\alpha(1 - \tan\alpha)$.

Avaliando-se armadura ortogonal com espaçamento constante, no interior do setor rígido a tensão σ_{sy} é obtida para altos valores de $\Psi \left(1 - \frac{x}{d}\right)$. O limite do raio ($r=r_y$) entre o ponto de escoamento e da fase elástica da armadura de flexão é dada por:

$$r_y = d \frac{E_s}{\sigma_{sy}} \Psi \left(1 - \frac{x}{d}\right) \quad (5)$$

A resultante de força tangencial na armadura de flexão, perpendicular às fissuras radiais, dada por F_{st} pode ser obtida através da expressão seguinte:

$$F_{st} = \sigma_{sy} \left[\sum_{r=r_{co}}^{r=r_y} A_s + \sum_{r=r_y}^{r=r_3} \frac{A_s}{r} \right] \quad (6)$$

A componente radial desta força é representada por $F_{st}\Delta\phi$. Considerando espaçamento constante, a área total de armadura é obtida através da Equação 7.

$$A_s = \rho_d \cdot d_r \quad (7)$$

Assim sendo, considerando r_{c0} o raio do ponto de intersecção entre a fissura de cisalhamento e a armadura de flexão, tem-se a resultante F_{st} dada por:

a) Se $r_y > r_{c0}$:

$$F_{st} = \rho\sigma_{sy}d^2 \left[\left(\frac{r_y}{d} - \frac{r_{c0}}{d} \right) + \frac{r_y}{d} \ln \frac{r_3}{r_y} \right] \quad (9)$$

$$r_{c0} = d \frac{\rho\sigma_s}{7,5 + \frac{\sigma_{cube}}{30}} \quad (8)$$

b) Se $r_y \leq r_{c0}$:

$$F_{st} = \rho\sigma_{sy}d^2 \frac{r_y}{d} \ln \frac{r_3}{r_y} \quad (10)$$

Para determinação da força F_{sr} (resultante radial, ocasionada pela armadura de flexão atravessada pela fissura de cisalhamento e a força tangencial de compressão do concreto) que atua no raio $r_c = r_{c0}$, tem-se a armadura ortogonal como malha circular sujeita à tração uniformemente distribuída tal que $\frac{F_{cr}}{c_0\Delta\varphi}$ por unidade de comprimento, na direção radial.

Para armaduras que atingiram o escoamento, considera-se:

a) Se $r_y > r_{c0}$:

$$F_{sr\ r=r_0} = \rho\sigma_{sy}d^2 \frac{r_{c0}}{d} \Delta\varphi \quad (11)$$

b) Se $r_y \leq r_{c0}$:

$$F_{sr\ r=r_0} = \rho\sigma_{sy}d^2 \frac{r_y}{d} \Delta\varphi \quad (12)$$

A força total de compressão F_{ct} , é dada através da integral de zero a x na direção radial de $r = r_0 + x$ até $r = r_3$.

$$F_{ct} = E_c \frac{1}{2} d^2 \left(\frac{x}{d} \right)^2 \psi \ln \frac{r_3}{r_0 + x} \quad (13)$$

Assim sendo, a ruptura da laje ocorre quando a deformação tangencial do concreto, abaixo da fissura de cisalhamento, atinge o valor limite na base da laje a uma determinada

distância do pilar. A deformação limite é dada através da razão entre dimensão do pilar e espessura da laje.

2.3.4 Moe (1961)

Em 1961, Moe analisou experimentalmente 43 lajes sem armadura de cisalhamento e, com base nos resultados obtidos, propôs a seguinte equação:

$$\frac{V_p}{u \cdot d} = \frac{4(1 - 0,075 \cdot a/d)}{1 + 1,4 \cdot u \cdot d \sqrt{f_c}/V_f} \sqrt{f_c} \quad (14)$$

Em que a é a face do pilar quadrado ou diâmetro do pilar circular. As unidades são daN e cm. (terminar de escrever o que significam as incógnitas)

2.3.5 Yitzhaki (1966)

Em 1966, fundamentado em ensaios experimentais de 28 lajes – 16 sem armadura de punção - Yitzhaki, propôs um modelo de cálculo que correlacionava, explicitamente, a resistência à punção e resistência à flexão.

$$V_p = 8(\rho^*/2)d^2(149,30 + 0,164\rho f_y)(1 + 0,5 \cdot r/d) \quad (15)$$

Em que:

$$\rho^* = \rho f_y / f_c;$$

ρ é a taxa de armadura de flexão;

r é a face do pilar – seção quadrada;

Ainda, o autor propôs um equacionamento para estimativa da resistência à flexão, conforme a Equação 16.

$$V_f = 8\rho f_y d^2 (1 - \rho^*/2) \quad (16)$$

As unidades das equações propostas são libra e polegada.

2.3.6 Long (1975)

O modelo de cálculo proposto por Long (1975) foi desenvolvido para pilares retangulares internos para lajes de seção quadrada. Supõe-se dois modos de ruptura por punção:

A ruptura ocorre devido ao escoamento da armadura de flexão, anterior ao esmagamento do concreto;

A ruptura ocorre devido ao esmagamento do concreto à compressão, anterior ao escoamento da armadura de flexão.

Assim sendo, o autor propõe as seguintes Equações.

$$V_{p1} = \frac{\rho f_y d^2 (1 - 0,59 \rho f_y / f_c)}{0,2 - 0,90 c/L} \quad (18)$$

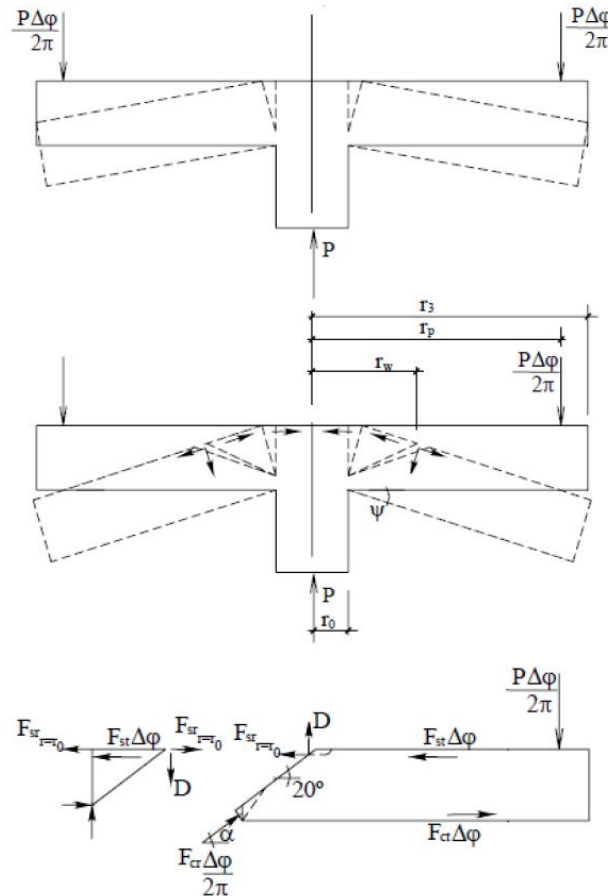
$$V_{p2} = \frac{1,66 + (c + d)d (100\rho)^{1/4} \sqrt{f_c}}{0,75 + 4c/L} \quad (17)$$

Em que c é a face do pilar, e L é o vão dos painéis de laje. Os valores de V_p estão em N, f_c em MPa, c e d em cm. A resistência à punção é dada pelo menor dos valores obtidos.

2.3.7 Shehata (1985)

Em 1985, Shehata propôs um modelo que considera a laje fracionada em segmentos rígidos formados através de duas fissuras radiais e uma circunferencial oriundas do incremento de carga. Ainda, os segmentos possuem perfis de deflexão praticamente lineares, conforme apresenta a Figura 5.

Figura 5: Modelo de ruptura por punção.



Fonte: Shehata (1985), adaptado.

O modelo proposto considera lajes sem armadura de cisalhamento cujas tensões internas causam uma fissura interna inclinada em 20° - para lajes com armadura de flexão distribuída ortogonalmente. O concreto comprimido da face inferior da laje próxima ao pilar, é considerado em estado plástico.

Assim sendo, cada segmentado de laje é sustentado por uma força inclinada de nó máximo, 20° , e por forças oriundas das parcelas da armadura de flexão que não sofreram escoamento no raio limitado. Para tanto, o critério de ruptura é dado para três situações críticas:

Compressão diametral do concreto, quando a força radial de a compressão atinge uma inclinação de 20° ;

Esmagamento radial do concreto, quando a deformação média na face comprimida atinge o valor de $3,5\%$ por mil em um comprimento a 150mm da face do pilar;

E, um esmagamento tangencial do concreto quando a deformação tangencial da face comprimida atinge $3,5\%$ a uma distância da face do pilar equivalente à altura da linha neutra.

Deste modo, Shehata (1990) apresenta o equacionamento de equilíbrio vertical, horizontal e rotacional das forças no plano radial conforme as Equações 19, 20 e 21, respectivamente.

$$P \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) = dF_{cr} \text{sen}\alpha + D \quad (19)$$

$$F_{cr} \cos\alpha + F_{ct} \Delta\varphi = F_{sr} + F_{st} \Delta\varphi \quad (20)$$

$$P \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) (r_3 - r_0) = (F_{sr} + F_{st} \Delta\varphi) z + D(r_w - r_0) \quad (21)$$

Em que:

$$D = 0,364 \rho f_y d r_y \ln \left(\frac{r_w}{r_y} \right) \Delta\varphi \quad (22)$$

F_{cr} é a força radial do concreto que atua junto ao pilar;

F_{ct} é a força tangencial do concreto;

F_{sr} e F_{st} são as forças radial e tangencial do aço;

x é a posição da linha neutra;

d é a altura útil da laje;

z é o braço de alavanca, dado por $d - 0,45x$;

r_0 é o raio do pilar;

r_w é o “raio de punção”, definido pela extremidade superior da fissura de cisalhamento.

r_3 é o raio definido pela borda de cunha submetida à punção.

Após simplificações do modelo proposto, por fim, Shehata (1990) apresenta a Equação

23.

$$P = 2\pi r_0 x n_c f_c \tan 10^\circ \sqrt[3]{\frac{500}{d}} \quad (23)$$

Com:

$$n_c = 1,4 \sqrt{\frac{2d}{r_0}} \geq 1,25 \quad (24)$$

Em que:

n_c é o fator de concentração de tensões, simplificado;

f_c é a resistência a compressão do concreto, em MPa;

$\sqrt[3]{\frac{500}{d}}$ é o fator que considera o efeito de forma.

2.3.8 Gomes (1991)

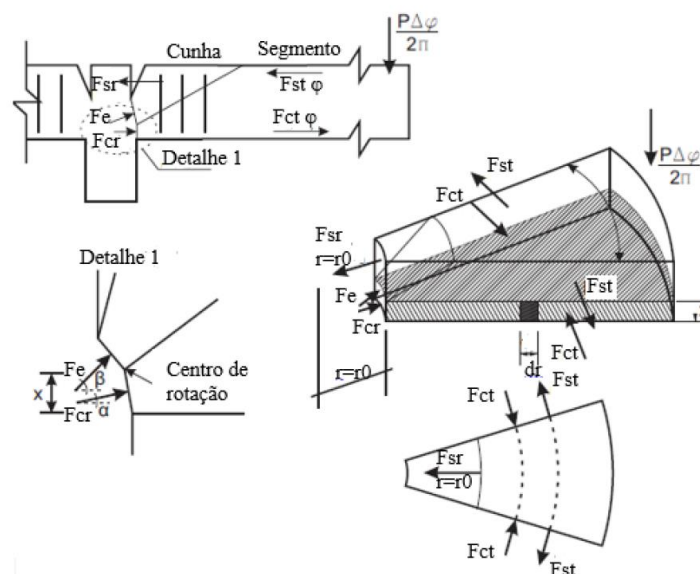
O modelo proposto por Gomes (1991) é fundamentado nos estudos apresentados por Kinnunen e Nylander (1960), Andersson (1963), Regan (1985), Shehata (1985), bem como resultados experimentais apresentados pela literatura. Para tanto, o autor apresenta as premissas iniciais necessários para simplificação:

O pilar e as cunhas são limitados por uma fissura circunferencial no topo da laje, próxima ao pilar;

Os segmentos de laje são limitados pela fissura circunferencial de cisalhamento, fissuras radiais de flexão e pelo contorno da laje.

A partir de tais premissas, o modelo se fundamenta em um sistema de quatro equações, das quais três são equações de equilíbrio e uma em função do critério de ruptura. As quatro equações têm como função a solução de um sistema de quatro incógnitas: a altura da linha neutra (x), o ângulo de aplicação da força radial do concreto (α), a rotação (ψ) e a força de ruptura (P). A idealização do modelo é apresentada na Figura 6.

Figura 6: Idealização do modelo proposto por Gomes (1991).



Fonte: Gomes (1991), adaptado.

A solução se dá através de um processo iterativo, composto por cinco etapas:

- a) Suposição dos valores iniciais de ψ , x e α ;
- b) Através do equilíbrio horizontal, obtenção de x ;
- c) Por meio do equilíbrio rotacional, determinação de $P \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right)$;
- d) Através do equilíbrio vertical, obtenção de α ;
- e) E, por fim, aplicação do critério de ruptura.

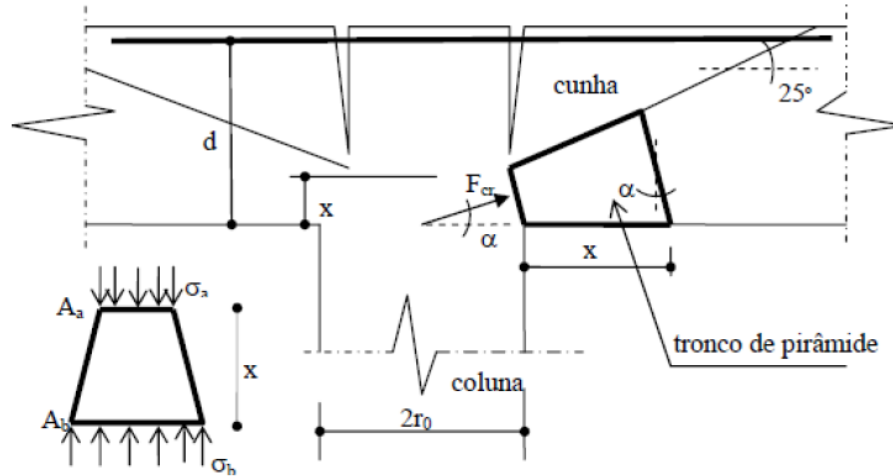
Conforme ilustrado na Figura x, a aplicação do carregamento na laje prova uma rotação (ψ) que dá origem a cinco forças:

- I. Força radial do concreto (F_{cr}), que atua no segmento de laje e na extremidade da fissura de cisalhamento localizada junto ao pilar;
- II. Força tangencial do concreto (F_{ct}), que atua tangencialmente ao segmento de laje, abaixo do centro de rotação. Assume-se que a resultante radial desta força atue a uma determinada distância abaixo da linha neutra, externamente;
- III. Forças tangencial (F_{st}) e força radial da armadura de flexão (F_{sr}), que atuam na região das fissuras radial e circunferencial, no contorno do segmento de laje;
- IV. Força da armadura de cisalhamento (F_e), transferida ao segmento de laje através da cunha por meio da armadura de cisalhamento. Conforme apresenta a Figura 6, apenas a armadura de cisalhamento situada na cunha pode transferir força do pilar ao segmento da laje.

Após observações, Gomes (1991) identificou que as flechas aumentavam em proporção aproximadamente linear em relação a distância do apoio. Assim, houve a possibilidade de tratamento das lajes como rotação de corpo rígido, exceto pela área do pilar, dada como fixa. Deste modo, é possível a determinação das forças descritas.

A força radial do concreto (F_{cr}) representa a capacidade resistente total do tronco de pirâmide junto ao pilar, considerando-se também o efeito do gradiente radial de tensão. Gomes (1991) propôs uma seção de tronco de cone de pirâmide inserida na laje com a base formada junto à face do pilar, de modo assim a considerar o gradiente de tensões, como apresenta a Figura 7.

Figura 7: Representação do tronco de pirâmide na face do pilar.



Fonte: Amorim (2002).

Por sua vez, o gradiente de tensões é dado pela Equação 25.

$$\xi = \frac{\frac{\sigma_a - \sigma_b}{x}}{\frac{f_c}{x}} = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{f_c} = \frac{\sigma_a}{f_c} \left(1 - \frac{A_a}{A_b}\right) \quad (25)$$

Em que σ_a e σ_b são as tensões atuantes nas áreas A_a e A_b , respectivamente, formadas pelo tronco de pirâmide. Assim sendo, pode-se afirmar que $\sigma_a A_a = \sigma_b A_b$.

$$A_a = 2\pi r_0 \frac{x}{\cos\alpha} \quad (27)$$

$$A_b = 2\pi \frac{(r_0 x)}{\cos\alpha} \left(\frac{x \operatorname{tg} 25}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 25} + x \right) \quad (28)$$

Através das equações apresentadas e, considerações geométricas, tem-se que o gradiente de tensões por ser expresso pela Equação 29.

$$\xi = \frac{\sigma_a}{f_c} \frac{2r_0(k-1) + x(\operatorname{tg}\alpha + k_1)}{2r_0k + xk_1} \quad (29)$$

Em que:

$$k = 1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) \quad (30)$$

$$k_1 = \frac{2k}{\cos^2\alpha} - k^2 \operatorname{tg}\alpha \quad (31)$$

Conforme Shehata (1985) a tensão dada por σ_a pode ser expressa como função linear do gradiente de tensões, conforme apresenta a Equação 32.

$$\frac{\sigma_a}{f_c} = 1 + 0,9\xi \quad (32)$$

Por meio de substituições, obtém-se a Equação 33.

$$\sigma_a = f_c \eta (\alpha, r_0/d, x/d) \quad (33)$$

$$\eta = \frac{\frac{2r_0}{d}k + \frac{x}{d}k_1}{\frac{r_0}{d}(1,8 + 0,2k) + \frac{x}{d}(0,1k + 0,9\text{tg}\alpha)} \quad (34)$$

Por fim, a força radial do concreto (F_{cr}) é dada pelo produto da área de atuação da força radial pelo gradiente longitudinal de tensões e pela resistência do concreto, conforme a Equação 35.

$$F_{cr} = A_c \eta f_c \quad (35)$$

Em que:

f_c é a resistência à compressão do concreto;

A_c é a área de concreto onde a força é aplicada, conforme a Equação 36.

$$A_c = \frac{2\pi x}{\cos\alpha} \left(r_0 - \frac{x \text{tg}\alpha}{2} \right) \quad (36)$$

x é a posição da linha neutra, α a inclinação da força radial do concreto e r_0 é o raio do pilar circular.

Além da força radial do concreto, o carregamento aplicado à laje também origina uma força tangencial do concreto (F_{ct}), que, conforme Gomes (1991), pode ser expressa pela Equação 37, considerando um elemento circular de largura d_r no raio r .

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = \Delta\varphi \int_{r_0}^{r_3} k_c f_c k_x x d_r \quad (37)$$

Em que k_c e k_x são funções da deformação tangencial na fibra mais extrema (ϵ_{ct}).

$$k_c = \begin{cases} 0,5 & \text{para } r_{\varepsilon_{c1}} \leq r \leq r_3; \\ 0,5 + 0,35 \left(\frac{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c1}} \right) & \text{para } r_{\varepsilon_{cu}} \leq r \leq r_{\varepsilon_{c1}}; \end{cases}$$

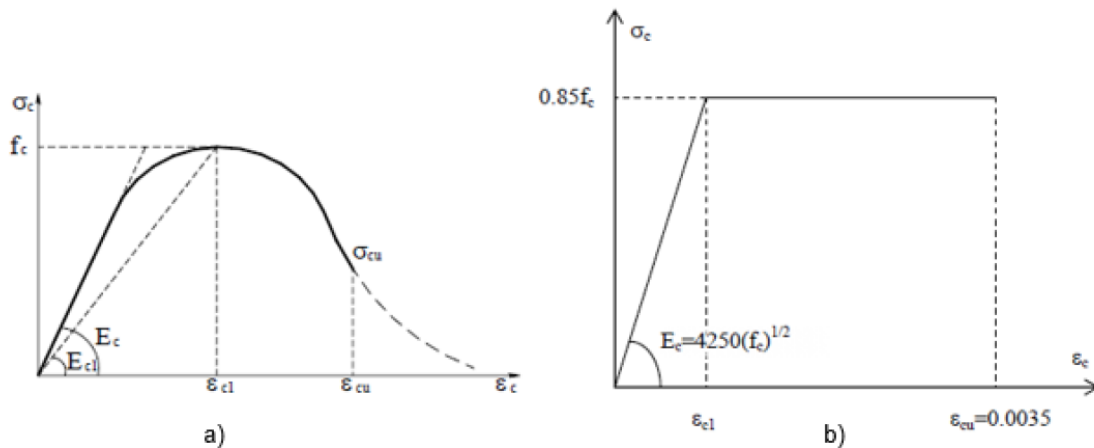
$$k_x = \begin{cases} 0,85 \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{c1}} & \text{para } r_{\varepsilon_{c1}} \leq r \leq r_3; \\ 0,85 & \text{para } r \leq r_{\varepsilon_{c1}}; \end{cases}$$

Com $\varepsilon_{c1} = \frac{\sqrt{f_c}}{5000}$; $\varepsilon_{cu} = 0,0035$, com f_c em Pa.

Deste modo, tem-se que $r_{\varepsilon_{c1}} = \psi x / \varepsilon_{c1}$ e $r_{\varepsilon_{cu}} = \psi x / \varepsilon_{cu}$.

O diagrama tensão-deformação, obtido em corpos de prova cilíndricos de concreto sujeitos à compressão simples atingem a tensão máxima f_c a uma deformação correspondente ε_{c1} . A partir deste ponto, a tensão decresce até o ponto de deformação última do concreto, ε_{cu} . Diversos códigos, incluindo a normativa brasileira, permitem que haja uma simplificação da curva para obtenção de um diagrama linear de tensão-deformação para concretos até 50 MPa, como apresenta a Figura 8.

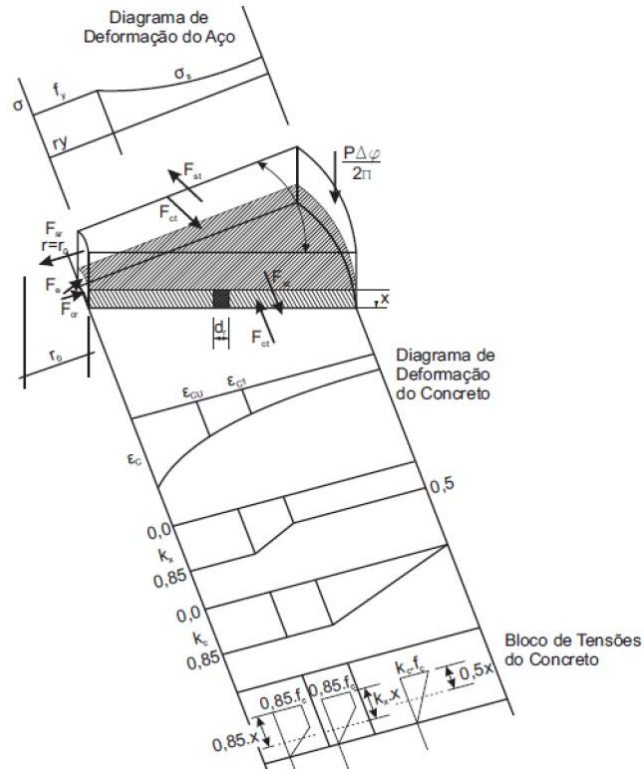
Figura 8: (a) Curva tensão-deformação do concreto. (b) Diagrama simplificado.



Fonte: Gomes (1991), adaptado.

Considerando aço e concreto, a Figura 9 apresenta os diagramas de deformação de ambos os materiais para uma faixa rígida de laje, bem como a variação do bloco de tensões tangenciais do concreto ao longo do raio.

Figura 9: Diagrama de deformação no aço e no concreto no segmento de laje.



Fonte: Gomes (1991).

Diante das observações, Gomes (1991) apresenta que a componente da força tangencial do concreto pode ser obtida para seis distintas combinações da deformação limite ao longo do raio da laje.

I. Intervalo $r_0 \leq r_{\epsilon_{cu}} \leq r_{\epsilon_{c1}} \leq r_3$:

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[\frac{k_0 \psi}{\epsilon_{c1}} - \frac{0,723 r_0}{x} + \frac{0,425 \psi}{\epsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_3 \epsilon_{c1}}{\psi x} \right) \right] \quad (38)$$

Em que:

$$k_0 = 0,425 + \frac{0,298 \ln \alpha_0}{(\alpha_0 - 1)} \quad (39)$$

$$\alpha_0 = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{c1}} \quad (40)$$

II. Intervalo $r_{\epsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_{\epsilon_{c1}} \leq r_3$:

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[0,425 - \frac{0,298}{(\alpha_0 - 1)} \left(\frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} - \frac{r_0}{x} \right) \right] + 2\pi f_c x^2 \left[\frac{0,298\psi}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{\psi x}{r_0 \varepsilon_{c1}} \right) + 0,425 \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_0 \varepsilon_{c1}}{\psi x} \right) \right] \quad (41)$$

III. Intervalo $r_0 \leq r_{\varepsilon_{c1}} \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$:

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi 0,723 f_c x (r_3 - r_0) \quad (42)$$

IV. Intervalo $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$:

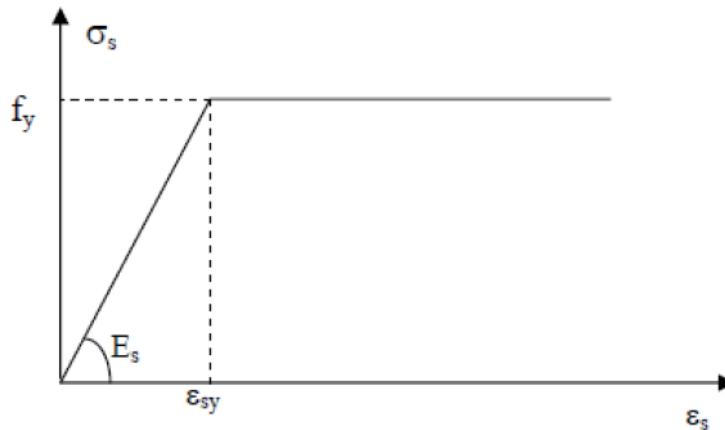
$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[\left(\frac{r_3 - r_0}{x} \right) \left(0,425 - \frac{0,298}{\alpha_0 - 1} \right) + \frac{0,298}{(\alpha_0 - 1)\varepsilon_{c1}} \ln \frac{r_3}{r_0} \right] \quad (43)$$

V. Intervalo $r_{\varepsilon_{cu}} \leq r_0 \leq r_3 \leq r_{\varepsilon_{c1}}$:

$$F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi f_c x^2 \left[0,425 \frac{\psi}{\varepsilon_{c1}} \ln \left(\frac{r_3}{r_0} \right) \right] \quad (44)$$

Outra força a ser determinada é a força tangencial da armadura de flexão (F_{st}). Para tanto, adota-se o diagrama tensão-deformação do aço, supondo o comportamento do material como perfeitamente plástico. O diagrama é apresentado na Figura 10.

Figura 10: Diagrama tensão-deformação do aço (idealizado).



Fonte: Gomes (1991).

Deste modo, a componente radial F_{st} é dada pela Equação 45.

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = \left[\int_{r_0}^{r_y} \rho f_y d d r + \int_{r_y}^{r_3} \rho f_y d \frac{r_y}{r} \right] d r \Delta\varphi \chi \quad (45)$$

Admitindo-se o intervalo $r_0 \leq r_y \leq r_3$, tem-se:

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} d \left[(r_y - r_0) + r_y \ln \left(\frac{r_3}{r_0} \right) \right] \quad (46)$$

Em que:

$$r_y = \psi \frac{(d - x)}{\varepsilon_{sy}} \quad (47)$$

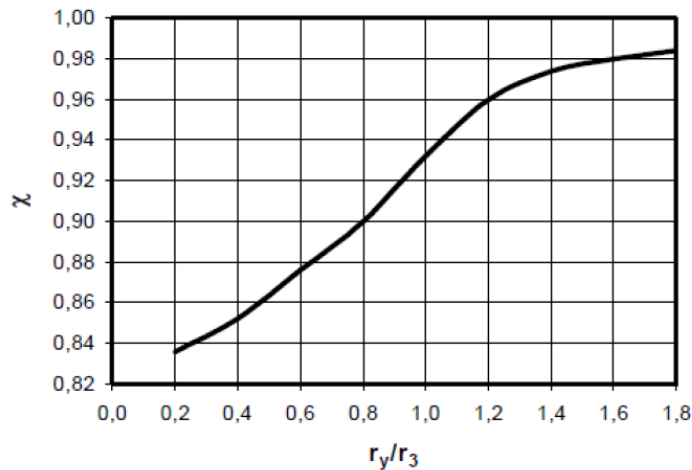
$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_y}{2000000} \quad (48)$$

Assim:

$$F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} d (r_3 - r_0) \quad (49)$$

O coeficiente χ é dado à diferença entre as forças radiais atuantes da armadura ortogonal e as armaduras radial e circunferencial. Assim, resulta-se em uma mesma taxa de armadura de flexão. Neste contexto, Andersson (1963) apresenta que χ é dependente de r_y e r_3 , em que r_y é dado como o ponto em que a tensão de escoamento é alcançada na direção tangencial da armadura de flexão na ruptura, conforme evidencia a Figura 11.

Figura 11: Gráfico de χ em função de r_y e r_3 .



Fonte: Andersson (1963).

O estudo das linhas de referências do gráfico apresentado na Figura 11, pode ser expresso pela Equação 50 que representa χ como função da relação entre raio da região de ocorrência da punção e o raio da laje.

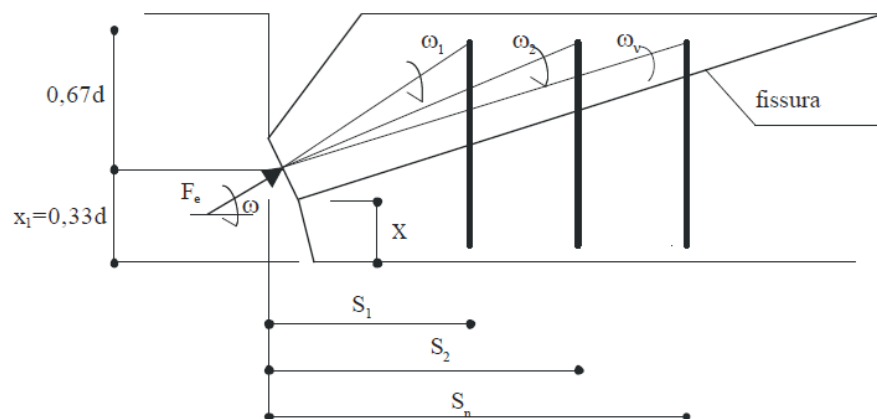
$$\chi = -0,0671 \left(\frac{r_y}{r_3}\right)^3 + 0,1669 \left(\frac{r_y}{r_3}\right)^2 + 0,002 \left(\frac{r_y}{r_3}\right) + 0,829 \quad (50)$$

Outra força a ser determinada é a força radial da armadura de flexão (F_{sr}). De modo simplificado em relação às demais, esta é obtida conforme apresenta a Equação 51.

$$F_{sr (r=r_0)} = 2\pi\rho\chi \frac{f_y}{100} d(r_0) \quad (51)$$

Finalizando as cinco forças a serem determinadas, tem-se a força da armadura de cisalhamento (F_e). A Figura 12 exhibe o diagrama de forças das armaduras de cisalhamento. Para efeitos de cálculo, considera-se somente a contribuição das armaduras que são cruzadas pela fissura de cisalhamento e que estão dentro da cunha.

Figura 12: Diagrama de forças das armaduras de cisalhamento.



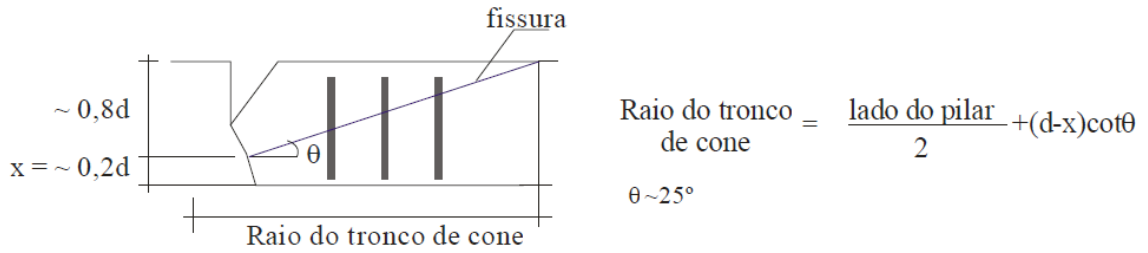
Fonte: Gomes (1991).

Conforme o autor, o comprimento no qual as armaduras contribuem para a força é estimado através do raio de contribuição, conforme Equação 52.

$$r_{\text{contr.}} = r_0 + (d - x) \cot 25^\circ \cong r_0 + 1,56d \quad (52)$$

A Figura 13 ilustra esta consideração.

Figura 13: Ilustração do raio de contribuição.



Fonte: Vaz (2007), adaptado.

A componente vertical da força da armadura de cisalhamento é dada por meio do somatório das forças verticais que atravessam a fissura de cisalhamento, conforme exibe a Equação 53.

$$F_e \sin\beta = A_{s1}f_{e1} + A_{s2}f_{e2} + \dots + A_{sn}f_{en} \quad (53)$$

Em que:

β é o ângulo formado entre F_e e o plano horizontal;

A_{sn} é a área do n-ésimo elemento de armadura de cisalhamento;

f_{en} é o tensão do n-ésimo elemento.

A componente horizontal, por sua vez, é dada pela Equação 54.

$$F_e \cos\beta_1 = F_{e1}\cos\beta_1 + F_{e2}\cos\beta_2 + \dots + F_{en}\cos\beta_n \quad (54)$$

Onde:

$$F_{en} = \frac{A_{sn} f_{en}}{\sin \beta_n} \quad (55)$$

Para simplificação, considerando-se $\cot \beta_n$ aproximadamente equivalente a $\frac{s_n}{(d-x)}$, com s_n dado pela distância entre o n-ésimo elemento da armadura de cisalhamento e a face do pilar, obtém-se a seguinte expressão.

$$F_e \cos\beta = \frac{1}{(d-x)} (A_{s1}f_{e1}s_1 + A_{s2}f_{e2}s_2 + \dots + A_{sn}f_{en}s_n) \quad (56)$$

Se $x_1 = 0,33d$, tem-se as seguintes Equações.

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left[\frac{0,67d \sum_{i=1}^n A_{si}f_{ei}}{\sum_{i=1}^n A_{si}f_{ei} s_i} \right] \quad (57)$$

$$F_e = \frac{\sum_{i=1}^n A_{si} f_{ei}}{\sin\beta} \quad (58)$$

Assim sendo, após a determinação das cinco forças, obtém-se as equações de equilíbrio. Para equilíbrio horizontal, tem-se a Equação 59.

$$F_{sr(r=r_0)} + F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} = F_e \cos\beta + \xi F_{cr} \cos\alpha + F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi \quad (59)$$

Por sua vez, o equilíbrio vertical é representado pela Equação 60.

$$\xi F_{cr} \sin\alpha + F_e \sin\beta = \frac{P \Delta\varphi}{2\pi} \quad (60)$$

E, por fim, tem-se o equilíbrio rotacional dado pela soma dos momentos atuantes em relação ao ponto do centro de rotação. Devido a pequena distância entre a linha de atuação e o centro de rotação, as forças F_e e F_{cr} são desprezadas. O equilíbrio é dado pela Equação 61.

$$\frac{P \Delta\varphi}{2\pi} = \frac{z (F_{sr(r-r_0)} + F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi)}{r_3 - r_0} \quad (61)$$

Em que:

ξ representa o efeito de escala (*size effect*), dado por $\xi = (400/d)^{1/4}$;

z é o braço de alavanca, dado por $z = d - 0,45x$.

Conforme apresentado anteriormente, a solução do modelo se dá, por fim, através da aplicação do critério de ruptura. Gomes (1991) identifica dois critérios de ruptura para lajes sujeitas à punção: o critério de ruptura interna, que ocorre na região de armadura de cisalhamento, e o critério de ruptura externa, que ocorre externamente a armadura de cisalhamento.

Quanto à ruptura interna, percebe-se que esta ocorre abaixo da fissura de punção e próxima ao pilar, quando a tensão de cisalhamento τ (Equação 62) atinge a resistência ao deslizamento.

$$\tau = C - \mu\sigma \quad (62)$$

Em que C é a coesão interna do concreto, dada por $C = f_c - 4$ (BRAESTRUP, 1976), μ é o coeficiente de fricção interna, equivalente a $\tan\varphi = 0,75$ ($\varphi = 37^\circ$), e σ é a tensão normal no plano de deslizamento.

O trabalho externo, obtido através da aplicação da força a uma distância específica, é obtido conforme a Equação 63.

$$W_e = \sigma b t v \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \quad (63)$$

E então, o trabalho interno é dado pela Equação 64.

$$W_i = v C \cos \varphi \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + r)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \theta - \gamma)} \quad (64)$$

Pelo princípio da energia de deformação, igualando-se o trabalho externo ao trabalho interno, obtém-se a Equação 65.

$$\sigma = \frac{C \cos \varphi \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma) b t}{\operatorname{sen}(\theta - \varphi) \operatorname{sen}(90^\circ - \theta - \gamma)} \quad (65)$$

O valor mínimo de θ equivale a $\theta = (\varphi + 90^\circ - \gamma)/2$, e substituindo-se na Equação 64, tem-se:

$$\sigma_{\min} = \frac{C \cos \varphi \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{90^\circ - \gamma - \varphi}{2}\right)} \quad (66)$$

O parâmetro de ruptura interna k , apresentado na equação anterior, é dado por:

$$k = 0,2 \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{53^\circ - \gamma}{2}\right)} \quad (67)$$

Com $\gamma = 25^\circ - \alpha$ para $\alpha \leq 12,5^\circ$, e $\gamma = \alpha$ para $\alpha \geq 12,5^\circ$.

De acordo com Gomes (1991), o parâmetro de ruptura interna k deve ser comparado a η e, caso haja igualdade, há ruptura na região de armadura de cisalhamento da laje.

Quanto à ruptura externa, percebe-se que esta ocorre quando a tensão normal máxima σ_{\max} – expressa pela Equação 68 – na seção a 1,35d além da armadura de cisalhamento, atinge a resistência à compressão diametral do concreto f_{sp} . Esta consideração apresentada por Gomes (1991) foi obtida experimentalmente.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sigma_x \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = f_{sp} \quad (68)$$

Em que:

$$\sigma_x = \frac{H}{bh};$$

$$H = F_{st(r_1 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi - F_{ct(r_1 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi;$$

$$F_{st(r_1 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = F_{st(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi - F_{st(r_0 \rightarrow r_1)} \Delta\varphi;$$

$$F_{ct(r_1 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi = F_{ct(r_0 \rightarrow r_3)} \Delta\varphi - F_{ct(r_0 \rightarrow r_1)} \Delta\varphi;$$

$$b = 2\pi r_1;$$

$$\tau_{xy} = \frac{3 P \Delta\varphi}{2 bh}.$$

Deste modo, é possível, através de iterações, obter a solução do modelo proposto.

2.3.9 Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (2008)

Um dos primeiros modelos racionais para determinação da resistência à punção foi desenvolvido por Kinnunen e Nylander em 1960, fundamentalmente baseado em observações experimentais. Os autores identificaram rotações de um corpo rígido na superfície de ruptura da parte externa da laje e, assim, criaram um modelo satisfatório às condições de equilíbrio do sistema.

O modelo trata segmentos de laje como corpos rígidos apoiados em uma casca cônica fictícia confinada entre o pilar e a fissura de cisalhamento. Quando carregado, cada segmento gira em torno de um ponto de rotação (CR), suportado por forças resultantes do sistema. As forças internas são vinculadas à rotação ψ da laje, e a ruptura ocorre quando o ponto da superfície inferior da laje, localizado verticalmente abaixo da extremidade da fissura de cisalhamento, atinge uma deformação radial crítica (ε_{cto}), e as deformações tangenciais no concreto e na casca cônica têm os valores característicos de ruptura alcançados. O modelo teórico foi desenvolvido considerando armaduras axissimétricas, alterando-se complexamente para utilização corrente de armaduras ortogonais.

A partir de tais considerações, Muttoni e Schwartz (1991) desenvolveram um modelo teórico, aperfeiçoado recentemente por Muttoni (2008), através da hipótese de que a resistência à punção de um sistema diminui conforme o aumento da rotação da laje, ocasionado pela formação de uma fissura crítica de cisalhamento na seção transversal que se propaga cortando a biela de compressão, responsável esta pela transmissão de esforço cortante para o pilar. A

fissura formada diminui a resistência da biela comprimida podendo ocasionar ruptura por punção.

