

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

THIAGO DAMASCENO SILVA

**INFLUÊNCIA DOS MODELOS DE CARBONIZAÇÃO NA
ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS DE
MADEIRA EM SITUAÇÃO DE INCÊNDIO**

São Carlos - SP
2022

THIAGO DAMASCENO SILVA

**INFLUÊNCIA DOS MODELOS DE CARBONIZAÇÃO NA
ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS DE
MADEIRA EM SITUAÇÃO DE INCÊNDIO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Geotecnia

Orientador: Prof. Dr. André Luis Christoforo

São Carlos - SP
2022

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, Margareth Nascimento Damasceno, por proporcionar e incentivar a continuação de meus estudos, pelo imenso apoio e pelo grande exemplo de pessoa e mãe. Também dedico ao meu irmão e grande amigo, Écio Edmundo da Silva Júnior, por sempre acreditar em mim e apoiar-me em todas as situações.

AGRADECIMENTOS

À minha família, minha eterna gratidão.

Ao Prof. Dr. André Luis Christoforo, por sua valiosa orientação e enorme apoio, que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, assim como por sua inestimável amizade, profunda dedicação, amplo entusiasmo na condução do trabalho diário e preciosos ensinamentos partilhados.

Ao Prof. Dr. Francisco Antonio Rocco Lahr, pelo grande exemplo e múltiplos ensinamentos, além das palavras de incentivo e apoio constante aos trabalhos relacionados a madeiras e estruturas de madeira.

Aos professores Dr. Julio Cesar Molina e Dr. Tulio Hallak Panzera, pela atenção, apoio frequente e valiosas contribuições em diferentes etapas deste trabalho.

Aos professores Dr. Wanderlei Malaquias Pereira Junior e Dr. Luiz Antonio Melgaço Nunes Branco, pelos importantes comentários e sugestões durante a defesa.

Aos amigos dos cursos de pós-graduação, em especial ao Tarniê Nunes e à Julia Naves, pelo companheirismo e apoio durante o curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo fornecimento de bolsa de doutorado durante parte desta pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos (PPGECiv-UFSCar), por possibilitar o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

SILVA, T. D. **Influência dos modelos de carbonização na análise não linear geométrica de treliças de madeira em situação de incêndio**. 2022. 121f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2022.

Neste trabalho desenvolveu-se um estudo numérico sobre a análise não linear geométrica de treliças planas de madeira em situação de incêndio, a partir de uma formulação posicional do método dos elementos finitos. A situação de incêndio foi considerada conforme a redução das dimensões da seção transversal dos elementos de madeira, devido à exposição ao fogo e consequente carbonização das camadas externas das barras, por meio do método da seção transversal reduzida. Os modelos normativos referentes ao projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190, à norma europeia EN 1995-1-2 e à norma australiana AS 1720.4 foram adotados nas análises em situação de incêndio. Três sistemas treliçados foram propostos para estudo, e cinco madeiras folhosas e duas coníferas foram consideradas. As taxas de carbonização das madeiras foram definidas de acordo com valores experimentais mencionados na literatura para os modelos associados ao projeto de revisão da norma brasileira, enquanto nos modelos baseados nas normas europeia e australiana foram adotados valores de taxa indicados pelos próprios códigos normativos. Para a análise não linear geométrica, a formulação do elemento finito foi realizada a partir da minimização da energia potencial total, cujo sistema de equações não lineares em relação às posições nodais da estrutura foi resolvido segundo o método de Newton-Raphson. Para estimativa de forças crítica de instabilidade dos sistemas treliçados, um procedimento denominado processo iterativo da força crítica aparente foi proposto para reduzir a quantidade de iterações necessárias para convergência. Códigos computacionais foram desenvolvidos em linguagem MATLAB para possibilitar o processamento das análises, assim como a geração de diversas representações dos modelos estruturais e diagramas. Com relação aos resultados obtidos para um tempo máximo de exposição ao fogo de 20 minutos, verificou-se que a análise não linear geométrica foi pertinente, tendo possibilitado valores de tensões normais, esforços internos e deslocamentos mais precisos que uma simples análise linear geométrica. Além disso, em alguns casos, os resultados referentes à situação de incêndio de modelos analisados conforme as especificações do projeto de revisão da norma brasileira apresentaram pouca variação em relação à norma australiana, enquanto os parâmetros alcançados segundo as prescrições da norma europeia foram menos conservadores em geral. Já o processo iterativo da força crítica aparente, quando comparado a um procedimento convencional, promoveu uma redução superior a 80% na quantidade de iterações e tempo necessário para convergência da força crítica de instabilidade dos sistemas treliçados.

Palavras-chave: Treliças de madeira, incêndio, análise não linear geométrica, método dos elementos finitos posicional, processo iterativo da força crítica aparente.

ABSTRACT

SILVA, T. D. **Influence of carbonization models on nonlinear geometric analysis of timber trusses in fire situation.** 2022. 121f. Thesis (Ph.D. in Civil Engineering) – Federal University of São Carlos. São Carlos, 2022.

In this work, a numerical study about the geometric nonlinear analysis of plane timber trusses in fire situations was carried out. The analysis was based on a positional formulation of the finite element method. The effects of fire exposure were considered by the carbonization and loss of the timber element's cross section according to the effective section method. The normative guidelines about carbonization models from the revision project of the Brazilian Standard ABNT NBR 7190, the European Standard EN 1995-1-2, and the Australian Standard AS 1720.4 were adopted in the analysis. Three truss systems were proposed for study, and five hardwoods and two softwoods were considered. In the models associated with the revision project of the Brazilian Standard, the charring rates of timber were defined according to experimental values from literature, while the charring rate values suggested by the normative guidelines were adopted in the models from European and Australian Standards. For the geometric nonlinear analysis, the finite element formulation was performed from the total potential energy minimization, whose nonlinear equations system was related to the nodal positions of the structure and solved by the Newton-Raphson method. The critical instability loads of truss systems were estimated by a procedure called iterative process of apparent critical load, which was proposed to reduce the number of iterations necessary for convergence. Computational codes were developed in the MATLAB language to process the analyses and the graphic design, as structural models and diagrams. Regarding the results obtained for a maximum time of fire exposure of 20 minutes, the geometric nonlinear analysis allowed more precise values than a simple geometric linear analysis for normal stresses, internal forces and displacements. In some cases, the results referring to the fire exposed models analyzed from the revision project of the Brazilian standard guidelines exhibited little variation relating to the Australian standard, while the final parameters obtained from the European standard procedures were less conservative in general. The iterative process of apparent critical load, when compared to a conventional procedure, promoted iterations and time reductions greater than 80% for convergence of the truss critical instability load.

Keywords: Timber truss, fire exposure, geometric nonlinear analysis, positional finite element method, iterative process of apparent critical load.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Representação do processo de carbonização de uma amostra de madeira	14
Figura 2.1 – Curvas de incêndio-padrão	22
Figura 3.1 – Elemento finito de treliça plana	34
Figura 3.2 – Representação dos estados de equilíbrio de um sólido.....	40
Figura 3.3 – Seção transversal de um elemento de madeira sujeito a incêndio	41
Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo.....	47
Figura 4.3 – Laços de repetição das variáveis i e j em linguagem MATLAB.....	51
Figura 4.4 – Torre treliçada.....	52
Figura 4.5 – Localização e numeração dos nós da torre treliçada.....	53
Figura 4.6 – Arco treliçado	54
Figura 4.7 – Localização e numeração dos nós do arco treliçado	55
Figura 4.8 – Pórtico treliçado	57
Figura 4.9 – Localização e numeração dos nós do pórtico treliçado	58
Figura 5.1 – Deslocamento nodal máximo da treliça torre	61
Figura 5.2 – Variação do deslocamento máximo da treliça torre.....	63
Figura 5.3 – Tensões normais nas barras da treliça torre durante o tempo crítico.....	64
Figura 5.4 – Tensão normal na barra mais solicitada da treliça torre	66
Figura 5.5 – Variação da tensão normal na barra mais solicitada da treliça torre.....	67
Figura 5.6 – Força de compressão na barra mais solicitada da treliça torre	69
Figura 5.7 – Variação da força interna na barra mais solicitada da treliça torre.....	70
Figura 5.9 – Força crítica de instabilidade da treliça torre.....	72
Figura 5.10 – Variação da força crítica de instabilidade da treliça torre	73
Figura 5.11 – Deslocamento máximo do arco treliçado.....	76
Figura 5.12 – Variação do deslocamento máximo do arco treliçado	77
Figura 5.13 – Deslocamento máximo do arco treliçado no instante $t = 20$ min.....	78

Figura 5.14 – Tensões nas barras do arco treliçado em instante crítico	79
Figura 5.15 – Tensão normal na barra mais solicitada do arco treliçado	84
Figura 5.16 – Variação da tensão normal na barra mais solicitada do arco treliçado	85
Figura 5.17 – Força de compressão na barra mais solicitada do arco treliçado	86
Figura 5.18 – Variação da força interna na barra mais solicitada do arco treliçado	87
Figura 5.19 – Configurações iniciais e deformadas do arco treliçado	88
Figura 5.20 – Força crítica de instabilidade do arco treliçado	89
Figura 5.21 – Variação da força crítica de instabilidade do arco treliçado	90
Figura 5.22 – Forças críticas de instabilidade do arco treliçado quando $t = 20$ min.....	91
Figura 5.23 – Deslocamento máximo do pórtico treliçado	93
Figura 5.24 – Variação do deslocamento máximo do pórtico treliçado.....	94
Figura 5.25 – Deslocamento máximo do pórtico treliçado quando $t = 20$ min.....	95
Figura 5.26 – Tensões nas barras do pórtico treliçado em instante crítico	97
Figura 5.27 – Tensão normal na barra mais solicitada do pórtico treliçado	100
Figura 5.28 – Variação da tensão normal na barra mais solicitada do pórtico treliçado	101
Figura 5.29 – Força de compressão na barra mais solicitada do pórtico treliçado	102
Figura 5.30 – Variação da força interna na barra mais solicitada do pórtico treliçado.....	103
Figura 5.31 – Configurações iniciais e deformadas do pórtico treliçado.....	104
Figura 5.32 – Força crítica de instabilidade do pórtico treliçado.....	105
Figura 5.33 – Variação da força crítica de instabilidade do pórtico treliçado	106
Figura 5.34 – Variação da força crítica de instabilidade do pórtico treliçado	107
Figura 5.35 – Comparativos percentuais dos processos utilizados	109

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Elevação padronizada da temperatura segundo a ASTM E-119.....	22
Tabela 2.2 – Valores experimentais da taxa de carbonização de sete espécies de madeira.....	25
Tabela 2.3 – Taxas de carbonização segundo o Eurocode 5.....	26
Tabela 4.1 – Propriedades das espécies de madeira.....	45
Tabela 4.2 – Coordenadas nodais da torre treliçada.....	53
Tabela 4.3 – Coordenadas nodais do arco treliçado.....	55
Tabela 4.4 – Coordenadas nodais do pórtico treliçado.....	58
Tabela 5.1 – Forças externas na treliça torre conforme a espécie de madeira.....	60
Tabela 5.2 – Iterações e tempo para convergência de forças críticas.....	108

LISTA DE SÍMBOLOS

- Π – Energia potencial total
- U – Energia de deformação
- W – Potencial das forças
- L – Comprimento de barra
- L_0 – Comprimento original da barra
- A – Área de seção transversal de barra
- V – Volume de seção transversal de barra
- E – Módulo de elasticidade longitudinal
- σ – Tensão normal
- ε – Deformação axial
- u_t – Energia específica de deformação
- F – Forças externas aplicadas
- F_{int} – Forças internas
- ΔF – Vetor de incremento das forças externas
- Y – Posições nodais
- Y_0 – Posições nodais da configuração inicial
- ΔY – Vetor de correção das posições nodais
- $g(Y)$ – Vetor de resíduos
- $\nabla g(Y)$ – Matriz Hessiana
- u – Teor de umidade da madeira
- f_{c0} – Resistência à compressão paralela às fibras da madeira
- f_{t0} – Resistência à tração paralela às fibras da madeira

- E_0 – Módulo de elasticidade à compressão paralela às fibras da madeira
- ρ_{ap} – Densidade aparente da madeira
- β – Taxa de carbonização da madeira para uma face exposta ao fogo
- β_n – Taxa de carbonização para múltiplas faces expostas ao fogo
- $d_{char,0}$, $e_{char,0}$ – Espessura de carbonização de uma face exposta ao fogo
- $d_{char,n}$ – Espessura de carbonização de múltiplas faces expostas ao fogo
- d_{ef} , e_{ef} – Espessura efetiva de carbonização
- λ – Autovalor
- P_i – Vetor de passos de carga
- P_n – Força crítica aparente

SUMÁRIO

Resumo.....	iv
Abstract	v
Lista de figuras	vi
Lista de tabelas	viii
Lista de símbolos.....	ix
Sumário	xi
1 Introdução.....	13
1.1 Objetivos.....	16
1.2 Justificativas	16
1.3 Síntese da metodologia.....	18
1.4 Organização do texto	20
2 Revisão bibliográfica.....	21
2.1 Experimentação da madeira em situação de incêndio	21
2.2 Especificações normativas sobre estruturas de madeira em situação de incêndio	25
2.2.1 Norma australiana AS 1720.4	26
2.2.2 Norma europeia Eurocode 5	26
2.3 Simulação numérica sobre o comportamento da madeira em situação de incêndio	28
2.4 Método dos Elementos Finitos Posicional	29
2.5 Análise não linear geométrica de estruturas de madeira	30
2.5.1 Estudos numéricos.....	30
2.5.2 Especificações normativas	30
2.6 Conclusão da revisão	31
3 Aspectos fundamentais	32
3.1 Princípios da formulação posicional não linear.....	32
3.2 Elemento finito de treliça plana.....	33
3.3 Instabilidade do sistema treliçado.....	39

3.4 Método da seção transversal reduzida	41
4 Materiais e métodos	43
4.1 Hipóteses adotadas	43
4.2 Procedimentos gerais	44
4.3 Estruturação do modelo numérico	46
4.4 Processo iterativo da força crítica aparente	48
4.5 Tipologias estruturais	52
4.5.1 Treliça torre	52
4.5.2 Arco treliçado	54
4.5.3 Pórtico treliçado	56
5 Resultados e discussão	59
5.1 Resultados numéricos	59
5.1.1 Treliça torre	60
5.1.2 Arco treliçado	74
5.1.2 Pórtico treliçado	92
5.2 Processamento da força crítica de instabilidade	108
5.3 Discussão final.....	110
6 Conclusões e perspectivas futuras	113
6.1 Conclusões.....	113
6.2 Sugestões para trabalhos futuros	114
Referências	116

1 INTRODUÇÃO

A madeira é um dos materiais de construção mais antigos empregados pela humanidade, devido a sua considerável disponibilidade na natureza e relativa simplicidade de manuseio e processamento. Nas últimas décadas, vários avanços relacionados à capacidade de resistência das estruturas de madeira têm sido observados, incluindo a industrialização de peças compostas e reforços estruturais. Essas práticas, associadas à capacidade de resistência natural da madeira, favorecem a fabricação e utilização de elementos esbeltos, que possuem menor consumo de material e amplas possibilidades de aplicações estruturais (ZANGIÁCOMO et al., 2014; CHRISTOFORO et al., 2016; LAHR et al., 2016). Contudo, apesar de possibilitar propriedades favoráveis quando utilizada como material estrutural, como sua excelente relação resistência por peso, a madeira é um material combustível e degradável termicamente.

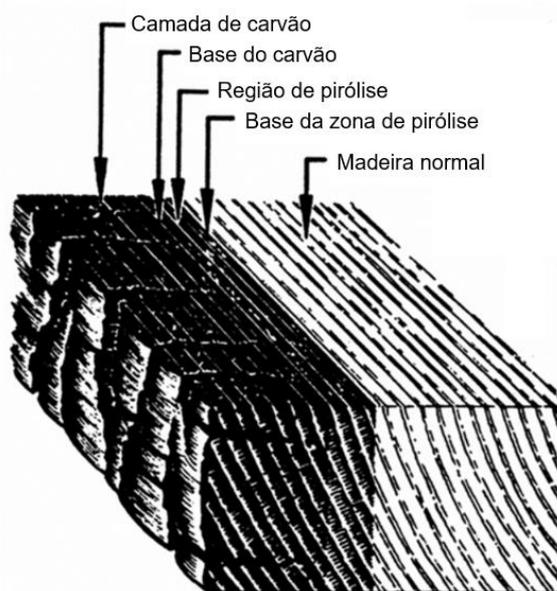
Em situação de incêndio, o comportamento da madeira difere-se daquele apresentado por outros materiais, como aço ou concreto. No caso do aço, conforme o aumento da temperatura e a ação do fogo, há redução da resistência mecânica e podem ocorrer elevadas distorções dos perfis. Nas estruturas de concreto armado, verifica-se redução tanto da resistência do concreto quanto do aço de armadura, existindo ainda a possibilidade do fenômeno de lascamento explosivo (*spalling*) afetar o concreto. Já na madeira, não ocorrem elevadas distorções em altas temperaturas como no aço, ou o *spalling* que se desenvolve no concreto. Apesar da combustibilidade das camadas da madeira expostas ao fogo, que são transformadas em carvão vegetal conforme a evolução do processo de combustão, a alteração das propriedades mecânicas no interior da estrutura é lenta, pois o carvão possui menor condutividade térmica que a madeira e o ar. Conseqüentemente, apesar da redução das dimensões geométricas pela formação do carvão vegetal nas camadas diretamente afetadas pelo fogo, a madeira pode reter parcela significativa da capacidade resistente, dependendo da temperatura e da profundidade de carbonização. Calil et al. (2021) observam que, devido a essa baixa condutividade térmica e lento aquecimento da região central, as peças de madeira podem permanecer em serviço nas condições em que o aço sofreria colapso, mesmo este sendo um material não inflamável.

A evolução das camadas da madeira expostas ao fogo em carvão vegetal, ao longo do tempo, é estimada em função de um parâmetro denominado taxa de carbonização. Esse parâmetro representa a velocidade com que a espessura carbonizada avança para o interior da seção transversal. A taxa de carbonização é obtida empiricamente por meio de ensaios

laboratoriais, por meio da exposição de corpos de prova de madeira a condições controladas de incêndio, adotando-se curvas padronizadas de elevação da temperatura dos gases quentes (MOLINA et al., 2012). Atualmente, as curvas de incêndio-padrão mais adotadas em ensaios experimentais são propostas pela ISO 834 e pela ASTM E-119, cujas diretrizes orientam a programação do aquecimento dos fornos para a realização dos experimentos (NARQUES et al., 2021).

Devido à complexidade dos vários fenômenos envolvidos na degradação térmica da madeira (Figura 1.1), a temperatura de carbonização do material tende a variar entre 288 °C e 360 °C (FIGUEROA; MORAES, 2009). A fim de padronizar a temperatura de carbonização da madeira, algumas normas técnicas adotam valores específicos, como o Eurocode 5, que sugere a temperatura de 300 °C. Esses valores experimentais ou normativos da temperatura são utilizados como referência na determinação das taxas de carbonização da madeira.

Figura 1.1 – Representação do processo de carbonização de uma amostra de madeira



Fonte: Adaptado de Forest Products Laboratory (2010)

A taxa de carbonização varia em função da espécie da madeira e de suas propriedades. Schaffer (1967) concluiu que a densidade aparente e o teor de umidade são os dois principais fatores que influenciam a taxa de carbonização da madeira, embora também seja observável a influência, em menor grau, de propriedades como permeabilidade, condutividade térmica, orientação da grã, espessura do corpo de prova, além de outras características inerentes à própria espécie da madeira, sua anatomia e composição química (FRIQUIN, 2011; BARTLETT et al. 2019).

Os valores de taxa de carbonização são empregados no método da seção transversal reduzida. Este método é utilizado para análise e dimensionamento de estruturas de madeira em situação de incêndio, sendo previstas reduções na seção transversal dos elementos estruturais sem proteção, conforme a transformação de camadas expostas ao fogo em carvão vegetal (SCHIMID et al., 2015). A evolução da carbonização da madeira é estimada de acordo com o parâmetro de taxa de carbonização e o tempo de exposição ao fogo. Nessa condição, a redução das dimensões da seção transversal dos elementos pode amplificar os deslocamentos da estrutura, sendo justificável o emprego de análise não linear geométrica para determinação dos esforços internos.

Na análise não linear geométrica, parâmetros como esforços internos, tensões, deslocamentos e deformações são determinados considerando a configuração deformada da estrutura (CRISFIELD, 1990). A aplicação dessa análise é indispensável quando os deslocamentos afetam a estabilidade e os esforços internos da estrutura. Diversos métodos voltados à análise não linear geométrica de estruturas foram desenvolvidos nas últimas décadas. Em tal contexto, é possível destacar formulações corrotacionais e abordagens baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF), como o Método dos Elementos Finitos Posicional proposto por Coda (2003). Este método permite analisar estruturas em regime não linear geométrico com descrição Lagrangiana total e cinemática exata, sendo uma alternativa às formulações corrotacionais. No contexto de treliças de madeira, a formulação posicional pode ser adaptada para análise não linear geométrica, como observado por Silva et al. (2020) e Silva et al. (2021a).

