UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Alex Melges Barbosa

Classes Características de Variedades Topológicas e Generalizadas

São Carlos - SP
2022

Alex Melges Barbosa

Classes Características de Variedades Topológicas e Generalizadas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos

São Carlos - SP
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Alex Melges Barbosa, realizada em 24/03/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos (UFSCar)

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher (UFSCar)

Prof. Dr. João Peres Vieira (UNESP)

Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos (USP)

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior (USP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Aos meus pais
Antonio Carlos e Edith
e aos meus irmãos
Carol e André.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer a Deus pelas oportunidades e portas que se abriram durante esses 11 anos de carreira acadêmica, entre graduação, mestrado e doutorado. Foram diversas situações boas e também difíceis que me tornaram a pessoa e o profissional que sou hoje.

Também quero agradecer aos meus pais Antonio Carlos e Edith e aos meus irmãos Carol e André, que foram e são o meu suporte de todos os dias.

Não posso deixar de fazer um agradecimento particular para essas duas pessoas que foram os meus mestres durante todo esse processo e que me moldaram não só no matemático que sou hoje, mas principalmente na pessoa na qual me tornei. Muito obrigado, Edivaldo e João Peres.

Por fim, e não menos importante, quero agradecer aos meus amigos que foram a minha segunda família durante essa longa caminhada. Não vejo necessidade de citá-los, pois só aqueles que me ergueram nos meus tropeços e que comemoraram junto comigo o meu sucesso saberão o real motivo desse agradecimento e do meu carinho por eles.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Em memória ao meu pai, Antonio Carlos Barbosa. Infelizmente o senhor não pôde estar presente fisicamente no dia da minha defesa, mas com certeza esteve e estará presente no coração de todo a nossa família. Obrigado por tudo!

Ou você tem uma estratégia,
ou será parte da estratégia
de alguém.

Alvin Toffler

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos inicialmente os fibrados generalizados, conceito desenvolvido por Fadell com o objetivo generalizar os fibrados vetoriais, as classes de Stiefel-Whitney e a fórmula de Wu do contexto de variedades suaves para variedades topológicas. Feito isso, utilizaremos os fibrados generalizados para obter resultados originais sobre classes de Thom, de Stiefel-Whitney, de Wu e de Euler de variedades topológicas, bem como apresentar uma segunda prova da fórmula de Wu para variedades topológicas e a versão topológica do teorema de Poincaré-Hopf. Por fim, utilizaremos as dualidades de Poincaré e Poincaré-Lefschetz para construir de forma mais abrangente as classes de Stiefel-Whitney de variedades generalizadas afim de apresentar pela primeira vez na literatura uma prova da fórmula de Wu para tais variedades.

Palavras-chaves: classes características, fibrados generalizados, variedades topológicas, variedades generalizadas, fórmula de Wu.

Abstract

In this work, we will initially present generalized bundles, a concept developed by Fadell with the objective of generalizing vector bundles, Stiefel-Whitney classes and Wu's formula from the context of smooth manifolds to topological manifolds. After that, we will use the generalized bundles to obtain original results of Thom, Stiefel-Whitney, Wu and Euler classes of topological manifolds, as well as present a second proof of Wu's formula for topological manifolds and the topological version of the Poincaré-Hopf theorem. Finally, we will use the Poincaré and Poincaré-Lefschetz dualities to more comprehensively construct the Stiefel-Whitney classes of generalized manifolds in order to present, for the first time in the literature, a proof of the Wu's formula for such manifolds.

Keywords: characteristic classes, generalized bundles, topological manifolds, generalized manifolds, Wu's formula.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Notações

1. Dizer que $f : X \to Y$ é uma aplicação significa o mesmo que f ser uma função contínua entre espaços topológicos.
2. $f : X \rightleftarrows Y : g$ denota duas aplicações quando $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$, não necessariamente uma inversa da outra.
3. $1 : X \to X$ denota a aplicação identidade de X.
4. f^{-1} denota a pré-imagem de uma aplicação f, bem como sua aplicação inversa (quando existir).
5. Se $f : X \to Y$ é uma aplicação, então $f(\_)$ denota $f(x)$ para todo $x \in X$.
6. Se $H : X \times Y \to Z$ é uma aplicação definida num cartesiano, então $H(\_, y)$ denota $H(x, y)$ para todo $x \in X$. O mesmo para $H(x, \_)$.
7. $p_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ denota a projeção no $i-$ésimo fator.
8. $d : X \to X \times X$ denota a aplicação diagonal dada por $d(x) = (x, x)$.
9. Dizer que $U \subset X$ é uma vizinhança aberta de algum subconjunto $A \subset X$ significa o mesmo que U ser um subespaço aberto de X que contem A.
10. Dizer que $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de um espaço topológico B significa o mesmo que dizer que $\mathcal{U} = \{U \subset B\}$, de modo que $U \subset B$ é um subespaço aberto de B para todo $U \in \mathcal{U}$ e $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U = B$.
11. $X \approx Y$ denota quando dois espaços topológicos são homeomorfos.
12. $f \sim g$ denota quando duas funções são homotópicas.
13. $X \sim Y$ denota quando dois espaços topológicos tem o mesmo tipo de homotopia.
14. $G_1 \cong G_2$ denota quando dois objetos algébricos são, apropriadamente, isomorfos.
15. $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}$.
16. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\}$.
17. $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < 1\}$.
18. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.
19. X^I denota o espaço topológico dos caminhos em X.

20. $\Omega(X, x_0) = \{\omega \in X^I \ : \ \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$

21. $H_k(X, A; R)$ e $H^k(X, A; R)$ denotam os $k-$ésimos $R-$módulos de homologia e cohomologia singular, respectivamente, do par (X, A) com coeficientes em um anel R comutativo e com unidade.

22. $H_k^c(X, A; R)$ e $H_c^k(X, A; R)$ denotam, respectivamente, os $k-$ésimos $R-$módulos de homologia e cohomologia singular com suporte compacto.

23. $\widetilde{H}_k(X, A; R)$ e $\widetilde{H}^k(X, A; R)$ denotam, respectivamente, os $k-$ésimos $R-$módulos de homologia e cohomologia singular reduzidos.

24. $\check{H}^k(X, A; R)$ denota o $k-$ésimo $R-$módulo de cohomologia de Čech.

25. $H^k(X, A; R) = (x)$ denota que o $k-$ésimo $R-$módulo de cohomologia do par (X, A) é gerado pelo elemento $x \in H^k(X, A; R)$. O mesmo para módulos de homologia.

26. se $x \in H^k(X, A; R)$, então denotamos $|x| = k$. O mesmo para módulos de homologia.

27. $<,>$: $H^k(X, A; R) \otimes H_k(X, A; R) \to R$, que associa $\varphi \otimes \sigma \mapsto < \varphi, \sigma >$, denota o produto de Kronecker.

28. $\frown$: $H_k(X, A \cup B; R) \otimes H^l(X, A; R) \to H_{k-l}(X, B; R)$, que associa $\sigma \otimes \varphi \mapsto \sigma \frown \varphi$, denota o produto cap.

29. $\smile$: $H^k(X, A; R) \otimes H^l(X, B; R) \to H^{k+l}(X, A \cup B; R)$, que associa $\varphi \otimes \psi \mapsto \varphi \smile \psi$, denota o produto cup.

30. $\times : H^k(X, A; R) \otimes H^l(Y, B; R) \to H^{k+l}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); R)$, que associa $\varphi \otimes \psi \mapsto \varphi \times \psi$, denota o produto cross.

Capítulo 1

Introdução

"Entre os dias 4 e 10 de Setembro de 1935, durante o Congresso Internacional de Topologia realizado em Moscow, foram apresentados vários trabalhos que mudariam pra sempre o futuro da Topologia Algébrica, sendo alguns desses trabalhos considerados hoje linhas de pesquisa base dessa teoria. Dentre esses trabalhos, podemos citar:

- *a introdução dada por Witold Hurewicz aos grupos de homotopia;*
- *as palestras de Heinz Hopf e Hassler Whitney sobre campo de vetores e fibrados de esfera, que deram início aos estudos dos fibrados vetoriais e, consequentemente, às classes características;*
- *as introduções independentes dadas por James Alexander e Andrei Kolmogorov à teoria de cohomologia, bem como ao produto cup."*

Neste trabalho, iremos contribuir para a teoria das classes características, mais especificamente, classes características de variedades topológicas e generalizadas.

Feita essa contextualização histórica sobre o surgimento da teoria das classes características, começaremos a introduzir os conceitos base que foram utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

Em 1955, Nash apresentava em [42] o conceito que ficaria conhecido como campo de caminhos não singulares de uma variedade topológica, que pode ser entendido como a versão topológica de um campo de vetores não nulos. Essencialmente, Nash mostrou que dada uma variedade suave M e fixado um ponto $b \in M$, o espaço dos vetores tangentes não nulos de M em b também pode ser definido do ponto de vista topológico, a menos de uma equivalência homotópica, como sendo o conjunto $\{\omega \in M^I \,:\, \omega(t) = b \Leftrightarrow t = 0\}$.

Uma década depois, em 1965, Fadell definia em [18] os fibrados generalizados, conceito esse que além de generalizar os fibrados vetoriais, também permitiu extender, através das ideias de Nash em [42], a noção de fibrados tangente e normal do contexto de variedades suaves para variedades topológicas. Ainda, Fadell construiu as classes de Stiefel-Whitney dos fibrados generalizados a fim de obter a dualidade de Whitney para mergulhos topológicos específicos e demonstrar a fórmula de Wu para variedades topológicas.

A teoria desenvolvida por Fadell em [18] servirá como base para o desenvolvimento de todo o nosso trabalho, que poderá ser dividido em duas partes:

- a primeira parte consistirá dos capítulos 2, 3 e 4. Esses capítulos poderão ser interpretados como uma releitura, numa linguagem mais moderna, dos resultados obtidos por Fadell em [18], bem como uma continuação do mesmo, uma vez que apresentaremos resultados a mais tanto sobre fibrados generalizados em si, quanto sobre classes de Thom, de Stiefel-Whitney, de Euler e de Wu de variedades topológicas;

- já a segunda parte desse trabalho consistirá apenas do capítulo 5, em que construiremos de forma mais abrangente as classes de Stiefel-Whitney de variedades generalizadas afim de apresentar pela primeira vez na literatura uma prova da fórmula de Wu para tais variedades.

Agora, veremos mais detalhadamente como organizaremos a estrutura do nosso trabalho, apontando nossas contribuições e a relevância dos resultados que serão aqui apresentados.

No capítulo 2, iniciaremos nosso trabalho apresentando os estudos realizados sobre fibrados generalizados, ferramenta desenvolvida por Fadell em [18] que além de generalizar os conceitos de fibrados vetoriais tangente e normal do contexto de variedades suaves para variedades topológicas, também o permitiu definir as classes de Stiefel-Whitney e provar a dualidade de Whitney e a fórmula de Wu para o contexto de variedades topológicas.

Concatenando as definições 2.5, 2.7 e 2.8, podemos definir um fibrado generalizado mais diretamente do seguinte modo:

Definição. *Dados E e B espaços topológicos, $E_0 \subset E$ e $p : E \to B$ uma aplicação sobrejetiva, chamamos o par $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ de $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado quando:*

1. *para quaisquer aplicações $h : X \to E$ e $H : X \times I \to B$, tais que $H(\_, 0) = p \circ h$, existir $\widetilde{H} : X \times I \to E$ contínua tal que $\widetilde{H}(\_, 0) = h$ e $p \circ \widetilde{H} = H$;*
2. *se $x_0 \in X$ é tal que $h(x_0) \in E_0$, então $\widetilde{H}(x_0, \_) \in E_0$;*
3. *existir uma aplicação $s : B \to E$ tal que $E_0 = E - s(B)$;*
4. *para todo $b \in B$, $(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \bigcap E_0) \sim (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$.*

Com essa definição, podemos interpretar um fibrado generalizado como sendo uma fibração com as seguintes características:

- o espaço total é um par de espaços topológicos;
- sempre existe ao menos uma seção global;
- a fibra se comporta, a menos de equivalência homotópica, como um espaço Euclidiano.

Durante a leitura do capítulo 2, o leitor perceberá que o desenvolvimento do capítulo não será tão direto quando comparado com a definição acima, pois nosso objetivo principal será o de apresentar a teoria de fibrados generalizados de forma mais detalhada e numa linguagem mais moderna do que os resultados apresentados por Fadell na primeira metade de [18].

Mais explicitamente, mostraremos no exemplo 2.5 como os fibrados generalizados de fato generalizam os fibrados vetoriais e na proposição 2.1 como a noção de isomorfismo entre fibrados vetoriais se mantém quando extendida para a categoria de fibrados generalizados. Ainda, também mostraremos que é possível construir novos fibrados generalizados a partir de outros da mesma forma que ocorre com fibrados vetoriais, como por exemplo: fibrados generalizados restrição, produto e soma de Whitney.

Mesmo o capítulo 2 sendo um capítulo de preliminares, contribuiremos com resultados originais referentes ao fibrado generalizado pullback, que foi desenvolvido por Brown em [9], mas que sequer foi citado ou utilizado por Fadell em [18]. Tais resultados se mostrarão bem relevantes quando os utilizarmos nas construções de algumas aplicações sobre classes características de variedades topológicas nos capítulos 3 e 4.

Já no capítulo 3, abordaremos o tema de classes características de fibrados generalizados e de variedades topológicas, mais especificamente, classes de Thom, de Stiefel-Whitney e de Euler. Em um primeiro momento, introduziremos a noção de $R-$orientabilidade de fibrados generalizados, sendo R um anel comutativo e com unidade, e suas respectivas classes de Thom, conceitos propostos originalmente por Fadell em [18], porém pouco abordados por ele, uma vez que o tema principal desenvolvido na segunda metade de [18] foi sobre classes de Stiefel-Whitney e, nesse sentido, não há necessidade de se preocupar com a orientabilidade.

Dito isso, detalharemos um pouco mais a definição de $R-$orientabilidade de fibrados generalizados e apresentaremos alguns resultados técnicos sobre o comportamento das classes de Thom nos fibrados generalizados pullback e produto, bem como mostraremos o que ocorre quando invertemos a orientabilidade de um fibrado generalizado e qual a relação entre a dimensão de uma variedade topológica $\mathbb{Z}-$orientável e a classe de Thom do seu fibrado generalizado tangente. Mesmo que esses resultados já sejam conhecidos no contexto de fibrados vetoriais e de variedades suaves, eles poderão ser considerados originais, uma vez que ainda não foram descritos no contexto de fibrados generalizados e variedades topológicas.

O segundo tema que abordaremos no capítulo 3 será sobre classes de Stiefel-Whitney. O intuito desse tópico será o de reescrever as principais propriedades e consequências sobre essas classes, que também já são difundidas na literatura, para o contexto de fibrados generalizados e variedades topológicas seguindo os mesmos passos que Milnor utilizou em ([41], Capítulo 8) para fibrados vetoriais e variedades suaves, fazendo assim uma releitura mais ampla, moderna e detalhada dos resultados propostos por Fadell na segunda metade de [18]. Nossas contribuições para esse tópico serão os resultados envolvendo os fibrados generalizados pullbacks.

O terceiro e último tema que será abordado no capítulo 3 será sobre classes de Euler. Diferentemente das classes de Stiefel-Whitney, as classes de Euler só podem ser definidas para fibrados generalizados $\mathbb{Z}-$orientáveis. Assim, devido aos lemas técnicos referentes às classes de Thom de fibrados generalizados $\mathbb{Z}-$orientáveis obtidos no início do capítulo 3, conseguiremos concluir diversas consequências e aplicações sobre classes de Euler de fibrados generalizados e variedades topológicas, ambos $\mathbb{Z}-$orientáveis. Nesse tópico, exceto pela proposição 3.4, todos os outro resultados serão originais, sendo generalizações de resultados já conhecidos sobre classes de Euler para fibrados vetoriais e variedades suaves. Dentre essas generalizações, destacamos:

Proposição 3.7. *Consideremos $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável. Se $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ admitir uma seção $s : B \to E$ tal que $s(B) \subset E_0$, então $e(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) = 0$.*[1]

A proposição acima em sua versão para fibrados vetoriais é amplamente conhecida, pois possibilita interpretar a classe de Euler de um fibrado vetorial como sendo uma obstrução para a existência de uma seção não nula desse fibrado. Nesse trabalho, apresentaremos a versão generalizada dessa interpretação, que nos permitirá obter a principal aplicação referente a classe de Euler no capítulo 4, a versão topológica do teorema de Poincaré-Hopf.

Até aqui, o leitor já deve ter percebido o objetivo principal dos capítulos 2 e 3 do nosso trabalho, que será o de estruturar detalhadamente e numa linguagem mais atual a teoria de fibrados generalizados e de suas classes características, apresentando também diversas contribui-

[1] $e(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ denotará a classe de Euler do fibrado generalizado $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$.

ções técnicas, com o intuito de obter generalizações de aplicações sobre classes características de variedades suaves para o contexto de variedades topológicas, como veremos a seguir.

O desfecho do nosso trabalho referente a classes características de fibrados generalizados se dará no capítulo 4, em que apresentaremos três grandes aplicações com demonstrações técnicas originais sobre classes de Stiefel-Whitney, de Euler e de Wu de variedades topológicas fechadas. Inicialmente, apresentaremos uma prova alternativa da versão topológica da famosa fórmula de Wu, a qual relaciona as classes de Stiefel-Whitney e de Wu de uma variedade suave por meio dos quadrados de Steenrod.

Em [18], Fadell utiliza os fibrados generalizados para dar uma primeira demonstração da fórmula de Wu para variedades topológicas, baseando-se nas técnicas utilizadas por Milnor em ([40], Capítulo 9). Ainda, os resultados preliminares que Fadell desenvolve para provar a fórmula de Wu são todos no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de (co)homologia singular. Já a prova alternativa da fórmula de Wu para variedades topológicas que apresentaremos no capítulo 4 será baseada em outras técnicas apresentadas também por Milnor, agora encontradas em ([41], Capítulo 11).

Comparando as demonstrações apresentadas por nós nesse trabalho e por Fadell em [18], as principais diferenças serão encontradas no lemas preliminares que serão utilizados na fórmula de Wu, pois nesse trabalho os demonstraremos no âmbito de $R-$módulos de (co)homologia singular com $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$. Como utilizaremos a mesma sequência de resultados utilizada por Milnor em [41], utilizando agora fibrados generalizados ao invés de fibrados vetoriais, nossa principal contribuição se dará na obtenção do caso $R = \mathbb{Z}$ do seguinte resultado:

Lema 4.1. *Sejam M^m uma variedade topológica fechada, conexa e $R-$orientável com $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$, $b \in M$ arbitrário, $j_b : (M, M - \{b\}) \hookrightarrow (M \times M, (M \times M) - \Delta)$ a inclusão canônica, $[M]_b \in H_m(M, M - \{b\}; R)$ a classe de $R-$orientação local de M em b e o gerador $(\tau') = H^m(M \times M, (M \times M) - \Delta; R)$ definido unicamente pela classe de Thom do fibrado generalizado tangente de M. Então:*

$$< j_b^*(\tau', [M]_b) >= 1 \in R$$

A prova do lema acima, em sua versão para variedades suaves, pode ser encontrada em ([41], Lema 11.7, p. 123), sendo que em tal demonstração é utilizada a estrutura Riemanniana da variedade, bem como a existência da aplicação exponencial, enquanto nossa demonstração será obtida de forma totalmente algébrica, nos permitindo generalizar para o contexto de variedades topológicas, o que será imprescindível para as aplicações topológicas da classe de Euler.

A segunda aplicação do capítulo 4 será sobre classes de Euler. Na verdade, apresentaremos duas aplicações sobre esse tema, uma delas sendo a relação entre a classe e a característica de Euler de uma variedade topológica e a outra sendo a versão topológica do teorema de Poincaré-Hopf. O leitor perceberá a importância do caso $R = \mathbb{Z}$ do Lema 4.1 para a primeira aplicação, cujo enunciado é o seguinte:

Teorema 4.2. *Se M é uma variedade topológica fechada, conexa e $\mathbb{Z}-$orientável, então[2]:*

$$< e(M), [M] >= \chi(M)$$

Já para a segunda aplicação sobre classe de Euler, precisaremos definir o conceito de campo de caminhos de uma variedade topológica, que foi apresentado por Nash em [42] da seguinte

[2] $e(M)$, $[M]$ e $\chi(M)$ denotarão, respectivamente, a classe de Euler, a classe de orientação global e a característica de Euler da variedade M.

maneira:

Definição 4.1. *Chamamos de campo de caminhos de uma variedade topológica M qualquer seção do seu fibrado generalizado $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0M, p, M)$. Ainda, um campo de caminhos não singulares de M é uma seção $s : M \to TM$ tal que $s(M) \subset T_0M$.*

Como mostraremos no capítulo 4, os fibrados generalizados nos permitirão generalizar a noção de campo de vetores não nulos do contexto de variedades suaves para variedades topológicas, uma vez toda variedade suave admitirá um campo de vetores não nulos se, e somente se, admitir um campo de caminhos não singulares. Dito isso, conseguiremos provar a versão topológica do teorema de Poincaré-Hopf, cujo enunciado ficará como:

Teorema 4.3. *Seja M uma variedade topológica fechada, conexa e $\mathbb{Z}-$orientável. Se M admitir um campo de caminhos não singulares, então $\chi(M) = 0$.*

Esse resultado foi apresentado pela primeira vez por Brown em [9], utilizando em sua demonstração essencialmente os números de Lefschetz. No nosso trabalho, mostraremos uma prova alternativa desse resultado utilizando classe de Euler.

Como última aplicação do capítulo 4, veremos como alguns resultados técnicos sobre fibrados generalizados nos permitirão provar o seguinte:

Teorema 4.4. *Se $i : M^m \hookrightarrow S^{m+k}$ é um mergulho local-flat*[3]*, entre variedades topológicas fechadas e conexas, com fibrado generalizado normal trivial, então $v(M) = i^*(v(S))$*[4]

Aparentemente, o teorema acima parece ser bem claro e direto, pois se trocarmos as classes de Wu totais pelas classes de Stiefel-Whitney totais, esse resultado será uma consequência imediata da dualidade de Whitney. Entretanto, quando olhamos com mais atenção a demonstração do teorema 4.4 em sua versão para fibrados vetoriais e variedades suaves, que foi dada por Stong em [46] e que pode ser encontrada mais detalhadamente em [43], ficará evidente o uso direto da existência de vizinhança tubular para mergulhos suaves.

Como não podemos garantir a existência de vizinhança tubular no contexto topológico, nossa principal contribuição foi conseguir contornar esse problema utilizando apenas resultados sobre fibrados generalizados, mostrando que a existência da vizinhança tubular não será essencial e sim certas consequências algébricas de um mergulho local-flat.

No último capítulo do nosso trabalho, o capítulo 5, será apresentado pela primeira vez na literatura uma prova da fórmula de Wu para o contexto de variedades generalizadas, utilizando suas dualidades de Poincaré e Poincaré-Lefschetz. Para tanto, faremos no início do capítulo um breve resumo, baseado em [4], [38] e [6], sobre o conceito de variedades generalizadas. Mais explicitamente, faremos as construções desse capítulo para ENR-variedades $\mathbb{Z}_2-$homológicas, que são variedades generalizadas particulares. Por praticidade, continuaremos chamando tais espaços apenas por variedades generalizadas.

Nesse resumo inicial, veremos que as variedades generalizadas são, essencialmente, espaços topológicos que se comportam como variedades topológicas no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de (co)homologia singular. Em particular, poderemos construir as classes de Wu para tais variedades, bem como suas dualidades de Poincaré e de Poincaré-Lefschetz.

[3]Um mergulho local-flat será um mergulho topológico que se comporta localmente como um mergulho suave, cuja definição formal se encontra na definição 2.14.

[4]$v(M)$ e $v(S)$ denotarão, respectivamente, as classes de Wu totais de M e S.

Estabelecidos esses objetos, associaremos a cada mergulho $s : M^m \to N^{2m}$ entre variedades generalizadas compactas, conexas e de modo que exista uma retração[5] $p : N \to M$, o seu isomorfismo transfer dado pela seguinte composição da dualidade de Poincaré-Lefschetz do mergulho s com a dualidade de Poincaré da variedade M:

$$s_! : H_k(N, N - M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_{N,M}^{-1}} H^{2m-k}(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_M} H_{k-m}(M; \mathbb{Z}_2)$$

Assim, o isomorfismo transfer associado ao mergulho s nos permitirá definir a classe de Thom também associada ao mergulho s como sendo o gerador $(\tau_s) = H^m(N, N - M; \mathbb{Z}_2)$.

Motivados pelas técnicas apresentadas por Dold em ([17], Capítulo 8), mostraremos que o homomorfismo $\phi_s : H^k(M; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(N, N - M; \mathbb{Z}_2)$ dado por $\phi_s(x) = p^*(x) \smile \tau_s$ é, de fato, a dualização (via Coeficientes Universais) do isomorfismo transfer $s_!$.

Feito isso, chamaremos ϕ_s de isomorfismo de Thom associado ao mergulho s e definiremos a $k-$ésima classe de Stiefel-Whitney associada ao mergulho s como sendo:

$$w_k(s) = \phi_s^{-1} \circ Sq^k(\tau_s) \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$$

Em particular, definiremos a $k-$ésima classe de Stiefel-Whitney de uma variedade generalizada M como sendo a $k-$ésima classe de Stiefel-Whitney associada ao mergulho dado pela aplicação diagonal $d : M \to M \times M$. Ainda, para que esta definição esteja de fato bem definida, utilizaremos alguns resultados sobre fibrados generalizados apresentados no capítulo 4 para mostrar no teorema 5.5 que, no contexto de variedades topológicas, a definição das classes de Stiefel-Whitney via fibrados generalizados coincide com a definição proposta por nós via classes de Stiefel-Whitney associadas ao mergulho dado pela aplicação diagonal.

Por fim, motivados pelas técnicas apresentadas por Bredon em ([7], Capítulo 6), finalizaremos o capítulo 5, e consequentemente nosso trabalho, mostrando que é possível obter a fórmula de Wu para variedades generalizadas utilizando nossa definição de classes de Stiefel-Whitney associadas ao mergulho dado pela aplicação diagonal de uma variedade generalizada.

Uma vez que Biasi, Daccach e Saeki definiram em [4] as classes de Stiefel-Whitney de variedades generalizadas como sendo a própria fórmula de Wu e apresentaram diversos resultados nesse contexto, ressaltamos a importância da originalidade do capítulo 5 quando definimos as classes de Stiefel-Whitney para variedades generalizadas de uma forma alternativa e provamos a fórmula de Wu para tais variedades.

Encerraremos o capítulo de introdução do nosso trabalho com as palavras de Massey, que podem ser encontradas ([32], Capítulo 21), sobre mais um contexto histórico do surgimento das classes características:

> *"Na conferência de 1935 em Moscow, Hopf apresentou o trabalho de um dos seus alunos, Stiefel, cuja publicação ocorreu somente no ano seguinte. Nesse trabalho, Stiefel definiu certas classes de homologia de uma variedade suave que, numa linguagem moderna, são as classes de Poincaré-dual das classes de Stiefel-Whitney do fibrado vetorial tangente. Seu método consistia em construir, por um processo muito geométrico, os ciclos que representavam essas classes de homologia.*

[5]Ou seja, $p \circ s = 1$.

Whitney deu uma palestra na conferência de Moscow intitulada "Sphere spaces", o que hoje chamamos de fibrados de esferas. Essas duas palestras, e os artigos seguintes, marcaram o início dos trabalhos sobre o tema geral de fibrados vetoriais. Os invariantes mais importantes dos fibrados vetoriais são geralmente várias classes características, mas sempre classes de cohomologia."

William S. Massey

Capítulo 2

Fibrados

Iniciaremos este trabalho apresentando os chamados fibrados generalizados, ferramenta desenvolvida por Fadell em [18] com o intuito de definir as classes de Stiefel-Whitney e provar a dualidade de Whitney e a fórmula de Wu para o contexto de variedades topológicas.

Em um primeiro instante, na seção 2.1, revisaremos conceitos pontuais sobre fibrados vetoriais para fixarmos notações e esclarecer ao leitor de qual maneira os fibrados vetoriais serão naturalmente generalizados no decorrer deste capítulo.

Feito isso, a seção 2.2 servirá como um passo intermediário para definirmos os fibrados generalizados e para exibir os resultados que serão apresentados na seção 2.3 de modo mais claro e sucinto.

Por fim, encontraremos na seção 2.3 a definição e propriedades envolvendo os fibrados generalizados, sendo quase todas retiradas de [18].

Como será explicado na observação 2.1, toda variedade topológica citada no decorrer de todo esse trabalho será uma variedade sem bordo.

2.1 Fibrado Vetorial

Para uma leitura mais específica e detalhada sobre a teoria de fibrados vetoriais, no âmbito de definir classes características, sugerimos [2], [24], [31] e [41].

Definição 2.1. (Fibrado Vetorial) *Considerando E e B espaços topológicos e uma aplicação sobrejetiva $p : E \to B$, chamamos a terna $\xi = (E, p, B)$ de $\mathbb{R}^n-$fibrado vetorial se:*

- *para todo $b \in B$, o conjunto $p^{-1}(b)$ admite uma estrutura de espaço vetorial real $n-$dimensional;*
- *exigimos que ξ seja localmente trivial, isto é: existe uma cobertura aberta $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = B$ de modo que, para cada aberto U_α, exista $h_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U_\alpha)$ homeomorfismo comutando o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dr, "p_1"'] & & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[dl, "p"] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

- *ainda,* $h_\alpha|_{\{b\}\times\mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(b)$ *é um isomorfismo vetorial para todo* $b \in U_\alpha$ *e todo* α*.*

Neste contexto, chamamos ξ *de fibrado vetorial sobre um espaço base* B*, com espaço total* E *e fibra* $F = p^{-1}(b)$ *sobre* $b \in B$*. Ainda, diremos que uma aplicação* $s : B \to E$ *é uma seção de* ξ *se* $p \circ s = 1$*.*

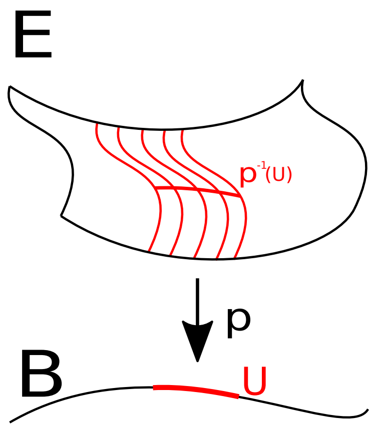

Figura 2.1: Ilustração da trivialidade local de um fibrado vetorial.

Note que, todo fibrado vetorial $\xi = (E, p, B)$ admite uma seção $s : B \to E$, chamada de seção nula, que é definida por $s(b) = 0 \in p^{-1}(b)$.

Definição 2.2. *Dizemos que dois* $\mathbb{R}^n-$*fibrados vetoriais* $\xi = (E, p, B)$ *e* $\xi' = (E', q, B)$ *são isomorfos, denotado por* $\xi \cong \xi'$*, se existir um homeomorfismo* $h : E \to E'$ *tal que* $q \circ h = p$ *e* $h|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \to q^{-1}(b)$ *seja um isomorfismo vetorial para todo* $b \in B$*.*

Agora, lembremos como definir em específico os fibrados vetoriais tangente e normal de uma variedade suave e de um mergulho suave, respectivamente.

Considere M^m uma variedade suave $m-$dimensional e defina $TM = \bigcup_{b \in M} \{b\} \times T_bM$, lembrando que T_bM é o espaço tangente de M em b.

Então, $\tau(M) = (TM, p_1, M)$ será um $\mathbb{R}^m-$fibrado vetorial com fibra $p_1^{-1}(b) = \{b\} \times T_bM$ sobre $b \in M$.

Definição 2.3. $\tau(M)$ *é chamado de fibrado vetorial tangente da variedade suave* M*.*

Por outro lado, recordemos que uma imersão $i : N^n \to M^{n+k}$ é uma aplicação entre variedades suaves de modo que sua diferencial $d_bi : T_bN \to T_{i(b)}M$ é uma transformação linear injetiva, para todo $b \in N$.

Neste contexto, podemos garantir que $d_bi(T_bN)$ é um subespaço linear de $T_{i(b)}M$. Assim, fica bem definido o conjunto $E(i) = \{(b, v) \in N \times T_{i(b)}M \ : \ v \in [d_bi(T_bN)]^\perp \subset T_{i(b)}M\}$.

Logo, $\nu(i) = (E(i), p_1, N)$ será um $\mathbb{R}^k-$fibrado vetorial sendo $p_1^{-1}(b) = \{b\} \times [d_bi(T_bN)]^\perp$ sua fibra sobre $b \in M$.

Definição 2.4. $\nu(i)$ *é chamado de fibrado vetorial normal da imersão* $i : N \to M$*.*

Note que o fibrado vetorial normal pode ser definido para um mergulho suave, uma vez que todo mergulho suave é um mergulho topológico e uma imersão.

Encerrando os tópicos sobre fibrados vetoriais, vejamos a seguinte relação entre os fibrados vetoriais tangente e normal de um mergulho suave, entre variedades suaves, cuja prova pode ser encontrada em ([41], Corolários 3.4 e 3.5, p. 30-31).

Teorema 2.1. *Se $i : N^n \to M^{n+k}$ é um mergulho suave entre variedades suaves, então:*

$$\tau(N) \oplus \nu(i) \cong i^*(\tau(M))$$

2.2 Fibração e Fibração de Pares

Definiremos nesta seção o conceito de fibração de pares, também desenvolvido por Fadell em [18], que pode ser considerado como uma fibração cujo espaço total é um par de espaços topológicos.

A definição de fibração de pares será necessária quando definirmos os fibrados generalizados na próxima seção. Utilizaremos as propriedades desenvolvidas nesta seção como um passo intermediário nas demonstrações dos resultados que envolverão fibrados generalizados.

Com exceção do exemplo 2.2, todos o resultados que serão apresentados no decorrer desta seção podem ser encontrados, sem muito detalhes, em [18] e [9].

Definição 2.5. *Dizemos que uma aplicação $p : E \to B$ admite a propriedade do levantamento de homotopia (PLH) sobre um espaço topológico X se para quaisquer aplicações $h : X \to E$ e $H : X \times I \to B$, tais que $H(\_\,, 0) = p \circ h$, existir $\widetilde{H} : X \times I \to E$ contínua tal que $\widetilde{H}(\_\,, 0) = h$ e $p \circ \widetilde{H} = H$. Deste modo, temos o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Definição 2.6. *Uma aplicação sobrejetiva $p : E \to B$ é dita uma fibração se p admite a PLH sobre qualquer espaço topológico X.*

Neste contexto, chamamos a terna $\mathcal{F} = (E, p, B)$ de fibração sobre um espaço base B, com espaço total E e fibra $F = p^{-1}(b)$ sobre $b \in B$. Diremos que uma aplicação $s : B \to E$ é uma seção de $\mathcal{F}$ se $p \circ s = 1$.

Definição 2.7. (Fibração de Pares) *Sejam $p : E \to B$ uma aplicação sobrejetiva e $E_0 \subset E$. Chamamos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ de fibração de pares se para qualquer espaço topológico X e quaisquer aplicações $h : X \to E$ e $H : X \times I \to B$, tais que $H(\_\,, 0) = p \circ h$, existir $\widetilde{H} : X \times I \to E$ contínua tal que $\widetilde{H}(\_\,, 0) = h$, $p \circ \widetilde{H} = H$ e se $x_0 \in X$ é tal que $h(x_0) \in E_0$, então $\widetilde{H}(x_0, \_) \in E_0$.*

Neste contexto, diremos que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é uma fibração de pares sobre um espaço base B, com espaço total (E, E_0) e fibra $(F, F_0) = (p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap E_0)$ sobre $b \in B$.