Os autores apresentaram a abertura da fissura como proporcional ao produto da rotação e altura útil da laje ($\psi \cdot d$), e a transmissão de esforço cortante relacionada à rugosidade do concreto, avaliada em função do diâmetro máximo do agregado. Para superfícies de ruptura com inclinação máxima de 45°, Muttoni (2008) sugere o critério de falha conforme a Equação 69.

$$\frac{V_R}{b_0 \cdot d \cdot \sqrt{f_c}} = \frac{3/4}{1 + 15 \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad (69)$$

Em que:

V_R é a força de cisalhamento;

b_0 é o perímetro de controle, a $d/2$ da região de suporte da área carregada;

d é a altura útil da laje;

f_c é a resistência à compressão do concreto;

ψ é a rotação da laje;

d_{g0} representa o diâmetro do agregado de referência, tomado como 16 mm;

d_g é o diâmetro máximo do agregado utilizado.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left(\frac{V_E}{V_{flex}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (70)$$

Em que r_s é a distância entre o eixo do pilar até a linha de momentos nulos; f_{ys} e E_s representam a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade da armadura de flexão tracionada, respectivamente; V_E é a força aplicada, em N; e V_{flex} é a força cortante correspondente à ruptura da laje por flexão, conforme a Equação 71.

$$V_{flex} = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot \frac{r_s}{r_q - r_c} \quad (71)$$

Sendo que r_q é a distância entre o eixo do pilar e a linha de carregamento; r_c é o raio de um pilar circular, ou raio equivalente para pilares retangulares; m_R é o momento fletor radial resistentes em torno do pilar, por unidade de comprimento, conforme apresenta a Equação 72. Para pilares de seção quadrada com dimensão b_p , $r_c = 2b_p/\pi$.

$$m_R = d^2 \cdot \rho \cdot f_y \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot f_y}{2 \cdot f_c}\right) \quad (72)$$

Com ρ equivalente à taxa geométrica de armadura de flexão.

2.3.10 Teng, Chanthabouala, Lim e Hidayat (2018)

Em termos atuais, Teng *et al.* (2018) avaliaram a influência da taxa de armadura de flexão na resistência à punção através de ensaios experimentais e comparações entre os principais métodos normativos. Os autores identificaram a necessidade de inserção de novos parâmetros para consideração do efeito de escala e de baixas taxas de armadura e, deste modo, propuseram um novo equacionamento.

Considerando as premissas da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC), os autores propuseram um novo fator de redução (k_{RR}) dado pela Equação 73.

$$k_{RR} = (\rho/\rho_s)^{1/6} \quad (73)$$

Em conformidade às demais metodologias, ρ é a taxa de armadura de flexão e ρ_s é dado por:

$$\rho_s = (0,01) \left[\frac{0,6k_{CR}k_{SZ}f_c^{1/3}b_0d}{\alpha_0(0,95f_yd^2)} \right]^{3/2} \quad (74)$$

Com:

$$\alpha_0 = [2(c_1 + c_2)/r + 2\pi] \quad (75)$$

Em que r é a distância entre a face do pilar até o ponto de aplicação do carregamento, podendo-se simplificar por 20% do vão. Ainda, em função dos valores comumente empregados na prática, o valor de ρ_s pode ser simplificado em $\rho_s = 0,7\%$. O efeito de escala k_{SZ} é obtido através da Equação 76.

$$k_{SZ} = (300/d)^{1/2} \leq 1,0 \quad (76)$$

O coeficiente de redução é aplicável para lajes com altura útil superior a 30cm. O coeficiente k_{CR} , que considera o índice de retangularidade do pilar é dado pela Equação 77.

$$k_{CR} = (b_1/b_2)^{1/3} \quad (77)$$

Assim sendo, tem-se a equação geral:

$$V_c = 0,6k_{RR}k_{CR}k_{SZ}(100\rho f'_c)^{1/3} b_0 d \quad (78)$$

Ainda, os autores apresentam que usualmente há emprego de pilares quadrados e lajes cuja taxa de armadura de flexão se mantém próximo a 0,7%. Considerando alturas úteis de até 300mm, os autores apresentam uma simplificação dada pela Equação 79.

$$V_c = 0,6(100\rho f'_c)^{1/3} b_0 d \quad (79)$$

A equação apresentada também se aplica a concretos de alta resistência.

2.3.11 Comparação entre modelos de previsão

Diante do exposto, o Quadro 1 apresenta, de modo sintetizado, as principais equações relacionadas aos modelos de previsão apresentados.

Quadro 1: Resumo do equacionamento dos modelos apresentados.

Autor	Equacionamento
Talbot (1913)	$\tau = \frac{V}{u \cdot d}$
Hognestad (1953)	$\frac{V_p}{u \cdot d} = 20 + 0,04 \frac{f_c}{\frac{V_p}{V_f}}$
Kinnunen e Nylander (1960)	$Q_p = N_\alpha \text{sen} \alpha = 2\pi \frac{B}{2h} \frac{y}{h} \frac{1 + 2\frac{y}{B}}{1 + \frac{y}{B}} \sigma_t f(\alpha) h^2$
Moe (1961)	$\frac{V_p}{u \cdot d} = \frac{4(1 - 0,075 \cdot a/d)}{1 + 1,4 \cdot u \cdot d \sqrt{f_c}/V_f} \sqrt{f_c}$
Yitzhaki (1966)	$V_p = 8(\rho^*/2)d^2(149,30 + 0,164\rho f_y)(1 + 0,5 \cdot r/d)$
Long (1975)	$V_{p1} = \frac{\rho f_y d^2 (1 - 0,59\rho f_y/f_c)}{0,2 - 0,90c/L}$ $V_{p2} = \frac{1,66 + (c + d)d (100\rho)^{1/4} \sqrt{f_c}}{0,75 + 4c/L}$
Shehata (1985)	$P = 2\pi r_0 x n_c f_c \tan 10^\circ \sqrt[3]{\frac{500}{d}}$ $n_c = 1,4 \sqrt{\frac{2d}{r_0}} \geq 1,25$
Gomes (1991)	$\frac{P \Delta\varphi}{2\pi} = \frac{z (F_{SR}(r-r_0) + F_{St}(r_0 \rightarrow r_3) \Delta\varphi)}{r_3 - r_0}$
TFCC (2008)	$\frac{V_R}{b_0 \cdot d \cdot \sqrt{f_c}} = \frac{3/4}{1 + 15 \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}}$
TENG <i>et al.</i> (2018)	$V_c = 0,6k_{RR}k_{CR}k_{SZ}(100\rho f'_c)^{1/3} b_0 d$ $V_c = 0,6(100\rho f'_c)^{1/3} b_0 d$

Fonte: A Autora (2021).

Do Quadro 1, observa-se que os modelos mecânicos propostos por Kinnunen e Nylander (1960), Gomes (1991) e pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (2008) - fundamentada pelo modelo de Kinnunen e Nylander (1960) - possuem maior complexidade de aplicação e envolvem um maior número de variáveis.

Conforme apresentado, o modelo proposto por Kinnunen e Nylander (1960) determina a força última à punção através do equilíbrio de esforços do segmento de laje em análise. Para efeitos de cálculo, considera-se, portanto, a inclinação da “fissura de punção”, a resultante de esforços de tração nas armaduras que cruzam as fissuras inclinadas e radiais, bem como a resultante de compressão no concreto normal às fissuras radiais e atuante sobre o segmento de casca cônica considerado.

O modelo apresentado por Gomes (1991), conforme apresentado no Item 2.3.8, se dá através de um processo iterativo composto por cinco etapas. As incógnitas envolvidas são a altura da linha neutra (x), o ângulo de aplicação da força radial do concreto (α), a rotação da laje (ψ), a força radial do concreto (F_{cr}), a força tangencial do concreto (F_{ct}), a força tangencial (F_{st}) e força radial da armadura de flexão (F_{sr}) e a força da armadura de cisalhamento (F_e).

A Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (2008) apresenta como variáveis a força de cisalhamento (V_R), o perímetro de controle (b_0), a altura útil da laje (d), a resistência à compressão do concreto (f_c), a rotação da laje (ψ), o diâmetro do agregado utilizado (d_g), a distância entre o eixo do pilar até a linha de momentos nulos (r_s), a tensão de escoamento (f_{ys}) e o módulo de elasticidade (E_s) da armadura de flexão tracionada, a distância entre o eixo do pilar e a linha de carregamento (r_q), o raio de um pilar circular, ou raio equivalente para pilares retangulares (r_c), o momento fletor radial resistentes em torno do pilar, por unidade de comprimento (m_R) e a taxa geométrica de armadura de flexão (ρ).

Assim sendo, há uma significativa dificuldade de aplicação das metodologias para efeitos de comparação aos resultados experimentais. Tal fato ocorre não somente pela complexidade da metodologia em si, mas também devido à falta de informação e detalhamento por parte dos resultados experimentais apresentados pela literatura. Evidencia-se que dados como a resistência à compressão do concreto², as dimensões da laje e pontos de aplicação da força e medição dos deslocamentos, inclinação de superfície de ruptura e modo de ruptura são, por muitas vezes, não apresentados.

² alguns estudos apresentam apenas o valor médio da resistência à compressão do concreto obtida para todos os modelos ensaios.

Ainda, Ferreira (2010) afirma que a hipótese de que o mecanismo de falha por punção, provém somente da rotação de corpo rígido do segmento de laje externo ao cone de punção, era contrária a evidências experimentais, em que há rotação e deslizamento na região de ruptura, e pode conduzir a resultados inapropriados.

Por sua vez, os modelos de previsão da força última à punção propostos por Hognestad (1953), Moe (1961), Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018) apresentam um equacionamento mais simplificado e de fácil aplicação. Assim sendo, identifica-se que os modelos lineares apresentam distinções quanto as variáveis envolvidas.

Inicialmente, tem-se que todos consideram a altura útil da laje e a dimensão do pilar como parâmetros influenciadores na força última à punção (P_u), reforçando o apresentado em 2.2.2 e 2.2.4. Quanto à resistência à compressão do concreto, Hognestad (1953) e Shehata (1985) apresentam relação direta entre f_c e P_u , à medida que Moe (1961) e Long (1975) consideram a raiz quadrada de f_c relacionada à P_u . Teng *et al.* (2018) apresenta que a força P_u está relacionada a raiz cúbica de f_c . Yitzhaki (1966) não considera a resistência à compressão f_c no equacionamento.

A taxa de armadura de flexão (ρ) é considerada nos modelos propostos por Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) – na determinação da posição da linha neutra – e Teng *et al.* (2018). Hognestad (1953) e Moe (1961) não apresentam ρ no equacionamento, mas consideram a força resistente à flexão (V_f).

O efeito de escala ou *size effect* é considerado no equacionamento proposto por Long (1975) – através da relação c/L -, Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018). Ressalta-se que apenas o equacionamento proposto por Long (1975) considera o comprimento da laje em análise. Os demais consideram o efeito de escala através da altura útil (d).

Neste contexto, o Quadro 2 apresenta quais parâmetros influenciadores apresentados em 2.2 são considerados como variáveis nos equacionamentos simplificados discutidos. A marcação “x” identifica que a variável é considerada pelo autor, e “-” que não é considerada. Por não ser objetivo de estudo do presente trabalho, a armadura de cisalhamento não foi considerada.

Quadro 2: Parâmetros influenciadores como variáveis no equacionamento proposto.

	Hognestad (1953)	Moe (1961)	Yitzhaki (1966)	Long (1975)	Shehata (1985)	Teng <i>et al.</i> (2018)
f_c	x	x	-	x	x	x
d	x	x	x	x	x	x
<i>Size effect</i>	-	-	-	x	x	x
Dimensão do pilar	x	x	x	x	x	x
ρ	-	-	x	x	x	x

Fonte: A Autora (2021).

Diante do exposto, evidencia-se as diferenças entre modelos propostos, bem como a necessidade de maior investigação quanto aos parâmetros influenciadores da punção e consequente entendimento do modelo. Ainda, ressalta-se a necessidade de estudos experimentais que apresentem parâmetros e resultados de modo mais claro e detalhado.

2.4 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

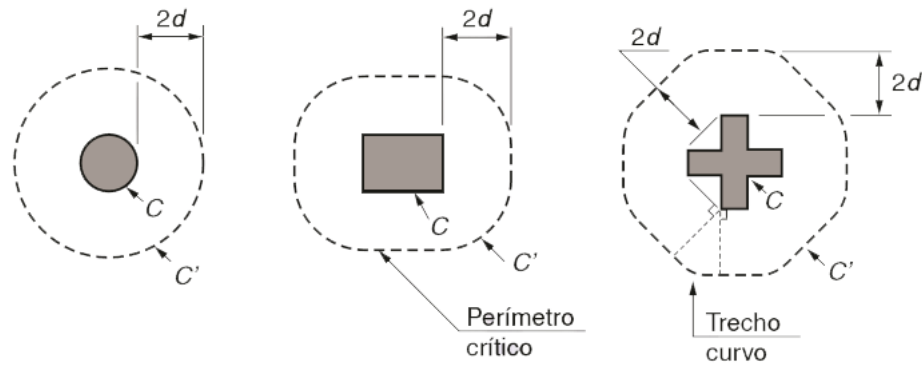
As recomendações normativas visam garantir a segurança no dimensionamento à punção. São aqui apresentadas quatro normativas principais: ABNT NBR 6118:2014, ACI 318:2019, EC 2:2004 e *fib* MODEL CODE (2010).

2.4.1 ABNT NBR 6118:2014

Referindo-se à normativa ABNT NBR 6118:2014, a verificação de punção em lajes lisas é tratada no Item 19.5 “Dimensionamento de lajes à punção”, em que há recomendação da análise destas em duas ou mais regiões, denominadas superfícies críticas. Tais superfícies são definidas pelo produto entre o perímetro crítico (u) e a altura útil da laje (d), caracterizadas pelas regiões no entorno do pilar em análise. Conforme a Figura 14, considera-se as seguintes superfícies:

- i. Superfície crítica C, no entorno do pilar;
- ii. Superfície crítica C', afastada a uma distância $2d$ da face do pilar;
- iii. E, quando houver armadura de cisalhamento, superfície crítica C'', afastada $2d$ do último contorno de armadura.

Figura 14: Perímetros críticos de acordo com a ABNT NBR 6118:2014.



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

De modo a garantir a segurança estrutural, deve-se verificar as tensões resistentes nas superfícies, para que estas sejam iguais ou superiores às solicitantes de cálculo estabelecidas de acordo com a situação prescrita em norma.

Considerando a superfície crítica C, é necessária a análise da compressão diagonal do concreto. A verificação, conforme a Equação 80, deve ser feita em lajes submetidas à punção, com ou sem armadura transversal.

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{SRd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \quad (80)$$

Com:

$$\alpha_v = (1 - f_{ck}/250) \quad (81)$$

* f_{ck} em MPa;

O valor de τ_{Sd} é calculado substituindo u por u_0 (perímetro do contorno C). Ainda, é importante considerar que a normativa permite que o valor resistente τ_{SRd2} seja aumentado em 20% para pilares internos quando os vãos referentes a estes não diferirem mais que 50% e não existam aberturas nas redondezas do pilar. Este aumento considera o estado múltiplo de tensões.

Para superfície C', a tensão resistente em elementos estruturais ou trechos sem armadura de punção é calculada conforme a Equação 82.

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{SRd1} = 0,13 \cdot (1 + \sqrt{20/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,10 \cdot \sigma_{cp} \quad (82)$$

Com:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \quad (83)$$

$$d = \frac{(d_x + d_y)}{2} \quad (84)$$

Em que:

σ_{cp} : tensão normal no concreto devida à protensão;

d : altura útil da laje ao longo do contorno crítico C' da área de aplicação da força (em centímetros); d_x e d_y são as alturas úteis nas direções ortogonais x e y, respectivamente;

ρ : taxa geométrica de armadura de flexão aderente (armadura não aderente deve ser desprezada), com ρ_x e ρ_y equivalentes às taxas de armadura de flexão nas direções ortogonais x e y, respectivamente.

Para o cálculo de ρ_x e ρ_y , deve-se considerar a armadura existente na faixa de largura igual à dimensão ou à área carregada do pilar, somadas a uma distância $3d$ para cada um dos lados. Para pilar próximo à borda, considera-se a distância até a borda, quando esta for menor que $3d$.

Quando a tensão solicitante de cálculo superar a tensão resistente, emprega-se armadura de punção. Assim sendo, deve-se realizar a verificação da tensão resistente na superfície crítica C' com armadura de punção de acordo com a Equação 85.

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{SRd3} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,10 \cdot \sigma_{cp} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \sin \alpha}{u \cdot d} \quad (85)$$

Sendo:

s_r : espaçamento radial entre linhas de armadura de punção, não superior a $0,75d$;

A_{sw} : área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a C';

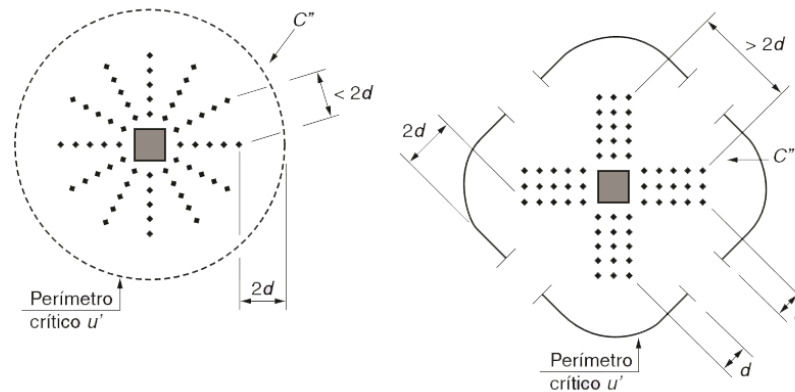
α : ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje.

f_{ywd} : resistência de cálculo da armadura de punção, não maior que 300 MPa para conectores ou 250 MPa para estribos de aço CA50 ou CA60.

É importante salientar que a normativa especifica que, para lajes com espessuras até 15 cm, considera-se o valor de f_{ywd} de 250 MPa. Para lajes com espessuras superiores a 35 cm, adota-se f_{ywd} de 435 MPa. Para quaisquer valores de 15 cm a 35 cm, interpola-se.

Ainda, para casos em que a armadura transversal se faz necessária, esta deve se estender em contornos paralelos a C', até que, em um contorno C'' afastado $2d$ do último contorno de armadura, não seja necessária armadura, conforme a Figura 15. Assim, $\tau_{Sd} \leq \tau_{SRd1}$.

Figura 15: Perímetro crítico C'' conforme a ABNT NBR 6118:2014.



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

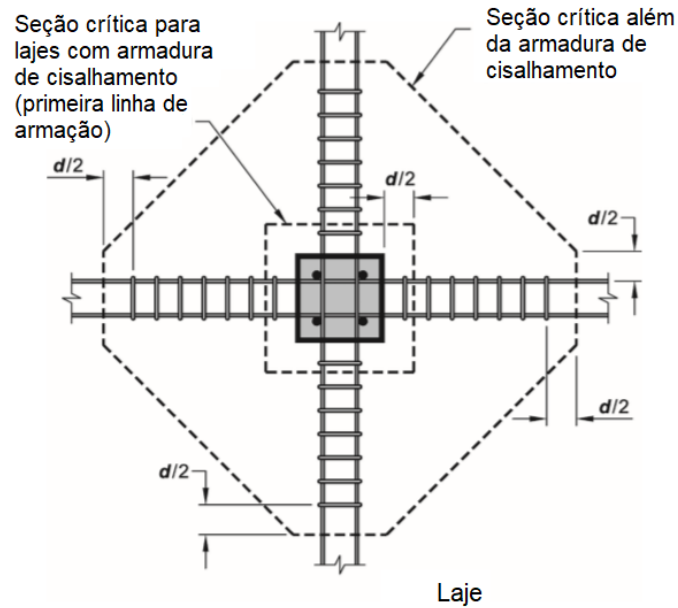
Portanto, caso necessário o uso de armadura de punção, deve-se verificar: a tensão resistente de compressão do concreto no contorno C; a tensão resistente à punção no contorno C', considerando a armadura de punção; e, tensão resistente à punção no contorno C'', sem armadura de punção.

Ressalta-se que a armadura de punção deve ser, preferencialmente, constituída por três ou mais linhas de conectores tipo pino com extremidades alargadas, radiais, dispostas a partir do perímetro do pilar. Cada uma destas extremidades deve ser ancorada fora do plano da armadura de flexão correspondente.

2.4.2 ACI318:2019

Análoga à normativa brasileira apresentada, a norma americana considera superfícies críticas de controle como referência de análise na avaliação da segurança da ligação laje-pilar. Para tanto, duas superfícies críticas devem ser verificadas: a primeira, à $d/2$ da face do pilar, definindo a região de concentração de cargas; a segunda, à $d/2$ do último contorno de armadura, quando necessária. O parâmetro d é a altura útil da laje. A delimitação da área é dita como perímetro crítico b_0 . A Figura 16 apresenta os contornos para lajes com armadura de cisalhamento.

Figura 16: Perímetros críticos de acordo com o ACI 318:2019.



Fonte: ACI 318:2019, adaptado.

Conforme o ACI 318:2019, a verificação da punção em lajes lisas se dá pela análise comparativa entre força nominal solicitante (V_u) e força nominal resistente (V_n), minorada pelo fator de redução ϕ .

$$\phi \cdot V_n \geq V_u \quad (86)$$

Com:

$$V_u = V_c + V_s \quad (87)$$

Em que V_c é a parcela de força cortante resistente do concreto, e V_s a parcela resistente da armadura de cisalhamento. Para lajes sem armadura de cisalhamento, não há parcela V_s e, portanto, tem-se $V_u = V_c$. A revisão normativa recentemente publicada introduziu a consideração do fator de escala, ou *size effect*, dado por λ_s no cálculo da força cortante resistente.

O valor resistente V_c é dado pelo menor obtido através das Equações 88, 89 e 90.

$$V_c = 0,33 \cdot \lambda_s \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot d \quad (88)$$

$$V_c = 0,17 \cdot \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \cdot \lambda_s \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c} \quad (89)$$

$$V_c = 0,083 \cdot \left(2 + \frac{\alpha_s \cdot d}{b_0}\right) \cdot \lambda_s \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c} \quad (90)$$

Com:

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{(1 + 0,004d)}} \leq 1,0 \quad (91)$$

Em que:

λ_s é o parâmetro que considera o *size effect*;

λ , equivale a 0,75 para concretos leves, conforme o Item 19.4.2.2, e 1,0 para concretos normais, conforme o 19.4.2.3;

β é a relação entre maior e menor dimensão do pilar, denominado de C_1 e C_2 , respectivamente;

α_s é a constante relacionada à posição do pilar; assume o valor de 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto;

f'_c é a resistência à compressão do concreto;

Em lajes com armadura de cisalhamento, tem-se a parcela V_s e, portanto, é válida a Equação 87. Os valores correspondentes as parcelas V_c e V_s são obtidos conforme as Equações 92, 93 e 94.

$$V_c \leq 0,17 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot d \quad (92)$$

$$V_s = \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{s} \quad (93)$$

$$V_c + V_s \leq (0,17 + 0,33) \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot d \leq 0,50 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot d \quad (94)$$

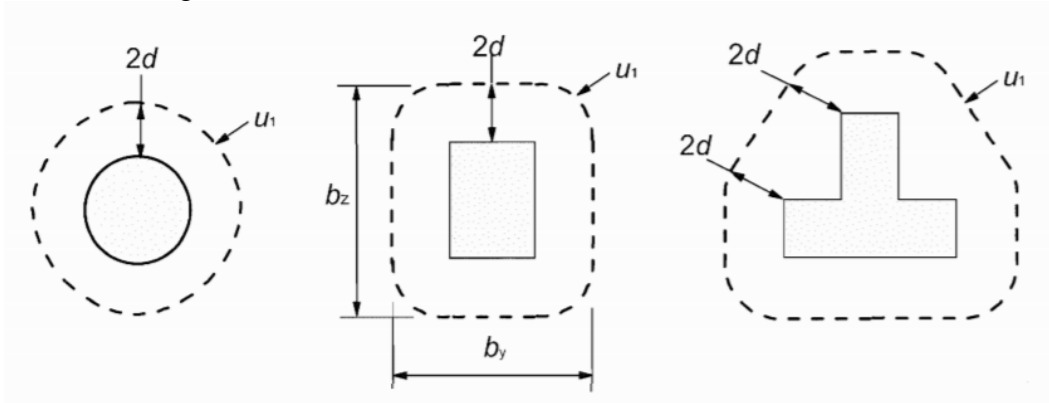
Em que, A_v é a área de armadura de cisalhamento em um determinado espaçamento “s”; f_y é a tensão de escoamento da armadura de cisalhamento; e s é o espaçamento entre elementos da armadura de cisalhamento empregada.

Ainda, a normativa sugere que o espaçamento radial entre elementos componentes da armadura de cisalhamento não supere $d/2$.

2.4.3 EUROCODE 2:2004

De modo semelhante às normativas apresentadas, o Eurocode 2 (2004) adota o critério de superfícies de controle para determinação da resistência à punção na ligação laje pilar. A primeira superfície de controle (u_0) se dá no entorno do pilar, e a segunda (u_1), a uma distância $2d$ da face do pilar, em que d é a altura útil da laje. Caso necessário reforço à punção, deve-se verificar o perímetro além de u_1 , denominado $u_{(out,ef)}$, que delimita a região onde não há necessidade de armadura de punção, a uma distância r_{cont} do centro da área carregada. As superfícies de controle são apresentadas na Figura 17.

Figura 17: Perímetros críticos de acordo com o EC 2:2004.



Fonte: EC 2:2004, adaptado.

Para lajes sem armadura de cisalhamento, verifica-se a força cortante resistente (V_{Rd}) no entorno do pilar (u_0) e na superfície formada à $2d$ da face do pilar (u_1), conforme as Equações 95 e 96, respectivamente.

$$V_{Rd} = 0,50 \cdot \left[0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \right] \cdot f_{cd} \cdot u_0 \cdot d \quad (95)$$

$$V_{Rd} = \left[\frac{0,18 \cdot k}{\gamma_c} \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} + k_1 \cdot \sigma_{cp} \right] \cdot u_1 \cdot d \quad (96)$$

Com:

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 \quad (97)$$

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02 \quad (98)$$

Em que:

$$k_1 = 0,1;$$

f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto;

f_{cd} é a resistência característica à compressão do concreto minorada para efeitos de cálculo;

γ_c é o coeficiente de minoração das resistências, equivalente a 1,50 para o concreto;

d é a altura útil conforme a Equação 83; d_x e d_y são as alturas úteis nas direções ortogonais x e y, respectivamente, em mm;

ρ_1 é a taxa de armadura de flexão, considerando a média entre as direções ortogonais x (ρ_x) e y (ρ_y), para barras em uma região de comprimento equivalente à dimensão do pilar somado à $3d$ para cada um dos lados deste, ou até a borda da laje, caso esta estiver mais próxima;

k é o parâmetro que considera o *size effect*.

σ_{cp} é a tensão de compressão oriunda de esforços axiais de protensão, em MPa;

Para lajes com armadura de cisalhamento, para situações de carregamento simétrico, verifica-se a força cortante resistente (V_{Ed}) no entorno do pilar (u_0), conforme a Equação 99. Ainda, verifica-se a força cortante resistente (V_{Rd}) na superfície formada à $2d$ da face do pilar (u_1), de acordo com a Equação 100.

$$\frac{\beta \cdot V_{Ed}}{u_0 \cdot d} \leq \left[0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \right] \cdot f_{cd} \cdot u_0 \cdot d \quad (99)$$

Em que:

β : coeficiente relativo à excentricidade de carga; quando não houver, equivale à 1,0.

u_0 : obtido em função da localização do pilar:

Pilar interno: $u_0 =$ perímetro da superfície de controle do pilar, em mm;

Pilar de borda: $u_0 = C_2 + 3 \cdot d \leq C_1 + 2 \cdot C_2$, em mm;

Pilar de canto: $u_0 = 3 \cdot d \leq C_1 + C_2$

C_1 e C_2 são as dimensões do pilar.

$$V_{Rd} = \left(0,75 \cdot V_{Rd,c} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd,ef} \cdot \frac{1}{u_1 \cdot d} \cdot \sin \alpha \right) \cdot u_1 \cdot d \quad (100)$$

Sendo:

A_{sw} : área de aço em um perímetro de armadura de punção em um contorno em torno do pilar, em mm^2 ;

s_r : espaçamento radial entre os perímetros de armadura, em mm;

d : média das alturas úteis nas direções ortogonais, em mm;

α : ângulo de inclinação da armadura de punção em relação ao plano da laje;

$f_{ywd,ef}$: resistência efetiva de projeto da armadura de punção, expressa pela Equação

101.

$$f_{ywd,ef} = 250 + 0,25 \cdot d \leq f_{ywd} \quad (101)$$

O perímetro de controle, a partir do qual não há necessidade de armadura transversal, é obtido através da Equação 102.

$$u_{out,ef} = \frac{\beta \cdot V_{Ed}}{u_0 \cdot d} \quad (102)$$

A distribuição das armaduras pode ser radial ou em faixas.

2.4.4 fib MODEL CODE (2010)

O fib Model Code (2010) é um modelo de código normativo que, de modo distinto às normas citadas, se fundamenta na Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (*Critical Shear Crack Theory*) proposta por Muttoni (2008), adaptada para condições de projeto através da introdução dos coeficientes de segurança.

Para lajes submetidas à punção, o dimensionamento se baseia na soma das parcelas de resistência do concreto ($V_{Rd,c}$) e da armadura ($V_{Rd,s}$), quando houver esta, conforme a Equação 103.

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \geq V_{Ed} \quad (103)$$

Em que V_{Rd} corresponde à resistência à punção de cálculo e V_{Ed} é a força solicitante. No caso de lajes sem armadura de cisalhamento, $V_{Rd,s}$ é nulo, e V_{Rd} assume o valor de $V_{Rd,c}$, obtido através da Equação 104.

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_0 \cdot d_v \quad (104)$$

Sendo:

k_{ψ} é o parâmetro que considera a rotação da laje;

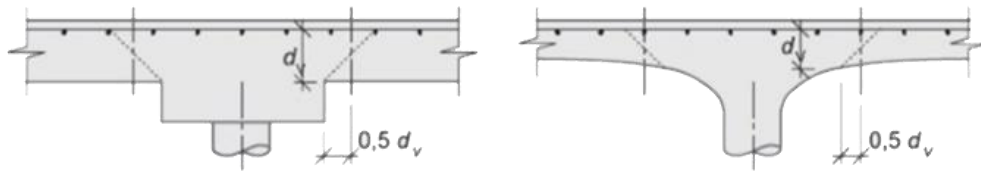
f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto;

γ_c é o coeficiente de minoração do concreto;

b_0 é o perímetro crítico;

d_v é a altura efetiva da laje, considerando a penetração existente do apoio, conforme a Figura 18. É importante ressaltar que para o cálculo à flexão, utiliza-se d . Caso não haja apoio inserido na laje, será admitida a altura útil d .

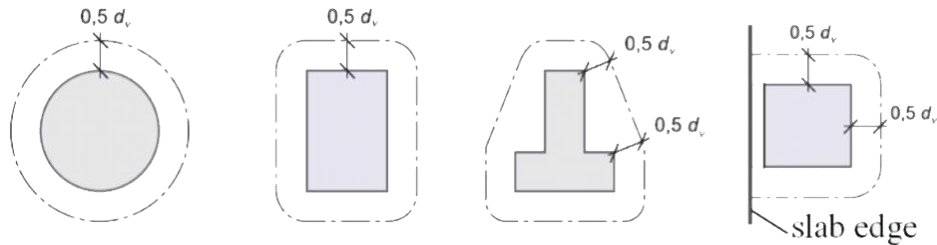
Figura 18: Altura d_v considerada pelo fib MODEL CODE (2010).



Fonte: fib MODEL CODE (2010).

A verificação da segurança à punção no estado limite último a uma área relativamente pequena, delimitada por um perímetro de controle crítico b_0 , a uma distância $d_v/2$ da face da área carregada, conforme exhibe a Figura 19.

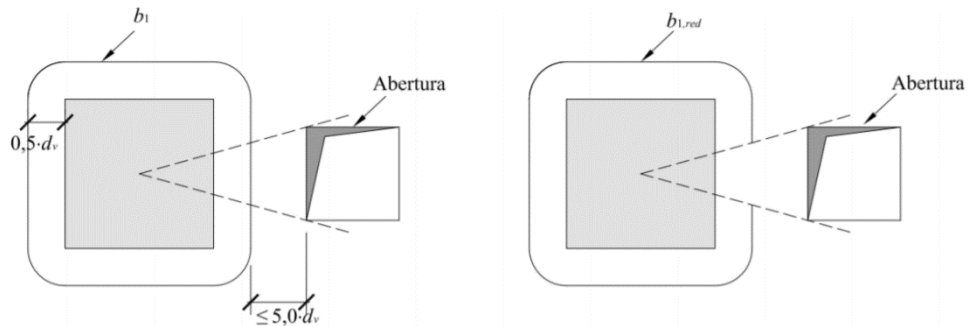
Figura 19: Perímetros críticos de acordo com fib MODEL CODE (2010).



Fonte: fib MODEL CODE (2010).

Ainda, caso existam aberturas na laje com distâncias inferiores à $5d_v$ do perímetro crítico b_0 , desconsidera-se uma parte do perímetro efetivo conforme apresenta a Figura 20, e adota-se um novo perímetro crítico $b_{1,red}$.

Figura 20: Perímetro crítico reduzido devido à abertura conforme o fib MODEL CODE (2010).



Fonte: fib MODEL CODE (2010), adaptado.

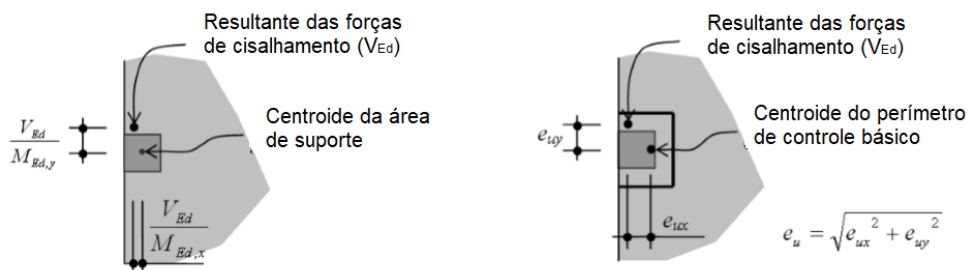
O novo perímetro crítico é obtido por meio da Equação 105, considerando a excentricidade através do fator k_e (106).

$$b_0 = k_e \cdot b_{1,red} \quad (106)$$

$$k_e = \frac{1}{1 + \frac{e_u}{b_u}} \quad (105)$$

Em que e_u é a excentricidade resultante das forças de cisalhamento quanto ao centroide do perímetro crítico; e b_u é o diâmetro de uma circunferência de mesma superfície que a existente no perímetro de controle. O modelo ainda propõe, para fins de projeto, que o centroide do perímetro de controle seja determinado conforme apresenta a Figura 21.

Figura 21: Centroide do perímetro de controle conforme o fib MODEL CODE (2010).



Fonte: fib MODEL CODE (2010), adaptado.

Em situações nas quais a estabilidade lateral independe da ação do pórtico formado pela laje e pilar, e os vãos adjacentes não difiram acima de 25%, permite-se a adoção do coeficiente k_e equivalente a 0,90 para pilares internos, 0,70 para pilares de borda e 0,65 para pilares de canto.

Definidos os parâmetros de altura e perímetro crítico, tem-se a determinação de k_ψ componente da Equação 107, respectivo à rotação da laje.

$$k_\psi = \frac{1}{1,50 + 0,90 \cdot k_{dg} \cdot \Psi \cdot d} \leq 0,60 \quad (107)$$

Em que:

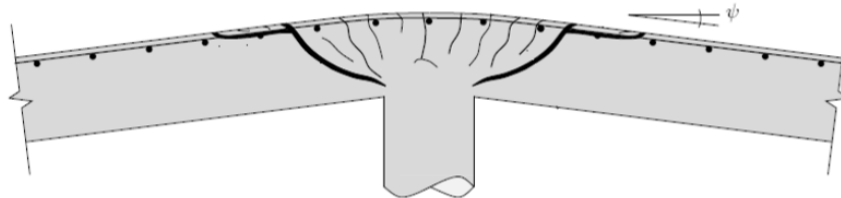
k_{dg} é o fator associado ao diâmetro máximo do agregado, conforme a Equação 108, onde d_g é o diâmetro máximo do agregado. Para valores de d_g inferiores a 16 mm, k_{dg} equivale a 1.

$$k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g} \geq 0,75 \quad (108)$$

d é a altura útil da laje para o cálculo à flexão;

Ψ é a rotação da laje, conforme apresenta a Figura 22.

Figura 22: Rotação da laje (Ψ) de acordo com o fib MODEL CODE (2010).



Fonte: fib MODEL CODE (2010).

Para determinação da rotação da laje em torno do pilar, o modelo propõe quatro (4) níveis de aproximação.

- Nível I: análises elásticas sem significativa redistribuição das forças internas com L_x/L_y entre 0,50 e 2,00. L_x e L_y são os vãos nas direções ortogonais x e y , respectivamente.

$$\Psi = 1,50 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (109)$$

Sendo:

r_s é o raio de momentos nulos; pode ser admitido como $r_s = 0,22 \cdot L_{maior}$, em que L_{maior} é o maior vão;

f_{yd} é a tensão de escoamento de cálculo do aço;

E_s é o módulo de elasticidade da armadura.

- Nível II: há uma significativa redistribuição dos momentos à flexão.

$$\Psi = 1,50 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \cdot \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1,50} \quad (110)$$

Em que:

m_{sd} é o momento médio atuante na faixa de apoio, para direção considerada, por unidade de comprimento da armadura de flexão;

m_{Rd} é a resistência à flexão média em uma faixa de apoio, para a direção considerada, por unidade de comprimento, obtido através da Equação 111. A rotação deve ser determinada para duas direções principais de armação.

$$m_{Rd} = \rho \cdot f_{ys} \cdot d^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot f_{ys}}{2 \cdot f_c} \right) \quad (111)$$

- Nível III: empregado para análise de um modelo elástico-linear não fissurado.

$$\Psi = 1,50 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \cdot \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1,50} \quad (112)$$

- Nível IV: Ψ é determinado através de uma análise não linear.

No caso de lajes com armadura de cisalhamento, a parcela resistente da armadura $V_{Rd,s}$ é obtida através da Equação 113.

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} \cdot k_e \cdot \sigma_{swd} \quad (113)$$

Com:

$\sum A_{sw}$ é o somatório das áreas das seções transversais das armaduras de cisalhamento.

σ_{swd} é o esforço solicitante na armadura de cisalhamento, calculado através da Equação

114.

$$\sigma_{swd} = \frac{E_s \cdot \Psi}{6} \cdot \left(1 + \frac{f_{bd}}{f_{ywd}} \cdot \frac{d}{\phi_w} \right) \quad (114)$$

Em que:

f_{bd} é a resistência de aderência de cálculo; para barras corrugadas assume o valor de 3 MPa;

f_{ywd} tensão de escoamento de cálculo da armadura de cisalhamento;

ϕ_w é o diâmetro da armadura de cisalhamento.

Ainda, a capacidade resistente na região além da armadura de cisalhamento ($V_{Rd,out}$) é dada pela Equação 115.

$$V_{Rd,out} = k_{\psi} \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_2 \cdot d \quad (115)$$

Em que b_2 é o perímetro crítico externo à armadura de cisalhamento, afastado $0,50d$ da última camada desta.

2.4.5 Comparações entre Recomendações Normativas

Diante do exposto, as recomendações normativas abordadas possuem uma distinção principal: as normativas ABNT NBR 6118:2014, ACI 318:2019 e EC 2:2004 foram fundamentadas empiricamente à medida que o MC (2010) tem como base observações experimentais e, portanto, apresenta critérios completamente diferentes dos demais apresentados.

As normativas ABNT NBR 6118:2014, ACI 318:2019 e EC 2:2004 expõem modelos distintos, mas são fundamentadas na determinação das tensões resistentes em superfícies de controle. O Quadro 3 expõe as prescrições de cada uma quanto à superfície de análise.

Quadro 3: Prescrições quanto ao perímetro crítico para ABNT NBR 6118:2014, ACI 318:2014 e EC 2:2004.

Norma	Contorno do pilar	Primeiro perímetro de controle	Segundo perímetro de controle
ABNT NBR 6118:2014	Verificar a resistência à compressão diagonal do concreto	2d face do pilar	2d da última linha de armadura
EC2:2004	Verificar a resistência à compressão diagonal do concreto	2d face do pilar	2d da última linha de armadura
ACI318:2019	A verificação não é necessária	d/2 da face do pilar	d/2 da última linha de armadura

Fonte: A Autora (2021).

Para lajes sem armadura de cisalhamento, as normas brasileira e europeia apresentam formulações próximas. As distinções se relacionam aos coeficientes de segurança e de ajuste empregados, e, principalmente, quanto à limitação do *size effect*. O valor resultante da Equação

97 é limitado a 2 para norma europeia. Conforme a literatura, não há base científica para tal limitação. Esta condição não é tratada pela norma brasileira.