Dessa forma, nessa pesquisa propõe-se o desenvolvimento de um estudo numérico sobre análise não linear geométrica de treliças planas de madeira em situação de incêndio, a partir da combinação do método da seção transversal reduzida e do Método dos Elementos Finitos Posicional. A análise não linear geométrica é aplicada a três sistemas treliçados planos de madeira em situação de incêndio, e sete espécies de madeira são consideradas no total, sendo quatro tipicamente empregadas na construção civil brasileira e três originárias da América do Norte. Três modelos normativos são adotados para aplicação do método da seção transversal reduzida, e parâmetros como deslocamentos, tensões normais, esforços internos e forças críticas de instabilidade são determinados para um tempo máximo de 20 minutos de exposição ao fogo. Um processo alternativo é proposto para estimativa das forças críticas de instabilidade das treliças, denominado processo iterativo da força crítica aparente. A implementação computacional é realizada por meio de códigos em linguagem e ambiente

MATLAB, que proporcionam a automatização das análises, assim como a geração de representações dos modelos estruturais e diagramas.

1.1 Objetivos

O objetivo geral desse trabalho consiste no estudo numérico sobre a análise não linear geométrica de treliças planas de madeira em situação de incêndio, aplicando-se o método da seção transversal reduzida e o Método dos Elementos Finitos Posicional, para três tipologias estruturais e sete espécies de madeira. Associados ao objetivo geral do trabalho, é possível destacar os seguintes objetivos específicos:

- (i) Avaliar a influência das espécies de madeira e das tipologias adotadas;
- (ii) Identificar a influência das premissas e dos métodos de cálculo normativos;
- (iii) Verificar a eficácia do processo proposto para estimativa das forças críticas de instabilidade dos sistemas treliçados;
- (iv) Programar códigos computacionais em linguagem MATLAB para automatização das análises e produção de representações gráficas das estruturas.

1.2 Justificativas

Parte do preconceito relacionado ao uso da madeira com fins estruturais, no Brasil, é relacionado à combustibilidade do material, segundo Figueroa e Moraes (2009). Tal observação, aliada ao fato de que programas nacionais de financiamento habitacional geralmente não possibilitam crédito voltado para construções em madeira, contribui para que o material ainda seja pouco explorado no país.

As peças estruturais de madeira normalmente podem apresentar maior capacidade resistente na exposição ao fogo que estruturas de outros materiais, devido à baixa condutividade térmica da madeira e da carbonização que ocorre durante o processo. Apesar disso, a capacidade resistente da estrutura é deteriorada com o aumento da temperatura, pois a madeira é afetada por degradação térmica (pirólise), mais notavelmente a partir de 200 °C (CARRASCO et al., 2016). A pirólise provoca mudanças nas propriedades do material, uma vez que os compostos orgânicos são transformados em carvão vegetal no processo. Devido à carbonização, há redução na capacidade resistente da estrutura, pois a resistência proporcionada pelo carvão é considerada desprezível. Apesar de ter um efeito negativo no comportamento da estrutura ao reduzir a seção resistente da peça, a carbonização apresenta um aspecto positivo, pois a condutividade térmica do carvão é menor que a da madeira e

contribui para que o aquecimento do interior do elemento seja lento, tendo comportamento semelhante ao de um isolante térmico (PRIES; MAI, 2018).

Pinto et al. (2016) notaram que estudos sobre a análise de estruturas de madeira em situação de incêndio são escassos no Brasil, havendo poucos trabalhos publicados nesse contexto, de natureza numérica ou experimental. Além disso, na atual norma brasileira de projeto de estruturas de madeira, ABNT NBR 7190:1997, não são indicadas diretrizes para o dimensionamento ou previsão do comportamento de elementos estruturais de madeira em situações de incêndio. Contudo, no projeto de revisão ABNT NBR 7190:2013 é proposto um método simplificado de dimensionamento, baseado na norma europeia EN 1995-1-2:2004 (Eurocode 5). Esse método simplificado considera a redução da seção transversal em virtude da carbonização do material, e assim como a norma europeia, a proposta de revisão da norma brasileira apresenta valores genéricos para taxa de carbonização da madeira conforme sua classificação e tipo de utilização, como peças de madeira serrada, madeira laminada colada (MLC), madeira microlaminada (LVL) e painéis.

Com a redução da seção dos elementos de madeira devido à carbonização, o esforço mecânico que pode ser resistido pela estrutura diminui. Consequentemente, a redução das dimensões da seção transversal torna a estrutura mais flexível, podendo ser necessário o emprego de análise não linear geométrica para determinação dos esforços internos e, a partir disso, verificar a capacidade resistente residual. De tal modo, é imprescindível que a redução da capacidade resistente e os procedimentos de uma análise não linear geométrica sejam previstos no projeto de estruturas de madeira que eventualmente possam ser afetadas por incêndios, e na avaliação de peças de madeira existentes e que foram carbonizadas em serviço.

Dessa forma, o estudo numérico proposto nessa pesquisa possui perspectiva inovadora, uma vez que tem por objetivo a análise não linear geométrica de sistemas treliçados de madeira após consideração da redução da seção transversal dos elementos, devido à carbonização por exposição ao fogo. Além disso, ampliar a discussão sobre o tema é importante no contexto atual, uma vez que os avanços tecnológicos e computacionais dos últimos anos possibilitaram um acesso maior a procedimentos de análise não linear geométrica por projetistas e pesquisadores.

É imperativo ressaltar, ainda, a relevância que a madeira apresenta como material sustentável. Considerando os materiais com função estrutural empregados em larga na construção civil, a madeira é o único cuja origem é completamente renovável. A emissão de gases nocivos durante o processamento e transporte da madeira é muito inferior que a gerada

na produção de outros materiais como aço e concreto, sendo a madeira um material muito mais leve que esses dois materiais, o que também favorece a execução de fundações mais econômicas. Portanto, compreender o comportamento da madeira, seja em situação de temperatura ambiente ou quando exposta ao fogo, é fundamental para que o dimensionamento estrutural seja preciso, seguro e duradouro.

1.3 Síntese da metodologia

Uma formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, baseada nos trabalhos de Coda (2003), Coda e Greco (2004) e Greco et al. (2006), foi adotada na análise não linear geométrica de treliças planas de madeira em situação de incêndio. Essencialmente, a formulação consistiu na minimização do funcional de energia potencial total do sistema. A formulação foi classificada como Lagrangiana total, visto que empregou a configuração inicial dos elementos como referência. Ao invés de deslocamentos, os parâmetros nodais dos elementos finitos foram definidos como as próprias coordenadas cartesianas dos nós. A solução do sistema não linear de equações foi alcançada pelo método iterativo de Newton-Raphson.

A análise não linear geométrica foi empregada paralelamente à aplicação do método da seção transversal reduzida, que prevê a redução da seção resistente das barras de madeira conforme o tempo de exposição ao fogo. A carbonização da seção transversal foi estimada de acordo com modelos de taxas de carbonização das madeiras, obtidos na literatura para cada espécie prevista. A aplicação das taxas de carbonização resultou na determinação de profundidades de carbonização em função do tempo de exposição ao fogo, para cada modelo analisado.

Ao todo foram considerados três modelos estruturais de treliças planas e sete espécies de madeira. As espécies adotadas foram: *Corymbia citriodora*, *Eucalyptus grandis*, *Lyptus*, *Pinus*, *Douglas-fir*, *Southern pine* e *White oak*. Essas espécies possuem modelos de taxa de carbonização conhecidos, que foram obtidos por estudos experimentais e, posteriormente, propostos na literatura. Cabe destacar que as espécies *Douglas-fir*, *Southern pine* e *White oak* são naturais da América do Norte, e embora sua utilização não seja frequente em território nacional, estudos envolvendo a investigação de suas propriedades já foram desenvolvidos no Brasil (TEIXEIRA, 2016). Não foi considerada a aplicação de tratamentos preservantes ou retardantes de chamas nas madeiras.

Quanto aos modelos estruturais (tipologias), foram propostas uma torre treliçada com extensão de 16 m, um arco treliçado com vão de 30 m e um pórtico treliçado com altura total

de 15 m. Dessa forma, vinte e uma treliças independentes foram previstas, considerando as três tipologias e sete espécies de madeira.

Para efeito de comparação, os parâmetros das treliças foram calculados conforme análise linear e não linear geométrica, em condição de temperatura ambiente e em situação de incêndio. Para consideração do incêndio por meio do método da seção transversal reduzida, três procedimentos normativos foram empregados, os quais foram propostos pelo projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190, pela norma europeia Eurocode 5 e pela norma australiana AS 1720.4. No primeiro caso, referente ao projeto de revisão da norma brasileira, os modelos de taxa de carbonização foram adotados com base em estudos experimentais. Já em relação aos procedimentos das normas europeia e australiana, os modelos de taxa de carbonização foram empregados segundo os valores propostos pelos próprios códigos, a fim de comparar possíveis diferenças provocadas por modelos experimentais e modelos normativos generalizados. Um tempo máximo de 20 minutos de exposição ao fogo foi adotado, sendo também aferida a variação dos parâmetros a cada minuto. Esse tempo limite foi fixado devido às possíveis diferenças observadas nos critérios normativos, uma vez que alguns modelos consideram a hipótese de aquecimento reduzido da madeira nos primeiros minutos de exposição ao fogo.

Outra preocupação foi investigar as possíveis forças críticas de instabilidade das treliças, tendo em vista a redução de propriedades da seção transversal das barras devido à ação do incêndio. Um processo iterativo foi idealizado e aplicado com o objetivo de agilizar a determinação dessas forças críticas, o qual foi denominado *processo iterativo da força crítica aparente*. Esse processo consistiu em uma estratégia voltada para determinação da força externa aplicada na treliça, por meio da avaliação de autovalores nulos ou negativos da matriz Hessiana da energia potencial total da estrutura, no contexto de uma análise não linear geométrica. Com esse procedimento, buscou-se diminuir a quantidade de iterações para convergência do valor da força crítica de instabilidade, visto que essa determinação foi necessária para cada uma das simulações desenvolvidas.

Códigos computacionais foram programados para possibilitar as análises propostas, com processamento realizado em ambiente MATLAB. Além de efetuar automaticamente o cálculo de diversos parâmetros envolvidos nas análises, a programação de sub-rotinas também possibilitou a geração de figuras durante o pós-processamento, incluindo o desenho de configurações iniciais e deformadas da estrutura, diagrama de forças internas, gráficos força-deslocamento e outras representações gráficas.

1.4 Organização do texto

No primeiro capítulo foi apresentada a introdução geral do trabalho, seus objetivos, justificativas, síntese da metodologia e organização do conteúdo.

A revisão da literatura é indicada no segundo capítulo, com a abordagem de perspectivas sobre os trabalhos consultados, que envolvem experimentação da madeira em situação de incêndio, simulação numérica sobre o comportamento da madeira também em situação de incêndio, Método dos Elementos Finitos Posicional e análise não linear geométrica de estruturas de madeira. Prescrições normativas também são verificadas nesse capítulo.

Aspectos fundamentais sobre os princípios da formulação posicional, assim como a formulação do elemento finito não linear, instabilidade dos sistemas treliçados, método da seção transversal reduzida e propriedades da madeira são considerados no terceiro capítulo.

A seção de materiais e métodos é apresentada no quarto capítulo, que inclui as hipóteses básicas adotadas, a estruturação da análise numérica e o fluxograma dos processos realizados. Noções sobre o processo iterativo da força crítica aparente também são apontadas.

Os resultados proporcionados pelo estudo numérico são indicados no quinto capítulo, assim como as discussões. A verificação da eficácia do processo iterativo da força crítica aparente é também exposta no quinto capítulo.

As principais conclusões do trabalho são abordadas no sexto capítulo, assim como possíveis sugestões para estudos futuros.

Por fim, as referências consultadas são apresentadas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresenta-se a revisão da literatura sobre o comportamento da madeira e de estruturas de madeira em situação de incêndio, bem como o método dos elementos finitos posicional e a análise não linear geométrica. Foram consultadas publicações que contribuem efetivamente para o trabalho realizado, em bases de dados como *Web of Science*, *Engineering Village* e *Portal Capes*. É importante ressaltar que, no cenário nacional, muitos trabalhos foram desenvolvidos na Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) da Universidade de São Paulo (USP), cujos textos são disponibilizados para consulta pública na biblioteca digital da instituição. Normas técnicas sobre o dimensionamento de estruturas de madeira e suas prescrições sobre o comportamento dessas estruturas em situação de incêndio também foram verificadas.

2.1 Experimentação da madeira em situação de incêndio

Diversos estudos relacionados ao comportamento de estruturas de madeira em situação de incêndio são voltados à determinação de taxas e profundidades de carbonização, uma vez que, após a exposição ao fogo, somente a seção remanescente não carbonizada dos elementos de madeira apresenta capacidade resistente (NI; QIU, 2012; JIANG; GAO, 2015).

De acordo com Moreno Júnior e Molina (2012), a padronização da elevação da temperatura conforme o tempo é necessária para a realização de ensaios experimentais. De tal modo, a elevação da temperatura provocada em incêndios pode ser representada, simplificada, por curvas de incêndio-padrão. Essas curvas são adotadas durante o aquecimento dos fornos e normalmente são propostas por normas técnicas, como ISO 834 e ASTM E-119.

Segundo as recomendações da ISO 834-1:1999, a elevação da temperatura em função do tempo é obtida de acordo com a Equação 2.1. Nessa expressão, o tempo de exposição é indicado por t (em minutos), enquanto a temperatura inicial do ambiente antes do início do aquecimento é representada por Θ_0 (em graus Celsius) e a temperatura dos gases, no instante t , é fornecida por Θ (em graus Celsius).

$$\Theta - \Theta_0 = 345 \cdot \log(8 \cdot t + 1) \quad (2.1)$$

No Brasil, a norma técnica ABNT NBR 14432:2001, que aborda as exigências de resistência ao fogo dos elementos estruturais em situação de incêndio, aponta a mesma

expressão que a norma ISO 834 (Equação 2.1) para considerar a elevação padronizada da temperatura em função do tempo.

Os valores tabelados e propostos pela norma norte-americana ASTM E-119:2010, para a elevação padronizada da temperatura conforme o tempo, são apresentados na Tabela 2.1, considerando o tempo de exposição entre 0 e 60 minutos. Observa-se que a temperatura ambiente inicial ($t = 0$) é adotada com o valor de 20 °C.

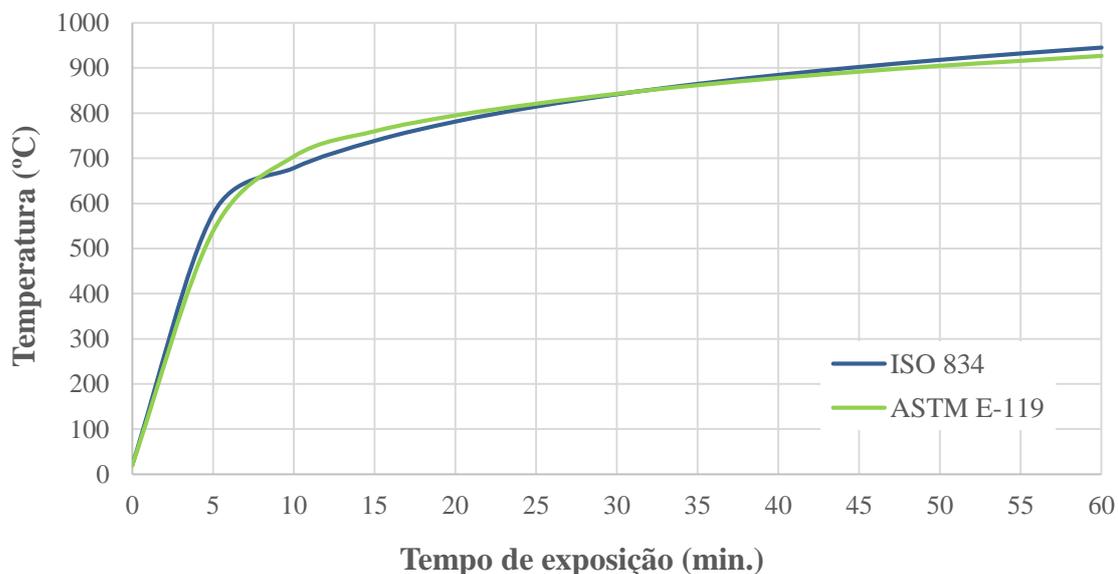
Tabela 2.1 – Elevação padronizada da temperatura segundo a ASTM E-119

Tempo (minutos)	Temperatura (°C)
0	20
5	538
10	704
15	760
20	795
25	821
30	843
35	862
40	878
45	892
50	905
55	916
60	927

Fonte: Adaptado de ASTM E-119

Com base nos dados normativos, é possível elaborar o gráfico da Figura 2.1 para ilustrar as curvas de incêndio-padrão. Nota-se que a curva referente à norma ASTM E-119 é levemente diferente da proposta pela ISO 834.

Figura 2.1 – Curvas de incêndio-padrão



Fonte: Autor (2022)

Com relação à proposição de modelos para estimativa de taxas de carbonização da madeira, destacam-se os trabalhos de Schaffer (1967) e White (1988), que conduziram ensaios de espécies norte-americanas. Em tais ensaios, curvas de incêndio-padrão foram adotadas para simular o efeito do incêndio.

Schaffer (1967) realizou ensaios experimentais para determinação de taxas de carbonização de três espécies de madeira, tendo observado a influência das propriedades da madeira no parâmetro de taxa de carbonização. A curva de incêndio-padrão da ASTM E-119 foi adotada na operação dos ensaios. O autor concluiu que a densidade aparente da madeira e o teor de umidade inicial são as propriedades que mais influenciam a taxa de carbonização do material, e, por meio de regressão linear, alcançou modelos para estimativa das taxas referentes às espécies *Douglas fir*, *Southern pine* e *White oak*, com expressões representadas nas Equações 2.2, 2.3 e 2.4, respectivamente. Nessas expressões, β é a taxa de carbonização (em mm/min), u é o teor de umidade e ρ é a densidade aparente da madeira (em kg/m³). Os três modelos são lineares, pois a taxa de carbonização é considerada constante ao longo do tempo.

$$\beta = 1 / [(0,002269 + 0,00457 \cdot u) \cdot \rho + 0,331] \quad (2.2)$$

$$\beta = 1 / [(0,000461 + 0,00095 \cdot u) \cdot \rho + 1,016] \quad (2.3)$$

$$\beta = 1 / [(0,001583 + 0,00318 \cdot u) \cdot \rho + 0,594] \quad (2.4)$$

White (1988) propôs um modelo não linear para determinação da taxa de carbonização após os ensaios de oito espécies de madeira, realizados conforme a curva de incêndio-padrão da ASTM E-119. Conforme indicado pelo autor, o tempo de exposição ao fogo (t) é representado pela Equação 2.5, sendo m o coeficiente da taxa de carbonização (em min/mm^{1,23}) e x a espessura da camada carbonizada (em mm).

$$t = m \cdot x^{1,23} \quad (2.5)$$

Segundo análises de regressão do modelo de White (1988), a Equação 2.6 relaciona o coeficiente m às propriedades da madeira (MARTINS, 2016). Nessa equação, DR é a densidade relativa ($DR = \rho_{espécie} / \rho_{água}$), u é o teor de umidade percentual, c é uma constante que varia conforme a classificação da espécie de madeira ($c = 1$ para coníferas ou $c = -1$ para folhosas) e d é a profundidade de tratamento preservante em mm.

$$m = 0,162 + 0,809 \cdot DR + 0,0107 \cdot u + 0,0689 \cdot c - 0,00655 \cdot DR \cdot d - 0,0024 \cdot c \cdot d \quad (2.6)$$

Modelos de taxa de carbonização obtidos a partir de estudos desenvolvidos no Brasil foram propostos nas teses de doutorado de Pinto (2005) e Martins (2016). Ambas as pesquisas foram desenvolvidas na Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, e utilizaram espécies de madeira tipicamente empregadas na construção civil brasileira. Também foram aplicadas curvas de incêndio-padrão para o desenvolvimento dos testes experimentais.