Diremos também que uma aplicação $s : B \to E$ é uma seção de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ se $p \circ s = 1$.

Note que, a definição 2.7 garante que $\mathcal{F} = (E, p, B)$ e $\mathcal{F}_0 = (E_0, p_0 = p_{|E_0}, B)$ são fibrações.

Historicamente, o conceito de fibração coincide com o conceito de "fiber space"dado por Hurewicz em ([28], Seção 1, p. 956), como mostrado também em ([28], Seção 2, p. 957). Assim, o conceito de fibração de pares coincide com o chamado "fibered pair"dado por Fadell em ([18], Definição 2.3, p. 489), como mostrado em ([9], Lema 1.4, p. 183).

Como exemplo mais simples de uma fibração de pares, temos o já esperado:

Exemplo 2.1. *Considerando B um espaço topológico arbitrário, então obtemos que $(\varepsilon_B^n, \varepsilon_B^{n,0}) = (B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\}), p_1, B)$ é uma fibração de pares com fibra homeomorfa a $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$.*

Demonstração.
Inicialmente, considere X um espaço topológico qualquer e aplicações $h : X \to B \times \mathbb{R}^n$ e $H : X \times I \to B$ de modo a obter o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & B \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "p_1"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

Como $h = (h_1, h_2)$, defina $\widetilde{H} : X \times I \to B \times \mathbb{R}^n$ por $\widetilde{H}(x,t) = (H(x,t), h_2(x))$. É claro que $\widetilde{H}$ é contínua, $p_1 \circ \widetilde{H} = H$ e $\widetilde{H}(\_,0) = h$, pois $H(\_,0) = h_1$. Ainda, se $x_0 \in X$ é tal que $h(x_0) \in B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, então $h_2(x_0) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, e assim, $\widetilde{H}(x_0, \_) \in B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$.
Por fim, dada (F, F_0) a fibra de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ sobre $b \in B$ qualquer, então:

$$\begin{aligned} F &= p_1^{-1}(b) \\ &= \{b\} \times \mathbb{R}^n \\ &\approx \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0 &= p_1^{-1}(b) \bigcap [B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})] \\ &= [\{b\} \times \mathbb{R}^n] \bigcap [B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})] \\ &= \{b\} \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \\ &\approx \mathbb{R}^n - \{0\} \end{aligned}$$

Logo, $(\varepsilon_B^n, \varepsilon_B^{n,0})$ é, de fato, uma fibração de pares.

□

Note que o exemplo 2.1 também continua válido se trocarmos $\mathbb{R}^n$ por um espaço topológico F qualquer e $\mathbb{R}^n - \{0\}$ por um subespaço $F_0 \subset F$ qualquer. Entretanto, a fibra seria, neste caso, homeomorfa ao par (F, F_0).
A seguir, veremos um modo alternativo de construir fibrações de pares, cuja prova pode ser encontrada em ([1], Teorema 2.5, p.241).

Teorema 2.2. *Sejam $p : E \to B$ uma aplicação sobrejetiva com B paracompacto e pares (F, F_0) e (E, E_0). Se existir uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de B tal que, para todo $U \in \mathcal{U}$, existir um homeomorfismo $h_U : (U \times F, U \times F_0) \to (p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E_0)$ de modo que $p \circ h_U = p_1$, então (E, E_0, p, B) será uma fibração de pares.*

O teorema 2.2 pode ser considerado a versão do teorema da Uniformização de Hurewicz[1] para fibrações de pares.
Deste modo, podemos obter o seguinte:

Exemplo 2.2. *Todo $\mathbb{R}^n-$fibrado vetorial, sobre uma base paracompacta, pode ser associado a uma fibração de pares, cuja fibra será homeomorfa ao par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$.*

[1]Para mais detalhes sobre o teorema da Uniformização de Hurewicz, ver [28].

Demonstração.

Primeiramente, considere $\xi = (E, p, B)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado vetorial sobre B paracompacto. Pela definição 2.1, sabemos que existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de B tal que, para todo $U \in \mathcal{U}$, existe um homeomorfismo $h_U : U \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U)$ satisfazendo $p \circ h_U = p_1$.

Assim, denotando por $s : B \to E$ a seção nula de ξ e $E_0 = E - s(B)$, fica evidente que podemos considerar $h_U : (U \times \mathbb{R}^n, U \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) \to (p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E_0)$ como um homeomorfismo de pares.

Portanto, segue do teorema 2.2 que $(\xi, \xi_0) = (E, E_0, p, B)$ será uma fibração de pares.

□

Agora, como última parte desta seção, vejamos como construir algumas fibrações de pares a partir de outras.

Lema 2.1. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ uma fibração de pares e $U \subset B$ qualquer. Então, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U} = (p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E_0, p_{|p^{-1}(U)}, U)$ será uma fibração de pares com fibra igual a fibra de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.*

Demonstração.

Primeiramente, denotemos $q = p_{|p^{-1}(U)}$ e consideremos X um espaço topológico qualquer e aplicações $h : X \to p^{-1}(U)$ e $H : X \times I \to U$ de modo que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & p^{-1}(U) \arrow[d, "q"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & U \end{tikzcd}$$

Como $Im(H) \subset U \subset B$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é uma fibração de pares, então existe uma aplicação $\widetilde{H} : X \times I \to E$ tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ e $\widetilde{H}(\_, 0) = h$. Por outro lado, $Im(p \circ \widetilde{H}) = Im(H) \subset U$, e assim, $Im(\widetilde{H}) \subset p^{-1}(U)$.

Por outro lado, se $x_0 \in X$ é tal que $h(x_0) \in E_0$, então $\widetilde{H}(x_0, \_) \in E_0$, ou seja, se $h(x_0) \in p^{-1}(U) \cap E_0$, então $\widetilde{H}(x_0, \_) \in p^{-1}(U) \cap E_0$.

Por fim, sendo (F', F'_0) e (F, F_0) as fibras de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U}$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, respectivamente, sobre o mesmo $b \in U$, temos que:

$$\begin{aligned} F' &= q^{-1}(b) \\ &= p^{-1}(b) \cap p^{-1}(U) \\ &= p^{-1}(b) \\ &= F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_0 &= q^{-1}(b) \bigcap [p^{-1}(U) \cap E_0] \\ &= p^{-1}(b) \bigcap [p^{-1}(U) \cap E_0] \\ &= p^{-1}(b) \cap E_0 \\ &= F_0 \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U}$ será uma fibração de pares.

□

Lema 2.2. *Sejam* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ *uma fibração de pares e* $f : B' \to B$ *uma aplicação. Então,* $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (f^*E, f^*E_0, p_1, B')$ *também será uma fibração de pares e com fibra homeomorfa a fibra de* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$*, em que:*

1. $f^*E = \{(b', e) \in B' \times E \ : \ f(b') = p(e)\}$

2. $f^*E_0 = \{(b', e) \in f^*E \ : \ e \in E_0\}$

Demonstração.

Inicialmente, considere X um espaço topológico qualquer e aplicações $h : X \to f^*E$ e $H : X \times I \to B'$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & f^*E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] & B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Denotando $g = p_2 \circ h : X \to E$ e $G = f \circ H : X \times I \to B$, como o diagrama acima é comutativo e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é uma fibração de pares, então existe $\widetilde{G} : X \times I \to E$ de modo que $p \circ \widetilde{G} = G$, $\widetilde{G}(\_, 0) = g$ e se $x_0 \in X$ é tal que $g(x_0) \in E_0$, então $\widetilde{G}(x_0, \_) \in E_0$.

Por outro lado, é claro que $\widetilde{H} = (H, \widetilde{G}) : X \times I \to f^*E$ está bem definido, pois $f \circ H = G = p \circ \widetilde{G}$. Ainda, $p_1 \circ \widetilde{H} = H$ e $\widetilde{H}(\_, 0) = h$, uma vez que $H(\_, 0) = p_1 \circ h$ e $\widetilde{G}(\_, 0) = p_2 \circ h$.

Assim, se $x_0 \in X$ é tal que $h(x_0) \in f^*E_0$, então, $g(x_0) = p_2 \circ h(x_0) \in E_0$, e consequentemente, $\widetilde{G}(x_0, \_) \in E_0$. Logo, $\widetilde{H}(x_0, \_) \in f^*E_0$.

Por fim, se (F', F'_0) e (F, F_0) são fibras de $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ sobre $b'_0 \in B'$ e $f(b'_0) \in B$, respectivamente, então:

$$\begin{aligned}
F' &= p_1^{-1}(b'_0) \\
&= \{(b', e) \in f^*E \ : \ b' = p_1(b', e) = b'_0\} \\
&= \{(b'_0, e) \in B' \times E \ : \ f(b'_0) = p(e)\} \\
&= \{(b'_0, e) \in B' \times E \ : \ e \in p^{-1}(f(b'_0))\} \\
&= \{b'_0\} \times p^{-1}(f(b'_0)) \\
&= \{b'_0\} \times F \\
&\approx F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'_0 &= p_1^{-1}(b'_0) \cap f^*E_0 \\
&= (\{b'_0\} \times F) \bigcap f^*E_0 \\
&= \{b'_0\} \times (F \cap E_0) \\
&= \{b'_0\} \times F_0 \\
&\approx F_0
\end{aligned}$$

Logo, $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é, de fato, uma fibração de pares.

□

Lema 2.3. *Sejam* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ *e* $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, q, B')$ *duas fibrações de pares. Então,* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E'', E''_0, r, B'')$ *será uma fibração de pares com fibra igual ao produto das fibras de* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ *e* $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$*, em que:*

1. $E'' = E \times E'$
2. $E''_0 = (E \times E'_0) \cup (E_0 \times E')$
3. $r = p \times q$

Demonstração.

Inicialmente, considere X um espaço topológico qualquer e aplicações $h : X \to E''$ e $H : X \times I \to B''$ de modo que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E'' \arrow[d, "r"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & B'' \end{tikzcd}$$

Como $h = (h_1, h_2)$, $H = (H_1, H_2)$ e $H(\_, 0) = r \circ h$, então $H_1(\_, 0) = p \circ h_1$ e $H_2(\_, 0) = q \circ h_2$. Sendo $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ fibrações de pares, então existem aplicações $\widetilde{H_1} : X \times I \to E$ e $\widetilde{H_2} : X \times I \to E'$ tais que $p \circ \widetilde{H_1} = H_1$, $q \circ \widetilde{H_2} = H_2$, $\widetilde{H_1}(\_, 0) = h_1$, $\widetilde{H_2}(\_, 0) = h_2$ e se $x_0 \in X$ é tal que $h_1(x_0) \in E_0$, então $\widetilde{H_1}(x_0, \_) \in E_0$. Ainda, se $x_0 \in X$ é tal que $h_2(x_0) \in E'_0$, então $\widetilde{H_2}(x_0, \_) \in E'_0$.

Deste modo, definindo $\widetilde{H} = (\widetilde{H_1}, \widetilde{H_2}) : X \times I \to E''$, é claro que $\widetilde{H}(\_, 0) = h$ e $r \circ \widetilde{H} = H$. Ainda, se $x_0 \in X$ é tal que $h(x_0) \in E''_0$, então $h_1(x_0) \in E_0$ ou $h_2(x_0) \in E'_0$. Assim, $\widetilde{H_1}(x_0, \_) \in E_0$ ou $\widetilde{H_2}(x_0, \_) \in E'_0$, isto é, $\widetilde{H}(x_0, \_) \in E''_0$.

Por fim, considere, respectivamente, (F, F_0), (F', F'_0) e (F'', F''_0) fibras de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ sobre $b \in B$, $b' \in B'$ e $(b, b') \in B''$. Então:

$$\begin{aligned} F'' &= r^{-1}(b, b') \\ &= p^{-1}(b) \times q^{-1}(b') \\ &= F \times F' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F''_0 &= r^{-1}(b, b') \cap E''_0 \\ &= (F \times F') \bigcap [(E \times E'_0) \cup (E_0 \times E')] \\ &= [(F \times F') \cap (E \times E'_0)] \bigcup [(F \times F') \cap (E_0 \times E')] \\ &= [F \times (F' \cap E'_0)] \bigcup [(F \cap E_0) \times F'] \\ &= (F \times F'_0) \cup (F_0 \times F') \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ será uma fibração de pares.

$\square$

2.3 Fibrado Generalizado

Nesta seção, apresentaremos a ferramenta desenvolvida por Fadell em [18] que possibilita generalizarmos fibrados vetoriais tangente e normal de variedades suaves para variedades topológicas. Tal ferramenta foi denominada de fibrado generalizado.

Com exceção dos exemplos 2.4 e 2.5, dos lemas 2.5 e 2.7 e das proposições 2.1, 2.4, 2.5 e 2.8, todos os outros resultados foram retirados de [18], entretanto, apresentaremos aqui demonstrações mais detalhadas destes.

Definição 2.8. (Fibrado Generalizado) *Chamamos uma fibração de pares* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ *de* $\mathbb{R}^n-$*fibrado generalizado quando:*

1. *existir uma seção* $s : B \to E$ *de* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ *que realiza* E_0*, isto é,* $E_0 = E - s(B)$
2. *toda fibra* (F, F_0) *de* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ *é tal que* $(F, F_0) \sim (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$

Exemplo 2.3. *A fibração de pares* $(\varepsilon_B^n, \varepsilon_B^{n,0})$ *é um* $\mathbb{R}^n-$*fibrado generalizado.*

Demonstração.
Devido ao exemplo 2.1, já sabemos que $(\varepsilon_B^n, \varepsilon_B^{n,0})$ é uma fibração de pares com fibra homeomorfa ao par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$. Deste modo, basta definir uma seção de $(\varepsilon_B^n, \varepsilon_B^{n,0})$ que realize $B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$.

Note que $s : B \to B \times \mathbb{R}^n$ definida por $s(b) = (b, 0)$ é a seção procurada.

Logo, $(\varepsilon_B^n, \varepsilon_B^{n,0})$ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado geberalizado.

□

Lema 2.4. *Se* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ *é um* $\mathbb{R}^n-$*fibrado generalizado sobre* B*, então* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U}$ *também será um* $\mathbb{R}^n-$*fibrado generalizado para todo* $U \subset B$*.*

Demonstração.
Devido ao lema 2.1, já sabemos que se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é uma fibração de pares, então dado $U \subset B$ arbitrário, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U}$ também será uma fibração de pares com fibra igual a fibra de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$. Deste modo, ao denotarmos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U} = (p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E_0, p_{|p^{-1}(U)}, U)$, basta encontrar uma seção de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U}$ que realize $p^{-1}(U) \cap E_0$.

Para tanto, como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado, então existe $s : B \to E$ seção de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ que realiza E_0. Agora, defina $s' = s_{|U} : U \to p^{-1}(U)$. É claro que $Im(s') \subset p^{-1}(U)$, pois $p \circ s(U) = U$. Ainda, temos:

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) \cap E_0 &= p^{-1}(U) \bigcap [E - s(B)] \\ &= [p^{-1}(U) \cap E] - [p^{-1}(U) \cap s(B)] \\ &= p^{-1}(U) - s(U) \\ &= p^{-1}(U) - s'(U) \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U}$ também será um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado, para todo $U \subset B$.

□

Seguindo as notações do lema 2.4, sendo $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado, chamamos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U}$ de $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado restrição de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ a $U \subset B$.

Definição 2.9. *Sejam* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ *e* $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, q, B)$ $\mathbb{R}^n-$*fibrados generalizados sobre a mesma base. Chamamos* $\phi : (\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \to (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ *de aplicação fibrada se* $\phi : (E, E_0) \to (E', E'_0)$ *for uma aplicação que preserva fibra, isto é,* $q \circ \phi = p$*.*

Definição 2.10. *Dizemos que dois* $\mathbb{R}^n-$*fibrados generalizados* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ *e* $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, q, B)$*, sobre a mesma base, são homotopicamente isomorfos se existirem aplicações fibradas* $\phi : (\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \rightleftarrows (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) : \psi$ *e homotopias* $H : (E, E_0) \times I \to (E, E_0)$ *e* $G : (E', E'_0) \times I \to (E', E'_0)$ *tais que:*

1. $H(\_, 0) = \psi \circ \phi$	4. $G(\_, 0) = \phi \circ \psi$
2. $H(\_, 1) = 1$	5. $G(\_, 1) = 1$
3. $p \circ H(\_, t) = p, \forall t \in I$	6. $q \circ G(\_, t) = q, \forall t \in I$

O isomorfismo homotópico, acima definido, será denotado por $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$*.*

A noção de isomorfismo homotópico, dada na definição acima, coincide com o conceito de "fiber homotopy equivalence"dada por Fadell em ([18], Definição 2.4, p. 489).

Definição 2.11. *Chamamos um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, sobre B, de localmente trivial se existir uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de B tal que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)_{|U} \sim_f (\varepsilon^n_U, \varepsilon^{n,0}_U)$, para qualquer $U \in \mathcal{U}$. Em particular, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ será chamado de $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado trivial se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\varepsilon^n_B, \varepsilon^{n,0}_B)$.*

Exemplo 2.4. *Todo $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado sobre um ponto é trivial.*

Demonstração.

Denotemos por $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, \{*\})$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado cujo espaço base é constituído de apenas um ponto.

Assim, é claro que $(E, E_0) = (p^{-1}(*), p^{-1}(*) \cap E_0) \sim (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$, isto é, existem aplicações $\phi : (E, E_0) \rightleftarrows (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) : \psi$ e homotopias $H : (E, E_0) \times I \to (E, E_0)$ e $G : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ tais que $H(\_, 0) = \psi \circ \phi$, $H(\_, 1) = 1$, $G(\_, 0) = \phi \circ \psi$ e $G(\_, 1) = 1$.

Deste modo, ficam bem definidas as seguintes aplicações fibradas e homotopias:

1. $\overline{\phi} : (E, E_0) \rightleftarrows (\{*\} \times \mathbb{R}^n, \{*\} \times \mathbb{R}^n - \{0\}) : \overline{\psi}$
   $\overline{\phi}(e) = (*, \phi(e))$
   $\overline{\psi}(*, x) = \psi(x)$

2. $\overline{H} : (E, E_0) \times I \to (E, E_0)$
   $\overline{H}(e, t) = H(e, t)$

3. $\overline{G} : (\{*\} \times \mathbb{R}^n, \{*\} \times \mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \to (\{*\} \times \mathbb{R}^n, \{*\} \times \mathbb{R}^n - \{0\})$
   $\overline{G}((*, x), t) = (*, G(x, t))$

É claro que $\overline{H}(\_, 1) = 1$, $\overline{G}(\_, 1) = 1$, $p \circ \overline{H}(\_, t) = p$ e $p_1 \circ \overline{G}(\_, t) = p_1$ para qualquer $t \in I$. Ainda:

$$\begin{aligned}
\forall e \in E,\ \overline{H}(e, 0) &= H(e, 0) \\
&= \psi \circ \phi(e) \\
&= \overline{\psi}(*, \phi(e)) \\
&= \overline{\psi} \circ \overline{\phi}(e) \\
\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \overline{G}((*, x), 0) &= (*, G(x, 0)) \\
&= (*, \phi \circ \psi(x)) \\
&= \overline{\phi}(\psi(x)) \\
&= \overline{\phi} \circ \overline{\psi}(*, x)
\end{aligned}$$

Logo, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\varepsilon^n_{\{*\}}, \varepsilon^{n,0}_{\{*\}})$.

□

Sobre condições específicas, o isomorfismo homotópico pode ser garantido, de modo mais simples, como no seguinte:

Lema 2.5. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ dois $\mathbb{R}^n-$fibrados generalizados, sobre a mesma base. Se $\phi : (\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \to (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ for uma aplicação fibrada tal que ϕ é um homeomorfismo, então $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$.*

Demonstração.

Inicialmente, como ϕ um homeomorfismo e $q \circ \phi = p$, então $p \circ \phi^{-1} = q$, ou seja, $\phi^{-1} : (\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \to (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ também é uma aplicação fibrada.

Assim, fica evidente que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, uma vez que é suficiente definir as homotopias triviais para que as condições sobre isomorfismo homotópico sejam satisfeitas.

□

Deste modo, utilizando o lema 2.5 e a construção do exemplo 2.2, obtemos o seguinte:

Exemplo 2.5. *Se ξ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado vetorial sobre uma base paracompacta, então sua fibração de pares associada (ξ, ξ_0) será um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado localmente trivial.*

Com isso, podemos considerar que a noção de fibrados generalizados generaliza o conceito de fibrados vetoriais. Assim, é esperado que a estrutura de isomorfismo entre fibrados vetoriais seja mantida quando passada para isomorfismo homotópico, como na seguinte:

Proposição 2.1. *Sejam ξ e η dois $\mathbb{R}^n-$fibrados vetoriais isomorfos sobre uma mesma base paracompacta. Então, seus respectivos $\mathbb{R}^n-$fibrados generalizados associados (ξ, ξ_0) e (η, η_0) são homotopicamente isomorfos.*

Demonstração.

Primeiramente, denotemos $\xi = (E, p, B) \cong \eta = (E', q, B)$. Deste modo, segue da definição 2.2 que existe um homeomorfismo $h : E \to E'$ tal que $q \circ h = p$ e $h_{|F} : F \to F'$ é um isomorfismo vetorial, para quaisquer fibras F e F' de ξ e η, respectivamente, sobre o mesmo $b \in B$.

Sendo $s : B \to E$ e $s' : B \to E'$ as seções nulas de ξ e η, respectivamente, consideremos $E_0 = E - s(B)$ e $E'_0 = E' - s'(B)$. Se mostrarmos que $h(E_0) \subset E'_0$, teremos que $h : (E, E_0) \to (E', E'_0)$ será um homeomorfismo e uma aplicação fibrada, e assim, o lema 2.5 garantirá que $(\xi, \xi_0) \sim_f (\eta, \eta_0)$.

Para tanto, note que:

$$
\begin{aligned}
e \in E_0 \implies & \ e \in F = p^{-1}(p(e)) \cong \mathbb{R}^n \ e \ e \neq 0 \\
\implies & \ h(e) \in F' = q^{-1}(p(e)) \cong \mathbb{R}^n \ e \ h(e) \neq 0 \\
\implies & \ h(e) \in E'_0
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que $(\xi, \xi_0) \sim_f (\eta, \eta_0)$.

□

Lema 2.6. *Se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado sobre B e $f : B' \to B$ é uma aplicação qualquer, então $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ também será um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado. Em particular, se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ for trivial, então $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ também será trivial.*

Demonstração.

Devido ao lema 2.2, já sabemos que se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é uma fibração de pares, então $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ será uma fibração de pares com fibra homeomorfa a fibra de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$. Com isso, denotando $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ e $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (f^*E, f^*E_0, p_1, B')$, basta mostrar que existe uma seção de $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ que realiza f^*E_0.

Para tanto, como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado, então existe uma seção $s : B \to E$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ que realiza E_0. Deste modo, fica bem definida a seção $s' : B' \to f^*E$, de $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, dada por $s'(b') = (b', s(f(b')))$. Por fim:

$$\begin{aligned}
f^*E_0 &= [B' \times E_0] \bigcap f^*E \\
&= [B' \times (E - s(B))] \bigcap f^*E \\
&= [(B' \times E) - (B' \times s(B))] \bigcap f^*E \\
&= [(B' \times E) \cap f^*E] - [(B' \times s(B)) \cap f^*E] \\
&= f^*E - \{(b', s(b)) \in B' \times s(B) \ : \ f(b') = p(s(b)) = b\} \\
&= f^*E - [B' \times s(f(B'))] \\
&= f^*E - s'(B')
\end{aligned}$$

Logo, $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ será um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado.

Agora, resta mostrar que se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\varepsilon^n_B, \varepsilon^{n,0}_B)$, então $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\varepsilon^n_{B'}, \varepsilon^{n,0}_{B'})$. Assim, suponha que existam as seguintes aplicações fibradas e homotopias satisfazendo as relações a seguir:

1. $\phi : (E, E_0) \rightleftarrows (B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) : \psi$

2. $H : (E, E_0) \times I \to (E, E_0)$

3. $G : (B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) \times I \to (B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$

4. ϕ, ψ, H e G satisfazem: $\begin{array}{ll} H(\_, 0) = \psi \circ \phi & G(\_, 0) = \phi \circ \psi \\ H(\_, 1) = 1 & G(\_, 1) = 1 \\ p \circ H(\_, t) = p, \forall t \in I & p_1 \circ G(\_, t) = p_1, \forall t \in I \end{array}$

Com isso, ficam bem definidas as seguintes aplicações fibradas e homotopias:

1. $\overline{\phi} : (f^*E, f^*E_0) \rightleftarrows (B' \times \mathbb{R}^n, B' \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) : \overline{\psi}$
   $\overline{\phi}(b', e) = (b', p_2 \circ \phi(e))$
   $\overline{\psi}(b', x) = (b', \psi(f(b'), x))$

2. $\overline{H} : (f^*E, f^*E_0) \times I \to (f^*E, f^*E_0)$
   $\overline{H}((b', e), t) = (b', H(e, t))$

3. $\overline{G} : (B' \times \mathbb{R}^n, B' \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) \times I \to (B' \times \mathbb{R}^n, B' \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$
   $\overline{G}((b', x), t) = (b', p_2 \circ G((f(b'), x), t))$

Mostremos que $\overline{\phi}$, $\overline{\psi}$, $\overline{H}$ e $\overline{G}$ satisfazem as condições da definição 2.10. De fato:

1. é claro que $p_1 \circ \overline{H}((\_, \_), t) = p_1$ e $p_1 \circ \overline{G}((\_, \_), t) = p_1$ para todo $t \in I$

2. também é claro que $\overline{H}((\_, \_), 1) = 1$ e $\overline{G}((\_, \_), 1) = 1$

3. $$\begin{aligned}
\forall (b', e) \in f^*E, \ \overline{H}((b', e), 0) &= (b', H(e, 0)) \\
&= (b', \psi \circ \phi(e)) \\
&= (b', \psi(p_1 \circ \phi(e), p_2 \circ \phi(e))) \\
&= (b', \psi(p(e), p_2 \circ \phi(e))) \\
&= (b', \psi(f(b'), p_2 \circ \phi(e))) \\
&= \overline{\psi}(b', p_2 \circ \phi(e)) \\
&= \overline{\psi} \circ \overline{\phi}(b', e)
\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}
\forall (b', x) \in B' \times \mathbb{R}^n, \ \overline{G}((b', x), 0) &= (b', p_2 \circ G((f(b'), x), 0)) \\
&= (b', p_2 \circ \phi \circ \psi(f(b'), x)) \\
&= \overline{\phi}(b', \psi(f(b'), x)) \\
&= \overline{\phi} \circ \overline{\psi}(b', x)
\end{aligned}$$

Portanto, $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\varepsilon^n_{B'}, \varepsilon^{n,0}_{B'})$.

□

Seguindo as notações do lema 2.6, dado $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado, chamamos $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ de $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado pullback de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ pela aplicação f.

Agora, vejamos alguns exemplos envolvendo fibrados generalizados pullbacks.

Exemplo 2.6. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ dois $\mathbb{R}^n-$fibrados generalizados, sobre a mesma base B, tais que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$. Então, sendo $1 : B \to B$ a aplicação identidade, temos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f 1^*(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$.*

Demonstração.

Inicialmente, denotemos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, q, B)$. Como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$, então existem as seguintes aplicações fibradas e homotopias satisfazendo as relações a seguir:

1. $\phi : (E, E_0) \rightleftarrows (E', E'_0) : \psi$

2. $H : (E, E_0) \times I \to (E, E_0)$

3. $G : (E', E'_0) \times I \to (E', E'_0)$

4. ϕ, ψ H e G são tais que: $\begin{array}{ll} H(\_,0) = \psi \circ \phi & G(\_,0) = \phi \circ \psi \\ H(\_,1) = 1 & G(\_,1) = 1 \\ p \circ H(\_,t) = p, \forall t \in I & q \circ G(\_,t) = q, \forall t \in I \end{array}$

Recordando que o $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado pullback $1^*(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (1^*E', 1^*E'_0, p_1, B)$ é tal que $1^*E' = \{(b, e') \in B \times E' \ : \ b = q(e')\}$ e $1^*E'_0 = \{(b, e') \in 1^*E' \ : \ e' \in E'_0\}$, então ficam bem definidas as seguintes aplicações fibradas e homotopias:

1. $\overline{\phi} : (E, E_0) \rightleftarrows (1^*E', 1^*E'_0) : \overline{\psi}$
   $\overline{\phi}(e) = (p(e), \phi(e))$
   $\overline{\psi}(b, e') = \psi(e')$

2. $\overline{H} : (E, E_0) \times I \to (E, E_0)$
   $\overline{H}(e, t) = H(e, t)$

3. $\overline{G} : (1^*E', 1^*E'_0) \times I \to (1^*E', 1^*E'_0)$
   $\overline{G}((b, e'), t) = (b, G(e', t))$

Com isso, é claro que $\overline{H}(e, 1) = e$, para todo $e \in E$, e $p \circ \overline{H}(\_, t) = p$, para todo $t \in I$, pois H tem essas propriedades. Analogamente, $\overline{G}((b, e'), 1) = (b, e')$, para todo $(b, e') \in 1^*E'$, e $p_1 \circ \overline{G}(\_, t) = p_1$, para todo $t \in I$. Ainda, temos que:

$$\begin{array}{rcl} \forall e \in E, \ \overline{H}(e, 0) & = & H(e, 0) \\ & = & \psi \circ \phi(e) \\ & = & \overline{\psi}(p(e), \phi(e)) \\ & = & \overline{\psi} \circ \overline{\phi}(e) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\forall (b,e') \in 1^*E',\ \overline{G}((b,e'),0) &= (b, G(e',0)) \\
&= (b, \phi \circ \psi(e')) \\
&= (q(e'), \phi \circ \psi(e')) \\
&= (p \circ \psi(e'), \phi \circ \psi(e')) \\
&= \overline{\phi}(\psi(e')) \\
&= \overline{\phi} \circ \overline{\psi}(b,e')
\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f 1^*(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$.

$\square$

Exemplo 2.7. *Sejam B um espaço topológico, $b_0 \in B$ qualquer e $c : B \to \{b_0\}$ a aplicação constante. Então, $(\varepsilon^n_B, \varepsilon^{n,0}_B) \sim_f c^*(\varepsilon^n_{\{b_0\}}, \varepsilon^{n,0}_{\{b_0\}})$.*

Demonstração.

Lembremos que $c^*(\varepsilon^n_{\{b_0\}}, \varepsilon^{n,0}_{\{b_0\}}) = (c^*(\{b_0\} \times \mathbb{R}^n), c^*[\{b_0\} \times (\mathbb{R}^n - \{0\})], p_1, B)$ é o $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado pullback tal que:

$$\begin{aligned}
c^*(\{b_0\} \times \mathbb{R}^n) = &\ \{(b,(b_0,x)) \in B \times (\{b_0\} \times \mathbb{R}^n)\ :\ b_0 = c(b) = p_1(b_0,x) = b_0\} \\
= &\ B \times \{b_0\} \times \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

$$c^*[\{b_0\} \times (\mathbb{R}^n - \{0\})] = B \times \{b_0\} \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$$

Assim, $\phi : (B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) \rightleftarrows (B \times \{b_0\} \times \mathbb{R}^n, B \times \{b_0\} \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) : \psi$, dadas por $\phi(b,x) = (b,b_0,x)$ e $\psi(b,b_0,x) = (b,x)$, respectivamente, são aplicações fibradas bem definidas, sendo ϕ um homeomorfismo com inversa ψ.

Logo, segue do lema 2.5 que $(\varepsilon^n_B, \varepsilon^{n,0}_B) \sim_f c^*(\varepsilon^n_{\{b_0\}}, \varepsilon^{n,0}_{\{b_0\}})$.

$\square$

O próximo resultado é uma versão mais geral do lema 2.5, envolvendo, agora, fibrados generalizados sobre diferentes bases.

Lema 2.7. *Seja $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado. Se $h : B' \to B$ e $H : (E', E'_0) \to (E, E_0)$ forem homeomorfismos, então $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, h^{-1} \circ p \circ H, B')$ também será um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado. Ainda, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) \sim_f h^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.*

Demonstração.

Denotando $q = h^{-1} \circ p \circ H$, provemos, inicialmente, que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ é uma fibração de pares. Para tanto, considere X um espaço topológico qualquer e aplicações $f : X \to E'$ e $F : X \times I \to B'$ tais que $F(\_,0) = q \circ f$.

Ao definirmos as aplicações $g = H \circ f : X \to E$ e $G = h \circ F : X \times I \to B$, é claro que:

$$\begin{aligned}
G(_,0) &= h \circ F(_,0) \\
&= h \circ q \circ f \\
&= p \circ H \circ f \\
&= p \circ g
\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] \arrow[rr, bend left, "g"] & E' \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] & B' \arrow[r, "h"] & B
\end{tikzcd}
$$

Sendo $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ uma fibração de pares, sabemos que existe uma aplicação $\widetilde{G} : X \times I \to E$ tal que $\widetilde{G}(\_, 0) = g$, $p \circ \widetilde{G} = G$ e se $g(x) \in E_0$, então $\widetilde{G}(x, \_) \in E_0$. Assim, definindo a aplicação $\widetilde{F} = H^{-1} \circ \widetilde{G} : X \times I \to E'$, temos:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{F}(\_, 0) &= H^{-1} \circ \widetilde{G}(\_, 0) \\
&= H^{-1} \circ g \\
&= H^{-1} \circ H \circ f \\
&= f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q \circ \widetilde{F} &= h^{-1} \circ p \circ H \circ H^{-1} \circ \widetilde{G} \\
&= h^{-1} \circ p \circ \widetilde{G} \\
&= h^{-1} \circ G \\
&= h^{-1} \circ h \circ F \\
&= F
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) \in E'_0 \Longrightarrow\ & g(x) = H \circ f(x) \in E_0 \\
\Longrightarrow\ & \widetilde{G}(x, \_) \in E_0 \\
\Longrightarrow\ & \widetilde{F}(x, \_) = H^{-1} \circ \widetilde{G}(x, \_) \in E'_0
\end{aligned}
$$

Com isso, concluímos que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ é, de fato, uma fibração de pares.

Agora, provemos que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado. Como existe $s : B \to E$ seção de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ que realiza E_0, então, ao definirmos $s' : H^{-1} \circ s \circ h : B' \to E'$, teremos que:

$$
\begin{aligned}
q \circ s' &= h^{-1} \circ p \circ H \circ H^{-1} \circ s \circ h \\
&= h^{-1} \circ p \circ s \circ h \\
&= h^{-1} \circ h \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E' - s'(B') &= H^{-1}(E) - H^{-1}(s(h(B'))) \\
&= H^{-1}(E - s(B)) \\
&= H^{-1}(E_0) \\
&= E'_0
\end{aligned}
$$

Assim, s' é uma seção de $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ que realiza E'_0. Por outro lado, como toda fibra de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia que $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$, então, para todo $b' \in B'$, temos:

$$\begin{aligned} q^{-1}(b') = & \ H^{-1}(p^{-1}(h(b'))) \\ \approx & \ p^{-1}(h(b')) \\ \sim & \ \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{-1}(b') \cap E'_0 = & \ H^{-1}(p^{-1}(h(b'))) \bigcap H^{-1}(E_0) \\ = & \ H^{-1}(p^{-1}(h(b')) \cap E_0) \\ \approx & \ p^{-1}(h(b')) \cap E_0 \\ \sim & \ \mathbb{R}^n - \{0\} \end{aligned}$$

Deste modo, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ será um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado.