Ainda para lajes sem armadura de cisalhamento, Paiva *et al.* (2015) afirmaram que as previsões do EC 2:2004, comparadas aos resultados experimentais, eram satisfatórias. No entanto, para pilares retangulares poderia haver previsões contra à segurança, e foi necessário ajustar as equações. Para situações com armadura de cisalhamento, o EC 2:2004 tendia a superestimar a resistência na região armada (DUARTE *et al.*, 2012; HEINZMANN *et al.*, 2012; ABDUL RASOUL e TAHER, 2019; SOARES E VOLLUM, 2015).

Em relação à norma brasileira, Paiva *et al.* (2015) expõem que há elevada tendência a previsões inseguras. Para o banco de dados considerado, as previsões normativas acarretaram superestimação da resistência em 71% dos casos. Em um estudo de confiabilidade, Carvalho, Silva e Stucchi (2017) constataram que no contorno C' há significativa probabilidade de falha do modelo proposto devido à incertezas relacionadas ao modelo. A consideração alarmante é destacada por demais autores (FERREIRA, 2010; MARQUE e NOGUEIRA, 2021; MUTTONI, 2008; SACRAMENTO *et al.*, 2012; SOUSA e EL DEBS, 2019).

Quanto à normativa americana, a literatura apresentou que os resultados estimados eram seguros e, ainda, demasiado conservadores (BAIG, 2019; CAVALCANTE, 2016; COSTA *et al.*, 2012; HEINZMANN *et al.*, 2012; OLIVEIRA, 2013; RABELO, 2016; SAGADEVAN e RAO, 2019; ABDUL RASOUL e TAHER, 2019; SHEMBADE, 2017; WERNECK, 2017) e, dessa forma, evidenciando a necessidade de ajuste das prescrições.

De modo comparativo, a revisão normativa americana ACI318:2019 recentemente publicada introduziu a consideração do fator de escala através do coeficiente λ_s no cálculo da força cortante resistente. Todavia, por se tratar de uma revisão recente, a literatura não apresenta estudos que avaliem a normativa com esta nova consideração.

Ainda, distinta às demais normativas aqui apresentadas, a normativa menciona retangularidade dos pilares que, conforme 2.2.4, é um parâmetro influenciador do fenômeno da punção. Ainda, percebe-se que esta não considera a taxa de armadura de flexão na verificação, além de não relacionar todos os parâmetros em uma única expressão.

Para tanto, Guandalini, Burdet e Muttoni (2009) afirmaram que a não consideração da taxa de armadura pela normativa ocorria por causa da interação da flexão e punção no dimensionamento de lajes. Assim, como o cálculo não era realizado de modo isolado (conforme as demais normativas), deveria se considerar uma parcela de momento fletor (usualmente de 40%) na verificação da punção. A parcela restante era considerada no dimensionamento à flexão (usualmente 60%), com taxa de armadura reduzida, e, por isso, não era considerada no

cálculo da punção. A literatura apresentou maior conservadorismo para casos com elevada taxa de armadura de flexão.

A metodologia apresentada pelo MC (2010), fundamentada pela TFCC (MUTTONI, 2008), tinha como principal fator diferencial a inserção da rotação Ψ da laje. De acordo com o MC (2010), esta rotação é avaliada conforme níveis de aproximação, categorizados de I a IV. Há ainda a consideração do diâmetro máximo do agregado como fator influente à punção.

Comparando-se o MC (2010) aos modelos já discutidos, tem-se maior grau de complexidade de informações e interpretação e, portanto, a aplicação da metodologia é condicionada a uma maior gama de informações. Portanto, tal restrição associada à falta de informações quanto a resultados experimentais dificulta o emprego dos modelos. Por exemplo, Shembade (2017) apresentou que a análise de resultados experimentais componentes de um vasto banco de dados quanto ao MC (2010) foi prejudicada devido à ausência da rotação Ψ das lajes ensaiadas e, portanto, aplicou-se os modelos do ACI 318:2019 e EC 2:2004.

De acordo com Ferreira (2010), ainda que a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento tenha como base observações experimentais e um desenvolvimento mais complexo, os resultados apresentados são semelhantes aos do Eurocode (EC2:2004). Paiva *et al.* (2015) afirmaram que a relação entre os valores estimados pelo MC (2010) e os resultados experimentais varia conforme o nível de aproximação. Para o nível de aproximação I, há conservadorismo; para o nível II, os resultados são satisfatórios; os níveis III e IV apresentam as melhores aproximações.

2.5 MODELOS EXPERIMENTAIS

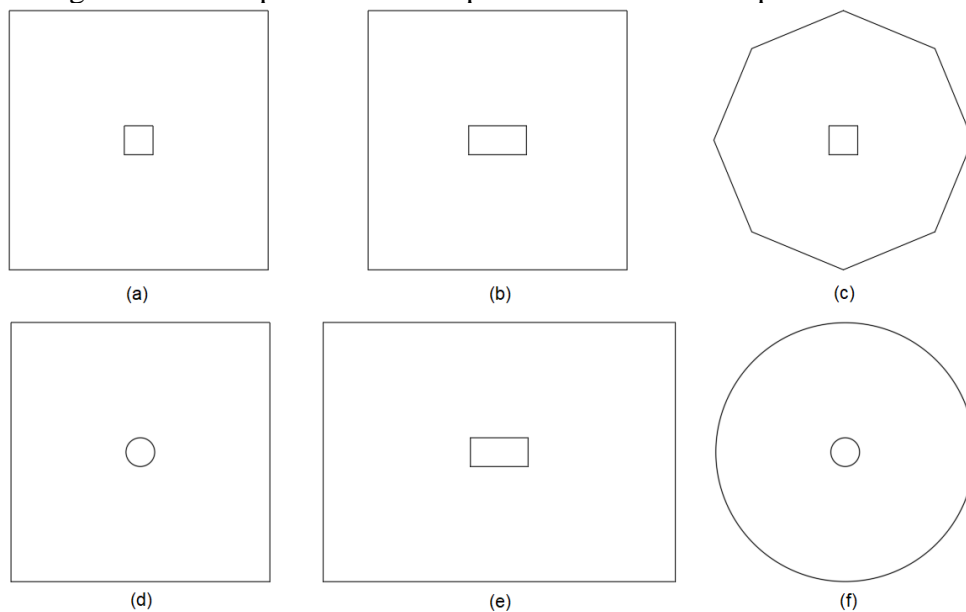
Conforme apresentado em 2.1, o fenômeno da punção é de extrema complexidade devido às incertezas relacionadas ao comportamento da ligação laje-pilar em um sistema de lajes lisas. Os parâmetros influenciadores ainda não são definidos, e os modelos teóricos são fundamentalmente empíricos. Sendo assim, de modo a entender melhor o fenômeno, diversos estudiosos têm analisado experimentalmente o comportamento de lajes lisas à punção.

Entretanto, mesmo que sejam realizadas inúmeras pesquisas, tem-se um grande impasse: até esse instante, não há um modelo experimental padrão, e, portanto, cada ensaio realizado apresenta características particulares. Ainda, por causa das dificuldades atreladas ao experimento, diversos estudos são falhos quanto ao detalhamento e demais informações pertinentes, tais como: dimensões do sistema, parâmetros dos materiais adotados, modo de

falha, detalhamento das armaduras de flexão e cisalhamento (se houver), e deslocamento de superfícies e pontos de análise.

Portanto, a análise comparativa quanto às informações disponíveis na literatura é extrema dificuldade. A exemplo, tem-se a geometria das lajes e pilares. Considerando-se lajes lisas com pilares internos e carregamentos simétricos, a Figura 13 apresenta em síntese os principais modelos ensaiados até então (BIRKLE e DILGER, 2008; CORDOVIL, 1995; LEE *et al.*, 2008; OLIVEIRA, 2013; REGAN, 1986).

Figura 23: Principais modelos experimentais retratados pela literatura.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 23, tem-se: (a) Modelo homotético com laje e pilar quadrados; (b) Laje quadrada e pilar retangular; (c) Laje octogonal e pilar quadrado; (d) Laje quadrada e pilar circular; (e) Modelo homotético com laje e pilar retangulares; (f) Modelo homotético com laje e pilar circulares. Ressalta-se que há mais modelos, como o de lajes hexagonais, por exemplo.

Diante das informações disponíveis na literatura, neste capítulo foram apresentados os principais estudos relacionados ao tema realizados no decorrer da história, considerando diferentes aspectos incorporados para análise experimental. Ao fim, diversos autores e, uma síntese de estudos – com modelos sem armadura de cisalhamento, são apresentados no Quadro 4.

Em 1913, Talbot realizou um estudo experimental quanto à punção em elementos de fundação, no qual os resultados se tornaram referência para formulação do código americano

ACI publicado em 1925. No entanto, os elementos analisados pelo estudioso eram mais espessos quando comparados às lajes cogumelo existentes na época.

Assim sendo, Eltsner e Hognestad (1956) realizaram uma série de ensaios experimentais, envolvendo 39 modelos, de modo a preencher as lacunas provenientes dos estudos de Talbot (1913). Considerando lajes homotéticas, com lajes e pilares quadrados, os autores investigaram o fenômeno da punção em lajes lisas por meio da análise dos seguintes fatores variáveis: resistência do concreto, taxa de armadura de flexão, quantidade de armadura de compressão, condições de apoio, tamanho dos pilares, e quantidade e distribuição da armadura de cisalhamento. Os pesquisadores concluíram que tais fatores, exceto a quantidade de armadura de compressão, têm forte influência na resistência à punção de lajes lisas de concreto. O estudo, dado como pioneiro, foi considerado um marco para investigação da punção em lajes lisas e ainda é tido como relevante para análises atuais.

Em 1960, Kinnunen e Nylander desenvolveram uma nova investigação experimental quanto ao fenômeno da punção, no intuito de explicar o mecanismo de falha bem como prever a força última na conexão laje-pilar. Através de observações experimentais em protótipos compostos por lajes e pilares circulares, foi desenvolvido um modelo baseado no padrão de formação de fissuras de flexão e cisalhamento, segmentando a laje.

Assim, assumiu-se que a região externa ao cone de punção exibia rotações rígidas do segmento em torno de um ponto a uma distância específica, relacionando a resistência à compressão do concreto à força última resistente à punção em uma casca tronco-piramidal confinada entre o pilar e a fissura crítica de cisalhamento. A análise feita pelos autores foi considerada a primeira teoria racional apresentada, com grande relevância para o tema. Entrando, as equações fornecidas eram de extrema complexidade.

Em 1961 o engenheiro Johannes Moe publicou um relatório contendo uma vasta série de ensaios e resultados analisando diversas variáveis, considerando lajes e pilares quadrados. O autor também incluiu casos de momentos desbalanceados em ligações laje-pilar. Ainda hoje, este estudo é a base para as recomendações da normativa ACI 318.

Posteriormente, Andersson (1963) analisou experimentalmente a influência da armadura de cisalhamento no comportamento da ligação laje-pilar de lajes lisas em concreto armado. Para tanto, foram confeccionados 28 modelos homotéticos, com lajes e pilares circulares, submetidas a um carregamento uniformemente distribuído. A armadura de flexão foi distribuída de dois modos distintos, contemplando modelos com barras em duas direções perpendiculares, e modelos com distribuição tipo anel. Para armadura de cisalhamento, houve variação de tipo (barras dobradas e estribos verticais), quantidade e forma de distribuição.

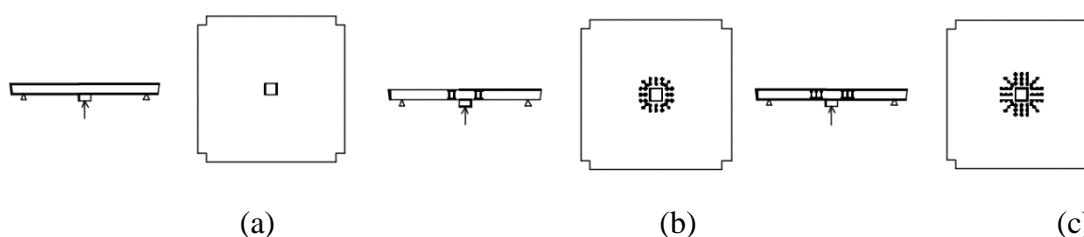
O autor constatou que o emprego de armadura de cisalhamento implicou no aumento da ductilidade e deformações das lajes, e no aumento da resistência à punção, que podem superar em 50% quando comparadas a lajes sem armadura de cisalhamento. O autor ainda afirma que o aumento da taxa de armadura de flexão aumenta a capacidade de suporte do sistema.

Em 1986, o inglês Regan analisou experimentalmente à punção quatro lajes quadradas submetidas a carregamentos internos através de uma placa metálica quadrada de lado equivalente a 240 mm. Para efeitos comparativos, o primeiro modelo não continha armadura de cisalhamento, e os demais eram reforçados por estribos verticais de um ramo, variando-se o número de camadas.

De acordo com o autor, todas as lajes apresentaram ruptura por punção, com força última variando entre 564 kN a 750 kN. Comparando-se lajes com armadura de cisalhamento quanto a sem armadura de cisalhamento, obteve-se um aumento de 22% em relação à carga última resistente. Ainda, na laje sem armadura de cisalhamento, a carga pós ruptura medida foi 25% do valor da carga última. Para lajes com armadura de cisalhamento, este valor foi de aproximadamente 60%.

Melges (2001), realizou um estudo experimental quanto à punção em lajes de concreto armado e protendido. Tratando-se do concreto armado, foram realizados três modelos experimentais em lajes quadradas homotéticas, de 250 x 250 mm, 160mm de espessura, e com pilar intermediário de 180 x 180 mm. Conforme exhibe a Figura 14, os três modelos foram divididos em: (a) sem armadura de punção, denominado M1; (b) com armadura de punção tipo-pino em duas linhas, denominado M2; e (c) com armadura de punção tipo-pino em três linhas, denominado M3.

Figura 24: Modelos das lajes em concreto armado ensaiadas.



Fonte: Melges (2001), adaptado.

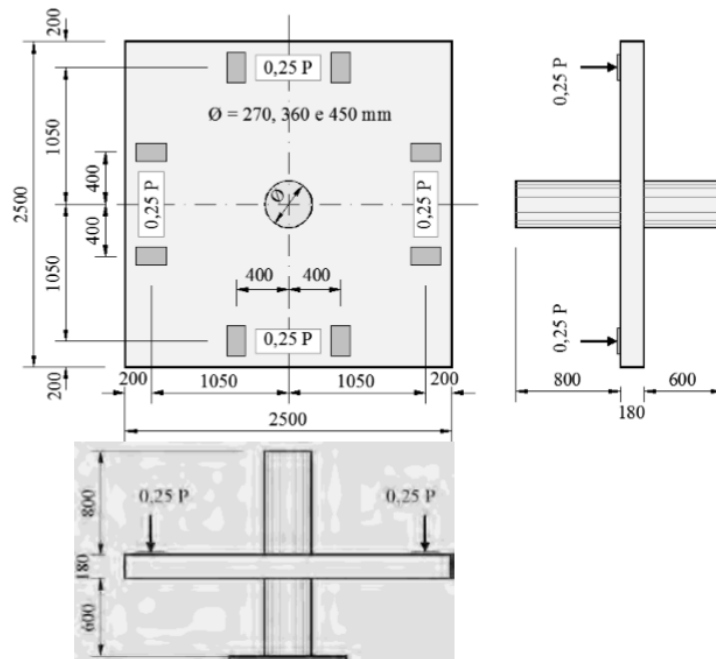
O carregamento foi feito por meio de vigas metálicas quadradas posicionadas nas quatro faces, com eixo central à 1,05 m do eixo do pilar. Inicialmente, aplicou-se uma força contrária até atingir o equilíbrio do peso próprio, descontando-se o peso das vigas de reação. Aplicou-se força de 10 a 10 kN até a constatação da primeira fissura, e, então, aplicou-se força de 50 a 50

kN. Verificou-se a força última (F_u) de ruptura, e ainda houve aplicação de carregamento para investigar o comportamento do sistema após a falha.

Constatou-se o efeito da flexão localizada em alguns pontos, e divergência nos valores dos deslocamentos entre os eixos x e y . Na ruptura, a superfície de ruína não foi perfeitamente simétrica, e houve separação completa entre o cone de punção e o restante do modelo. A superfície de ruptura se deu além da região armada transversalmente. Comparando-se os resultados experimentais às normativas vigentes no período, percebe-se que a melhor aproximação foi quanto à normativa brasileira.

Ferreira (2010) avaliou experimentalmente 16 lajes lisas em concreto armado com armadura de cisalhamento do tipo *double headed stud*, sujeita a carregamentos simétricos e assimétricos. As lajes submetidas a carregamentos simétricos, divididas como primeira série, são apresentadas na Figura 15, com geometria quadrática de 2500 x 2500 mm, pilares circulares com diâmetro variando entre 270 mm, 360 mm e 450 mm, e resistência à compressão do concreto de 50 MPa.

Figura 25: Lajes da 1ª série de ensaios (medidas em mm).



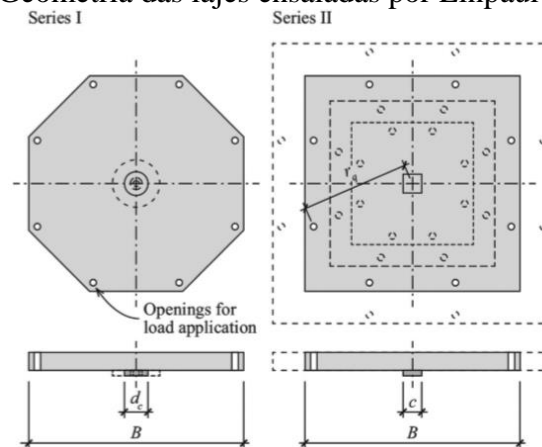
Fonte: Ferreira (2010).

Houve aplicação do carregamento nas quatro faces das lajes, com eixo central à 1,05 m do eixo do pilar. Aplicou-se força de 10 a 10 kN até a 40 kN. Verificou-se a força última (F_u) de ruptura, e comparou-se os resultados experimentais aos recomendados pelas normativas brasileira e europeia vigentes.

Segundo o autor, o ACI (ACI 318:2008) apresenta recomendações a favor da segurança, mas com grande coeficiente de variação. O EC 2:2004 apresenta a maior aproximação com os resultados experimentais, considerado satisfatório. A ABNT NBR 6118:2003, que baseou suas recomendações no CEB fib MC90 (1993), apresentou valores médios próximos aos experimentais, mas para determinados experimentos as recomendações normativas superestimaram os valores de F_u .

Einpaul *et al.* (2016) investigaram experimentalmente a influência das dimensões do pilar e da espessura da laje na resistência a punção, bem como da taxa de armadura de flexão e do emprego e armadura de cisalhamento. Para tanto, foram considerados 13 modelos experimentais, compostos por lajes hexagonais e pilares internos circulares, e lajes quadradas com pilares internos quadrados, todos com carregamentos simétricos. A Figura 16 apresenta a geometria dos modelos ensaiados.

Figura 26: Geometria das lajes ensaiadas por Einpaul *et al.* (2016).



Fonte: Einpaul *et al.* (2016).

A Tabela 1 apresenta as dimensões consideradas conforme o modelo analisado, bem como parâmetros referentes aos materiais empregados e resultados experimentais.

Tabela 1: Dados referentes aos modelos ensaiados por EinPaul *et al.* (2016).

Modelo	B (m)	r _q (m)	c (mm)	d _c (mm)	d (mm)	ρ %	f _y (MPa)	f _c (MPa)	Ψ _{r, teste} (mrad)	V _{r, teste} (kN)
PE10	3	1,505	-	83	210	0,77	538	40,4	6,5	520
PE11	3	1,505	-	166	215	0,75	538	37,5	10,1	712
PE9	3	1,505	-	330	218	0,74	538	44,1	13,8	935
PE12	3	1,505	-	660	212	0,76	538	37,6	29,4	1206
PE6	3	1,505	-	83	215	1,46	542	38,4	4,5	656
PE7	3	1,505	-	166	213	1,47	542	42,5	6,7	871
PE8	3	1,505	-	330	214	1,47	542	42	8,7	1091
PE5	3	1,505	-	660	210	1,5	542	36,7	12,7	1476
PE4	1,7	0,765	260	-	197	1,59	517	35,1	5,3	985
PV1	3	1,505	260	-	210	1,5	709	31,1	7,6	978
PE3	3,9	1,926	260	-	204	1,54	517	34,2	10	961
PP4*	1,7	0,765	260	-	211	1,49	510	30,9	16,8	2076
PP5*	2,3	1,12	260	-	205	1,53	510	31,5	21,5	1812
PL7*	3	1,505	260	-	197	1,59	583	35,9	27,6	1773
PP6*	3,9	1,926	260	-	203	1,55	510	32,7	32	1569

*Lajes com armadura de cisalhamento tipo *double headed stud*.

Fonte: Einpaul *et al.* (2016), adaptado.

Conforme os resultados, concluiu-se que: a esbeltez do modelo influenciava a rigidez do sistema considerando a análise carregamento versus rotação, afetando a fissuração. Este efeito era maior em lajes com armadura de cisalhamento; a resistência ao cisalhamento a um perímetro de controle distante $d/2$ da face no pilar reduzia conforme o aumento do pilar, justificado pelo efeito de concentração de tensões; a redução da resistência ao cisalhamento em grandes pilares tratado pelo ACI 318:2014 poderia provocar a superestimação da força resistente à punção no caso de lajes mais espessas com menores taxas de reforço; os resultados esperados pelo EC2:2004 revelaram conservadorismo; o TFCC (MUTTONI, 2008), dentre os modelos teóricos, fornece a melhor estimativa quanto a previsão da resistência última à punção.

Considerando concretos de alta resistência, Teng *et al.* (2018) realizaram uma série experimental formada por 12 lajes, abordando distintas taxas de armadura de flexão e relação entre lados dos pilares centrados. Buscou-se ainda um melhor entendimento sobre o efeito da resistência à compressão do concreto e do *size effect* na resistência à punção na ligação laje pilar. Os dados das lajes ensaiadas são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Dados das lajes ensaiadas por Teng *et al.* (2018).

Modelo	h (mm)	d (mm)	c ₂ x c ₁ pilar (mm)	f _c ' (MPa)	f _y (MPa)	ρ _s (%)	V _u (kN)	Modo de Falha
S11-028	150	120	200 x 200	112	459	0,28	280	Flexão
S11-050	150	117			537	0,50	394	Flexão
S11-090	150	117			537	0,90	440	Punção
S11-139	150	114			501	1,39	454	Punção
S13-028	150	120	200 x 600	114	459	0,28	308	Flexão
S13-050	150	117			537	0,50	418	Flexão
S13-090	150	117			537	0,90	558	Punção
S13-143	150	114			501	1,43	718	Punção
S15-028	150	120	200 x 1000	97	459	0,28	322	Flexão
S15-050	150	117			537	0,50	458	Flexão
S15-090	150	117			537	0,90	658	Punção
S15-139	150	114			501	1,43	776	Punção

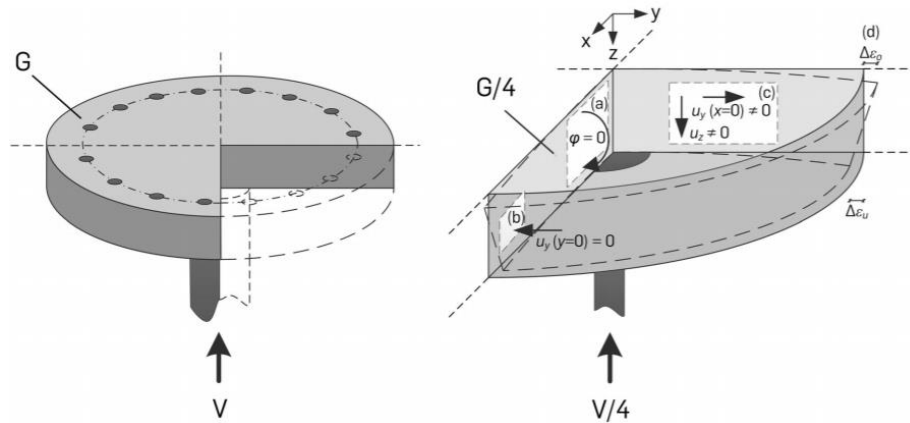
Fonte: Teng *et al.* (2018), adaptado.

Ainda, as dimensões das lajes também foram distintas. As lajes das séries S11 e S13 eram de 2,20 m x 2,20 m, e as componentes da série S15, de 2,20 m x 2,70 m. Todas continham, além da armadura principal, reforço inferior à flexão por meio de barras. Os pilares apresentavam dois metros de altura, e o diâmetro máximo do agregado empregado foi de 20 mm.

Comparando-se os resultados obtidos aos de 367 lajes componentes do banco de dados, os autores constataram que: considerando baixas taxas armadura (0,60 – 0,70 %), pode ocorrer falha por flexão antes da aparente falha final por punção; quanto maior a taxa de armadura, maior é a força última resistente; os métodos teóricos de análise ACI 318:2014, Eurocode 2:2004 e TFCC (MUTTONI, 2008) podem ser contra à segurança para lajes com altura útil superior à 300 mm.

De modo inovador, Bocklenberg e Mark (2020) investigaram experimentalmente o fenômeno da punção através de modelos circulares, com um ¼ de simetria, como apresenta a Figura 27. Foram analisados quatro (4) modelos, com lajes com espessura variando entre 300 e 650 mm, e raio entre 1,12 m e 2,45m.

Figura 27: Modelos com $\frac{1}{4}$ de simetria desenvolvidos por Bocklenberg e Mark (2020).



Fonte: Bocklenberg e Mark (2020).

As características das lajes ensaiadas são apresentadas pela Tabela 3.

Tabela 3: Propriedades das lajes ensaiadas por Bocklenberg e Mark (2020).

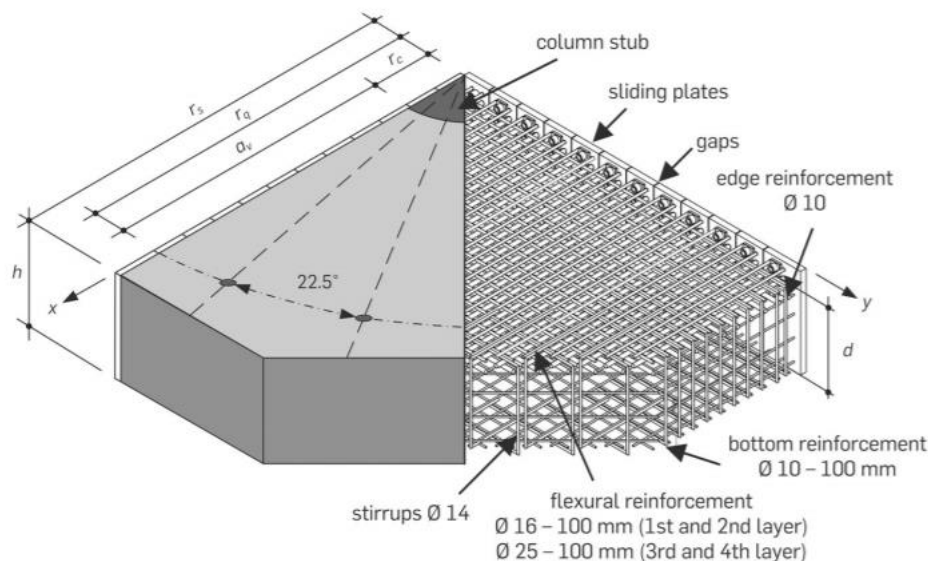
Modelo	h (m)	d (m)	r _c (m)	r _q (m)	r _s (m)	a _v /d	f _{cm} (MPa)	ρ (%)	V _{R, teste} (kN)
s30	0,30	0,24	0,20	0,97	1,12	3,21	22,80	1,31	323
sq30	0,30	0,24	0,20	0,97	1,12	3,21	22,60	1,31	364
sq50	0,50	0,40	0,33	1,62	1,87	3,21	21,50	1,29	1041
sq65	0,60	0,55	0,46	2,20	2,45	3,21	20,20	1,27	1593

* os termos r_c, r_q, r_s e a_v são apresentados na Figura 28.

Fonte: Bocklenberg e Mark (2020).

Da Tabela 3, as lajes sq30, sq50 e sq65 representam modelos com $\frac{1}{4}$ de simetria – o índice q se refere a *quarter*. Deste modo, as dimensões geométricas e carregamentos aplicados são reduzidos em 75%. A laje s30 é o modelo experimental completo, dado como referência para realização dos demais ensaios. A Figura 28 apresenta o detalhamento do modelo sq65. Todos os modelos foram projetados para falha à punção.

Figura 28: Modelo experimental sq65: geometria e distribuição da armadura de cisalhamento.



Fonte: Bocklenberg e Mark (2020).

Após a realização dos ensaios, concluiu-se que:

- Em elementos com elevada taxa de armadura de flexão, disposta por meio de multicamadas, o efeito de escala era inferior ao estimado teoricamente;
- A resistência à punção estimada pela norma Europeia teve ótima correlação aos experimentais; quanto à Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, tem-se conservadorismo;
- Por causa das limitações físicas, não havia rigidez infinita experimentalmente como sugerem os modelos teóricos. Portanto, era necessário o emprego de um mecanismo de controle de rigidez;
- As deformações e padrão de fissuração sugeriram que para $\frac{1}{4}$ de laje, obteve-se o comportamento à punção de lajes simétricas conforme pretendido;
- Como há poucos estudos em grande escala, era necessária uma maior investigação do fenômeno em tais condições, tanto para $\frac{1}{4}$ de simetria, quanto para o conjunto todo.

Considerando o contexto de estudos experimentais relacionados à compreensão do fenômeno da punção na ligação laje-pilar em lajes lisas, e, de modo a não tornar este capítulo exaustivo, tem-se a síntese apresentada no Quadro 1, para lajes sem armadura de cisalhamento.

Quadro 4: Síntese de estudos experimentais para lajes lisas sem armadura de cisalhamento.

Ano	Autor	Geometria	Principais considerações
1956	Eltner e Hognestad	Quadrada	Concluiu-se que: resistência do concreto, taxa de armadura de flexão, quantidade de armadura de compressão, condições de apoio, tamanho dos pilares, têm forte influência na resistência à punção de lajes lisas de concreto; O estudo, dado como pioneiro, foi considerado um marco para investigação da punção em lajes lisas e ainda é tido como relevante para análises atuais.
1960	Kinnunen e Nylander	Circular	Através de observações experimentais foi desenvolvido um modelo baseado no padrão de formação de fissuras de flexão e cisalhamento, segmentando a laje; o modelo, posteriormente aprimorado por Muttoni (2008) é a referência para Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento
1961	Johannes Moe	Quadrada	O autor publicou um relatório contendo uma vasta série de ensaios e resultados analisando diversas variáveis, considerando lajes e pilares quadrados; também houve incluiu casos de momentos desbalanceados em ligações laje-pilar; Ainda hoje, este estudo é a base para as recomendações da normativa ACI 318.
2003	Oliveira	Retangular	O autor propõe o emprego de um coeficiente λ que considere a orientação do pilar em relação à laje, dividindo-se em: lajes predominantemente solicitadas em uma direção e $c_{m\acute{a}x} \geq c_{m\acute{i}n}$ paralelo ao vão; lajes predominantemente solicitadas em uma direção e $c_{m\acute{a}x}$ perpendicular ao vão; e solicitadas nas duas direções.
2009	Guandalini, Burdet e Muttoni	Quadrada	O aumento da espessura da laje provoca a diminuição da resistência última à punção e a deformação na ruptura, confirmando a Teoria da Fissura Crítica do Cisalhamento; os autores comprovaram que a TFCC é válida para lajes com baixas e também altas taxas de armadura;
2015	Inácio <i>et al.</i>	Quadrada	O estudo investigou a relação entre emprego de concretos com elevadas resistências e a resistência à punção na ligação laje-pilar; concluiu-se que quando comparados à modelos com concretos de resistência normais, os modelos analisados apresentaram significativo aumento na resistência última à punção; ainda, a medida que houve aumento na taxa de armadura de flexão, também houve aumento da capacidade resistente;
2015	Bartolac, Damjanovi e Duvnjak	Quadrada	De modo a contribuir experimentalmente no estudo da punção, os autores constataram que o efeito de escala é um parâmetro fundamental na resistência à punção na ligação laje-pilar; lajes sem armadura de cisalhamento apresentam comportamento frágil, e quanto menor a espessura do elemento, maior a capacidade portante; para esta condição, os modelos normativos são conservadores;
2016	Einpaul <i>et al.</i>	Laje: hexagonal; Pilar: circular	A esbeltez do modelo influencia a rigidez do sistema considerando a análise carregamento versus rotação, afetando a fissuração; a resistência ao cisalhamento a um perímetro de controle distante $d/2$ da face no pilar reduz conforme o aumento do pilar, justificado pelo efeito de concentração de tensões;

Ano	Autor	Geometria	Principais considerações
2018	Teng <i>et al.</i>	Quadrada / Retangular	Uso de concreto de alta resistência; $f_c' \geq 100$ MPa; para baixas taxas armadura (0,60 – 0,70 %), pode ocorrer falha por flexão antes da aparente falha final por punção; quanto maior a taxa de armadura, maior é a força última resistente; os métodos teóricos de análise ACI, Eurocode e CSCT podem ser contra à segurança para lajes com altura útil superior à 300 mm;
2020	Bocklenberg	Circular	Investigou experimentalmente o fenômeno da punção através de modelos circulares, com um $\frac{1}{4}$ de simetria; Em elementos com elevada taxa de armadura de flexão, disposta através de multicamadas, o efeito de escala é inferior ao estimado teoricamente; As deformações e padrão de fissuração sugerem que para $\frac{1}{4}$ de laje, obteve-se o comportamento à punção de lajes simétricas conforme pretendido;

Fonte: A Autora (2021).

Assim sendo, a literatura apresentada retratou a distinção entre as propriedades dos modelos experimentais avaliados. Os parâmetros que influenciam o fenômeno da punção que foram apresentados no item 2.2, são dependentes dos parâmetros geométricos dos modelos e, portanto, as considerações aqui apresentadas pelos estudos se mostraram por diversas vezes conflitantes. Enfatiza-se aqui a necessidade de um modelo experimental padrão, para que os resultados possam ser analisados comparativamente.

2.6 CONCLUSÕES DA REVISÃO

Tem-se aqui as principais considerações referentes à revisão bibliográfica apresentada:

- A aplicação de cargas concentradas em elementos de superfície pode provocar, além da ruína por punção, a ruína por flexão ou pela associação entre punção e flexão. Grande parte dos modelos de análise e dimensionamento estrutural simplificam a análise da resistência à punção na ligação laje-pilar através das características geométricas do sistema e da estimativa da carga última suportada (P_u), excluindo-se a interpretação quanto ao modo de falha obtido.
- Ainda que sejam inúmeras as discussões a respeito do fenômeno da punção, tem-se um grande impasse: não há padronização dos modelos experimentais ensaiados e, portanto, as informações oriundas de resultados experimentais são, por muitas vezes, divergentes;
- Associado à falta de padronização, há falta de detalhamento de informações provenientes de estudos experimentais já realizados, tais como: modo de introdução da

carga, detalhamento das armaduras de flexão e cisalhamento utilizadas, deslocamentos da superfície, parâmetros dos materiais adotados e dimensões do sistema;

- Os principais parâmetros influenciadores do fenômeno já identificados são: resistência à compressão do concreto, a espessura da laje, o *size effect*, a geometria, dimensões e posicionamento do pilar, a relação entre momento fletor e esforço cortante, a taxa de armadura de flexão e a presença da armadura de punção. A relação de influência entre tais parâmetros quanto à resistência à punção ainda é controversa;
- Os modelos de previsão apresentados pelas normativas americana, brasileira e europeia são fundamentalmente empíricos, e há necessidade de ajustes das equações. As normas brasileira e europeia se aproximam de resultados experimentais, mas também podem conduzir a um dimensionamento contra à segurança; a norma americana exhibe conservadorismo;
- Os modelos mecânicos propostos por Kinnunen e Nylander (1960), Gomes (1991) e pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (2008) - fundamentada pelo modelo de Kinnunen e Nylander (1960) - possuem maior complexidade de aplicação e envolvem um maior número de variáveis, o que pode ser um fator que restringe a análise comparativa da metodologia quanto à resultados experimentais já apresentados;

Portanto, evidencia-se aqui três principais fatores: a dificuldade do entendimento do comportamento da ligação laje-pilar; a ausência de um modelo de dimensionamento à punção completamente aceito pelo meio técnico científico; e a ausência de um modelo experimental padrão, que promove a dispersão de resultados e dificuldade de uma análise comparativa.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Este capítulo apresenta a metodologia que compõe o estudo em desenvolvimento, subdividida em: análise teórica e composição do banco de dados, e análise estatística.

3.1 COMPOSIÇÃO DO BANCO DE DADOS

A primeira dificuldade imposta ao cumprimento do objetivo deste estudo se dá pelo refinamento dos resultados existentes. Conforme 2.2, o fenômeno da punção é multifatorial e complexo, e os resultados e constatações apresentados pela literatura são dispersos. Portanto, quais variáveis envolvidas têm influência significativa no fenômeno e são fundamentais para a composição de um modelo de previsão da resistência última à punção?

A resposta da indagação se dá pela análise dos resultados experimentais disponíveis na literatura através da composição de um banco de dados. No entanto, como evidenciado anteriormente, como compor um banco de dados quando da ausência de informações e dificuldade de entendimento quanto à diversos estudos experimentais disponíveis? Quais variáveis são fundamentais para o banco de dados?

Assim sendo, realizou-se um estudo aprofundado sobre os modelos de previsão da força última à punção e as respectivas variáveis envolvidas nestes modelos – principais componentes do equacionamento. De modo a restringir as variáveis envolvidas no presente estudo, foram adotadas as seguintes limitações:

- 1) Para entendimento da ligação laje-pilar em lajes lisas maciças de modo isolado, foram analisados somente os modelos sem armadura transversal;
- 2) Foram considerados modelos de lajes lisas com pilares internos e carregamentos simétricos;
- 3) No intuito de reduzir o número de variáveis, foram analisadas apenas as geometrias circulares e quadradas, uma vez que conforme o item 2.4, são comumente empregadas;
- 4) Foram analisados apenas modelos homotéticos, nos quais a geometria do pilar era similar à da laje empregada.

Conforme as restrições, e, através dos equacionamentos apresentados em 2.3, o Quadro 5 exhibe resumidamente os parâmetros vinculados à determinação da resistência à punção em cada modelo.

Quadro 5: Síntese dos parâmetros associados a determinação da resistência à punção conforme os modelos considerados.