Pinto (2005) realizou ensaios experimentais envolvendo amostras das espécies *Corymbia citriodora* e *Eucalyptus grandis* em situação de incêndio, e desenvolveu um modelo estatístico para estimativa da taxa de carbonização dessas espécies. A curva de aquecimento da ASTM E-119 foi considerada na condução dos ensaios, e a taxa de carbonização obtida foi similar para ambas as espécies, sendo observado o resultado médio de 0,58 mm/min. De acordo com a autora, esperava-se que a espécie *Corymbia citriodora* alcançasse uma taxa de carbonização menor, mas os valores foram semelhantes devido às similaridades das propriedades mecânicas das duas espécies. Os valores encontrados foram ligeiramente maiores que os propostos em códigos internacionais.

Martins (2016) analisou numericamente e experimentalmente vigas de madeira laminada colada (MLC) das espécies *Lyptus* e *Pinus* em situação de incêndio. Para realização dos ensaios experimentais, os elementos estruturais foram expostos à curva de incêndio-padrão ISO 834. As taxas de carbonização, estimadas experimentalmente, foram iguais a 0,69 mm/min para a madeira *Lyptus* e 0,95 mm/min para a espécie *Pinus*, sendo ambos maiores que os valores recomendados em códigos internacionais. A autora conclui que os valores experimentais investigados em seu trabalho devem ser utilizados no dimensionamento dos elementos estruturais, uma vez que os valores propostos em códigos internacionais podem considerar uma seção resistente maior que a verificada na prática, o que prejudicaria a segurança da estrutura.

Conforme os resultados obtidos por Schaffer (1967), Pinto (2003) e Martins (2016), é possível compilar as taxas de carbonização para sete espécies de madeira: *Douglas-fir*, *Southern pine*, *White oak*, *Corymbia citriodora*, *Eucalyptus grandis*, *Lyptus* e *Pinus*. A listagem desses valores experimentais da taxa de carbonização (β_n) é verificada na Tabela 2.2, considerando-se a exposição ao fogo em múltiplas faces do elemento de madeira. As expressões 2.1, 2.2 e 2.3 foram aplicadas nas estimativas das três primeiras espécies pelo modelo de Schaffer (1967).

Tabela 2.2 – Valores experimentais da taxa de carbonização de sete espécies de madeira

Espécie de madeira	β_n (mm/min)	Referência
<i>Douglas-fir</i>	0,59	Schaffer (1967)
<i>Southern pine</i>	0,74	Schaffer (1967)
<i>White oak</i>	0,52	Schaffer (1967)
<i>Corymbia citriodora</i>	0,58	Pinto (2003)
<i>Eucalyptus grandis</i>	0,58	Pinto (2003)
<i>Lyptus</i>	0,69	Martins (2016)
<i>Pinus</i>	0,95	Martins (2016)

Fonte: Autor (2022)

Com relação à variação das propriedades da madeira nas camadas que não foram carbonizadas durante a exposição ao fogo, segundo Purkiss (2007), existem poucos dados sobre a perda de resistência mecânica da madeira sujeita ao fogo, como é reconhecido que a temperatura do núcleo permanece próxima da temperatura ambiente após a carbonização do elemento. Em geral, os dados existentes sugerem que as perdas de resistência e rigidez do núcleo são baixas em geral (GERHARDS, 1982).

2.2 Especificações normativas sobre estruturas de madeira em situação de incêndio

Com base nos estudos experimentais e modelos para estimativa da taxa de carbonização, especificações técnicas foram concebidas ao longo do tempo e propostas em normas de dimensionamento de estruturas de madeira. Isso permitiu padronizar procedimentos de cálculo da capacidade resistente, considerando o efeito do incêndio e carbonização dos elementos. O método da seção transversal reduzida surgiu nesse contexto (PURKISS, 2007).

Na sequência, são apresentadas especificações normativas baseadas na norma australiana AS 1720.4:2006, na norma europeia EN 1995-1-2:2004 e no projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190:2013. As duas primeiras são reconhecidas internacionalmente e serão abordadas no trabalho para efeito de comparação, enquanto as prescrições do projeto de revisão da norma brasileira ainda não são definitivas, uma vez que as discussões em andamento poderão eventualmente modifica-las até a aprovação da revisão definitiva. Na versão atual da ABNT NBR 7190, de 1997, não há diretrizes específicas voltadas para verificação da segurança estrutural da madeira em situação de incêndio.

2.2.1 Norma australiana AS 1720.4

A norma australiana AS 1720.4:2006 especifica uma expressão geral (Equação 2.7) para determinação da taxa de carbonização da madeira (β) em função de sua densidade aparente (ρ).

$$\beta = 0,4 + \left(\frac{280}{\rho} \right)^2 \quad (2.7)$$

A espessura de carbonização ($d_{char,n}$) é dada pela Equação 2.8, sendo o produto entre a taxa de carbonização e o tempo de exposição ao fogo. A taxa de carbonização é considerada constante ao longo do tempo.

$$d_{char,n} = \beta \cdot t \quad (2.8)$$

A espessura efetiva de carbonização pela norma australiana é calculada, em milímetros, conforme a Equação 2.9. É necessário observar que os 7,5 mm indicados na expressão são relacionados à espessura da região interna aquecida, após a espessura de fato carbonizada, cujas propriedades mecânicas também são desprezadas.

$$d_{ef} = d_{char,n} + 7,5 \quad (2.9)$$

2.2.2 Norma europeia Eurocode 5

Há distinção entre dois parâmetros de taxa de carbonização nas prescrições da norma europeia EM 1995-1-2 (Eurocode 5). O primeiro, representado por β_0 , refere-se à ocorrência de carbonização em apenas uma das faces da peça de madeira. O segundo, indicado por β_n , é utilizado nos casos em que a carbonização ocorre em mais de uma das faces da peça. O valor de β_n considera o efeito do arredondamento dos cantos da seção retangular, como nesta região a queima ocorre com maior velocidade. As taxas de carbonização são indicadas na Tabela 2.3, para madeiras serradas e MLC (madeira laminada colada), de espécies coníferas e folhosas.

Tabela 2.3 – Taxas de carbonização segundo o Eurocode 5

Tipo de madeira	Taxa de carbonização (mm/min)	
	β_0	β_n
Coníferas		
MLC ($\rho \geq 290 \text{ kg/m}^3$)	0,65	0,70
Madeira maciça ($\rho \geq 290 \text{ kg/m}^3$)	0,65	0,80
Folhosas		
MLC ou madeira maciça ($\rho = 290 \text{ kg/m}^3$)	0,65	0,70
MLC ou madeira maciça ($\rho > 450 \text{ kg/m}^3$)	0,50	0,55

Fonte: Adaptado de Purkiss (2007)

Segundo a norma europeia, a espessura de carbonização depende de quantas faces da madeira são expostas ao fogo, sendo definida por $d_{char,0} = \beta_0 \cdot t$ ou $d_{char,n} = \beta_n \cdot t$. A espessura efetiva de carbonização (d_{ef}) é calculada na Equação 2.10, sendo $d_0 = 7$ mm e k_0 um fator que varia conforme o tempo de incêndio. Quando o tempo de exposição é inferior a 20 minutos, o valor de k_0 é menor que um e o efeito de d_0 é reduzido. Assim, pela norma europeia, considera-se que o aquecimento da madeira é lento nos minutos iniciais de incêndio.

$$d_{ef} = d_{char,n} + k_0 \cdot d_0$$

$$t < 20 \text{ minutos} \rightarrow k_0 = t / 20$$

$$t \geq 20 \text{ minutos} \rightarrow k_0 = 1,00$$
(2.10)

2.2.3 Projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190 (2013)

As prescrições sobre o comportamento de estruturas de madeira propostas pelo projeto de revisão da norma brasileira, ABNT NBR 7190:2013, são baseadas essencialmente nas recomendações do Eurocode 5, com exceção da equação utilizada para estimar a espessura efetiva de carbonização (d_{ef}). Para o projeto de revisão de 2013, a expressão utilizada para a determinação de d_{ef} , em milímetros, é representada na Equação 2.11. Nota-se a ausência do parâmetro k_0 nessa equação, e uma espessura inicial de 7 mm é considerada independentemente do tempo de exposição ao fogo.

$$d_{ef} = d_{char,n} + 7,0$$
(2.11)

2.2.4 Considerações finais deste item

Em geral, verifica-se que os valores de taxa de carbonização propostos em normas técnicas variam entre 0,5 e 1,0 mm/min, dependendo da espécie de madeira e de suas propriedades, assim como da finalidade estrutural e da quantidade de faces expostas ao fogo.

Como mencionado, os modelos de taxa de carbonização e de profundidade de carbonização indicados pelas três normas técnicas serão considerados na aplicação do método da seção transversal reduzida, para o cálculo da seção residual dos elementos de madeira. Dessa forma, os dados indicados nesta seção serão empregados na obtenção dos resultados, e uma comparação entre os modelos será desenvolvida.

2.3 Simulação numérica sobre o comportamento da madeira em situação de incêndio

Quanto à simulação numérica envolvendo o comportamento da madeira em situação de incêndio, vários estudos foram realizados com o intuito de estimar as temperaturas na seção transversal de elementos de barra ou painéis, assim como seu possível efeito na alteração das propriedades mecânicas do material. Outros trabalhos aplicaram métodos simplificados para estimativa da capacidade resistente de elementos estruturais de madeira em situação de incêndio.

Schnabl et al. (2011) desenvolveram um modelo matemático voltado para análise do comportamento de pilares de madeira em situação de incêndio, enfatizando a determinação de forças críticas de flambagem. Um estudo paramétrico foi desenvolvido para avaliar a influência do índice de esbeltez, nível de carregamento e teor de umidade nos valores obtidos para a força crítica de flambagem. Os resultados foram similares aos alcançados pelos métodos simplificados do Eurocode 5 para um teor de umidade de 12%.

Molina et al. (2012) realizaram um estudo numérico para avaliar a temperatura de elementos estruturais de madeira *Corymbia citriodora* em situação de incêndio, com seção transversal retangular de dimensões (6 × 16) cm, a partir do programa computacional ANSYS®. A evolução da temperatura da seção transversal foi comparada com resultados experimentais, em profundidades de 10 e 20 mm, sendo constatada boa concordância entre os valores. O aquecimento dos elementos foi considerado de acordo com a curva de incêndio-padrão proposta pela norma ISO 834-1:1999.

Fonseca et al. (2012) efetuaram o cálculo de tensões em uma viga simplesmente apoiada de madeira em situação de incêndio, sujeita a ação uniformemente distribuída. Os autores empregaram duas espécies de madeira, *Fir subalpine* e *Redwood*. A redução da seção transversal retangular das vigas foi considerada devido à carbonização do material. Um tempo de exposição de 60 minutos foi considerado, e a profundidade de carbonização foi determinada pelo Método dos Elementos Finitos por meio do programa ANSYS®. Fórmulas foram propostas para uma verificação simplificada das tensões, que podem auxiliar na avaliação da capacidade resistente de vigas simplesmente apoiadas em situação de incêndio.

Silva et al. (2021b) utilizaram o método da seção transversal reduzida na análise de vigas de madeira em situação de incêndio, verificando a variação de esforços resistentes de momento fletor e força cortante conforme o aumento do tempo de exposição ao fogo. Foram consideradas vigas de madeira serrada e de MLC, com classes de resistência de madeira folhosas variando entre D20 e D60. A viga de madeira serrada, com seção transversal

retangular e dimensões de 6 cm por 16 cm, apresentou capacidade resistente até o tempo de exposição de 40 minutos. Já a viga de MLC, com seção transversal retangular e dimensões de 15 cm por 42 cm, exibiu capacidade resistente até os 120 minutos de exposição ao fogo, aproximadamente.

2.4 Método dos Elementos Finitos Posicional

A formulação posicional do Método dos Elementos Finitos foi proposta originalmente na tese de livre-docência de Coda (2003), para análise não linear geométrica de sólidos e estruturas. Diversos trabalhos seguintes deram continuidade e estenderam as aplicações do MEF posicional, inclusive estudos voltados especialmente a estruturas reticuladas. O Método de Newton-Raphson é amplamente utilizado nos trabalhos que envolvem a formulação posicional do MEF, para resolução do sistema de equações lineares, inclusive nos que serão citados a seguir.

Coda e Greco (2004) aplicaram a formulação posicional do MEF para a análise não linear de pórticos planos, utilizando polinômio de aproximação cúbica. A objetividade da metodologia proposta também foi demonstrada. Os autores analisaram cinco modelos estruturais, cujos resultados alcançados foram comparados aos da literatura e aos proporcionados pelo programa ADINA[®], tendo sido observada precisão em ambos os casos.

Greco et al. (2006) apresentaram a formulação posicional do MEF para análise não linear de treliças especiais. Quatro exemplos disponibilizados na literatura foram analisados para validar a metodologia proposta, assim como simulações no programa ANSYS[®]. Os resultados alcançados foram considerados satisfatórios em relação às simulações efetuadas e à literatura.

Greco e Vicente (2009) apresentaram soluções analíticas para dois modelos de treliça. A formulação foi baseada na cinemática estrutural, no equilíbrio de forças nodais e nas leis constitutivas. As soluções propostas foram comparadas com resultados obtidos a partir da formulação posicional, e os autores concluíram que houve aproximação entre os valores exatos e os obtidos pela análise numérica.

Lacerda (2014) empregou a formulação posicional do MEF para a análise não linear geométrica de treliças, utilizando medidas de deformação de Green, Almansi, logarítmica e convencional de engenharia. Para comprovar a eficácia da formulação utilizada, foram realizadas comparações com outros trabalhos e aplicações numéricas disponibilizadas na literatura.

2.5 Análise não linear geométrica de estruturas de madeira

Em geral, pode-se notar que não há ampla discussão sobre a análise não linear geométrica de estruturas de madeira no Brasil. A escassez de trabalhos voltados especificamente a estruturas de madeira, e a ausência de diretrizes da norma brasileira relacionadas ao assunto, podem ter contribuído para esse cenário. De tal modo, estudos numéricos já desenvolvidos no contexto são apresentados na sequência, bem como observações sobre as especificações normativas nacionais.

2.5.1 Estudos numéricos

Silva et al. (2020) compararam os deslocamentos provocados por ações verticais em uma treliça Howe de madeira com 15 metros de vão, conforme análises do tipo linear e não linear geométrica. Considerando o carregamento atuante e geometria da treliça, os autores verificaram que não houve variação significativa nos deslocamentos determinados segundo as duas análises.

Silva et al. (2021) analisaram dois modelos de treliça a partir dos procedimentos da análise não linear geométrica baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional. Foram adotadas tipologias de torre treliçada e arco treliçado. Comparando-se a uma análise linear geométrica, houve variação nos deslocamentos e forças internas, e a análise não linear geométrica mostrou-se mais adequada para a determinação dos parâmetros.

Silva et al. (2022) empregaram a formulação posicional da análise não linear geométrica para a obtenção das forças críticas de instabilidade de um arco treliçado de madeira com 30 metros de vão e altura total de 6 metros, conforme variação do módulo de elasticidade da madeira. A utilização da formulação posicional foi favorável para a implementação computacional da análise não linear geométrica, e a determinação das forças críticas foi possibilitada por sua aplicação.

2.5.2 Especificações normativas

Como relação às normas de dimensionamento, existem diferentes abordagens envolvendo a consideração de análise não linear geométrica de estruturas de madeira, aço e concreto no Brasil. Por um lado, as normas de dimensionamento de estruturas de aço (ABNT NBR 8800:2008) e de concreto armado e protendido (ABNT NBR 6118:2014) mencionam a necessidade de empregar análise não linear geométrica de acordo com a deslocabilidade da

estrutura. Além disso, nessas normas, são propostos métodos aproximados para prever o comportamento não linear geométrico de estruturas com certos limites de esbeltez, como o método da amplificação dos esforços (no caso das estruturas de aço) e o método γz (no caso das estruturas de concreto).

A norma brasileira de dimensionamento de estruturas de madeiras, ABNT NBR 7190:1997, não faz qualquer menção a possíveis análises fisicamente ou geometricamente não lineares. Dessa forma, o procedimento atual considerado na NBR 7190 prevê que a estrutura trabalhará a pequenos níveis de deslocamento e deformação (em relação à geometria original), o que pode não corresponder ao comportamento real e limitar suas possíveis aplicações.

2.6 Conclusão da revisão

Em geral, as taxas de carbonização de poucas espécies de madeira foram investigadas experimentalmente até o presente. Os trabalhos de Schaffer (1967), Pinto (2005) e Martins (2016) destacam-se nesse contexto. Com relação a códigos normativos, as normas australiana e europeia abordam modelos aproximados e diferentes para a estimativa da taxa de carbonização. Também não há trabalhos destinados à comparação de diferentes modelos de taxa de carbonização, normativos ou experimentais.

Trabalhos que envolvem simulação da madeira em situação de incêndio geralmente avaliam distribuição de temperatura na seção transversal e, na maioria das vezes, empregam programas computacionais com licenças comerciais. No contexto da análise de estruturas de madeira em situação de incêndio, não são encontrados trabalhos que utilizam implementações computacionais com desenvolvimento próprio.

O MEF posicional ainda é pouco utilizado na análise não linear geométrica de estruturas de madeira. Entretanto, no caso das treliças, a aplicação do MEF é plausível, pois as barras de madeira são dispostas longitudinalmente na direção das fibras principais, e o maior módulo de elasticidade do material é verificado em tal direção.

Ao contrário de estruturas de aço ou concreto, não há muitas discussões sobre o emprego de análise não linear geométrica no projeto de estruturas de madeira no Brasil. Esse cenário provavelmente passará por mudanças em breve, conforme as atualizações futuras da norma brasileira ABNT NBR 7190 e evolução de recursos tecnológicos e computacionais providenciados no país.

3 ASPECTOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo são abordadas as principais fundamentações envolvidas no trabalho. A formulação posicional do elemento finito de treliça plana, para análise não linear geométrica, é apresentada inicialmente. Em seguida, conceitos relacionados à instabilidade estrutural dos sistemas treliçados são ressaltados, incluindo abordagens sobre os possíveis estados de equilíbrio e condições críticas. Por fim, são expostas informações sobre o método da seção transversal reduzida, cuja utilização na análise de estruturas de madeira em situação de incêndio é usual e recomendada por diversas normas técnicas.

3.1 Princípios da formulação posicional não linear

A formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, voltada para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas, foi originalmente proposta por Coda (2003). Na cinemática dos elementos, a formulação posicional considera as posições nodais da estrutura em relação a um sistema fixo de coordenadas no plano. Esse critério a diferencia de outras formulações empregadas no contexto da análise não linear geométrica de estruturas, que usualmente adotam os deslocamentos nodais como variáveis principais do sistema.

A formulação posicional é fundamentada essencialmente pelo princípio físico da minimização da energia potencial total (CODA; GRECO, 2004). A energia potencial total (Π) de um corpo em equilíbrio estático é escrita em função da energia de deformação (U) e da energia potencial das forças externas (W), de acordo com a Equação 3.1.

$$\Pi = U - W \quad (3.1)$$

A energia de deformação é obtida em função do volume da barra (V), conforme Equação 3.2. Nessa expressão, a tensão normal é representada por σ , enquanto a deformação convencional de engenharia é indicada por ε . A lei de Hooke ($\sigma = E \cdot \varepsilon$) é adotada no desenvolvimento da expressão, e o módulo de elasticidade do material é representado por E .

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \, dV = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \varepsilon^2 \, dV \quad (3.2)$$

A energia potencial das forças externas é apresentada na Equação 3.3, onde F representa o conjunto de forças aplicadas e Y o conjunto de posições independentes que podem ser ocupados por um ponto do elemento no plano cartesiano xy . As coordenadas nodais dos elementos são adotadas na composição do conjunto de posições Y .

$$W = \sum F \cdot Y \quad (3.3)$$

A energia potencial total, portanto, pode ser reescrita na Equação 3.4, substituindo as variáveis de energia de deformação e energia potencial das forças externas pelos termos indicados nas equações anteriores (3.2 e 3.3). O módulo de elasticidade (E) é considerado constante ao longo da barra, que é constituída por um único material, e não afeta a integração em relação ao volume (V).

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon^2 dV - \sum F \cdot Y \quad (3.4)$$

O equilíbrio da estrutura é admitido quando a variação da energia potencial total em relação às posições nodais é nula, ou seja, quando as derivadas da energia potencial em relação a essas mesmas posições são nulas. Nessa condição (Equação 3.5), denominada estacionária, a força interna (F_{int}) deve ser igual à força externa aplicada ao nó (F_{ext}), o que caracteriza o equilíbrio estático.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow F_{int} = F_{ext} \quad (3.5)$$

3.2 Elemento finito de treliça plana

Na formulação posicional do elemento de treliça plana, considera-se que o elemento sofre deformação uniaxial constante, com variação nula da área de seção transversal. A hipótese de Euler-Bernoulli é adotada, admitindo que as seções continuam planas após a deformação.