Por fim, mostremos que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) \sim_f h^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$. Para tanto, lembremos que $h^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (h^*E, h^*E_0, p_1, B')$, em que:

$$h^*E = \{(b', e) \in B' \times E \ : \ h(b') = p(e)\}$$

$$h^*E_0 = \{(b', e) \in h^*E \ : \ e \in E_0\}$$

Considerando $\phi : (E', E'_0) \rightleftarrows (h^*E, h^*E_0) : \psi$ dadas por $\phi(e') = (q(e'), H(e'))$ e $\psi(b', e) = H^{-1}(e)$, respectivamente, conluímos que ϕ e ψ são aplicações fibradas bem definidas sendo ϕ um homeomorfismo com inversa ψ.

Portanto, segue do lema 2.5 que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) \sim_f h^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.

$\square$

Lema 2.8. *Se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ é um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado, então $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ será um $\mathbb{R}^{n+m}-$fibrado generalizado. Em particular, se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ forem triviais, então $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ também será trivial.*

Demonstração.

Primeiramente, denotemos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, q, B')$ e considere $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E'', E''_0, r, B'')$, em que $E'' = E \times E'$, $E''_0 = (E \times E'_0) \cup (E_0 \times E')$, $r = p \times q$ e $B'' = B \times B'$.

Devido ao lema 2.3, já sabemos que se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ são fibrações de pares, então $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ será uma fibração de pares com fibra igual ao produto das fibras de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$. Assim, resta mostrar que existe uma seção de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ que realiza E''_0.

Para tanto, como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ são fibrados generalizados, então existem seções $s : B \to E$ e $s' : B' \to E'$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ que realizam E_0 e E'_0, respectivamente. Deste modo, temos que $s'' : B'' \to E''$, definida por $s''(b, b') = (s(b), s'(b'))$, é uma seção de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ tal que:

$$\begin{aligned} E''_0 &= (E \times E'_0) \bigcup (E_0 \times E') \\ &= [E \times (E' - s'(B'))] \bigcup [(E - s(B)) \times E'] \\ &= [(E \times E') - (E \times s'(B'))] \bigcup [(E \times E') - (s(B) \times E')] \\ &= (E \times E') - [(E \times s'(B')) \bigcap (s(B) \times E')] \\ &= E'' - (s(B) \times s'(B')) \\ &= E'' - s''(B'') \end{aligned}$$

Assim, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ será um $\mathbb{R}^{n+m}-$fibrado generalizado.

Agora, resta mostrar que se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\varepsilon^n_B, \varepsilon^{n,0}_B)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) \sim_f (\varepsilon^m_{B'}, \varepsilon^{m,0}_{B'})$, então $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) \sim_f (\varepsilon^{n+m}_{B''}, \varepsilon^{n+m,0}_{B''})$. Para tanto, suponha que existam as seguintes aplicações fibradas e homotopias satisfazendo as relações a seguir:

1. $\phi : (E, E_0) \rightleftarrows (B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) : \psi$

2. $H : (E, E_0) \times I \to (E, E_0)$

3. $G : (B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) \times I \to (B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$

4. ϕ, ψ, H e G são tais que: $\begin{array}{ll} H(\_, 0) = \psi \circ \phi & G(\_, 0) = \phi \circ \psi \\ H(\_, 1) = 1 & G(\_, 1) = 1 \\ p \circ H(\_, t) = p, \forall t \in I & p_1 \circ G(\_, t) = p_1, \forall t \in I \end{array}$

Ainda, suponha que também existam as seguintes aplicações fibradas e homotopias satisfazendo também as relações a seguir:

1. $\phi' : (E', E'_0) \rightleftarrows (B' \times \mathbb{R}^m, B' \times (\mathbb{R}^m - \{0\})) : \psi'$

2. $H' : (E', E'_0) \times I \to (E', E'_0)$

3. $G' : (B' \times \mathbb{R}^m, B' \times (\mathbb{R}^m - \{0\})) \times I \to (B' \times \mathbb{R}^m, B' \times (\mathbb{R}^m - \{0\}))$

4. ϕ', ψ', H' e G' são tais que: $\begin{array}{ll} H'(\_, 0) = \psi' \circ \phi' & G'(\_, 0) = \phi' \circ \psi' \\ H'(\_, 1) = 1 & G'(\_, 1) = 1 \\ q \circ H'(\_, t) = q, \forall t \in I & p_1 \circ G'(\_, t) = p_1, \forall t \in I \end{array}$

Com isso, ficam bem definidas as seguintes aplicações fibradas e homotopias:

1. $\phi'' : (E'', E''_0) \rightleftarrows (B'' \times \mathbb{R}^{n+m}, B'' \times (\mathbb{R}^{n+m} - \{0\})) : \psi''$
   $\phi''(e, e') = ((p(e), q(e')), (p_2 \circ \phi(e), p_2 \circ \phi'(e')))$
   $\psi''((b, b'), (x, x')) = (\psi(b, x), \psi'(b', x'))$

2. $H'' : (E'', E''_0) \times I \to (E'', E''_0)$
   $H''((e, e'), t) = (H(e, t), H'(e', t))$

3. $G'' : (B'' \times \mathbb{R}^{n+m}, B'' \times (\mathbb{R}^{n+m} - \{0\})) \times I \to (B'' \times \mathbb{R}^{n+m}, B'' \times (\mathbb{R}^{n+m} - \{0\}))$
   $G''(((b, b'), (x, x')), t) = ((b, b'), (p_2 \circ G((b, x), t), p_2 \circ G'((b', x'), t)))$

Mostremos que ϕ'', ψ'', H'' e G'' satisfazem as condições da definição 2.10. De fato:

1. é claro que $r \circ H''((\_, \_), t) = r$ e $(p_1 \times p_2) \circ G''((\_, \_), t) = p_1 \times p_2$, para qualquer $t \in I$

2. também é claro que $H''((\_, \_), 1) = 1$ e $G''((\_, \_), 1) = 1$

3. $$\begin{array}{rcl} \forall (e, e') \in E'', H''((e, e'), 0) & = & (H(e, 0), H'(e', 0)) \\ & = & (\psi \circ \phi(e), \psi' \circ \phi'(e')) \\ & = & (\psi(p_1 \circ \phi(e), p_2 \circ \phi(e)), \psi'(p_1 \circ \phi'(e'), p_2 \circ \phi'(e'))) \\ & = & (\psi(p(e), p_2 \circ \phi(e)), \psi'(q(e'), p_2 \circ \phi'(e'))) \\ & = & \psi''((p(e), q(e')), (p_2 \circ \phi(e), p_2 \circ \phi'(e'))) \\ & = & \psi'' \circ \phi''(e, e') \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rcl} \forall ((b, b'), (x, x')) \in B'' \times \mathbb{R}^{n+m}, & & \\ G''(((b, b'), (x, x')), 0) & = & ((b, b'), (p_2 \circ G((b, x), 0), p_2 \circ G'((b', x'), 0))) \\ & = & ((b, b'), (p_2 \circ \phi \circ \psi(b, x), p_2 \circ \phi' \circ \psi'(b', x'))) \\ & = & \phi''(\psi(b, x), \psi'(b', x')) \\ & = & \phi'' \circ \psi''((b, b'), (x, x')) \end{array}$$

Logo, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) \sim_f (\varepsilon_{B''}^{n+m}, \varepsilon_{B''}^{n+m,0})$.

$\square$

Seguindo as notações do lema 2.8, dado $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado, chamamos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ de $\mathbb{R}^{n+m}-$fibrado generalizado produto de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$.

Definição 2.12. (Soma de Whitney) *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado, ambos sobre a mesma base B, e $d : B \to B \times B$ a aplicação diagonal. Definimos a soma de Whitney entre $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ como sendo o seguinte $\mathbb{R}^{n+m}-$fibrado generalizado:*

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \oplus (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = d^*[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)]$$

2.3.1 Fibrado Tangente de uma Variedade Topológica

Nesta subseção, mostraremos que o conceito de fibrado generalizado permite generalizar a noção de fibrado vetorial tangente de variedades suaves para variedades topológicas.

Para tanto, considere M^m uma variedade topológica e defina:

- $T_0M = \{\omega \in M^I \ : \ \omega(t) = \omega(0) \Leftrightarrow t = 0\}$
- $TM = T_0M \bigcup \{\omega \in M^I \ : \ \omega(t) = \omega(0), \ \forall t \in I\}$
- $p : TM \to M$, dada por $p(\omega) = \omega(0)$

Então, obtemos a seguinte:

Proposição 2.2. *Seja M^m uma variedade topológica. Então, o par $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0M, p, M)$ será um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado localmente trivial.*

A prova da proposição acima pode ser encontrada em ([18], Proposição 3.8, p. 493).

Observação 2.1. *Vale ressaltar que a construção feita por Fadell em [18] para demonstrar a proposição 2.2 só é válida para variedades topológicas sem bordo.*

Assim, todas as variedades topológicas que serão mencionadas até o final desse trabalho não terão bordo.

Definição 2.13. *Dada uma variedade topológica M^m, chamamos o par $(\tau M, \tau_0 M)$ de $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado tangente de M.*

Por outro lado, sendo M^m uma variedade suave e ξ seu $\mathbb{R}^m-$fibrado vetorial tangente, como na definição 2.3, considere seu $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado associado (ξ, ξ_0). Então, obtemos a seguinte relação entre o fibrado vetorial tangente e o fibrado generalizado tangente de uma variedade suave:

Proposição 2.3. $(\xi, \xi_0) \sim_f (\tau M, \tau_0 M)$

Sketch da demonstração:

A prova se resume em mostrar que as fibras desses fibrados generalizados, sobre o mesmo ponto, são homotopicamente equivalentes.

Devido a importância desse resultado, daremos aqui apenas uma breve intuição de como isso é feito. A demonstração completa pode ser encontrada em ([18], Proposição 3.17, p. 495) e [42].

Fixado $b \in M$, sabemos que a fibra de ξ sobre b consiste de todos os vetores tangentes de M em b. Ainda, os vetores tangentes não nulos podem ser considerados derivadas no zero de geodésicas $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$ tais que $\gamma(0) = b$.

Como estamos considerando M uma variedade suave sem bordo, então podemos considerar que os vetores tangentes não nulos de T_bM são derivadas no zero de geodésicas $\gamma : [0,1] \to M$ reparametrizadas por comprimento de arco com comprimento igual a 1 tais que $\gamma(0) = b$.

Agora, devido ao teorema do mergulho de Whitney[2], sabemos que M pode ser mergulhada em um espaço Euclidiano. Sendo assim, temos ambiente o suficiente para garantir a equivalência homotópica entre T_bM e o seguinte espaço:

$$\begin{aligned} E \;=\; & \{\gamma \in M^I \;:\; \gamma \text{ é uma geodésica reparametrizada por comprimento de arco com} \\ & \text{comprimento igual a 1 e } \gamma(0) = b\} \bigcup \{\gamma \in M^I \text{ constante em } b\} \end{aligned}$$

Por outro lado, Nash garante em [42] que o espaço E definido acima é homotopicamente equivalente a fibra de $(\tau M, \tau_0 M)$ sobre b, isto é, o seguinte conjunto:

$$\{\omega \in M^I \;:\; \omega(t) = b \Leftrightarrow t = 0\} \bigcup \{\omega \in M^I \text{ constante em } b\}$$

Assim, concluímos intuitivamente que as fibras de (ξ, ξ_0) e $(\tau M, \tau_0 M)$ sobre o mesmo ponto são homotopicamente equivalentes.

$\square$

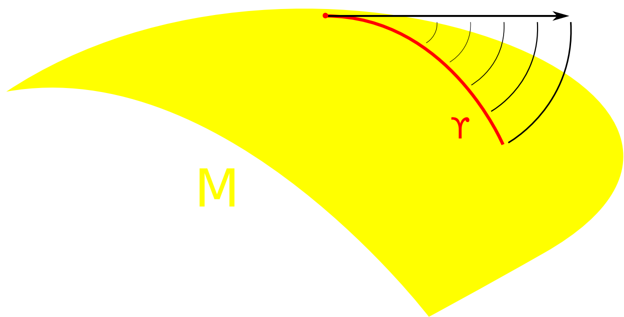

Figura 2.2: Equivalência homotópica entre uma geodésica $\gamma \in M^I$ e seu vetor tangente em $\gamma(0)$.

Deste modo, a proposição 2.3 nos permite afirmar que a noção de fibrado tangente pode ser extendida do conceito de variedades suaves para variedades topológicas.

Proposição 2.4. *Se $h : M \to N$ é um homeomorfismo entre variedades topológicas, então $(\tau M, \tau_0 M) \sim_f h^*(\tau N, \tau_0 N)$.*

Demonstração.

Uma vez que h é um homeomorfismo, fica bem definido, o também homeomorfismo, $H : (TM, T_0M) \to (TN, T_0N)$ dado por $H(\omega) = h \circ \omega$, em que sua aplicação inversa $H^{-1} : (TN, T_0N) \to (TM, T_0M)$ é dada por $H^{-1}(\omega) = h^{-1} \circ \omega$.

[2]Para mais detalhes sobre o teorema do mergulho de Whitney, ver ([34], Teorema 6.15, p. 134).

Por fim, se denotarmos por $p : TM \to M$ e $q : TN \to N$ as projeções de $(\tau M, \tau_0 M)$ e $(\tau N, \tau_0 N)$, respectivamente, então a aplicação $h^{-1} \circ q \circ H : TM \to M$ será tal que $h^{-1} \circ q \circ H(\omega) = p(\omega)$.

Assim, o lema 2.7 garantirá que $(\tau M, \tau_0 M) \sim_f h^*(\tau N, \tau_0 N)$.

$\square$

Vejamos que a noção de fibrado generalizado tangente é natural com respeito ao cartesiano de variedades topológicas, no seguinte sentido:

Proposição 2.5. *Sejam M e S duas variedades topológicas quaisquer. Então:*

$$(\tau(M \times S), \tau_0(M \times S)) \sim_f (\tau M, \tau_0 M) \times (\tau S, \tau_0 S)$$

Demonstração.

Inicialmente, considere $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0 M, p, M)$, $(\tau S, \tau_0 S) = (TS, T_0 S, q, S)$, $(\tau(M \times S), \tau_0(M \times S)) = (T(M \times S), T_0(M \times S), r, M \times S)$ e denotemos o produto $(\tau M, \tau_0 M) \times (\tau S, \tau_0 S) = (E, E_0, p \times q, M \times S)$, em que:

$$E = (TM) \times (TS)$$
$$E_0 = [(TM) \times (T_0 S)] \bigcup [(T_0 M) \times (TS)]$$

Deste modo, fica bem definida a aplicação $\phi : (T(M \times S), T_0(M \times S)) \to (E, E_0)$ dada por $\phi(\omega) = (p_1 \circ \omega, p_2 \circ \omega)$, uma vez que se $\omega \in T_0(M \times S)$, então $\omega(t) \neq \omega(0)$ para todo $0 < t \leq 1$, ou seja, $p_i \circ \omega(t) \neq p_i \circ \omega(0)$ para todo $0 < t \leq 1$ e $i = 1$ ou 2, e assim, $p_i \circ \omega \in E_0$ para $i = 1$ ou 2.

Por outro lado, observe que ϕ é um homeomorfismo em que sua aplicação inversa $\phi^{-1} : (E, E_0) \to (T(M \times S), T_0(M \times S))$ é, naturalmente, dada por $\phi^{-1}(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \omega_2)$. Ainda, é claro que $(p \times q) \circ \phi = r$.

Assim, segue do lema 2.5 que $(\tau(M \times S), \tau_0(M \times S)) \sim_f (\tau M, \tau_0 M) \times (\tau S, \tau_0 S)$.

$\square$

2.3.2 Fibrado Normal de um Mergulho Local-Flat

Nesta subseção, mostraremos que o conceito de fibrado generalizado também permite generalizar a noção de fibrado vetorial normal de variedades suaves para variedades topológicas.

Mas antes, recordemos[3] que se M^m e S^{m+k} são variedades suaves e se $i : M \hookrightarrow S$ é um mergulho suave, então $i(M)$ será uma subvariedade suave de S de modo que, para todo $b \in M$, existe uma vizinhança aberta $U \subset S$ de $i(b)$ tal que $(U, U \cap i(M)) \approx (\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}^m)$.

Esta característica nos induz a seguinte:

Definição 2.14. *Um mergulho topológico $i : M^m \hookrightarrow S^{m+k}$, entre variedades topológicas, é dito locally-flat, ou apenas local-flat, se para todo $b \in M$, existir uma vizinhança aberta $U \subset S$ de $i(b)$ tal que $(U, U \cap i(M)) \approx (\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}^m)$.*

Nas notações da definição acima, como $M \approx i(M)$, então podemos reescrever $M^m \subset S^{m+k}$ como um mergulho local-flat de modo que $(U, U \cap M) \approx (\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}^m)$. A notação que será usada para descrever um mergulho local-flat dependerá do problema em questão.

Para o próximo resultado, considere:

[3]Para mais detalhes, ver ([34], Proposição 5.16, p. 106).

- $M^m \subset S^{m+k}$ um mergulho local-flat
- $N_0 = \{\omega \in S^I \ : \ \omega(t) \in M \Leftrightarrow t = 0\}$
- $N = N_0 \bigcup \{\omega \in S^I \ : \ \omega(t) = \omega(0) \in M, \ \forall t \in I\}$
- $q : N \to M$ dada por $q(\omega) = \omega(0)$

Assim:

Proposição 2.6. *Seja $M^m \subset S^{m+k}$ é um mergulho local-flat. Então, o par $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) = (N, N_0, q, M)$ será um $\mathbb{R}^k-$fibrado generalizado localmente trivial.*

A prova da proposição acima pode ser encontrada em ([18], Proposição 4.1, p. 496).

Definição 2.15. *Chamamos $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)$ de $\mathbb{R}^k-$fibrado generalizado normal do mergulho local-flat $M^m \subset S^{m+k}$.*

Por outro lado, considere $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ um mergulho suave, de uma variedade suave num espaço Euclidiano, e η o $\mathbb{R}^k-$fibrado vetorial normal desse mergulho, como na definição 2.4. Com isso, temos a seguinte relação entre o fibrado vetorial normal e o fibrado generalizado normal do mergulho local-flat $M \subset \mathbb{R}^{m+k}$:

Proposição 2.7. $(\eta, \eta_0) \sim_f (\mathcal{N}.\mathcal{N}_0)$

A prova da proposição acima pode ser encontrada em ([18], Corolário 4.9, p. 498).
Em ([18], Teorema 4.11, p. 498), Fadell mostra que o teorema 2.1 é válido no contexto de mergulhos local-flat, como no seguinte:

Teorema 2.3. *Se $M^m \subset S^{m+k}$ é um mergulho local-flat com $\mathbb{R}^k-$fibrado generalizado normal $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)$, então:*

$$(\tau M, \tau_0 M) \oplus (\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) \sim_f (\tau S, \tau_0 S)_{|M}$$

Ainda, podemos obter a seguinte:

Proposição 2.8. *Se $i : M^m \hookrightarrow S^{m+k}$ é um mergulho local-flat, então:*

$$(\tau S, \tau_0 S)_{|M} \sim_f i^*(\tau S, \tau_0 S)$$

Demonstração.
Primeiramente, fixemos as seguintes notações:

1. $(\tau S, \tau_0 S) = (T, T_0, p, S)$, em que:
   - $T_0 = \{\omega \in S^I \ : \ \omega(t) = \omega(0) \Leftrightarrow t = 0\}$
   - $T = T_0 \bigcup \{\omega \in S^I \ : \ \omega(t) = \omega(0), \ \forall t \in I\}$
   - $p : T \to S$ dada por $p(\omega) = \omega(0)$
2. $(\tau S, \tau_0 S)_{|M} = (p^{-1}(M), p^{-1}(M) \cap T_0, q, M)$, em que:
   - $p^{-1}(M) = \{\omega \in T \ : \ \omega(0) \in M\}$
   - $p^{-1}(M) \cap T_0 = \{\omega \in T_0 \ : \ \omega(0) \in M\}$

- $q = p_{|p^{-1}(M)} : p^{-1}(M) \to M$ dada por $q(\omega) = \omega(0)$

3. $i^*(\tau S, \tau_0 S) = (i^*T, i^*T_0, p_1, M)$, em que:

- $i^*T = \{(b, \omega) \in M \times T \ : \ i(b) = \omega(0)\}$
- $i^*T_0 = \{(b, \omega) \in i^*T \ : \ \omega \in T_0\}$
- $p_1 : i^*T \to M$ dada por $p_1(b, \omega) = b$

Assim, fica bem definida a aplicação fibrada $\phi : (p^{-1}(M), p^{-1}(M) \cap T_0) \to (i^*T, i^*T_0)$ dada por $\phi(\omega) = (\omega(0), \omega)$. Por outro lado, note que também fica bem definida a aplicação $\psi : (i^*T, i^*T_0) \to (p^{-1}(M), p^{-1}(M) \cap T_0)$ dada por $\psi(b, \omega) = \omega$.

Ainda, é claro que ϕ é um homeomorfismo com inversa ψ. Logo, o lema 2.5 garante que $(\tau S, \tau_0 S)_{|M} \sim_f i^*(\tau S, \tau_0 S)$.

□

Com isso, concluímos nesse capítulo os estudos sobre fibrados generalizados, conceito desenvolvido por Fadell em [18] com o intuito de generalizar as noções de fibrados vetoriais tangente e normal do contexto de variedades suaves para variedades topológicas, sendo que apresentamos aqui apenas a prova intuitiva, baseada nas ideias de Nash em [42], sobre como ocorre a generalização do fibrado vetorial tangente.

Com o intuito de fazermos não só uma releitura numa linguagem mais moderna da primeira metade dos resultados apresentados pro Fadell em [18], mas de fazermos também uma complementação de [18], tomamos o cuidado de mostrar detalhadamente como os fibrados generalizados de fato generalizam os fibrados vetoriais, bem como a noção de isomorfismo de fibrados vetoriais se mantém quando à extendemos para a categoria de fibrados generalizados.

Vale destacar que também desenvolvemos nesse capítulo o conceito de fibrado generalizado pullback, bem como algumas consequências de tal fibrado, conceito esse que em nenhum momento foi citado por Fadell em [18].

De todo modo, os resultados sobre fibrados generalizados desenvolvidos cuidadosamente nesse capítulo sugerem olharmos para esse conceito como uma teoria em si e não apenas como uma ferramenta para construirmos as classes características conforme apresentaremos no capítulo a seguir.

Capítulo 3

Classes Características de Variedades Topológicas

Neste capítulo, iremos construir as classes de Thom, de Stiefel-Whitney e de Euler de fibrados generalizados e apresentar algumas consequências de tais objetos. Em particular, veremos o comportamento dessas classes para os fibrados generalizados tangentes de variedades topológicas.

Para tanto, introduziremos na seção 3.1 o conceito de orientabilidade de fibrados generalizados, que foi proposto originalmente por Fadell em [18], a fim de garantirmos a existência da classe e do isomorfismo de Thom de tais fibrados. Também veremos como a classe de Thom se comporta em fibrados generalizados específicos.

Já na seção 3.2, definiremos as classes de Stiefel-Whitney de fibrados generalizados de forma idêntica a definição das classes de Stiefel-Whitney de fibrados vetoriais apresentada em [41]. Ainda, veremos como a noção do fibrado generalizado pullback apresentada no capítulo anterior será relevante para concluirmos algumas consequências das classes de Stiefel-Whitney, uma vez que Fadell não abordou esse conceito em [18].

Encerrando o capítulo, definiremos na seção 3.3 a classe de Euler de fibrados generalizados, sendo tal classe muito pouco abordada por Fadell em [18]. Nessa seção, apresentaremos vários resultados conhecidos sobre classes de Euler de fibrados vetoriais e de variedades suaves, porém em suas versões para de fibrados generalizados e de variedades topológicas.

Como explicado na observação 2.1, vamos ressaltar que toda variedade topológica citada nesse capítulo será uma variedade sem bordo.

3.1 Orientabilidade e Classe de Thom

Antes de construirmos as classes de Stiefel-Whitney e de Euler de fibrados generalizados, precisamos introduzir o conceito de orientabilidade desses fibrados. Tal conceito será fundamental para garantir a existência da classe e do isomorfismo de Thom, como será visto mais adiante.

O conceito de orientabilidade de fibrados generalizados foi proposto por Fadell em [18]. Entretanto, Fadell não se aprofundou muito nessa questão, uma vez que o tema principal desenvolvido em [18] foi sobre classes de Stiefel-Whitney e, nesse sentido, não há a necessidade de se preocupar com a orientabilidade.

Nesta seção vamos abordar com um pouco mais de detalhes a noção de orientabilidade de fibrados generalizados e apresentar alguns resultados técnicos sobre a classe de Thom, mais especificamente, qual o comportamento da classe de Thom nos fibrados generalizados pullback e produto, o que ocorre quando invertemos a orientabilidade de um fibrado generalizado e qual a relação entre a dimensão de uma variedade topológica e a classe de Thom do seu fibrado generalizado tangente.

Com exceção dos lemas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, os resultados apresentados nessa seção foram retirados de [18].

Assim, consideremos primeiramente $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e o seguinte conjunto:

$$\Omega_p = \{(e, \omega) \in E \times B^I \ : \ p(e) = \omega(0)\}$$

Em particular, como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é uma fibração de pares, então ao definirmos as aplicações $h : \Omega_p \to E$ e $H : \Omega_p \times I \to B$, respectivamente, por $h(e, \omega) = e$ e $H((e, \omega), t) = \omega(t)$, então existirá uma aplicação $\widetilde{H} : \Omega_p \times I \to E$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_p \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
\Omega_p \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

Ainda, se $(e, \omega) \in \Omega_p$ é tal que $h(e, \omega) \in E_0$, então sabemos que $\widetilde{H}((e, \omega), \_) \in E_0$. Deste modo, podemos definir a aplicação $\lambda : \Omega_p \to E^I$ por $[\lambda(e, \omega)](t) = \widetilde{H}((e, \omega), t)$.

Assim, fixada a fibra (F, F_0) de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ sobre $b_0 \in B$, fica bem definida a seguinte aplicação:

$$\Omega(B, b_0) \times (F, F_0) \to (F, F_0)$$

$$(\omega, e) \longmapsto \omega \cdot e = [\lambda(e, \omega)](1)$$

Note que, fixando $\omega \in \Omega(B, b_0)$, é evidente que a aplicação $(F, F_0) \to (F, F_0)$, que associa $e \mapsto \omega \cdot e$, induz uma ação de $\Omega(B, b_0)$ em $H_n(F, F_0; R)$ para qualquer anel R comutativo e com unidade.

Com isso, temos a seguinte:

Definição 3.1. (Orientabilidade) *Um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ sobre B é dito $R-$orientável se para todo $b_0 \in B$, a ação acima definida de $\Omega(B, b_0)$ em $H_n(F, F_0; R)$ é trivial, em que (F, F_0) denota a fibra de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ sobre $b_0 \in B$.*

Naturalmente, a orientação de uma variedade topológica está diretamente relacionada com a orientação do seu respectivo fibrado generalizado tangente, como enunciaremos no próximo resultado e cuja prova pode ser encontrada em ([18], Proposição 3.16, p. 495).

Proposição 3.1. *Uma variedade topológica M é $R-$orientável se, e somente se, seu fibrado generalizado tangente $(\tau M, \tau_0 M)$ é $R-$orientável.*

Observação 3.1. *Todo fibrado generalizado é $\mathbb{Z}_2-$orientável, como garantido em ([1], Corolário 2.8, p. 243).*

Com o intuito de definirmos as classes de Stiefel-Whitney de um fibrado generalizado qualquer e a classe de Euler de um fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável, precisamos garantir a existência da classe e do isomorfismo de Thom, do mesmo modo que é feita a construção destas classes para fibrados vetoriais, como em ([41], Capítulos 8,9 e 10).

Teorema 3.1. *Seja $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $R-$orientável. Então, existe uma única classe $\tau \in H^n(E, E_0; R)$ tal que $\phi : H^k(B; R) \to H^{n+k}(E, E_0; R)$, dado por $\phi(x) = p^*(x) \smile \tau$, é um isomorfismo para todo inteiro $k \geq 0$. Ainda, sendo $i : (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ a inclusão de uma fibra (F, F_0) de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ em seu espaço total e $(u) = H^n(F, F_0; R) \cong R$, então a classe τ é unicamente determinada por $i^*(\tau) = u$.*

A prova do teorema acima pode ser encontrada em ([18], Teorema 5.2, p. 502).

Observação 3.2. *No decorrer da demonstração do teorema 3.1, é mostrado que as induzidas $i^* : H^n(E, E_0; R) \to H^n(F, F_0; R)$ e $p^* : H^k(B; R) \to H^k(E; R)$ são isomorfismos para todo $k \geq 0$.*

Definição 3.2. (Classe e Isomorfismo de Thom) *Dado um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ $R-$orientável, chamamos o gerador $(\tau) = H^n(E, E_0; R) \cong R$ e o isomorfismo $\phi : H^k(B; R) \to H^{n+k}(E, E_0; R)$, dados no teorema 3.1, por classe e isomorfismo de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, respectivamente.*

Agora, vejamos algumas consequências envolvendo orientabilidade e as classes de Thom de fibrados generalizados. Como vamos trabalhar com classes de Stiefel-Whitney e de Euler no decorrer deste capítulo, então os lemas finais dessa seção serão feitos para $R = \mathbb{Z}_2$ e $R = \mathbb{Z}$.

Lema 3.1. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $R-$orientável sobre uma base B, $f : B' \to B$ uma aplicação qualquer e τ a classe de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$. Assim:*

1. *$f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ será um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $R-$orientável;*

2. *sendo τ^* a classe de Thom de $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, então $\tau^* = 1 \times \tau$.*

Demonstração.
Primeiramente, denotando $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$, já sabemos pelo lema 2.6 que $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (f^*E, f^*E_0, p_1, B')$ será um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado, em que:

$$
\begin{aligned}
&f^*E = \{(b', e) \in B' \times E \ : \ f(b') = p(e)\} \\
&f^*E_0 = \{(b', e) \in f^*E \ : \ e \in E_0\}
\end{aligned}
$$

Agora, fixados $b'_0 \in B'$ e $f(b'_0) \in B$, consideremos (F^*, F^*_0) e (F, F_0) as fibras de $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ sobre $b'_0 \in B'$ e $f(b'_0) \in B$, respectivamente. Devido ao lema 2.2, também sabemos que $(F^*, F^*_0) = \{b'_0\} \times (F, F_0)$.

Assim, a ação dada na definição 3.1 de $\Omega(B', b'_0)$ em $H_n(F^*, F^*_0; R)$ se resume a ação de $\Omega(B, f(b'_0))$ em $H_n(F, F_0; R)$.

Como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é um fibrado generalizado $R-$orientável, então a ação de $\Omega(B, f(b'_0))$ em $H_n(F, F_0; R)$ é trivial. Com isso, a ação de $\Omega(B', b'_0)$ em $H_n(F^*, F^*_0; R)$ será trivial e, consequentemente, $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ será um fibrado generalizado $R-$orientável.

Por fim, denotando as classes de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ respectivamente pelos geradores $(\tau) = H^n(E, E_0; R)$ e $(\tau^*) = H^n(f^*E, f^*E_0; R)$, provemos que $\tau^* = 1 \times \tau$.

Para tanto, consideremos $i : (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ e $j : (F^*, F^*_0) \hookrightarrow (f^*E, f^*E_0)$ as inclusões canônicas. Como $(F^*, F^*_0) = \{b'_0\} \times (F, F_0)$, então $j = 1 \times i$.

Agora, fixando os geradores $(u) = H^n(F, F_0; R)$ e $(1 \times u) = H^n(F^*, F_0^*; R)$[1], lembremos que as classe de Thom τ e τ^* são unicamente determinadas de modo que $i^*(\tau) = u$ e $j^*(\tau^*) = 1 \times u$.

Entretanto, veja que:

$$
\begin{aligned}
j^*(1 \times \tau) &= (1 \times i)^*(1 \times \tau) \\
&= 1 \times i^*(\tau) \\
&= 1 \times u
\end{aligned}
$$

Logo, concluímos por unicidade que $\tau^* = 1 \times \tau$.

□

Lema 3.2. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado, ambos $R-$orientáveis. Denotando por τ e τ' as classes de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$, respectivamente, então:*

1. *$(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ será um $\mathbb{R}^{n+m}-$fibrado generalizado $R-$orientável;*

2. *sendo τ'' a classe de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$, então $\tau'' = \tau \times \tau'$.*

Demonstração.

Inicialmente, recordando o lema 2.8, já sabemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ será um $\mathbb{R}^{n+m}-$fibrado generalizado. Ainda, denotaremos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, q, B')$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E'', E''_0, r, B'')$, em que:

$$
\begin{aligned}
&E'' = E \times E' \\
&E''_0 = (E \times E'_0) \bigcup (E_0 \times E') \\
&r = p \times q \\
&B'' = B \times B'
\end{aligned}
$$

Fixando $b_0 \in B$, $b'_0 \in B'$ e $(b_0, b'_0) \in B''$, consideremos (F, F_0), (F', F'_0) e (F'', F''_0) as fibras de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ sobre $b_0 \in B$, $b'_0 \in B'$ e $(b_0, b'_0) \in B''$, respectivamente.

Como $(F'', F''_0) = (F, F_0) \times (F', F'_0)$, então a fórmula de Künneth nos garantirá que:

$$H_{n+m}(F'', F''_0; R) \cong H_n(F, F_0; R) \otimes H_m(F', F'_0; R)$$

Ainda, também temos o seguinte homeomorfismo:

$$\Omega(B'', (b_0, b'_0)) \approx \Omega(B, b_0) \times \Omega(B', b'_0)$$

Deste modo, a ação dada na definição 3.1 de $\Omega(B'', (b_0, b'_0))$ em $H_{n+m}(F'', F''_0; R)$ se resume as ações de $\Omega(B, b_0)$ e $\Omega(B', b'_0)$ em $H_n(F, F_0; R)$ e $H_m(F', F'_0; R)$, respectivamente.

Como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ são fibrados generalizados $R-$orientáveis, então as ações de $\Omega(B, b_0)$ e $\Omega(B', b'_0)$ em $H_n(F, F_0; R)$ e $H_m(F', F'_0; R)$, respectivamente, são triviais. Assim, a ação de $\Omega(B'', (b_0, b'_0))$ em $H_{n+m}(F'', F''_0; R)$ será trivial e, consequentemente, $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ será um fibrado generalizado $R-$orientável.

Por fim, denotando os geradores $(\tau) = H^n(E, E_0; R)$, $(\tau') = H^m(E', E'_0; R)$ e $(\tau'') = H^{n+m}(E'', E''_0; R)$ como sendo as classes de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$, respectivamente, provemos que $\tau'' = \tau \times \tau'$.

[1]A fórmula de Künneth nos permite afirmar que $1 \times u$ será um gerador de $H^n(F^*, F_0^*; R)$.

Para tanto, vamos considerar $i : (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0)$, $i' : (F', F'_0) \hookrightarrow (E', E'_0)$ e $i'' : (F'', F''_0) \hookrightarrow (E'', E''_0)$ as inclusões canônicas. Como $(F'', F''_0) = (F, F_0) \times (F', F'_0)$ e $(E'', E''_0) = (E, E_0) \times (E', E'_0)$, então $i'' = i \times i'$.