HOGNESTAD (1953)
<ul style="list-style-type: none"> • V_p: força de ruína à punção; • V_f: força de ruína obtida através da teoria das charneiras plásticas; • f_c: resistência à compressão do concreto; • d: altura útil da laje; • u: perímetro do contorno do pilar.
KINNUNEN E NYLANDER (1960)
<ul style="list-style-type: none"> • α: inclinação da fissura de punção; • N_α: é a força de compressão atuante sobre o elemento de casca cônica; <p>* Este modelo envolve condições de contorno para emprego das Equações (Item 2.3.3).</p>
MOE (1961)
<ul style="list-style-type: none"> • d: altura útil da laje; • u: perímetro do contorno do pilar. • a: face do pilar quadrado ou diâmetro do pilar circular; • V_f: força de ruína à flexão; • f_c: resistência à compressão do concreto;
YITZHAKI (1966)
<ul style="list-style-type: none"> • ρ: taxa de armadura de flexão; • r: face do pilar – seção quadrada; • f_c: resistência à compressão do concreto; • f_y: tensão na armadura de flexão; • d: altura útil da laje;
LONG (1975)
<ul style="list-style-type: none"> • ρ: taxa de armadura de flexão; • c: face do pilar; • L: vão dos painéis de laje; • f_c: resistência à compressão do concreto; • f_y: tensão na armadura de flexão; • d: altura útil da laje;
SHEHATA (1985)
<ul style="list-style-type: none"> • x: posição da linha neutra; • d: altura útil da laje; • r_0: raio do pilar; • n_c: fator de concentração de tensões, simplificado; • f_c: resistência à compressão do concreto;
GOMES (1991)
<ul style="list-style-type: none"> • x: posição da linha neutra; • α: ângulo de aplicação da força radial do concreto; • ψ: rotação da laje; • F_{st}: Forças tangencial da armadura de flexão; • F_{sr}: força radial da armadura de flexão;

TEORIA DA FISSURA CRÍTICA DE CISALHAMENTO – TFCC (MUTTONI, 2008)
<ul style="list-style-type: none"> • d: altura útil da laje, para delimitação do perímetro crítico b_0; • f_c: resistência à compressão do concreto; • k_{dg}: é o fator associado ao diâmetro máximo do agregado; • Ψ: rotação da laje; • d_{g0}: diâmetro máximo de referência, dado como 16 mm; • d_g: diâmetro máximo do agregado; • $*r_s$: distância entre o eixo do pilar até a linha de momentos nulos; • $*f_y$: tensão de escoamento da armadura de flexão tracionada; • $*E_s$: módulo de elasticidade da armadura tracionada; • $*r_q$: é a distância entre o eixo do pilar e a linha de carregamento; • $*r_c$: é o raio de um pilar circular, ou raio equivalente para pilares retangulares; • $*m_R$: é o momento fletor radial resistentes em torno do pilar, por unidade de comprimento; • ρ: taxa geométrica de armadura de flexão; <p>* parâmetros necessários para o cálculo de Ψ, conforme o nível de aproximação estabelecido.</p>
TENG <i>et al.</i> (2018)
<ul style="list-style-type: none"> • k_{SZ}: fator que considera o efeito de escala; • k_{RR}: fator de redução que considera ρ; • ρ: taxa de armadura de flexão; • k_{CR}: fator que considera o índice de retangularidade do pilar; • b_1 e b_2: maior e menor dimensão do pilar, respectivamente; • d: altura útil da laje; • f_c: resistência à compressão do concreto;
ABNT NBR 6118:2014
<ul style="list-style-type: none"> • Dimensões do pilar, para delimitação do perímetro crítico C; • f_{ck}: resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias; • d: altura útil da laje, para delimitação do perímetro crítico C'; • ρ: taxa geométrica de armadura de flexão; • σ_{cp}: tensão normal no concreto devido à protensão.
ACI 318:2019
<ul style="list-style-type: none"> • Dimensões do pilar, para delimitação do perímetro crítico b_0 e do fator β; • f'_c: resistência à compressão do concreto; • d: altura útil da laje; • Posição do pilar: interno, de borda ou de canto; • λ_s: coeficiente que considera o efeito de escala.
EUROCODE 2:2004
<ul style="list-style-type: none"> • Dimensões do pilar, para delimitação do perímetro crítico u_0; • f_{ck}: resistência característica à compressão do concreto; • d: altura útil da laje, para delimitação do perímetro crítico u_1; • ρ: taxa geométrica de armadura de flexão; • σ_{cp}: tensão normal no concreto devido à protensão. • * a normativa limita em 2,00 a consideração do <i>size effect</i>, conforme a Equação 96.
fib MODEL CODE (2010)
<ul style="list-style-type: none"> • Dimensões do pilar, para delimitação do perímetro crítico b_0; • f_{ck}: resistência característica à compressão do concreto; • d_v: a altura efetiva da laje, considerando a penetração existente do apoio. Caso não haja apoio inserido na laje, será admitida a altura útil d. • k_{dg}: é o fator associado ao diâmetro máximo do agregado;

fib MODEL CODE (2010)
<ul style="list-style-type: none"> • d_g: diâmetro máximo do agregado; • Ψ: rotação da laje; • $*L_x$ e L_y: vãos nas direções ortogonais x e y; • $*r_s$: raio de momentos nulos; • $*f_y$: tensão de escoamento do aço; • $*E_s$: módulo de elasticidade da armadura; • $*m_{sd}$: momento médio atuante na faixa de apoio, para direção considerada, por unidade de comprimento da armadura de flexão; • $*m_{Rd}$: é a resistência à flexão média em uma faixa de apoio, para a direção considerada, por unidade de comprimento; • ρ: taxa geométrica de armadura de flexão; <p>* parâmetros necessários para o cálculo de Ψ, conforme o nível de aproximação estabelecido.</p>

Fonte: A Autora (2021).

Do Quadro 5, tem-se as seguintes constatações: os modelos apresentados por Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018), ACI 318:2019, ABNT NBR 6118:2014 e EC 2:2004 apresentaram menor número de variáveis envolvidas e, portanto, a determinação da resistência última à punção era de simples obtenção; já Hognestad (1953), Kinnunen e Nylander (1960), Gomes (1991), TFCC (MUTTONI, 2008) e o fib MODEL CODE (2010), também baseado na teoria da fissura crítica de cisalhamento, apresentaram um maior número de variáveis envolvidas e desenvolvimento de cálculo mais complexo.

Ainda do Quadro 5, foram verificados quais parâmetros influenciadores do fenômeno da punção elencados em 2.2 são fatores comuns para a maioria dos modelos considerados. Identificou-se, majoritariamente, a consideração comum dos seguintes parâmetros:

- 1) Resistência à compressão do concreto;
- 2) Dimensões do pilar;
- 3) Altura útil da laje;
- 4) Taxa de armadura de flexão.

Assim sendo, investigou-se através da literatura apresentada em 2, as principais constatações referentes a tais parâmetros quanto à influência no fenômeno da punção. Ressalta-se novamente que, devido às variações experimentais, algumas considerações são controversas. Tem-se aqui, em resumo, as principais constatações apresentadas pela literatura:

1. Resistência à compressão do concreto: devido à complexidade do fenômeno e confecção de um modelo em escala real, não é possível a análise isolada da influência da resistência à compressão; a resistência à punção aumenta como função da raiz cúbica da

resistência à compressão do concreto (JOSEPH E LAKSHMI, 2018; FARIA *et al.*, 2011; SCHMIDT, KUERES E HEGGER, 2020).

2. Dimensões do pilar: a distinção na geometria implica na variação de tensão de cisalhamento na ligação e, comparando-se o emprego de pilares quadrados à pilares retangulares, há redução de 15% na tensão de cisalhamento; pilares com índice de retangularidade superior a 2, o aumento da seção, contrário ao esperado, não acarreta o aumento proporcional da força última; o aumento do índice de retangularidade dos pilares acarreta a diminuição da resistência última à punção para um mesmo perímetro crítico (JOSEPH E LAKSHMI, 2018; HAWKINS *et al.*, 1971; MOURO, 2006; SCHMIDT, KUERES E HEGGER, 2020).

3. Altura útil da laje: o aumento da espessura da laje provoca a diminuição da resistência última à punção; lajes com espessuras de 0,30 m ensaiadas apresentaram efeito de confinamento do concreto na zona de compressão; lajes com 0,50 m e 0,65 m de espessura não apresentam o efeito do confinamento do concreto na zona comprimida; o aumento da espessura da laje provoca o aumento da resistência última ao cisalhamento, bem como a redução da capacidade de flexão da seção e tensão de cisalhamento a uma distância $d/2$ da face do pilar; para lajes mais espessas as deflexões são levemente aumentadas (ALHUSSAINAWA *et al.*, 2017; BIRKLE e DILGER, 2008; BOCKLENBERG e MARK, 2020; GUANDALINI e MUTTONI, 2004).

4. Taxa de armadura de flexão: a taxa de armadura de flexão é fator substancial no o modo de falha do sistema. Ainda, tem-se que o aumento da taxa acarreta o acréscimo de resistência à punção, como evidenciam os estudos de Kinnunen e Nylander (1960), Long (1975), Braestrup e Regan (1985), Marzouk e Hussein (1991), Sherif e Dilger (2000), Rombach (2004), Broms (2005), Faria *et al.* (2011), Einpaul, Ruiz e Muttoni (2015), Joseph e Lakshmi (2018), Teng *et al.* (2018), Rashwana *et al.* (2020).

Ainda, tem-se a consideração de tais fatores no efeito de escala. Bocklenberg e Mark (2020) concluíram que o efeito de escala era fator relacionado não somente à altura útil da laje, bem como da taxa de armadura e propriedades dos materiais empregados, confirmando o apresentado anteriormente. Estudos recentes mostraram que o uso de multicamadas de armaduras com menores diâmetros, ao invés de uma camada com maiores diâmetros, reduz a fissuração e mantém a transferência de carga via interface de agregados, em maior extensão. O efeito de escala, para lajes mais espessas, é superestimado pelos modelos teóricos.

Neste contexto, através da análise realizada, para composição do banco de dados foram consideradas as seguintes variáveis: a resistência à compressão do concreto (f_c); a altura útil da laje (d); a taxa de armadura de flexão (ρ); o comprimento (L) da face ou do raio do pilar; e a

resistência última força última (P_u). Conforme já mencionado, foram aqui consideradas apenas lajes circulares e quadradas (modelos homotéticos) e, portanto, há a inserção do fator da geometria das lajes (Geo – circular ou quadrada).

É importante evidenciar as diferenças relativas à obtenção da resistência à compressão do concreto (f_c) de acordo com as metodologias existentes. As normas americana, brasileira e europeia consideram o ensaio de resistência à compressão do concreto em corpos de prova cilíndricos, diferenciando-se na quantificação da curva de *Gauss*.

A resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}), nas normativas brasileira e europeia, é o valor que apresenta grau de confiança de 95%, ou seja, há apenas 5% de probabilidade de ocorrência de valores inferiores ao adotado. Para a norma americana, há apenas probabilidade de 1% de ocorrência de valores inferiores ao adotado (f'_c), considerando a média de três testes consecutivos. A padronização dos valores de resistência à compressão adotados neste estudo foi realizada conforme Souza e Bittencourt (2003).

A norma inglesa, por sua vez, adota a resistência do concreto à compressão por meio da compressão cúbica do concreto (f_{cu}). Para a conversão dos valores obtidos em ensaios de compressão em corpos de prova cilíndricos para corpos de prova cúbicos, utilizou-se a relação média das resistências obtidas experimentalmente fornecidas pela norma inglesa DD ENV 206:1992, apresentadas no Quadro 6.

Quadro 6: Conversão entre resistências de corpos de prova cilíndricos e cúbicos.

Resistência Cilíndrica (MPa)	Resistência Cúbica (MPa)
12	15
16	20
20	25
25	30
30	37
35	45
50	60

Fonte: DD ENV 206:1992.

Para valores intermediários, a conversão foi realizada por meio de interpolação linear. Valores além do intervalo foram obtidos por extrapolação linear. Os valores da resistência à compressão do concreto utilizados nos estudos componentes do banco de dados foram convertidos conforme as relações apresentadas.

A taxa de armadura de flexão (ρ) foi determinada pela área carregada do pilar acrescida de 3 vezes a altura útil para cada um dos lados em conformidade às recomendações da norma brasileira ABNT NBR 6118:2014.

Deste modo, respeitando as condições apresentadas, foi composto um banco de dados com 344 modelos contemplados e disponibilizados pela literatura técnica, até esse instante. No Quadro 7 são apresentadas as fontes das quais foram obtidas as variáveis de interesse (P_u , d , ρ , L , f_c) para uso no modelo de regressão [$P_u = f(\text{Geo}, d, \rho, L \text{ e } f_c)$] assim bem como do número (N°) do conjunto dessas variáveis por tipo de geometria (Geo) das lajes (circular ou quadrada).

Quadro 7: Pesquisas das quais foram obtidos os valores das variáveis P_u , d , ρ , L e f_c para os modelos de regressão.

Fontes	Geometria (Geo)	Nº
Graf (1933)	Quadrada	2
Forssell e Holmberg (1946)	Circular	7
Eltner e Hognestad (1956)	Quadrada	25
Rosenthal (1959)	Circular	3
Kinnunen e Nylander (1960)	Circular	12
Moe (1961)	Quadrada	13
Taylor e Hayes (1965)	Quadrada	8
Banco de dados fornecidos pelo ACI Comitê 445C (1966)	Quadrada	20
Corley e Hawkins (1968)	Quadrada	2
Schaeidt e Ladner (1970)	Circular	1
Hawkins, Fallsen e Hinojosa (1971)	Quadrada	1
Roll <i>et al.</i> (1971)	Quadrada	8
Ladner (1973)	Circular	1
Ladner, Schaeidt e Gut (1977)	Quadrada	4
Marti e Thürlimann (1977)	Circular	1
Pralong, Brändli e Thürlimann (1979)	Circular	1
Kinnunen, Nylander e Tolf (1980)	Circular	1
Mokhatar (1982)	Quadrada	1
Swamy e Ali (1982)	Quadrada	3
Schaefers (1984)	Circular	2
Regan (1986)	Quadrada	8
Regan (1986)	Circular	16
Rankin (1987)	Quadrada	27
Tolf (1988)	Circular	8
Gardner (1990)	Circular	6

Fontes	Geometria (Geo)	Nº
Lovrovich e Mclean (1990)	Circular	3
Marzouk e Hussein (1991)	Quadrada	17
Alexander e Simmonds (1992)	Quadrada	10
Theodorakopoulos e Swamy (1993)	Quadrada	4
Tomaszewicz (1993)	Quadrada	13
Shaaban e Gesund (1994)	Quadrada	4
Banthia <i>et al.</i> (1995)	Circular	3
Cordovil (1995)	Quadrada	1
Gardner e Shao (1996)	Quadrada	1
Hallgren (1996)	Quadrada	1
Hallgren (1996)	Circular	7
Marzouk, Emam e Hilal (1996)	Quadrada	2
Ramdane (1996)	Circular	15
Sistonen, Lydman e Houinen (1997)	Circular	10
Marzouk, Emam e Hilal (1998)	Quadrada	1
Ghannoum (1998)	Quadrada	6
Kruger (1999)	Quadrada	1
Broms (2000)	Quadrada	2
McHarg, Mitchell e Yoon (2000)	Quadrada	2
Osman, Marzouk e Helmy (2000)	Quadrada	1
Li (2000)	Quadrada	6
Oliveira, Melo e Regan (2000)	Quadrada	2
Teng <i>et al.</i> (2000)	Quadrada	1
Melges (2001)	Quadrada	1
Oliveira, Regan e Melo (2004)	Quadrada	3
Teng <i>et al.</i> (2004)	Quadrada	1
Sundquist e Kinnunen (2004)	Circular	3
Mouro, Gomes e Guimarães (2005)	Quadrada	1
Ozden e Ersoy (2006)	Quadrada	6
Damasceno (2007)	Quadrada	2
Birkle, G, and W, H, Dilger (2008)	Quadrada	3
Lee <i>et al.</i> (2008)	Quadrada	8
Guandalini, Burdet e Muttoni (2009)	Quadrada	11
Cheng e Parra-Montesinos (2010)	Quadrada	2
Fernández Ruiz, Muttoni e Kunz (2010)	Quadrada	1
Nguyen-Minh, Rovňák e Tran-Quoc (2012)	Quadrada	3

Fontes	Geometria (Geo)	Nº
Peiris e Ghali (2012)	Quadrada	1
Teng <i>et al.</i> (2018)	Quadrada	4

Fonte: A Autora (2021).

Do Quadro 7, cabe destacar que das 63 fontes elencadas, o que totalizou 344 conjuntos de valores das variáveis de interesse (P_u , d , ρ , L , f_c), 100 (29,07%) referem-se ao conjunto de resultados relacionados as lajes de geometria circular e 244 (70,93%) relacionados com as lajes de geometria quadrada.

3.2 ANÁLISE ESTATÍSTICA

Definido o banco de dados, foram avaliadas as relações entre força última à punção obtida experimentalmente e força última à punção estimada por cada modelo de previsão (P_u/P_{est}) quanto à cada variável componente do banco de dados - Geo, d , ρ , L e f_c .

A dispersão dos valores estimados pelos modelos foi determinada pelo coeficiente de variação (CV) do modelo (Equação 116). Para análise da precisão dos modelos, o erro foi avaliado por meio do erro percentual absoluto médio (MAPE), conforme a Equação 117. O MAPE expressa a acurácia do modelo em porcentagem, e é frequentemente utilizado conforme apresenta Vu, Muttaqi e Agalgaonkar (2015), Chetchotisak, Teerawong e Yindeesuk (2015), Hoang (2019), Omcirk *et al.* (2021). Quanto mais próximo o erro percentual absoluto médio de 0%, menor o erro.

$$CV(\%) = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_{predict_i} - Y_{data_i})^2}{n}}}{Y_{data}} \cdot 100 \quad (116)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left| \frac{Y_{predict_i} - Y_{data_i}}{Y_{data_i}} \right| \cdot 100 \quad (117)$$

Em que:

$Y_{predict_i}$ é o valor estimado da variável dependente;

Y_{data_i} é o valor conhecido da variável dependente;

Y_{data} é a média dos valores conhecidos da variável dependente para os n dados.

Após a análise dos modelos de previsão apresentados pela literatura, as variáveis componentes do banco de dados foram avaliadas quanto à influência e significância na

resistência à punção na ligação laje-pilar através da correlação de Pearson, fundamentada pela análise de variância (ANOVA) ao nível de 5% de significância com o auxílio do *software* Minitab® versão 18.

O coeficiente de correlação de Pearson (r) é uma medida de associação linear entre variáveis empregada para avaliar a existência (ou não) de uma relação entre X e Y , que varia de -1 a 1. O sinal - positivo ou negativo - indica a direção do relacionamento entre variáveis, e o valor sugere a força da relação entre as variáveis em análise. Assim sendo, uma correlação equivalente a zero indica que não há relação linear entre as variáveis. Quanto mais próximo aos extremos (-1 ou 1), maior é a dependência estatística linear entre as variáveis, e quanto mais próximo de zero, menor é esta relação (FIGUEIREDO FILHO e SILVA JÚNIOR, 2009; OLIVEIRA *et al.*, 2020).

A análise de variância (ANOVA), ao nível de 5% de significância, foi utilizada para avaliar a significância das correlações encontradas. O nível de significância em 5% denota que o risco de se concluir que há uma diferença quando na realidade não existe diferença real, é de 0,05 (5%). Pela formulação da ANOVA, P-valor inferior ao nível de significância implica em se considerar significativa a correlação avaliada (p -valor $< 0,05$; hipótese alternativa – H_0), e não significativa em caso contrário (hipótese nula – H_0).

Após o entendimento da significância dos parâmetros avaliados, de modo compreender melhor a influência de cada variável independente na força última à punção, realizou-se uma análise por categorias. Para tanto, as variáveis apontadas com significância foram categorizadas em intervalos, e avaliadas quanto à força última à punção através do teste de comparações múltiplas de Tukey (ANOVA) ao nível de 5% de significância.

Este teste de comparação múltipla consiste na equivalência das médias dos valores de força última à punção como hipótese nula (H_0), e na não equivalência de pelo menos duas das médias como hipótese alternativa (H_1). Através da formulação da ANOVA, avaliada com o auxílio do *software* Minitab®, versão 18, P-valor inferior ao nível de significância ($\alpha = 0,05$) implica em refutar H_0 (pelo menos uma das médias se difere das demais), aceitando-a em caso contrário (P -valor $> 0,05$ = as médias dos tratamentos são estatisticamente equivalentes).

O teste de Tukey é o mais adequado para análise de categorias de uma variável quanto à um fator – neste caso, P_u . Do teste de Tukey, **A** denota o intervalo da variável em análise com maior valor médio de P_u , e **B**, **C**, **D**, **E** e **F** os intervalos associados ao segundo, terceiro, quarto, quinto e sexto maior valor médio, respectivamente. Letras iguais implicam intervalos com médias estatisticamente equivalentes. O teste de Tukey é uma ferramenta renomada na estatística e é amplamente utilizado em pesquisas (DIAS *et al.*, 2020; OLIVEIRA *et al.*, 2018).

Entendida a correlação (ou não) entre cada variável componentes do banco de dados, bem como a influência destas frente à força última resistente à punção, desenvolveu-se um modelo de regressão linear com superfície linear fundamentado pela análise de variância (ANOVA) ao nível de 5%, composto apenas por termos independentes, que visa o entendimento do comportamento do modelo à punção frente às variáveis independentes.

A ANOVA possibilita avaliar a significância do modelo assim como a significância e a ordem de significância dos seus coeficientes, configurando-se como uma análise de sensibilidade. A representação da significância e da ordem de significância dos termos do modelo foi feita com o uso do gráfico de Pareto.

Após a análise de cada variável e do modelo de superfície linear, no intuito de obter uma melhor aproximação na estimativa da força última à punção P_u conforme o objetivo proposto neste estudo, desenvolveu-se um modelo de regressão de superfície não-linear que considera quadrados e produtos fundamentado pela análise de variância (ANOVA) ao nível de 5% de significância com o auxílio do *software* Minitab® versão 18, para estimativa da força última (P_u) dependente da geometria das lajes (Geo – circular ou quadrada) e dos demais parâmetros definidos em 3.1.

Pela ANOVA, probabilidade p (p-valor) maior ou igual ao nível de significância implica que o modelo e/ou os seus termos são considerados não significativos (hipótese nula – H_0), e significativos em caso contrário (p-valor < 0,05; hipótese alternativa – H_0). A representação da significância e da ordem de significância dos termos do modelo foi feita com o uso do gráfico de Pareto.

Para validação da ANOVA, o teste de normalidade de Anderson-Darling, também ao nível de 5% de significância, foi utilizado para avaliar a normalidade na distribuição dos resíduos da ANOVA. Pela formulação desse teste, p-valor maior ou igual ao nível de significância implica na normalidade da distribuição dos resíduos (H_0), e na não normalidade em caso contrário (H_1). A homogeneidade das variâncias dos resíduos foi avaliada pelo gráfico de resíduos versus valores ajustados (distribuição dos resíduos equidistantes do 0 indicam atendimento da homogeneidade das variâncias), e a independência dos resíduos foi avaliada pelo gráfico de resíduos versus ordem (inexistência de padrão da distribuição dos resíduos da ANOVA indica independência dos resíduos).

Constatada a não significância de alguns dos termos no modelo, um novo foi proposto, composto por apenas termos considerados significativos. Cabe destacar que a geração do modelo para a estimativa da força última (P_u) foi feita com base em 344 combinações de valores

das variáveis independentes que compõem o banco de dados gerado. Das 344 combinações, 244 são referentes às lajes de geometria quadrada e 100 referentes às lajes de geometria circular.

Para validação do modelo proposto, foi composto um novo banco de dado com 45 modelos contemplados e disponibilizados pela literatura técnica, até esse instante. Foram considerados os modelos apresentados por Mokhtar, Ghali e Dilger (1985), Yamada, Nanni e Endo (1992), Coelho (1999), Andrade (2000), Carvalho (2000), Oliveira (2003), Silva (2003), Martinelli e Campos Filho (2003), Holanda e Hanai (2003), Souza (2004), Lima Neto (2004), Santos (2005), Carvalho (2006), Trautwein (2006), Moraes Neto (2007), Ramos, Lúcio e Regan (2011), Caldentey *et al.* (2013), Moraes Neto, Oliveira e Macêdo (2016), Marques (2018), Palhares (2018) e Liberatti (2019).

A força última à punção estimada pelo modelo proposto, bem como pelos modelos de Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985), Teng *et al.* (2018), ABNT NBR 6118:2014, EC2:2004 e ACI 318:2019, foi comparada frente à força última à punção obtida experimentalmente. A dispersão dos valores estimados pelos modelos foi determinada pelo coeficiente de variação (CV) de cada modelo. A análise da precisão dos modelos foi realizada através erro percentual absoluto médio (MAPE).

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos pelo presente estudo.

4.1 ANÁLISE DO BANCO DE DADOS

Inicialmente, tem-se a análise das variáveis componentes do banco de dados composto, cujas fontes foram apresentadas no Quadro 7. Assim sendo, a síntese das 344 combinações (244 referentes a lajes quadradas e 100 a lajes de geometria circular) de valores das variáveis independentes (f_c , d , ρ , L) e, também da variável P_u considerada como variável dependente nos modelos, é apresentada na Tabela 4.

Destaca-se que o uso dos modelos gerados para a estimativa dos valores da força última deve respeitar os limites (inferior e superior) encontrados, determinados com base na revisão da literatura correlata, para as variáveis dependentes.

Tabela 4: Síntese dos resultados da literatura referente às lajes de geometria quadrada e circular.

Variáveis	Laje de Geometria Quadrada [0]				
	\bar{x}	Min	Max	IC (95%)	CV (%)
L (mm)	190,04	51	520	(177,03; 203,05)	37,12
d (mm)	115,12	35	500	(106,66; 123,58)	57,08
f_c (MPa)	40,11	12,3	119	(37,37; 42,84)	53,09
ρ (%)	1,31	0,22	3,70	(1,21; 1,41)	56,50
P_u (kN)	408,01	28,9	2682,1	(349,21; 466,83)	106,13
Variáveis	Laje de Geometria Circular [1]				
	\bar{x}	Min	Max	IC (95%)	CV (%)
L (mm)	216,62	54	901	(196,3; 236,9)	72,50
d (mm)	126,24	33	669	(113,02; 139,46)	56
f_c (MPa)	36,15	9,5	108,8	(31,87; 40,42)	63,09
ρ (%)	1,08	0,33	7,31	(0,93; 1,24)	80,29
P_u (kN)	421,61	33	2615	(329,85; 513,42)	128,347

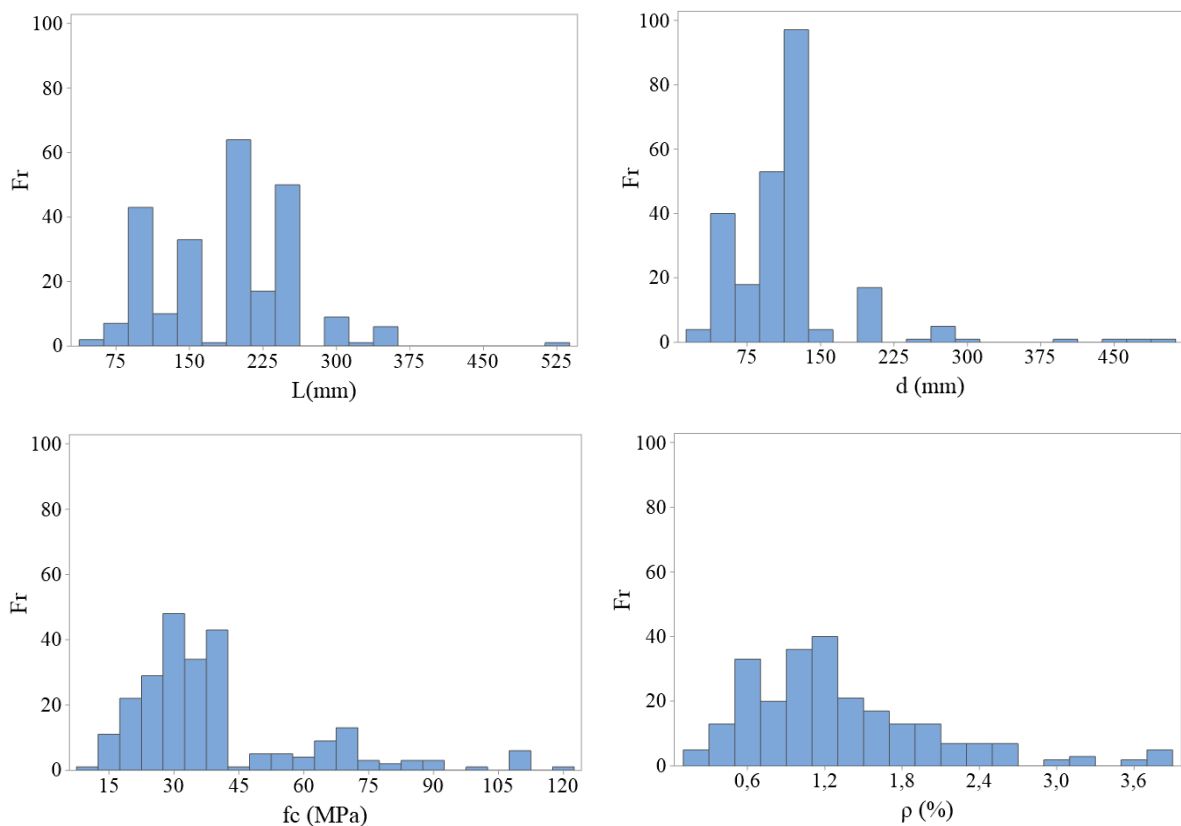
Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 4, \bar{x} denota o valor médio, Min e Máx correspondem ao menor e ao maior valor da propriedade, respectivamente, e IC consiste no intervalo de confiança da média (95%

de confiabilidade). Portanto, ainda que haja restrição quanto a análise de modelos homotéticos quadrados e circulares, há elevada variação entre propriedades adotadas experimentalmente. Evidencia-se assim a impossibilidade de realização de uma análise comparativa entre resultados apresentados pela literatura.

Neste contexto, a Figura 29 ilustra os histogramas de frequência das variáveis L , d , f_c e ρ para as lajes de geometria quadrada, sendo F_r a frequência de distribuição.

Figura 29: Histogramas de frequência das variáveis L , d , f_c e ρ para as lajes de geometria quadrada.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 29, tem-se: para os 244 resultados analisados, a dimensão L do pilar mais empregada é da ordem de 200 mm, e poucos estudos apresentam valores de L superiores à 375 mm. Ainda, observa-se que os valores de altura útil (d) mais utilizados nos modelos experimentais são inferiores a 150 mm, e a frequência de distribuição é significativamente baixa para maiores valores superiores.

A baixa distribuição quanto a lajes mais espessas chama atenção pelas constatações de Guandalini e Muttoni (2004), Birkle e Dilger (2008) e Bocklenberg e Mark (2020), em que se observou uma redução na resistência à punção em função do aumento da altura útil da laje. Outro fator a se considerar é que conforme Bocklenberg e Mark (2020) a diferença entre os

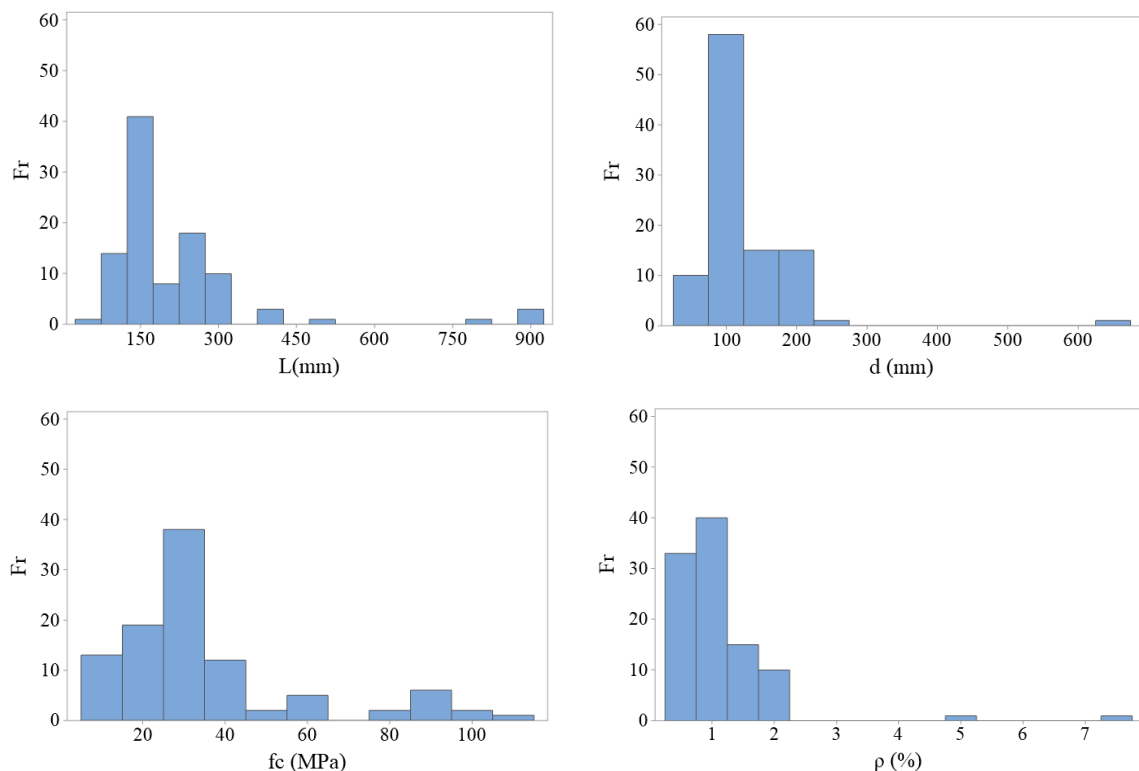
valores de previsão teórica e os resultados experimentais aumentaram conforme o acréscimo da espessura da laje, sugerindo que o efeito de escala era superestimado pelos modelos teóricos para o caso de lajes mais espessas.

Considerando a resistência à compressão, tem-se maior aplicação de concretos convencionais, na ordem de até 40 MPa. Poucos foram os modelos com concreto de alto desempenho, justificados elevado número de estudos mais antigos, realizados até o ano de 2000. É importante ressaltar que os valores da resistência à compressão do concreto utilizados nos estudos componentes do banco de dados foram convertidos conforme as relações apresentadas no Item 3.1.

Por fim, quanto à taxa de armadura de flexão, tem-se maior frequência de distribuição para ordem de 1,2%. Poucos estudos apresentam valores de ρ superiores a 3%. Neste contexto, ressalta-se que a maioria dos estudos experimentais avaliados não apresentaram os dados empregados para determinação da taxa de armadura de flexão, exibindo somente os valores de ρ_x e ρ_y e, em alguns casos, apenas ρ final.

De modo análogo à Figura 29, a Figura 30 ilustra os histogramas de frequência das variáveis L , d , f_c e ρ para as lajes de geometria circular, sendo F_r a frequência de distribuição.

Figura 30: Histogramas de frequência das variáveis L , d , f_c e ρ para as lajes de geometria circular.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 30, tem-se: para os 100 resultados analisados, o diâmetro L do pilar mais empregado era de 150 mm. Há pouco resultados experimentais para pilares com diâmetros superiores a 400 mm. Em relação à altura útil d , observou-se, de modo similar aos modelos de geometria quadrada, que a frequência de distribuição era significativamente baixa para lajes mais espessas. O valor mais utilizado era de 100 mm, seguido pelo valor de 200 mm.

Novamente, para resistência à compressão do concreto, teve-se maior frequência para concretos convencionais, na ordem de até 40 MPa. Quanto à taxa de armadura de flexão, teve-se maior frequência de distribuição para ordem de 1,0%. Poucos estudos apresentaram valores de ρ superiores a 2%.

Portanto, considerando agora todos os 344 resultados, ainda que haja grande variação nos parâmetros empregados, observa-se a seguinte tendência média: modelos com dimensões reduzidas, com área da seção transversal dos pilares de até 400 cm² e altura útil da laje de até 20 cm; uso de concretos com resistência à compressão de até 40 MPa e pequenas taxas de armadura de flexão ρ , com valor máximo de 3%.

4.2 COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS DE PREVISÃO

Após a obtenção e análise do banco de dados, os modelos de previsão da força última à punção em lajes sem armadura de cisalhamento apresentados no Item 2.3 foram avaliados frente aos resultados experimentais.

Como o banco de dados contempla as variáveis L , d , f_c e ρ , somente os modelos apresentados por Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018) foram avaliados. Tal fato evidencia a dificuldade de aplicação das demais metodologias devido ao número de variáveis envolvidas, bem como a escassez de estudos experimentais detalhados apresentados pela literatura.

Outro fator relevante é o de que os modelos de Yitzhaki (1966) e Long (1975) contemplam apenas pilares quadrados e/ou retangulares. Ainda, Long (1975) apresenta a variável L (vão entre painéis de laje), que não é apresentada em alguns dos ensaios de Cordovil (1995), Kruger (1999), Teng *et al.* (2000), Melges (2001), Mouro *et al.* (2005), Damasceno (2007), Fernández Ruiz, Muttoni e Kunz (2010) e Teng *et al.* (2018). Deste modo, as análises dos modelos foram aplicadas a 236 resultados componentes do banco de dados.

A Tabela 5 apresenta a média, valores mínimos e máximos e o intervalo de confiança de cada variável dos 236 dados selecionados para aplicação nos modelos de previsão.

Tabela 5: Síntese dos resultados aplicados aos modelos de previsão.

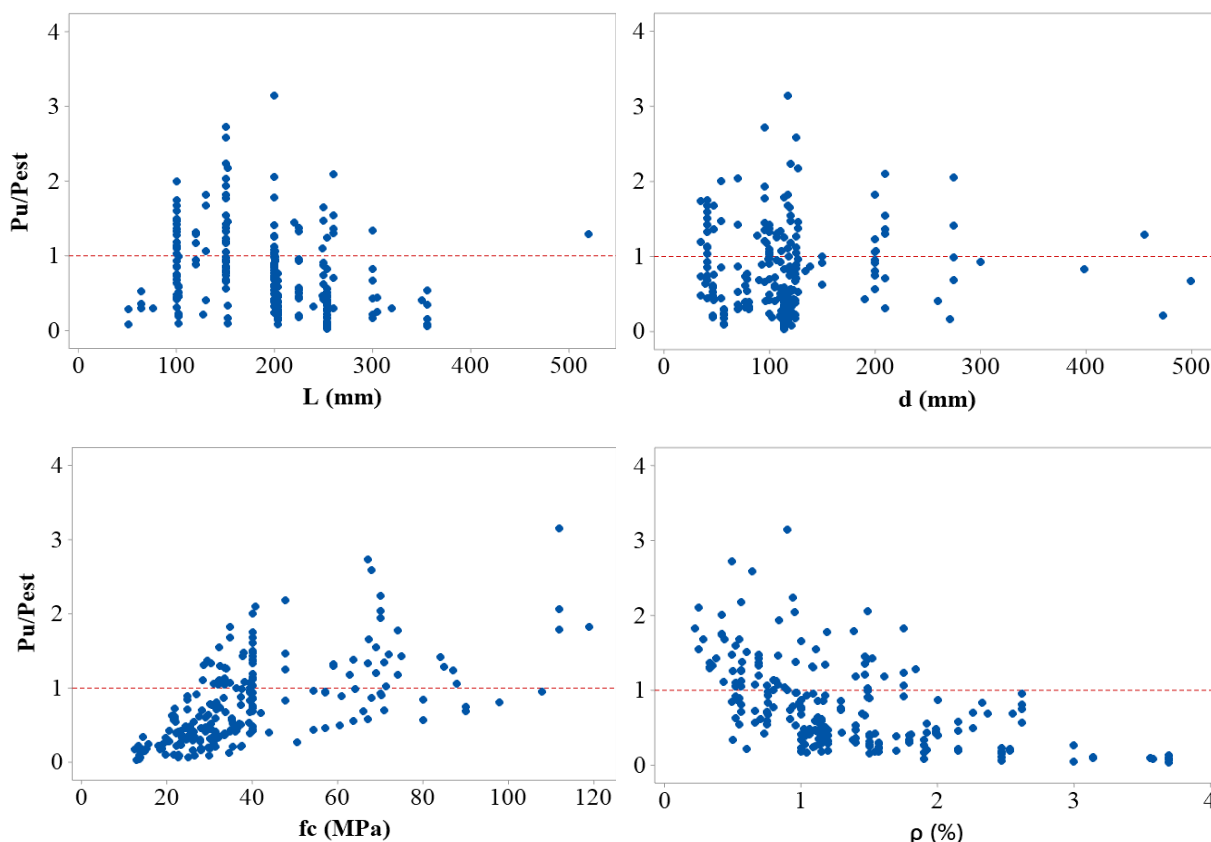
Variáveis	Laje de Geometria Quadrada				
	\bar{x}	Min	Max	IC (95%)	CV (%)
L (mm)	190,292	51,00	520,0	(181,29; 199,29)	36,89
d (mm)	114,903	35,00	500,0	(106,38; 123,43)	57,84
f _c (MPa)	40,298	12,30	119,0	(37,53; 43,07)	53,61
ρ (%)	1,315	0,22	3,7	(1,2184; 1,4108)	57,06
P _u (kN)	407,782	28,90	2682,1	(351,6; 464,0)	107,46

Fonte: A Autora (2021).

Inicialmente, as análises foram realizadas considerando a relação entre força última obtida experimentalmente (P_u) e força última estimada (P_{est}) por cada um dos modelos. Para efeitos de segurança, esta relação deve ser próxima ou superior a um. Valores inferiores a um indicam superestimação da força última, contra aos critérios de segurança. Tais valores foram relacionados graficamente às variáveis.

A Figura 31 apresenta a relação entre força última obtida experimentalmente (P_u) e força última estimada (P_{est}) pelo modelo de Yitzhaki (1966) frente as variáveis L, d, f_c e ρ componentes do banco de dados.

Figura 31: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – Modelo de Yitzhaki (1966).



Fonte: A Autora (2021).