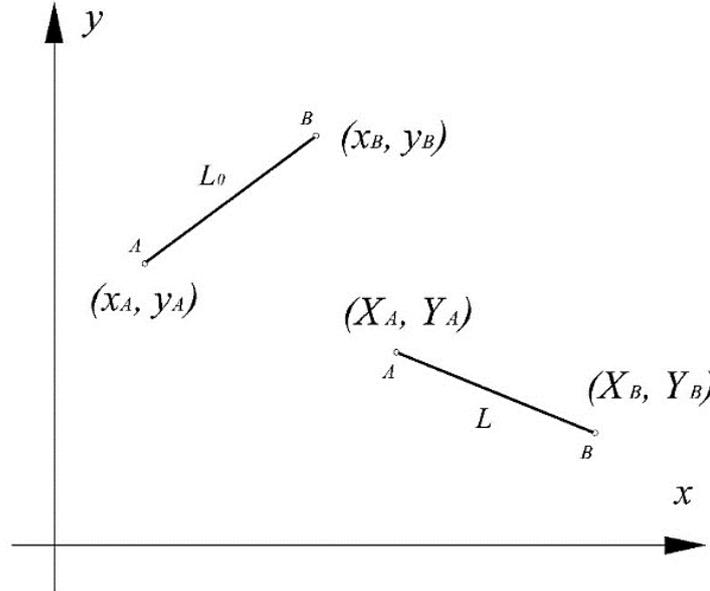
Um elemento com coordenadas iniciais dos nós sendo $Y_0 = [x_1, y_1, x_2, y_2]$, é ilustrado na Figura 3.1. Após a deformação, assume-se que os nós do elemento passam a ocupar as coordenadas $Y = [X_1, Y_1, X_2, Y_2]$. A deformação longitudinal do elemento é definida na Equação 3.6, sendo adotada a medida de deformação convencional de engenharia (ε), enquanto L_0 é o comprimento inicial do elemento e L é o comprimento alcançado após deformação.

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \quad (3.6)$$

Na Equação 3.6, como a referência é o comprimento original do elemento, a formulação é classificada como Lagrangiana. Caso a referência fosse adotada uma medida de

deformação em que a referência fosse o comprimento atual, a formulação seria denominada Euleriana (CODA, 2018).

Figura 3.1 – Elemento finito de treliça plana



Fonte: Autor (2022)

O comprimento inicial do elemento pode ser obtido segundo a Equação 3.7, considerando sua expressão definida em função das coordenadas iniciais dos nós: $Y_0 = [x_1, y_1, x_2, y_2]$. O comprimento inicial do elemento é denominado por L_0 .

$$L_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.7)$$

O comprimento após deformação do elemento é representado por L e determinado pela Equação 3.8. As coordenadas alcançadas após a deformação, $Y = [X_1, Y_1, X_2, Y_2]$, são utilizadas na expressão.

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (3.8)$$

A partir da Equação 3.2 e das expressões anteriores, a energia de deformação do elemento pode ser reescrita na Equação 3.9, admitindo que a área de seção transversal (A) e o módulo de elasticidade longitudinal (E) do elemento sejam constantes ao longo de seu comprimento. O termo u_t representa a energia específica de deformação do elemento, sendo utilizado para simplificar a representação de U .

$$U = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \varepsilon^2 \, dV = \frac{1}{2} \cdot E \cdot A \cdot \varepsilon^2 \cdot L_0 = L_0 \cdot u_t \quad (3.9)$$

A energia potencial total do elemento de treliça plana é então definida na Equação 3.10, de acordo com a substituição das expressões anteriores na Equação 3.1. As posições nodais são representadas por (X_1, Y_1, X_2, Y_2) , e $(F_{X1}, F_{Y1}, F_{X2}, F_{Y2})$ são as respectivas forças externas aplicadas aos nós.

$$\Pi = L_0 \cdot u_t - F_{X1} \cdot X_1 - F_{Y1} \cdot Y_1 - F_{X2} \cdot X_2 - F_{Y2} \cdot Y_2 \quad (3.10)$$

A variação da energia potencial total é representada na Equação 3.11, cuja obtenção é possibilitada pela primeira derivada parcial em relação às posições nodais. Como são considerados dois graus de liberdade por nó, tem-se $i = 1-4$. As posições nodais (X_1, Y_1, X_2, Y_2) podem ser representadas pelo índice i que varia de um a quatro, ou seja, na forma (1, 2, 3, 4). Como condição de equilíbrio, a variação da energia potencial é considerada nula (Equação 3.5).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = L_0 \frac{\partial u_t}{\partial Y_i} - F_i = 0 \quad (3.11)$$

O sistema de equações gerado é não linear quanto às posições nodais (X_1, Y_1, X_2, Y_2) , devido às derivadas parciais da energia de deformação. O sistema pode ser representado de forma geral na Equação 3.12. O termo g_i representa a primeira derivada da energia potencial total em relação às posições nodais, enquanto f_i envolve a primeira derivada da energia específica u_t , equivalente à força interna do nó, e F_i é a força externa atuante na direção horizontal ou vertical do nó. O termo g_i também é conhecido como vetor de resíduos, visto que pode ser diferente de zero nas primeiras resoluções aproximadas do sistema por meio da análise numérica.

$$\begin{aligned} g_1(X_1, Y_1, X_2, Y_2) &= f_1(X_1, Y_1, X_2, Y_2) - F_{X1} = 0 \\ g_2(X_1, Y_1, X_2, Y_2) &= f_2(X_1, Y_1, X_2, Y_2) - F_{Y1} = 0 \\ g_3(X_1, Y_1, X_2, Y_2) &= f_3(X_1, Y_1, X_2, Y_2) - F_{X2} = 0 \\ g_4(X_1, Y_1, X_2, Y_2) &= f_4(X_1, Y_1, X_2, Y_2) - F_{Y2} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

O sistema de equações não lineares da Equação 3.12 pode ser representado em notação indicial segundo a Equação 3.13. Nessa expressão, o índice j varia de um a quatro para cada valor do índice i , uma vez que são quatro posições nodais adotadas no elemento de treliça plana.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = g_i(Y_j, F_i) = f_i(Y_j) - F_i = 0 \quad (3.13)$$

Diversas estratégias numéricas podem ser aplicadas para a resolução do sistema não linear de equações. Em termos computacionais, a utilização da forma matricial para representação do sistema é uma opção eficiente em muitos casos, tendo em vista as possibilidades de processamento. Além da representação matricial, a aplicação do Método de Newton-Raphson tem sido observada em muitos trabalhos envolvendo análise não linear geométrica, como registrado no capítulo anterior.

O Método de Newton-Raphson é uma técnica empregada para estimar as raízes de funções por meio de aproximações lineares sucessivas, de forma incremental-iterativa. Para a resolução do sistema de equações não lineares, alcançado a partir da formulação posicional do MEF, o Método de Newton-Raphson pode ser aplicado na forma da Equação 3.14. Nessa expressão, as posições nodais atuais são representadas por Y , o vetor ΔY é o vetor de correção das posições nodais, o termo $g(Y)$ representa o vetor de resíduos e $\nabla g(Y)$ é a matriz Hessiana.

$$g(Y) + \nabla g(Y) \cdot \Delta Y \cong 0 \quad (3.14)$$

É interessante observar que a Equação 3.14 se assemelha a uma função polinomial de primeiro grau. O vetor de resíduos $g(Y)$ é semelhante ao coeficiente linear da função, a matriz Hessiana $\nabla g(Y)$ é comparável ao coeficiente angular e o vetor ΔY pode ser associado à variável independente.

O vetor de resíduos de um elemento, em função das posições nodais, é determinado conforme a primeira derivada parcial da energia potencial total em relação às posições, como verificado na Equação 3.15. Como observado na expressão, o vetor agrupa as quatro possíveis derivadas parciais da energia potencial total de um elemento de treliça plana.

$$g(Y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial Y_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial Y_2} \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

Já a matriz Hessiana de um elemento é obtida pela segunda derivada parcial da energia potencial total em relação às posições nodais, na Equação 3.16. A matriz Hessiana é quadrada e simétrica, cuja diagonal principal é ocupada pelas derivadas parciais de segunda ordem, e derivadas parciais mistas localizam-se nas demais posições.

$$\nabla g(Y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_1 \partial Y_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_1 \partial X_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_1 \partial Y_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_2 \partial Y_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_2 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_2 \partial X_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y_2^2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A simetria da matriz Hessiana, assim como a simetria das segundas derivadas parciais, podem ser provadas pelo teorema de Clairaut-Schwarz, que estabelece a possibilidade de igualdade das derivadas parciais mistas de uma função, conforme Equação 3.17. Nessa expressão, f é uma função qualquer e x representa um vetor que agrupa as variáveis independentes de f , enquanto i e j são índices.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad (3.17)$$

Conforme a Equação 3.16, a ordem da matriz Hessiana de um elemento finito de treliça plana é 4×4 , possuindo quatro linhas e quatro colunas. Esses números são equivalentes ao número de posições nodais por elemento.

Em termos de equilíbrio da estrutura, somente é possível considerar o estado de equilíbrio estável quando a matriz Hessiana é positiva definida, que pode ser associada a pontos de mínimo da equação da energia potencial total (CODA, 2018). Outros estados de equilíbrio podem ser verificados segundo as propriedades da matriz Hessiana, e envolvem as condições de energia potencial do sistema estrutural.

Com relação ao sistema estrutural, a montagem do conjunto de equações é realizada por meio de procedimentos semelhantes aos de análises convencionais do MEF. Ou seja, os nós comuns a mais de um elemento possuem os termos somados no vetor de resíduos e na matriz Hessiana. Além disso, são zerados os termos referentes aos graus de liberdade de restrições impostas nas condições de contorno.

A partir da formulação posicional, contudo, não é necessário introduzir transformações de coordenadas, o que reduz o trabalho algébrico da abordagem. Esta é, particularmente, uma vantagem notável da formulação posicional em relação a diferentes abordagens, como a formulação corrotacional ou outras.

Em geral, após a montagem do conjunto de equações, o vetor de correção das posições nodais (ΔY) pode ser determinado conforme Equação 3.18. O termo $\nabla g(Y)^{-1}$ representa a inversa da matriz Hessiana.

$$\Delta Y = -\nabla g(Y)^{-1} \times g(Y) \quad (3.18)$$

Valores inferiores a 10^{-6} normalmente são adotados como tolerância para a norma do vetor de correção das posições nodais. Tal tolerância pode ser utilizada como critério de parada do Método de Newton-Raphson, uma vez que pequeníssimas variações da norma de ΔY não influenciarão outros parâmetros de forma significativa.

Em síntese, os procedimentos indicados a seguir descrevem o funcionamento do Método de Newton-Raphson aplicado à análise não linear geométrica:

1. Inicialmente, definir Y_0 como a posição inicial dos nós ($Y = Y_0$), e calcular o vetor de resíduos $g(Y_0)$.
2. Determinar a matriz Hessiana ∇g .
3. Resolver o sistema de equações a partir da Equação 3.14 e calcular o vetor de correção das posições nodais ΔY .
4. Atualizar o vetor de posições Y considerando $Y = Y + \Delta Y$.
5. Retornar à etapa 1 até que o vetor ΔY ou sua norma seja suficientemente pequeno, de forma que seja menor ou igual à tolerância adotada.

Para que o processo seja considerado incremental-iterativo, o carregamento total é dividido em incrementos cumulativos (denominados ΔF), os quais são aplicados gradualmente à estrutura e atualizado a cada passo de carga. Dessa forma, o equilíbrio da estrutura é avaliado a cada incremento de força ΔF às forças externas iniciais (Equação 3.19), e a cada atualização do vetor de posições Y .

$$F = F + \Delta F \quad (3.19)$$

3.3 Instabilidade do sistema treliçado

Assim como outros sistemas estruturais sujeitos a ações que provocam compressão, os sistemas treliçados podem ser afetados por instabilidade no plano ou fora do plano principal (RODMAN et al., 2013). Neste trabalho, somente a instabilidade no plano é considerada, e idealiza-se que as treliças possuem rigidez suficiente para evitar a instabilidade fora do plano, por sistemas de travamento ou outro mecanismo.

A instabilidade no plano é caracterizada por uma mudança qualitativa do estado de equilíbrio, quando uma certa condição crítica é alcançada (GRECO; VENTURINI, 2006). Na formulação posicional admite-se a existência de pontos críticos quando a energia potencial se torna singular, situação em que o determinante da matriz Hessiana é nulo (Equação 3.20).

$$\det(\nabla g(Y)) = 0 \quad (3.20)$$

Dessa forma, o equilíbrio do sistema é estável quando a matriz Hessiana é definida positiva, que possui determinante também positivo. Quando o determinante é nulo, a matriz Hessiana torna-se singular e uma condição crítica é alcançada, geralmente um ponto de bifurcação da trajetória de equilíbrio (SHI, 1996). A força que implica a singularidade da matriz Hessiana é denominada força crítica (P_{cr}), associada à instabilidade do sistema estrutural.

Três estados de equilíbrio podem ser relacionados com a energia potencial do sistema estrutural, os quais são identificados como:

- (i) Estado de equilíbrio estável: mínima energia potencial (Equação 3.21);

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} > 0 \quad (3.21)$$

- (ii) Estado de equilíbrio neutro: energia potencial constante (Equação 3.22);

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} = 0 \quad (3.22)$$

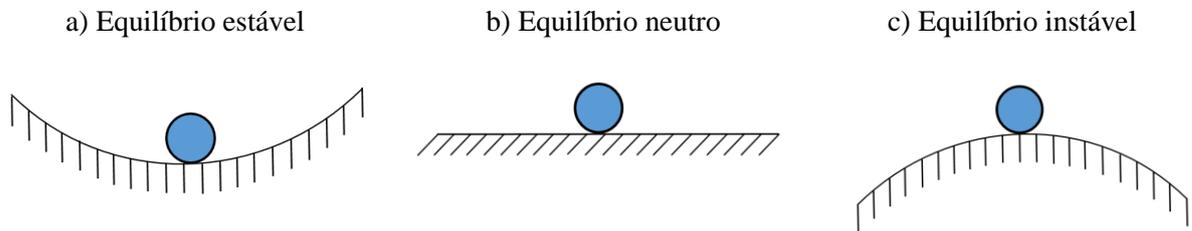
- (iii) Estado de equilíbrio instável: máxima energia potencial (Equação 3.23).

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} < 0 \quad (3.23)$$

Cabe ressaltar que, no contexto da formulação posicional, as segundas derivadas parciais da energia potencial total (Π) são representadas pela matriz Hessiana ($\nabla g(Y)$), obtida em função das posições nodais da estrutura.

Os três estados de equilíbrio de um corpo sólido são esquematizados na Figura 3.2. A primeira representação indica a situação de equilíbrio estável (Figura 3.2a), a segunda exibe o equilíbrio neutro (Figura 3.2b) e a terceira ilustra o equilíbrio instável (Figura 3.2c).

Figura 3.2 – Representação dos estados de equilíbrio de um sólido



Fonte: Adaptado de Bazant e Cedolin (1991)

Quando o determinante de uma matriz quadrada e simétrica é nulo, pode-se associar ao menos um autovalor também nulo ($\lambda_i = 0$) a essa mesma matriz. Assim, para uma matriz Hessiana ($\nabla^2 g(Y)$) de ordem $n \times n$ que contém somente números reais, o resultado de seu produto por um vetor v de ordem n será equivalente ao produto de um número real (ou números reais) por v , de acordo com a Equação 3.24. Nessa expressão, denomina-se v como o *autovetor* da matriz Hessiana, enquanto λ são os *autovalores* dessa matriz.

$$\nabla^2 g(Y) \cdot v = \lambda \cdot v \quad (3.24)$$

Os possíveis n autovalores da matriz Hessiana podem ser calculados segundo a Equação 3.25, considerando a multiplicação de λ por uma matriz identidade (I), que possui diagonal unitária e demais valores nulos. Essa é uma solução não trivial que pode ser obtida diretamente a partir da Equação 3.23, não sendo necessário conhecer o autovetor v para sua aplicação. As raízes dessa expressão são os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (BAZANT; CEDOLIN, 1991).

$$(\nabla^2 g(Y) - \lambda \cdot I) = 0 \quad (3.25)$$

O determinante da matriz Hessiana também pode ser obtido em função de seus autovalores, conforme o produtório da Equação 3.26 (Fórmula de Viète).

$$\det(\nabla^2 g(Y)) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \quad (3.26)$$

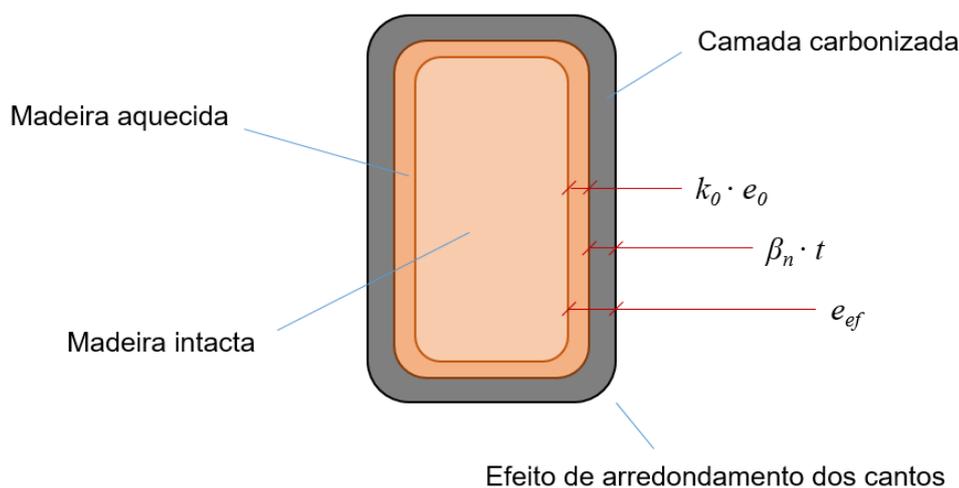
Para o determinante de $\nabla^2 g(Y)$ ser nulo na Equação 3.26, a matriz deve apresentar ao menos um autovalor nulo. Por outro lado, a matriz é considerada positiva definida se todos os autovalores forem positivos.

3.4 Método da seção transversal reduzida

Atualmente, o método da seção transversal reduzida é amplamente adotado na análise de estruturas de madeira sujeitas a incêndios, e sua utilização é sugerida por diversas normas técnicas, inclusive pela norma europeia EN 1995-1-2 (Eurocode 5). Esse método possibilita uma avaliação simplificada da estrutura sujeita ao incêndio, sem que haja necessidade de determinar a variação da temperatura nos elementos, o que reduz o esforço algébrico envolvido no processo.

Quando um elemento de madeira é exposto ao fogo, as regiões mais externas são carbonizadas até certa profundidade, cujas propriedades mecânicas sofrem consideráveis reduções. A temperatura avança internamente, deixando a madeira aquecida em outra profundidade, mas com propriedades também reduzidas nessa região. O núcleo, devido ao isolamento térmico promovido pelo carvão vegetal formado nas regiões externas, pode permanecer isolado e manter as propriedades mecânicas iniciais da madeira não aquecida. Na Figura 3.3 essas três fases são ilustradas, considerando a seção transversal de um elemento de madeira exposto ao fogo em todas as faces. Estima-se que a carbonização ocorre quando as regiões mais afetadas do elemento alcançam uma temperatura aproximadamente igual a 300 °C.

Figura 3.3 – Seção transversal de um elemento de madeira sujeito a incêndio



Fonte: Autor (2022)

O método da seção transversal reduzida estima que as profundidades relacionadas às camadas carbonizadas e às regiões aquecidas da madeira sejam anuladas da seção transversal inicial, omitindo as propriedades mecânicas das partes afetadas. Essas regiões da seção transversal, prejudicadas pela carbonização ou pela elevação da temperatura, são

determinadas em função do parâmetro de taxa de carbonização. Esse parâmetro representa a velocidade que a espessura carbonizada avança para o interior da seção, permitindo verificar a profundidade de carbonização das regiões expostas ao fogo, e, a partir disso, quantificar a parcela resistente com propriedades mecânicas praticamente intactas da seção transversal (PURKISS, 2007).

As taxas de carbonização podem ser estimadas experimentalmente a partir de ensaios específicos, e atualmente há recomendações normativas que sugerem valores dependendo das propriedades da madeira empregada, conforme especificado no Capítulo 2. As taxas de carbonização, assim como a carbonização dos elementos, podem ser consideradas em uma ou mais faces da seção transversal, e o arredondamento dos cantos da seção é verificado nos casos em que a carbonização é provocada em mais de uma face.

A profundidade de carbonização dos elementos é obtida multiplicando-se a taxa de carbonização da madeira pelo tempo de exposição ao fogo. Além disso, valores de profundidade inicial podem ser acrescentados para ampliar a profundidade prevista, até mesmo para considerar a profundidade da madeira cuja temperatura aumentou e que houve redução nas propriedades mecânicas. Essa profundidade inicial pode, ainda, ser controlada por um coeficiente específico, voltado para considerar o aquecimento lento da madeira ou outra condição.