Agora, fixando os geradores $(u) = H^n(F, F_0; R)$, $(u') = H^m(F', F'_0; R)$ e $(u \times u') = H^{n+m}(F'', F''_0; R)$[2], lembremos que as classes de Thom τ, τ' e τ'' são unicamente determinadas de modo que $i^*(\tau) = u$, $i'^*(\tau') = u'$ e $i''^*(\tau'') = u \times u'$, respectivamente.

Entretanto, note que:

$$\begin{aligned} i''^*(\tau \times \tau') &= (i \times i')^*(\tau \times \tau') \\ &= i^*(\tau) \times i'^*(\tau') \\ &= u \times u' \end{aligned}$$

Assim, concluímos por unicidade que $\tau'' = \tau \times \tau'$.

□

Lema 3.3. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável e τ sua classe de Thom. Denotando por $-(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ o próprio $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, porém com orientação invertida, e τ' sua classe de Thom, então $\tau' = -\tau$.*

Demonstração.

Inicialmente, denotemos por (E, E_0) o espaço total de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e (F, F_0) uma fibra arbitrária de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.

Assim, o resultado seguirá diretamente do teorema 3.1 e da definição 3.2, uma vez que a classe de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é o gerador $(\tau) = H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ que está diretamente relacionado com o gerador $(u) = H^n(F, F_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e, consequentemente, a classe de Thom de $-(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ será o gerador $(-\tau) = H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ que está diretamente relacionado com o gerador $(-u) = H^n(F, F_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

□

Lema 3.4. *Sejam M^m é uma variedade topológica fechada $\mathbb{Z}-$orientável de dimensão ímpar e $(\tau M, \tau_0 M)$ seu $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado tangente. Então, a classe de Thom τ de $(\tau M, \tau_0 M)$ é tal que $\tau \smile \tau = 0$.*

Demonstração.

Primeiramente, como M^m é uma variedade topológica $\mathbb{Z}-$orientável, então a proposição 3.1 nos garante que o $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado tangente $(\tau M, \tau_0 M)$ de M é $\mathbb{Z}-$orientável.

Por outro lado, denotando por $(TM, T_0 M)$ o espaço total de $(\tau M, \tau_0 M)$ e lembrando que M é compacta, então o isomorfismo de Thom de $(\tau M, \tau_0 M)$ nos garantirá que:

$$H^{2m}(TM, T_0 M; \mathbb{Z}) \cong H^m(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

Deste modo, denotando o gerador $(\tau) = H^m(TM, T_0 M; \mathbb{Z})$ como sendo a classe de Thom de $(\tau M, \tau_0 M)$, como o item 5 do lema A.1 afirma que $\tau \smile \tau = (-1)^{m^2}(\tau \smile \tau)$ e m é ímpar, então $\tau \smile \tau = -(\tau \smile \tau)$, ou seja, $2(\tau \smile \tau) = 0$.

Uma vez que $2(\tau \smile \tau) \in H^{2m}(TM, T_0 M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, então $\tau \smile \tau = 0$.

□

[2] A fórmula de Künneth nos permite afirmar que $u \times u'$ será um gerador de $H^{n+m}(F'', F''_0; R)$.

3.2 Classes de Stiefel-Whitney

A construção das classes de Stiefel-Whitney para fibrados generalizados seguirá, devido ao teorema 3.1, de modo idêntico a construção feita em ([41], Capítulo 8) para fibrados vetoriais. Note que, como todo fibrado generalizado é $\mathbb{Z}_2-$orientável e as classes de Stiefel-Whitney são construídas no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de cohomologia singular, então não precisaremos impor nenhuma condição de orientabilidade nos fibrados generalizados no decorrer dessa seção.

Com exceção das proposições 3.2 e 3.3, os resultados desta seção foram retirados de [18] e [19]. Ainda, vale destacar que os teoremas 3.3 e 3.6 e o corolário 3.3 podem ser encontrados em ([19], Lema 2.11, p. 39), ([19], Teorema 5.2, p. 52) e ([18], Teorema 6.11, p. 504), respectivamente, sendo que Fadell apresenta provas mais técnicas sem a utilização dos fibrados generalizados pullbacks. Em contrapartida, as provas de tais resultados aqui apresentadas realçam a importância do fibrado generalizado pullback.

Deste modo, sendo $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e ϕ seu isomorfismo de Thom, faz sentido, para todo $k \geq 0$, a seguinte composição[3]:

$$H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{Sq^k} H^{n+k}(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\phi^{-1}} H^k(B; \mathbb{Z}_2)$$

Definição 3.3. (Classes de Stiefel-Whitney) *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado sobre uma base B e ϕ e τ seu isomorfismo e sua classe de Thom, respectivamente. Para cada $k \geq 0$, chamamos de $k-$ésima classe de Stiefel-Whitney de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ a seguinte classe:*

$$w_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = \phi^{-1} \circ Sq^k(u) \in H^k(B; \mathbb{Z}_2)$$

Ainda, chamamos o elemento $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = \sum_{k \geq 0} w_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ de classe de Stiefel-Whitney total de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.

Agora, vejamos algumas consequências das classes de Stiefel-Whitney.

Teorema 3.2. *Seja $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado. Então, $w_0(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 1$ e $w_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 0$ para $k > n$. Em outras palavras, $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 1 + \sum_{k=1}^{n} w_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.*

Demonstração.

Considere $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$, ϕ seu isomorfismo de Thom e $\tau \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ sua classe de Thom. Como $\phi(1) = \tau$ e $Sq^0 = 1$, então:

$$\begin{aligned} w_0(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) &= \phi^{-1} \circ Sq^0(\tau) \\ &= \phi^{-1}(\tau) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, para $k > n$, temos que $Sq^k = 0$ e, assim, $w_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 0$. Logo, a classe de Stiefel-Whitney total de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 1 + \sum_{k=1}^{n} w_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.

□

[3] Sq^k denota a operação quadrado de Steenrod, cuja algumas propriedades podem sem encontradas na seção A.3.

Note que, dado um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ sobre B, como o teorema 3.2 garante que $w_0(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)=1$, então a classe de Stiefel-Whitney total é um elemento inversível[4] no anel $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$, cujo elemento inverso será denotado por $W^{-1}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$.

Teorema 3.3. *Sejam $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$ dois $\mathbb{R}^n-$fibrados generalizados sobre B e B', respectivamente. Se $f:B\to B'$ é uma aplicação tal que $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\sim_f f^*(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$, então $W(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)=f^*(W(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0))$.*

Demonstração.
Inicialmente, considere $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)=(E,E_0,p,B)$ e $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)=(E',E'_0,q,B')$ e recordemos que $f^*(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)=(f^*E',f^*E'_0,p_1,B)$ é o $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado tal que:

$$\begin{aligned}&f^*E'=\{(b,e')\in B\times E' \ : \ f(b)=q(e')\}\\&f^*E'_0=\{(b,e')\in f^*E' \ : \ e'\in E'_0\}\end{aligned}$$

Como $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\sim_f f^*(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$, então a definição 2.10 nos garante que existe uma aplicação fibrada $g:(E,E_0)\to(f^*E',f^*E'_0)$ tal que g é, em particular, uma equivalência homotópica.

Assim, considerando as classes de Thom de $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ e $f^*(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$ respectivamente como sendo os geradores $(\tau)=H^n(E,E_0;\mathbb{Z}_2)$ e $(\tau^*)=H^n(f^*E',f^*E'_0;\mathbb{Z}_2)$, então o fato de g ser uma equivalência homotópica nos permite afirmar que:

$$g^*(\tau^*)=\tau$$

Por outro lado, considerando a classe de Thom de $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$ como sendo o gerador $(\tau')=H^n(E',E'_0;\mathbb{Z}_2)$, então o lema 3.1 nos garantirá que a projeção canônica $p_2:(f^*E',f^*E'_0)\to(E',E'_0)$ é tal que:

$$p_2^*(\tau')=\tau^*=1\times\tau'$$

Deste modo, temos que:

$$g^*\circ p_2^*(\tau')=\tau$$

Ainda, por definição, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p"'] & f^*E' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & E' \arrow[d, "q"] \\
& B \arrow[r, "f"] & B'
\end{tikzcd}$$

Agora, denotando os isomorfismos de Thom de $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$ respectivamente por $\phi:H^k(B;\mathbb{Z}_2)\to H^{k+n}(E,E_0;\mathbb{Z}_2)$ e $\phi':H^k(B';\mathbb{Z}_2)\to H^{k+n}(E',E'_0;\mathbb{Z}_2)$, então também podemos afirmar que $\phi\circ f^*=g^*\circ p_2^*\circ\phi'$. De fato:

[4] Ver teorema A.3.

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in H^*(B';\mathbb{Z}_2),\ g^* \circ p_2^* \circ \phi'(x) & = & g^* \circ p_2^*(q^*(x) \smile \tau') \\ & = & [g^* \circ p_2^* \circ q^*(x)] \smile [g^* \circ p_2^*(\tau')] \\ & = & [p^* \circ f^*(x)] \smile \tau \\ & = & \phi \circ f^*(x)\end{array}$$

Com isso, temos que:

$$\begin{array}{rcl}\forall k \geq 0, f^*(w_k(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)) & = & f^* \circ \phi'^{-1} \circ Sq^k(\tau') \\ & = & \phi^{-1} \circ g^* \circ p_2^* \circ Sq^k(\tau') \\ & = & \phi^{-1} \circ Sq^k \circ g^* \circ p_2^*(\tau') \\ & = & \phi^{-1} \circ Sq^k(\tau) \\ & = & w_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)\end{array}$$

Portanto, $f^*(W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)) = W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.

□

Corolário 3.1. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ dois $\mathbb{R}^n-$fibrados generalizados sobre a mesma base. Se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$, então $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$.*

Demonstração.

Sendo B a base de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ e $1 : B \to B$ a aplicação identidade, sabemos pelo exemplo 2.6 que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f 1^*(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$.

Assim, segue do teorema 3.3 que:

$$W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 1^*(W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)) = W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$$

□

Corolário 3.2. *Se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ for um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado trivial, então $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 1$.*

Demonstração.

Inicialmente, segue do teorema 3.2 que $w_0(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 1$.

Por outro lado, sendo B a base de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado trivial, então $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \sim_f (\varepsilon_B^n, \varepsilon_B^{n,0})$. Ainda, dado $b \in B$ qualquer e $c : B \to \{b\}$ a aplicação constante, segue do exemplo 2.7 que $(\varepsilon_B^n, \varepsilon_B^{n,0}) \sim_f c^*(\varepsilon_{\{b\}}^n, \varepsilon_{\{b\}}^{n,0})$.

Assim, combinando o corolário 3.1 com o teorema 3.3, obtemos que:

$$W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = c^*(W(\varepsilon_{\{b\}}^n, \varepsilon_{\{b\}}^{n,0}))$$

Mas, como $w_k(\varepsilon_{\{b\}}^n, \varepsilon_{\{b\}}^{n,0}) \in H^k(\{b\};\mathbb{Z}_2) = 0$ para $k > 0$, então $w_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 0$, quando $k > 0$.

Portanto, $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 1$.

□

Teorema 3.4. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado. Então:*

$$W[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)] = W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$$

Demonstração.

Inicialmente, denotemos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, q, B')$ e lembremos que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E'', E''_0, r, B'')$ é o $\mathbb{R}^{n+m}-$fibrado generalizado tal que:

$E'' = E \times E'$
$E''_0 = (E \times E'_0) \bigcup (E_0 \times E')$
$r = p \times q$
$B'' = B \times B'$

Ainda, considerando as classes de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ como sendo os geradores $(\tau) = H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$, $(\tau') = H^m(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$ e $(\tau'') = H^{n+m}(E'', E''_0; \mathbb{Z}_2)$, respectivamente, sabemos pelo lema 3.2 que $\tau'' = \tau \times \tau'$.

Agora, sendo $\phi : H^k(B; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$, $\phi' : H^k(B'; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$ e $\phi'' : H^k(B''; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+n+m}(E'', E''_0; \mathbb{Z}_2)$ os isomorfismos de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$, $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$, respectivamente, obtemos que $\phi'' = \phi \times \phi'$. De fato:

$$\begin{aligned}
\forall x \times x' \in H^*(B''; \mathbb{Z}_2),\ \phi''(x \times x') &= r^*(x \times x') \smile \tau'' \\
&= [p^*(x) \times q^*(x')] \smile (\tau \times \tau') \\
&= [p^*(x) \smile \tau] \times [q^*(x') \smile \tau'] \\
&= \phi(x) \times \phi'(x') \\
&= (\phi \times \phi')(x \times x')
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 0,\ w_k[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)] &= \phi''^{-1} \circ Sq^k(\tau'') \\
&= \phi''^{-1} \circ Sq^k(\tau \times \tau') \\
&= \phi''^{-1} \left[\sum_{a+b=k} \left(Sq^a(\tau) \times Sq^b(\tau') \right) \right] \\
&= \sum_{a+b=k} \left[\phi''^{-1} \left(Sq^a(\tau) \times Sq^b(\tau') \right) \right] \\
&= \sum_{a+b=k} \left[\left(\phi^{-1} \circ Sq^a(\tau) \right) \times \left(\phi'^{-1} \circ Sq^b(\tau') \right) \right] \\
&= \sum_{a+b=k} [w_a(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times w_b(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)]
\end{aligned}$$

Logo, $W[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)] = W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$.

□

Corolário 3.3. (Produto de Whitney) *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado, ambos sobre uma mesma base. Então:*

$$W[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \oplus (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)] = W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \smile W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$$

Demonstração.

Sendo B a base de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ e $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ e $d : B \to B \times B$ a aplicação diagonal, sabemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \oplus (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0) = d^*[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)]$.

Então, os teoremas 3.3 e 3.4 garantem que:

$$\begin{aligned}
W[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \oplus (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)] &= d^*[W[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)]] \\
&= d^*[W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \times W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)] \\
&= W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \smile W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)
\end{aligned}$$

□

Como combinação direta do produto de Whitney com o corolário 3.2, obtemos o seguinte:

Corolário 3.4. *Sejam* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ *um* $\mathbb{R}^n-$*fibrado generalizado e* $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ *um* $\mathbb{R}^m-$*fibrado generalizado, ambos sobre uma mesma base. Então:*

1. *se* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ *for trivial, então* $W[(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \oplus (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)] = W(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$
2. *se* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \oplus (\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$ *for trivial, então* $W(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = W^{-1}(\mathcal{F}', \mathcal{F}'_0)$

Agora, vejamos como as classes de Stiefel-Whitney se comportam no contexto de variedades topológicas. Para tanto, precisaremos da seguinte:

Definição 3.4. *Dada uma variedade topológica M, denotaremos sua classe de Stiefel-Whitney total por* $W(M) = W(\tau M, \tau_0 M)$.

Teorema 3.5. *Se M^m é uma variedade suave, então a construção de $W(M)$ (feita nesta seção) coincide com a noção clássica das classes de Stiefel-Whitney como em ([41], Capítulo 8).*

Demonstração.
Sendo M suave, então podemos combinar a proposição 2.3 com o corolário 3.1, uma vez que denotando por ξ o $\mathbb{R}^m-$fibrado vetorial tangente de M e (ξ, ξ_0) seu $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado associado, a construção de $W(\xi, \xi_0)$ coincide com a construção clássica de $W(\xi)$ como em ([41], Capítulo 8).

□

Proposição 3.2. *Sejam M e S duas variedades topológicas. Então:*

$$W(M \times S) = W(M) \times W(S)$$

Demonstração.
Segue diretamente da combinação da proposição 2.5 com o corolário 3.1 e o teorema 3.4.

□

Como uma combinação direta do lema 2.7 com o teorema 3.3, obtemos a seguinte:

Proposição 3.3. *Se $h : M \to S$ for um homeomorfismo entre duas variedades topológicas, então* $W(M) = h^*(W(S))$.

A proposição 3.3 pode ser extendida para equivalência de homotopia, entretanto, como sua prova necessitará de ferramentas mais avançadas, deixaremos para o próximo capítulo.

Vejamos também o comportamento das classes de Stiefel-Whitney em mergulhos local-flat.

Teorema 3.6. (Dualidade de Whitney) *Se $i : M^m \hookrightarrow S^{m+k}$ é um mergulho local-flat com $\mathbb{R}^k-$fibrado generalizado normal $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)$, então:*

$$W(M) \smile W(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) = i^*(W(S))$$

Demonstração.
Devido ao teorema 2.3 e a proposição 2.8, temos que:

$$(\tau M, \tau_0 M) \oplus (\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) \sim_f (\tau S, \tau_0 S)_{|M}$$

$$(\tau S, \tau_0 S)_{|M} \sim_f i^*(\tau S, \tau_0 S)$$

Combinando o produto de Whitney, com o corolário 3.1 e o teorema 3.3, concluímos que $W(M) \smile W(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) = i^*(W(S))$.

□

Corolário 3.5. *Se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é um mergulho local-flat com $\mathbb{R}^k-$fibrado generalizado normal $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)$, então $W(M) = W^{-1}(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)$.*

Demonstração.

Segue diretamente do teorema 3.6, pois $\mathbb{R}^{m+k}$ é um espaço topológico contrátil, e consequentemente, $W(\mathbb{R}^{n+k}) = 1$.

□

3.3 Classe de Euler

Encerraremos este capítulo definindo a classe de Euler de um fibrado generalizado, que agora precisaremos impor a condição de $\mathbb{Z}-$orientabilidade.

Mostraremos como a classe de Euler se relaciona com as classes de Stiefel-Whitney e como essa condição induz alguns resultados similares do contexto de classe de Stiefel-Whitney para o contexto de classe de Euler. Ainda, veremos quais condições nos garantem a nulidade da classe de Euler.

Nesta seção, apenas a proposição 3.4 foi retirada de [18].

Definição 3.5. (Classe de Euler) *Considere $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável sobre uma base B e ϕ e τ seu isomorfismo e sua classe de Thom, respectivamente. A classe de Euler de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é definida como sendo a seguinte classe:*

$$e(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = \phi^{-1}(\tau \smile \tau) \in H^n(B; \mathbb{Z})$$

Em particular, denotamos a classe de Euler de uma variedade topológica M por:

$$e(M) = e(\tau M, \tau_0 M)$$

Lembrando da observação 3.2, o próximo resultado será uma caracterização alternativa para a classe de Euler, cuja prova pode ser encontrada em ([18], Proposição 7.11, p. 510)

Proposição 3.4. *Consideremos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável, τ sua classe de Thom e $i_E : E \hookrightarrow (E, E_0)$ a inclusão canônica. Então:*

$$e(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (p^*)^{-1} \circ i_E^*(\tau)$$

Agora, mostraremos como as classes de Stiefel-Whitney e de Euler se relacionam.

Teorema 3.7. *Considere $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável. Então, a $n-$ésima classe de Stiefel-Whitney de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é a redução módulo 2 da sua classe Euler. Em outras palavras, a projeção canônica $\rho_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ é tal que:*

$$(\rho_2)_n(e(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)) = w_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$$

Demonstração.

Primeiramente, vejamos como construir uma redução módulo 2 no âmbito de módulos de cohomologia singular. Para tanto, considere a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho_2} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Com isso, denotando $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ segue de ([44], Teorema 11, p. 239) que existem homomorfismos[5] $(\times 2)_k : H^k(B;\mathbb{Z}) \to H^k(B;\mathbb{Z})$, $(\rho_2)_k : H^k(B;\mathbb{Z}) \to H^k(B;\mathbb{Z}_2)$ e $\beta^k : H^k(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+1}(B;\mathbb{Z})$ tais que a seguinte sequência é uma sequência exata longa:

$$\cdots \longrightarrow H^k(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{(\times 2)_k} H^k(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{(\rho_2)_k} H^k(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta^k} H^{k+1}(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

De modo análogo, os mesmos homomorfismos acima também são definidos para o par (E, E_0).

Agora, como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável, podemos considerar sua classe e isomorfismo de Thom $\tau \in H^n(E, E_0;\mathbb{Z})$ e $\phi : H^k(B;\mathbb{Z}) \to H^{k+n}(E, E_0;\mathbb{Z})$, respectivamente.

Por outro lado, como $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ também é um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}_2-$orientável, então também podemos considerar sua classe e isomorfismo de Thom $\tau_2 \in H^n(E, E_0;\mathbb{Z}_2)$ e $\phi_2 : H^k(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+n}(E, E_0;\mathbb{Z}_2)$, respectivamente.

Devido a naturalidade do homomorfismo redução módulo 2, obtemos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
H^k(B;\mathbb{Z}) \arrow[r, "(\rho_2)_k"] \arrow[d, "\phi"] & H^k(B;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\phi_2"] \\
H^{k+n}(E, E_0;\mathbb{Z}) \arrow[r, "(\overline{\rho_2})_{k+n}"] & H^{k+n}(E, E_0;\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

Apenas para esclarecermos as notações acima, ρ_2 e $\overline{\rho_2}$ denotam as reduções módulo 2 para B e (E, E_0), respectivamente.

Em particular, se considerarmos o diagrama acima para $k = 0$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
(\overline{\rho_2})_n(\tau) &= (\overline{\rho_2})_n \circ \phi(1) \\
&= \phi_2 \circ (\rho_2)_0(1) \\
&= \phi_2(1) \\
&= \tau_2
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\begin{aligned}
(\rho_2)_n(e(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)) &= (\rho_2)_n \circ \phi^{-1}(\tau \smile \tau) \\
&= \phi_2^{-1} \circ (\overline{\rho_2})_{2n}(\tau \smile \tau) \\
&= \phi_2^{-1}((\overline{\rho_2})_n(\tau) \smile (\overline{\rho_2})_n(\tau)) \\
&= \phi_2^{-1}(\tau_2 \smile \tau_2) \\
&= \phi_2^{-1} \circ Sq^n(\tau_2) \\
&= w_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.8. *Sejam $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável sobre uma base B e $f : B' \to B$ uma aplicação qualquer. Então:*

$$e\left(f^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)\right) = f^*\left(e(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)\right)$$

[5] O homomorfismo conectante β^k é conhecido como homomorfismo cohomológico de Bockstein.

Demonstração.

Primeiramente, denotemos $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ e $f^*(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) = (f^*E, f^*E_0, p_1, B')$, em que:

$$\begin{aligned}
&f^*E = \{(b', e) \in B' \times E \ : \ f(b') = p(e)\}\\
&f^*E_0 = \{(b', e) \in f^*E \ : \ e \in E_0\}
\end{aligned}$$

Agora, consideremos as classes de Thom de $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ e $f^*(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ como sendo, respectivamente, os geradores $(\tau) = H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ e $(\tau^*) = H^n(f^*E, f^*E_0; \mathbb{Z})$. Sendo $p_2 : (f^*E, f^*E_0) \to (E, E_0)$ a projeção canônica, então o lema 3.1 garantirá que:

$$p_2^*(\tau) = \tau^* = 1 \times \tau$$

Por outro lado, considerando os isomorfismos de Thom de $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ e $f^*(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ como sendo $\phi : H^k(B;\mathbb{Z}) \to H^{n+k}(E, E_0; \mathbb{Z})$ e $\psi : H^k(B';\mathbb{Z}) \to H^{k+n}(f^*E, f^*E_0; \mathbb{Z})$, respectivamente, então obteremos com contas análogas ao teorema 3.3 que:

$$p_2^* \circ \phi = \psi \circ f^*$$

Assim, concluímos que:

$$\begin{aligned}
e\left(f^*(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\right) &= \psi^{-1}(\tau^* \smile \tau^*)\\
&= \psi^{-1}(p_2^*(\tau) \smile p_2^*(\tau))\\
&= \psi^{-1} \circ p_2^*(\tau \smile \tau)\\
&= f^* \circ \phi^{-1}(\tau \smile \tau)\\
&= f^*\left(e(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\right)
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.9. *Sejam $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$ um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado, ambos $\mathbb{Z}-$orientáveis. Então:*

$$e[(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)] = e(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) \times e(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$$

Demonstração.

Inicialmente, vamos denotar $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$, $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0) = (E', E'_0, q, B')$ e $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F},\mathcal{F}_0) = (E'', E''_0, r, B'')$, em que:

$$\begin{aligned}
&E'' = E \times E'\\
&E''_0 = (E \times E'_0) \bigcup (E_0 \times E')\\
&r = p \times q\\
&B'' = B \times B'
\end{aligned}$$

Ainda, considerando os geradores $(\tau) = H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$, $(\tau') = H^m(E', E'_0; \mathbb{Z})$ e $(\tau'') = H^{n+m}(E'', E''_0; \mathbb{Z})$ como sendo as classes de Thom de $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$, $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$ e $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$, respectivamente, sabemos pelo lema 3.2 que $\tau'' = \tau \times \tau'$.

Agora, sendo $\phi : H^n(B;\mathbb{Z}) \to H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z})$, $\phi' : H^m(B';\mathbb{Z}) \to H^{2m}(E', E'_0; \mathbb{Z})$ e $\phi'' : H^{n+m}(B'';\mathbb{Z}) \to H^{2(n+m)}(E'', E''_0; \mathbb{Z})$ os isomorfismos de Thom de $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$, $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$ e $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) \times (\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$, respectivamente, obteremos com contas análogas ao teorema 3.4 que:

$$\phi'' = (-1)^{nm}(\phi \times \phi')$$

Deste modo, concluímos que:

$$\begin{aligned} e\left[(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\times(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)\right] &= \phi''^{-1}(\tau''\smile\tau'') \\ &= (-1)^{nm}(\phi^{-1}\times\phi'^{-1})\,(\tau''\smile\tau'') \\ &= (-1)^{nm}(\phi^{-1}\times\phi'^{-1})\,((\tau\times\tau')\smile(\tau\times\tau')) \\ &= (-1)^{nm}(\phi^{-1}\times\phi'^{-1})\,((-1)^{nm}(\tau\smile\tau)\times(\tau'\smile\tau')) \\ &= (-1)^{2nm}(\phi^{-1}\times\phi'^{-1})\,((\tau\smile\tau)\times(\tau'\smile\tau')) \\ &= \phi^{-1}(\tau\smile\tau)\times\phi'^{-1}(\tau'\smile\tau') \\ &= e(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\times e(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0) \end{aligned}$$

□

Corolário 3.6. (Produto de Whitney) *Sejam $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado e $(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$ um $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado, ambos $R-$orientáveis e sobre uma mesma base. Então:*

$$e[(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\oplus(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)] = e(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\smile e(\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0)$$

Demonstração.

Demonstração análoga ao corolário 3.3, bastando utilizar os teoremas 3.8 e 3.9.

□

Proposição 3.5. *Seja $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável. Denotando por $-(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ o mesmo fibrado generalizado, porém com orientação invertida, então:*

$$e\left(-(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\right) = -e(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$$

Demonstração.

Inicialmente, denotemos $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) = (E,E_0,p,B)$. Deste modo, considerando os geradores $(\tau) = H^n(E,E_0;\mathbb{Z})$ e $(\tau') = H^n(E,E_0;\mathbb{Z})$ como sendo as classes de Thom de $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ e $-(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$, respectivamente, então o lema 3.3 nos garantirá que $\tau' = -\tau$.

Por outro lado, denotando os isomorfismos de Thom de $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ e $-(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)$ respectivamente por $\phi : H^k(B;\mathbb{Z}) \to H^{k+n}(E,E_0;\mathbb{Z})$ e $\phi' : H^k(B;\mathbb{Z}) \to H^{k+n}(E,E_0;\mathbb{Z})$, então:

$$\begin{aligned} \forall x\in H^k(B;\mathbb{Z}),\ \phi'(x) &= p^*(x)\smile\tau' \\ &= p^*(x)\smile(-\tau) \\ &= -\left(p^*(x)\smile\tau\right) \\ &= -\phi(x) \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\begin{aligned} e\left(-(\mathcal{F},\mathcal{F}_0)\right) &= \phi'^{-1}(\tau'\smile\tau') \\ &= \phi'^{-1}((-\tau)\smile(-\tau)) \\ &= \phi'^{-1}(\tau\smile\tau) \\ &= -\phi^{-1}(\tau\smile\tau) \\ &= -e(\mathcal{F},\mathcal{F}_0) \end{aligned}$$

□

Por fim, vejamos quais condições garantem a nulidade da classe de Euler.

Proposição 3.6. *Se M é uma variedade topológica fechada $\mathbb{Z}-$orientável de dimensão ímpar, então $e(M) = 0$.*

Demonstração.

Primeiramente, considerando $m = dim(M)$, denote $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0M, p, M)$ o $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado tangente de M e considere o gerador $(\tau) = H^m(TM, T_0M; \mathbb{Z})$ como sendo a classe de Thom de $(\tau M, \tau_0 M)$.

Já sabemos pelo lema 3.4 que $\tau \smile \tau = 0$.

Assim, denotando por $\phi : H^k(M; \mathbb{Z}) \to H^{k+m}(TM, T_0M; \mathbb{Z})$ o isomorfismo de Thom de $(\tau M, \tau_0 M)$, então $e(M) = \phi^{-1}(\tau \smile \tau) = 0$.

□

Proposição 3.7. *Consideremos $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = (E, E_0, p, B)$ um $\mathbb{R}^n-$fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável. Se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ admitir uma seção $s : B \to E$ tal que $s(B) \subset E_0$, então $e(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = 0$.*

Demonstração.

Inicialmente, já sabemos pela observação 3.2 que se $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ é um fibrado generalizado $\mathbb{Z}-$orientável, então $p^* : H^n(B; \mathbb{Z}) \to H^n(E; \mathbb{Z})$ será um isomorfismo. Deste modo, como s é uma seção de p, isto é, $p \circ s = 1$, então $s^* = (p^*)^{-1}$.

Assim, segue da proposição 3.4 que $e(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = s^* \circ i_E^*(\tau)$, em que $i_E : E \hookrightarrow (E, E_0)$ é a inclusão canônica e $\tau \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ é a classe de Thom de $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$.

Por outro lado, denotando por $j : (E_0, E_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ a inclusão canônica, então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s"'] & E_0 \arrow[r, hook, "(i_E)_{|E_0}"] & (E_0, E_0) \arrow[d, hook, "j"] \\
E \arrow[rr, hook, "i_E"] & & (E, E_0)
\end{tikzcd}$$

Entretanto, $j^* : H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) \to H^n(E_0, E_0; \mathbb{Z})$ é o homomorfismo nulo, uma vez que $H^n(E_0, E_0; \mathbb{Z}) = 0$. Assim, $s^* \circ i_E^* = s^* \circ (i_E)^*_{|E_0} \circ j^* = 0$.

Logo, $e(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) = s^* \circ i_E^*(\tau) = 0$.

□

Deste modo, encerramos esse capítulo apresentando diversos resultados, retirados de [18] e também originais, sobre as classes de Thom, de Stiefel-Whitney e de Euler de fibrados generalizados e, consequentemente, de variedades topológicas.

Por um lado, ao compararmos esse capítulo com a segunda metade dos resultados apresentados por Fadell em [18], referentes as classes de Stiefel-Whitney e de Euler, concluiremos que esse capítulo é uma releitura do trabalho de Fadell numa linguagem mais moderna e com demonstrações mais detalhadas de grande parte dos resultados de [18].

Por outro lado, também concluiremos que esse capítulo é uma continuação de [18], uma vez que apresentamos resultados relacionados ao fibrado generalizado pullback, conceito que sequer foi citado em [18], e também apresentamos resultados envolvendo a orientabilidade dos fibrados generalizados, que foram pouco abordados em [18]. Em particular, a seção 3.3 sobre classe de Euler consiste quase que totalmente de resultados originais.

De qualquer maneira, a forma como desenvolvemos nossas contribuições para a teoria das classes características de variedades topológicas nesse capítulo reforça a importância de todas as propriedades sobre fibrados generalizados desenvolvidas no capítulo anterior.

Capítulo 4

Aplicações em Variedades Topológicas Fechadas

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações sobre as classes de Stiefel-Whitney, de Euler e de Wu de variedades topológicas fechadas.

Inicialmente, na seção 4.1, daremos uma prova alternativa da versão topológica da fórmula de Wu, que foi mostrada pela primeira vez por Fadell em [18]. Também veremos algumas consequências de tal resultado.

Utilizando os lemas preliminares da fórmula de Wu, veremos na seção 4.2 como a classe de Euler e a característica de Euler de uma variedade topológica se relacionam e como isso nos permitiu generalizar uma das consequências do teorema de Poincaré-Hopf do contexto de variedades suaves pra variedades topológicas.

Encerrando o capítulo, veremos na seção 4.3 como a teoria de fibrados generalizados nos permitiu generalizar, novamente do contexto de variedades suaves para topológicas, um dos resultados apresentados por de Stong em [46], envolvendo classes de Wu, cuja demonstração é baseada fortemente na existência da vizinhança tubular para mergulhos suaves.

4.1 Versão Topológica da Fórmula de Wu

Em ([40], Capítulo 9) e ([41], Capítulo 11), Milnor apresenta duas demonstrações da fórmula de Wu para variedades suaves, muito semelhantes entre si, mas diferindo em alguns detalhes técnicos.

Em [18], Fadell utiliza os fibrados generalizados para dar uma primeira demonstração da fórmula de Wu para variedades topológicas, baseando-se em [40]. Vale ressaltar que os resultados preliminares que Fadell desenvolve em [18], para provar a fórmula de Wu, são todos no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de (co)homologia singular.

Nesta seção, também utilizaremos os fibrados generalizados para dar uma segunda prova da fórmula de Wu para variedades topológicas, agora, baseada em [41]. Entretanto, os resultados preliminares aqui desenvolvidos, para a fórmula de Wu, serão feitos no âmbito de $R-$módulos de (co)homologia singular com $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$, pois as versões de tais resultados para $R = \mathbb{Z}$ serão de extrema valia para concluirmos, na próxima seção, as aplicações sobre a classe de Euler.

Para tanto, fixaremos durante toda esta seção os seguintes objetos:

- M^m uma variedade topológica fechada, conexa e $R-$orientável, com $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$;
- dada $\{b_i\}_{i=1}^r$ uma base para $H^*(M; R)$, $\{b_i^{\#}\}_{i=1}^r$ será sua base dual;
- $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0 M, p, M)$ o $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado tangente de M;
- $(\tau) = H^m(TM, T_0 M; R) \cong R$ a classe de Thom de $(\tau M, \tau_0 M)$;
- $\phi : H^k(M; R) \to H^{m+k}(TM, T_0 M; R)$ o isomorfismo de Thom de $(\tau M, \tau_0 M)$ definido por $\phi(x) = p^*(x) \smile \tau$.

Por outro lado, sendo $d : M \to M \times M$ a aplicação diagonal e $\Delta = d(M)$, segue de ([18], Proposição 6.14, p. 505) que a aplicação $\psi : (TM, T_0 M) \to (M \times M, M \times M - \Delta)$ definida por $\psi(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$ induz isomorfismo no âmbito de $R-$módulos de cohomologia singular. Deste modo, podemos denotar $(\tau') = H^m(M \times M, M \times M - \Delta; R) \cong R$ de modo que $\psi^*(\tau') = \tau$.

Antes de enunciarmos o primeiro resultado técnico para prova da fórmula de Wu, consideremos $b \in M$ arbitrário e a inclusão canônica $j_b : (M, M - \{b\}) \hookrightarrow (M \times M, M \times M - \Delta)$ dada por $j_b(x) = (b, x)$. Deste modo, a induzida j_b^* relaciona a classe τ' com a classe de $R-$orientação[1] local de M em $b \in M$ da seguinte maneira:

Lema 4.1. *Para qualquer $b \in M$, temos:*

$$< j_b^*(\tau'), [M]_b >= 1 \in R$$

Demonstração.