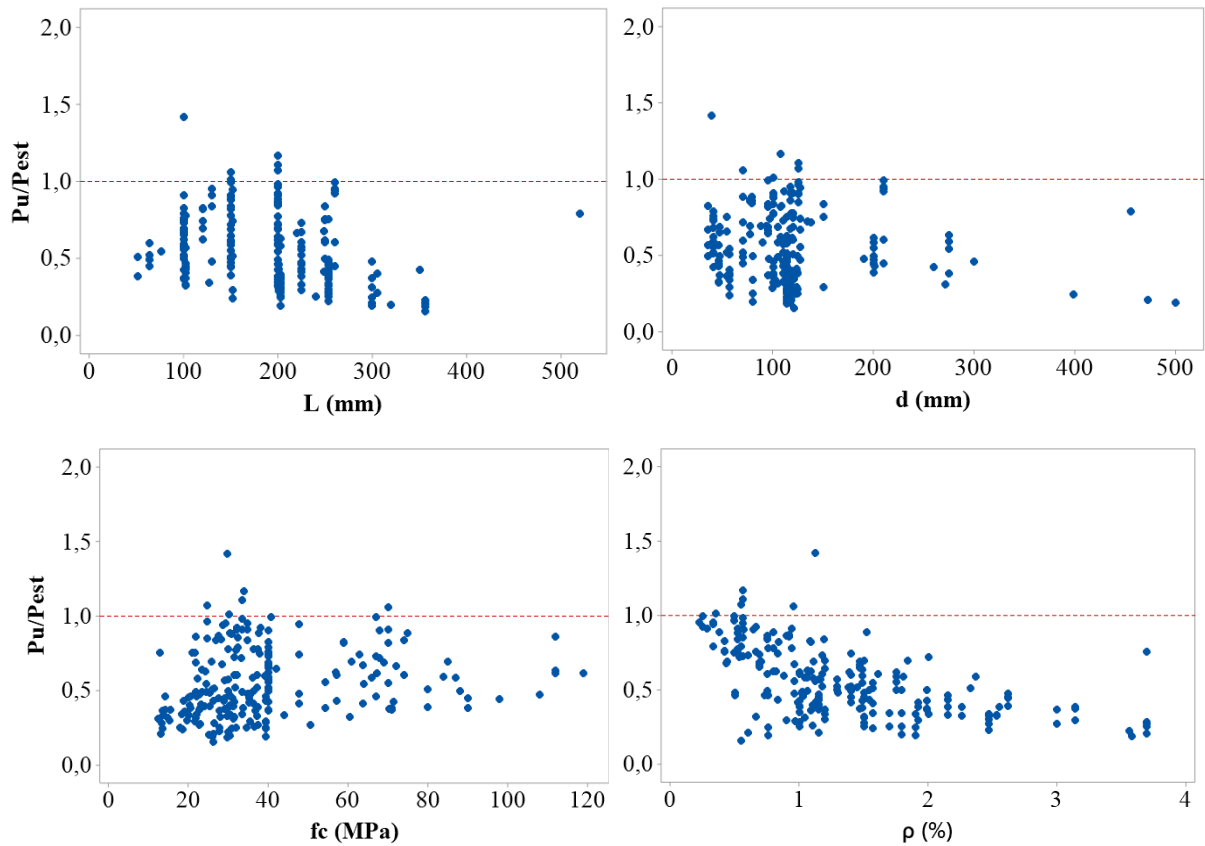
Ressalta-se que a Equação 16, proposta por Yitzhaki (1966) tem como unidades libra e polegada e, para esta análise, todas as variáveis foram convertidas nas respectivas unidades do equacionamento e apenas o resultado foi convertido em kN.

Da Figura 31, tem-se uma grande dispersão dos resultados, com a relação P_u/P_{est} variando entre 0,1 e 3,20, aproximadamente. Pelo modelo proposto, 167 dos 236 resultados estimados apresentaram valores superiores aos obtidos experimentalmente, contrário aos critérios de segurança. Para maiores valores de f_c , acima de 100 MPa, o modelo se adequa a favor da segurança com valores de P_u/P_{est} próximos ou superiores a um.

Observa-se ainda que Yitzhaki (1966) superestima os resultados para taxas de armadura de flexão da ordem de 0,70%. Para taxas acima de 1,50%, o modelo se apresenta contra a segurança. Os resultados obtidos pelo modelo estão de acordo com a hipótese proposta por Richart (1948) de que o aumento da taxa de armadura de flexão provoca o aumento da tensão limite resistente à punção.

De modo análogo, a Figura 32 apresenta a relação P_u/P_{est} pelo modelo de Long (1975) frente as variáveis L , d , f_c e ρ componentes do banco de dados.

Figura 32: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – Modelo de Long (1975).

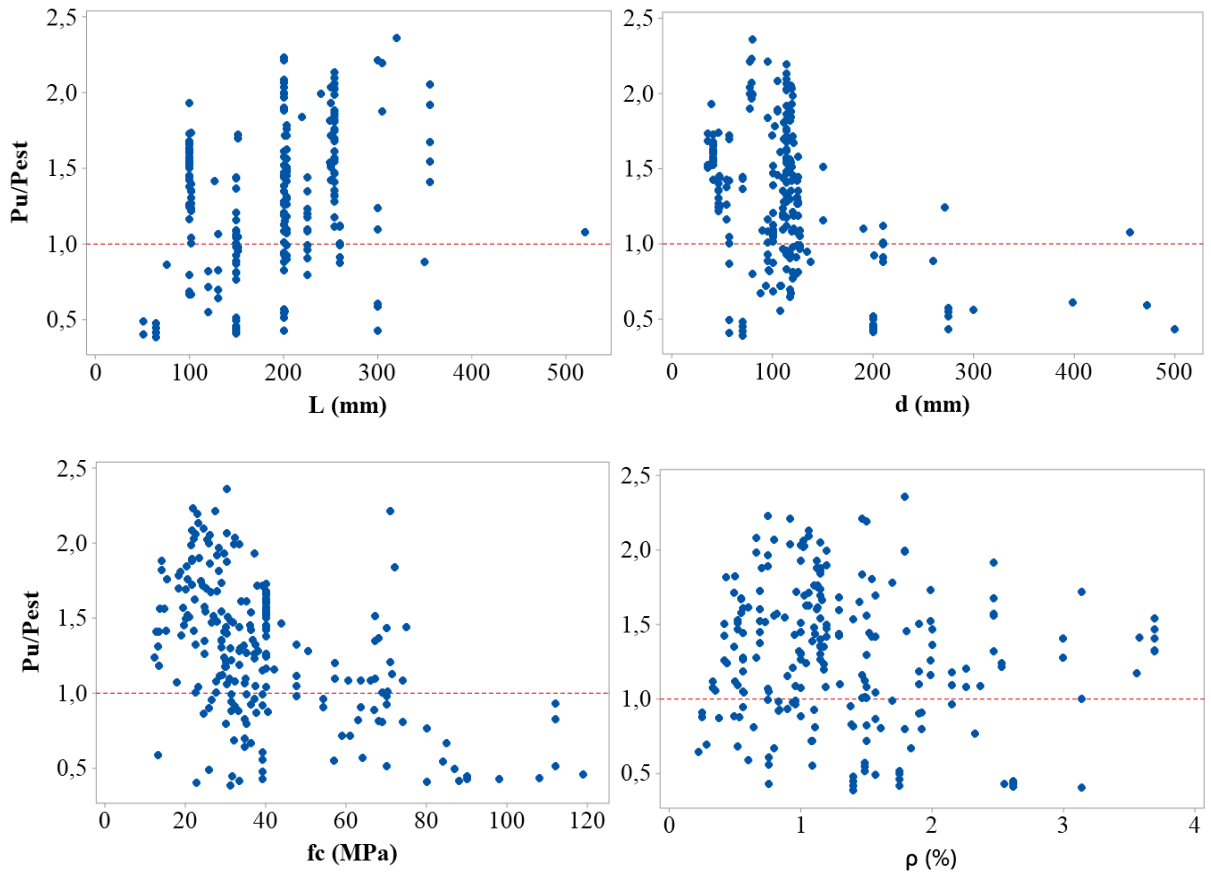


Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 32, nota-se que o modelo apresentado é majoritariamente contra aos critérios de segurança, com valores de P_u/P_{est} inferiores a um. Dos 236 resultados estimados, 228 apresentaram valores superiores aos obtidos experimentalmente. De modo análogo à Yitzhaki (1966), observa-se uma tendência de superestimação da força P_u para aumentos de ρ . Portanto, o modelo não é satisfatório para estimativa da força última à punção.

A Figura 33 apresenta a relação P_u/P_{est} pelo modelo de Shehata (1985) frente as variáveis L , d , f_c e ρ componentes do banco de dados.

Figura 33: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – Modelo de Shehata (1985).

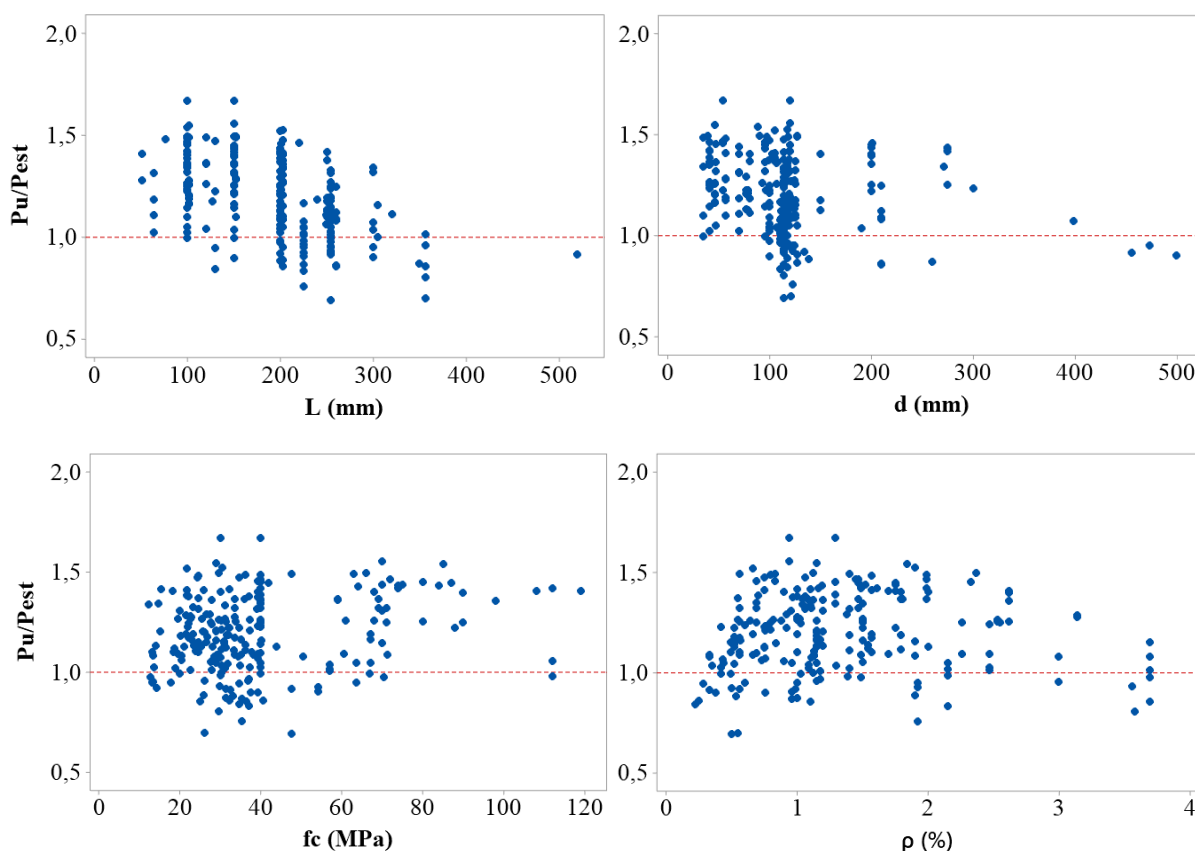


Fonte: A Autora (2021).

De acordo com a Figura 33, percebe-se uma grande dispersão dos resultados, com a relação P_u/P_{est} variando entre 0,1 e 2,40, aproximadamente. Pelo modelo proposto, 63 dos 236 resultados estimados apresentaram valores superiores aos obtidos experimentalmente, contrário aos critérios de segurança. Ainda, 105 das relações P_u/P_{est} apresentaram valores superiores a 1.40, o que evidencia o conservadorismo do modelo. Ainda, nota-se que há uma tendência contra a segurança valores de f_c superiores a 80 MPa.

A Figura 34 apresenta a relação P_u/P_{est} pelo modelo de Teng *et al.* (2018) frente as variáveis L , d , f_c e ρ componentes do banco de dados.

Figura 34: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – Modelo de Teng *et al.* (2018).



Fonte: A Autora (2021).

Dos modelos apresentados, Teng *et al.* (2018) é o que apresenta a maior aproximação, com a relação P_u/P_{est} variando entre 0,7 e 1,70, aproximadamente, com média de 1,20. Pelo modelo proposto, 40 dos 236 resultados estimados apresentaram valores superiores aos obtidos experimentalmente, contrário aos critérios de segurança. Ainda, 45 das relações P_u/P_{est} apresentaram valores superiores a 1.40.

De acordo com Sacramento *et al.* (2012), a precisão dos resultados obtidos pode ser avaliada, de modo sucinto, de acordo com a média (\bar{x}) obtida da relação P_u/P_{est} . Para valores entre $1,0 < \bar{x} < 1,10$ o método apresenta nível de precisão elevado; para valores entre $1,10 < \bar{x} < 1,30$ o método apresenta nível de precisão satisfatório; e para valores $\bar{x} > 1,30$ o método é conservador. Portanto, o nível de precisão do modelo é satisfatório.

Ainda, os resultados obtidos pelo modelo de Teng *et al.* (2018) apresentam uma pequena tendência à insegurança para maiores valores de L , fator que deve ser investigado para um maior número de dados.

Diante dos resultados obtidos, a Tabela 6 apresenta os valores máximo e mínimo, bem como a média da relação obtida para os modelos de previsão apresentados. Ainda, são apresentados o coeficiente de variação e o MAPE, em porcentagem, para cada modelo de previsão.

Tabela 6: Valores máximos, mínimos e médios de P_{exp}/P_{est} , CV (%) e MAPE (%) dos modelos.

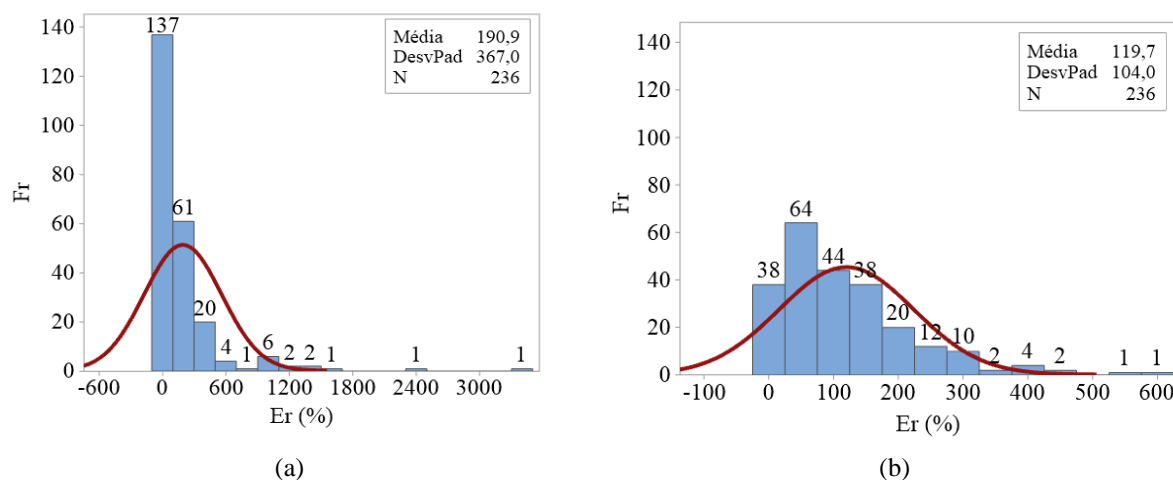
	Yitzhaki (1966)	Long (1975)	Shehata (1985)	Teng <i>et al.</i> (2018)
Máx - Mín	8.68 – 0.02	8.28 – 0.01	3.21 – 0.25	2.11 – 0.69
Méd.	0.84	0.57	1.28	1.29
CV (%)	398.07	295.54	127.88	31.96
MAPE (%)	190.87	119.74	36.43	17.84

Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 6, observa-se que ao longo dos anos – e avanço nos estudos relacionados à punção – há uma grande diminuição no coeficiente de variação e no MAPE dos modelos propostos. Os elevados valores de CV para os modelos propostos por Yitzhaki (1966), Long (1975) e Shehata (1985) confirmam a dispersão apresentada nos gráficos anteriores.

Os elevados valores de MAPE para os modelos de Yitzhaki (1966) e Long (1975) atestam a grande diferença entre resultados estimados e resultados experimentais. A Figura 35 apresenta o histograma de frequência do erro dos modelos. Considerando os modelos propostos por Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018), tem-se que, em média, a previsão é incorreta em 36,43% e 17,84% dos casos, respectivamente.

Figura 35: Histograma de frequência do erro: (a) Yitzhaki (1966) e (b) Long (1975).



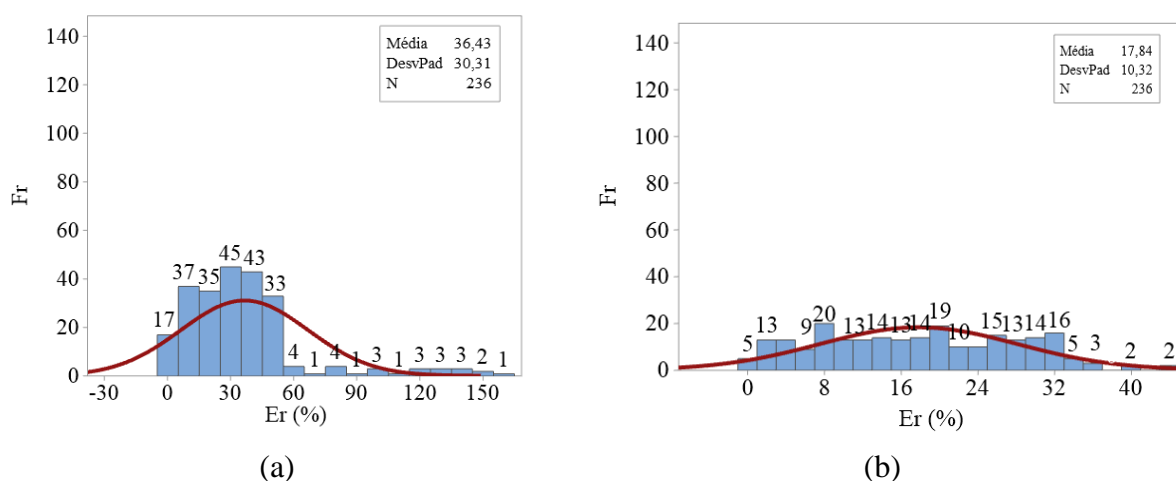
Fonte: A Autora (2021).

A Figura 35 (a) evidencia a distinção entre os valores estimados pelo modelo de Yitzhaki (1966) e os valores obtidos experimentalmente. Nota-se que erros em torno de 100% se repetem em 137 dos 236 experimentos avaliados. Ainda, nota-se que há ocorrência de erros superiores a 2000%. O modelo, portanto, não promove uma boa estimativa na resistência à punção.

Da Figura 35 (b), percebe-se que as estimativas obtidas através do modelo de Long (1975) também não se aproximam das respostas experimentais. Os resultados exibem que erros em torno de 75% se repetem em 64 dos 236 experimentos avaliados. Ainda, há ocorrência de erros superiores a 500%. Portanto, ambos modelos não apresentam uma boa estimativa da força última resistente à punção.

De modo análogo, a Figura 36 apresenta o histograma de frequência do erro dos modelos propostos por Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018).

Figura 36: Histograma de frequência do erro: (a) Shehata (1985) e (b) Teng *et al.* (2018).



Fonte: A Autora (2021).

A Figura 36 (a) confirma que os resultados estimados pelo modelo proposto por Shehata (1985) se aproximam um pouco mais aos experimentais se comparados aos modelos propostos por Yitzhaki (1966) e Long (1975). Erros em torno de 35% se repetem em 45 dos 236 experimentos avaliados. Ainda, erros superiores a 100% se repetem em 16 dos 236 ensaios analisados.

A Figura 36 (b) evidencia, frente aos demais, a melhor precisão do modelo de Teng *et al.* (2018). A maior frequência erros se dá em 9%, que se repetem em 20 dos 236 experimentos avaliados. Erros iguais ou superiores a 35% foram obtidos somente em 12 casos. Assim sendo, dos modelos apresentados, tem-se a proposta de Teng *et al.* (2018) como a de maior precisão frente à resultados experimentais.

4.3 COMPARAÇÃO ENTRE RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

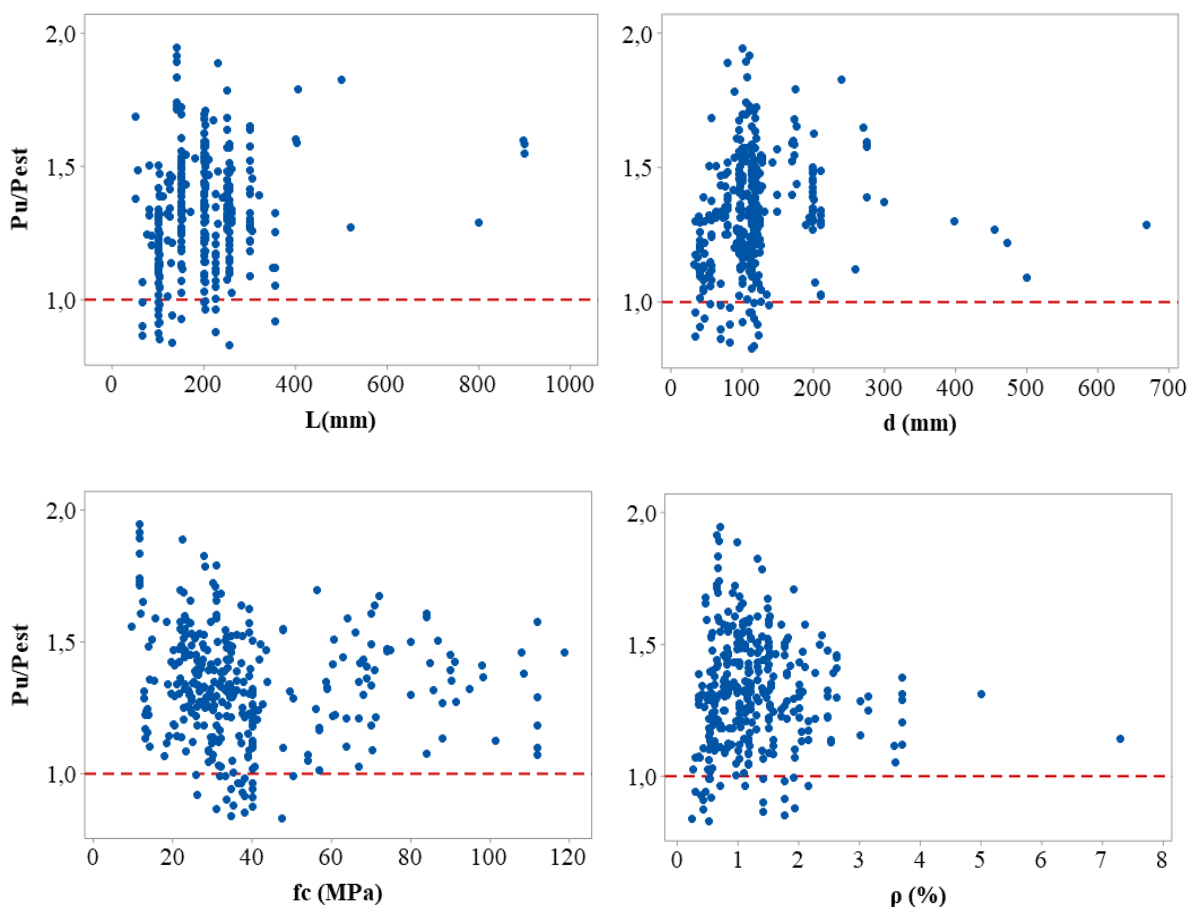
Análogo ao procedimento apresentado em 4.2, os modelos de previsão da força última à punção em lajes sem armadura de cisalhamento apresentados pelas normativas discutidas em 2.4 foram avaliados frente aos resultados experimentais. Como o banco de dados contempla as variáveis L , d , f_c e ρ , somente os modelos apresentados pelas normativas ABNT NBR 6118:2014, ACI 318:2019 e EC2:2004 foram avaliados.

A metodologia apresentada pelo *fib* MODEL CODE (2010) se fundamenta na Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC) e sua aplicação envolve um maior número de variáveis – não componentes do banco de dados.

As análises aqui apresentadas contemplam todas as informações componentes do banco de dados – 344 modelos experimentais – cujas médias, valores mínimos e máximos e intervalo de confiança de cada variável foram apresentadas no Item 4.1.

Avaliando-se inicialmente a normativa ABNT NBR 6118:2014, a Figura 37 apresenta a relação entre força última obtida experimentalmente (P_u) e força última estimada (P_{est}) pelo equacionamento proposto em 2.4.1 frente as variáveis L , d , f_c e ρ componentes do banco de dados.

Figura 37: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – ABNT NBR 6118:2014.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 37, verifica-se que para efeitos de segurança, a relação P_u/P_{est} deve ser próxima ou superior a um (1). Valores inferiores a um (1) indicam superestimação da força última, contra aos critérios de segurança. Observa-se que para L , considerando ambas as geometrias – pilares circulares e quadrados – os valores obtidos contra à segurança estão entre 50mm e 380mm.

Quanto à altura útil da laje, tem-se que para até 150mm, a normativa pode apresentar resultados inseguros – o que pode ser preocupante, uma vez que, conforme apresentado no Item 4.1, as alturas úteis mais empregadas em modelos experimentais são de até 150mm. Para valores superiores a 150mm, os resultados são satisfatórios e, por algumas vezes, conservadores. Avaliando-se à resistência à compressão do concreto, percebe-se que os resultados contra a segurança se mantêm para valores de f_c da ordem de 40 MPa – também apresentados como mais recorrentes no Item 4.1. Em relação à taxa de armadura de flexão, observa-se para taxas superiores à 2,20%, os resultados são satisfatórios e, por algumas vezes, conservadores.

É importante ressaltar que das 344 relações P_u/P_{est} obtidas, 22 são inferiores a um e, portanto, o intervalo de confiança de 95% não é atendido. Conforme apresentado em 2.4.1, para lajes sem armadura de cisalhamento e não protendidas, as verificações à punção devem ser realizadas no entorno do pilar e na superfície de controle C', cujo equacionamento resumido é apresentado na Tabela 7.

Tabela 7: Equações apresentadas pela ABNT NBR 6118:2014.

Contorno do pilar	Primeiro perímetro de controle
$V_{Rd} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \cdot u_0 \cdot d$ $\alpha_v = 1 - f_{ck}/250$	$V_{Rd} = [0,13 \cdot (1 + \sqrt{20/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3}] u_1 \cdot d$

Fonte: A Autora (2021).

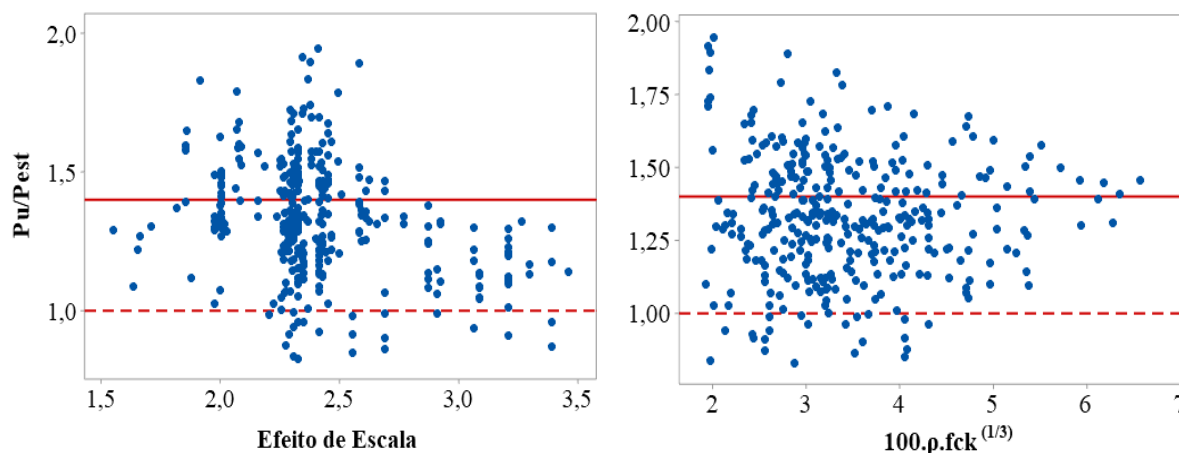
Das Equações apresentadas, observa-se que para o contorno do pilar, utiliza-se a resistência à compressão do concreto minorada pelo coeficiente de minoração das resistências γ_c ($f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$) – equivalente a 1,40. Para o primeiro perímetro de controle, a resistência à compressão do concreto é empregada com seu valor característico (f_{ck}).

Tal observação é importante pois, considerando a Equação de projeto para verificação da resistência no perímetro de entorno do pilar, 25 dos 344 valores estimados apresentaram a força última no entorno do pilar. Utilizando a Equação com valor característico, somente 3 apresentaram força última no entorno do pilar.

Em ambas as situações, tem-se que a força última resistente à punção (P_u) é obtida majoritariamente para o primeiro perímetro de controle. Observa-se que a Equação do contorno C' considera o efeito de escala – por meio de uma relação com a altura útil d –, a taxa de armadura de flexão e a resistência à compressão do concreto em seu valor nominal. Ainda, há um valor de ajuste da Equação equivalente a 0,13 que, conforme apresenta Rabello (2016), é um fator de segurança ainda superior a 1,40 aplicado à resistência à compressão do concreto. Nota-se ainda, que a dimensão do pilar não tem influência direta no valor de P_u obtido através do equacionamento (apenas para determinação do perímetro de controle).

Assim sendo, a relação P_u/P_{est} foi investigada em relação ao efeito de escala considerado pela equação, e pela raiz cúbica do produto entre a taxa de armadura de flexão e a resistência à compressão nominal do concreto, conforme apresenta a Figura 38.

Figura 38: Relação P_u/P_{est} em relação ao efeito de escala e taxa de armadura de flexão e a resistência à compressão nominal do concreto (ABNT NBR 6118:2014).



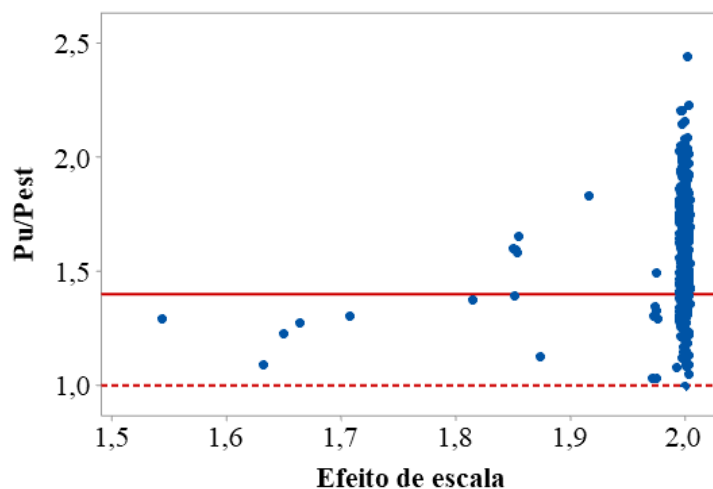
Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 38, a linha contínua se refere ao limite quando da aplicação de um fator de segurança equivalente a 1,40 – evidenciado por Rabelo (2016). A linha tracejada se refere ao limite sem o fator de segurança.

Considerando-se o limite com a aplicação do fator de segurança, tem-se que 223 das 344 relações de P_u/P_{est} obtidas, ou seja 64,80% dos resultados, apontam insegurança por parte da recomendação normativa. Observa-se que há uma tendência à insegurança para maiores para valores de efeito de escala. Acima de 2,70, nenhuma estimativa é satisfatória. A relação que considera o produto entre taxa de armadura de flexão e resistência à compressão nominal do concreto apresentou resultados dispersos, com uma leve tendência à aproximação dos resultados experimentais para resultados em torno de seis.

Considerando-se o limite nominal – sem coeficiente de segurança – observa-se que os resultados contra à segurança foram obtidos para efeitos de escala superiores a 2,0. Ressalta-se aqui que o EC2:2004 considera o mesmo equacionamento na consideração do efeito de escala, com o valor máximo limitado a 2,0. Assim sendo, os valores da força última P_u foram recalculados, limitando-se a relação $1 + \sqrt{20/d}$ a no máximo 2,0. Os resultados são apresentados na Figura 39.

Figura 39: Relação P_u/P_{est} em relação ao efeito de escala limitado a 2,0.

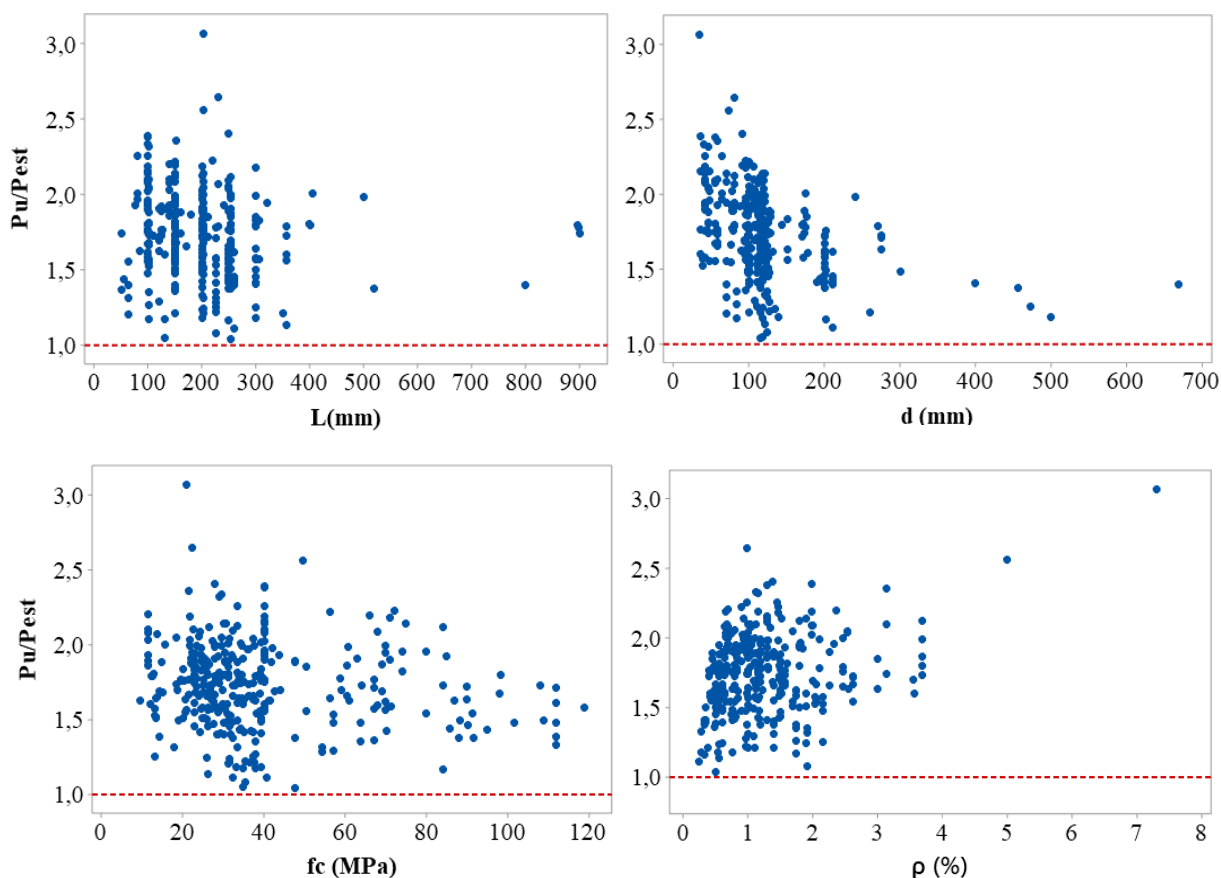


Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 39, observa-se que não foram obtidos valores contra a segurança pela referência sem o emprego do coeficiente de segurança. Tal fato ressalta a necessidade de ajuste da expressão normativa, bem como maior investigação da relação do efeito de escala no comportamento do modelo experimental. Para considerações de projeto, 84 dos valores estimados foram insatisfatórios.

Diante de tais informações e devido à proximidade do equacionamento proposto pelos modelos normativos, avaliou-se, em sequência, os resultados obtidos pelo EC2:2004. A Figura 40 apresenta a relação entre força última obtida experimentalmente (P_u) e força última estimada (P_{est}) pelo equacionamento proposto em 2.4.3 frente as variáveis L , d , f_c e ρ componentes do banco de dados.

Figura 40: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – EC2:2004.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 40, observa-se que todas as relações P_u/P_{est} se mostram acima de 1,0, o que indica que a normativa se mantém a favor da segurança. Nota-se ainda que aumentos no valor da altura útil (d) tornam os valores estimados mais próximos aos obtidos experimentalmente. De modo contrário, aumentos da taxa de armadura de flexão tornam os valores estimados mais distantes dos valores obtidos experimentalmente, subestimando os valores de P_{est} .

Conforme apresentado em 2.4.3, para lajes sem armadura de cisalhamento e não protendidas, as verificações à punção devem ser realizadas no entorno do pilar e na superfície de controle C', cujo equacionamento resumido é apresentado na Tabela 8.

Tabela 8: Equações apresentadas pelo Eurocode.

Contorno do pilar	Primeiro perímetro de controle
$V_{Rd} = 0,50 \cdot \left[0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \right] \cdot f_{cd} \cdot u_0 \cdot d$	$V_{Rd} = \left[\frac{0,18 \cdot k}{\gamma_c} \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} \right] \cdot u_1 \cdot d$

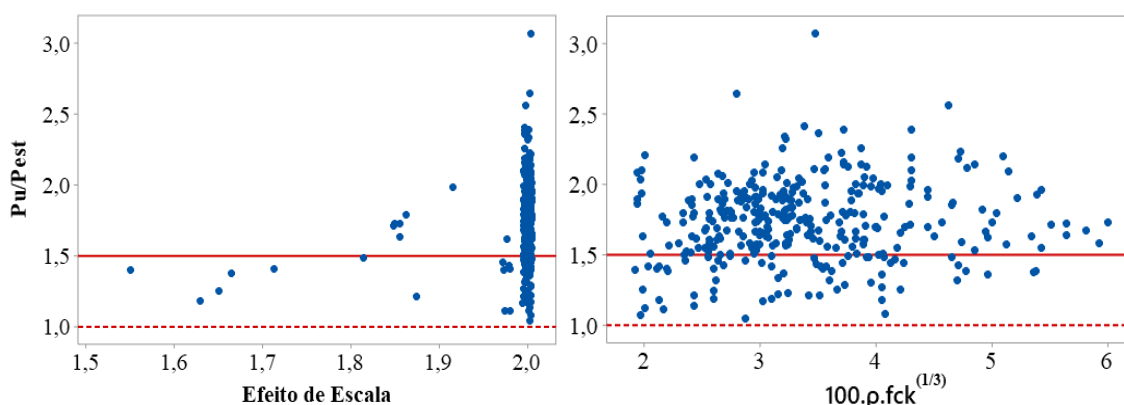
Fonte: A Autora (2021).

Observa-se que o equacionamento proposto é muito próximo do apresentado pela normativa brasileira, diferenciando-se pelos coeficientes de ajustes e limitações nos valores do efeito de escala (valor máximo de 2,0), conforme já mencionado, e também da taxa de armadura de flexão (valor máximo de 0,02).

Ainda, das Equações apresentadas, observa-se que ambas empregam coeficientes de minoração das resistências γ_c – equivalente a 1,50. É interessante identificar que para o primeiro perímetro de controle, a relação $0,18/1,50$ resulta em 0,12, valor muito próximo à 0,13, especificado pela normativa brasileira. Esta relação indica que a normativa brasileira apresenta no coeficiente de 0,13 a consideração do coeficiente de minoração γ_c – equivalente a 1,40 – como afirma Rabello (2016). Deste modo, evidencia-se que a norma apresenta resultados insatisfatórios e contra à segurança no perímetro de contorno C’.

Quanto à norma europeia, tem-se que todos os valores estimados pela equação de projeto bem como pela equação com valor característico, apresentaram a força última no primeiro perímetro de controle. De modo análogo à Figura 38, a relação P_u/P_{est} foi investigada em relação ao efeito de escala considerado pela equação, e pela raiz cúbica do produto entre a taxa de armadura de flexão e a resistência à compressão nominal do concreto, conforme apresenta a Figura 41.

Figura 41: Relação P_u/P_{est} em relação ao efeito de escala e taxa de armadura de flexão e a resistência à compressão nominal do concreto (Eurocode).