Em geral, uma expressão destinada à determinação de profundidades de carbonização da seção transversal de elementos reticulados de madeira é indicada na Equação 3.27. Nessa equação, a profundidade de carbonização é representada por e_{ef} , enquanto β_n é a taxa de carbonização, t é o tempo de exposição ao fogo, e_0 é a profundidade inicial de carbonização e k_0 é um coeficiente redutor. As profundidades de carbonização foram representadas na Figura 3.3.

$$e_{ef} = \beta_n \cdot t + k_0 \cdot e_0 \quad (3.27)$$

A Equação 3.27 normalmente é adotada nos códigos normativos que especificam expressões para determinação da profundidade de carbonização dos elementos de madeira, como observado nas especificações técnicas mencionadas no Capítulo 2. Contudo, há divergências principalmente com relação ao parâmetro k_0 , uma vez que certas normas especificam valores inferiores à unidade nos minutos iniciais de incêndio, enquanto outras omitem o parâmetro na Equação 3.27 (ou o consideram unitário).

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo são apresentadas as etapas e os procedimentos adotados para a análise não linear geométrica de treliças planas de madeira em situação de incêndio. São destacadas as hipóteses básicas empregadas nas análises, a exposição dos procedimentos gerais adotados, a implementação computacional do modelo numérico e a descrição das tipologias estruturais. Também é abordado o processo iterativo da força crítica aparente, uma estratégia numérica que permite a determinação das forças críticas de instabilidade de treliças partindo-se de um número reduzido de iterações, com o objetivo de diminuir o esforço computacional.

4.1 Hipóteses adotadas

As hipóteses adotadas na aplicação do modelo numérico são ressaltadas na sequência, de modo que suas possibilidades e limitações sejam expostas.

Embora modelos físicos que preveem não linearidades possam ser mais precisos e realistas quanto ao comportamento do material (HOLMBERG et al., 1999), um modelo linear elástico foi escolhido para representar o diagrama tensão-deformação da madeira. Essa opção foi adotada com o intuito de evitar a introdução de uma maior quantidade de variáveis nas análises, e considera-se somente a análise não linear geométrica da estrutura.

Nos modelos estruturais, as forças externas foram aplicadas aos nós das treliças. Esses nós foram idealizados como ligações perfeitamente rotuladas, e não foram estimadas quaisquer falhas localizadas nas ligações. Considerou-se que as forças externas aplicadas foram provenientes de combinações de ações, e nenhuma outra combinação foi prevista no modelo numérico. As forças externas foram subdivididas em valores incrementais, aplicados gradualmente à estrutura a cada passo de carga da análise não linear geométrica. Os passos de carga foram definidos com base na unidade de força, ou seja, foi considerado um acréscimo equivalente a 1 kN por etapa. De tal modo, um controle de força foi especificado para a análise não linear geométrica.

Em termos de tolerância, a análise não linear geométrica foi efetuada até que a norma do vetor de correções ΔY convergisse para um valor especificado inicialmente. Esse valor foi equivalente a 10^{-8} , atribuído conforme exemplos numéricos discutidos na literatura (GRECO; VENTURINI, 2006).

Quanto à deformação das seções transversais das barras, a hipótese de Euler-Bernoulli foi utilizada. Logo, foi pressuposto que as seções transversais permaneceram planas após a deformação da estrutura.

A fim de verificar a influência da forma de análise, foi realizada a análise linear geométrica para as treliças de madeira em condição de temperatura ambiente e em situação de incêndio, além da análise não linear geométrica. Ambas as situações foram propostas para observar possíveis variações provocadas pelo tipo de análise adotado, assim como a influência da exposição ao fogo em relação ao comportamento inicial da estrutura.

Em todos os casos associados à situação de incêndio, o método da seção transversal reduzida foi adotado primeiramente, com tempo máximo de 20 minutos de exposição ao fogo e variação medida a cada 1 minuto. O tempo máximo foi fixado em 20 minutos para verificar a influência da hipótese de aquecimento reduzido da madeira nos primeiros minutos de exposição ao fogo, que é considerada nos procedimentos do Eurocode 5 e não prevista nos modelos das outras normas (brasileira e australiana).

A redução da seção resistente foi prevista antes de aplicar a análise não linear geométrica das treliças, e as áreas residuais associadas a cada discretização do tempo foram agrupadas na forma de vetor. Na simulação da situação de incêndio, todas as faces das seções transversais foram submetidas à exposição ao fogo, logo houve redução nas quatro direções. Não foram previstos tratamentos preservativos nas madeiras.

4.2 Procedimentos gerais

Três modelos estruturais de treliças planas de madeira foram analisados, e previstas sete espécies de madeira para cada modelo. Três procedimentos voltados para estimativa da carbonização dos elementos de madeira foram adotados nas análises, considerando o projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190:2013, a norma europeia EM 1995-1-2:2004 e a norma australiana AS 1720.4:2006. O tempo máximo de incêndio foi fixado em 20 minutos para todos os modelos, e as análises foram efetuadas de forma discreta para cada minuto de incêndio. A influência das análises linear e não linear geométrica também foi verificada na variação dos parâmetros, conforme o tempo de exposição ao fogo. Com base na combinação desses fatores, foram realizadas 2520 simulações numéricas distintas.

Na análise não linear geométrica, empregou-se a tolerância para a norma do vetor ΔY (equivalente a 10^{-8}) como critério de parada para cada incremento de força, considerando sua obtenção a partir da resolução do sistema de equações não lineares pelo Método de Newton-Raphson. A quantidade de incrementos de força foi equivalente ao valor absoluto da força externa aplicada na estrutura, e o vetor de forças foi atualizado segundo o acréscimo de uma unidade de força a cada passo.

Os valores experimentais das taxas de carbonização de cada espécie foram utilizados somente nas análises baseadas no projeto de revisão da norma brasileira. Nas análises envolvendo os procedimentos das normas europeia e australiana, para efeito de comparação entre modelos experimentais e normativos, os valores de taxa de carbonização propostos por essas normas foram adotados.

As propriedades das sete espécies de madeira empregadas nos modelos numéricos são indicadas na Tabela 4.1, incluindo os valores de taxas de carbonização (β_n). Assume-se que a carbonização pode afetar as quatro faces da seção transversal dos elementos de madeira. Os valores médios obtidos a partir de estudos experimentais e referenciados na literatura foram adotados para a resistência à compressão (f_{co}), a resistência à tração (f_{to}) e o módulo de elasticidade (E_0), todos na direção paralela às fibras da madeira, assim como a densidade aparente (ρ_{ap}) das espécies de madeira.

Tabela 4.1 – Propriedades das espécies de madeira

Espécie	ρ_{ap}	f_{co}	f_{to}	E_0	β_n (mm/min)		
	(kg/m ³)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	Experimental	Eurocode 5	AS 1720.4
<i>Corymbia citriodora</i> ¹	999	62,0	123,6	18421	0,58	0,55	0,48
<i>Eucalyptus grandis</i> ¹	640	40,3	70,2	12813	0,58	0,55	0,59
<i>Lyptus</i> ²	743	60,7	51,2	7816	0,69	0,55	0,54
<i>Pinus</i> ²	505	32,1	27,5	5815	0,95	0,80	0,71
<i>Douglas-fir</i> ³	480	49,9	107,6	13400	0,59	0,80	0,74
<i>Southern pine</i> ³	590	58,4	100,0	13700	0,74	0,80	0,63
<i>White oak</i> ³	680	51,3	105,0	12300	0,52	0,55	0,57

Fonte: ¹ Pinto (2005); ² Martins (2016); ³ Forest Products Laboratory (2010)

Na Tabela 4.1, observa-se que as taxas de carbonização das sete espécies de madeira variam entre 0,5 mm/min e 1,0 mm/min, abrangendo valores determinados experimentalmente e outros recomendados por normas técnicas. É interessante observar que, com exceção da espécie *Eucalyptus grandis*, os valores experimentais se aproximam mais dos propostos no Eurocode 5, cujas prescrições sugerem valores únicos para madeiras folhosas e coníferas. Segundo essas especificações da norma europeia, as madeiras folhosas apresentam taxas equivalentes a 0,55 mm/min e as coníferas possuem taxas iguais a 0,80 mm/min. Com exceção das espécies *Eucalyptus grandis* e *White oak*, os valores estimados conforme o modelo de taxa de carbonização da norma australiana foram inferiores aos do Eurocode 5, embora a variação tenha sido menor ou próxima de 10% para a maioria das espécies.

Considerando ainda o modelo da norma australiana, somente a taxa da espécie *Eucalyptus grandis* foi próxima do valor experimental referenciado para a espécie.

O processo iterativo da força crítica aparente foi aplicado para a estimativa das forças críticas de instabilidade dos modelos estruturais, possibilitando redução das iterações envolvidas na análise numérica. Ele foi utilizado no processamento dos modelos em temperatura ambiente e em situação de incêndio.

4.3 Estruturação do modelo numérico

O modelo numérico implementado foi dividido em três etapas principais, sendo: pré-processamento (entrada de dados), processamento (que inclui o processo iterativo do método de Newton-Raphson e aplicação de outros métodos) e pós-processamento (geração de resultados e representações gráficas).

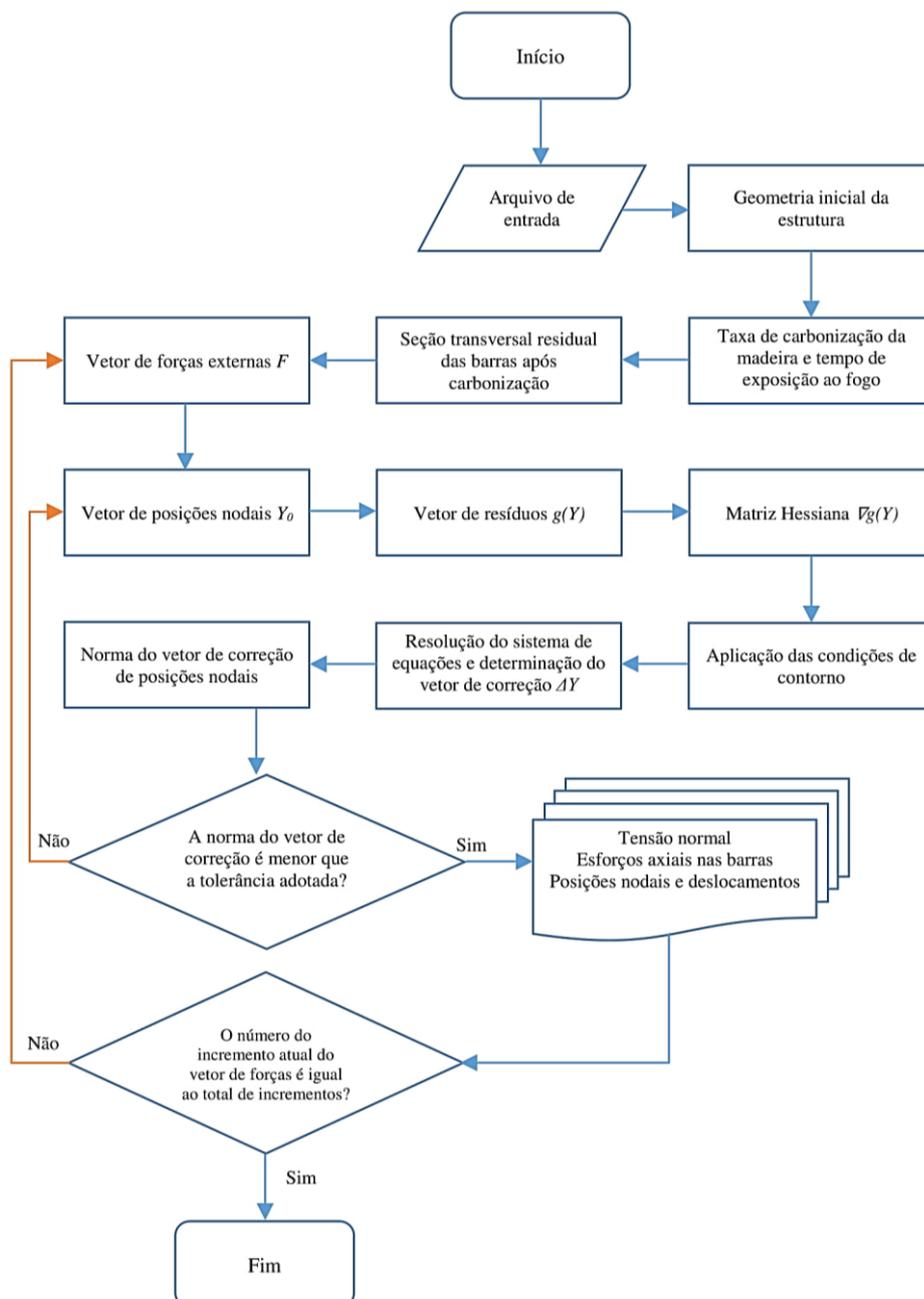
Na primeira etapa, relacionada à entrada de dados, foram informadas a tolerância de cálculo, as posições iniciais dos nós e comprimento das barras, valores de área de seção transversal e módulo de elasticidade longitudinal dos elementos. Adicionalmente, na entrada de dados foram definidos vetores para agrupar as forças externas aplicadas aos nós e os incrementos de força, além de outro vetor para especificar a restrição dos graus de liberdade. Os elementos do vetor foram representados por 0 quando associados a graus de liberdade restringidos, e por 1 no caso dos graus de liberdade livres. Também foram definidos o tempo de exposição ao fogo e a taxa de carbonização da madeira, assim como a quantidade de faces e elementos afetados pela carbonização.

Na segunda etapa, o processo iterativo do método de Newton-Raphson foi aplicado. Inicialmente, desenvolveu-se a montagem do vetor de posições nodais, e, em seguida, determinados o vetor de resíduos das posições nodais e a matriz Hessiana. As condições de contorno foram aplicadas na sequência, com base nos valores de entrada do vetor de restrição dos graus de liberdade dos nós. A partir disso, ocorreu a montagem do sistema de equações linearmente independentes, cuja resolução proporcionou o primeiro vetor de correção das posições nodais. A norma deste vetor foi calculada, e o vetor de posições iniciais foi atualizado. Novos passos iterativos foram iniciados para encontrar outros conjuntos de posições nodais que possibilitassem o equilíbrio da energia potencial total, até que a tolerância de cálculo fosse alcançada. A interrupção do processo iterativo ocorreu quando a norma do vetor de correção foi menor ou igual à tolerância adotada, alcançando-se a geração dos resultados finais.

Na terceira etapa, relacionada à geração dos resultados, foram calculados vetores de deformação axial, tensão normal, deslocamento e forças internas das barras. O processo foi repetido diversas vezes, até incrementar totalmente o vetor de forças externas ou atingir a instabilidade da estrutura. Esta última situação ocorreu nos casos em que a minimização da energia potencial não foi possível e a matriz Hessiana deixou de ser positiva definida.

Um fluxograma é apresentado na Figura 4.1, que ilustra as etapas mencionadas e envolvidas na análise numérica. As setas na região esquerda da figura são relacionadas ao processo iterativo do método de Newton-Raphson.

Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo

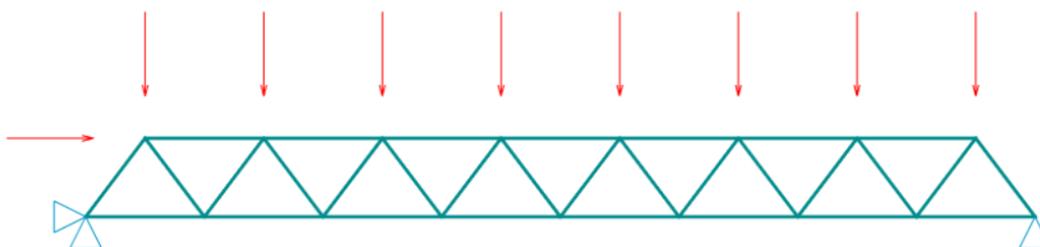


4.4 Processo iterativo da força crítica aparente

Um processo alternativo foi idealizado e adotado na determinação das forças críticas de instabilidade das treliças. Apresenta-se, nesta seção, a conceituação envolvida no processo da força crítica aparente, que foi empregado em paralelo com a análise não linear geométrica dos sistemas estruturais.

Para uma treliça plana qualquer (Figura 4.2), sujeita a um conjunto arbitrário de forças externas aplicadas aos nós, o equilíbrio será considerado estável somente se as possíveis segundas derivadas parciais da energia potencial total forem positivas, como discutido no capítulo anterior. Caso a intensidade das forças externas aumente, até que as segundas derivadas parciais da energia parcial total tornem-se nulas, o estado de equilíbrio passará de estável para neutro, representando um ponto crítico no sistema. Se a intensidade das forças externas aumentarem ainda mais, o equilíbrio será instável, uma situação indesejável para a estrutura.

Figura 4.2 – Treliça plana sujeita a ações



Fonte: Autor (2022)

Em uma análise não linear geométrica, um procedimento normalmente adotado na determinação da força crítica associada à instabilidade utiliza a aplicação gradativa das forças externas, com o aumento de uma unidade de força a cada passo. Admite-se a instabilidade da estrutura quando a matriz Hessiana da energia potencial total possui ao menos um autovalor nulo, e a força associada a esse passo é considerada a força crítica de instabilidade. Contudo, esse procedimento pode ser pouco eficiente em termos de tempo de processamento e utilização dos recursos computacionais, uma vez que pode exigir centenas ou milhares de iterações dependendo das propriedades da estrutura e das ações atuantes.

Para proporcionar soluções mais eficientes em termos computacionais, buscou-se o desenvolvimento de um algoritmo nesse contexto, objetivando a determinação de forças críticas a partir de um número reduzido de iterações.

O processo iterativo idealizado consiste, primeiramente, em definir valores iniciais para as forças externas, os quais estima-se que não serão ultrapassados. Esses valores iniciais são agrupados na forma de vetor, representado genericamente por P . Além dos valores iniciais de força externa, define-se uma quantidade de passos de carga (n_s), que possibilitarão a aplicação incremental das forças externas. Recomenda-se a aplicação de dez passos, no mínimo, para a convergência do processo iterativo. Além disso, um número de repetições (n_r) também deve ser previsto, pois é necessário reproduzir o procedimento algumas vezes conforme tentativas prévias. A quantidade total de iterações efetuadas é dada pelo produto entre n_s e n_r .

Os valores iniciais das forças externas são divididos pela quantidade de passos de carga, resultando-se no vetor P_i (Equação 4.1), que é aumentado conforme o passo de carga. Cada valor de P_i é aplicado à estrutura, isoladamente, e a análise não linear geométrica é realizada conforme a formulação posicional do MEF, para cada valor de forças externas. Durante a análise não linear geométrica, os autovalores da matriz Hessiana da energia potencial total também são computados.

$$P_i = i \cdot \frac{P}{n_s} \quad i = 1, 2, 3 \dots n_s \quad (4.1)$$

O passo de carga associado ao menor autovalor positivo da matriz Hessiana é armazenado, e caracterizado como uma *força crítica aparente*, denominada P_n . O valor de P_n é considerado na próxima etapa, que consiste na repetição do processo iterativo, mas atualizando a força externa conforme a força crítica aparente ($P = P_n$). Para obtenção de novos passos de carga, adotados durante a repetição do processo iterativo, considera-se a variação de forças entre P_n e o passo de carga imediatamente posterior ao de P_n na etapa prévia, como será ilustrado adiante na expressão 4.2. Dessa forma, os passos de carga associados aos autovalores mais próximos da nulidade são mantidos durante o procedimento iterativo, enquanto os demais são desconsiderados nas repetições subsequentes. As repetições continuam até que se finalize o processamento do total de iterações previstas, ou até que um critério de convergência seja alcançado.

Para o processamento da primeira repetição, após a determinação do valor de P_n na tentativa inicial, o vetor de forças externas P é atualizado conforme a Equação 4.2. Nessa expressão, a constante é adotada como $C_I = 1,0$ caso o valor de P_n tenha sido definido como a força externa associada ao menor autovalor positivo da matriz Hessiana, e o valor de P_i varia entre P_n e o passo de carga imediatamente posterior na tentativa prévia.

$$P_i = P_n + i \cdot \frac{P}{n_s^j} \cdot C_l \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \dots n_s \\ j = 2, 3, 4 \dots n_r \end{array} \quad (4.2)$$

Alternativamente, a força crítica aparente P_n pode ser definida como o primeiro valor de força externa do vetor P que proporciona autovalor negativo da matriz Hessiana. Essa estratégia pode ser necessária de acordo com as propriedades da estrutura e das ações atuantes, uma vez que certas treliças podem apresentar uma variação extrema do autovalor no ponto de instabilidade. Adotando P_n como o valor de força associado ao primeiro autovalor negativo da matriz Hessiana, considera-se $C_l = -1,0$ na Equação 4.2, com P_i variando entre P_n e o passo de carga imediatamente anterior ao de P_n na tentativa prévia.