Primeiramente, fixado $b \in M$, denotemos por (F, F_0) a fibra de $(\tau M, \tau_0 M)$ sobre $b \in M$ e consideremos a inclusão canônica $f_b : (F, F_0) \hookrightarrow (TM, T_0 M)$. Ainda, defina a aplicação $\psi_0 : (F, F_0) \to (M, M - \{b\})$ por $\psi_0(\omega) = \omega(1)$. Deste modo, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(F, F_0) \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, hook, "f_b"] & (M, M - \{b\}) \arrow[d, hook, "j_b"] \\
(TM, T_0 M) \arrow[r, "\psi"] & (M \times M, M \times M - \Delta)
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, lembrando que a classe de $R-$orientação local de M em $b \in M$ é o gerador $([M]_b) = H_m(M; R) \cong R$, então a proposição A.1 nos garantirá que existe um único elemento $x_b \in H^m(M; R)$ tal que $x_b \neq 0$ e $< x_b, [M]_b >= 1$.

Agora, como $(F, F_0) \sim (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\})$ e, segundo ([18], Proposição 3.12, p. 494), ψ_0 induz isomorfismo no âmbito de $R-$módulos de (co)homologia singular, então podemos escolher um gerador $([F]_0) = H_m(F, F_0; R)$ de modo que $(\psi_0)_*([F]_0) = [M]_b$.

Ainda, como a proposição A.1 nos garante novamente que existe um único elemento $x_F \in H^m(F, F_0; R)$ tal que $x_F \neq 0$ e $< x_F, [F]_0 >= 1$, então $\psi_0^*(x_b) = x_F$, pois:

$$\begin{aligned}
< \psi_0^*(x_b), [F]_0 > &= < x_b, (\psi_0)_*([F]_0) > \\
&= < x_b, [M]_b > \\
&= 1
\end{aligned}$$

[1]Para mais detalhes sobre as classes de orientação, ver a seção A.4.

Por fim, como a classe de Thom τ de $(\tau M, \tau_0 M)$ é unicamente determinada de modo que $f_b^*(\tau) = x_F$, então concluímos que:

$$\begin{aligned}
< j_b^*(\tau'), [M]_b > &= < j_b^* \circ (\psi^*)^{-1}(\tau), [M]_b > \\
&= < (\psi_0^*)^{-1} \circ f_b^*(\tau), [M]_b > \\
&= < (\psi_0^*)^{-1}(x_F), [M]_b > \\
&= < x_b, [M]_b > \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Note que a versão do lema 4.1 para $R = \mathbb{Z}_2$ segue diretamente da comutatividade do diagrama apresentado em sua demonstração, uma vez que j_b^* é um isomorfismo e os únicos elementos não nulos de $H^m(M \times M, M \times M - \Delta; \mathbb{Z}_2)$ e $H_m(M, M - \{b\}; \mathbb{Z}_2)$ são, respectivamente, τ' e $[M]_b$.

Com isso, queremos destacar que a nossa contribuição na demonstração do lema 4.1 é para o caso $R = \mathbb{Z}$, sendo tal caso imprescindível para as versões do lema 4.2 e da proposição 4.1 para $R = \mathbb{Z}$ e, consequentemente, para as aplicações que serão apresentadas na seção 4.2 sobre classe de Euler.

Também queremos ressaltar que a prova do lema 4.1, em sua versão para variedades suaves, pode ser encontrada em ([41], Lema 11.7, p. 123), sendo que em tal demonstração é utilizada a estrutura Rimenniana da variedade bem como a existência da aplicação exponencial, enquanto que a nossa demonstração foi obtida de forma totalmente algébrica, nos permitindo generalizar para o contexto de variedades topológicas.

Agora, retornando aos resultados preliminares referentes a prova da versão topológica da fórmula de Wu, vamos considerar $j : M \times M \hookrightarrow (M \times M, M \times M - \Delta)$ a inclusão canônica e definir $U = j^*(\tau') \in H^m(M \times M; R)$. Assim, o produto slant relaciona U e a classe de $R-$orientação global de M da seguinte maneira:

Lema 4.2. *$U/[M] = 1 \in H^0(M; R) \cong R$*

Demonstração.

Considerando $b \in M$ arbitrário e denotando por $k_b : \{b\} \hookrightarrow M$ a inclusão canônica, o seguinte diagrama será comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^m(M \times M; R) \arrow[r, "/[M]"] \arrow[d, "k_b^* \times 1"] & H^0(M; R) \arrow[d, "k_b^*"] \\
H^m(\{b\} \times M; R) \arrow[r, "/[M]"] & H^0(\{b\}; R)
\end{tikzcd}$$

De fato, para qualquer $x \otimes y \in H^0(M; R) \otimes H^m(M; R)$, temos:

$$\begin{aligned}
k_b^*\left((x \times y)/[M]\right) &= k_b^*\left(< y, [M] > x\right) \\
&= < y, [M] > k_b^*(x) \\
&= \left(k_b^*(x) \times y\right)/[M] \\
&= \left((k_b^* \times 1)(x \times y)\right)/[M]
\end{aligned}$$

Agora, lembremos que as classes de orientação global e local de M são relacionadas pela inclusão $\rho_b : M \hookrightarrow (M, M - \{b\})$ por $(\rho_b)_*([M]) = [M]_b$. Ainda, denotando por

$i_b : M \hookrightarrow M \times M$ a inclusão definida por $i_b(x) = (b, x)$, é evidente que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "\rho_b"] \arrow[d, hook, "i_b"] & (M, M - \{b\}) \arrow[d, hook, "j_b"] \\ M \times M \arrow[r, hook, "j"] & (M \times M, M \times M - \Delta) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{b\} \times M \arrow[r, hook, "1 \times i_b"] \arrow[d, hook, "k_b \times 1"] & \{b\} \times (M \times M) \arrow[dl, "p_2"] \\ M \times M & \end{tikzcd}$$

Deste modo, obtemos que:

$$\begin{aligned} k_b^*(U/[M]) &= ((k_b^* \times 1)(U))/[M] \\ &= ((1 \times i_b^*) \circ p_2^*(U))/[M] \\ &= ((1 \times i_b^*)(1 \times U))/[M] \\ &= (1 \times i_b^*(U))/[M] \\ &= < i_b^*(U), [M] > 1 \\ &= < i_b^* \circ j^*(\tau'), [M] > 1 \\ &= < \rho_b^* \circ j_b^*(\tau'), [M] > 1 \\ &= < j_b^*(\tau'), (\rho_b)_*([M]) > 1 \\ &= < j_b^*(\tau'), [M]_b > 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Assim, como $k_b^*(U/[M]) = 1 \in H^0(\{b\}; R) \cong R$ para qualquer $b \in M$, concluímos que $U/[M] = 1 \in H^0(M; R) \cong R$.

□

Lema 4.3. $(x \times 1) \smile U = (1 \times x) \smile U, \ \forall x \in H^*(M; R)$

Demonstração.

Inicialmente, lembremos que as projeções canônicas $p_1, p_2 : M \times M \to M$ são tais que $(p_1)_{|\Delta} = (p_2)_{|\Delta}$. Ainda, como M é uma variedade topológica, então M será um ENR.

Deste modo, segue de ([17], Proposição 8.6, p. 81) que existirá $\Delta_\epsilon \subset M \times M$ vizinhança aberta de Δ tal que $(p_1)_{|\Delta_\epsilon} \sim (p_2)_{|\Delta_\epsilon}$. Em outras palavras, sendo $e' : \Delta_\epsilon \hookrightarrow M \times M$ a inclusão canônica, então $e'^* \circ p_1^* = e'^* \circ p_2^*$.

Por outro lado, considerando a inclusão $e : (\Delta_\epsilon, \Delta_\epsilon - \Delta) \hookrightarrow (M \times M, M \times M - \Delta)$ a versão de pares da inclusão e', fica evidente que a inclusão e é uma excisão e, assim, sua induzida no âmbito de $R-$módulos de cohomologia singular será um isomorfismo.

Assim, teremos para todo $x \in H^*(M; R)$ que:

$$\begin{aligned} e'^* \circ p_1^*(x) = e'^* \circ p_2^*(x) &\Longrightarrow e'^* \circ p_1^*(x) \smile e^*(\tau') = e'^* \circ p_2^*(x) \smile e^*(\tau') \\ &\Longrightarrow e^*(p_1^*(x) \smile \tau') = e^*(p_2^*(x) \smile \tau') \\ &\Longrightarrow p_1^*(x) \smile \tau' = p_2^*(x) \smile \tau' \\ &\Longrightarrow j^*(p_1^*(x) \smile \tau') = j^*(p_2^*(x) \smile \tau') \\ &\Longrightarrow p_1^*(x) \smile j^*(\tau') = p_2^*(x) \smile j^*(\tau') \\ &\Longrightarrow p_1^*(x) \smile U = p_2^*(x) \smile U \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $(x \times 1) \smile U = (1 \times x) \smile U$ para todo $x \in H^*(M;R)$.

□

Proposição 4.1. $U = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{|b_i|} \left(b_i \times b_i^{\#} \right)$

Demonstração.

Lembrando que $U \in H^m(M \times M;R) \cong \bigoplus_{i+j=m} H^i(M;R) \otimes H^j(M;R)$, então existem $c_1, \cdots, c_r \in H^*(M;R)$ tais que $|b_i| + |c_i| = m$ e $U = \sum_{i=1}^{r} (b_i \times c_i)$. Note que, para cada $b_j \in \{b_i\}_{i=1}^r$, temos:

$$\begin{aligned}
\left[(b_j \times 1) \smile U\right]/[M] &= b_j \smile (U/[M]) \\
&= b_j \smile 1 \\
&= b_j
\end{aligned}$$

Por outro lado, o lema anterior nos garante que:

$$\begin{aligned}
\left[(b_j \times 1) \smile U\right]/[M] &= \left[(1 \times b_j) \smile U\right]/[M] \\
&= \left[(1 \times b_j) \smile \left(\sum_{i=1}^{r} (b_i \times c_i) \right) \right]/[M] \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left[\left((1 \times b_j) \smile (b_i \times c_i) \right)/[M] \right] \\
&= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{|b_j|.|b_i|} \left[\left((1 \smile b_i) \times (b_j \smile c_i) \right)/[M] \right] \\
&= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{|b_j|.|b_i|} < b_j \smile c_i, [M] > b_i
\end{aligned}$$

Deste modo, como $b_j = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{|b_j|.|b_i|} b_i < b_j \smile c_i, [M] >$, então:

$$(-1)^{|b_j|.|b_i|} < b_j \smile c_i, [M] >= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Por fim, veja que para $i = j$, temos $(-1)^{|b_i|.|b_i|} = (-1)^{|b_i|}$, mas por outro lado, para $i \neq j$, então $< b_j \smile c_i, [M] >= 0$ independentemente do sinal $(-1)^{|b_j|.|b_i|}$. Com isso, podemos reescrever a igualdade acima por:

$$< b_j \smile (-1)^{|b_i|} c_i, [M] >= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Devido a unicidade da base dual, como no teorema A.7, então $b_i^{\#} = (-1)^{|b_i|} c_i$, ou seja, $c_i = (-1)^{|b_i|} b_i^{\#}$. Logo, $U = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{|b_i|} \left(b_i \times b_i^{\#} \right)$.

□

Lema 4.4. *Para qualquer $k \geq 0$, temos:*

$$w_k(M) = Sq^k(U)/[M]$$

Demonstração.

Recordando que $w_k(M) = \phi^{-1} \circ Sq^k(\tau)$, então:

$$Sq^k(\tau) = \phi(w_k(M)) = p^*(w_k(M)) \smile \tau$$

Agora, definindo os homomorfismos $\phi' : H^k(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(M \times M, M \times M - \Delta;\mathbb{Z}_2)$ e $\phi'' : H^k(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(M \times M;\mathbb{Z}_2)$, respectivamente, por $\phi'(x) = p_1^*(x) \smile \tau'$ e $\phi''(x) = p_1^*(x) \smile U$, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
H^{k+m}(T,T_0;\mathbb{Z}_2) & H^{k+m}(M \times M, M \times M - \Delta;\mathbb{Z}_2) \arrow[l, "\psi^*"'] \arrow[r, "j^*"] & H^{k+m}(M \times M;\mathbb{Z}_2) \\
& H^k(M;\mathbb{Z}_2) \arrow[ul, "\phi"] \arrow[u, "\phi'"] \arrow[ur, "\phi''"'] &
\end{tikzcd}$$

De fato, pois para qualquer $x \in H^k(M;\mathbb{Z}_2)$, temos:

$$\begin{aligned}
\psi^* \circ \phi'(x) &= \psi^*(p_1^*(x) \smile \tau') \\
&= p^*(x) \smile \psi^*(\tau') \\
&= p^*(x) \smile \tau \\
&= \phi(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j^* \circ \phi'(x) &= j^*(p_1^*(x) \smile \tau') \\
&= p_1^*(x) \smile j^*(\tau') \\
&= p_1^*(x) \smile U \\
&= \phi''(x)
\end{aligned}$$

Note que, sendo ϕ e ψ^* isomorfismos tais que $\phi = \psi^* \circ \phi'$, então ϕ' também será um isomorfismo. Assim:

$$\begin{aligned}
\phi'^{-1} \circ Sq^k(\tau') &= \phi'^{-1} \circ Sq^k \circ (\psi^*)^{-1}(\tau) \\
&= \phi'^{-1} \circ (\psi^*)^{-1} \circ Sq^k(\tau) \\
&= \phi^{-1} \circ Sq^k(\tau) \\
&= w_k(M)
\end{aligned}$$

Com isso, garantimos que $Sq^k(\tau') = \phi'(w_k(M))$ e:

$$\begin{aligned}
Sq^k(U) &= Sq^k \circ j^*(\tau') \\
&= j^* \circ Sq^k(\tau') \\
&= j^* \circ \phi'(w_k(M)) \\
&= \phi''(w_k(M)) \\
&= p_1^*(w_k(M)) \smile U \\
&= (w_k(M) \times 1) \smile U
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que:

$$\begin{aligned}
Sq^k(U)/[M] &= \left[(w_k(M) \times 1) \smile U\right]/[M] \\
&= w_k(M) \smile (U/[M]) \\
&= w_k(M) \smile 1 \\
&= w_k(M)
\end{aligned}$$

$\square$

Finalmente, podemos enunciar e provar o principal resultado desta seção, a fórmula de Wu:

Teorema 4.1. (Fórmula de Wu) *Para qualquer $k \geq 0$, temos:*

$$w_k(M) = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j(M))$$

Demonstração.
Devido ao Corolário A.1 e a própria definição das classes de Wu, temos:

$$\begin{aligned} v_j(M) &= \sum_{l=1}^{r} < v_j(M) \smile b_l^{\#}, [M] > b_l \\ &= \sum_{l=1}^{r} < Sq^j(b_l^{\#}), [M] > b_l \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j(M)) &= \sum_{i+j=k} \sum_{l=1}^{r} < Sq^j(b_l^{\#}), [M] > Sq^i(b_l) \\ &= \sum_{i+j=k} \sum_{l=1}^{r} \left[\left(Sq^i(b_l) \times Sq^j(b_l^{\#}) \right) / [M] \right] \\ &= \sum_{l=1}^{r} \left[\left(\sum_{i+j=k} \left(Sq^i(b_l) \times Sq^j(b_l^{\#}) \right) \right) / [M] \right] \\ &= \sum_{l=1}^{r} \left[Sq^k(b_l \times b_l^{\#}) / [M] \right] \\ &= Sq^k \left(\sum_{l=1}^{r} (b_l \times b_l^{\#}) \right) / [M] \\ &= Sq^k(U)/[M] \\ &= w_k(M) \end{aligned}$$

□

Agora, vejamos algumas consequências da fórmula de Wu.

Corolário 4.1. *Se $f : M^m \to S^m$ é uma aplicação entre variedades topológicas fechadas e conexas, que induz isomorfismo no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de (co)homologia singular, então $f^*(W(S)) = W(M)$. Em particular, o mesmo ocorre se f for uma equivalência homotópica.*

Demonstração.
Basta mostrar que, nestas condições, as classes de Wu de M e S são tais que $f^*(v(S)) = v(M)$, pois assim a fórmula de Wu garantirá que:

$$\begin{aligned} f^*(W(S)) &= f^*(Sq(v(S))) \\ &= Sq(f^*(v(S))) \\ &= Sq(v(M)) \\ &= W(M) \end{aligned}$$

Devido a unicidade das classes de Wu, é suficiente mostrar para todo $0 \leq i \leq m$ que:

$$< f^*(v_i(S)) \smile x, [M] >=< Sq^i(x), [M] >, \ \forall x \in H^{m-i}(M; \mathbb{Z}_2)$$

Primeiramente, como f_* e f^* são isomorfismos, então $f_*([M]) = [S]$ e para todo $0 \leq i \leq m$ e qualquer $x \in H^{m-i}(M;\mathbb{Z}_2)$, existe um único $y \in H^{m-i}(S;\mathbb{Z}_2)$ tal que $f^*(y) = x$. Assim:

$$\begin{aligned}
< f^*(v_i(S)) \smile x, [M] > &= < f^*(v_i(S)) \smile f^*(y), [M] > \\
&= < f^*(v_i(S) \smile y), [M] > \\
&= < v_i(S) \smile y, f_*([M]) > \\
&= < v_i(S) \smile y, [S] > \\
&= < Sq^i(y), [S] > \\
&= < Sq^i(y), f_*([M]) > \\
&= < f^*(Sq^i(y)), [M] > \\
&= < Sq^i(f^*(y)), [M] > \\
&= < Sq^i(x), [M] >
\end{aligned}$$

Logo, $f^*(v(S)) = v(M)$ e, consequentemente, $f^*(W(S)) = W(M)$.

□

Corolário 4.2. *Considere M^m uma variedade topológica fechada e conexa de modo que $w_1(M) = \cdots = w_r(M) = 0$ para algum inteiro $0 \leq r \leq m$. Então, as classes de Wu de M são tais que $v_1(M) = \cdots = v_r(M) = 0$ e $v_{r+1}(M) = w_{r+1}(M)$.*

Demonstração.

Utilizando diretamente a fórmula de Wu e as propriedades dos quadrados de Steenrod, obtemos recurssivamente que:

$$\begin{aligned}
0 &= w_1(M) \\
&= Sq^0(v_1(M)) + Sq^1(v_0(M)) \\
&= Sq^0(v_1(M)) \\
&= v_1(M)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= w_2(M) \\
&= Sq^0(v_2(M)) + Sq^1(v_1(M)) + Sq^2(v_0(M)) \\
&= Sq^0(v_2(M)) \\
&= v_2(M) \\
&\vdots \\
0 &= w_r(M) \\
&= \sum_{i=0}^{r} Sq^i(v_{r-i}(M)) \\
&= Sq^0(v_r(M)) + \sum_{i=1}^{r} Sq^i(v_{r-i}(M)) \\
&= Sq^0(v_r(M)) \\
&= v_r(M)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{r+1}(M) &= \sum_{i=0}^{r+1} Sq^i(v_{r+1-i}(M)) \\
&= Sq^0(v_{r+1}(M)) + \sum_{i=1}^{r+1} Sq^i(v_{r+1-i}(M)) \\
&= Sq^0(v_{r+1}(M)) \\
&= v_{r+1}(M)
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.3. *Seja M^m uma variedade topológica fechada e conexa. Então, para todo inteiro $0 < i < m$ tal que $2i > m$, obtemos que $v_i(M) = 0$.*

Demonstração.
Lembremos que a classe de Wu $v_i(M) \in H^i(M; \mathbb{Z}_2)$ é unicamente determinada pela seguinte relação:

$$< v_i(M) \smile x, [M] >=< Sq^i(x), [M] >, \ \forall x \in H^{m-i}(M; \mathbb{Z}_2)$$

Agora, como $2i > m$, isto é, $i > m - i$, então dado $x \in H^{m-i}(M; \mathbb{Z}_2)$, teremos que $Sq^i(x) = 0$ e, consequentemente, $< Sq^i(x), [M] >= 0$. Com isso, $< v_i(M) \smile x, [M] >= 0$ e, assim, $v_i(M) \smile x = 0$.

Caso $H^{m-i}(M; \mathbb{Z}_2) = 0$, a dualidade de Poincaré e o teorema dos Coeficientes Universais nos garantem que $H^i(M; \mathbb{Z}_2) = 0$. Deste modo, $v_i(M) = 0$.

Por outro lado, se $H^{m-i}(M; \mathbb{Z}_2) \neq 0$, então $v_i(M) \smile x = 0$, em particular para $x \neq 0$, e assim, $v_i(M) = 0$.

Independentemente, obtemos que $v_i(M) = 0$ quando $2i > m$.

□

Corolário 4.4. *Considere M^m uma variedade topológica fechada e conexa com $m = 2r$ ou $m = 2r+1$ para algum inteiro $r \geq 0$. Se $w_1(M) = \cdots = w_r(M) = 0$, então $W(M) = 1$.*

Demonstração.
Segue do corolário 4.2 que $v_1(M) = \cdots = v_r(M) = 0$.

Por outro lado, se $i \geq r + 1$, então $2i \geq 2r + 2 > m$ e, assim, segue do corolário 4.3 que $v_i(M) = 0$ para $i \geq r + 1$.

Logo, $v(M) = 1$ e, pela fórmula de Wu, concluímos que $W(M) = 1$.

□

Corolário 4.5. *Considere M^m uma variedade topológica fechada e conexa tal que $W(M) \neq 1$. Se $i > 0$ é o menor inteiro tal que $w_i(M) \neq 0$, então i deve ser uma potência de dois.*

Demonstração.
Supondo $i > 0$ o menor inteiro tal que $w_i(M) \neq 0$, então $w_1(M) = \cdots = w_{i-1}(M) = 0$ e, pelo corolário 4.2, segue que $v_1(M) = \cdots = v_{i-1}(M) = 0$ e $v_i(M) = w_i(M) \neq 0$.

Assim, como $< Sq^k(x), [M] >=< v_k(M) \smile x, [M] >= 0$ para todo $k = 1, \cdots, i-1$ e $x \in H^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2)$, então Sq^k será o homomorfismo nulo para todo $k = 1, \cdots, i-1$.

Agora, caso $H^{m-i}(M; \mathbb{Z}_2) = 0$, então a dualidade de Poincaré e o teorema dos Coeficientes Universais garantiriam que $H^i(M; \mathbb{Z}_2) = 0$, e consequentemente, $w_i(M) = 0$, o que seria um absurdo por hipótese. Deste modo, como existe $x \neq 0$ em $H^{m-i}(M; \mathbb{Z}_2)$, então $v_i(M) \smile x \neq 0$. Com isso, $< Sq^i(x), [M] >=< v_i(M) \smile x, [M] >\neq 0$ e, assim, $Sq^i(x) \neq 0$, ou seja, Sq^i não será o homomorfismo nulo.

Logo, não podemos decompor Sq^i como soma de composições de Sq^k com $1 \leq k \leq i-1$.

Portanto, segue de ([7], Teorema 15.8, p. 407)[2] que i deve ser uma potência de dois.

□

[2] *"Se um inteiro $i > 0$ não é uma potência de dois, então Sq^i se decompõe como soma de composições de Sq^k, com $0 < k < i$".*

Como última aplicação da fórmula de Wu, vejamos como tal fórmula nos permite calcular a classe de Stiefel-Whitney total dos espaços projetivos reais sem dependermos de resultados sobre fibrados generalizados, como no teorema 3.5, e sem dependermos de sua estrutura suave, como feito em ([41], Teorema 4.5, p. 45).

Em outras palavras, a versão topológica da fórmula de Wu nos permite calcular a classe de Stiefel-Whitney total de $\mathbb{R}P^n$ dependendo apenas de sua estrutura celular e não mais de sua estrutura diferencial.

Corolário 4.6. *Denotando por* $(a) = H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, *então* $W(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1}$.

Demonstração.
Inicialmente, recordemos que a inclusão canônica $i : \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ induz, segundo o lema A.4, isomorfismo $i^* : H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$. Sendo assim, denotando por $(b) = H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$, temos que $i^*(b) = a$.

Agora, fixando o binômio de Newton $\binom{i}{k} = 0$ quando $i < k$ ou $k < 0$, defina para todo inteiro $m \geq 0$ o seguinte elemento:

$$\widetilde{v}(m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m-k}{k} b^k \in H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$$

Note que $\widetilde{v}(0) = 1 = \widetilde{v}(1)$. Por outro lado, para $m > 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}(m+1) &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1-k}{k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \left[\binom{m-k}{k} + \binom{m-k}{k-1} \right] b^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m-k}{k} b^k + \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m-k}{k-1} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m-k}{k} b^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{m-k}{k-1} b^k \\
&= \widetilde{v}(m) + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1-k}{k} b^{k+1} \\
&= \widetilde{v}(m) + b \smile \widetilde{v}(m-1)
\end{aligned}$$

Por outro lado, defina, para todo inteiro $m \geq 0$, o elemento:

$$\beta(m) = Sq(\widetilde{v}(m)) \in H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$$

Novamente, note que $\beta(0) = 1 = \beta(1)$. Ainda, para $m > 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\beta(m+1) &= Sq(\widetilde{v}(m+1)) \\
&= Sq(\widetilde{v}(m) + b \smile \widetilde{v}(m-1)) \\
&= Sq(\widetilde{v}(m)) + [Sq(b) \smile Sq(\widetilde{v}(m-1))] \\
&= \beta(m) + [(b+b^2) \smile \beta(m-1)]
\end{aligned}$$

Agora, provemos por indução sobre $m \geq 0$ que $\beta(m) = (1+b)^{m+1} - b^{m+1}$. Primeiramente, é claro que $\beta(0) = 1 = (1+b) - b$. Assim, supondo válido $\beta(k) = (1+b)^{k+1} - b^{k+1}$ para todo $0 \leq k \leq m$, observe que:

$$\begin{aligned}
\beta(m+1) &= \beta(m) + [(b+b^2) \smile \beta(m-1)] \\
&= [(1+b)^{m+1} - b^{m+1}] + [(b+b^2) \smile [(1+b)^m - b^m]] \\
&= (1+b)^{m+1} - b^{m+1} + [(b+b^2) \smile (1+b)^m] - [(b+b^2) \smile b^m] \\
&= (1+b)^{m+1} - b^{m+1} + [b \smile (1+b)^{m+1}] - b^{m+1} - b^{m+2} \\
&= [(1+b)^{m+1} \smile (1+b)] - b^{m+2} \\
&= (1+b)^{m+2} - b^{m+2}
\end{aligned}$$

Lembrando que o exemplo A.1 garante que $v(\mathbb{R}P^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} a^k$, temos que:

$$\begin{aligned}
Sq(v(\mathbb{R}P^n)) &= Sq\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} a^k\right) \\
&= Sq\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} (i^*(b))^k\right) \\
&= i^*\left[Sq\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} b^k\right)\right] \\
&= i^*(\beta(n)) \\
&= i^*\left[(1+b)^{n+1} - b^{n+1}\right] \\
&= (1+i^*(b))^{n+1} - (i^*(b))^{n+1} \\
&= (1+a)^{n+1}
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula de Wu garante que $W(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1}$.

□

4.2 Versão Topológica do Teorema de Poincaré-Hopf

Nesta seção, veremos algumas aplicações da classe de Euler de uma variedade topológica, cujas demonstrações somente foram possíveis devido aos resultados preliminares para a obtenção da fórmula de Wu também terem sido feitos no âmbito de $\mathbb{Z}-$módulos de cohomologia singular.

Em um primeiro momento, veremos qual a relação entre a classe e a característica de Euler de uma variedade topológica. Feito isso, mostraremos como generalizar o conceito de campo de vetores do contexto de variedades suaves para variedades topológicas e como combinar esses resultados para enunciar a versão topológica do teorema de Poincaré-Hopf.

Comecemos com a seguinte relação entre classe de Euler, classe de $\mathbb{Z}-$orientação global e característica de Euler de uma variedade topológica:

Teorema 4.2. *Se M é uma variedade topológica fechada, conexa e $\mathbb{Z}-$orientável, então:*

$$< e(M), [M] >= \chi(M)$$

Demonstração.

Inicialmente, vamos fixar algumas notações. Considere $dim(M) = m$, $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0 M, p, M)$ o $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado tangente de M, $(\tau) = H^m(TM, T_0M; \mathbb{Z})$ a classe de Thom de $(\tau M, \tau_0 M)$, $d : M \to M \times M$ a aplicação diagonal e as inclusões canônicas $i_{TM} : TM \hookrightarrow (TM, T_0M)$ e $j : M \times M \hookrightarrow (M \times M, M \times M - \Delta)$, em que $\Delta = d(M)$.

Agora, sendo $s : M \to TM$ a seção de $(\tau M, \tau_0 M)$ que associa, a cada $b \in M$, o caminho constante em M igual a $b \in M$, a proposição 3.4 garante que $e(M) = s^* \circ i^*_{TM}(\tau)$.

Por outro lado, se definirmos a aplicação $\psi : (TM, T_0M) \to (M \times M, M \times M - \Delta)$ por $\psi(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$, é claro que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(TM, T_0M) \arrow[rr, "\psi"] & & (M \times M, M \times M - \Delta) \\
TM \arrow[u, hook, "i_{TM}"] & M \arrow[l, "s"] \arrow[r, "d"] & M \times M \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

Como já sabemos que ψ induz ismorfismo no âmbito de $\mathbb{Z}-$módulos de cohomologia singular, então ao definirmos $\tau' = (\psi^*)^{-1}(\tau) \in H^m(M \times M, M \times M - \Delta; \mathbb{Z})$ e $U = j^*(\tau') \in H^m(M \times M; \mathbb{Z})$, obtemos:

$$\begin{aligned}
e(M) &= s^* \circ i_{TM}^*(\tau) \\
&= s^* \circ i_{TM}^* \circ \psi^*(\tau') \\
&= d^* \circ j^*(\tau') \\
&= d^*(U)
\end{aligned}$$

Finalmente, se denotarmos por $\{b_i\}_{i=1}^r$ uma base de $H^*(M; \mathbb{Z})$ e por $\{b_i^\#\}_{i=1}^r$ sua base dual, como $e(M) = d^*(U)$, então a proposição 4.1 nos garantirá que:

$$\begin{aligned}
< e(M), [M] > &= < d^*(U), [M] > \\
&= < d^* \left(\sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|} \left(b_i \times b_i^\# \right) \right), [M] > \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|} < d^*(b_i \times b_i^\#), [M] > \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|} < b_i \smile b_i^\#, [M] > \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{|b_i|} \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^k rank(H_k(M; \mathbb{Z})) \\
&= \chi(M)
\end{aligned}$$

□

Naturalmente, devido ao teorema 3.7, se retirarmos a condição de $\mathbb{Z}-$orientabilidade no corolário acima, podemos reescrevê-lo do seguinte modo:

Corolário 4.7. *Se M é uma variedade topológica fechada e conexa, então:*

$$< w_n(M), [M] > \equiv \chi(M)(mod\ 2)$$

Agora, o próximo resultado é uma combinação direta da proposição 3.6 com o teorema 4.2.

Corolário 4.8. *Se M é uma variedade topológica fechada, conexa e $\mathbb{Z}-$orientável de dimensão ímpar, então $\chi(M) = 0$.*

A próxima definição irá generalizar o conceito de campo de vetores de uma variedade suave para o contexto de variedades topológicas, com o intuito de enunciarmos a versão topológica de uma das consequências do teorema de Poincaré-Hopf para variedades suaves.

Definição 4.1. (Campo de Caminhos) *Chamamos de campo de caminhos de uma variedade topológica M qualquer seção do seu fibrado generalizado tangente $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0M, p, M)$. Ainda, um campo de caminhos não singulares de M é uma seção $s : M \to TM$ de $(\tau M, \tau_0 M)$ tal que $s(M) \subset T_0 M$.*

Devido a definição de campo de caminhos e a proposição 2.3, fica evidente que toda variedade suave admite um campo de vetores não nulos se, e somente se, admite um campo de caminhos não singulares.

Dito isso, relembremos o enunciado de uma das consequências do teorema de Poincaré-Hopf:

> **(corolário de Poincaré-Hopf)***"Uma variedade suave fechada, conexa e $\mathbb{Z}-$orientável M admite um campo de vetores não nulos se, e somente se, $\chi(M) = 0$"*

Em [9], Brown apresenta pela primeira vez a versão topológica do resultado acima citado, trocando-se campo de vetores não nulos por campo de caminhos não singulares, cujo enunciado fica da seguinte forma:

> *"Uma variedade topológica fechada, conexa e $\mathbb{Z}-$orientável M admite um campo de caminhos não singulares se, e somente se, $\chi(M) = 0$"*

Já em [10], Brown e Fadell mostraram que esse resultado pode ser extendido para variedades topológicas com bordo e não orientáveis da seguinte maneira:

> *"Uma variedade topológica compacta, conexa, com ou sem bordo e não necessariamente $\mathbb{Z}-$orientável M admite um campo de caminhos não singulares se, e somente se, $\chi(M) = 0$"*

Tanto em [9], quanto em [10], foram utilizadas técnicas envolvendo fibrados generalizados e número de Lefschetz, mas em nenhum momento a noção da classe de Euler foi utilizada nas demonstrações.

A classe de Euler permite uma prova mais sucinta do resultado apresentado em [9], entretanto, apenas em uma das direções, como no seguinte:

Teorema 4.3. (Poincaré-Hopf) *Seja M uma variedade topológica fechada, conexa e $\mathbb{Z}-$orientável. Se M admite um campo de caminhos não singulares, então $\chi(M) = 0$.*

Demonstração.

Sendo M uma variedade topológica compacta, $\mathbb{Z}-$orientável e que admite um campo de caminhos não singulares, ou seja, existe uma seção $s : M \to TM$ do fibrado generalizado tangente $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0M, p, M)$ tal que $s(M) \subset T_0 M$, então segue da proposição 3.7 que $e(M) = 0$.

Assim, o corolário 4.2 nos garantirá que $\chi(M) = 0$.

□

4.3 Um Problema de Vizinhança Tubular

Vamos encerrar este capítulo demonstrando a única aplicação que não envolve classes de Stiefel-Whitney ou de Euler, mas apenas classes de Wu e alguns resultados técnicos sobre fibrados generalizados.

Para entendermos melhor a importância de tal resultado, façamos algumas observações. Inicialmente, relembremos que ao combinar o teorema 3.6 com o corolário 3.2, obtemos que:

"Se $i : M^m \hookrightarrow S^{m+k}$ é um mergulho local-flat com fibrado generalizado normal trivial, então $W(M) = i^*(W(S))$"

Nosso objetivo é provar esse mesmo resultado para classe de Wu total, isto é:

"Se $i : M^m \hookrightarrow S^{m+k}$ é um mergulho local-flat com fibrado generalizado normal trivial, então $v(M) = i^*(v(S))$"

Em ([46], Lema 7, p. 274), Stong mostra o mesmo resultado no contexto suave, da seguinte maneira:

"Se $i : M^m \hookrightarrow S^{m+k}$ é um mergulho suave com fibrado vetorial normal trivial, então $v(M) = i^*(v(S))$"

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada mais detalhadamente em ([43], Lema 7, p. 33). Ainda, em tal demonstração, fica evidente o uso direto da existência de vizinhança tubular para mergulhos suaves.