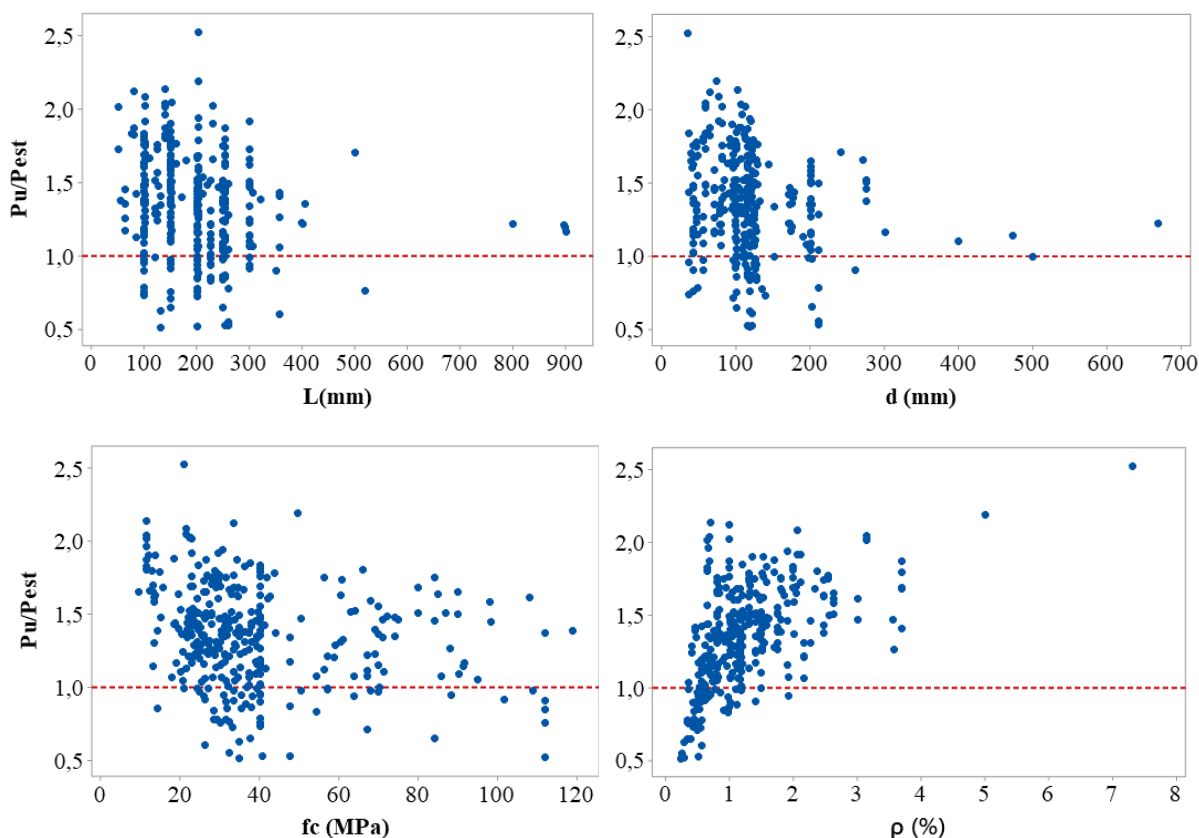
Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 41, a linha contínua se refere ao limite quando da aplicação de um fator de segurança equivalente a 1,50, e a linha tracejada se refere ao limite sem o fator de segurança. Considerando-se o limite com a aplicação do fator de segurança, tem-se que 70 das 344 relações de P_u/P_{est} obtidas, ou seja 20,35% dos resultados, apontam insegurança por parte da recomendação normativa. De modo análogo à normativa brasileira, a relação que considera o produto entre taxa de armadura de flexão e resistência à compressão nominal do concreto apresentou resultados dispersos, com uma leve tendência à aproximação dos resultados experimentais para resultados em torno de seis.

Assim sendo, ainda que o equacionamento proposto pelas normativas apresentadas seja próximo, o EC2:2004 se apresenta muito mais satisfatório e com resultados a favor da segurança do que a NBR6118:2014.

Quanto à normativa americana, a Figura 42 apresenta a relação entre força última obtida experimentalmente (P_u) e força última estimada (P_{est}) pelo equacionamento proposto em 2.4.2 frente as variáveis L , d , f_c e ρ componentes do banco de dados.

Figura 42: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – ACI318:2019.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 42, linha tracejada se refere ao limite de segurança. Observa-se que há uma tendência à aproximação dos resultados experimentais para maiores valores da altura útil d . Ainda, para taxas de armadura de flexão superiores a 2% todos os resultados exibidos são satisfatórios e até demasiado conservadores, confirmando o apresentado por Guandalini (2009).

Para a normativa americana, tem-se que 59 das 344 relações de P_u/P_{est} obtidas, ou seja 17,15% dos resultados, apontam insegurança. É importante ressaltar que, diferente das recomendações da NBR6118:2014 e do EC2:2004, a normativa americana não requer a verificação à punção no entorno do pilar.

Ressalta-se ainda, que a inclusão do parâmetro λ_s que considera o *size effect* só é significativa para lajes com altura útil superior a 250mm. Outro fator relevante é a consideração da raiz quadrada (e não a raiz cúbica) da resistência à compressão do concreto como parâmetro influenciador. Para lajes sem armadura de cisalhamento, considera-se apenas o primeiro perímetro de controle, cujo equacionamento resumido é exibido pela Tabela 9.

Tabela 9: Equações apresentadas pelo ACI.

Contorno do pilar	Primeiro perímetro de controle
	$V_c = 0,33 \cdot \lambda_s \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_0 \cdot d$
A verificação não é necessária	$V_c = 0,17 \cdot \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \cdot \lambda_s \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c}$
	$V_c = 0,083 \cdot \left(2 + \frac{\alpha_s \cdot d}{b_0}\right) \cdot \lambda_s \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c}$

Fonte: A Autora (2021).

Outra consideração importante é a de que todos os valores estimados para força última (P_{est}) foram obtidos por meio da Equação 88 (primeira equação apresentada na Tabela 9). Ainda, todos os valores cuja relação P_u/P_{est} se manteve abaixo de 1,0 se deram para modelos experimentais com taxa de armadura de flexão em torno de 0,50%.

Diante dos resultados apresentados, a Tabela 10 expõe os valores máximo e mínimo, bem como a média da relação obtida para as três recomendações normativas apresentadas. Ainda, são apresentados o coeficiente de variação e o MAPE, em porcentagem, determinados para cada recomendação normativa. Para a NBR6118 e o EC2, os resultados são apresentados com e sem a consideração do coeficiente de segurança – discutidos anteriormente. Como não há esclarecimentos de coeficientes de segurança nas equações abordadas pelo ACI, os valores são relativos ao único P_{est} .

Tabela 10: Valores máximos, mínimos e médios de P_u/P_{est} , CV (%) e MAPE (%) dos modelos normativos.

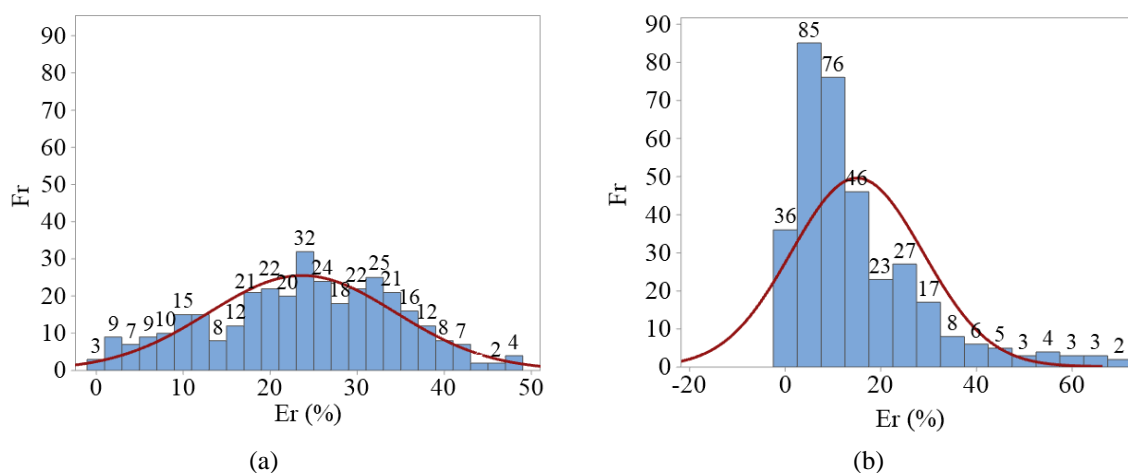
	NBR6118:2014		EC2:2004		ACI318:2019
	com coef.	sem coef.	com coef.	sem coef.	
Máx - Mín	1.95 – 0.83	1.35 – 0.59	3.07 – 1.04	2.05 – 0.69	2.53 – 0.51
Méd.	1.33	0.94	1.73	1.15	1.35
CV (%)	42	20	55	22	41
MAPE (%)	24	15	41	16	28

Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 10, observa-se que para a estimativa sem o uso do coeficiente de segurança, a normativa brasileira apresenta uma relação P_u/P_{est} média abaixo de 1,00, evidenciando a insegurança do modelo proposto, já discutida anteriormente. Para a normativa europeia, nota-se que com a consideração do coeficiente de segurança, tem-se o maior erro percentual absoluto dentre os modelos. Entretanto, ressalta-se que nesta condição a normativa apresentou todos os valores satisfatórios quanto à aspectos de segurança.

A Figura 43 apresenta o histograma de frequência do erro dos valores estimados pela normativa brasileira com coeficiente de segurança (a) e sem coeficiente de segurança (b).

Figura 43: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pela normativa brasileira (a) com coeficiente de segurança; (b) sem coeficiente de segurança.



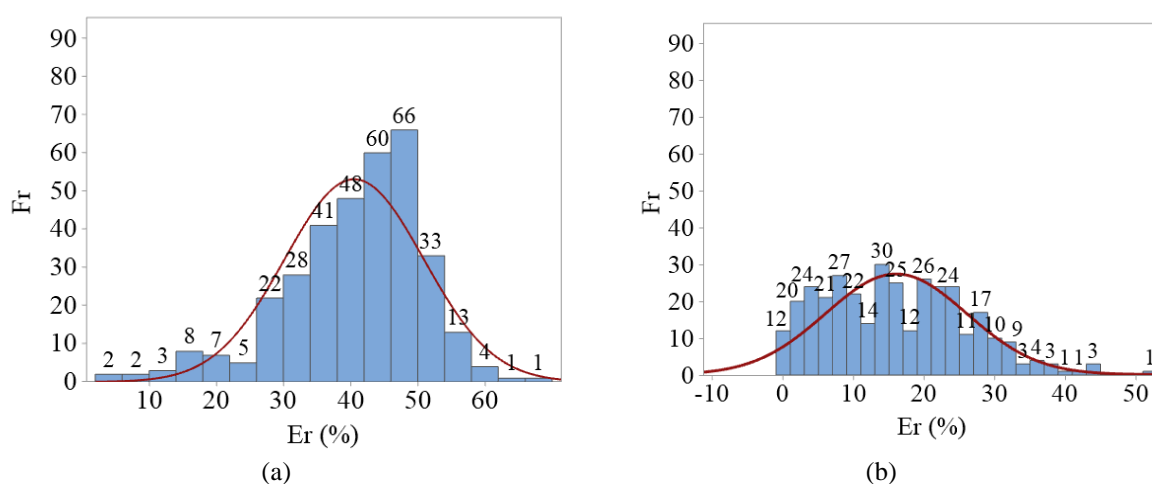
Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 43, observa-se que 38% e 77% dos resultados estimados resultaram em erros inferiores a 20% para (a) e (b), respectivamente. Ainda que os resultados característicos se aproximem dos valores experimentais, é importante ressaltar que a normativa tem como intuito

a padronização bem como a segurança das estruturas quanto às condições de projeto. Portanto, é evidente a necessidade de ajustes para a normativa brasileira no intuito de garantir a segurança à resistência à punção no contorno crítico C', confirmando as considerações de Ferreira (2010), Muttoni (2008), Paiva *et al.* (2015), Sacramento *et al.* (2012) e Sousa e El Debs (2019).

A Figura 44 apresenta o histograma de frequência do erro dos valores estimados pela normativa europeia com coeficiente de segurança (a) e sem coeficiente de segurança (b).

Figura 44: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pela normativa europeia (a) com coeficiente de segurança; (b) sem coeficiente de segurança.

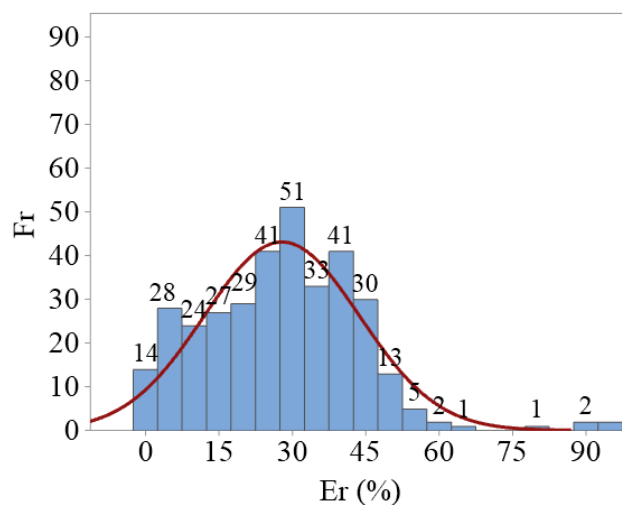


Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 44, observa-se que 7% e 68% dos resultados estimados resultaram em erros inferiores a 20% para (a) e (b), respectivamente. Para (a), a maior frequência de erros se dá na faixa de 47%, com 66 repetições, à medida que para (b), na faixa de 15%, com 30 repetições. Os resultados estimados em (a) são satisfatórios para condições de segurança em projeto, mas devem ser investigados em relação ao conservadorismo, uma vez que 15% dos 344 valores apresentam erros superiores a 50%.

Considerando-se a normativa americana, a Figura 45 apresenta o histograma de frequência do erro dos valores estimados.

Figura 45: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pela normativa americana.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 45, observa-se que 35% dos resultados estimados resultaram em erros inferiores a 20%. A maior frequência de erros se dá na faixa de 30%, com 51 repetições. Ainda assim, considerando todo o apresentado, para condições de segurança em projeto a normativa americana se apresenta satisfatória.

4.4 MODELO DE PREVISÃO PROPOSTO

Através das discussões apresentadas até o momento, chega-se as seguintes constatações:

- I. Não há padronização dos modelos experimentais ensaiados à punção;
- II. Devido à falta de padronização, bem como à falta de detalhamento por meio dos estudos experimentais apresentados pela literatura, não é possível estabelecer uma análise comparativa entre resultados obtidos;
- III. São conhecidos os principais parâmetros influenciadores do fenômeno da punção. Porém, não há um consenso sobre o modo de atuação de cada parâmetro no comportamento do modelo;
- IV. Os estudos experimentais realizados visam, majoritariamente, estimar a força última à punção (P_u) e não o entender o comportamento do modelo;
- V. Os modelos de previsão apresentados são de difícil aplicação devido ao número de variáveis envolvidas. Modelos mais simplificados não apresentam resultados satisfatórios;

VI. As recomendações normativas, fundamentalmente a norma brasileira, necessitam de ajustes nos equacionamentos propostos.

Deste modo, ressalta-se aqui a necessidade do entendimento do fenômeno de modo que o dimensionamento de estruturas sujeitas à punção seja seguro, bem como racionalizado. O entendimento do fenômeno, é condicionado à padronização dos modelos experimentais, uma vez que, assim, os parâmetros adotados e comportamentos obtidos podem ser analisados comparativamente.

Assim sendo, tem-se o desafio de estabelecer um modelo realista que represente, de modo simples, o comportamento à punção de uma ligação laje-pilar. A proposta de um modelo experimental padrão, por sua vez, é condicionada ao entendimento dos parâmetros que o compõe, uma vez que estes influem diretamente no comportamento do modelo. Este conceito também se aplica para o desenvolvimento de um modelo de cálculo para previsão da resistência última à punção com melhor aproximação aos resultados obtidos experimentalmente.

Neste contexto, de modo a alcançar o objetivo proposto, inicialmente, através do teste de correlação de Pearson com hipótese linear, identificou-se a correlação existente entre cada variável componente do banco de dados - Geo, L, d, f_c e ρ - com o valor da força última à punção P_u , cujos resultados são apresentados pela Tabela 11.

Tabela 11: Resultados do teste de correlação de Pearson.

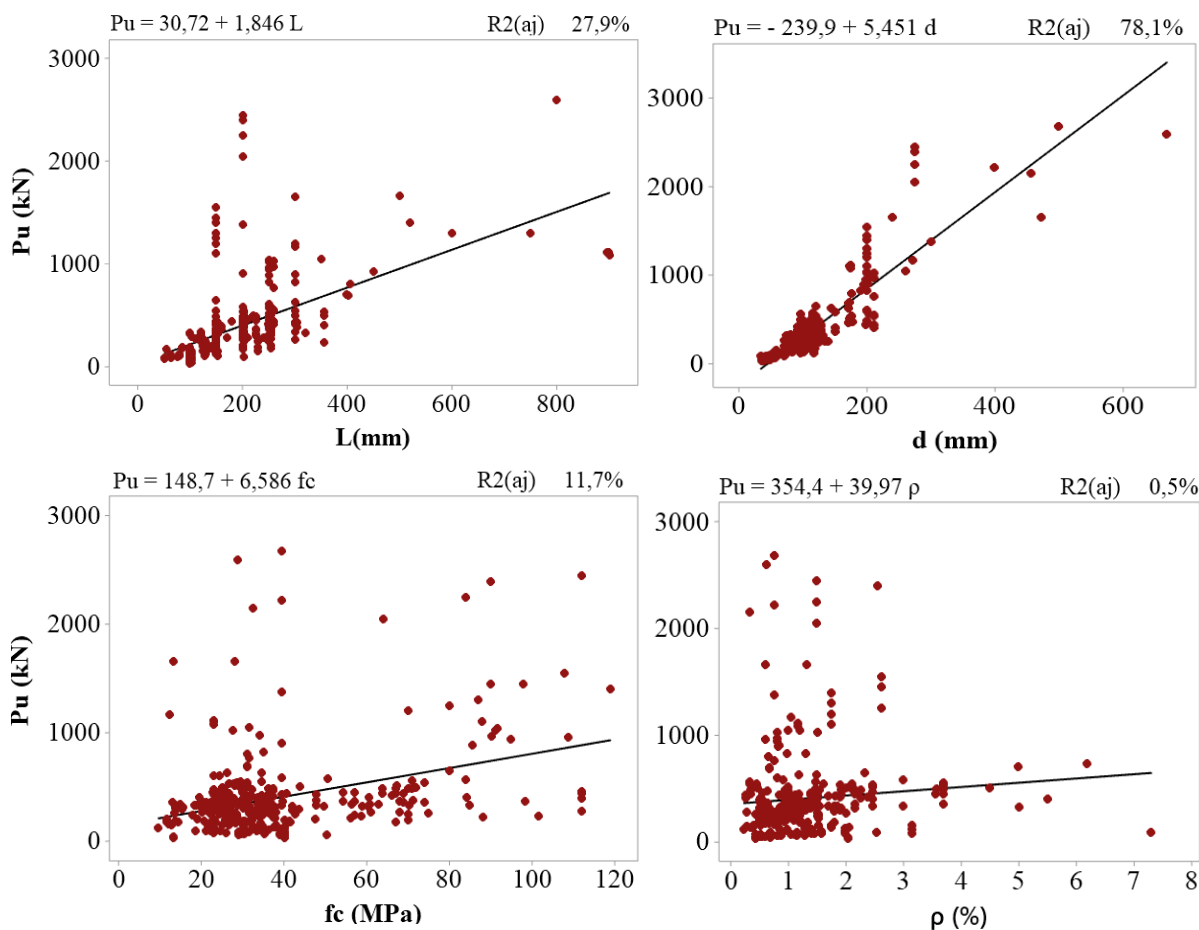
	Geo	L	d	f_c	ρ
Correlação de Pearson	0.013	0.526	0.905	0.301	0.054
P-valor	0.806	0.000	0.000	0.000	0.032

Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 11, nota-se que pela análise de variância (ANOVA) ao nível de 5% de significância, a geometria da laje não possui significância frente à P_u . Ainda, observa-se que para L, d, f_c e ρ cuja análise de variância aponta significância, a correlação apresentada é positiva, ou seja, aumentos nos valores das variáveis apresentadas provocam aumentos em P_u .

Para melhor entendimento dos resultados dados na Tabela 11, a Figura 46 apresenta a relação entre cada uma das variáveis L, d, f_c e ρ , frente à P_u , por meio de modelos de regressão linear.

Figura 46: Relação entre cada uma das variáveis- L , d , f_c e ρ , frente à P_u , por meio de modelos de regressão linear.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 46, confirmando o apresentado pela Tabela 11, observa-se que a altura útil d é o parâmetro de maior relevância frente aos resultados de P_u , com $R^2(aj.) = 78,1\%$. Nota-se que para valores de L até 400mm, há uma dispersão dos resultados com tendência de aumento de P_u para aumentos de L - conforme a correlação apresentada. Para valores de L acima de 400, há uma melhor aproximação dos resultados ao ajuste de regressão.

Para a resistência à compressão do concreto, há uma grande dispersão de resultados com uma leve tendência de aumentos de P_u para aumentos de f_c . Quanto à taxa de armadura de flexão, observa-se uma grande dispersão para valores de ρ até 3%. A partir deste valor, há uma melhor aproximação dos resultados ao ajuste de regressão. Percebe-se que aumentos de ρ pouco interferem nos valores de P_u .

Portanto, diante dos dados apresentados, observa-se que as variáveis apresentadas influenciam na força última à punção P_u . Assim sendo, investigou-se então a influência de cada um dos fatores apresentados na força última P_u através do teste do contraste médio de Tukey (ANOVA) ao nível de 5% de significância ($\alpha = 0,05$). Para tanto, os valores – estratificados –

das variáveis em análise foram categorizados para efeitos de comparação e análise da equivalência das médias entre grupos.

A Tabela 12 apresenta os resultados obtidos pelo teste de Tukey considerando a altura útil (d).

Tabela 12 : Análise por categorias da altura útil da laje (d) pelo teste de Tukey.

GRUPO	d (mm)	N	\bar{x}		IC (95%)
6	530-670	1	4915	A	(4520; 5310)
4	330-430	1	2224	B	(1829; 2619)
5	430-530	3	2165	B	(1937; 2393)
3	230-330	8	1800	B	(1661; 1940)
2	130-230	48	789,6	C	(732,5; 846,6)
1	30-130	283	267,78	D	(244,29; 291,26)

Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 12, observa-se que os maiores e menores valores médios de P_u se dão para 6 e 1, respectivamente. Nota-se também que para os grupos 3, 4 e 5, as médias dos valores de P_u são estatisticamente equivalentes. Ainda da Tabela 12, percebe-se que há um aumento significativo do valor médio de P_u entre grupos. O valor médio de P_u para o grupo com média C é aproximadamente três vezes superior ao valor médio do grupo D. Para o grupo B em relação à C, e, para A em relação à B, aproximadamente duas vezes.

Uma justificativa para a grande diferença do valor médio da força P_u entre os intervalos é a provável mudança no modo de ruptura do modelo. Ressalta-se, novamente, que grande parte dos estudos experimentais evidenciam apenas a força última à punção obtida, e poucos investigam o modo de ruptura do modelo. Para compreensão do fenômeno, é necessário o entendimento da distribuição de tensões no elemento em análise.

Neste contexto, é importante evidenciar que Bocklenberg e Mark (2020) observaram o efeito do confinamento do concreto na zona de compressão para lajes com espessuras da ordem de 300mm, o que não ocorreu para lajes com espessuras superiores à 500mm. Da Tabela 12, nota-se que para alturas úteis entre 230mm e 530mm, as médias (**B**) de P_u são estatisticamente equivalentes e, para valores de d acima de 530mm, tem-se o maior valor médio de P_u (**A**) que corresponde a aproximadamente o dobro do valor **B**. Esta constatação confirma o apresentado por Bocklenberg e Mark (2020).

De acordo com os autores, tal fato demonstra que não há somente a influência da espessura da laje, mas também do efeito de escala do modelo no fenômeno da punção. Ainda, a distinção entre intervalos apresentada evidencia que o comportamento à punção é baseado em intervalos.

A Tabela 13 apresenta os resultados obtidos pelo teste de Tukey considerando a dimensão do pilar (L).

Tabela 13: Análise por categorias da dimensão do pilar (L) pelo teste de Tukey.

GRUPO	L (mm)	N	\bar{x}		IC (95%)
6	800-950	4	2053	A	(1675; 2431)
5	450-550	2	1908	A	(1373; 2442)
4	350-450	9	598,3	B	(346,2; 850,3)
3	250-350	81	556,0	B	(471,9; 640,0)
2	150-250	159	428,5	B	(368,6; 488,5)
1	50-150	89	125,12	C	(44,96; 205,28)

Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 13, observa-se que os maiores e menores valores médios de P_u se dão para 6 e 1, respectivamente. Nota-se também que para os grupos 2, 3 e 4, as médias dos valores de P_u são estatisticamente equivalentes. No banco de dados composto, não há pilares com dimensão entre 550 e 800mm. É necessário, através de mais estudos experimentais, avaliar o que ocorre neste intervalo. Entretanto, percebe-se que os grupos 5 e 6 apresentaram, estatisticamente, valores médios de P_u equivalentes. Portanto, novamente é evidenciado que o comportamento à punção é baseado em intervalos.

Ainda, nota-se que o valor médio de P_u representado por **A** é de aproximadamente quatro vezes o valor médio representado por **B**, o que implica novamente na provável mudança no modo de ruptura do modelo. Observa-se também que aumentos na dimensão do pilar em um intervalo entre 150mm e 450mm não provocam aumentos significativos em P_u .

A Tabela 14 apresenta os resultados obtidos pelo teste de Tukey considerando a resistência à compressão do concreto (f_c).

Tabela 14: Análise por categorias da resistência à compressão do concreto (f_c) pelo teste de Tukey.

GRUPO	f_c (MPa)	N	\bar{x}		IC (95%)
9	89-99	8	1204	A	(901; 1508)
10	99-109	3	914	A B	(419; 1410)
11	109-120	6	902	A B	(552; 1253)
8	79-89	10	896	A B	(624; 1167)
6	59-69	17	468	B C D E F	(260; 676)
7	69-79	14	452,3	B C D E F	(222,8; 681,7)
2	19-29	94	398,5	F	(309,9; 487,0)
3	29-39	101	355,5	F	(270,1; 441,0)
5	49-59	11	328,0	C D E F	(69,2; 586,9)
1	9-19	29	302,8	F	(143,4; 462,3)
4	39-49	51	292,6	C D E F	(172,3; 412,8)

Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 14, verifica-se que o maior valor médio de P_u se dá para o grupo 9, e o menor, para os grupos 1, 2 e 3. Tem-se que variações f_c nos intervalos entre 9 e 39 MPa não provocam aumentos significativos em P_u . O mesmo ocorre para intervalos entre 39 e 59 MPa, bem como entre 59 e 79 MPa.

Nota-se ainda que, valores entre 79 e 89 MPa, e 99 e 120 MPa possuem, estatisticamente, valores médios de P_u equivalentes. Entretanto, variações entre 89 e 99 MPa provocam aumentos significativos em P_u , e correspondem ao maior valor médio de P_u . Portanto, tem-se que a progressão não é linear, aumentos em f_c não necessariamente implicam em aumentos nos valores de P_u e, principalmente para concretos de alta resistência, é evidente a necessidade de maior investigação do fenômeno da punção.

A Tabela 15 apresenta os resultados obtidos pelo teste de Tukey considerando taxa de armadura de flexão (ρ).

Tabela 15: Análise por categorias da taxa de armadura de flexão (ρ) pelo teste de Tukey.

GRUPO	ρ (%)	N	\bar{x}		IC (95%)
6	1-2	157	571	A	(332,0; 478,6)
5	2-3	29	405,3	A	(401; 742)
4	3-4	12	392,7	A	(115,3; 645,4)
3	5-6	1	380,4	A	(-595,1; 1241,1)
2	6-7.5	1	323,0	A	(-829,14; 1007,14)
1	inferior a 1%	144	89,00	A	(316,2; 469,2)

Fonte: A Autora (2021).

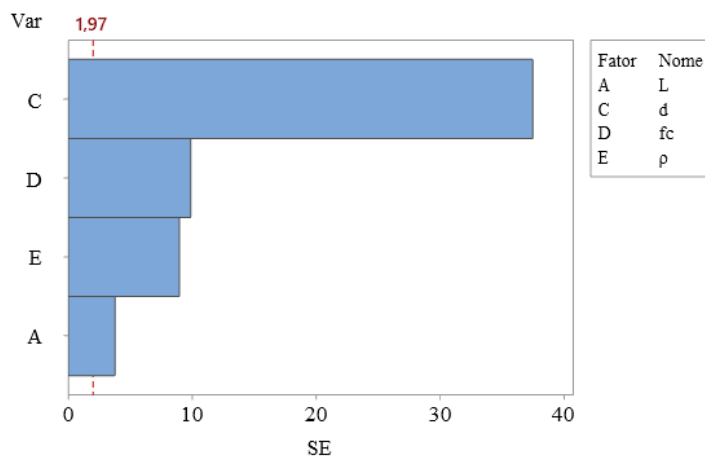
Da Tabela 15, observa-se todas as médias dos valores de P_u são estatisticamente equivalentes. Deste modo, aumentos na taxa de armadura de flexão não provocam aumentos significativos em P_u . É importante salientar que, conforme Birkle e Dilger (2008), Faria *et al.* (2011) e Einpaul *et al.* (2016), a taxa de armadura de flexão está relacionada ao efeito de escala do modelo. Portanto, é necessária a análise da interação entre os parâmetros apresentados, e não é possível explicar o fenômeno ou estimar P_u em função de uma única variável.

Neste sentido, no intuito de compreender o fenômeno e a atuação conjunta dos parâmetros mencionados, bem como a influência dos parâmetros avaliados frente aos valores de P_u , desenvolveu-se um modelo de regressão linear para estimativa da resistência última à punção composto apenas por termos independentes, expresso pela Equação 118. O gráfico de Pareto é exibido pela Figura 47.

$$P_u = -648 + 0,384L + 5,938d + 4,048f_c + 99,3\rho \quad [R_{adj}^2 = 88,52\%] \quad (118)$$

Com L e d em mm, f_c em MPa e ρ em porcentagem.

Figura 47: Gráfico de Pareto referente ao modelo da Equação 118.



Fonte: A Autora (2021).

Da Equação 118, composta por apenas 4 termos, destaca-se que o coeficiente de determinação ajustado equivale a 88,52%, implicando erros da ordem de 12% na estimativa de P_u . Nota-se que aumentos em L , d , f_c e ρ provocam aumentos em P_u . Do gráfico de Pareto apresentado pela Figura 47, tem-se a altura útil como fator de maior significância (d), seguida pela resistência à compressão do concreto (f_c), taxa de armadura de flexão (ρ) e dimensão do pilar (L).

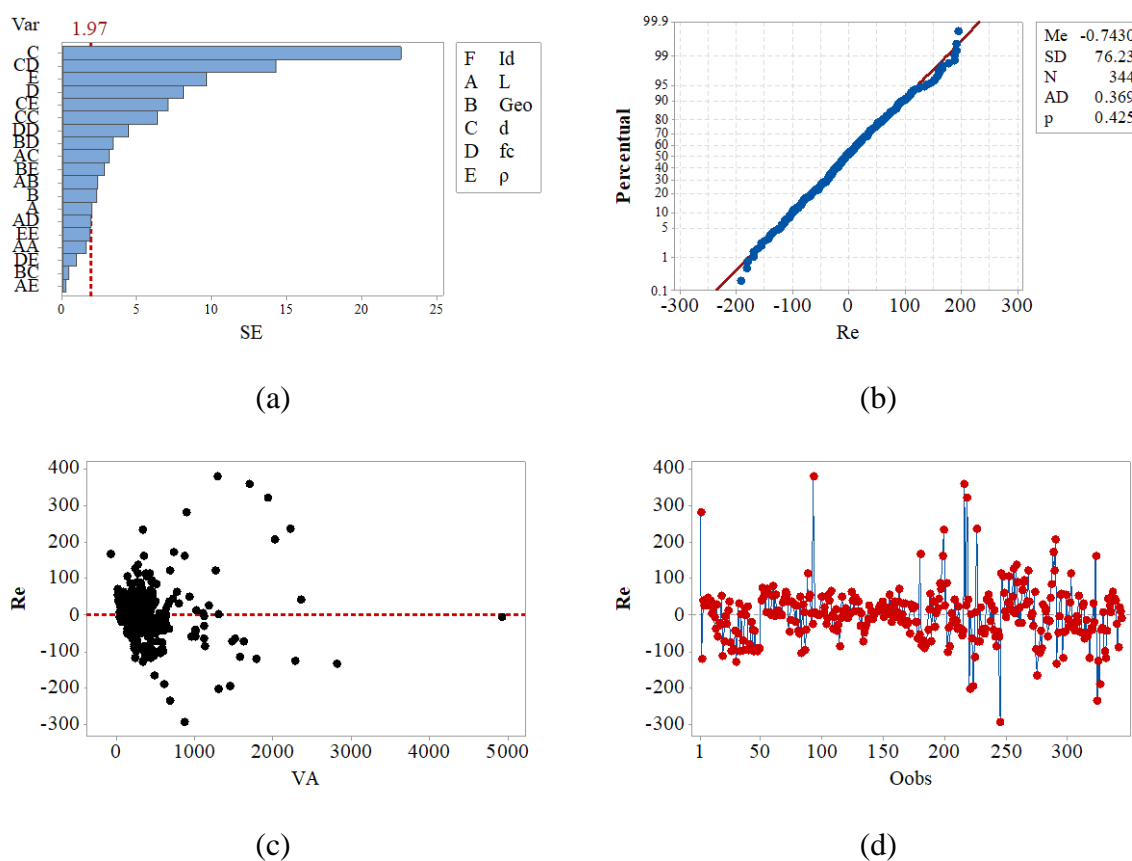
Portanto, tem-se que o comportamento à punção baseado em intervalos é dado em função dos intervalos de altura útil (d) dos modelos experimentais. Ainda, percebe-se que o modelo de regressão linear apresentado possui boa precisão, mas que a consideração dos parâmetros influenciadores de modo independente no modelo não consegue explicar o fenômeno frente à P_u .

Assim sendo, no intuito de considerar a interação entre os parâmetros avaliados e obter uma melhor aproximação na estimativa da força última à punção P_u , desenvolveu-se um modelo de regressão de superfície não-linear que considera quadrados e produtos, expresso pela Equação 119. Para tanto, foram considerados todas as variáveis componentes do banco de dados - Geo, L , d , f_c e ρ . O gráfico de Pareto e os testes de validação da ANOVA do modelo de regressão são apresentados na Figura 48.

$$\begin{aligned}
 P_u = & 25,6 + 0,478 \cdot L - 59,6 \cdot \text{Geo} - 1,554 \cdot d + 0,18 \cdot f_c - 70,5 \cdot \rho - 0,000405 \cdot L^2 \\
 & + 0,005352 \cdot d^2 - 0,03430 \cdot f_c^2 - 7,68 \cdot \rho^2 + 0,440 \cdot L \cdot \text{Geo} + 0,003036 \cdot L \cdot d - \\
 & 0,01016 \cdot L \cdot f_c + 0,030 \cdot L \cdot \rho - 0,130 \cdot \text{Geo} \cdot d - 1,613 \cdot \text{Geo} \cdot f_c + 45,1 \cdot \text{Geo} \cdot \rho + \\
 & 0,06661 \cdot d \cdot f_c + 1,490 \cdot d \cdot \rho + 0,328 \cdot f_c \cdot \rho \quad [R^2 \text{ adj} = 97,27\%]
 \end{aligned}
 \tag{119}$$

Em que Geo equivale à 1 e 0 para pilares circulares e quadrados, respectivamente; L é a face do pilares quadrado ou o raio do pilar circular, em mm; d é a altura útil da laje, em mm; f_c é a resistência à compressão do concreto, em MPa; e ρ é a taxa de armadura de flexão, em porcentagem.

Figura 48: Diagrama de Pareto (a), teste de normalidade de Anderson-Darling (b), gráfico resíduos versus valores ajustados (c), gráfico de resíduos versus ordem (d).



SE: efeitos padronizados; Var: variáveis; F: fator; Id: identificação; Re: resíduos; AV: valores ajustados; Oobs: ordem de observação; Me: média; SD: desvio padrão; N: número de elementos; p: estatística p.

Fonte: A Autora (2021).

Pelos resultados apresentados na Figura 48b, 48c, e 48d, as premissas da ANOVA do modelo de regressão foram atendidas. Da Equação 119, cabe destacar que o coeficiente de determinação ajustado obtido foi igual a 97,27%, implicando que o erro na estimativa de P_u para as lajes de ambas as geometrias (circular [1]; quadrada [0]) é da ordem de 3%, o que

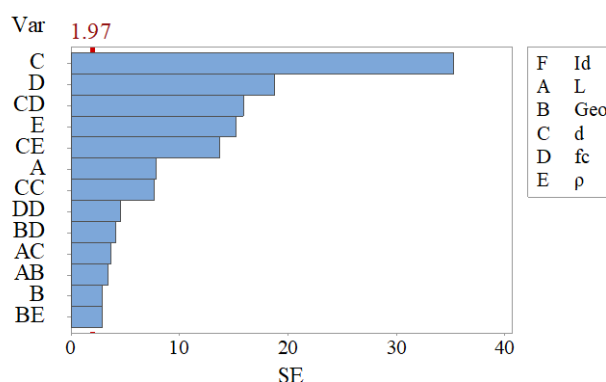
evidencia a excelente precisão do modelo, ressaltando-se que dentre os 344 conjuntos de resultados, apenas 35 (10,17%) mostraram-se como observações atípicas (outliers).

Do gráfico de Pareto apresentado pela Figura 48a, o fator mais significativo consistiu na altura útil da laje (d), seguido pela taxa de armadura de flexão (ρ), da resistência à compressão do concreto (f_c). Quanto à interação entre os fatores, o produto entre as variáveis d e f_c mostrou ser o mais significativo. Das 19 variáveis componentes da Equação 119, seis foram consideradas não significativas pela ANOVA (5% de significância). O novo modelo composto apenas pelos termos considerados significativos (Figura 49) é apresentado pela Equação 120, cabendo destacar o atendimento das premissas da ANOVA.

$$P_u = 108 + 0,028 \cdot L - 49 \cdot \text{Geo} - 1,596 \cdot d - 0,656 \cdot f_c - 110,8 \cdot \rho + 0,005668 \cdot d^2 - 0,03399 \cdot f_c^2 + 0,355 \cdot L \cdot \text{Geo} + 0,002479 \cdot L \cdot d - 1,787 \cdot \text{Geo} \cdot f_c + 37,6 \cdot \text{Geo} \cdot \rho + 0,06115 \cdot d \cdot f_c + 1,794 \cdot d \cdot \rho \quad [R^2 \text{ adj} = 97,24\%] \quad (120)$$

A redução de 19 para 13 termos resultou em um novo modelo (Equação 120) com $R^2_{\text{adj}} = 97,24\%$, que tecnicamente pode ser considerado o mesmo do modelo da Equação 119. Para esse novo modelo, 33 dentre os 344 conjuntos de valores (9,60%) foram considerados outliers. A excelente precisão exibida ocorre porque o modelo proposto tem como superfície gerada uma curva no espaço que pode representar melhor a variação entre as variáveis envolvidas no modelo.

Figura 49: Gráfico de Pareto referente ao modelo da Equação 121.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 49, o fator mais significativo consistiu na altura útil da laje, seguida da resistência do concreto à compressão e da interação desses dois fatores. Na sequência de significância, tem-se a taxa de armadura de flexão e a interação entre esta e a altura útil da laje.

A relação considerada é bastante satisfatória, e segue o que fora apresentado pelo modelo de regressão de superfície linear. Os dois primeiros parâmetros elencados são fundamentais quanto à influência do efeito de escala nos modelos experimentais analisados (BOCKLENBERG e MARK, 2020). A espessura da peça condiciona o engrenamento dos agregados e, portanto, é um fator de controle da resistência ao cisalhamento. Ainda, a altura útil da laje é substancialmente relacionada ao mecanismo de falha do sistema (KUERES *et al.*, 2018).

A resistência à compressão do concreto como segundo na ordem de significância confirma a forte influência apresentada por Faria *et al.* (2011), Joseph e Lakshmi (2018), e Schmidt, Kueres e Hegger (2020). A constatação é contrária à Menétrey (2002), o que evidencia que a consideração de um estado de tensão axial no modelo numérico pode negligenciar a realidade de um estado triaxial de tensões. A relação não linear entre a resistência à compressão do concreto a resistência à punção deve ser investigada.

A interação entre a altura útil e a resistência à compressão como terceiro fator de significância confirma que devido à complexidade do fenômeno e confecção de um modelo em escala real, não é possível a análise isolada da influência da resistência à compressão do concreto (SCHMIDT, KUERES e HEGGER, 2020). Evidencia-se aqui a necessidade de estudos relacionados à estimativa da resistência última à punção para lajes mais espessas.

A taxa de armadura de flexão (ρ) se mostrou como quarto fator na ordem de significância. De acordo com Bocklenberg e Mark (2020), tem-se não só a taxa de armadura de flexão como fator influente, mas sim a distribuição desta no modelo analisado. O uso de multicamadas de armaduras com menores diâmetros ao invés de uma camada com maiores diâmetros, reduz a fissuração e mantém a transferência de carga via interface de agregados, em maior extensão.

Ainda, os autores apresentaram que a taxa de armadura de flexão juntamente à altura útil da laje tivera significativa influência no efeito de escala do modelo, justificando a interação entre os dois fatores como quinto na ordem de significância. Na sequência da ordem de significância, tem-se a dimensão do pilar, a qual determina a área de contato entre laje-pilar. De acordo com Sarvaicova, Borzovic e Augustin (2019), este parâmetro determina a distribuição de tensões na ligação. Conforme já apresentado, há necessidade de mais estudos para pilares de maiores dimensões.

Analisando os parâmetros isolados, a geometria do modelo tem a menor influência quanto ao fenômeno da punção. Assim sendo, não há necessidade de um modelo de previsão particular para cada geometria analisada. Tal constatação deve ser investigada para o caso de

modelos retangulares, nos quais o índice de retangularidade apresenta forte influência na resistência última à punção (JOSEPH e LAKSHMI, 2018; MOURO, 2006; OLIVEIRA, 2004).

Em relação a Equação 121, tem-se aumentos da taxa de armadura à flexão, da face (L) do pilar ou diâmetro e da resistência à compressão impactam em aumentos nos valores da P_u . Ainda, observa-se que aumentos na altura útil da laje implicam em reduções nos valores da força última.