Ainda com relação à Equação 4.2, a contagem da variável j inicia-se em 2 por representar a primeira repetição do processo. Uma vez lançado o valor de j , varia-se i até que o número total de passos de carga (n_s) seja obtido, permitindo a geração do vetor P_i e o processamento da análise não linear com base na aplicação das forças. A variável j é aumentada após a definição de P_n e o autovalor de referência, e o processo continua até que o número total de repetições (n_r) ou algum critério de parada seja atendido.

É importante verificar a montagem do vetor P_i e a diferença entre as Equações 4.1 e 4.2. Na primeira, que corresponde à tentativa inicial de obtenção da força crítica, os valores de força externa são divididos de acordo com a quantidade total de passos escolhida. A segunda equação, que é aplicada na sequência, considera o acréscimo da força crítica aparente, assim como a constante C_l , que varia de acordo com a estratégia adotada para armazenamento dos autovalores, e a elevação de n_s pela variável de repetição j . No processo iterativo, a Equação 4.1 é utilizada uma única vez, e, a partir disso, a Equação 4.2 é aplicada diversas vezes e produz atualizações nos valores de P_i e P_n , até alcançar o valor n_r ou o critério de parada.

Na programação, para simplificar a aplicação das Equações 4.1 e 4.2, pode-se considerar o laço de repetição de j iniciando-se em 1 e especificar as equações de P_i por meio de condições booleanas, como *if*. Portanto, na linguagem MATLAB, o laço de repetição geral ficaria semelhante ao procedimento exposto na Figura 4.3.

Para conclusão do processo, é possível definir um critério de convergência, que pode ser adotado de acordo com a norma do autovalor da matriz Hessiana, por exemplo. Após simulações iniciais, constatou-se que um valor de 10^{-3} pode ser adotado sem prejuízos, pois não exigiu alto custo computacional na maioria dos casos e obteve-se precisão na determinação de forças críticas de modelos conhecidos de treliça, com valores de força crítica referenciados na literatura.

Figura 4.3 – Laços de repetição das variáveis i e j em linguagem MATLAB

```
for j = 1:nr
    for i = 1:ns
        if j == 1
            P_i = P_n + i * P / n_s;
        else
            P_i = P_n + i * P * C_1 / n_s^j;
        end
    end
end
```

Fonte: Autor (2022)

Em síntese, os procedimentos apresentados a seguir resumem a sequência do processo iterativo da força crítica aparente, aplicado no contexto de uma análise não linear geométrica:

1. Definir um valor inicial para as forças externas atuantes, bem como o número total de passos e repetições.
2. Dividir o valor das forças externas pela quantidade de iterações, obtendo-se os passos de carga.
3. Aplicar a análise não linear geométrica (conforme procedimento apresentado no Capítulo 3), considerando cada passo de carga obtido na etapa anterior.
4. Armazenar o valor de força externa associada ao autovalor da matriz Hessiana da energia potencial mais próximo da nulidade, ou ao primeiro autovalor determinado como negativo. Esse valor da força externa é definido como P_n , e caracterizado como uma “força crítica aparente”.
5. Repetir o processo, agora considerando a força externa variando no intervalo entre P_n e o passo de carga imediatamente anterior ou posterior, até que a norma do autovalor seja suficientemente pequena ou até alcançar o número total de repetições.

Cabe observar que o processo iterativo da força crítica aparente possui algumas limitações e não alcançará uma solução computacionalmente eficiente em todas as simulações. Nos casos em que o autovalor da matriz Hessiana variar de forma repentina, entre pequenos intervalos de força externa, é possível que o processo iterativo não alcance a convergência para a tolerância da norma do autovalor, embora um valor aproximado e aceitável para a força crítica possa ser estimado. Além disso, caso o valor inicial da força externa seja menor que o valor real da força crítica, ou demasiadamente maior que este, o processo iterativo possivelmente não obterá resultados factíveis.

4.5 Tipologias estruturais

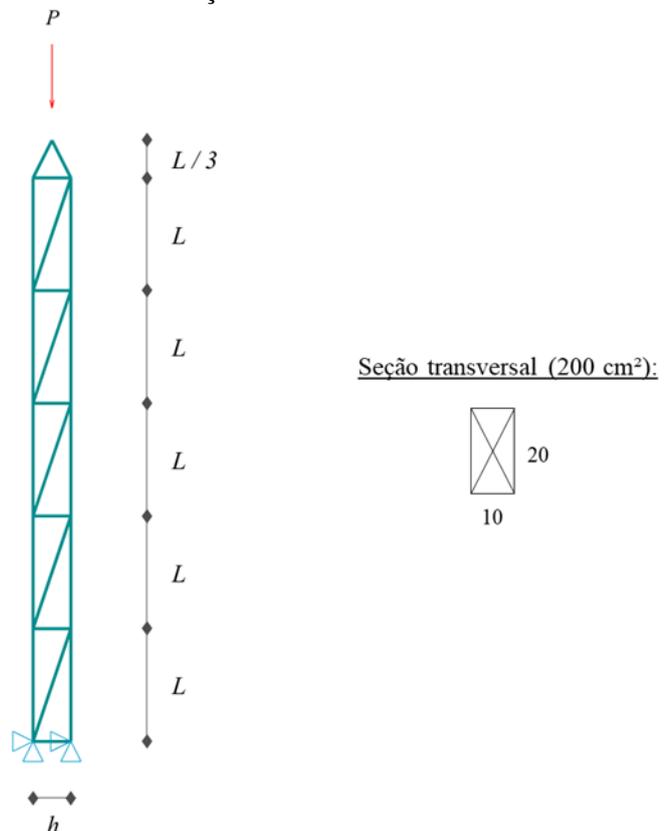
Três tipologias estruturais foram propostas para análise, sendo uma torre treliçada, um arco treliçado e um pórtico treliçado. Esses sistemas foram selecionados com base em observações de aplicações correntes na construção civil e modelos discutidos na literatura (LAHR, 1978; MOLITERNO, 2010; BARATA et al., 2011; CODA, 2018; SILVA et al., 2021a).

Todas as representações gráficas dos modelos estruturais foram traçadas na etapa da pós-processamento dos códigos desenvolvidos e processados em ambiente MATLAB. Os vínculos foram representados graficamente por triângulos, traçados nas direções dos graus de liberdade restringidos.

4.5.1 Treliça torre

A torre treliçada é indicada na Figura 4.4, com $L = 3,0$ m e $h = 1,0$ m. O sistema possui extensão total de 16 m na direção vertical, sendo birrotulado na base. Uma força vertical P é aplicada ao nó da extremidade livre (nó 13). De um modo geral, observa-se que a força P tende a comprimir a treliça. Esse sistema estrutural é amplamente utilizado na construção de torres de vigia florestal, por exemplo.

Figura 4.4 – Torre treliçada

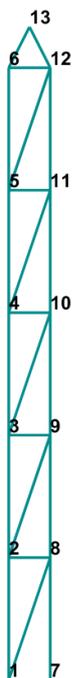


Fonte: Autor (2022)

As barras da torre treliçada possuem seção transversal retangular, com dimensões de 10×20 cm² e área bruta de 200 cm². Somente um tipo de seção transversal foi empregado para todas as barras da treliça.

A localização geral e numeração dos nós da torre treliçada são indicadas na Figura 4.5, e suas respectivas coordenadas são apresentadas na Tabela 4.2. O sistema possui 13 nós e 23 barras no total.

Figura 4.5 – Localização e numeração dos nós da torre treliçada



Fonte: Autor (2022)

Tabela 4.2 – Coordenadas nodais da torre treliçada

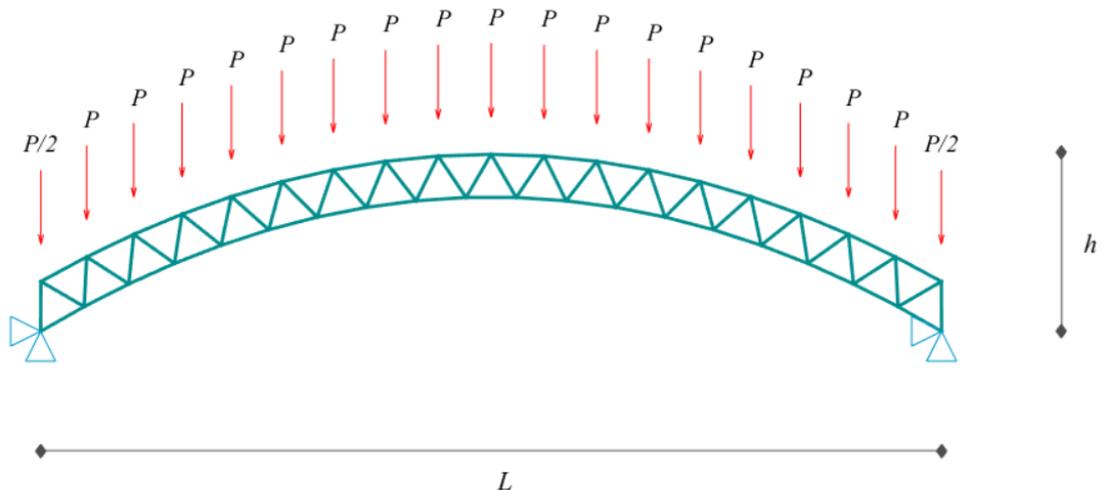
Nó	Coordenada x (m)	Coordenada y (m)
1	0	0
2	0	3,0
3	0	6,0
4	0	9,0
5	0	12,0
6	0	15,0
7	1,0	0
8	1,0	3,0
9	1,0	6,0
10	1,0	9,0
11	1,0	12,0
12	1,0	15,0
13	0,5	16,0

Fonte: Autor (2022)

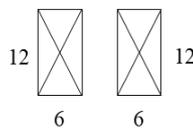
4.5.2 Arco treliçado

O segundo sistema analisado é um arco treliçado biarticulado de madeira (Figura 4.6), com vão (L) de 30 m e altura total (h) de 5,93 m. Esse sistema é uma opção eficiente para utilização como estrutura de coberturas de madeira de médio e longos vãos, acima de 25 m, conforme discutido por Lahr (1978). O arco treliçado também pode ser utilizado em pontes, galpões, ginásios e outras construções, permitindo o aproveitamento do espaço entre a linha horizontal do vão e o banzo inferior (DICKSON; PARKER, 2015). Devido à simetria do arco e das áreas de influência, considera-se que uma força vertical P é aplicada aos nós internos do banzo superior do arco, enquanto os nós de extremidade desse mesmo banzo permanecem sujeitos a apenas metade da força P .

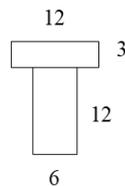
Figura 4.6 – Arco treliçado



Seção transversal dos banzos (144 cm²):



Seção transversal das diagonais (108 cm²):



Fonte: Autor (2022)

As posições iniciais dos banzos inferior e superior dos arcos treliçados podem ser estimadas considerando uma curvatura parabólica, cujas coordenadas do eixo y dependem das coordenadas do eixo x , de acordo com a Equação 4.3. Nessa expressão, a altura máxima medida na vertical é representada por h , e L é o vão entre apoios.

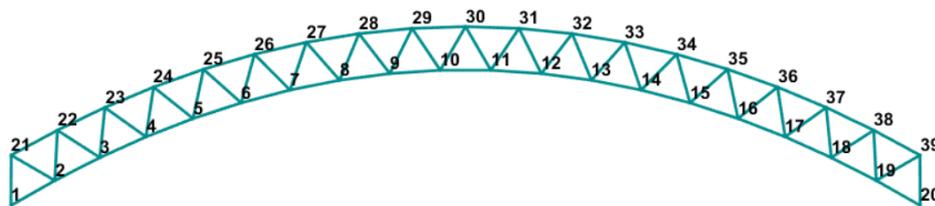
$$y = \frac{4 \cdot h \cdot x}{L^2} \cdot (L - x) \quad (4.3)$$

Para simular a curvatura parabólica, os banzos podem ser divididos em barras retas inclinadas, evitando a necessidade de encurvamento dos elementos durante a execução. As diagonais possuem comprimento aproximadamente igual ao das barras empregadas nos banzos, de forma semelhante à concepção das treliças Warren (TIMOSHENKO, 1953).

Os elementos que constituem os banzos do arco possuem seção transversal composta por duas peças retangulares com dimensões $6 \times 12 \text{ cm}^2$, espaçadas por 6 cm, tendo área bruta de 144 cm^2 . Nas diagonais, uma seção transversal do tipo T foi empregada, com alma de $6 \times 12 \text{ cm}^2$ e mesa de $3 \times 12 \text{ cm}^2$, possuindo área bruta de 108 cm^2 no total. Cabe destacar que a ação do fogo foi considerada em todas as faces das seções transversais, inclusive nas que permaneceram em contato com outras.

A numeração dos nós do arco treliçado é indicada na Figura 4.7, e suas respectivas coordenadas são apresentadas na Tabela 4.3. As barras mais solicitadas localizam-se no banzo inferior do arco, próximas aos apoios. O arco possui 39 nós e 75 barras no total.

Figura 4.7 – Localização e numeração dos nós do arco treliçado



Fonte: Autor (2022)

Tabela 4.3 – Coordenadas nodais do arco treliçado

(continua)

Nó	Coordenada x (m)	Coordenada y (m)
1	0	0
2	1,45	0,83
3	2,93	1,59
4	4,46	2,28
5	6,01	2,88
6	7,60	3,40

Tabela 4.3 – Coordenadas nodais do arco treliçado

(continuação)

Nó	Coordenada x (m)	Coordenada y (m)
7	9,21	3,83
8	10,85	4,15
9	12,50	4,38
10	14,17	4,49
11	15,83	4,49
12	17,50	4,38
13	19,15	4,15
14	20,79	3,83
15	22,40	3,40
16	23,99	2,88
17	25,54	2,28
18	27,07	1,59
19	28,55	0,83
20	30,00	0
21	0	1,67
22	1,53	2,49
23	3,10	3,25
24	4,71	3,93
25	6,35	4,52
26	8,03	5,01
27	9,75	5,41
28	11,48	5,70
29	13,24	5,87
30	15,00	5,93
31	16,76	5,87
32	18,52	5,70
33	20,25	5,41
34	21,97	5,01
35	23,65	4,52
36	25,29	3,93
37	26,90	3,25
38	28,47	2,49
39	30,00	1,67

Fonte: Autor (2022)

4.5.3 Pórtico treliçado

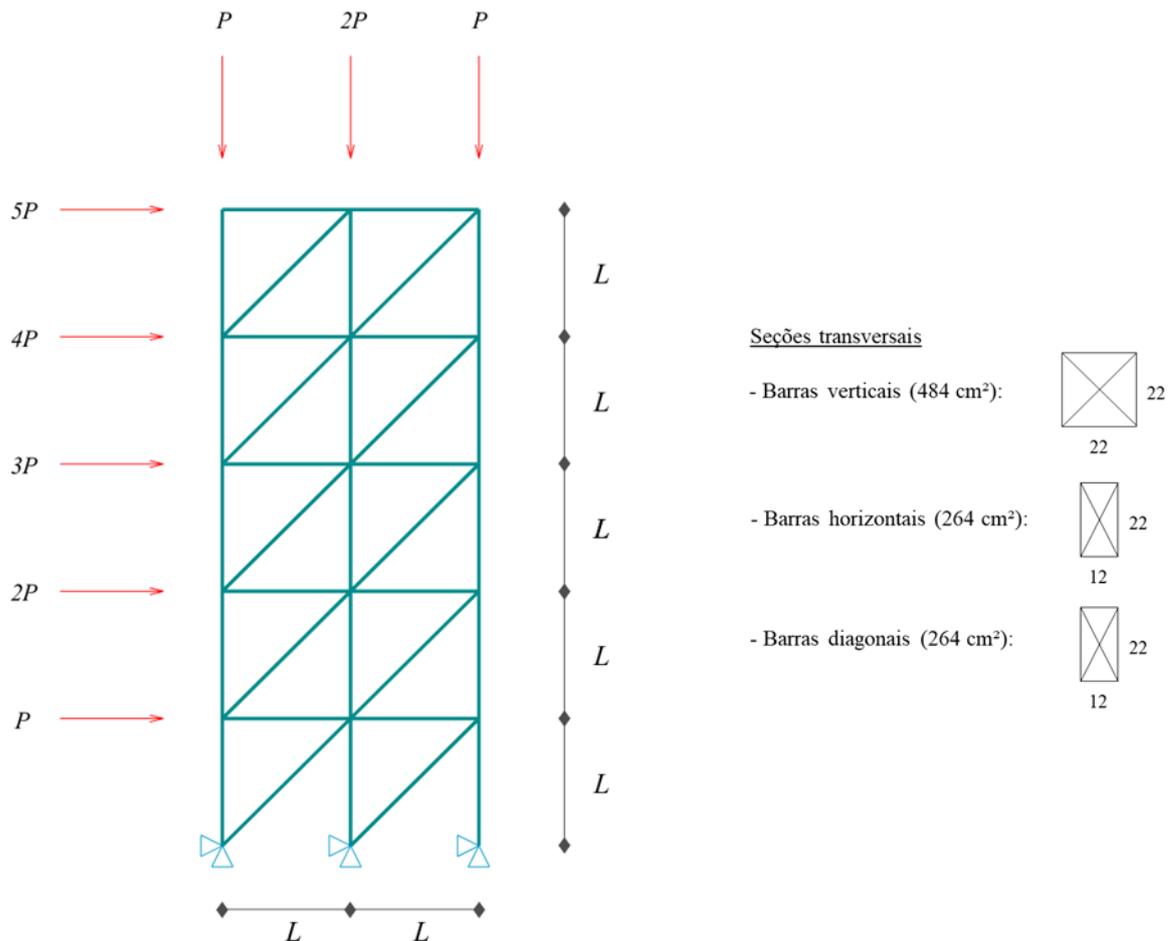
O quarto sistema é um pórtico treliçado (Figura 4.8), com altura total igual a 15,0 m. Trata-se de uma concepção que pode ser utilizada como soluções em sistemas de contraventamento, por exemplo. As forças externas aplicadas nas direções vertical e

horizontal da estrutura são definidas em função de P , na forma $P_i = i \cdot P$. Assim, tem-se: $P_1 = P$; $P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$; $P_4 = 4P$; $P_5 = 5P$.

As barras na direção vertical (pilares), do sistema treliçado, possuem seção transversal com dimensões $22 \times 22 \text{ cm}^2$, com área bruta de 484 cm^2 . As barras horizontais e diagonais possuem dimensões $12 \times 22 \text{ cm}^2$, com área bruta de 264 cm^2 . As barras horizontais e verticais possuem comprimento igual a $3,0 \text{ m}$, enquanto o comprimento das barras diagonais é aproximadamente $4,24 \text{ m}$.

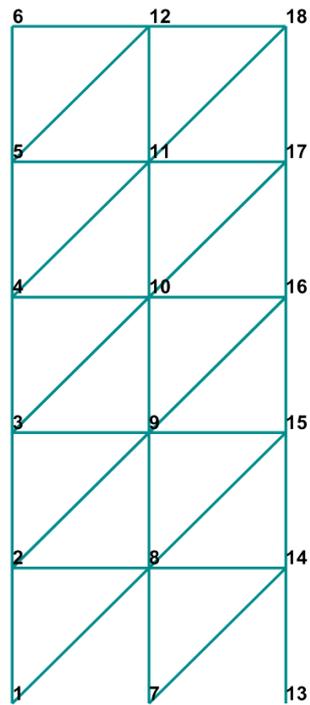
A numeração e localização dos nós são destacadas na Figura 4.9, e suas respectivas coordenadas são apresentadas na Tabela 4.4. Ao todo, são verificados 18 nós e 35 barras no sistema do pórtico treliçado.

Figura 4.8 – Pórtico treliçado



Fonte: Autor (2022)

Figura 4.9 – Localização e numeração dos nós do pórtico treliçado



Fonte: Autor (2022)

Tabela 4.4 – Coordenadas nodais do pórtico treliçado

Nó	Coordenada x (m)	Coordenada y (m)
1	0	0
2	0	3,0
3	0	6,0
4	0	9,0
5	3,0	0
6	3,0	3,0
7	3,0	6,0
8	3,0	9,0
9	6,0	0
10	6,0	3,0
11	6,0	6,0
12	6,0	9,0

Fonte: Autor (2022)

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados alcançados são apresentados neste capítulo, assim como a discussão sobre seus efeitos e significância. Os exemplos numéricos foram analisados a partir das metodologias apresentadas nos capítulos anteriores, combinando-se procedimentos da análise não linear geométrica, do método da seção transversal reduzida e do processo iterativo da força crítica aparente. Parâmetros relevantes quanto ao comportamento estrutural das treliças foram determinados, e os valores foram agrupados em gráficos e figuras. As representações geométricas das treliças foram ilustradas durante o pós-processamento das análises.