Com o intuito de ilustrarmos como tal generalização foi feita e motivar a demonstração do resultado final do capítulo, considere $M^m \subset S^{m+k}$ um mergulho suave com fibrado vetorial normal trivial e V a vizinhança tubular de M em S, como na seguinte figura:

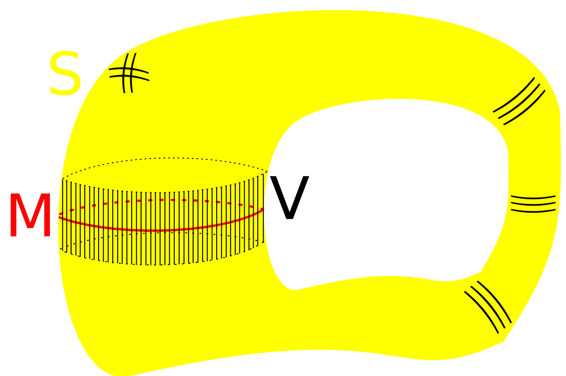

Figura 4.1: Vizinhança tubular de um mergulho suave.

Dito isso, a prova de Stong em ([46], Lema 7, p. 274) se resume, a grosso modo, em encontrar um diagrama comutativo nas seguintes condições:

$$\begin{tikzcd}
H^*(S;\mathbb{Z}_2)\otimes H^*(S;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^*(S;\mathbb{Z}_2) \\
H^*(S;\mathbb{Z}_2)\otimes H^*(S,S-V;\mathbb{Z}_2) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & H^*(S,S-V;\mathbb{Z}_2) \arrow[u] \arrow[dd] \arrow[ddl, bend left] \\
H^*(V;\mathbb{Z}_2)\otimes H^*(V,\partial V;\mathbb{Z}_2) \arrow[d] & \\
H^*(V,\partial V;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^*(S;\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

Como não existe vizinhança tubular no contexto topológico, conseguimos contornar esse problema utilizando apenas resultados sobre fibrados generalizados a fim de obter um diagrama comutativo parecido com o diagrama mostrado acima e, assim, mostramos que a existência da vizinhança tubular não é essencial para esse resultado e sim certas consequências algébricas de um mergulho local-flat.

Finalmente, temos o:

Teorema 4.4. *Se $i : M^m \hookrightarrow S^{m+k}$ é um mergulho local-flat, entre variedades topológicas fechadas e conexas, com fibrado generalizado normal trivial, então $v(M) = i^*(v(S))$.*

Demonstração.

Primeiramente, fixemos algumas notações. Denotemos por $(\mathcal{N},\mathcal{N}_0) = (N, N_0, q, M)$ o $\mathbb{R}^k-$fibrado generalizado normal do mergulho local-flat i e as equivalências homotópicas $f : (N, N_0) \rightleftarrows (M\times\mathbb{R}^k, M\times(\mathbb{R}^k-\{0\})) : g$ dadas pela trivialidade de $(\mathcal{N},\mathcal{N}_0)$. Lembremos também que f e g são aplicações fibradas, ou seja, $p_1 \circ f = q$ e $q \circ g = p_1$.

Considere $c : S \hookrightarrow (S, S - M)$ a inclusão canônica e $\xi : (N, N_0) \to (S, S - M)$ a aplicação dada por $\xi(\omega) = \omega(1)$, que segundo ([18], Teorema 7.5, p. 509) induz isomorfismo no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de (co)homologia singular.

Deste modo, ficam bem definidos para qualquer inteiro $t \geq 0$ os homomorfismos:

$$B = f_* \circ (\xi_*)^{-1} \circ c_* : H_t(S;\mathbb{Z}_2) \to H_t(M \times (\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k - \{0\});\mathbb{Z}_2)$$

$$A = c^* \circ (\xi^*)^{-1} \circ f^* : H^t(M \times (\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k - \{0\});\mathbb{Z}_2) \to H^t(S;\mathbb{Z}_2)$$

Vale notar que o homomorifmos A é o dual cohomológico do homomorfismo B.

Ainda, também sabemos que a fórmula de Künneth garante que:

$$H^{t+k}(M \times (\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k - \{0\});\mathbb{Z}_2) \cong H^t(M;\mathbb{Z}_2) \otimes H^k(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k - \{0\};\mathbb{Z}_2)$$

Então ao denotarmos $(\varphi) = H^k(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k - \{0\};\mathbb{Z}_2)$, fica bem definido o homomorfismo $\bar{i} : H^t(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{t+k}(S;\mathbb{Z}_2)$ dado por $\bar{i}(x) = A(x \times \varphi)$.

Fixadas as notações acima, comecemos a demontração.

Se denotarmos por $(\sigma) = H_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\}; \mathbb{Z}_2)$, então $B([S]) = [M] \times \sigma$. Para tanto, note que:

$$B([S]) \in H_{m+k}(M \times (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\}); \mathbb{Z}_2) \cong H_m(M; \mathbb{Z}_2) \otimes H_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Como $H_m(M; \mathbb{Z}_2)$ e $H_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\}; \mathbb{Z}_2)$ são unicamente gerados por $[M]$ e σ, respectivamente, então $H_m(M; \mathbb{Z}_2) \otimes H_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\}; \mathbb{Z}_2)$ será unicamente gerado por $[M] \otimes \sigma$, isto é, a única classe não nula de $H_{m+k}(M \times (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\}); \mathbb{Z}_2)$ será $[M] \times \sigma$.

Com isso, para que $B([S]) = [M] \times \sigma$, é suficiente que $B([S]) \neq 0$. Por outro lado, como $B = f_* \circ (\xi_*)^{-1} \circ c_*$ e f_* e ξ_* são isomorfismos, então $B([S]) \neq 0$ se, e somente se, $c_*([S]) \neq 0$.

Agora, dado $b \in M \subset S$ arbitrário, então a inclusão $j_b : S \hookrightarrow (S, S - \{b\})$ pode ser decomposta nas seguintes inclusões:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "c"] & (S, S - M) \arrow[r, hook] & (S, S - \{b\}) \end{tikzcd}$$

Como $(j_b)_*$ é um isomorfismo[3], então c_* será um monomorfismo e, assim, $c_*([S]) \neq 0$ uma vez que $[S] \neq 0$.

Logo, $B([S]) = [M] \times \sigma$.

Feito isso, mostremos que ao definirmos $e = \xi \circ g : M \times (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\}) \to (S, S - M)$, o seguinte diagrama será comutativo para todo $t \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
H^{m-t}(S;\mathbb{Z}_2) \otimes H^{t+k}(S;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\smile"] & H^{m+k}(S;\mathbb{Z}_2) \\
H^{m-t}(S;\mathbb{Z}_2) \otimes H^{t+k}(S, S-M;\mathbb{Z}_2) \arrow[u, "1\times c^*"] \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "i^*\times e^*"] & H^{m+k}(S, S-M;\mathbb{Z}_2) \arrow[u, "c^*"'] \arrow[dd, "c^*"] \arrow[ddl, bend right, "e^*"'] \\
H^{m-t}(M \times \mathbb{R}^k;\mathbb{Z}_2) \otimes H^{t+k}(M \times (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\});\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\smile"] & \\
H^{m+k}(M \times (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\});\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "A"] & H^{m+k}(S;\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

Mostremos tal comutatividade por partes. Inicialmente, devido as próprias definições dos homomorfismos A e e^*, fica evidente que $A \circ e^* = c^*$.

Por outro lado, o lema A.2 garante que a inclusão $c : S \hookrightarrow (S, S-M)$ tem a propriedade de que $c^*(x \smile y) = x \smile c^*(y)$ para quaisquer $x \in H^{m-t}(S; \mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^{t+k}(S, S - M; \mathbb{Z}_2)$.

Agora, podemos imaginar, sem perda de generalidade, o mergulho $i : M \hookrightarrow S$ tendo como induzida $i^* : H^t(S; \mathbb{Z}_2) \to H^t(M \times \mathbb{R}^k; \mathbb{Z}_2)$, uma vez que $\mathbb{R}^k$ é um espaço topológico contrátil. Ainda, podemos tomar tal contração como sendo $M \to M \times \mathbb{R}^k$ que associa $b \mapsto (b, 0)$.

[3]Ver proposição A.3.

Assim, para que possamos restringir a imagem de $e : M \times (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\}) \to (S, S - M)$ para S, é necessário que o domínio seja restrito a $M \times \{0\}$. Deste modo, a restrição $e_{|M\times\{0\}} : M \times \{0\} \to S$ se resume ao mergulho i, pois fixado $b \in M$, $g(b,0) \in N - N_0$ é o caminho em S constante igual a $b \in M$, e assim:

$$\begin{aligned} e(b,0) &= \xi \circ g(b,0) \\ &= [g(b,0)](1) \\ &= b \\ &= i(b) \end{aligned}$$

Com isso, teremos para quaisquer $x \in H^{m-t}(S;\mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^{t+k}(S, S-M;\mathbb{Z}_2)$ que $e^*(x \smile y) = i^*(x) \smile e^*(y)$.

Feito isso, o diagrama mostrado acima é, de fato, comutativo. Ainda, lembrando que $\bar{i} : H^t(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{t+k}(S;\mathbb{Z}_2)$ é o homomorfismo definido por $\bar{i}(x) = A(x \times \varphi)$, em que $(\varphi) = H^k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\};\mathbb{Z}_2)$, podemos obter para quaisquer $x \in H^t(M;\mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^{m-t}(S;\mathbb{Z}_2)$, que:

$$\begin{aligned} A(i^*(y) \smile (x \times \varphi)) &= y \smile c^*((e^*)^{-1}(x \times \varphi)) \\ &= y \smile A(x \times \varphi) \\ &= y \smile \bar{i}(x) \end{aligned}$$

Portanto, temos para quaisquer $x \in H^t(M;\mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^{m-t}(S;\mathbb{Z}_2)$ que:

$$\begin{aligned} < \bar{i}(x) \smile y, [S] > &= < A(i^*(y) \smile (x \times \varphi)), [S] > \\ &= < i^*(y) \smile (x \times \varphi), B([S]) > \\ &= < i^*(y), ([M] \times \sigma) \frown (x \times \varphi) > \\ &= < i^*(y), ([M] \frown x) \times (\sigma \frown \varphi) > \\ &= < i^*(y), [M] \frown x > \\ &= < x \smile i^*(y), [M] > \end{aligned}$$

Finalmente, estamos aptos para provar que $i^*(v(S)) = v(M)$. Para tanto, devido a unicidade das classes de Wu, é suficiente mostrar para todo $0 \leq t \leq n$ que:

$$< i^*(v_t(S)) \smile x, [M] >=< Sq^t(x), [M] >, \ \forall x \in H^{m-t}(M;\mathbb{Z}_2)$$

Mas antes, note que $Sq^t(\varphi) = 0$ quando $t > 0$, uma vez que $H^{k+t}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\};\mathbb{Z}_2) = 0$ para $t > 0$ e $Sq^t(\varphi) \in H^{k+t}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k - \{0\};\mathbb{Z}_2)$. Com isso, obtemos que $Sq^t(x \times \varphi) = Sq^t(x) \times \varphi$, para qualquer $x \in H^*(M;\mathbb{Z}_2)$.

Deste modo, temos para quaisquer $0 \leq t \leq m$ e $x \in H^{m-t}(M;\mathbb{Z}_2)$ que:

$$\begin{aligned} < i^*(v_t(S)) \smile x, [M] > &= < \bar{i}(x) \smile v_t(S), [S] > \\ &= < Sq^t(\bar{i}(x)), [S] > \\ &= < Sq^t(A(x \times \varphi)), [S] > \\ &= < A(Sq^t(x) \times \varphi), [S] > \\ &= < \bar{i}(Sq^t(x)), [S] > \\ &= < \bar{i}(Sq^t(x)) \smile 1, [S] > \\ &= < i^*(1) \smile Sq^t(x), [M] > \\ &= < Sq^t(x), [M] > \end{aligned}$$

Portanto, $i^*(v(S)) = v(M)$.

$\square$

Assim, concluímos esse capítulo com várias contribuições no contexto de classes características de variedades topológicas. Mais especificamente, apresentamos aplicações referentes as classes de Stiefel-Whitney, de Euler e de Wu de variedades topológicas fechadas.

Entre tais contribuições, destacamos:

- uma segunda demonstração da versão topológica da fórmula de Wu, sendo alguns dos lemas preliminares desenvolvidos tanto para $\mathbb{Z}_2-$módulos, quanto para $\mathbb{Z}-$módulos de (co)homologia singular;
- como os lemas preliminares da fórmula de Wu nos permitiram relacionar a classe e a característica de Euler de uma variedade topológica e, consequentemente, garantir a nulidade da característica de Euler de uma variedade topológica de dimensão ímpar;
- uma demonstração alternativa de uma das direções da versão topológica do teorema de Poincaré-Hopf, o qual mostra a relação entre a existência de um campo de caminhos não singulares de uma variedade topológica com a nulidade de sua característica de Euler, utilizando em sua demonstração a classe de Euler;
- como a teoria de fibrados generalizados foi essencial para relacionarmos as classes de Wu de variedades topológicas por meio de um mergulho local-flat com fibrado generalizado normal trivial.

Ainda, com todos os resultados até aqui apresentados, também concluímos a importância dos fibrados generalizados não só como uma ferramenta para a teoria de classes características de variedades topológicas, mas como uma teoria em si.

Capítulo 5

Classes Características de Variedades Generalizadas

Nesse capítulo, será apresentado pela primeira vez na literatura uma prova da fórmula de Wu para o contexto de variedades generalizadas.

Inicialmente, faremos na seção 5.1 um breve resumo, baseado em [4], [38] e [6], sobre o conceito de variedades generalizadas, apresentando a definição de tal objeto bem como algumas de suas propriedades.

Construiremos algebricamente na seção 5.2 a classe e o isomorfismo de Thom associados a um mergulho entre variedades generalizadas com codimensão específica, sendo tal construção baseada nos resultados apresentados por Dold em ([17], Capítulo 8).

Já na seção 5.3, construiremos as classes de Stiefel-Whitney de mergulhos entre variedades generalizadas com codimensão específica, as classes de Stiefel-Whitney de variedades generalizadas e também mostraremos qual a semelhança dessas construções com o contexto topológico apresentado no capítulo 3.

E para encerrarmos o capítulo, apresentaremos na seção 5.4 a demonstração da fórmula de Wu para variedades generalizadas utilizando apenas suas dualidades, ou seja, sem necessariamente a existência de um fibrado tangente para tais variedades, cujas técnicas utilizadas foram baseadas nos resultados apresentados por Bredon em ([7], Capítulo 6).

5.1 Variedades Generalizadas

Essa seção tem como objetivo principal apresentar os resultados básicos sobre variedades generalizadas, bem como a definição formal de tais objetos.

Para uma leitura mais detalhada sobre variedades generalizadas, ver [4], [6], [11], [12], [38] e [50].

Começaremos o capítulo final desse trabalho com as seguintes definições:

Definição 5.1. (Dimensão Cohomológica) *Seja M um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff. Dizemos que M tem $\mathbb{Z}_2-$dimensão cohomológica finita, que denotaremos por $dim_{\mathbb{Z}_2} M < \infty$, se existir um inteiro $m \geq 0$ tal que $H_c^{m+1}(U; \mathbb{Z}_2) = 0$ para toda vizinhança aberta $U \subset M$.*

A definição 5.1 é, na verdade, uma consequência sobre a dimensão cohomológica de um espaço, cuja demonstração pode ser encontrada em ([6], Teorema 16,14, p. 115).

Definição 5.2. (Variedade Homológica) *Dizemos que um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff M é uma $m-$variedade $\mathbb{Z}_2-$homológica se:*

- $dim_{\mathbb{Z}_2} M < \infty$;
- $\forall b \in M,\ H_k(M, M - \{b\}; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } k = m \\ 0 & , \text{ se } k \neq m \end{cases}$

Definição 5.3. (Hereditariamente Paracompacto) *Chamamos um espaço topológico de Hausdorff M de hereditariamente paracompacto se toda vizinhança aberta de M é paracompacta.*

Em particular, todo espaço métrico é hereditariamente paracompacto[1].

Definição 5.4. (Localmente Homologicamente Conexo) *Dizemos que um espaço topológico M é localmente homologicamente conexo, que denotaremos por $HLC^{\infty}_{\mathbb{Z}_2}$, se para qualquer $b \in M$ e qualquer vizinhança aberta $U \subset M$ de b, existir uma vizinhança aberta $V \subset U$ também de b tal que o homomorfismo $\widetilde{H}_k(V; \mathbb{Z}_2) \to \widetilde{H}_k(U; \mathbb{Z}_2)$ induzido pela inclusão $V \hookrightarrow U$ é trivial para todo inteiro $k \geq 0$.*

Definição 5.5. (Variedade Generalizada) *Dizemos que um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff M é uma m-variedade $\mathbb{Z}_2-$generalizada se:*

1. *M for uma $m-$variedade $\mathbb{Z}_2-$homológica;*
2. *M for hereditariamente paracompacto;*
3. *M for $HLC^{\infty}_{\mathbb{Z}_2}$.*

Note que as definições acima podem ser feitas para um coeficiente arbitrário e não necessariamente $\mathbb{Z}_2$, mas como o intuito desse capítulo é trabalhar com classes de Stiefel-Whitney e de Wu, então não nos preocuparemos com as variedades que não sejam $\mathbb{Z}_2-$generalizadas.

Por outro lado, mesmo que a definição de uma variedade generalizada seja de certa forma complexa, essas variedades são bem controlados no ponto de vista algébrico, como veremos adiante.

Primeiramente, a dimensão de uma variedade generalizada coincide com sua dimensão cohomológica, como podemos ver na proposição abaixo e cuja demonstração se encontra em ([6], Observação 9.6, p. 331).

Proposição 5.1. *Se M^m é uma variedade $\mathbb{Z}_2-$generalizada, então $dim_{\mathbb{Z}_2} M = m$.*

Ainda, os módulos de cohomologia singular das variedades generalizadas são bem comportados no seguinte sentido:

Proposição 5.2. *Se M^m é uma variedade $\mathbb{Z}_2-$generalizada compacta, então $H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ será um módulo finitamente gerado para todo inteiro $0 \leq k \leq m$.*

A prova da proposição acima pode ser encontrada em ([6], Corolário 17.7, p. 129).

A título de curiosidade, as variedades generalizadas se diferenciam das variedades topológicas a partir da dimensão três, como podemos ver no teorema abaixo, cuja prova se encontra em ([6], Teorema 16.32, p. 388).

[1] Para mais detalhes sobre espaços hereditariamente paracompactos, ver ([6], Capítulo 1, Seção 6).

Teorema 5.1. *Seja M^m uma variedade homológica $2^{\underline{o}}$-enumerável*[2] *e $m \leq 2$, então M será uma variedade topológica.*

Antes de prosseguirmos, queremos destacar que existem diversos estudos referentes a existência de variedades generalizadas que não sejam variedades topológicas. Inclusive, existem condições específicas que garantem quando uma variedade generalizada possui o mesmo tipo de homotopia, ou não, de uma variedade topológica. Mas, como não seguiremos esse caminho e caso o leitor tenha se interessado sobre o assunto, sugerimos [11], [12] e [13].

Dando sequência ao nosso resumo sobre variedades generalizadas, o próximo resultado garante a existência da dualidade de Poincaré para o contexto dessas variedades, como podemos encontrar em ([6], Corolário 10.2, p. 338) e cujo enunciado é idêntico para variedades suaves e topológicas:

Teorema 5.2. *Sejam M^m uma variedade generalizada compacta e conexa e o gerador $([M]) = H^m(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Então, o homomorfismo $\mathcal{D}_M : H^k(M; \mathbb{Z}_2) \to H_{m-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ dado por $\mathcal{D}_M(x) = [M] \frown x$ é, de fato, um isomorfismo para todo $k \geq 0$.*

Agora, de forma mais geral, Halverson provou em ([22], Teorema 5.2, p. 242) que a dualidade de Poincaré-Hopf também é válida para variedades generalizadas, em que podemos considerar o seguinte enunciado:

Teorema 5.3. *Sejam N^n uma variedade generalizada compacta, $M \subset N$ um subespaço fechado e o gerador $([N]_M) = H_n(N, N - M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Deste modo, o homomorfismo $\mathcal{D}_{N,M} : \check{H}^k(M; \mathbb{Z}_2) \to H_{n-k}(N, N - M; \mathbb{Z}_2)$ dado por $\mathcal{D}_{N,M}(x) = [N]_M \frown x$ é, de fato, um isomorfismo para todo $k \geq 0$.*

Após essas considerações iniciais sobre variedades generalizadas, podemos assumir que esses objetos são, a grosso modo, espaços topológicos que possuem o mesmo comportamento de variedades topológicas no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de (co)homologia singular.

Ainda, devido a algumas técnicas que utilizaremos no decorrer do capítulo, iremos trabalhar a partir de agora com uma classe particular, mas ainda ampla, de variedades generalizadas, que são as ENR-variedades homológicas[3]. A fim de ilustrarmos brevemente essa classe de variedades que utilizaremos nesses capítulo, veremos a seguir um exemplo de uma ENR-variedade homológica que não é homeomorfa a uma variedade topológica.

Exemplo 5.1. *Seja M^m uma variedade topológica não homeomorfa à esfera $\mathbb{S}^m$, mas que é uma $(\mathbb{Z}_2, m)-$esfera de homologia, ou seja, $H_k(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_k(\mathbb{S}^m; \mathbb{Z}_2)$ para todo inteiro $k \geq 0$. Então, a suspensão $S(M)$ de M será uma ENR-variedade homológica de dimensão $m + 1$.*

De fato, como M é um espaço ENR, então a suspensão $S(M)$ também será um ENR. Por outro lado, sabemos que $H_k(S(M), S(M) - \{b\}; \mathbb{Z}_2) \cong H_k(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}; \mathbb{Z}_2)$ para quaisquer $b \in S(M)$ e $k \geq 0$ inteiro, isto é, $S(M)$ é uma variedade homológica.

Entretanto, $S(M)$ não é uma variedade topológica, pois dada qualquer vizinhança aberta $V \subset S(M)$ do vértice superior $v_+ \in S(M)$ da suspensão $S(M)$, também sabemos que $V \approx C_+(M)$ em que $C_+(M)$ é o cone superior da suspensão $S(M)$, porém $C_+(M)$ não homeomorfo ao disco D^{m+1}, uma vez que o bordo $\partial(C_+(M)) = M$ não é homeomorfo à esfera $\mathbb{S}^m$.

O exemplo acima foi retirado de ([38], Exemplo 2.2.4, p. 23).

[2] Um espaço topológico é dito $2^{\underline{o}}$-enumerável se possuir uma base enumerável.

[3] A condição de ENR é suficiente para garantir que uma variedade homológica seja uma variedade generalizada.

5.2 Classe e Isomorfismo de Thom

Em ([17], Capítulo 8), Dold construiu a classe e o isomorfismo de Thom associados a um mergulho entre variedades topológicas utilizando as dualidades de Poincaré e Poincaré-Lefschetz. Após estudarmos mais atenciosamente essas construções, percebemos que Dold utilizou apenas propriedades algébricas das variedades topológicas, nos motivando a tentar fazer o mesmo para o contexto de variedades generalizadas.

Feitas algumas adaptações nos resultados apresentados por Dold, veremos nessa seção como construir algebricamente a classe e o isomorfismo de Thom associados a um mergulho topológico, com codimensão específica, entre ENR-variedades homológicas utilizando apenas as dualidades de Poincaré e Poincaré-Lefschetz dessas variedades.

Para tanto, vamos fixar ao longo dessa seção as seguintes condições:

- $s : M^m \to N^{2m}$ será um mergulho topológico entre ENR-variedades homológicas compactas e conexas;
- como podemos considerar, sem perda de generalidade, que $M \subset N$, então vamos supor que M é um retrato de N, ou seja, vamos supor que exista uma aplicação $p : N^{2m} \to M^m$ tal que $p \circ s = 1$;
- $\mathcal{D}_M : H^k(M;\mathbb{Z}_2) \to H_{m-k}(M;\mathbb{Z}_2)$ será a dualidade de Poincaré de M, que é definida por $\mathcal{D}_M(x) = [M] \frown x$;
- $\mathcal{D}_N : H^k(N;\mathbb{Z}_2) \to H_{2m-k}(N;\mathbb{Z}_2)$ será a dualidade de Poincaré de N, que é definida por $\mathcal{D}_N(x) = [N] \frown x$;
- $\mathcal{D}_{N,M} : H^k(M;\mathbb{Z}_2) \to H_{2m-k}(N, N-M;\mathbb{Z}_2)$ será a dualidade de Poincaré-Lefschetz de $M \subset N$, que é definida por $\mathcal{D}_{N,M}(x) = [N]_M \frown x$.

Antes de prosseguirmos, recordemos que como toda variedade homológica é $\mathbb{Z}_2-$orientável, então nada nos impede de considerarmos as dualidades citadas acima, lembrando que as classes de orientação global de M e N são, respectivamente, os geradores $([M]) = H_m(M;\mathbb{Z}_2)$ e $([N]) = H_{2m}(N;\mathbb{Z}_2)$ e a classe de orientação local de N ao longo de M é o gerador $([N]_M) = H_{2m}(N, N-M;\mathbb{Z}_2)$.

Ainda, ao fixarmos a inclusão canônica $j : N \hookrightarrow (N, N-M)$, também sabemos que as dualidades $\mathcal{D}_N$ e $\mathcal{D}_{N,M}$ se relacionam por meio do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^k(N;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "s^*"] \arrow[d, "\mathcal{D}_N"] \arrow[dr, "{[N]_M \frown}"] & H^k(M;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\mathcal{D}_{N,M}"] \\
H_{2m-k}(N;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "j_*"] & H_{2m-k}(N, N-M;\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

Uma vez que $\mathcal{D}_N(1) = [N]$ e o diagrama acima comuta, concluímos a seguinte relação:

$$j_*([N]) = [N]_M$$

Ainda, o diagrama acima também nos garante o seguinte:

Lema 5.1. *Dado $a \in H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2)$ arbitrário, então existe $x \in H^{2m-k}(N; \mathbb{Z}_2)$ tal que $a = [N]_M \frown x$*

Demonstração.
Segue diretamente da relação $\mathcal{D}_{N,M} \circ s^*(\_) = [N]_M \frown (\_)$ e dos fatos que $\mathcal{D}_{N,M}$ é um isomorfismo e s^* é sobrejetora, uma vez que $p \circ s = 1$.

□

Agora que fixamos todas as notações necessárias para o desenvolvimento do restante deste capítulo, vejamos como construir a classe de Thom associada ao mergulho $s : M^m \to N^{2m}$. Para tanto, comecemos definindo o isomorfismo transfer:

Definição 5.6. (Isomorfismo Transfer) *Chamaremos de isomorfismo transfer associado ao mergulho $s : M^m \to N^{2m}$ o homomorfismo $s_! : H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2) \to H_{k-m}(M; \mathbb{Z}_2)$ dado pela seguinte composição de isomorfismos:*

$$s_! : H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_{N,M}^{-1}} H^{2m-k}(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_M} H_{k-m}(M; \mathbb{Z}_2)$$

Devido ao isomorfismo transfer, temos que:

$$H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , k = m \text{ e } k = 2m \\ 0 & , k < m \text{ ou } k > 2m \end{cases}$$

Com isso, o teorema dos Coeficientes Universais nos garante que:

$$H^k(N, N-M; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , k = m \text{ e } k = 2m \\ 0 & , k < m \text{ ou } k > 2m \end{cases}$$

Definição 5.7. (Classe de Thom) *Chamamos de classe de Thom associada ao mergulho $s : M^m \to N^{2m}$ o gerador $(\tau_s) = H^m(N, N-M; \mathbb{Z}_2)$*

Vejamos também que o isomorfismo transfer $s_!$ e o mergulho s se relacionam da seguinte maneira:

Lema 5.2. *Para qualquer $x \in H^k(N; \mathbb{Z}_2)$, temos que:*

$$s_!([N]_M \frown x) = [M] \frown s^*(x)$$

Demonstração.
Dado $x \in H^k(N; \mathbb{Z}_2)$ qualquer e lembrando que $\mathcal{D}_{N,M} \circ s^*(x) = [N]_M \frown x$, concluímos:

$$\begin{aligned} s_!([N]_M \frown x) &= s_! \circ \mathcal{D}_{N,M} \circ s^*(x) \\ &= \mathcal{D}_M \circ \mathcal{D}_{N,M}^{-1} \circ \mathcal{D}_{N,M} \circ s^*(x) \\ &= \mathcal{D}_M \circ s^*(x) \\ &= [M] \frown s^*(x) \end{aligned}$$

□

Agora, os dois lemas a seguir nos garantirão em $H^m(N; \mathbb{Z}_2)$ um representante da classe de Thom $\tau_s \in H^m(N, N-M; \mathbb{Z}_2)$ associada ao mergulho $s : M^m \to N^{2m}$.

Lema 5.3. *Existe uma única classe não-nula $U_s \in H^m(N; \mathbb{Z}_2)$ de modo que:*

$$s_*([M]) = [N] \frown U_s$$

Demonstração.

Inicialmente, como $[M] \neq 0$ em $H_m(M;\mathbb{Z}_2)$ e s_* é injetora, uma vez que $p \circ s = 1$, então $s_*([M]) \neq 0$ em $H_m(N;\mathbb{Z}_2)$.

Sendo $\mathcal{D}_N : H^m(N;\mathbb{Z}_2) \to H_m(N;\mathbb{Z}_2)$ um isomorfismo, então existirá uma única classe não-nula $U_s \in H^m(N;\mathbb{Z}_2)$ tal que $\mathcal{D}_N(U_s) = s_*([M])$, ou seja, $[N] \frown U_s = s_*([M])$.

□

Proposição 5.3. *A inclusão canônica $j : N \hookrightarrow (N, N-M)$ é tal que:*

$$j^*(\tau_s) = U_s$$

Demonstração.

Inicialmente, como $U_s \neq 0$ em $H^m(N;\mathbb{Z}_2)$ e $\tau_s \neq 0$ em $H^m(N, N-M;\mathbb{Z}_2)$, então teremos que $\tau_s \smile \tau_s \neq 0$ e $U_s \smile \tau_s \neq 0$, ambos em $H^{2m}(N, N-M;\mathbb{Z}_2)$. Deste modo, como $H^{2m}(N, N-M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, então:

$$(\tau_s \smile \tau_s) = H^{2m}(N, N-M;\mathbb{Z}_2) = (U_s \smile \tau_s)$$

Ainda, como $([N]_M) = H_{2m}(N, N-M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, então:

$$< \tau_s \smile \tau_s, [N]_M > = \ 1 \ = < U_s \smile \tau_s, [N]_M >$$

Agora, vamos garantir que $j^*(\tau_s) \neq 0$. Para tanto, note que:

$$\begin{aligned} < j^*(\tau_s), [N]_M \frown \tau_s > &= \ < j^*(\tau_s) \smile \tau_s, [N]_M > \\ &= \ < j^*(\tau_s) \smile \tau_s, j_*([N]) > \\ &= \ < j^*(j^*(\tau_s) \smile \tau_s), [N] > \\ &= \ < j^*(\tau_s) \smile j^*(\tau_s), [N] > \\ &= \ < j^*(\tau_s \smile \tau_s), [N] > \\ &= \ < \tau_s \smile \tau_s, j_*([N]) > \\ &= \ < \tau_s \smile \tau_s, [N]_M > \\ &= \ 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, caso $j^*(\tau_s) = 0$, então teríamos que $< j^*(\tau_s), [N]_M \frown \tau_s >= 0$, o que seria um absurdo. Assim, $j^*(\tau_s) \neq 0$.

Com isso, como $j^*(\tau_s) \neq 0$, então a proposição A.1 nos garantirá que existe uma única classe $x \in H^m(N;\mathbb{Z}_2)$ tal que $x \neq 0$ e $< x, \mathcal{D}_N(j^*(\tau_s)) >= 1$. Se provarmos que $< U_s, \mathcal{D}_N(j^*(\tau_s)) >= 1 =< j^*(\tau_s), \mathcal{D}_N(j^*(\tau_s)) >$, então concluiremos por unicidade que $j^*(\tau_s) = U_s$. Façamos isso:

$$\begin{aligned} < U_s, \mathcal{D}_N(j^*(\tau_s)) > &= \ < U_s, [N] \frown j^*(\tau_s) > \\ &= \ < U_s \smile j^*(\tau_s), [N] > \\ &= \ < j^*(U_s \smile \tau_s), [N] > \\ &= \ < U_s \smile \tau_s, j_*([N]) > \\ &= \ < U_s \smile \tau_s, [N]_M > \\ &= \ 1 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
< j^*(\tau_s), \mathcal{D}_N(j^*(\tau_s)) > &= < j^*(\tau_s), [N] \frown j^*(\tau_s) > \\
&= < j^*(\tau_s) \smile j^*(\tau_s), [N] > \\
&= < j^*(\tau_s \smile \tau_s), [N] > \\
&= < \tau_s \smile \tau_s, j_*([N]) > \\
&= < \tau_s \smile \tau_s, [N]_M > \\
&= 1
\end{aligned}$$

Portanto, $j^*(\tau_s) = U_s$.

□

Assim, precisamos mostrar apenas mais alguns resultados técnicos sobre a classe de Thom para finalmente podermos definir o isomorfismo de Thom.

Lema 5.4. $s_*([M]) = [N]_M \frown \tau_s$

Demonstração.
Basta combinar o lema 5.3, a proposição 5.3 e o lema A.3 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
s_*([M]) &= [N] \frown U_s \\
&= [N] \frown j^*(\tau_s) \\
&= j_*([N]) \frown \tau_s \\
&= [N]_M \frown \tau_s
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.4. *Para qualquer $a \in H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2)$, temos:*

$$s_* \circ s_!(a) = a \frown \tau_s$$

Demonstração.
Primeiramente, sabemos pelo lema 5.1 que dado $a \in H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2)$ qualquer, existe $x \in H^{2m-k}(N; \mathbb{Z}_2)$ tal que $a = [N]_M \frown x$.
Deste modo, os lemas 5.2 e 5.4 nos garantem que:

$$\begin{aligned}
s_* \circ s_!(a) &= s_* \circ s_!([N]_M \frown x) \\
&= s_*([M] \frown s^*(x)) \\
&= s_*([M]) \frown x \\
&= ([N]_M \frown \tau_s) \frown x \\
&= [N]_M \frown (\tau_s \smile x) \\
&= [N]_M \frown (x \smile \tau_s) \\
&= ([N]_M \frown x) \frown \tau_s \\
&= a \frown \tau_s
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.4. *O isomorfismo transfer $s_! : H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2) \to H_{k-m}(M; \mathbb{Z}_2)$ pode ser decomposto da seguinte maneira:*

$$s_! : H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\frown \tau_s} H_{k-m}(N; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_{k-m}(M; \mathbb{Z}_2)$$

Demonstração.
Dado $a \in H_k(N, N-M; \mathbb{Z}_2)$ qualquer e lembrando que $p \circ s = 1$, então a proposição anterior nos garantirá que:

$$\begin{aligned}
p_*(a \frown \tau_s) &= p_* \circ s_* \circ s_!(a) \\
&= s_!(a)
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.5. (Isomorfismo de Thom) *Para qualquer inteiro $k \geq 0$, a seguinte composição será um isomorfismo:*

$$\phi_s : H^k(M;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^k(N;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\smile \tau_s} H^{k+m}(N, N-M;\mathbb{Z}_2)$$

Demonstração.