Neste sentido, ressalta-se que o modelo proposto tem como superfície gerada uma curva no espaço que pode representar melhor a variação entre as variáveis envolvidas no modelo, mas não possui significado físico e não explica o comportamento à punção. O modelo, de superfície multidimensional, tem como intuito obter uma melhor aproximação na estimativa da força última à punção P_u .

Deste modo, os valores máximo e mínimo, bem como a média da relação obtida entre P_u/P_{est} , o coeficiente de variação e o MAPE, em porcentagem, obtidos através da Equação 120 foram avaliados frente aos resultados apresentados pelos modelos propostos já discutidos, conforme apresenta a Tabela 17. Para Lanini (2021), os valores máximo e mínimo da relação P_u/P_{est} , equivalem a 2,72 e 0,47, respectivamente.

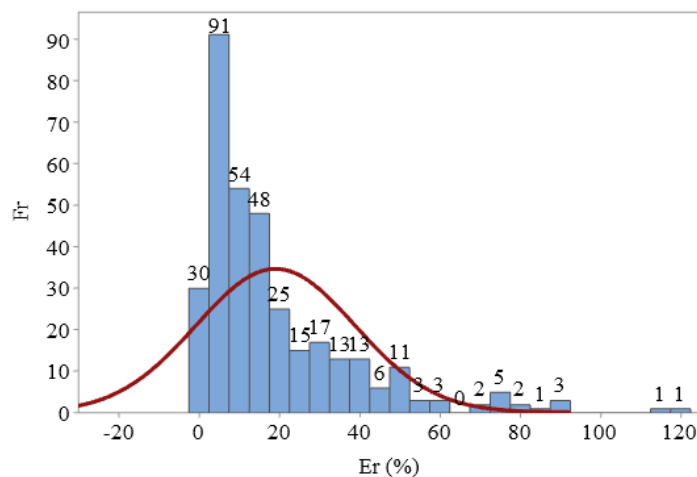
Tabela 16: Valores máximos, mínimos e médios de P_u/P_{est} , CV (%) e MAPE (%) do modelo proposto.

	Yitzhaki (1966)	Long (1975)	Shehata (1985)	Teng <i>et al.</i> (2018)	NBR6118 c/-s/ coef.	EC2 c/-s/ coef.	ACI31 8	Lanini (2021)
Méd.	0.84	0.57	1.28	1.29	1.33 – 1.94	1.73 – 1.15	1.35	1.05
CV (%)	398.07	295.54	127.88	31.96	42 – 20	55 – 22	41	18
MAPE (%)	190.87	119.74	36.43	17.84	24 - 15	41 - 16	28	14

Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 17, observa-se que o modelo proposto pela Equação 120 apresenta a média da relação obtida entre P_u/P_{est} equivalente a 1.05, coeficiente de variação de 18% e MAPE de 14%. Frente aos demais modelos, Lanini (2021) é o que apresenta a melhor aproximação entre os resultados obtidos experimentalmente e os resultados estimados. A Figura 50 exibe o histograma de frequência do erro dos valores estimados.

Figura 50: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pelo modelo proposto.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 50, observa-se que 78% dos resultados estimados resultaram em erros inferiores a 20%. A maior frequência de erros se dá na faixa de 7,5%, com 91 repetições. Considerando todo o apresentado, os resultados estimados são satisfatórios. Isto evidencia a boa precisão do modelo proposto e que há uma variação entre variáveis que ainda não é compreendida e não pode ser expressa por um equacionamento de superfície linear.

4.5 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

Para validação do modelo proposto pela Equação 120, foi composto um novo banco de dados com 45 modelos contemplados e disponibilizados pela literatura técnica, até este instante. Ressalta-se aqui, novamente, a dificuldade relacionada à obtenção de estudos experimentais disponíveis que apresentem todas as informações pertinentes para análise do modelo proposto. Tal fato, evidencia novamente as dificuldades relacionadas ao estudo da punção, bem como a necessidade de um modelo de previsão da força última à punção simplificado, e satisfatório.

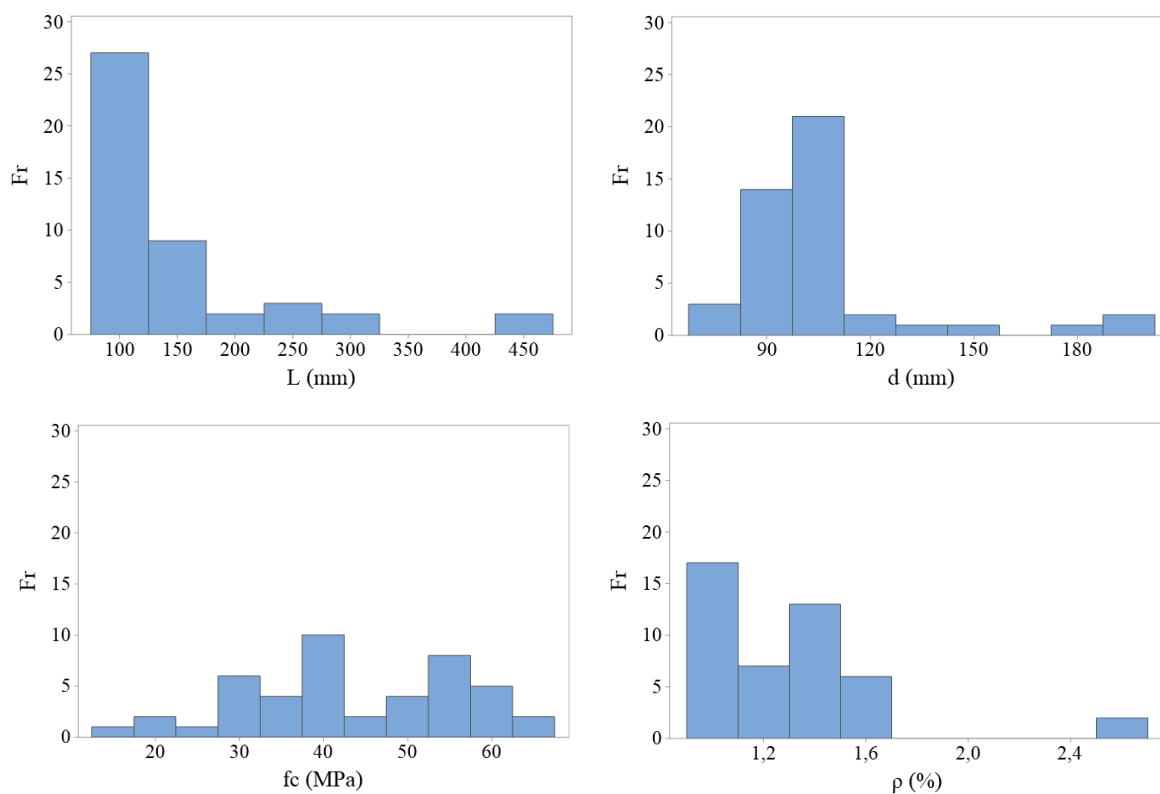
A Tabela 18 apresenta a síntese de valores das variáveis independentes (f_c , d , ρ , L) e, também da variável P_u considerada como variável dependente nos modelos.

Tabela 17: Síntese dos resultados da literatura referente ao novo banco de dados.

Variáveis	\bar{x}	Min	Max	IC (95%)	CV (%)
L (mm)	157,4	80	450	(132,8;182,1)	52,08
d (mm)	106,45	80	200	(98,3;114,6)	25,49
f_c (MPa)	43,63	17	67	(39,77;47,5)	29,49
ρ (%)	1,32	0,92	2,67	(1,21;1,42)	26,88
Pu (kN)	332,8	150	968	(284,1;381,5)	49,84

Fonte: A Autora (2021).

A Figura 51 ilustra os histogramas de frequência das variáveis L, d, f_c e ρ para as lajes avaliadas, sendo F_r a frequência de distribuição.

Figura 51: Histogramas de frequência das variáveis L, d, f_c e ρ para as lajes de avaliadas.

Fonte: A Autora (2021).

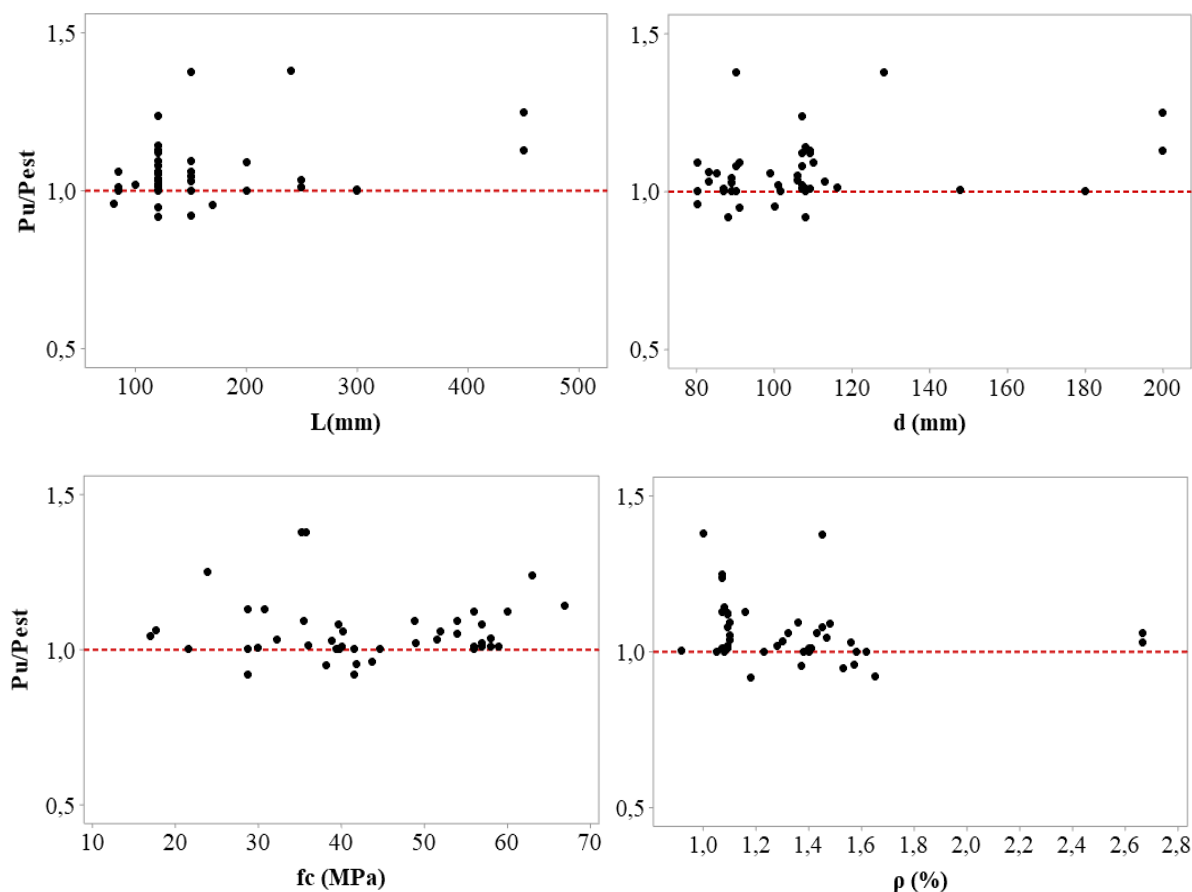
Da Figura 51, nota-se o maior emprego de alturas úteis até 110mm. Conforme o intervalo apresentado - de 80mm a 200mm -, tem-se a consideração dos grupos 1, 2 e 3 exibidos na Tabela 12. A dimensão L do pilar mais empregada é da ordem de 100mm, e poucos estudos apresentam valores de L superiores à 300mm. De acordo com o intervalo apresentado - de 80mm a 450mm -, são considerados os grupos 1, 2, 3 e 4 exibidos na Tabela 13.

Quanto à f_c , observa-se novamente maior aplicação de concretos convencionais, na ordem de 40 MPa. Conforme o intervalo apresentado - de 17MPa a 67MPa -, tem-se a consideração dos grupos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 exibidos na Tabela 14.

Para a taxa de armadura de flexão, há maior frequência de distribuição para ordem de 1 %. De acordo com o intervalo apresentado - de 0,92% a 2,67% -, tem-se a consideração dos grupos 1, 5 e 6 exibidos na Tabela 15.

Diante das informações componentes do novo banco de dados, os valores da resistência última à punção foram estimados através da Equação 120, e avaliados frente aos resultados obtidos experimentalmente, conforme exhibe a Figura 52.

Figura 52: P_u/P_{est} em relação as variáveis L , d , f_c e ρ – modelo proposto.

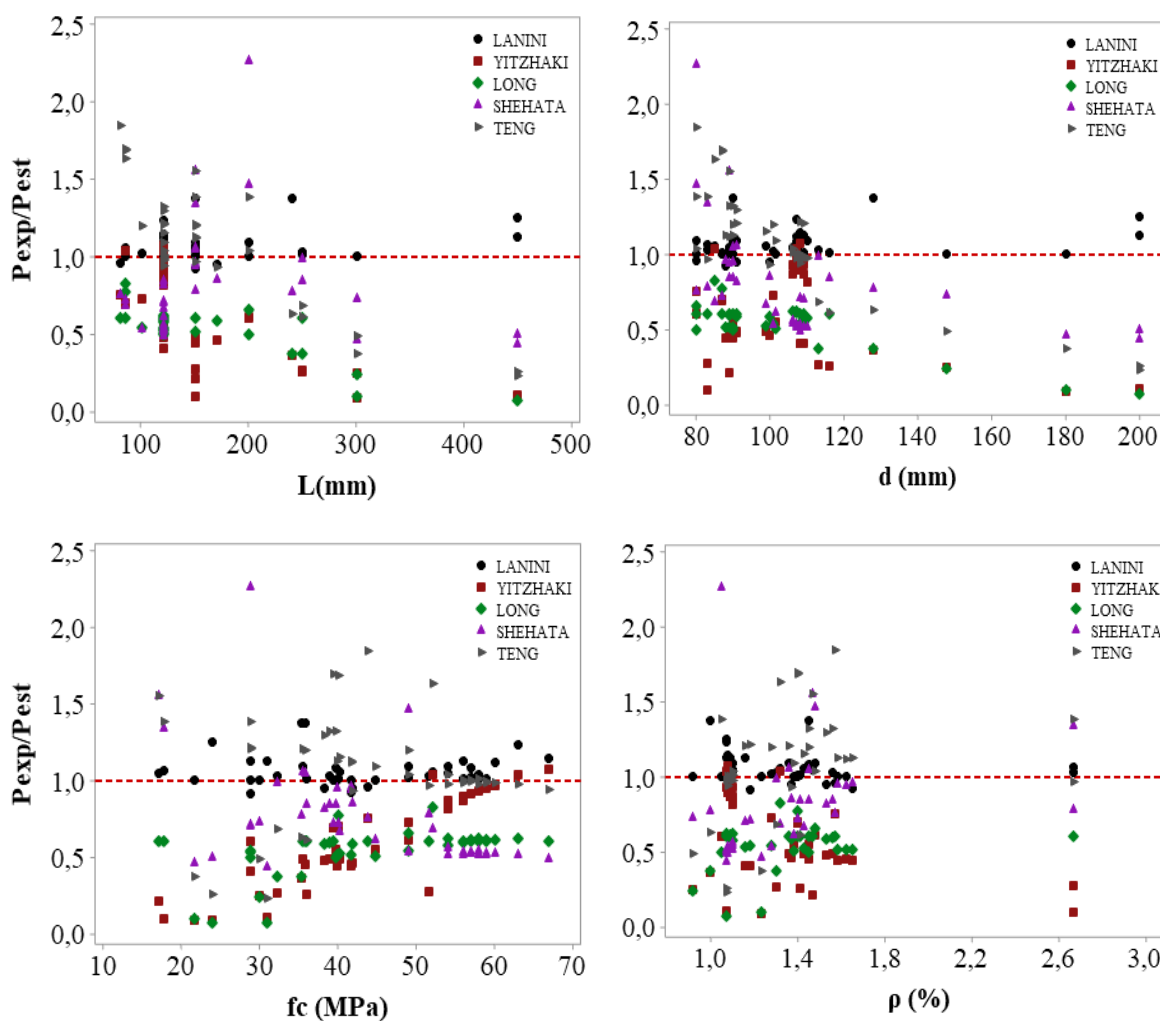


Fonte: A Autora (2021).

Considerando o modelo proposto, o valor médio da relação P_u/P_{est} se manteve novamente em 1,05, com valores máximos e mínimos equivalentes a 1.38 e 0.92, respectivamente. Da Figura 52, observa-se a tendência de aproximação da relação à um. Dos 45 resultados avaliados, apenas 5 apresentam relação P_u/P_{est} inferior à um.

Diante da boa aproximação obtida através do modelo proposto, a relação entre força obtida experimentalmente e força estimada P_{exp}/P_{est} foi avaliada em relação aos modelos propostos por Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018), bem como Lanini (2021), conforme apresenta a Figura 53.

Figura 53: P_{exp}/P_{est} em relação aos modelos propostos por Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018) e Lanini (2021).

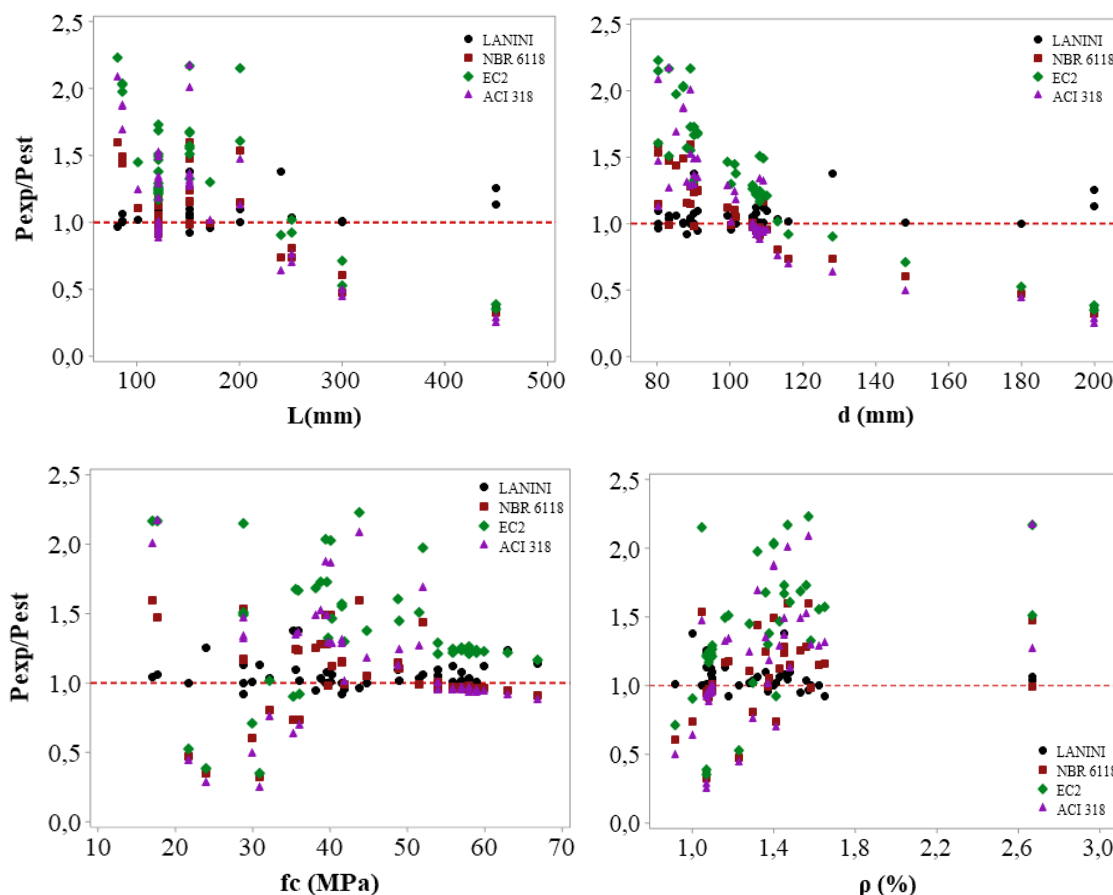


Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 53, observa-se que o modelo proposto apresenta a melhor aproximação frente aos resultados experimentais. Considerando-se os modelos de Yitzhaki e Long, nota-se uma tendência contra à segurança para aumentos da dimensão do pilar (L) e da altura útil da laje (d). Ainda, o modelo proposto por Yitzhaki apresenta a melhor aproximação frente aos resultados experimentais com aumentos da resistência à compressão do concreto (f_c), principalmente para valores acima de 50MPa.

A relação P_{exp}/P_{est} também foi avaliada em relação as recomendações normativas propostas pela ABNT NBR 6118:2014, EC2:2004 e ACI318:2019, bem como pelo modelo proposto pela Equação 120, conforme apresenta a Figura 54. As normativas foram consideradas com seus respectivos fatores de segurança.

Figura 54: P_{exp}/P_{est} em relação aos modelos propostos pela ABNT NBR 6118:2014, EC2:2004, ACI318:2019 e Lanini (2021).



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 54, observa-se novamente que o modelo proposto apresenta a melhor aproximação frente aos resultados experimentais. Considerando-se as normativas NBR, EC e ACI, nota-se uma tendência superestimação da força última à função P_u para aumentos da dimensão do pilar (L) e da altura útil da laje (d). Esta tendência não é observada no modelo proposto.

Para avaliar os resultados obtidos através de todos os modelos discutidos, tem-se os valores máximo e mínimo, bem como a média da relação obtida entre P_{exp}/P_{est} , o coeficiente de variação e o MAPE, em porcentagem, apresentados pela Tabela 18.

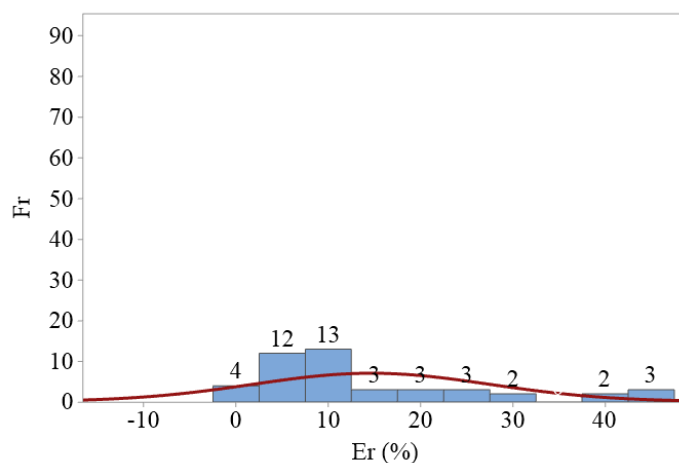
Tabela 18: Valores máximos, mínimos e médios de P_{exp}/P_{est} , CV (%) e MAPE (%) de todos os modelos apresentados.

	Yitzhaki (1966)	Long (1975)	Shehata (1985)	Teng <i>et al.</i> (2018)	NBR6118 (2014)	EC2 (2004)	ACI318 (2019)	Lanini (2021)
Máx-	1.07-	0.83-	2.27-	1.85-0.48	1.60-0.32	2.23-	2.17-	1.32-
Mín	0.08	0.07	0.44			0.35	0.24	0.92
Méd.	0.60	0.54	0.76	1.08	1.08	1.39	1.15	1.05
CV (%)	188.10	187.74	43.59	29.16	33.37	46.50	30.45	20.11
MAPE (%)	104.08	68.72	32.55	24.47	24.31	41.15	27.63	14.66

Fonte: A Autora (2021).

Da Tabela 18, nota-se que os valores de resistência última à punção estimados pela Equação 120 possuem uma melhor aproximação frente aos resultados experimentais. Observa-se que o erro percentual absoluto médio do modelo (MAPE), equivalente a 14,66%, possui uma diferença de 10% em relação ao segundo menor valor (24.47%) – apresentado pela norma brasileira. A Figura 55 exibe o histograma de frequência do erro dos valores estimados por Lanini (2021).

Figura 55: Histograma de frequência do erro dos valores estimados pelo modelo proposto para o novo banco de dados.



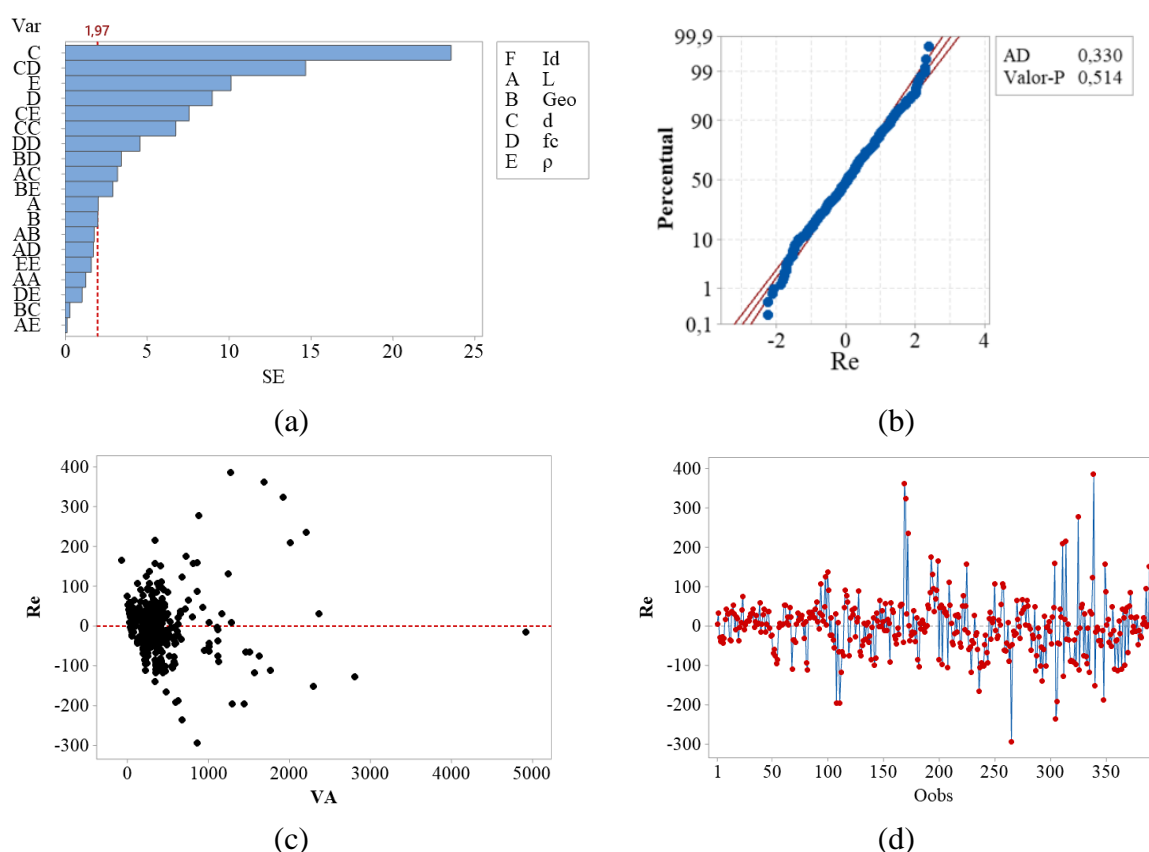
Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 55, observa-se que 65% dos resultados estimados resultaram em erros de até 10%. A maior frequência de erros se dá na faixa de 10%, com 13 repetições. Diante dos resultados apresentados, confirma-se a boa precisão do modelo na estimativa da resistência última à punção (P_u).

Neste contexto, no intuito de melhorar a precisão do modelo de previsão da força última à punção P_u apresentado pela Equação 120, desenvolveu-se um novo modelo de regressão de superfície não-linear que considera quadrados e produtos fundamentado por todos os 389 conjuntos de resultados, expresso pela Equação 121. O gráfico de Pareto e os testes de validação da ANOVA do modelo de regressão são apresentados na Figura 56.

$$\begin{aligned}
 P_u = & 31,3 + 0,544 \cdot L - 42,1 \cdot \text{Geo} - 1,685 \cdot d + 0,25 \cdot f_c - 74,3 \cdot \rho - 0,000318 \cdot L^2 + \\
 & 0,005408 \cdot d^2 - 0,03345 \cdot f_c^2 - 6,46 \cdot \rho^2 + 0,312 \cdot L \cdot \text{Geo} + 0,003019 \cdot L \cdot d - \\
 & 0,00868 \cdot L \cdot f_c - 0,015 \cdot L \cdot \rho - 0,088 \cdot \text{Geo} \cdot d - 1,573 \cdot \text{Geo} \cdot f_c + 42,5 \cdot \text{Geo} \cdot \rho + \\
 & 0,06658 \cdot d \cdot f_c + 1,550 \cdot d \cdot \rho + 0,362 \cdot f_c \cdot \rho \quad [R^2 \text{ adj} = 97,34\%]
 \end{aligned}
 \tag{121}$$

Figura 56: Diagrama de Pareto (a), transformada de Johnson (b), gráfico resíduos versus valores ajustados (c), gráfico de resíduos versus ordem (d).



SE: efeitos padronizados; Var: variáveis; F: fator; Id: identificação; Re: resíduos; AV: valores ajustados; Oobs: ordem de observação; p: estatística p.

Fonte: A Autora (2021).

Pelos resultados apresentados na Figura 56b, 48c, e 48d, as premissas da ANOVA do modelo de regressão foram atendidas. O coeficiente de determinação ajustado do novo modelo

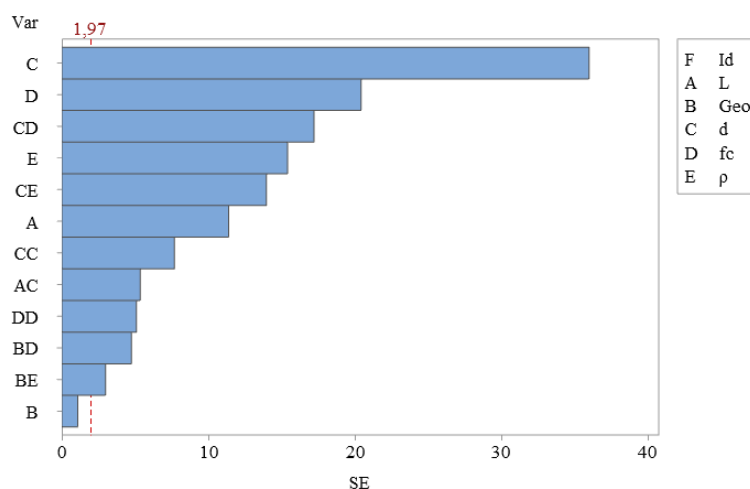
é de 97,34%, implicando novamente erros da ordem de 3% na estimativa de P_u . Dentre os 389 conjuntos de resultados, apenas 41 (10,54%) mostraram-se como observações atípicas (outliers).

Do gráfico de Pareto apresentado pela Figura 56a, seis das 19 variáveis componentes da Equação proposta foram consideradas não significativas pela ANOVA (5% de significância), e, portanto, desenvolveu-se um novo modelo composto apenas pelos termos considerados significativos (Figura 57), apresentado pela Equação 122, cabendo destacar o atendimento das premissas da ANOVA.

$$P_u = 87,8 + 0,197 \cdot L + 26,3 \cdot \text{Geo} - 1,888 \cdot d - 0,517 \cdot \text{fc} - 113,4 \cdot \rho + 0,005371 \cdot d^2 - 0,03652 \cdot \text{fc}^2 + 0,003219 \cdot L \cdot d - 1,994 \cdot \text{Geo} \cdot \text{fc} + 38,1 \cdot \text{Geo} \cdot \rho + 0,06381 \cdot d \cdot \text{fc} + 1,790 \cdot d \cdot \rho \quad [R^2 \text{ adj} = 97,28\%] \quad (122)$$

A redução de 19 para 13 termos resultou em um novo modelo (Equação 122) com $R^2_{\text{adj}} = 97,28\%$, valor muito próximo à $R^2_{\text{adj}} = 97,24\%$ obtido para o modelo proposto pela Equação 120. Deste modo, observa-se que a inserção de 45 conjuntos de dados no banco de dados que fundamenta o modelo de regressão desenvolvido impactou minimamente o coeficiente de determinação do modelo. Tal fato evidencia não só a excelente precisão do modelo na estimativa de P_u , bem como a robustez do modelo.

Figura 57: Gráfico de Pareto referente ao modelo da Equação 122.



Fonte: A Autora (2021).

Da Figura 57, nota-se que a altura útil da laje se manteve como fator mais significativo. Comparando-se à Figura 49, observa-se que a única alteração no gráfico é dada pela eliminação do produto entre L e d e entre L e Geo , dados anteriormente como 10° e 11° termos na ordem de significância. Portanto, a ordem de significância dos parâmetros componentes do banco de dados se manteve, com ajustes apenas na representação de variação entre variáveis dada pela curva no espaço gerada pelo modelo.

Portanto, dada a precisão do equacionamento final proposto pela Equação 122, e, frente a todos os resultados apresentados e discutidos, enfatiza-se a relevância e aplicabilidade do modelo proposto. Com o conhecimento de apenas cinco parâmetros componentes do modelo real - Geo , L , d , f_c e ρ - é possível estimar o valor da resistência última à punção (P_u) na ligação laje - pilar interno com erros da ordem de 3%.

Assim sendo, há a possibilidade de avanço no estudo do comportamento à punção através da simulação numérica. A falta de informações, detalhamentos e padronização dos estudos experimentais já apresentada na revisão de literatura, dificulta a parametrização dos modelos numéricos. Através da excelente estimativa do modelo proposto, tem-se uma nova ferramenta para auxílio na verificação do modelo numérico que é capaz de estimar o valor de P_u frente às variações dos parâmetros dos modelos em análise, o que proporciona maior grau de confiança nas medições realizadas.

Portanto, considerando o intervalo de confiança apresentado, o modelo proposto pode ser empregado como um parâmetro para a simulação numérica, de modo que a confiança nas medições permita a análise do comportamento da punção na ligação laje-pilar.

O modelo proposto também pode contribuir como ferramenta de auxílio às pesquisas experimentais na determinação dos parâmetros geométricos dos modelos ensaiados para que sejam adequados à capacidade de carga do equipamento existente em laboratório - dada pela força P_u estimada pelo modelo de previsão - no ensaio de punção em lajes lisas de concreto armado.

Ainda, tem-se a possibilidade de aplicação do modelo proposto como instrumento de auxílio para avaliação de projetos, através da identificação do valor da força a ser aplicada que torna frágil a ruptura na ligação-laje pilar compreendida nos contornos C e C' . A precisão de 97% na estimativa da força última à punção do modelo também permite a aplicação para laudos de estruturas em lajes lisas em concreto armado, uma vez que a força última P_u permite a identificação da ruptura (ou não) por punção.

5. CONCLUSÕES

O estudo desenvolvido teve como objetivo propor, por meio da análise estatística aplicada à estudos experimentais, uma equação de previsão da força última de ruptura à punção na ligação laje maciça-pilar, sem armadura de cisalhamento, fundamentado pelos principais parâmetros influenciadores da punção, em edificações em concreto armado. As conclusões apresentadas neste capítulo se fundamentam na revisão de literatura apresentada, nos modelos de previsão e recomendações normativas avaliados, e no modelo de regressão proposto.

Quanto à literatura, há uma grande contradição sobre a relação apresentada entre os parâmetros elencados como influenciadores do fenômeno e o comportamento do modelo à punção. Ainda, os estudos experimentais exibidos pela literatura e disponíveis para acesso são pouco detalhados, fato que dificulta a validação de resultados e avaliação do fenômeno. Dados como a resistência à compressão do concreto, as dimensões da laje e pontos de aplicação da força e medição dos deslocamentos, inclinação de superfície de ruptura e modo de ruptura são, por muitas vezes, não apresentados.

A falta de padronização do modelo experimental à punção impede um melhor entendimento do comportamento do modelo. E, ainda, muitos estudos realizados visam, majoritariamente, estimar a força última à punção (P_u) e não o entender o comportamento do modelo. Portanto, não há consenso sobre o comportamento na ligação laje-pilar e mais estudos acerca do fenômeno da punção são necessários.

Em relação aos modelos de previsão da resistência à punção apresentados pela literatura e principais normativas, investigados quanto às premissas de cálculo, parâmetros comuns, principais considerações e dificuldades de aplicação, tem-se:

- Os modelos mecânicos propostos por Kinnunen e Nylander (1960), Gomes (1991) e pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (2008) são de maior complexidade e envolvem um maior número de variáveis. Somando-se à falta de informações dos estudos experimentais apresentados pela literatura, tem-se uma grande dificuldade de aplicação.
- Os modelos de previsão da força última à punção propostos por Hognestad (1953), Moe (1961), Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018) apresentam um equacionamento mais simplificado e de fácil aplicação.

- As previsões do EC 2:2004, comparadas aos resultados experimentais, são satisfatórias. No entanto, para pilares retangulares poderia haver previsões contra à segurança, e foi necessário ajustar as equações. Para situações com armadura de cisalhamento, o EC 2:2004 tendia a superestimar a resistência na região armada (DUARTE *et al.*, 2012; HEINZMANN *et al.*, 2012; PAIVA *et al.*, 2015; ABDUL RASOUL e TAHER, 2019; SOARES E VOLLUM, 2015).
- A norma brasileira apresenta tendência a previsões inseguras, com superestimação da resistência e significativa probabilidade de falha do modelo proposto no contorno C' (FERREIRA, 2010; MARQUE e NOGUEIRA, 2021; MUTTONI, 2008; PAIVA *et al.*, 2015; SACRAMENTO *et al.*, 2012; SILVA e STUCCHI, 2017; SOUSA e EL DEBS, 2019).
- A revisão normativa americana ACI318:2019 recentemente publicada introduziu a consideração do fator de escala através do coeficiente λ_s no cálculo da força cortante resistente. Por se tratar de uma revisão recente, a literatura não apresenta estudos que avaliem a normativa com esta nova consideração. O modelo apresentado pelo ACI318:2014 foi apresentado como conservador (BAIG, 2019; CAVALCANTE, 2016; COSTA *et al.*, 2012; HEINZMANN *et al.*, 2012; OLIVEIRA, 2013; RABELO, 2016; SAGADEVAN e RAO, 2019; ABDUL RASOUL e TAHER, 2019; SHEMBADE, 2017; WERNECK, 2017).

Quanto à composição do banco de dados composto, atestou-se a dificuldade em relação a obtenção de informações relativas aos modelos experimentais, bem como em relação a falta de padronização dos modelos ensaiados. Devido a estas dificuldades, o critério de consideração das variáveis componentes do banco de dados se deu através da avaliação dos fatores comuns aos equacionamentos apresentados pelos modelos de previsão e recomendações normativas também apresentados como parâmetros influenciadores do fenômeno da punção pela literatura. Diante das informações apresentadas, é evidente a necessidade de padronização do modelo experimental de ensaio à punção.

Em relação à comparação dos valores de força última à punção componentes do banco de dados aos estimados pelos modelos de previsão da resistência à punção apresentados pela literatura e pelas principais normativas, tem-se:

- Yitzhaki (1966) superestima os resultados para taxas de armadura de flexão da ordem de 0,70%. Para taxas acima de 1,50%, o modelo se apresenta contra a segurança. Para

maiores valores de f_c , acima de 100 MPa, o modelo se adequa a favor da segurança. A superestimação da força P_u para aumentos de ρ também foi observada para o modelo de Long (1975);

- Shehata (1985) apresenta tendência ao conservadorismo. Todavia, há uma tendência contra a segurança valores de f_c superiores a 80 MPa;
- Teng *et al.* (2018) apresenta uma pequena tendência à insegurança para maiores valores de L , fator que deve ser investigado para um maior número de dados. Comparado aos modelos de previsão da força última à punção propostos por Yitzhaki (1966), Long (1975), Shehata (1985) e Teng *et al.* (2018), apenas Teng *et al.* (2018) é considerado satisfatório.
- Considerando os resultados provenientes do banco de dados composto, a norma brasileira ABNT NBR 6118:2014 apresenta tendência a previsões inseguras no contorno C' . Ainda, os resultados estimados pela normativa são satisfatórios com a limitação do efeito de escala em 2,0. Portanto, há necessidade de ajuste da expressão normativa, bem como maior investigação da relação do efeito de escala no modelo proposto;
- Em condições reais, as normativas americana (ACI 318:2019) e europeia (EC2:2004) apresentam estimativas satisfatórias;

Em relação à análise estatística aplicada ao banco de dados, tem-se:

- Pela análise de variância (ANOVA) ao nível de 5% de significância, a geometria da laje não possui significância frente à P_u . Para L , d , f_c e ρ há significância, com correlação positiva;
- Quanto aos parâmetros influenciadores do fenômeno da punção, o fator mais significativo consistiu na altura útil da laje, seguida da resistência do concreto à compressão e da interação desses dois fatores. Na sequência de significância, tem-se a taxa de armadura de flexão e a interação entre esta e a altura útil da laje.
- O comportamento à punção é baseado em intervalos determinados pelo fator de maior significância – a altura útil. A diferença do valor médio da força P_u entre intervalos se justifica pela mudança no modo de ruptura do modelo.
- Em relação à resistência à compressão do concreto, tem-se correlação positiva, mas a progressão não é linear e aumentos em f_c não necessariamente implicam em aumentos

nos valores de P_u . Para concretos de alta resistência, é evidente a necessidade de maior investigação do fenômeno da punção.