5.1 Resultados numéricos

A partir de análises geometricamente linear e não linear, os seguintes parâmetros relacionados às treliças de madeira foram determinados: deslocamento máximo, força interna na barra mais solicitada, tensão normal na barra mais solicitada e força crítica de instabilidade do sistema estrutural. Os resultados foram obtidos considerando condição de temperatura ambiente, representada por tempo de exposição ao fogo nulo ($t = 0$), e em situação de incêndio, com tempo máximo de exposição igual a 20 minutos.

É importante ressaltar que três procedimentos normativos foram empregados, sendo o projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190:2013, a norma europeia norma europeia EN 1995-1-2:2004 e a norma australiana AS 1720.4. Para simplificar a menção aos procedimentos normativos, eles serão chamados de procedimento I (projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190:2013), procedimento II (norma europeia EN 1995-1-2:2004) e procedimento III (norma australiana AS 1720.4). Os resultados alcançados por diferentes normas foram comparados ao procedimento do projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190:2013, com a variação percentual estimada em relação a esta referência.

As forças externas aplicadas aos nós das treliças foram aumentadas gradualmente até o alcance de um estado-limite estipulado para cada treliça, em temperatura ambiente. No caso da torre treliçada, o estado-limite de serviço de deslocamento foi empregado para estimar a força externa em valor máximo admissível. Para o arco treliçado, a força externa foi definida em função da capacidade resistente do modelo relacionado à espécie de madeira com menor resistência (*Pinus*), uma vez que sua capacidade resistente foi superada antes de atingir o limite de deslocamento. No caso do pórtico treliçado, empregou-se o mesmo procedimento adotado nas análises do arco treliçado.

Todos os valores alcançados, assim como as representações gráficas dos modelos estruturais, foram obtidos diretamente a partir da programação de códigos em linguagem MATLAB, com processamento em ambiente homônimo.

5.1.1 Treliça torre

A força externa (P) foi aplicada até que um deslocamento máximo análogo a $L/200$ fosse observado, em uma análise não linear geométrica, para cada modelo da torre treliçada em temperatura ambiente. Para a tipologia de torre treliçada, a variável L foi adotada como a maior extensão da treliça, igual a 16,0 m. Conseqüentemente, obteve-se $L/200$ equivalente a 8,0 cm, sendo este o valor admissível de deslocamento considerado na condição de Estado Limite de Serviço (ELS) em temperatura ambiente. A força externa total, associada ao deslocamento de $L/200$, foi diferente para cada espécie de madeira, conforme Tabela 5.1.

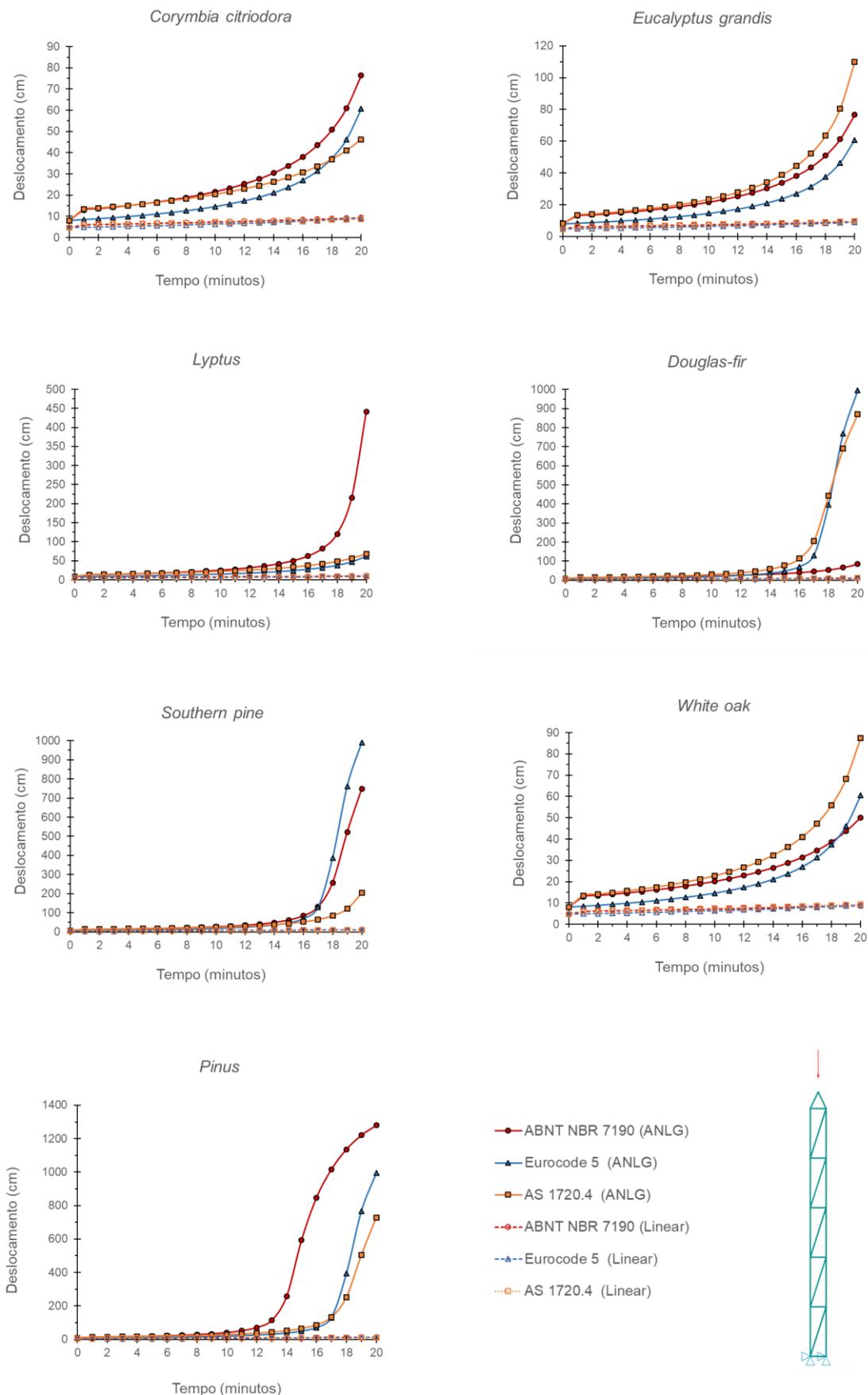
Tabela 5.1 – Forças externas na treliça torre conforme a espécie de madeira

Espécie	P (kN)	Deslocamento (cm)
<i>Corymbia citriodora</i>	779,0	
<i>Eucalyptus grandis</i>	542,0	
<i>Lyptus</i>	331,0	
<i>Douglas-fir</i>	567,0	8,0
<i>Southern Pine</i>	579,0	
<i>White oak</i>	520,0	
<i>Pinus</i>	246,0	

Fonte: Autor (2022)

Em todos os casos, o deslocamento nodal máximo da torre treliçada ocorreu na direção vertical do nó 13. Os gráficos da Figura 5.1 ilustram a variação desse deslocamento, para cada espécie ao longo do tempo de exposição ao fogo, assim como para os três procedimentos normativos e a análise empregada, linear ou não linear geométrica. Observa-se que a situação mais desfavorável para todas as espécies foi obtida conforme a análise não linear geométrica, e houve divergências quanto ao procedimento normativo. Para as treliças constituídas por *Corymbia citriodora*, *Lyptus* e *Pinus*, o procedimento I estimou maiores deslocamentos, enquanto o procedimento II foi associado a deslocamentos superiores para a *Southern Pine* e o procedimento III foi predominante para as espécies *Eucalyptus grandis* e *White oak*. Os maiores deslocamentos da espécie *Douglas-fir* foram observados conforme o procedimento III até 17 minutos, e de acordo com o procedimento II entre 18 e 20 minutos.

Figura 5.1 – Deslocamento nodal máximo da treliça torre



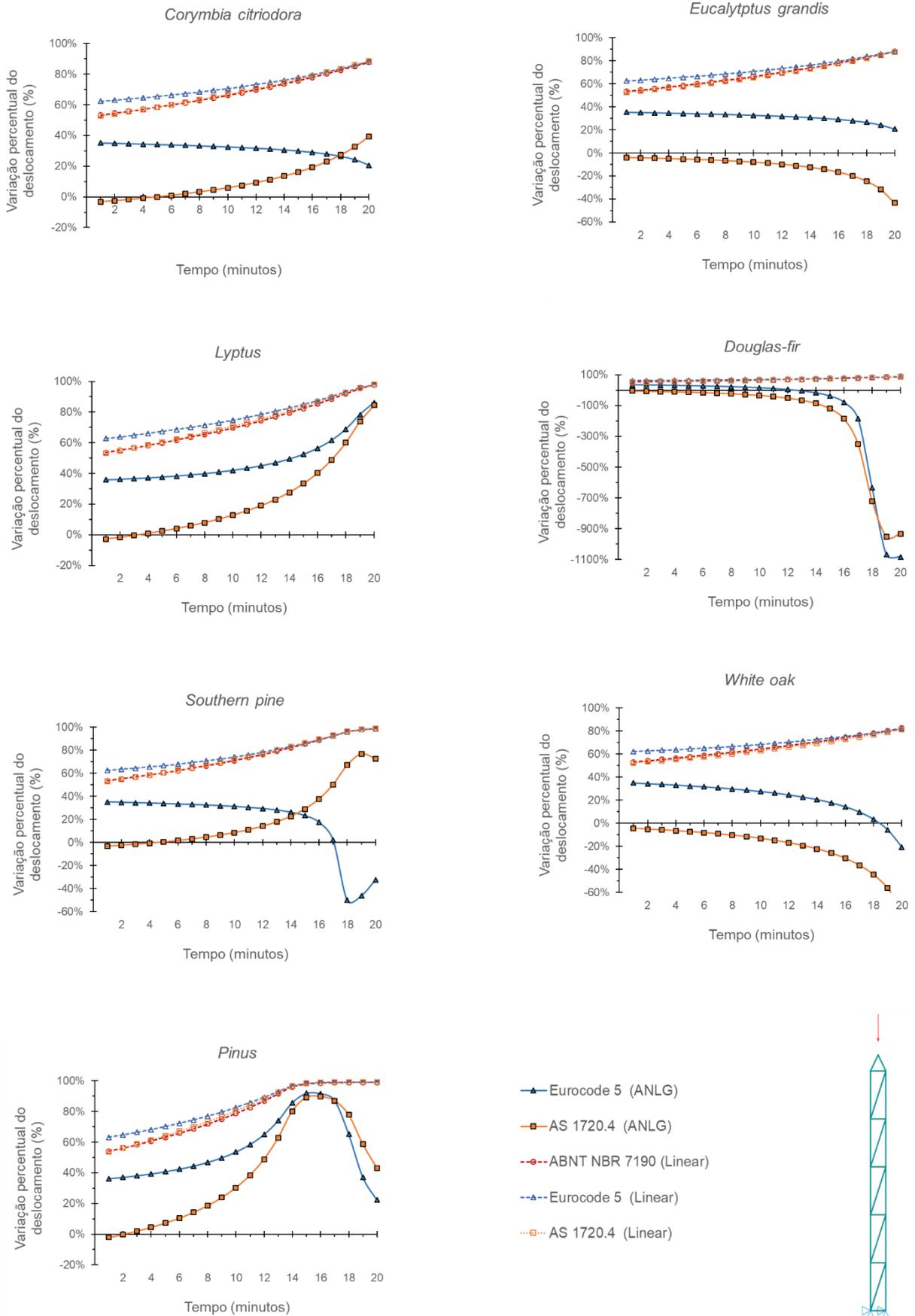
Fonte: Autor (2022)

A variação percentual dos deslocamentos, em relação à análise não linear geométrica pelo procedimento I, é indicada na Figura 5.2. Diferenças notáveis entre as análises linear e não linear geométrica foram observadas em todas as comparações, assim como a variação proporcionada pela utilização de diferentes procedimentos normativos e taxas de carbonização. Em geral, as diferenças aumentaram conforme o tempo de exposição ao fogo, chegando a aproximadamente 100% em alguns casos. A variação do deslocamento do modelo com espécie *Douglas-fir* foi exorbitante a partir dos 15 minutos, em virtude das diferentes taxas de carbonização adotadas em cada procedimento, considerando que o valor obtido segundo estudos experimentais (0,59 mm/min) foi menor que os estimados pelas normas europeia (0,80 mm/min) e australiana (0,74 mm/min).

Com auxílio do algoritmo desenvolvido, foram previstos os tempos críticos de incêndio, associados ao instante em que a tensão normal em uma ou mais barras superou a resistência à tração ou compressão na direção paralela às fibras da madeira. As situações mais críticas para cada modelo da treliça torre foram representadas na Figura 5.3, que ilustra as tensões nas barras da treliça conforme diagrama de cores no padrão RGB, considerado o tempo crítico de incêndio e o procedimento relacionado à previsão mais desfavorável (com menor tempo crítico). O procedimento I estimou menor tempo crítico de incêndio para as espécies *Corymbia citriodora*, *Lyptus*, *Pinus* e *Southern pine*, enquanto o procedimento III aferiu para as espécies *Eucalyptus grandis*, *Douglas-fir* e *White oak*. Em valores absolutos, os menores tempos críticos foram observados para as espécies *Pinus* e *Douglas-fir*, embora esta tenha resistência à compressão paralela às fibras aproximadamente 50% maior que a da primeira. O mesmo tempo crítico foi alcançado por essas espécies em virtude das estimativas das taxas de carbonização pelos diferentes procedimentos, além das diferenças nos valores de módulos de elasticidade e da força externa admitida.

Os gráficos da Figura 5.4 ilustram a variação da tensão na barra mais solicitada dos modelos de treliça torre, conforme o tempo de exposição ao fogo e as espécies de madeira. A variação percentual, em relação ao procedimento I, é indicada na Figura 5.5. Com relação aos procedimentos empregados, as situações mais críticas foram as mesmas observadas no caso do deslocamento. Variações percentuais significativas também podem ser notadas nos gráficos da Figura 5.5, principalmente na comparação entre as análises linear e não linear geométrica. Resultados obtidos por análises lineares tiveram variação de até 100%, para menos, em comparação com resultados da análise não linear geométrica pelo procedimento I ao longo do tempo. Mesmo no primeiro minuto de incêndio, a variação foi superior a 15% em muitos casos.

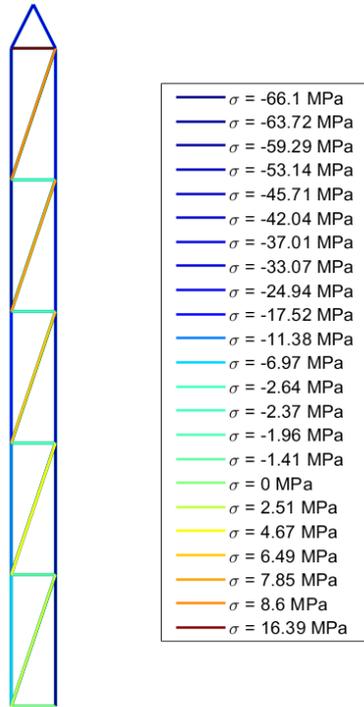
Figura 5.2 – Variação do deslocamento máximo da treliça torre



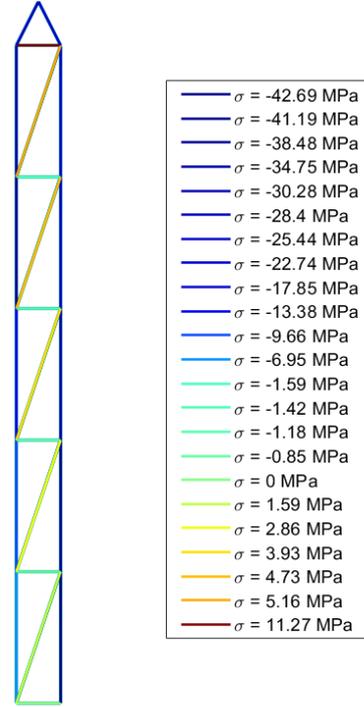
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.3 – Tensões normais nas barras da treliça torre durante o tempo crítico (continua)

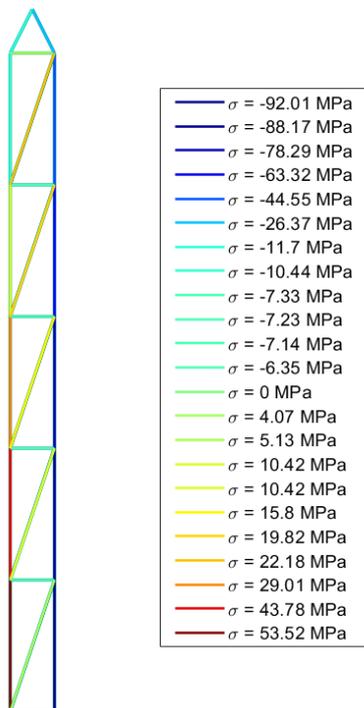
Espécie: *Corymbia citriodora* ($f_{c0} = 62.0$ MPa)
 Procedimento: I
 t = 17 min ($\beta = 0.58$ mm/min)



Espécie: *Eucalyptus grandis* ($f_{c0} = 40.3$ MPa)
 Procedimento: III
 t = 15 min ($\beta = 0.59$ mm/min)



Espécie: *Lyptus* ($f_{c0} = 60.7$ MPa)
 Procedimento: I
 t = 19 min ($\beta = 0.69$ mm/min)



Espécie: *Douglas-fir* ($f_{c0} = 49.9$ MPa)
 Procedimento: III
 t = 13 min ($\beta = 0.69$ mm/min)

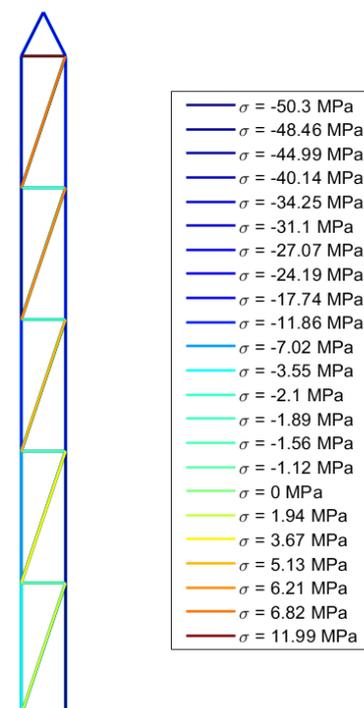
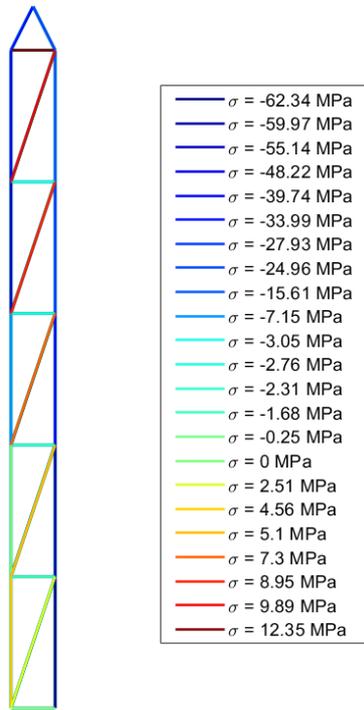


Figura 5.3 – Tensões normais nas barras da treliça torre durante o tempo crítico
(continuação)

Espécie: *Southern pine* ($f_{c0} = 58.4\text{MPa}$)

Procedimento: I

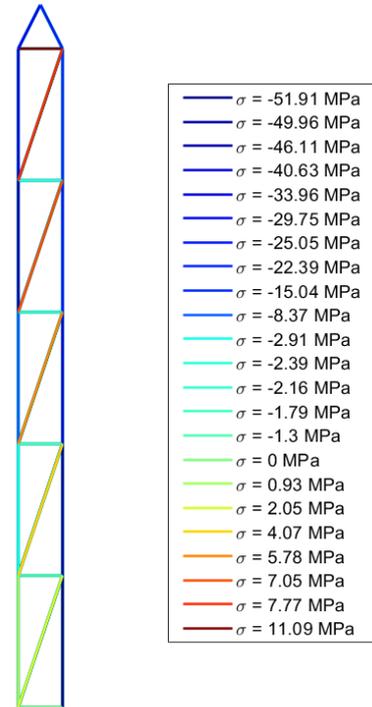
t = 15 min ($\beta = 0.74\text{ mm/min}$)



Espécie: *White oak* ($f_{c0} = 51.3\text{ MPa}$)