Primeiramente, note que para quaisquer $a \in H_{k+m}(N, N-M;\mathbb{Z}_2)$ e $x \in H^k(M;\mathbb{Z}_2)$, temos que:

$$\begin{aligned} <\phi_s(x), a> &= <p^*(x) \smile \tau_s, a> \\ &= <p^*(x), a \frown \tau_s> \\ &= <x, p_*(a \frown \tau_s)> \\ &= <x, s_!(a)> \end{aligned}$$

Deste modo, ϕ_s é o dual cohomológico de $s_!$ e, uma vez que $s_!$ é um isomorfismo, então o teorema dos Coeficientes Universais garantirá que ϕ_s será um isomorfismo.

□

Definição 5.8. *Chamamos o isomorfismo $\phi_s : H^k(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(N, N-M;\mathbb{Z}_2)$ dado no teorema 5.5 de isomorfismo de Thom associado ao mergulho $s : M^m \to N^{2m}$.*

5.3 Classes de Stiefel-Whitney

Construiremos nessa seção, de forma totalmente algébrica, as classes de Stiefel-Whitney de mergulhos entre variedades homológicas e as classes de Stiefel-Whitney de variedades homológicas. Ainda, utilizando resultados técnicos obtidos por Fadell em [18], mostraremos algumas semelhanças dessas construções com as classes de Stiefel-Whitney dos fibrados generalizados normais de mergulhos local-flat e as classes de Stiefel-Whitney de variedades topológicas apresentadas no capítulo 3.

Inicialmente, como podemos associar a cada mergulho topológico entre variedades homológicas, sobre condições específicas, a sua classe e o seu isomorfismo de Thom, é possível definir as classes de Stiefel-Whitney desse mergulho de modo análogo ao que foi feito para fibrados vetoriais em ([41], Capítulo 4) e para fibrados generalizados no capítulo 3, da seguinte maneira:

Definição 5.9. (Classes de Stiefel-Whitney) *Considere $s : M^m \to N^{2m}$ um mergulho topológico entre ENR-variedades homológicas compactas e conexas de modo que M seja um retrato de N. Denotando por τ_s e ϕ_s a classe e o isomorfismo de Thom associados ao mergulho s, respectivamente, definimos a $k-$ésima classe de Stiefel-Whitney do mergulho s por:*

$$w_k(s) = \phi_s^{-1} \circ Sq^k(\tau_s) \in H^k(M;\mathbb{Z}_2)$$

Ainda, chamamos $W(s) = \sum_{k \geq 0} w_k(s) \in H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ de classe de Stiefel-Whitney total de s.

Devido as propriedades dos quadrados de Steenrod, o próximo resultado é análogo ao teorema 3.2.

Proposição 5.5. *Se $s : M^m \to N^{2m}$ é um mergulho topológico entre ENR-variedades homológicas compactas e conexas de modo que M seja um retrato de N, então $w_0(s) = 1$ e $w_k(s) = 0$ para $k > m$. Em outras palavras, $W(s) = 1 + \sum_{k=1}^{m} w_k(s)$.*

Agora, como todo mergulho local-flat é um mergulho topológico e toda variedade topológica é uma ENR-variedade homológica, então obtemos o seguinte:

Teorema 5.6. *Sejam $s : M^m \to S^{2m}$ um mergulho local-flat entre variedades topológicas fechadas e conexas, de modo que M seja um retrato de S, e $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)$ o seu $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado normal. Denotando por $W(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)$ e $W(s)$ as classes de Stiefel-Whitney totais dadas pelas definições 3.4 e 5.9, respectivamente, então $W(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) = W(s)$.*

Demonstração.
Inicialmente, lembremos que o $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado normal do mergulho local-flat $s : M \to S$ é o par $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) = (N, N_0, q, M)^4$ em que:

- $N_0 = \{\omega \in S^I \ : \ \omega(t) \in M \Leftrightarrow t = 0\}$
- $N = N_0 \bigcup \{\omega \in S^I \ : \ \omega(t) = \omega(0) \in M, \ \forall t \in I\}$
- $q : N \to M$ é dada por $q(\omega) = \omega(0)$

Sendo $s : M \to S$ um mergulho local-flat, denotemos por $\tau \in H^m(N, N_0; \mathbb{Z}_2)$ e $\phi : H^k(M; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(N, N_0; \mathbb{Z}_2)$ a classe e o isomorfismo de Thom, respectivamente, de $(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)$, em que $\phi(x) = q^*(x) \smile \tau$.

Por outro lado, considerando $s : M \to S$ como um mergulho topológico entre ENR-variedades homológicas compactas e conexas de modo que M seja um retrato de S, consideremos $p : S \to M$ tal retração e denotemos por $\tau_s \in H^m(S, S-M; \mathbb{Z}_2)$ a classe de Thom e $\phi_s : H^k(M; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(S, S-M; \mathbb{Z}_2)$ o isomorfismo de Thom, ambos associados ao mergulho s, em que $\phi_s(x) = p^*(x) \smile \tau_s$.

Agora, definindo $\xi : (N, N_0) \to (S, S-M)$ por $\xi(\omega) = \omega(1)$, então ([18], Teorema 7.5, p. 509) nos garantirá que ξ induzirá isomorfismo no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de cohomologia singular de modo que $\xi^*(\tau_s) = \tau$.

Ainda, como $N - N_0 = \{\omega \in S^I \ : \ \omega(t) = \omega(0) \in M, \ \forall t \in I\}$, então podemos considerar a restrição $\xi_{|N-N_0} : (N - N_0) \to (S - (S-M))$ definida por:

$$\begin{aligned} \xi_{|N-N_0}(\omega) &= \omega(1) \\ &= \omega(0) \\ &= q(\omega) \end{aligned}$$

Assim, teremos que $\xi^* \circ \phi_s = \phi$. De fato:

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0, \ \forall x \in H^k(M; \mathbb{Z}_2), \ \xi^* \circ \phi_s(x) &= \xi^*(p^*(x) \smile \tau_s) \\ &= q^*(x) \smile \xi^*(\tau_s) \\ &= q^*(x) \smile \tau \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

Deste modo, o seguinte diagrama será, para qualquer inteiro $k \geq 0$, comutativo:

[4] Nesse capítulo, a letra N não denotará uma variedade apenas na demonstração do Teorema 5.6.

$$\begin{tikzcd}
H^m(S, S-M;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "Sq^k"] \arrow[d, "\xi^*"] & H^{k+m}(S, S-M;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\xi^*"] \arrow[dr, "\phi_s^{-1}"] & \\
 & & H^k(M;\mathbb{Z}_2) \\
H^m(N, N_0;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "Sq^k"] & H^{k+m}(N, N_0;\mathbb{Z}_2) \arrow[ur, "\phi^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

Portanto, temos para todo $k \geq 0$ que:

$$\begin{aligned}
w_k(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) &= \phi^{-1} \circ Sq^k(\tau) \\
&= \phi^{-1} \circ Sq^k \circ \xi^*(\tau_s) \\
&= \phi^{-1} \circ \xi^* \circ Sq^k(\tau_s) \\
&= \phi_s^{-1} \circ Sq^k(\tau_s) \\
&= w_k(s)
\end{aligned}$$

□

Veja que, mesmo não existindo uma noção de fibrado tangente para variedades homológicas, é possível definir as classes de Stiefel-Whitney de tais variedades da seguinte maneira:

Definição 5.10. (Classes de Stiefel-Whitney) *Seja M^m uma ENR-variedade homológica compacta e conexa. Como a aplicação diagonal $d : M \to M \times M$ é um mergulho topológico e a projeção canônica $p_1 : M \times M \to M$ é uma retração de $M \times M$ em M, então podemos definir a classe de Stiefel-Whitney total de M por $W(M) = W(d)$.*

Para que a construção das classes de Stiefel-Whitney de uma variedade homológica seja, de fato, bem definida, devemos nos atentar ao seguinte ponto: como toda variedade topológica é uma variedade homológica, então a construção das classes de Stiefel-Whitney de uma variedade topológica deve ser a mesma independentemente se utilizarmos a construção dada por Fadell para variedades topológicas como na definição 3.4 ou se utilizarmos nossa construção para variedades generalizadas como na definição 5.10. Em outras palavras:

Teorema 5.7. *Considere M^m uma variedade topológica fechada e conexa, $(\tau M, \tau_0 M)$ o seu $\mathbb{R}^m-$fibrado generalizado tangente e $d : M \to M \times M$ a diagonal. Denotando por $W(\tau M, \tau_0 M)$ e $W(d)$ as classes de Stiefel-Whitney totais de M dadas pelas definições 3.4 e 5.10, respectivamente, então $W(\tau M, \tau_0 M) = W(d)$.*

Demonstração.

Lembrando que $(\tau M, \tau_0 M) = (TM, T_0 M, p, M)$, em que $p : TM \to M$ é definida por $p(\omega) = \omega(0)$, e que a projeção canônica $p_1 : M \times M \to M$ é uma retração de $M \times M$ em M, ou seja, $p_1 \circ d = 1$, fixemos algumas notações.

Como M^m é uma variedade topológica com fibrado generalizado tangente $(\tau M, \tau_0 M)$, denotemos por $\tau \in H^m(TM, T_0 M; \mathbb{Z}_2)$ e $\phi : H^k(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(TM, T_0 M;\mathbb{Z}_2)$ a classe e o isomorfismo de Thom, respectivamente, de $(\tau M, \tau_0 M)$, em que $\phi(x) = p^*(x) \smile \tau$.

Por outro lado, considerando M^m como uma ENR-variedade homológica compacta e conexa, denotemos $\Delta = d(M)$, $\tau_d \in H^m(M \times M, M \times M - \Delta; \mathbb{Z}_2)$ a classe de Thom e $\phi_d : H^k(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(M \times M, M \times M - \Delta;\mathbb{Z}_2)$ o isomorfismo de Thom, ambos associados ao mergulho d, em que $\phi_d(x) = p_1^*(x) \smile \tau_d$.

Agora, devido a parte da demonstração do Lema 4.4, sabemos que ao definir a aplicação $\psi : (TM, T_0 M) \to (M \times M, M \times M - \Delta)$ por $\psi(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$, então ψ induzirá isomorfismo no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de cohomologia singular de modo que $\psi^*(\tau_d) = \tau$ e $\psi^* \circ \phi_d = \phi$.

Deste modo, o seguinte diagrama será, para qualquer inteiro $k \geq 0$, comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^m(M \times M, M \times M - \Delta; \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "Sq^k"] \arrow[d, "\psi^*"] & H^{k+m}(M \times M, M \times M - \Delta; \mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\psi^*"] \arrow[dr, "\phi_d^{-1}"] & \\
& & H^k(M; \mathbb{Z}_2) \\
H^m(TM, T_0M; \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "Sq^k"] & H^{k+m}(TM, T_0M; \mathbb{Z}_2) \arrow[ur, "\phi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Portanto, temos para todo $k \geq 0$ que:

$$\begin{aligned}
w_k(\tau M, \tau_0 M) &= \phi^{-1} \circ Sq^k(\tau) \\
&= \phi^{-1} \circ Sq^k \circ \psi^*(\tau_d) \\
&= \phi^{-1} \circ \psi^* \circ Sq^k(\tau_d) \\
&= \phi_d^{-1} \circ Sq^k(\tau_d) \\
&= w_k(d)
\end{aligned}$$

□

5.4 Fórmula de Wu para Variedades Generalizadas

Em ([7], Capítulo 6), Bredon apresentou uma demonstração alternativa para a fórmula de Wu para variedades suaves fechadas e conexas utilizando a aplicação diagonal, as dualidades de Poincaré e Poincaré-Lefschetz e algumas propriedades oriundas da existência do fibrado vetorial tangente. Ao percebermos que Bredon utilizou propriedades algébricas referentes as variedades suaves e aos fibrados vetoriais tangentes, tudo isso combinado com a aplicação diagonal, ficamos motivados a tentar fazer o mesmo para o contexto de variedades homológicas utilizando a construção algébrica da classe e do isomorfismo de Thom dessas variedades obtidas na seção 5.2.

Após algumas adaptações nos resultados apresentados por Bredon, demonstraremos nessa seção a fórmula de Wu para variedades homológicas sem necessariamente a existência de um fibrado tangente para tais variedades, mas apenas utilizando suas dualidades.

Para tanto, vamos fixar durante toda essa seção M^m como sendo uma ENR-variedade homológica compacta e conexa, $d : M \to M \times M$ a aplicação diagonal e a projeção canônica $p_1 : M \times M \to M$ como sendo uma retração de $M \times M$ em M, isto é, $p_1 \circ d = 1$.

Fixando também uma base qualquer $\{b_i\}_{i=1}^r$ de $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ e $\{b_i^{\#}\}_{i=1}^r$ sua base dual, podemos escrever a classe $U_d \in H^m(M \times M; \mathbb{Z}_2)$ obtida no lema 5.3 da seguinte maneira:

Lema 5.5. $U_d = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (b_i \times b_i^{\#})$

Demonstração.

Como $\{b_i\}_{i=1}^r$ e $\{b_i^{\#}\}_{i=1}^r$ são bases para $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$, então $\{b_i \times b_j^{\#}\}_{i,j=1}^r$ será uma base para $H^*(M \times M; \mathbb{Z}_2)$. Com isso, como $U_d \in H^*(M \times M; \mathbb{Z}_2)$, então para cada

$i, j = 1, \cdots, r$, existe único $\alpha_{i,j} \in \mathbb{Z}_2$ tal que:

$$U_d = \sum_{i,j=1}^{r} \alpha_{i,j}(b_i \times b_j^{\#})$$

Antes de prosseguirmos com a demonstração, perceba que devido a unicidade da base dual como no teorema A.7, então $\{b_i^{\#} \times b_j\}_{i,j=1}^{r}$ será a base dual de $\{b_i \times b_j^{\#}\}_{i,j=1}^{r}$ em $H^*(M \times M; \mathbb{Z}_2)$, uma vez que:

$$\begin{aligned} < (b_i \times b_j^{\#}) \smile (b_{i'}^{\#} \times b_{j'}), [M \times M] > &= < (b_i \smile b_{i'}^{\#}) \times (b_j^{\#} \smile b_{j'}), [M \times M] > \\ &= < b_i \smile b_{i'}^{\#}, [M] >< b_j^{\#} \smile b_{j'}, [M] > \\ &= \begin{cases} 1, & i' = i \text{ e } j' = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Deste modo, $(b_i \times b_j^{\#})^{\#} = b_i^{\#} \times b_j$ para quaisquer $i, j = 1, \cdots, r$.

Agora, devido ao corolário A.1, sabemos também que:

$$U_d = \sum_{i,j=1}^{r} (b_i \times b_j^{\#}) < U_d \smile (b_i \times b_j^{\#})^{\#}, [M \times M] >$$

Logo, o lema 5.3 nos garante que para quaisquer $i, j = 1, \cdots, r$ temos:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= < U_d \smile (b_i \times b_j^{\#})^{\#}, [M \times M] > \\ &= < b_i^{\#} \times b_j, [M \times M] \frown U_d > \\ &= < b_i^{\#} \times b_j, d_*([M]) > \\ &= < d^*(b_i^{\#} \times b_j), [M] > \\ &= < b_i^{\#} \smile b_j, [M] > \\ &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $U_d = \sum_{i=1}^{r} (b_i \times b_i^{\#})$.

□

Lema 5.6. $U_d/[M] = 1 \in H^0(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$

Demonstração.

Inicialmente, fixando o elemento básico $(b_1) = H^0(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, então $b_1 = 1$. Assim, fica evidente que $< b_1^{\#}, [M] >= 1$. Em outras palavras, $(b_1^{\#}) = H^m(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Por outro lado, como $b_i \notin H^0(M; \mathbb{Z}_2)$ para $i \neq 1$, então é claro que $b_i^{\#} \notin H^m(M; \mathbb{Z}_2)$ quando $i \neq 1$.

Deste modo, segue do lema anterior que:

$$\begin{aligned}
U_d/[M] &= \left(\sum_{i=1}^{r}(b_i \times b_i^{\#})\right)/[M] \\
&= \sum_{i=1}^{r}\left[\left(b_i \times b_i^{\#}\right)/[M]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{r} b_i < b_i^{\#}, [M] > \\
&= b_1 < b_1^{\#}, [M] > \\
&= b_1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Agora, combinando os lemas 5.3 e 5.4 para o mergulho $d : M \to M \times M$ e denotando $\Delta = d(M)$, obtemos a seguinte relação:

$$[M \times M] \frown U_d = [M \times M]_\Delta \frown \tau_d$$

Isso nos induz o seguinte:

Lema 5.7. *Para todo inteiro $k \geq 0$, temos a seguinte relação:*

$$[M \times M] \frown Sq^k(U_d) = [M \times M]_\Delta \frown Sq^k(\tau_d)$$

Demonstração.

Basta obervar que para qualquer $k \geq 0$, a proposição 5.3 e o lema A.3 nos garantem que:

$$\begin{aligned}
[M \times M] \frown Sq^k(U_d) &= [M \times M] \frown Sq^k(j^*(\tau_d)) \\
&= [M \times M] \frown j^*(Sq^k(\tau_d)) \\
&= j^*([M \times M]) \frown Sq^k(\tau_d) \\
&= [M \times M]_\Delta \frown Sq^k(\tau_d)
\end{aligned}$$

□

Deste modo, denotando por $\phi_d : H^k(M; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+m}(M \times M, M \times M - \Delta; \mathbb{Z}_2)$ o isomorfismo de Thom associado ao mergulho d que é definido por $\phi_d(x) = p_1^*(x) \smile \tau_d$ e lembrando que $w_k(M) = \phi_d^{-1} \circ Sq^k(\tau_d)$, obtemos uma primeira relação entre as classes de Stiefel-Whitney de M com a classe U_d da seguinte forma:

Lema 5.8. *Para todo inteiro $k \geq 0$, temos a seguinte relação:*

$$d_*([M] \frown w_k(M)) = [M \times M] \frown Sq^k(U_d)$$

Demonstração.

Utilizando o lema 5.4 e o lema anterior e lembrando que $p_1 \circ d = 1$, temos para todo $k \geq 0$ que:

$$\begin{aligned}
d_*([M] \frown w_k(M)) &= d_*([M] \frown d^* \circ p_1^*(w_k(M))) \\
&= d_*([M]) \frown p_1^*(w_k(M)) \\
&= ([M \times M]_\Delta \frown \tau_d) \frown p_1^*(w_k(M)) \\
&= [M \times M]_\Delta \frown (\tau_d \smile p_1^*(w_k(M))) \\
&= [M \times M]_\Delta \frown \phi_d(w_k(M)) \\
&= [M \times M]_\Delta \frown Sq^k(\tau_d) \\
&= [M \times M] \frown Sq^k(U_d)
\end{aligned}$$

□

Com isso, o lema a seguir nos mostra uma relação mais elegante entre as classes de Stiefel-Whitney de M e a classe U_d.

Lema 5.9. *Para qualquer inteiro $k \geq 0$, temos:*

$$w_k(M) = Sq^k(U_d)/[M]$$

Demonstração.
Lembrando que $p_1 \circ d = 1$ e utilizando o lema anterior com o item 2 do lema A.5, obtemos para todo $k \geq 0$ que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_M(w_k(M)) &= (p_1)_* \circ d_* \circ \mathcal{D}_M(w_k(M)) \\
&= (p_1)_* \left(d_* \left([M] \frown w_k(M)\right)\right) \\
&= (p_1)_* \left([M \times M] \frown Sq^k(U_d)\right) \\
&= (p_1)_* \left(([M] \times [M]) \frown Sq^k(U_d)\right) \\
&= [M] \frown \left(Sq^k(U_d)/[M]\right) \\
&= \mathcal{D}_M(Sq^k(U_d)/[M])
\end{aligned}$$

Com isso, como a dualidade de Poincaré $\mathcal{D}_M$ é um isomorfismo, concluímos que $w_k(M) = Sq^k(U_d)/[M]$.

□

Portanto, obtemos finalmente o:

Teorema 5.8. (Fórmula de Wu) *Dada M^m uma ENR-variedade homológica compacta e conexa, então:*

$$W(M) = Sq(v(M))$$

Demonstração.
Devemos provar, para todo inteiro $k \geq 0$, que $w_k(M) = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j(M))$.

Devido ao corolário A.1 e a própria definição das classes de Wu, temos:

$$\begin{aligned}
v_j(M) &= \sum_{l=1}^{r} < v_j(M) \smile b_l^{\#}, [M] > b_l \\
&= \sum_{l=1}^{r} < Sq^j(b_l^{\#}), [M] > b_l
\end{aligned}$$

Deste modo, concluímos com o lema anterior e o lema 5.5 que:

$$
\begin{aligned}
w_k(M) &= Sq^k(U_d)/[M] \\
&= Sq^k\left(\sum_{l=1}^{r}(b_l \times b_l^{\#})\right)/[M] \\
&= \sum_{l=1}^{r}\left[Sq^k(b_l \times b_l^{\#})/[M]\right] \\
&= \sum_{l=1}^{r}\left[\left(\sum_{i+j=k}\left(Sq^i(b_l) \times Sq^j(b_l^{\#})\right)\right)/[M]\right] \\
&= \sum_{i+j=k}\sum_{l=1}^{r}\left[\left(Sq^i(b_l) \times Sq^j(b_l^{\#})\right)/[M]\right] \\
&= \sum_{i+j=k}\sum_{l=1}^{r} < Sq^j(b_l^{\#}),[M] > Sq^i(b_l) \\
&= \sum_{i+j=k} Sq^i\left(\sum_{l=1}^{r} < Sq^j(b_l^{\#}),[M] > b_l\right) \\
&= \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j(M))
\end{aligned}
$$

□

Com isso, finalizamos esse capítulo com contribuições totalmente originais para a teoria das classes características de variedades generalizadas, que são, a grosso modo, espaços topológicos sem nenhuma condição geométrica e que possuem o mesmo comportamento homológico e cohomológico de variedades topológicas. Em particular, concluímos que o fato das dualidades de Poincaré e de Poincaré-Lefschetz também serem válidas para o contexto de variedades generalizadas foi primordial para todo o desenvolvimento desse capítulo.

Mesmo não existindo uma noção de fibrado normal para mergulhos topológicos entre variedades generalizadas, construímos algebricamente a classe e o isomorfismo de Thom associados a esses mergulhos. Consequentemente, definimos as classes de Stiefel-Whitney desses mergulhos de forma análoga a definição clássica e a definição apresentada no capítulo 3, utilizando os quadrados de Steenrod, o isomorfismo e a classe de Thom.

Ainda, como todo mergulho local-flat entre variedades topológicas pode ser visto como um mergulho topológico entre variedades generalizadas, mostramos que a definição das classes de Stiefel-Whitney do fibrado generalizado normal de um mergulho local-flat coincide com a definição dessas classes quando utilizada a construção no contexto de variedades generalizadas.

Por outro lado, mesmo não existindo uma noção de fibrado tangente para variedades generalizadas, construímos a classe de Thom, o isomorfismo de Thom e as classes de Stiefel-Whitney de uma variedade generalizada quando consideramos o caso particular do mergulho dado pela aplicação diagonal dessa variedade. Também mostramos que a definição das classes de Stiefel-Whitney do fibrado generalizado tangente de uma variedade topológica coincide com a definição dessas classes quando olhamos para essa variedade como uma variedade generalizada.

Uma vez que Biasi, Daccach e Saeki definiram em [4] as classes de Stiefel-Whitney de variedades generalizadas como sendo a própria fórmula de Wu e apresentaram diversos resultados nesse contexto, ressaltamos a importância da originalidade do capítulo 5 quando definimos as classes de Stiefel-Whitney para variedades generalizadas de uma forma alternativa e provamos a fórmula de Wu para tais variedades.

Assim, encerramos esse trabalho com diversas contribuições para a teoria das classes características, tanto de variedades topológicas, quanto de variedades generalizadas.

Referências Bibliográficas

[1] ALLAUD, G.; FADELL, E. *A Fiber Homotopy Extension Theorem.* Transactions of the American Mathematical Society, v.104, p.239-251, **1962**.

[2] BARBOSA, A.M. *Classes de Stiefel-Whitney e de Euler.* Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", **2017**.

[3] BEGLE, E.G. *Duality Theorems for Generalized Manifolds.* American Journal of Mathematics, v.67, nº1, p.59-70, **1945**.

[4] BIASI, C.; DACCACH, J.; SAEKI, O. *A Primary Obstruction to Topological Embeddings for Maps between Generalized Manifolds.* Pacific Journal of Mathematics, v.197, nº2, p.275-289, **2001**.

[5] BOREL, A. *The Poincaré Duality in Generalized Manifolds.* Michigan Mathematical Journal, v.4, p.227-239, **1957**.

[6] BREDON, G.E. *Sheaf Theory.* 2ªed. New York: Springer-Verlag, **1997**.

[7] BREDON, G.E. *Topology and Geometry.* New-York: Springer-Verlag, **1993**.

[8] BREDON, G.E. *Wilder Manifolds are Locally Orientable.* Proceedings of the National Academy os Sciences of the United States of America, v.63, nº4, p.1079-1081, **1969**.

[9] BROWN, R.F. *Path Fields on Manifolds.* Transactions of the American Mathematical Society, v.118, p.180-191, **1965**.

[10] BROWN, R.F.; FADELL, E. *Nonsingular Path Fields on Compact Topological Manifolds.* Proceedings of the American Mathematical Society, v.16, nº6, p.1342-1349, **1965**.

[11] BRYANT, J.; FERRY, S.; MIO, W.; WEINBERGER, S. *Topology of Homology Manifolds.* Annals of Mathematics, v.143, nº3, p.435-467, **1996**.

[12] BRYANT, J.; FERRY, S.; MIO, W.; WEINBERGER, S. *Topology of Homology Manifolds.* Bulletin of the American Mathematical Society, v.28, nº2, p.324-328, **1993**.

[13] CAVICCHIOLI, A.; HEGENBARTH, F.; REPOVS, D. *Higher-Dimensional Generalized Manifolds: Surgery and Constructions.* Zürich: European Mathematical Society, Series of Lectures in Mathematics, **2016**.

[14] DAVERMAN, R.J.; VENEMA, G.A. *Embeddings in Manifolds.* Providence: American Mathematical Society, **2009**.

[15] DAVIS, J.F.; KIRK, P. *Lectures Notes in Algebraic Topology.* Indiana: American Mathematical Society, **2001**.

[16] DIEUDONNÉ, J. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960.* Boston: Birkhäuser, Modern Birkhäuser Classics Series, **2000**.

[17] DOLD, A. *Lectures on Algebraic Topology.* 2ªed. Heidelberg: Springer-Verlag, **1980**.

[18] FADELL, E. *Generalized Normal Bundles for Locally-Flat Imbeddings.* Transactions of the American Mathematical Society, v.114, nº2, p.488-513, **1965**.

[19] FADELL, E. *Locally Flat Immersions and Whitney Duality.* Duke Mathematical Journal, v.32, p.37-52, **1965**.

[20] FADELL, E. *On Fiber Homotopy Equivalence.* Duke Mathematical Journal, v.26, p.699-706, **1959**.

[21] FADELL, E. *On Fiber Spaces.* Transactions of the American Mathematical Society, v.90, p.1-14, **1959**.

[22] HALVERSON, D.M. *Detecting Codimension one Manifold Factors with the Disjoint Homotopies Property.* Topology and its Applications, v.117, p.231-258, **2002**.

[23] HATCHER, A. *Algebraic Topology.* New York: Cambridge University Press, **2001**.

[24] HATCHER, A. *Vector Bundles and K-Theory.* New York: Cambridge University Press, **2001**.

[25] HAUSMANN, J.C. *Mod Two Homology and Cohomology.* Cham: Springer, **2014**.

[26] HEGENBARTH, F.; REPOVŠ, D. *The Relationship of Generalized Manifolds to Poincaré Duality Complexes and Topological Manifolds.* Topology and its Applications, v. 239, p.126-141, **2018**.

[27] HUNGERFORD, T.W. *Algebra.* New York: Springer-Verlag, **1974**.

[28] HUREWICZ, W. *On the Concept of Fiber Space.* Proceedings of the National Academy of Sciences of United States of America, v.41, p.956-961, **1955**.

[29] HUREWICZ, W.; FADELL, E. *On the Spectral Sequence of a Fiber Space.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, v. 41, nº11, p.961-964, **1955**.

[30] HUREWICZ, W.; FADELL, E. *On the Spectral Sequence of a Fiber Space II.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, v. 43, nº2, p.241-245, **1957**.

[31] HUSEMOLLER, D. *Fibre Bundles.* 3ªed. New-York: Springer-Verlag, **1994**.

[32] JAMES, I.M. *History of Topology.* Amsterdam: Elsevier, **1999**.

[33] KIRBY, R.C.; SIEBENMANN, L.C. *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations.* Princeton: Princeton University Press, **1977**.

[34] LEE, J.M. *Introduction to Smooth Manifolds.* 2ªed. New-York: Springer-Verlag, **2013**.

[35] LEE, J.M. *Introduction to Topological Manifolds.* New-York: Springer-Verlag, **2000**.

[36] MACLANE, S. *Homology.* Berlin: Springer-Verlag, **1963**.

[37] MASSEY, W.S. *Singular Homology Theory.* New York: Springer-Verlag, **1980**.

[38] MATTOS, D. de. *Sobre Teoremas do Tipo Borsuk-Ulam.* Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, **2005**.

[39] MAY, J.P. *A Concise Course in Algebraic Topology.* Chicago: University of Chicago Press, **1999**.

[40] MILNOR, J.W. *Lectures on Characteristic Classes.* (Mimeographed Notes), Princeton, **1957**.

[41] MILNOR, J.W.; STASHEFF, J.D. *Characteristic Classes.* 1ªed. New Jersey: Princeton University Press and University of Tokyo Press, **1974**.

[42] NASH, J. *A Path Space and the Stiefel-Whitney Classes.* Proceedings of the National Academy of Sciences of United States of America, v.41, nº5, p.320-321, **1955**.

[43] SAMPAIO, J.C.V. *O Teorema de Wu.* Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, **1979**.

[44] SPANIER, E.H. *Algebraic Topology.* New York: McGraw-Hill Book Co., **1966**.

[45] SPIVAK, M. *Spaces Satisfying Poincaré Duality.* Topology, v.6, p.77-101, **1965**.

[46] STONG, R.E. *Stiefel-Whitney Classes of Manifolds.* Pacific Journal of Mathematics, v.68, nº1, p.271-276, **1977**.

[47] SWITZER, R.M. *Algebraic Topology-Homotopy and Homology.* Berlin: Springer-Verlag, **2002**.

[48] VICK, J.W. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology.* 2ªed. New York: Springer-Verlag, **1994**.

[49] WHITEHEAD, G.W. *Elements of Homotopy Theory.* New York: Springer-Verlag, **1978**.

[50] WILDER, R.L. *Topology of Manifolds.* Colloquium Publications v.32. New York: American Mathematical Society, **1949**.

Apêndice A

(Co)homologia Singular

Com o intuito de deixar este trabalho sucinto, mas ao mesmo tempo completo e autoexplicativo, utilizaremos este apêndice como uma breve revisão de alguns conceitos já conhecidos da Topologia Algébrica.

Quando nos refirirmos, simultâneamente, aos módulos de homologia e cohomologia singular, vamos escrever, por comodidade, apenas módulos de (co)homologia singular. Assim, pediremos que o leitor já esteja familiarizado com os conceitos dessas teorias.

A.1 Principais Resultados

Utilizaremos esta seção para enunciarmos resultados gerais sobre (co)homologia singular que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho e para um melhor entendimento das construções feitas nas seções seguintes deste apêndice.

Teorema A.1. (Coeficientes Universais) *Considere (X, A) um par de espaços topológicos qualquer. Assim:*

1. ***(caso geral para homologia)***[1] *Se $H_k(X, A; \mathbb{Z})$ for um módulo livre*[2] *para todo $k \geq 0$ ou R for um módulo livre, então:*

$$H_k(X, A; R) \cong H_k(X, A; \mathbb{Z}) \otimes R, \ \forall k \geq 0$$

2. ***(caso geral para cohomologia)***[3] *Se $H_k(X, A; \mathbb{Z})$ for um módulo livre para todo $k \geq 0$, então:*

$$H^k(X, A; R) \cong Hom(H_k(X, A; \mathbb{Z}); R), \ \forall k \geq 0$$

3. ***(caso particular)***[4] *Se $\mathbb{F}$ for um corpo, então o produto de Kronecker garante que:*

$$H^k(X, A; \mathbb{F}) \cong Hom(H_k(X, A; \mathbb{F}); \mathbb{F}), \ \forall k \geq 0$$

Para $R = \mathbb{Z}$ no caso 2 ou $R = \mathbb{F}$ no caso 3, o isomorfismo é dado pela relação $x \in H^k(X, A; R) \mapsto \overline{x}(a) =< x, a >\in R$.

[1] Pode ser encontrado em ([23], Corolário 3A.4, p. 264).
[2] Um módulo é chamado de livre se admitir uma base.
[3] Pode ser encontrado em ([23], Teorema 3.2, p. 195).
[4] Pode ser encontrado em ([23], p. 198).

Teorema A.2. (Fórmula de Künneth) *Sejam X e Y espaços topológicos quaisquer e R um domínio de ideais principais finitamente gerado. Deste modo:*

1. ***(caso para cohomologia absoluta)***[5] *Se todos os $R-$módulos de homologia singular de Y forem finitamente gerados, então:*

$$H^k(X \times Y; R) \cong \bigoplus_{i+j=k} \left[H^i(X;R) \otimes H^j(Y;R)\right], \ \forall k \geq 0$$

2. ***(caso para homologia absoluta)***[6]

$$H_k(X \times Y; R) \cong \bigoplus_{i+j=k} \left[H_i(X;R) \otimes H_j(Y;R)\right], \ \forall k \geq 0$$

As provas dos casos gerais do teorema dos Coeficientes Universais podem ser encontradas em ([44], Capítulo 5, Seções 2 e 5).

Já as provas das fórmulas de Künneth podem ser encontradas, em suas versões gerais para pares, em ([44], Capítulo 5, Seções 3 e 5).

Agora, vejamos resumidamente algumas propriedades sobre os produtos cap, cup, cross e de Kronecker.

Lema A.1. *Considere X, X', Y e Y' espaços topológicos arbitrários, $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ aplicações quaisquer, $p_1 : X \times Y \to X$ e $p_2 : X \times Y \to Y$ as projeções canônicas e $d : X \to X \times X$ a diagonal. Se $a \in H_q(X;R)$, $b \in H_r(Y;R)$, $x \in H^i(X;R)$, $x_1 \in H^{i_1}(X;R)$, $x_2 \in H^{i_2}(X;R)$, $y \in H^j(Y;R)$, $y_1 \in H^{j_1}(Y;R)$, $y_2 \in H^{j_2}(Y;R)$, $a' \in H_{q'}(X;R)$, $x' \in H^{i'}(X';R)$, $x'_1 \in H^{i'_1}(X';R)$, $x'_2 \in H^{i'_2}(X';R)$, $y' \in H^{j'}(Y';R)$, então:*

1. $1 \smile x = x = x \smile 1$
2. $0 \smile x = 0 = x \smile 0$
3. $x_1 \smile x_2 = 0 \iff x_1 = 0$ *ou* $x_2 = 0$, *quando* $R = \mathbb{Z}_2$
4. $a \frown 1 = a$
5. $x_1 \smile x_2 = (-1)^{|x_1|.|x_2|}(x_2 \smile x_1)$
6. $(a \frown x_1) \frown x_2 = a \frown (x_2 \smile x_1)$
7. $(x_1 \times y_1) \smile (x_2 \times y_2) = (-1)^{|y_1|.|x_2|}(x_1 \smile x_2) \times (y_1 \smile y_2)$
8. $(a \times b) \frown (x \times y) = (-1)^{|a|.(|y|-|b|)}(a \frown x) \times (b \frown y)$
9. $< x_1 \smile x_2, a >=< x_1, a \frown x_2 >$
10. $< x \times y, a \times b >= (-1)^{|x|.|y|} < x, a > . < y, b >$
11. $p_1^*(x) = x \times 1$ *e* $p_2^*(y) = 1 \times y$
12. $x \times y = p_1^*(x) \smile p_2^*(y)$

[5]Pode ser encontrado em ([44], Teorema 1, p. 249).
[6]Pode ser encontrado em ([44], Teorema 10, p. 235).