- Aumentos na taxa de armadura de flexão não provocam aumentos significativos em P_u . Entretanto, deve-se considerar a distribuição desta no modelo analisado;
- Não é possível explicar o fenômeno ou estimar P_u em função de uma única variável, e é necessária a análise da interação entre os parâmetros.
- A equação proposta, fundamentado por apenas cinco variáveis do modelo real - Geo , L , d , f_c e ρ – estima o valor da resistência última à punção (P_u) na ligação laje maciça – pilar interno com erros da ordem de 3%. O modelo, superfície não linear, apresenta excelente precisão na estimativa da resistência última à punção, pois tem como superfície gerada uma curva no espaço que pode representar melhor a variação entre as variáveis envolvidas no modelo, mas não possui significado físico e não explica o comportamento à punção.
- Quando comparado aos modelos de previsão apresentados pela literatura e pelas principais normativas, o equacionamento proposto apresentou a melhor aproximação, com erro percentual absoluto médio do modelo (MAPE).

Diante do exposto, tem-se o cumprimento do objetivo proposto, e o avanço no estudo da punção em lajes lisas de concreto armado. Através da revisão de literatura e da análise estatística, os parâmetros influenciadores do fenômeno da punção foram não só identificados frente às principais contatações, mas também quanto à relação e ordem de significância no comportamento do modelo à punção.

Através do presente estudo e da excelente estimativa da equação proposta, tem-se uma nova ferramenta para auxílio na verificação de modelos numéricos à punção que é capaz de estimar o valor de P_u frente às variações dos parâmetros dos modelos em análise, o que possibilita o avanço no estudo do comportamento à punção através do maior grau de confiança das medições realizadas – para o intervalo de confiança apresentado. A equação proposta, então, pode ser empregada como um parâmetro para a simulação numérica.

Para o intervalo de confiança, a equação proposta também pode contribuir como ferramenta de auxílio às pesquisas experimentais na determinação dos parâmetros geométricos dos modelos ensaiados para que sejam adequados à capacidade de carga do equipamento existente em laboratório – dada pela força P_u estimada pelo modelo de previsão – no ensaio de punção em lajes lisas de concreto armado.

Tem-se ainda a possibilidade de aplicação do modelo proposto como instrumento de auxílio para avaliação de projetos, através da identificação do valor da força a ser aplicada que torna frágil a ruptura na ligação-laje pilar compreendida nos contornos C e C'.

Por fim, a precisão de 97% na estimativa da força última à punção do modelo também permite a aplicação para laudos de estruturas em lajes lisas em concreto armado. Através do valor P_u estimado pela equação proposta, é possível avaliar a ocorrência ou não de ruptura por punção na estrutura em análise.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Conforme apresentado, no estudo da punção, as informações apresentadas pela literatura são, por diversas vezes, controversas. Para complementação do estudo realizado e, de modo a compreender melhor o fenômeno da punção na ligação laje-pilar, verifica-se a possibilidade do desenvolvimento de trabalhos futuros com as seguintes abordagens:

- Investigação experimental do comportamento à punção para os intervalos de altura útil apresentados;
- Comparação entre os valores da força última P_u estimados pelo modelo proposto e modelos numéricos;
- Investigação experimental do comportamento à punção para os intervalos de resistência à compressão do concreto apresentados;
- Análise do modelo de regressão proposto quanto à pilares retangulares;
- Investigação e análise dos modelos de previsão da força última à punção com armadura de cisalhamento;
- Proposta de um ensaio experimental padrão.

REFERÊNCIAS

ABDUL RASOUL, Z. M. R.; TAHER, H. M. A. M. Accuracy of concrete strength prediction behavior in simulating punching shear behavior of flat slab using finite element approach in abaqus. **Periodicals of Engineering and Natural Sciences**, v. 7, n. 4, p. 1933–1949, 2019.

ABDULNABI, A. A. R.; ALSHARIF, A. M. Effect of Different Parameters on Punching Shear Failure in Flat Plat-Edge Column Connection. **Journal of Engineering Research**, n. 28, p. 51-58, 2019.

AGRAHARI, S. **Nonlinear Finite Element Analysis of Punching Shear Behavior of Flat Slabs**. 2019. 61 p. Dissertation (Master) - International Institute of Information Technology, Hyderabad, India, 2019.

AHMED, G. H.; AZIZ, O. Q. Punching Shear Strength of Concrete Flat Plate Slabs During (1906-2009), Review and Analysis. **Zanco Journal of Pure and Applied Sciences / Salahaddin University-Hawler**, v. 23, n. 2, 2011.

AL HAMD, R. K. S.; GILLIE, M.; WARREN, H.; TORELLI, G.; STRATFORD, T.; WANG, Y. The effect of load-induced thermal strain on flat slab behaviour at elevated temperatures. *Fire Safety Journal*, v. 97, p. 12-18, 2015. DOI: 10.1016/j.firesaf.2018.02.004

ALBUQUERQUE, E. J. P. de. **Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento e Pilares de Centro Retangulares**. 2010. 205 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 2010.

ALEXANDER S.D.B., SIMMONDS S.H. Punching shear tests of concrete slabs-column joints containing fiber reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 89, n. 4, p. 425-432, 1992.

ALHUSSAINAWA, A. K. H.; ARNA'OT, F. H.; ABBASS, A. A.; OZAKCA, M. Assembly Made from Engineering Cementitious Composite. **The International Journal of Energy & Engineering Sciences**, v. 318, n. October, p. 1110–1118, 2017.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318: Building Code Requirements Structural Concrete and Commentary**. ACI Committee, 2019.

ANDERSSON, J. A. **Punching of concrete slabs with shear reinforcement**. Stockholm, Sweden. Meddelander n. 47 fran. Inst. för Byggnadsstatik, Kungl. Tekniska Högskolands Handligar, Nr.212, 59f., 1963.

ANDRADE, J. L. **Ensaio Adicionais em Lajes Cogumelo de Concreto Armado com Armadura de Puncionamento com Estribos Inclinados**. Anais do 42º Congresso Brasileiro do Concreto, 2000.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSUNÇÃO, W. R.; OLIVEIRA, M. A. B.; ALMEIDA, G. M.; GOMES, L. G.; TEIXEIRA, R. M.; MACÊDO, A. N. **Análise estatística do comportamento mecânico de concreto híbrido**

reforçado com aço e fibras de polipropileno. Brazilian Journal of Development, v. 7, n.1, p. 2684-2704, 2021. DOI: 10.34117/bjdv7n1-183

BAIG, Z. I. Influence of Flexural Reinforcement Ratios On Failure Modes Of Slab-Column Connections: An Experimental Investigation. **Science International**, v. 31, n. 3, p. 397–402, 2019.

BANTHIA, N.; TROTTIER, J. F.; SOROUSHIAN, P.; BAYASI, Z. **Fiber-Type Effects on the Performance of Steel Fiber Reinforced-Concrete - Discussion.** ACI MATERIALS JOURNAL, v.89, n.1, p.106-107, 1992.

BARTOLAC, M.; DAMJANOVIĆ, D.; DUVNJAK, I. Proboj ravnih ploča s posmičnom armaturom i bez takve armature. **Gradjevinar**, v. 67, n. 8, p. 771–786, 2015. DOI: 10.14256/JCE.1361.2015

Base (1966). Dados obtidos através do ACI committee 445C, 2011.

BIRKLE, G.; DILGER, W. H. Influence of slab thickness on punching shear strength. **ACI Structural Journal**, v. 105, n. 2, p. 180–188, 2008.

BOCKLENBERG, L.; MARK, P. Thick slab punching with symmetry reductions. **Structural Concrete**, p. 1–15, 2020. DOI: 10.1002/suco.201900480

BRAESTRUP, M.W.; REGAN, P.E. **Punching shear in reinforced concrete: a state of the art report.** CEB Bulletin d'information, n.168, 1985.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION DRAFT FOR DEVELOPMENT. **DD ENV 206: Concrete. Performance, production, placing and compliance criteria**, London, 1992.

BROMS, C. E. **Concrete Flat Slabs and Footings: Design Method for Punching and Detailing for Ductility.** 2005. Thesis (PhD) - Department of Civil and Architectural Engineering, Division of Structural Design and Bridges, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2005.

BROMS, C.E. Elimination of Flat Plate Punching Failure Mode. **ACI Structural Journal**, v. 97, n.1, p. 94-101, 2000.

CALDENTEY, A. P.; LAVASELLI, P. P.; PEIRETTI, H. C.; FERNÁNDEZ, F. A. **Influence of stirrup detailing on punching shear strength of flat slabs.** Engineering Structures, v.49, p. 855-865, 2013.

CARVALHO, A.L. **Análise Teórica da Resistência à Punção em Lajes Cogumelo com Armadura de Cisalhamento.** Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2000.

CARVALHO, A. S. **Análise Experimental De Lajes Lisas Unidirecionais De Concreto Armado De Alta Resistência Com Metacaulim Apoiadas Em Pilares Retangulares E Armadas À Punção.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Belém, PA. 2006.

CARVALHO, M. L.; SILVA, C. R.; STUCCHI, F. R. Estudo da confiabilidade da punção em lajes lisas sem armadura de cisalhamento de acordo com a NBR6118. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 10, n. 2, p. 276-297, 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/s1983-41952017000200002>.

CARVALHO, R.C.; PINHEIRO, L.M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: 1. Ed., v. 2, São Paulo: Editora Pini, 2009.

CAVALCANTE, J. W. L. **Estudo de Punção em Lajes – Modelos Teóricos e Análise de Códigos Computacionais**. 2016. 66 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.

CHEN CAIBAO. Shear Strength of Reinforced Concrete Flat Plate. **Jianzhu Jiegou Xuebao/Journal of Building Structures**, v. 7, n. 1, p. 49–57, 1986.

CHENG, M. Y.; PARRA-MONTESINOS, G. J. **Evaluation of Steel Fiber Reinforcement for Punching Shear Resistance in Slab-Column Connections - Part I: Monotonically Increased Load**. ACI Structural Journal, v.107, n. 1, p. 101-109, 2010.

CHETCHOTISAK, P.; TEERAWONG, J.; YINDEESUK, S.Y. **Multiple linear regression models for shear strength prediction and design of simply-supported deep beams subjected to symmetrical point loads**. Engineering and Applied Science Research (EASR), v.42, n.3, 2015.

COELHO, A. E. G. **Puncionamento em Lajes Cogumelo de Concreto Armado com Resistência de 30 MPa e Armadura de Cisalhamento Vertical Inclinada**. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 1999.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, CEB – **fib Model Code Design Code 2010: Final Draft**. Bulletin d'Information, CEB, Lousanne, April 2010.

CORDOVIL, F. A. B. **Punção em Placas de Concreto Armado**. 1995. 393 p. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1995.

CORLEY, W. G.; HAWKINS, N. M. **Shearhead Reinforcement for Slabs**. ACI Journal, v. 65, n.10, p. 811-824, 1968.

COSTA, V. C. M.; OLIVEIRA, D. C. de; GOMES, R. B.; GUIMARÃES, G. N. Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado - Retangularidade dos Pilares. **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 5, n. 1m p. 36-36, 2012.

CRUZEIRO, J. W. S. V. G. **Dimensionamento à Punção de Lajes Lisas Apoiadas em Pilares de Seção Transversal Elíptica e Semi-elíptica**. 2018. 94 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, 2018.

DAMASCENO, L. S. R. **Análise experimental de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com pilares retangulares ao puncionamento**, 2007. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Belém, PA. 2007.

DUARTE, F.; MICAEL, I.; VÁLTER, L.; ANTÓNIO, R. Punching of strengthened concrete flat slabs - Experimental analysis and comparison with codes. **Structural Engineering International: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)**, v. 22, n. 2, p. 202–214, 2012. DOI: 10.2749/101686612X13291382990921

EDER, M. A.; VOLLUM, R. L.; ELGHAZOULI, A. Y.; ABDEL-FATTAH. Modelling and experimental assessment of punching shear in flat slabs with shearheads. **Engineering Structures**, v. 32, n. 12, p. 3911–3924, 2010. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.09.004

EINPAUL, J.; BUJNAK, J.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. Study on influence of column size and slab slenderness on punching strength. **ACI Structural Journal**, v. 113, n. 1, p. 135–146, 2016. DOI: 10.14359/51687945

EINPAUL, J.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. Influence of moment redistribution and compressive membrane action on punching strength of flat slabs. **Engineering Structures**, v. 86, p. 43–57, 2015. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.12.032

ELTSNER, R.C., HOGNESTAD, E. **Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs**. Urbana-champaign: American Concrete Institute, 1956. 30p.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. Brussels, p. 225, 2004.

FARIA, D.; BISCAIA, H.; LÚCIO, V.; RAMOS, A. P. Material and geometrical parameters affecting punching of reinforced concrete flat slabs with orthogonal reinforcement. **In: fib Symposium Concrete Engineering for Excellence and Efficiency**, Prague, p. 571-574, 2011.

FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A.; KUNZ, J. **Strengthening of Flat Slabs Against Punching Shear Using Post-Installed Shear Reinforcement**, ACI Structural Journal, v.107, p. 434-442, 2010.

FERREIRA, M.P. **Punção em lajes lisas de concreto armado com armaduras de cisalhamento e momentos desbalanceados**. 2010. 299 p. Tese (Doutorado). Universidade de Brasília, 2010.

FIGUEIREDO FILHO, D. B.; SILVA JÚNIOR, J. A. **Desvendando os Mistérios do Coeficiente de Correlação de Pearson (r)^{*}**. Revista Política Hoje, v. 18, n. 1, p. 115–146,

FILATOV, V. B.; GALYAUDINOV, Z. S.; BLINKOVA, E. V.; ZHILTSOV, Y. V. Numerical study of stress-strain state of reinforced concrete slab in punching zone. **In: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Paper)**, 2020. DOI: 10.1088/1757-899X/775/1/012136

FORSELL, C.; HOLMBERG, A. **Stampellast pa Plattor av Betong (Concentrated Loads on Concrete Slabs Betong)**. N.2, v.31, Stockholm, 1946.

FOTI, D. Shear vulnerability of historical reinforced-concrete structures. **International Journal of Architectural Heritage**, v. 9, n. 4, p. 453–467, 2015. DOI: 10.1080/15583058.2013.800920

GARDNER, N. J. Relationship of the Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs with Concrete Strength. **ACI Structural Journal**, v. 87, n. 1, 1990. p. 66-71.

GARDNER, N. J.; SHAO, X.-Y. Punching Shear of Continuous Flat Reinforced Concrete Slabs. **ACI Structural Journal**, v. 93, n. 2, 1996. p. 218-228.

GHANNOUM, C. M. **Effect of high-strength concrete on the performance of slabcolumn specimens**. Masters Thesis - Montreal, Canada, Mc Gill University. 85p. 1998.

GOMES, R. B. **Punching Resistance of Reinforced Concrete Flat Slabs with Shear Reinforcement**. Thesis (PhD) - Polytechnic of Central London, 1991. 185 p.

GRAF, O. Tests of reinforced concrete slabs under concentrated load applied near one support (Versuche über die widerstandsfähigkeit von eisenbetonplatten unter konzentrierter last nahe einem auflager). **Deutscher Ausschuss für Eisenbeton**, Berlin, n.73, p.28, 1933.

GUAN, H.; LOO, Y. Comparative study on punching shear behavior of slab edge column connections with opening Developments. **Mechanics of structural and materials**, v. 3, n. 5, 2005. p. 819-825

GUANDALINI, S.; BURDET, O. L.; MUTTONI, A. Punching of Slabs with Low Reinforcement Ratios. **ACI Structural Journal**, v. 106, n. 1, 2009. p. 87-95.

GUANDALINI, S.; MUTTONI, A. Symmetrical Punching Tests on Slabs without Transverse Reinforcement. **Test Report, École Polytechnique Fédérale de Lausanne**, Lausanne, Switzerland, 2004. (in French)

HALLGREN, M. **Punching Shear Capacity of Reinforced High Strength Concrete Slabs**. Thesis (PhD) - Royal Institute of Technology, 1996.

HAWKINS, N. M., FALSSSEN, H. B., HINOJOSA, R. C. Influence of column rectangularity on the behaviour of flat plate structures. **Detroit: American Concrete Institute**, 1971.

HEINZMANN, D.; ETTER, S.; VILLIGER, S. e JAEGER, T. Punching Tests on Reinforced Concrete Slabs with and without Shear Reinforcement. **ACI Structural Journal**, v 109., n. 6. p 787-794, 2012.

HOANG, M. A **Chaos-based Image Cryptosystem Using Nonstationary Dynamics of Logistic Map**. In: International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC), p. 591-596, 2019. DOI: 10.1109/ICTC46691.2019.8939826.

HOGNESTAD, E. **Shearing strength of reinforced column footings**. ACI Journal, v. 50, n.3, p. 189-208, 1953.

HOLANDA, K. M. A.; HANAI, J. B. **Análise Prospectiva das Similaridades de Efeitos da Adição de Fibras de Aço na Resistência à Punção de Lajes-Cogumelo e ao Cisalhamento de Vigas de Concreto**. Anais do V Simpósio EPUSP Sobre Estruturas de Concreto, 2003.

INÁCIO, M. M. G.; ALMEIDA, A. F. O.; FARIA, D. M. V.; LÚCIO, V. J. G.; RAMOS, A. P. Punching of high strength concrete flat slabs without shear reinforcement. **Engineering Structures**, v. 103, n. 08, p. 275–284, 2015. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.09.010

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. **fib Model Code for Concrete Structures**. p. 114-148, 2010.

JOSEPH, R. A.; LAKSHMI, P. Study on Effect of Concrete Compressive Strength and Column Shape on Punching Shear Stress in Flat Plate Systems. **International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)**, v. 6, n. 06, p. 2–5, 2018.

KINNUNEN, S.; NYLANDER H. Punching of Concrete Slabs without Shear Reinforcement. **Transaction n. 158**, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1960. 112 p.

KINNUNEN, S.; NYLANDER, H.; TOLF, P. Plattjocklekens inverkan på betongplattors hållfasthet vid genomstansning. Försök med rektangulära plattor. **Bulletin 137**, Department of Structural Mechanics and Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1980. 73p.

KOMORN, J.; FDG, F.; FDG, F. State - of - the - Art in Modeling Nonlinear Dependence Among Many. **Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems**, v. 13, n. 3, p. 1–8, 2019. DOI: 10.14313/JAMRIS/3-2019/27

KRUEGER, G. **Résistance au poinçonnement excentré des planchers-dalles**. Thesis (PhD) - Lausanne, Suisse, 1999.

KRUEGER G.; BURDET O.; FAVRE R. **Influence de la rigidité des colonnes sur la résistance au poinçonnement**, Rapport des essais IBAP - DGC - EPFL, n. 147, 1999.

KUERES, D.; RICKER, M.; CLABEN, M.; HEGGER, J. Fracture kinematics of reinforced concrete slabs failing in punching. **Engineering Structures**, v. 171, p. 269–279, 2018. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.012

LADNER, M. **Einfluss der Maßstabsgröße bei Durchstanzversuchen - Ableitung eines begründeten Übertragungsgesetzes**. *Material und Technik*, n.2, p. 60-68, 1973.

LADNER, M.; SCHAEIDT, W.; GUT, S. **Experimentelle Untersuchungen an Stahlbeton-Flachdecken**. Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt, Bericht, n.205, 1977.

LANTSOGHT, E. Literature Review of Punching Shear in Reinforced Concrete Slabs. **CEE 8956, Special Research Problem**, 2009.

LEE, J.H.; YOON, Y.S.; LEE, S.H.; COOK, W. D.; MITCHELL D. Enhancing Performance of Slab-Column Connections. **Journal of Structural Engineering**, v. 134, n. 3, p. 448-45, 2008.

Li, K. K. L. **Influence of Size on Punching Shear Strength of Concrete Slabs**. Masters Thesis - Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, Montreal, Quebec, McGill University, 2000.

LIBERATI, E. A. P. **Análise De Confiabilidade De Lajes Lisas De Concreto Armado Submetidas À Punção**. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

LIMA NETO, A. F. **Análise Experimental na Fase de Pós-Puncionamento de Lajes Cogumelo de Concreto Armado**, Anais do 46º Congresso Brasileiro do Concreto, 2004.

LONG, A. E. A Two-Phase Approach to the Prediction of the Punching Strength of Slabs. **ACI Journal Proceedings**, v. 72, n. 2, p. 37–45, 1975.

LOO, Y.; CHIANG, L. **Methods of Punching Shear Strength analysis of Reinforced Concrete Flat Plates- A Comparative Study**. Structural Engineering and Mechanics, v. 1 n. 1, 1993. p. 75-86.

LOVROVICH, J. S.; MCLEAN, D. I. **Punching Shear Behavior of Slabs Varying Span-Depth Ratios**. ACI STRUCTURAL JOURNAL, v.87, n.5, p. 507-511, 1990.

MAMADE, N. F. S.; RAMOS, A. P.; FARIA, D. M. V. Experimental and parametric 3D nonlinear finite element analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement. **Engineering Structures**, v. 48, p. 442–457, 2013. DOI: /10.1016/j.engstruct.2012.09.035

MARQUE, N. L. A.; NOGUEIRA, C. G. **Probabilistic analysis of slab-column connections subjected to punching shear according to the ABNT NBR 6118 (2014) recommendations considering the model error measure**. Revista IBRACON Estruturas e Materiais, v. 14, n. 6, ed. 14609, 2021. DOI: doi.org/10.1590/S1983-41952021000600009

MARQUES, M. G. **Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Aberturas Adjacentes ao Pilar e Armadura de Cisalhamento**. 2018. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

MARTI, P.; THÜRLIMANN, B. **Fliessbedingung für Stahlbeton mit Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit**. BuStb, n.72, v.1, p. 7-12, 1977.

MARTINELLI, M.; CAMPOS FILHO, A. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos ao Estudo de Lajes de Concreto Armado Submetidas à Punção**. Anais do V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 2003.

MARZOUK, H.; HUSSEIN, A. Punching Shear Analysis of Reinforced High-Strength Concrete Slabs. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 18, n. 6, p. 954-963, 1991.

MARZOUK, H.; EMAM, M.; HILAL, M. S. **Effect of High-Strength Concrete Columns on the Behavior of Slab-Column Connections**. ACI STRUCTURAL JOURNAL, v.93, n.5, p.1-8, 1996.

MARZOUK, H.; EMAM, M.; HILAL, M. S. **Effect of High-Strength Concrete Columns on the Behavior of Slab-Column Connections**. ACI STRUCTURAL JOURNAL, v.95, n.3, p. 227-237, 1998.

MCHARG, P. J. C.; MITCHELL, D.; YOON, Y.-S. **Improved Transmission of High-Strength Concrete Column Loads through Normal Strength Concrete Slabs**. *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, v.97, n.1, p.149-157, 2000.

MELGES, J. L. P. **Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experimental**. 1995. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 1995.

MELGES, J. L. P. **Análise Experimental da Punção em Lajes de Concreto Armado e Protendido**. 2001. 414 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 2001.

MELO, G. S. S. A. **Behavior of Reinforced Concret Flat Slabs After Local Failure**. Thesis (PhD) - Polytechinc of Central London, 1990. 214 p.

MOE, J. **Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings Under Concentrated Loads**. Development Department Bulletin D47, Portland Cement Association, Skokie, Illinois, p. 129, 1961.

MORAES NETO, B. N.; OLIVEIRA, D. R. C.; MACÊDO, A. N. **Influência do Modo de Solicitação na Resistência Última de Lajes Lisas de Concreto Armado com Pilares Retangulares e Armadura Inclinada de Punção**. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, v.13, n. 1, p. 7-20, 2016.

MOKHTAR, A. **Design of Stud Shear Reinforcement for Concrete Flat Plates**. Thesis (PhD) - Department of Civil Engineering, University of Calgary, 1982.

MOKHTAR, A. S.; GHALI, A.; DILGER, W. **Stud Shear Reinforcement for Flat Concrete Plates**. *ACI Structural Journal*, v.82, n. 5, p. 676-683, 1985.

MOYA, F. B. V.; MENARGUES, M. N.; ORTS, D. B.; CHORRO, S. I. **Análisis Paramétrico Automatizado de Losas de Hormigón Sometidas a Punzonamiento**. *Revista DYNA*, v. 94, p. 106-111, 2019. DOI: 10.6036/8777

MENÉTREY, P. **Synthesis of punching failure in reinforced concrete**. *Cement and Concrete Composites*, v. 24, n. 6, p. 497–507, 2002. DOI: 10.1016/S0958-9465(01)00066-X

MICALLEF, K.; SAGASETA, J.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. **Assessing punching shear failure in reinforced concrete flat slabs subjected to localised impact loading**. *International Journal of Impact Engineering*, v. 71, p. 17–33, 2014. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2014.04.003

MORAES NETO, B.N. **Análise Experimental de Lajes Lisas Bidirecionais de Concreto Armado com Estribos Inclinados e Pilares Retangulares Sujeitas a Puncionamento Simétrico**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2007.

MOSTOFINEJAD, D.; JAFARIAN, N.; NADERI, A.; MOSTOFINEJAD, A.; SALEHI, M. **Effects of openings on the punching shear strength of reinforced concrete slabs**. *Structures*, v. 25, n. March, p. 760–773, 2020. DOI: 10.1016/j.istruc.2020.03.061

MOURO, V. G. **Punção em Lajes Cogumelo – Estudo da Retangularidade dos Pilares**. 2006. 137 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Goiás, 2006.

MOURO, V. C.; GOMES, R.B.; GUMARÃES, G.N. Resistência à Punção em Lajes de Concreto Armado – Estudo da Retangularidade dos Pilares. **In: Congresso de Pesquisa, Ensino e Extensão da UFG – CONPEEX**, 2, 2005. Goiânia.

MUTTONI, A. Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 105, n. 4, 2008. p. 440-450.

MUTTONI, A. Shear and Punching Strength of Slabs without Shear Reinforcement, **Beton- und Stahlbetonbau**, v. 98, n. 2, 2003. p. 74-84.

MUTTONI, A.; FERNANDEZ RUIZ, M. Shear Strength of Members without Transverse Reinforcement as a Function of Critical Shear Crack Width. **ACI Structural Journal**, v. 105, n. 2, 2008. p. 163-172.

MUTTONI, A.; SCHWARTZ, J. Behaviour of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement. **IABSE Colloquium**, v. 62, Zurich, Switzerland, 1991. p. 703-708.

NGUYEN-MINH, L.; ROVNÁK, M.; TRAN-QUOC, T. **Punching Shear Capacity of Interior SFRC Slab-Column Connections**. *Journal of Structural Engineering*, v.138, n. 5, p. 613-624, 2012.

OLIVEIRA, D. M.; SILVA, N. A.; RIBEIRO, S. E. C.; RIBEIRO, C. C.; INOUE, H.; ALMEIDA, M. L. B. **Estimativa do coeficiente majorador dos momentos de primeira ordem em estruturas de concreto armado**. **Brazilian Journal of Development**, v.6, n.5, 2020.

OLIVEIRA, D. R. C. Análise experimental de lajes cogumelo de concreto armado com pilares retangulares. 2003. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, 2003.

OLIVEIRA, M. H. de. **Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento Submetidas a Carregamento Excêntrico e Apoiadas sobre Pilares Retangulares**. 2013. 233 p. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 2013.

OLIVEIRA, D. R.; MELO, G. S.; REGAN, P. E., **Punching Strengths of Flat Plates with Vertical or Inclined Stirrups**. *ACI Structural Journal*, v.97, n.3, p. 485-491, 2000.

OLIVEIRA, D. R. C.; REGAN, P. E.; MELO, G. S. S. **Punching Resistance of RC Slabs with Rectangular Columns**. *Magazine of Concrete Research*, v. 56, n. 3, p. 123-138, 2004.

OMCIK, D.; VETROVSKY, T.; PADECKY, J.; VANBELLE, S.; MALECEK, J.; TUFANO, J. J. **Punch Trackers: Correct Recognition Depends on Punch Type and Training Experience**. *Sensors*, v.21, n.2968, 2021. DOI: 10.3390/s21092968

OSMAN, M.; MARZOUK, H.; HELMY, S. **Behavior of High-Strength Lightweight Concrete Slabs under Punching Loads**. *ACI Structural Journal*, v.97, n.3, p. 492-498, 2000.

OZBOLT, J.; VOCKE, H.; ELIGEHAUSEN, R.: **Three-Dimensional Numerical Analysis of Punching Failure**. Proceedings of the International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs, Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, Stockholm, 2000, p. 65-74.

Ozden, S.; Ersoy, T. U. O. **Punching Shear Tests of Normal-and High-strength Concrete Flat Plates**. Can. Ji, NRC Canada 33, 2006.

PAIVA, O. S.; FERREIRA, M. P.; OLIVEIRA, D. R. C.; LIMA NETO, A. F.; TEIXEIRA, M. R. Influence of the column rectangularity index and of the boundary conditions in the punching resistance of slab-column connections. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 8, n. 3, p. 260–295, 2015. DOI: 10.1590/S1983-41952015000300003

PALHARES, R. A. **Análise Experimental da Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Variação da Ancoragem da Armadura de Cisalhamento**. 2018. 156 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 2018.

PEIRIS, C.; GHALI, A. **Flexural Reinforcement Essential for Punching Shear Resistance of Slabs**. ACI Structural Journal, v.287, p. 1-16, 2012.

PINTO, V. C. **Punção em lajes lisas bidirecionais de concreto armado com furos e pilares com secção transversal em “L”**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.177p.

PRALONG, J.; BRÄNDLI, W.; THÜRLIMANN, B. **Durchstanzversuche an Stahlbeton und Spannbetonplatten**. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, v.3, 1979.

RABELLO, F. T. **Estudo de lajes lisas de concreto com visão integrada de flexão e punção**. 2016. 268 p. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

RAMADAN, O.; METWALLEY, K.; YOUNIS, G. Punching shear analysis of reinforced concrete flat plates. In: **The 2015 world congress in Advanced in structural engineering and mechanics (ASEM2015)**, p. 25-29, 2015.

RAMDANE, K. E. **Punching Shear of High Performance Concrete Slabs. Utilization of High Strength/High Performance Concrete**. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, v.13, n.3, p. 1015-1026, 1996.

RAMOS, A. P.; LÚCIO, V. J. G.; REGAN, P. E. **Punching of flat slabs with in-plane forces**. Engineering Structures, v.33, p. 894-902, 2011. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.12.010

RANKIN, G. I. B.; LONG, A. E. **Predicting the Enhanced Punching Strength of Interior Slab-Column Connections**. Institution of Civil Engineers, Proceedings, v.82, n.3, p. 1165-1186, 1987.

RANKIN, G. I. B.; LONG, A. E. Punching strength of conventional slab-column specimens. **Engineering Structures**, v. 178, n. September 2017, p. 37–54, 2019. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.10.014

RICHART, F. E. **Reinforced concrete wall and column footings**. ACI Journal, v.45, n.2, p. 97-127, 1948.

ROLL, F.; ZAIDI, S. T. H.; SABNIS, G.; CHUANG, K. **Shear Resistance of Perforated Reinforced Concrete Slabs**. ACI Publication, Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems v.30, p. 77-101, 1971.

ROSENTHAL, I. **Experimental investigation of flat plate floors**. ACI Journal, 1959.

SAGADEVAN, R.; RAO, B. N. Experimental and analytical investigation of punching shear capacity of biaxial voided slabs. **Structures**, v. 20, p. 340-352, 2019. DOI: 10.1016/j.istruc.2019.03.013

RASHWAN, M. R.; RASHED, Y. F.; MEHANNY, S. S. F.; MOHAREB, R. W. Novel warping-included punching parameters for interior rectangular columns in flat slabs. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 112, n. May 2019, p. 1–12, 2020. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.11.009

REGAN, P. E. Symmetrical Punching of Reinforced Concrete Slabs. **Magazine of Concrete Research**, v. 38, v. 136, p. 115-128, 1986.

RICKER, M.; SIBURG, C. Punching shear strength of flat slabs – critical review of Eurocode 2 and fib Model Code 2010 design provisions. **Structural Concrete**, v. 17, n. 3, p. 457–468, 2016. DOI: 10.1002/suco.201500106

ROMBACH, G. A. **Finite element design of concrete structures**. London: Thomas Telford, 2004.

SACRAMENTO, P. V. P.; FERREIRA, M. P.; OLIVEIRA, D. R. C.; MELO, G. S. S. A. Punching strength of reinforced concrete flat slabs without shear reinforcement. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 5, n. 5, p. 659-691, 2012. DOI: 10.1590/S1983-41952012000500005

SAGADEVAN, R.; RAO, B. N. Experimental and analytical investigation of punching shear capacity of biaxial voided slabs. **Structures**, v. 20, n. February, p. 340–352, 2019. DOI: 10.1016/j.istruc.2019.03.013

SAGASETA, J.; TASSINARI, L.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. Punching of flat slabs supported on rectangular columns. **Engineering Structures**, v. 77, p. 17–33, 2014. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.07.007

SALEH, H.; KALFAT, R.; ABDOUKA, K.; AL-MAHAIDI, R. Experimental and numerical study into the punching shear strengthening of RC flat slabs using post-installed steel bolts. **Construction and Building Materials**, v. 188, p. 28–39, 2018. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.08.064

SANTOS, L. A. **Punção em Lajes-Cogumelo – Estudo da Adição de Fibras de Aço**. ruAnais do 47º Congresso Brasileiro do Concreto, 2005, 15p.

SANTOS, D. F. A.; LIMA NETO, A. F.; FERREIRA, M. P. Punching shear resistance of reinforced concrete footings: evaluation of design codes. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 11, n. 2, p. 432–454, 2018. DOI: 10.1590/s1983-41952018000200011

SARVAICOVA, S.; BORZOVIC, V.; AUGUSTIN, T. The influence of a column shape cross-section on the punching capacity. **In: 13th International Conference MODERN BUILDING MATERIALS, STRUCTURES AND TECHNIQUES**, Lithuania, 2019. DOI: 10.3846/mbmst.2019.094

SCHAEFERS, U. **Konstruktion, Bemessung und Sicherheit gegen Durchstanzen von balkenlosen Stahlbetondecken im Bereich der Innenstützen**. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton v. 357, 1984.

SCHAEIDT, W.; LADNER, M. (1970). **Berechnung von Flachdecken auf Durchstanzen**. Schriftenreihe der Schweizerischen Zement-Industrie, Wildegg, Switzerland, 1970.

SCHMIDT, P.; KUERES, D.; HEGGER, J. Contribution of concrete and shear reinforcement to the punching shear resistance of flat slabs. **Engineering Structures**, v. 203, n. October 2019, p. 109872, 2020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109872

SCHMIDT, P.; KUERES, D.; HEGGER, J. Punching shear behavior of reinforced concrete flat slabs with a varying amount of shear reinforcement. **Structural Concrete**, v. 21, n. 1, p. 235–246, 2020. DOI: 10.1002/suco.201900017

SETIAWAN, A.; VOLLUM, R. L.; MACORINI, L.; IZZUDDIN, B. A. Punching shear design of RC flat slabs supported on wall corners. **Structural Concrete**, n. November 2019, p. 1–16, 2020. DOI: 10.1002/suco.201900514

SHAABAN, A. M.; GESUND, H. **Punching Shear Strength of Steel Fiber Reinforced Concrete Flat Plates**. ACI STRUCTURAL JOURNAL, v.91, n.3, p. 406-414, 1994.

SHEHATA, I. A. E. M. **Theory of Punching in Concrete Slabs**. 1985. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London, 1985.

SHEMBADE, K. T. Punching of High Strength Concrete Flat Slabs without Shear Reinforcement. **International Journal of Engineering Research & Technology**, v. 6, n. 8, p. 296 – 309, 2017.

SHERIF, A. G.; DILGER, W. H. Punching Failure of a Full Scale High Strength Concrete Flat Slab. **In: International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs – Proceedings**, TRITA-BKN Bulletin 57, Stockholm, Sweden, 2000, pp 235-243.

SHERIF, A.G.; DILGER, W.H. Analysis and Deflections of Reinforced Concrete Flat Slabs. **Canadian Journal Civil Engineering**, v. 25, p. 451 – 46, 1998.

SILVA, J. A. **Punção em Lajes Cogumelo: Pilares Retangulares, Furos e Armadura de Cisalhamento**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás, 2003.

SILVA MAMEDE, N. F.; PINHO RAMOS, A.; FARIA, D. M. V. Experimental and parametric 3D nonlinear finite element analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement. **Engineering Structures**, v. 48, p. 442–457, 2013. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.09.035

SISTONEN, E.; LYDMAN M.; HOUINEN, S. **Terasbetonilaatan Lavistyskapasiteetin Laskentakaavan Geometrinen Malli**. Talonrakennustekniikan Laboratorio, Report 69 TKK/TRT, 1997.

SOARES, L. F. S.; VOLLUM, R. L. Comparison of punching shear requirements in BS 8110, EC2 and MC2010. **Magazine of Concrete Research**, v. 67, n. 24, p. 1315–1328, 2015. DOI: 10.1680/mac.14.00432

SOUSA, A. M. D.; EL DEBS, M. K. Shear strength analysis of slabs without transverse reinforcement under concentrated loads according to NBR 6118:2014. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 12, n. 3, p. 658–693, 2019. DOI: 10.1590/s1983-

SOUZA, R. M. de. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado Com Furos Adjacentes ou Distantes de Um Pilar Interno**. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 2004

SOUZA, R. M. de. **Punção Em Lajes Lisas De Concreto Armado Com Furos Adjacentes Ao Pilar E Transferência De Momento**. 2008. 407 p. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 2008.

SOUZA, R. A., BITTENCOURT, T. N. Definição de expressões visando relacionar f_c e f_{ck} . **In: IV Encontro Tecnológico da Engenharia Civil e Arquitetura**, Maringá, Paraná, 2003, Anais, Maringá, 2003, v. 1, p. 282-290.

SUNDQUIST, H.; KINNUNEN, S. **The effect of large column section and slab thickness taper on the punching shear capacity of flat slabs**. Department. of Civil and Architectural Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2004 (in Swedish).

SWAMY, R. N.; ALI, S. A. R. **Punching Shear Behavior of Reinforced Slab-Column Connections Made with Steel Fiber Concrete**. *ACI Journal, Proceedings* v.79, n. 5, p. 392-406, 1982.

TALBOT, A. N. Reinforced concrete wall footings and column footings. University of Illinois, Engineering Experiment Station. **Bull n. 67**, p. 114, 1913.

TAYLOR, R.; HAYES, B. **Some Tests on the Effect of Edge Restraint on Punching Shear in Reinforced Concrete Slab**. *Magazine of Concrete Research*, v.17, n.50, p. 39-44, 1965.

TEIXEIRA, M. D. E.; BARROS, J. A. O.; CUNHA, V. M. C. F.; MORAES-NETO, B. N.; VENTURA-GOUVEIA, A. Numerical simulation of the punching shear behaviour of self-compacting fibre reinforced flat slabs. **Construction and Building Materials**, v. 74, p. 25–36, 2015. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2014.10.003

TENG, S.; CHANTHABOUALA, K.; LIM, D. T. Y.; HIDAYAT, R. Punching shear strength of slabs and influence of low reinforcement ratio. **ACI Structural Journal**, v. 115, n. 1, p. 139–150, 2018. DOI: 10.14359/51701089

THEODORAKOPOULOS, D.; SWAMY, N. **Contribution of Steel Fibers to the Strength Characteristics of Lightweight Concrete Slab-Column Connections Failing in Punching Shear**. *ACI STRUCTURAL JOURNAL*, v.90, n.4, p. 342-355, 1993.

TOLF, P. **Plattjocklekens inverkan på betongplattors hållfasthet vid genomstansning.** Försök med cikulära plattor. Department of Structural Mechanics and Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, n.146, 1988.

Tomaszewicz, A. **High Strength Concrete: SP2 - Plates and Shells Report 2.3 Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs.** SINTEF Structures and Concrete, Trondheim, Norway, 1993.

TRAUTWEIN, L. M. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado: Análise Experimental e Numérica.** 2006. 350 p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

VU, D. H.; MUTTAQI, K. M.; AGALGAONKAR, A. P. **A variance inflation factor and backward elimination based robust regression model for forecasting monthly electricity demand using climatic variables.** Applied Energy, v.140, n.15, p. 385-394, 2015. DOI: 10.1016/j.apenergy.2014.12.011

YAMADA, T.; NANNI, A.; ENDO, K. **Punching Shear Resistance of Flat Slabs: Influence of Reinforcement Type and Ratio.** ACI Structural Journal, v.89, n.5, 1992.

YITZHAKI, D. **Punching strength of reinforced concrete slabs.** ACI Journal, v. 63, n.5, p. 527-540, 196.

WERNECK, P. P. T. **Avaliação da punção em lajes lisas de concreto armado.** Trabalho de conclusão de curso (Graduação). Escola Politécnica. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017.

WESTERGAARD, H. M.; SLATER, W. A. **Moments and stress in slabs.** Proc. Am. Conc. Inst, v. 17, p. 415–538, 1921. DOI: <https://doi.org/10.14359/15734>.

XUE, H.; GUAN, H.; GILBERT, B. P.; LU, X.; LI, Y. **Simulation of Punching and Post-Punching Shear Behaviours of RC Slab-Column Connections.** Magazine of Concrete Research, 2021.