13. $x_1 \smile x_2 = d^*(x_1 \times x_2)$

14. $f_*(a \frown f^*(x')) = f_*(a) \frown x'$

15. $(f \times g)^*(x' \times y') = f^*(x') \times g^*(y')$

16. $f^*(x'_1 \smile x'_2) = f^*(x'_1) \smile f^*(x'_2)$

17. $< f^*(x'), a > = < x', f_*(a) >$

18. $< (f^*)^{-1}(x), a' > = < x, (f_*)^{-1}(a') >$, *se* f^* *e* f_* *forem isomorfismos.*

As propriedades do lema acima podem ser encontradas, em suas versões gerais para pares, em ([44], Capítulo 5).

Ainda, o item 16 do lema A.1 admite um caso particular quando envolvemos a aplicação inclusão no seguinte sentido:

Lema A.2. *Sejam* (X, A) *um par de espaços topológicos qualquer e* $j : X \hookrightarrow (X, A)$ *a inclusão canônica. Então, obtemos para quaisquer* $x_1 \in H^{i_1}(X; R)$ *e* $x_2 \in H^{i_2}(X, A; R)$ *que:*

$$j^*(x_1 \smile x_2) = x_1 \smile j^*(x_2)$$

A prova do lema acima também pode ser encontrada em ([44], Capítulo 5).

Dito isso, o item 14 do lema A.1 admite o seguinte caso particular:

Lema A.3. *Sejam* (X, A) *um par de espaços topológicos qualquer e* $j : X \hookrightarrow (X, A)$ *a inclusão canônica. Então, obtemos para quaisquer* $x \in H^{i_1}(X, A; R)$ *e* $a \in H_{i_2}(X; R)$ *que:*

$$j_*(a) \frown x = a \frown j^*(x)$$

Demonstração.

Basta observar que, para qualquer $y \in H^{i_2 - i_1}(X; R)$, temos:

$$\begin{aligned} < y, j_*(a) \frown x > = \; & < y \smile x, j^*(a) > \\ & < j^*(y \smile x), a > \\ & < y \smile j^*(x), a > \\ & < y, a \frown j^*(x) > \end{aligned}$$

Assim, o teorema dos Coeficientes Universais garante que $j_*(a) \frown x = a \frown j^*(x)$.

□

Agora, também devido ao teorema dos Coeficientes Universais, o próximo resultado é uma consequência direta de ([27], Teorema 4.11, p. 204):

Proposição A.1. *Considere* $R = \mathbb{Z}$ *ou* $R = \mathbb{F}$ *um corpo qualquer e* (X, A) *um par de espaços topológicos quaisquer de modo que* $H_k(X, A; R)$ *é um* $R-$*módulo finitamente gerado para todo* $k \geq 0$. *Então, para quaisquer* $k \geq 0$, $\alpha \in R$ *e* $a \in H_k(X, A; R)$ *de modo que* $a \neq 0$, *existe um único* $x \in H^k(X, A; R)$ *tal que* $x \neq 0$ *e* $< x, a > = \alpha$.

Prosseguindo, construiremos o anel de cohomologia de um par (X, A).

Definição A.1. (Anel de Cohomologia) *Chamaremos* $(H^*(X, A; R), +, \smile)$ *de anel de cohomologia do par* (X, A) *com coeficientes em* R *o conjunto formado pelas seguintes séries infinitas formais:*

$$H^*(X, A; R) = \{x = x_0 + x_1 + x_2 + ... \ : \ x_k \in H^k(X, A; R), \ \forall k \geq 0\}$$

Ainda, sendo $x = x_0 + x_1 + x_2 + ..., y = y_0 + y_1 + y_2 + ... \in H^*(X, A; R)$, *as operações que definem esse anel são dadas por:*

1. $x + y = z_0 + z_1 + z_2 + ...$, *em que* $z_k = x_k + y_k$, *para todo* $k \geq 0$
2. $x \smile y = z_0 + z_1 + z_2 + ...$, *em que* $z_k = \sum_{i+j=k} x_i \smile y_j$, *para todo* $k \geq 0$

Como o produto cup é uma operação comutativa quando $R = \mathbb{Z}_2$, então $H^*(X, A; \mathbb{Z}_2)$ será um anel comutativo com elemento identidade $1 + 0 + 0 + ... \in H^*(X, A; \mathbb{Z}_2)$.

Teorema A.3. *As unidades do anel* $H^*(X, A; \mathbb{Z}_2)$ *são elementos da seguinte forma:*

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + ... \in H^*(X, A; \mathbb{Z}_2) \ : \ x_0 = 1$$

Ainda, o inverso de uma unidade $x = 1 + x_1 + x_2 + ...$ *é o seguinte elemento:*

$$x^{-1} = 1 + x_1^{-1} + x_2^{-1} + ..., \text{ em que } x_k^{-1} = \sum_{\substack{i+j=k \\ i \neq 0}} x_i \smile x_j^{-1}, \ \forall k \geq 1$$

A prova do teorema acima pode ser encontrada em ([2], Lema 6.1, p. 53).

Neste momento, vejamos quando um espaço topológico possui todos os seus módulos de (co)homologia singular finitamente gerados e sobre quais condições podemos definir a característica de Euler de um espaço topológico arbitrário.

Proposição A.2. *Todos os módulos de homologia singular de um espaço compacto e ENR*[7] *são finitamente gerados.*

A prova da proposição acima pode ser encontrada em ([23], Corolário A.8, p. 527). Como consequência particular, todos os módulos de homologia singular de uma variedade topológica compacta são livres, uma vez que toda variedade topológica é um ENR e todo módulo finitamente gerado é livre. Ainda, devido ao teorema dos Coeficientes Universais, todo módulo de cohomologia singular de uma variedade topológica compacta é livre.

Definição A.2. (Característica de Euler) *Seja* X *um espaço topológico tal que exista um inteiro* $n > 0$ *de modo que* $H_k(X; \mathbb{Z}) = 0$ *para* $k > n$ *e* $H_k(X; \mathbb{Z})$ *seja um* $\mathbb{Z}-$*módulo finitamente gerado para todo* $0 \leq k \leq n$. *Assim, a característica de Euler de* X *é dada pela seguinte soma alternada:*

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k rank(H_k(X; \mathbb{Z}))$$

[7]Um ENR é um espaço topológico que é um retrato de uma vizinhança Euclidiana, isto é, pode ser mergulhado em algum espaço Euclidiano como retrato de alguma vizinhança desse mesmo espaço Euclidiano. Mais detalhes sobre esses espaços podem ser encontrados em ([17], Capítulo 4, Seção 8).

Devido ao teorema dos Coeficientes Universais, a característica de Euler de um espaço X nas condições da definição acima pode ser calculado utilizando módulos de homologia singular com coeficientes num corpo qualquer $\mathbb{F}$ da seguinte maneira:

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k dim(H_k(X;\mathbb{F}))$$

Para encerrarmos esta seção, façamos algumas considerações sobre o espaço projetivo real infinito $\mathbb{R}P^\infty$, o qual será útil para calcularmos as classes de Stiefel-Whitney dos espaços projetivos reais utilizando a versão topológica da fórmula de Wu.

Denotando por $\mathbb{R}P^k$ o $k-$espaço projetivo real, podemos definir o espaço projetivo real infinito $\mathbb{R}P^\infty$ como sendo o limite direto da seguinte sequência:

$$\mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}P^k \subset \cdots$$

Em outras palavras, temos que $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_{k\geq 0} \mathbb{R}P^k$ é um espaço topológico munido da seguinte topologia:

"U é um aberto de $\mathbb{R}P^\infty$ se, e somente se, $U \cap \mathbb{R}P^k$ é um aberto de $\mathbb{R}P^k$, para todo $k \geq 0$".

Deste modo, podemos enunciar o seguinte:

Lema A.4. *A inclusão canônica $i : \mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ induz, para todo $0 \leq k \leq n$, um isomorfismo $i^* : H^k(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \to H^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$.*

Demonstração.

Primeiramente, recordemos que $\mathbb{R}P^{n+1}$ é um CW-complexo com uma célula aberta em cada dimensão, sendo $\mathbb{R}P^k$ seu $k-$esqueleto.

Agora, considere e_{n+1} a célula aberta $(n+1)-$dimensional de $\mathbb{R}P^{n+1}$ e fixe $x \in e_{n+1}$. Assim, $\mathbb{R}P^{n+1} - \{x\}$ será um retrato por deformação de $\mathbb{R}P^n$.

Por outro lado, considerando, a menos de homeomorfismo, $x \in D^{n+1} \subset e_{n+1}$, então $U = \mathbb{R}P^{n+1} - D^{n+1}$ será um subespaço aberto de $\mathbb{R}P^{n+1}$ tal que:

$$\overline{U} \subset int(\mathbb{R}P^{n+1} - \{x\}) = \mathbb{R}P^{n+1} - \{x\}$$

Assim, $\mathbb{S}^n = \partial D^{n+1}$ será um retrato por deformação de $(\mathbb{R}P^{n+1} - \{x\}) - U = D^{n+1} - \{x\}$ e também obteremos a seguinte excisão:

$$(\mathbb{R}P^{n+1} - U, (\mathbb{R}P^{n+1} - \{x\}) - U) \hookrightarrow (\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^{n+1} - \{x\})$$

Deste modo, temos os seguintes isomorfismos:

$$\begin{aligned}
H^k(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) &\cong H^k(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^{n+1} - \{x\};\mathbb{Z}_2) \\
&\cong H^k(\mathbb{R}P^{n+1} - U, (\mathbb{R}P^{n+1} - \{x\}) - U;\mathbb{Z}_2) \\
&\cong H^k(D^{n+1}, \mathbb{S}^n;\mathbb{Z}_2) \\
&\cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \ k = n+1 \\ 0 & , \ k \neq n+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Em particular, $H^k(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$ para $0 \leq k \leq n$. Com isso, fixemos até o fim desta demonstração que $0 \leq k \leq n$.

Agora, provemos, por indução sobre $t \geq 2$, que $H^k(\mathbb{R}P^{n+t}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$.

Para tanto, considere, inicialmente, a sequência exata longa de cohomologia da terna[8] $(\mathbb{R}P^{n+2}, \mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n)$:

$$\cdots \to H^k(\mathbb{R}P^{n+2}, \mathbb{R}P^{n+1}; \mathbb{Z}_2) \to H^k(\mathbb{R}P^{n+2}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \to H^k(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \to \cdots$$

Uma vez que $H^k(\mathbb{R}P^{n+2}, \mathbb{R}P^{n+1}; \mathbb{Z}_2) = 0 = H^k(\mathbb{R}P^{n+1}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, então a exatidão da sequência acima nos garante que $H^k(\mathbb{R}P^{n+2}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$.

Assim, supondo $H^k(\mathbb{R}P^{n+t_0}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$ para algum $t_0 > 2$, obtemos, analogamente ao caso $t = 2$, que $H^k(\mathbb{R}P^{n+(t_0+1)}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$, bastando utilizar a sequência exata longa de cohomologia da terna $(\mathbb{R}P^{n+(t_0+1)}, \mathbb{R}P^{n+t_0}, \mathbb{R}P^n)$.

Deste modo, concluímos que $H^k(\mathbb{R}P^{n+t}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$ para qualquer $t \geq 0$. Com isso:

$$H^k(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \varinjlim H^k(\mathbb{R}P^{n+t}, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$$

Por fim, considere a sequência exata longa de cohomologia do par $(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{R}P^n)$:

$$\cdots \longrightarrow H^k(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots$$

Como $H^k(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$ e $H^k(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \cong H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, então i^* será um monomorfismo entre módulos de mesma dimensão, ou seja, i^* será um isomorfismo.

□

A.2 Produto Slant

Nesta seção, iremos definir um produto específico entre módulos de (co)homologia singular que será fundamental na prova da fórmula de Wu para variedades topológicas e homológicas.

Este produto, o qual chamaremos mais adiante de produto slant, é definido para espaços topológicos arbitrários, utilizando módulos de (co)homologia singular com coeficientes num anel arbitrário comutativo e com unidade e também é usado na prova da fórmula de Wu para variedades suaves, como visto em ([41], Capítulo 11).

Para o nosso contexto, considere $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$, X e Y espaços topológicos quaisquer com $H_k(Y; R)$ finitamente gerado para todo $k \geq 0$, e inteiros $i, j \geq 0$. Assim, defina o seguinte homomorfismo envolvendo $R-$módulos de (co)homologia singular:

$$H^i(X; R) \otimes H^j(Y; R) \otimes H_j(Y; R) \to H^i(X; R)$$

$$x \otimes y \otimes b \mapsto < y, b > x$$

Agora, a fórmula de Künneth garante que $H^*(X \times Y; R) \cong H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R)$ e sendo $H^*(X \times Y; R)$ um anel gerado por elementos da forma $x \times y$, então fica bem definido o seguinte homomorfismo:

$$H^{i+j}(X \times Y; R) \otimes H_j(Y; R) \to H^i(X; R)$$

$$(x \times y) \otimes b \mapsto (x \times y)/b =< y, b > x$$

Assim, temos a seguinte:

[8] Para mais detalhes sobre sequência exata longa de cohmologia de uma terna, ver ([23], p. 200).

Definição A.3. (Produto Slant) *Chamaremos de produto slant o homomorfismo* $H^{i+j}(X \times Y; R) \otimes H_j(Y; R) \to H^i(X; R)$ *que associa* $z \otimes b \mapsto z/b$.

Finalizaremos esta seção com duas propriedades particulares do produto slant. Para mais detalhes sobre esta operação, em sua forma mais geral, sugerimos ao leitor ver ([44], Capítulo 6, Seção 1).

Lema A.5. *Sejam* $x \times 1 \in H^i(X \times Y; R)$, $z \in H^{i+j}(X \times Y; R)$, $a \in H_{i'}(X; R)$, $b \in H_j(Y; R)$ *e* $p_1 : X \times Y \to X$ *a projeção canônica. Então, temos as relações:*

1. $[(x \times 1) \smile z]/b = x \smile (z/b)$
2. $(p_1)_*((a \times b) \frown z) = a \frown (z/b)$

A.3 Quadrados de Steenrod

Os quadrados de Steenrod são operações cohomológicas de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho, pois são indispensáveis para definir as classes de Stiefel-Whitney de fibrados vetoriais, generalizados e de variedades homológicas. Ainda, a fórmula de Wu relaciona, através desses quadrados de Steenrod, as classes de Stiefel-Whitney e de Wu de uma variedade suave, topológica e homológica.

Aqui, iremos enunciar apenas as propriedades básicas dessas operações. Para mais detalhes sobre os quadrados de Steenrod, sugerimos o leitor ver ([44], Capítulo 5, Seção 9).

Dados (X, A) um par de espaços topológicos e inteiros $m, k \geq 0$, os quadrados de Steenrod são operações cohomológicas aditivas $Sq^k : H^m(X, A; \mathbb{Z}_2) \to H^{m+k}(X, A; \mathbb{Z}_2)$ que satisfazem as seguintes propriedades:

1. se $x \in H^m(X, A; \mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^n(X, A; \mathbb{Z}_2)$, então a fórmula de Cartan é válida, isto é:
$$Sq^k(x \smile y) = \sum_{i+j=k} Sq^i(x) \smile Sq^j(y)$$
2. se $x \in H^m(X, A; \mathbb{Z}_2)$, então:
   (a) $Sq^0(x) = x$
   (b) $Sq^m(x) = x \smile x$
   (c) $Sq^k(x) = 0$, para $k > m$
3. se $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação de pares, então $Sq^k \circ f^* = f^* \circ Sq^k$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:
$$\begin{tikzcd}
H^m(Y, B; \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "Sq^k"'] & H^m(X, A; \mathbb{Z}_2) \arrow[d, "Sq^k"'] \\
H^{m+k}(Y, B; \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "f^*"] & H^{m+k}(X, A; \mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

Ainda, se $f : (X, A) \to (Y, B)$ for uma aplicação que induz isomorfismo no âmbito de $\mathbb{Z}_2-$módulos de cohomologia singular, então fica evidente devido a propriedade acima que:

$$Sq^k \circ (f^*)^{-1} = (f^*)^{-1} \circ Sq^k$$

Por outro lado, dado $x \in H^m(X, A; \mathbb{Z}_2)$, podemos definir a operação quadrado total da seguinte maneira:

$$Sq(x) = x + Sq^1(x) + Sq^2(x) + ... + Sq^m(x)$$

Deste modo, a fórmula de Cartan pode ser reescrita, para quaisquer $x \in H^m(X, A; \mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^n(X, A; \mathbb{Z}_2)$, como:

$$Sq(x \smile y) = Sq(x) \smile Sq(y)$$

Finalizando esta seção, dados $x \in H^m(X, A; \mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^n(Y, B; \mathbb{Z}_2)$, podemos obter, utilizando o produto cross e a fórmula de Cartan, as seguintes relações:

$$Sq^k(x \times y) = \sum_{i+j=k} Sq^i(x) \times Sq^k(y)$$

$$Sq(x \times y) = Sq(x) \times Sq(y)$$

A.4 Classes de $R-$orientação e Dualidades

Nesta seção, definiremos a noção de $R-$orientabilidade de uma variedade topológica e enunciaremos alguns resultados neste contexto. Feito isso, enunciaremos os resultados mais importantes envolvendo variedades topológicas no âmbito de (co)homologia singular, que são as chamadas dualidades.

Para uma leitura mais detalhada sobre orientações e as dualidades aqui citadas, sugerimos ([23], Capítulo 3, Seção 3.3).

Definição A.4. (Orientação Local) *Considere M^m uma variedade topológica. Então:*

1. *Uma $R-$orientação local de M em $b \in M$ é a escolha de um gerador do $R-$módulo $H_m(M, M - \{b\}; R) \cong R$, o qual denotaremos por $([M]_b) = H_m(M, M - \{b\}; R)$;*

2. *Uma $R-$orientação local de M ao longo de um subespaço $U \subset M$ é um elemento $[M]_U \in H_m(M, M - U; R)$ tal que $((j_b^U)_*([M]_U)) = H_m(M, M - \{b\}; R)$ para todo $b \in U$, em que $j_b^U : (M, M - U) \hookrightarrow (M, M - \{b\})$ é a inclusão canônica.*

Os elementos $[M]_b$ e $[M]_U$ são chamados de classes de $R-$orientação local de M em $b \in M$ e ao longo de U, respectivamente.

Definição A.5. (Orientação Global) *Dizemos que uma variedade topológica M^m é $R-$orientável se existir uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de M tal que:*

1. *se $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ e $b \in U_i \cap U_j$, então $(j_b^{U_i})_*([M]_{U_i}) = (j_b^{U_j})_*([M]_{U_j})$;*

2. *para todo $U \in \mathcal{U}$ e $b \in U$, temos $[M]_b = (j_b^U)_*([M]_U)$*

Feitas as definições de orientações locais e globais, vejamos a seguinte:

Proposição A.3. *Seja M^m é uma variedade topológica $R-$orientável. Deste modo:*

1. *Se M é conexa e fechada, então a inclusão $j_b^M = j_b : M \hookrightarrow (M, M - \{b\})$ é tal que $(j_b)_* : H_m(M;R) \to H_m(M, M - \{b\}; R)$ é um isomorfismo para todo $b \in M$;*
2. *Para cada compacto $K \subset M$, existe uma única classe de $R-$orientação local de M ao longo de K, $[M]_K \in H_m(M, M - K; R)$, tal que $(j_b^K)_*([M]_K) = [M]_b$ para todo $b \in K$.*

Definição A.6. *Seja M^m uma variedade topológica conexa, fechada e $R-$orientável. Chamamos de classe de $R-$orientação global o gerador denotado por $([M]) = H_m(M;R)$ que é tal que $(j_b)_*([M]) = [M]_b$ para todo $b \in M$.*

É conhecido na literatura que toda variedade topológica M^m é $\mathbb{Z}_2-$orientável. Assim, se M é fechada e conexa, suas classes de $\mathbb{Z}_2-$orientação (tanto local, quanto global) são os únicos geradores $([M]) = H_m(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \cong H_m(M, M - \{b\}; \mathbb{Z}_2) = ([M]_b)$ tais que $(j_b)_*([M]) = [M]_b$ para todo $b \in M$.

Lema A.6. *Se M^m e N^n são duas variedades topológicas fechadas e conexas, então suas classes de $\mathbb{Z}_2-$orientação globais são tais que:*

$$[M \times N] = [M] \times [N]$$

Demonstração.

Primeiramente, segue da fórmula de Künneth que:

$$H^{m+n}(M \times N; \mathbb{Z}_2) \cong H^m(M;\mathbb{Z}_2) \otimes H^n(N;\mathbb{Z}_2)$$

Por outro lado, como $H^m(M;\mathbb{Z}_2)$ e $H^n(N;\mathbb{Z}_2)$ são módulos gerados unicamente pelas classes de $\mathbb{Z}_2-$orientação globais $[M]$ e $[N]$, respectivamente, segue de ([27], Corolário 5.12, p. 215) que $H^m(M;\mathbb{Z}_2) \otimes H^n(N;\mathbb{Z}_2)$ será gerado unicamente por $[M] \otimes [N]$.

Como o isomorfismo da fórmula de Künneth é dado pelo produto cross, a classe de $\mathbb{Z}_2-$orientação global da variedade produto $M \times N$ será o produto $[M] \times [N]$.

□

Antes de enunciarmos as dualidades que utilizaremos nesse trabalho, vejamos uma forma alternativa de vizualizar o produto cap no contexto de variedades topológicas.

Para tanto, considere M^m uma variedade topológica e um subespaço $K \subset$ compacto e ENR. Como visto em ([17], Capítulo 8, Seção 7), podemos considerar o produto cap como um homomorfismo entre os seguintes $R-$módulos de (co)homologia singular:

$$\frown : H_i(M, M - K; R) \otimes H^j(K;R) \to H_{i-j}(M, M - K; R)$$

Com isso, podemos enunciar os seguintes:

Teorema A.4. (Dualidade de Poincaré-Lefschetz) *Seja M^m uma variedade topológica $R-$orientável e $K \subset M$ um subespaço compacto e ENR. Então, o homomorfismo $\mathcal{D}_{M,K} : H^k(K;R) \to H_{m-k}(M, M - K; R)$ dado por $\mathcal{D}_{M,K}(x) = [M]_K \frown x$ é um isomorfismo para todo $k \geq 0$.*

Teorema A.5. (Dualidade de Poincaré) *Se M^m é uma variedade topológica compacta $R-$orientável, então o homomorfismo $\mathcal{D}_M : H^k(M;R) \to H_{m-k}(M;R)$ dado por $\mathcal{D}_M(x) = [M] \frown x$ é um isomorfismo para todo $k \geq 0$.*

Encerrando esta seção, vejamos algumas consequências da dualidade de Poincaré.

Teorema A.6. *Considere M^m uma variedade topológica compacta e $R-$orientável, com $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{F}$ um corpo qualquer. Então, para todo $k \geq 0$, o homomorfismo $H^k(M; R) \to Hom(H^{m-k}(M; R); R)$ que associa $x \mapsto x'(y) =< x \smile y, [M] >$ é um isomorfismo .*

Demonstração.
Compondo diretamente o teorema dos Coeficientes Universais e a dualidade de Poincaré associada a variedade topológica M^m, obtemos, para todo $k \geq 0$, o seguinte isomorfismo:

$$H^k(M; R) \to Hom(H_k(M; R); R) \to Hom(H^{m-k}(M; R); R)$$
$$x \mapsto \overline{x} \mapsto \widetilde{x}$$

em que $\overline{x} \in Hom(H_k(M; R); R)$ e $\widetilde{x} \in Hom(H^{m-k}(M; R); R)$ são definidos, respectivamente, por $\overline{x}(a) =< x, a >$ e $\widetilde{x}(y) = \overline{x}([M] \frown y)$.

Deste modo, o isomorfismo $H^k(M; R) \to Hom(H^{m-k}(M; R); R)$ é dado, para todo $k \geq 0$, pela seguinte associação:

$$\begin{aligned} x \mapsto \widetilde{x}(y) &= \overline{x}([M] \frown y) \\ &= < x, [M] \frown y > \\ &= < x \smile y, [M] > \\ &= x'(y) \end{aligned}$$

□

Teorema A.7. (Base Dual) *Considere M^m uma variedade topológica compacta e $R-$orientável, com $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{F}$ um corpo qualquer. Então, para cada base $\{b_i\}_{i=1}^r$ de $H^*(M; R)$, existe uma única base correspondente $\{b_i^{\#}\}_{i=1}^r$ também de $H^*(M; R)$, chamada de base dual, satisfazendo a seguinte identidade:*

$$< b_i \smile b_j^{\#}, [M] > = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Demonstração.
Pelo teorema anterior, a correspondência $H^k(M; R) \to Hom(H^{m-k}(M; R); R)$ que associa $b \mapsto < b \smile \_, [M] >$: $H^{m-k}(M; R) \to R$ é um isomorfismo para todo $k \geq 0$.

Agora, fixado $k \geq 0$ arbitrário, lembremos que sendo $H^{m-k}(M; R)$ um $R-$módulo finitamente gerado, digamos que pela base $\{b_j^{\#}\}_{j=1}^l$, então ([27], Teorema 4.11, p. 204) garante que $Hom(H^{m-k}(M; R); R)$ também será um $R-$módulo finitamente gerado pelos homomorfismos $h_i : H^{m-k}(M; R) \to R$ definidos, para todo $i = 1, \cdots, l$, por:

$$h_i(b_j^{\#}) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Deste modo, para cada elemento básico $b \in H^k(M; R)$, existe um único elemento básico $b^{\#} \in H^{m-k}(M; R)$ tal que $< b \smile b^{\#}, [M] >= 1$.

□

Corolário A.1. *Considere M^m uma variedade topológica compacta e $R-$orientável, com $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{F}$ um corpo qualquer. Sendo $\{b_i\}_{i=1}^r$ uma base de $H^*(M;R)$ e $\{b_i^\#\}_{i=1}^r$ sua base dual, então todo $x \in H^*(M;R)$ se escreve da seguinte maneira:*

$$x = \sum_{i=1}^{r} < x \smile b_i^\#, [M] > b_i$$

Demonstração.

Sendo $\{b_i\}_{i=1}^r$ uma base de $H^*(M;R)$, então para cada $x \in H^*(M;R)$ existem únicos $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in R$ tais que $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i b_i$. Assim, para cada $b_j^\# \in \{b_i^\#\}_{i=1}^r$, temos que:

$$\begin{aligned} < x \smile b_j^\#, [M] > &= < \left(\sum_{i=1}^{r} b_i \alpha_i \right) \smile b_j^\#, [M] > \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i < b_i \smile b_j^\#, [M] > \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

□

A.5 Classes de Wu

Agora, veremos como construir as chamadas classes de Wu de uma variedade topológica fechada. A construção de tais classes depende unicamente do teorema dos Coeficientes Universais e da dualidade de Poincaré.

Para tanto, considere uma variedade topológica fechada e conexa M^m, um inteiro $k \geq 0$ arbitrário e os quadrados de Steenrod $Sq^k : H^{m-k}(M;\mathbb{Z}_2) \to H^m(M;\mathbb{Z}_2)$. Assim, ao tomarmos o homomorfismo em $Hom(H^{m-k}(M;\mathbb{Z}_2);\mathbb{Z}_2)$ que associa $x \mapsto < Sq^k(x), [M] >$, obteremos por meio do teorema A.6 que existe uma única classe de cohomologia $v_k(M) \in H^k(M;\mathbb{Z}_2)$ tal que:

$$< v_k(M) \smile x, [M] > = < Sq^k(x), [M] >, \ \forall x \in H^{m-k}(M;\mathbb{Z}_2)$$

Definição A.7. (Classe de Wu) *Dada uma variedade topológica fechada e conexa M^m e um inteiro $k \geq 0$, chamamos de $k-$ésima classe de Wu da variedade M a classe $v_k(M) \in H^k(M;\mathbb{Z}_2)$ caracterizada unicamente pela seguinte relação:*

$$< v_k(M) \smile x, [M] > = < Sq^k(x), [M] >, \ \forall x \in H^{m-k}(M;\mathbb{Z}_2)$$

Ainda, chamamos $v(M) = \sum_{k=0}^{m} v_k(M) \in H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ de classe de Wu total de M.

Devido a unicidade das classes de Wu, obtemos, em particular, que $v_0(M) = 1 \in H^0(M;\mathbb{Z}_2)$, pois para todo $x \in H^m(M;\mathbb{Z}_2)$, temos:

$$< Sq^0(x), [M] > = < x, [M] > = < 1 \smile x, [M] >$$

Como exemplo, calculemos a classe de Wu total do espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$:

Exemplo A.1. *Sendo $H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) = (a)$, então $v(\mathbb{R}P^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} a^k$.*

Demonstração.

Inicialmente, mostremos, por indução sobre $i \geq 0$, que $Sq^k(a^i) = \binom{i}{k}a^{i+k}$ para qualquer $k \geq 0$. Para tanto, fixemos que $\binom{i}{k} = 0$ quando $i < k$ ou $k < 0$.

Assim, para $i = 0$, temos:

$$\begin{aligned} Sq^k(a^0) &= Sq^k(1) \\ &= \begin{cases} 0 & , \ k > 0 \\ 1 & , \ k = 0 \end{cases} \\ &= \binom{0}{k}a^k \end{aligned}$$

Agora, supondo $Sq^k(a^i) = \binom{i}{k}a^{i+k}$ para todo $k \geq 0$, note que:

$$\begin{aligned} Sq^k(a^{i+1}) &= Sq^k(a^i \smile a) \\ &= \sum_{r+s=k} \left[Sq^r(a^i) \smile Sq^s(a)\right] \\ &= \left[Sq^k(a^i) \smile Sq^0(a)\right] + \left[Sq^{k-1}(a^i) \smile Sq^1(a)\right] \\ &= \left[\binom{i}{k}a^{i+k} \smile a\right] + \left[\binom{i}{k-1}a^{i+k-1} \smile a^2\right] \\ &= \left[\binom{i}{k} + \binom{i}{k-1}\right] a^{i+k+1} \\ &= \binom{i+1}{k}a^{(i+1)+k} \end{aligned}$$

Deste modo, $Sq^k(a^i) = \binom{i}{k}a^{i+k}$ para quaisquer $i, k \geq 0$. Por fim, mostremos que $v_k(\mathbb{R}P^n) = \binom{n-k}{k}a^k$ para todo $0 \leq k \leq n$. Para tanto, basta verificar que:

$$< \binom{n-k}{k} a^k \smile x, [\mathbb{R}P^n] > = < Sq^k(x), [\mathbb{R}P^n] >, \ \forall x \in H^{n-k}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$$

Como $H^{n-k}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = (a^{n-k}) = \{0, a^{n-k}\}$, então basta verificar a igualdade acima para $x = a^{n-k}$, pois para $x = 0$ o resultado é imediato. Assim:

$$\begin{aligned} < \binom{n-k}{k}a^k \smile a^{n-k}, [\mathbb{R}P^n] > &= < \binom{n-k}{k}a^n > \\ &= < Sq^k(a^{n-k}), [\mathbb{R}P^n] > \end{aligned}$$

Portanto, $v(\mathbb{R}P^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} a^k$.

□

Lema A.7. *Dadas duas variedades fechadas e conexas M^m e N^n, então $v(M \times N) = v(M) \times v(N)$.*

Demonstração.

Inicialmente, denotemos a $k-$ésima classe de Wu da classe total $v(M) \times v(N)$ por:

$$[v(M) \times v(N)]_k = \sum_{i+j=k} [v_i(M) \times v_j(N)]$$

Para que $v_k(M \times N) = [v(M) \times v(N)]_k$, basta mostrar a seguinte relação:

$$< [v(M) \times v(N)]_k \smile z, [M \times N] >=< Sq^k(z), [M \times N] >, \ \forall z \in H^{m+n-k}(M \times N; \mathbb{Z}_2)$$

Por outro lado, a fórmula de Künneth garante que:

$$H^{m+n-k}(M \times N; \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{r+s=k} \left[H^{m-r}(M; \mathbb{Z}_2) \otimes H^{n-s}(N; \mathbb{Z}_2)\right]$$

Deste modo, é suficiente mostrar a igualdade anterior para um gerador arbitrário $z = x \times y \in H^{m+n-k}(M \times N; \mathbb{Z}_2)$, em que $x \in H^{m-r}(M; \mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^{n-s}(N; \mathbb{Z}_2)$, com $r + s = k$. Assim:

$$\begin{aligned}
&< [v(M) \times v(N)]_k \smile z, [M \times N] > \ = \\
&= \ < \left(\sum_{i+j=k} v_i(M) \times v_j(N)\right) \smile (x \times y), [M \times N] > \\
&= \ < \sum_{i+j=k} \left[(v_i(M) \smile x) \times (v_j(N) \smile y)\right], [M \times N] >
\end{aligned}$$

Note que, ao considerarmos $i + j = k = r + s$, com $i > r$ ou $j > s$, concluiremos que $v_i(M) \smile x \in H^{m-r+i}(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ ou $v_j(N) \smile y \in H^{n-s+j}(N; \mathbb{Z}_2) = 0$, e assim:

$$\begin{aligned}
&< [v(M) \smile v(N)]_k \smile z, [M \times N] > \ = \\
&= \ < \sum_{i+j=k} [(v_i(M) \smile x) \times (v_j(N) \smile y)], [M \times N] > \\
&= \ < (v_r(M) \smile x) \times (v_s(N) \smile y), [M \times N] > \\
&= \ < (v_r(M) \smile x) \times (v_s(N) \smile y), [M] \times [N] > \\
&= \ < v_r(M) \smile x, [M] >< v_s(N) \smile y, [N] > \\
&= \ < Sq^r(x), [M] >< Sq^s(y), [N] > \\
&= \ < Sq^r(x) \times Sq^s(y), [M] \times [N] > \\
&= \ < Sq^r(x) \times Sq^s(y), [M \times N] >
\end{aligned}$$

Novamente, se considerarmos $i + j = k = r + s$, com $i > r$ ou $j > s$, obteremos que $Sq^i(x) \in H^{m-r+i}(M; \mathbb{Z}_2) = 0$ ou $Sq^j(y) \in H^{n-s+j}(N; \mathbb{Z}_2) = 0$, e consequentemente:

$$\begin{aligned}
< [v(M) \times v(N)]_k \smile z, [M \times N] > &= \ < Sq^r(x) \times Sq^s(y), [M \times N] > \\
&= \ < \sum_{i+j=k} Sq^i(x) \times Sq^j(y), [M \times N] > \\
&= \ < Sq^k(x \times y), [M \times N] > \\
&= \ < Sq^k(z), [M \times N] >
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $v(M \times N) = v(M) \times v(N)$.

□

Índice Remissivo