Procedimento: III

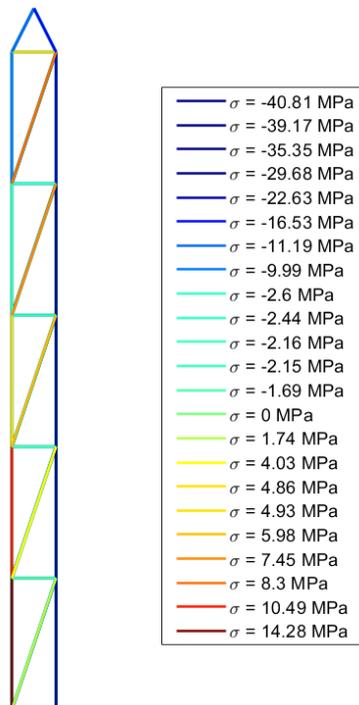
t = 18 min ($\beta = 0.57\text{ mm/min}$)



Espécie: *Pinus* ($f_{c0} = 32.1\text{ MPa}$)

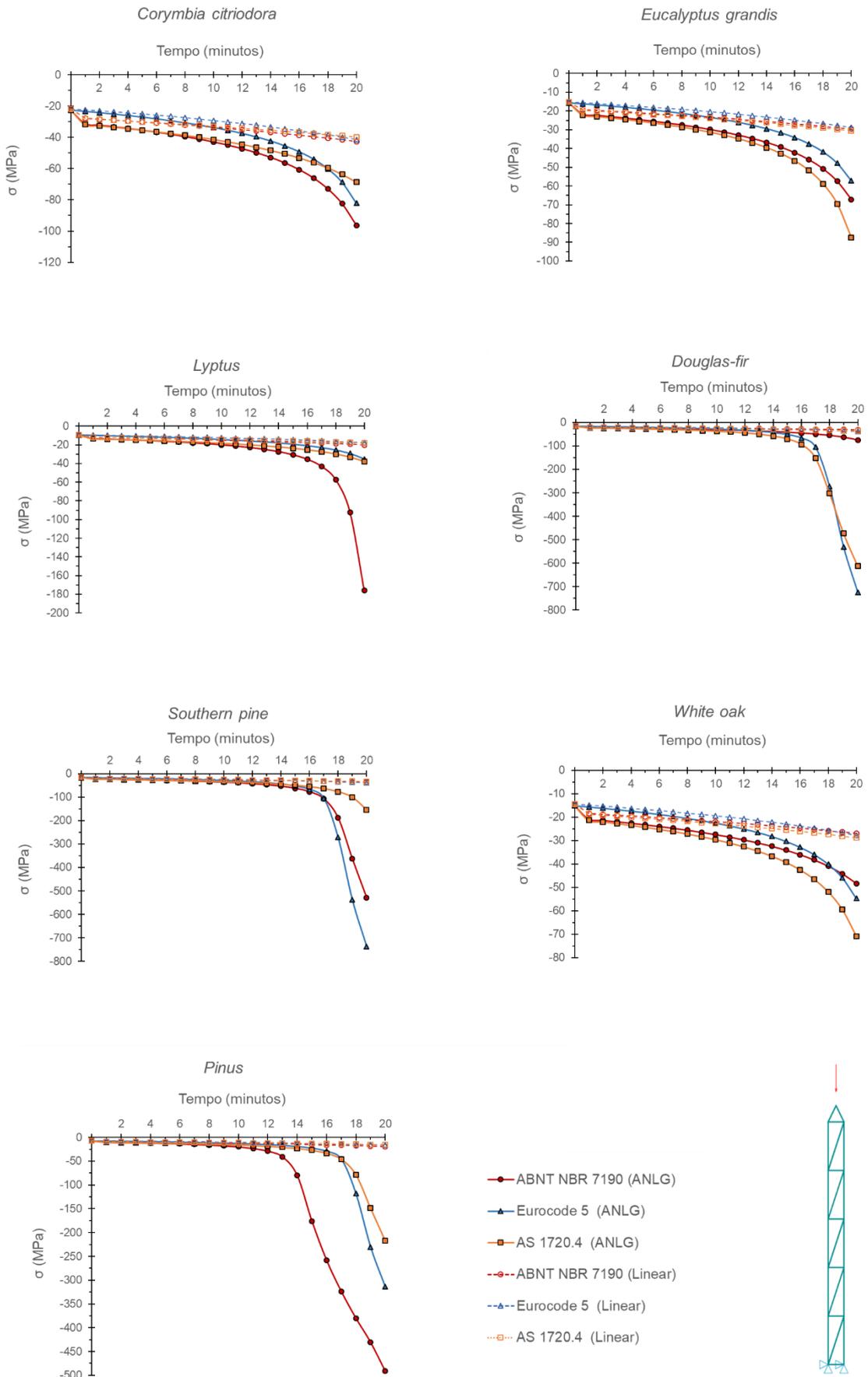
Procedimento: I

t = 13 min ($\beta = 0.95\text{ mm/min}$)



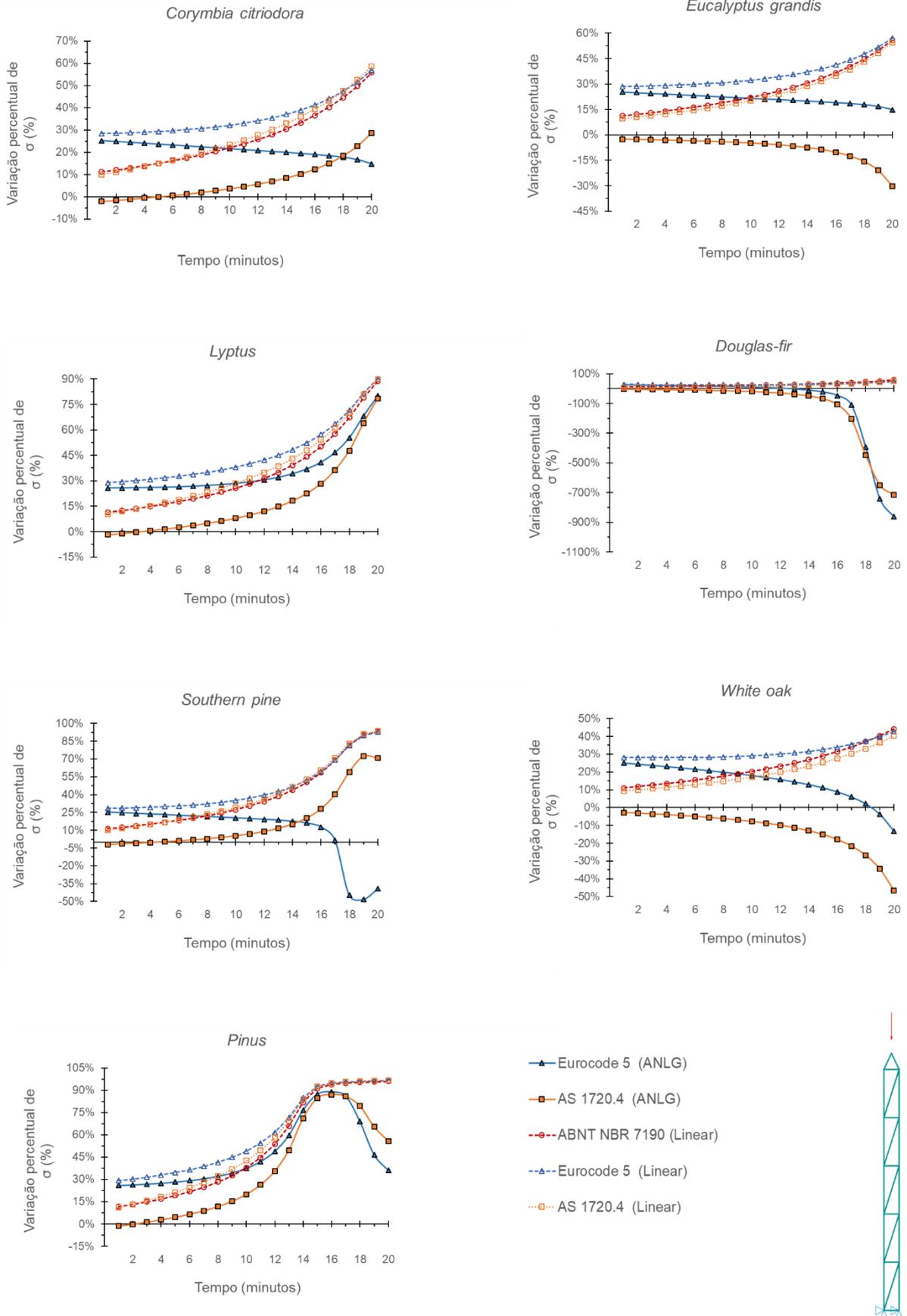
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.4 – Tensão normal na barra mais solicitada da treliça torre



Fonte: Autor (2022)

Figura 5.5 – Variação da tensão normal na barra mais solicitada da treliça torre



Fonte: Autor (2022)

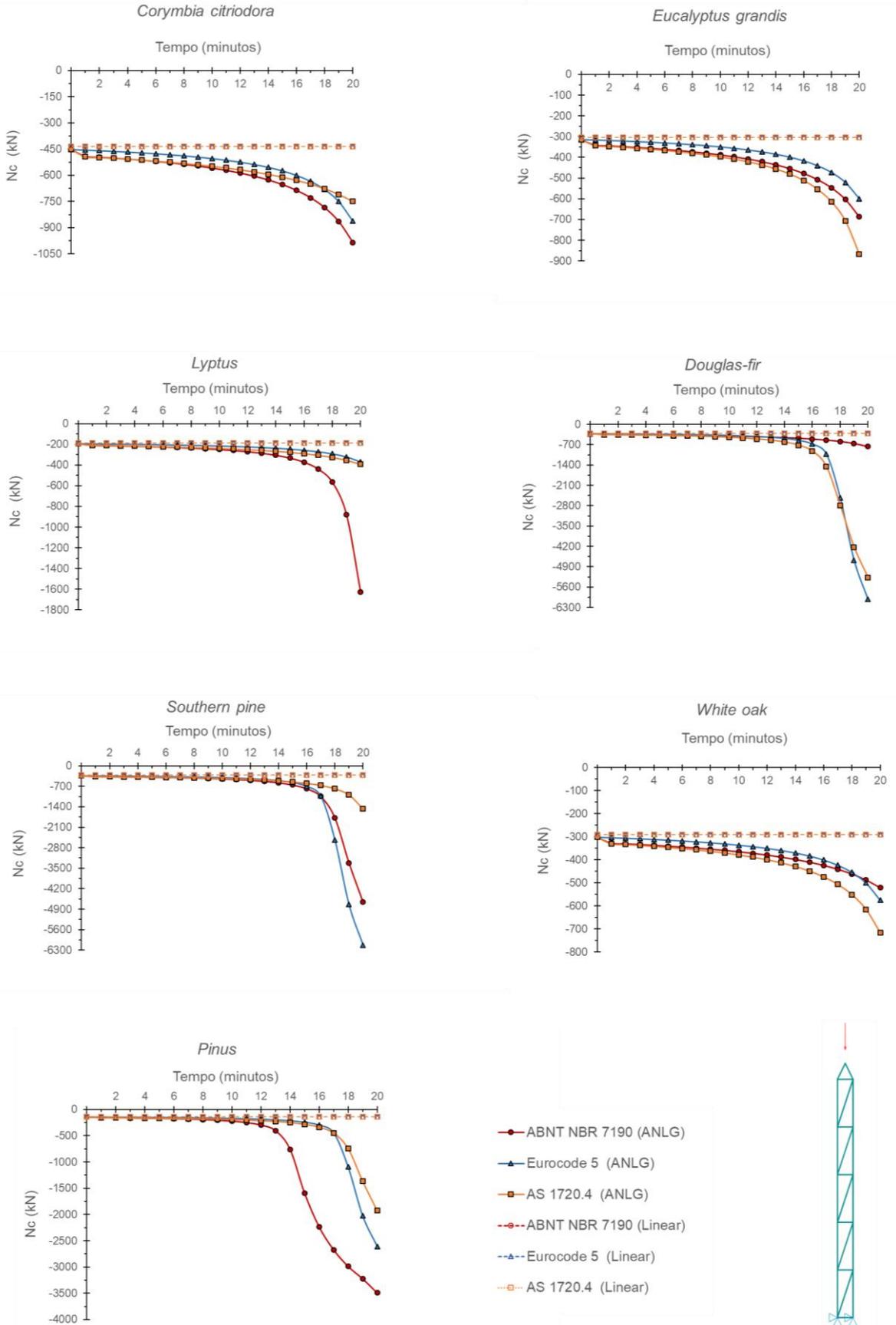
Ainda com relação à variação percentual da tensão normal máxima (Figura 5.5), os resultados obtidos por análise não linear geométrica a partir do procedimento II apresentaram discrepâncias em relação ao procedimento I, com diferenças iniciais de aproximadamente 25% nos primeiros minutos de incêndio. Valores obtidos conforme procedimento III apresentaram maior concordância com aqueles alcançados pelo procedimento I para os primeiros 8 minutos em geral.

A variação da força interna na barra mais solicitada da treliça torre, para cada análise e espécie de madeira ao longo do tempo de exposição ao fogo, são indicadas na Figura 5.6, com a variação percentual apontada na Figura 5.7. Em todos os casos, a força interna de compressão foi verificada na barra mais solicitada, localizada entre os nós 7 e 8 da treliça. Em geral, as variações exibiram padrão semelhante aos da tensão normal na barra mais solicitada.

Exemplos de configurações deformadas da torre treliçada são representados na Figura 5.8, que foram elaborados a partir do algoritmo desenvolvido. No primeiro caso (5.8a), verifica-se a configuração deformada devido à aplicação de força externa inferior à força crítica de instabilidade. No segundo caso (5.8b), o primeiro modo de instabilidade da torre treliçada é representado, quando a força externa é equivalente à força crítica. No terceiro caso (5.8c), a configuração pós-instabilidade é ilustrada, com a força externa sendo superior à força crítica.

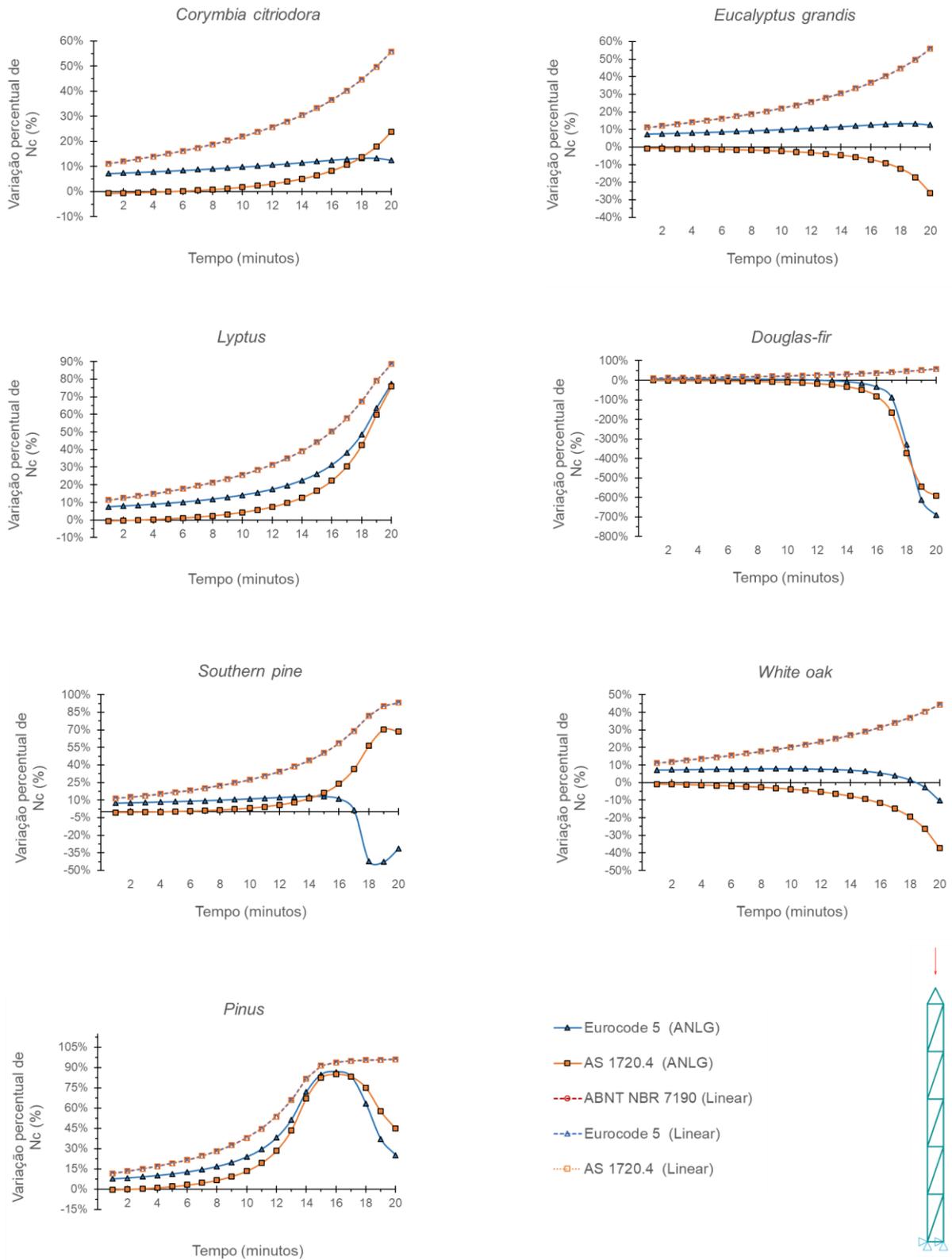
A força crítica de instabilidade da treliça também diminui em situação de incêndio, e sua variação é indicada na Figura 5.9, em função de cada espécie prevista e o tempo de exposição ao fogo. A variação percentual é representada na Figura 5.10. Comparando-se os resultados obtidos para as espécies *Corymbia citriodora*, *Eucalyptus grandis*, *Southern pine* e *White oak*, constatou-se que a variação percentual absoluta da força crítica manteve certo padrão, com a diferença entre os procedimentos I e III inferior a 10% ao longo do tempo. Para as demais espécies, tanto os procedimentos II e III alcançaram forças críticas com variação percentual absoluta superior a 10% em relação ao procedimento I. As forças críticas associadas ao procedimento II apresentaram variação significativa em relação às que foram obtidas pelos procedimentos I e III, principalmente nos tempos iniciais, tendo em vista as hipóteses de aquecimento lento da madeira e menor espessura inicial de carbonização previstas pelo procedimento II, além de diferenças nas taxas de carbonização estimadas. Assim, as forças críticas determinadas a partir desse procedimento foram maiores nos primeiros minutos de exposição ao fogo.

Figura 5.6 – Força de compressão na barra mais solicitada da treliça torre



Fonte: Autor (2022)

Figura 5.7 – Variação da força interna na barra mais solicitada da treliça torre



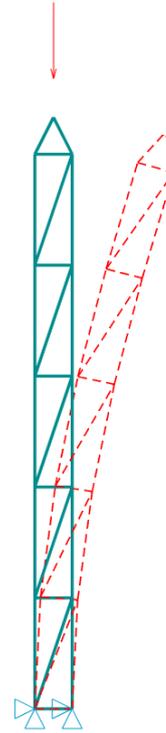
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.8 – Configurações iniciais e deformadas da treliça torre

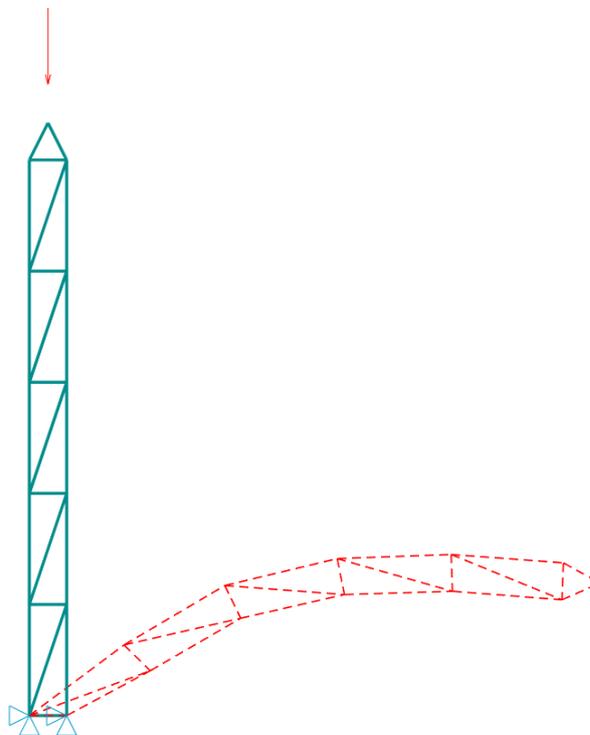
a) $P < P_{cr}$



b) $P = P_{cr}$



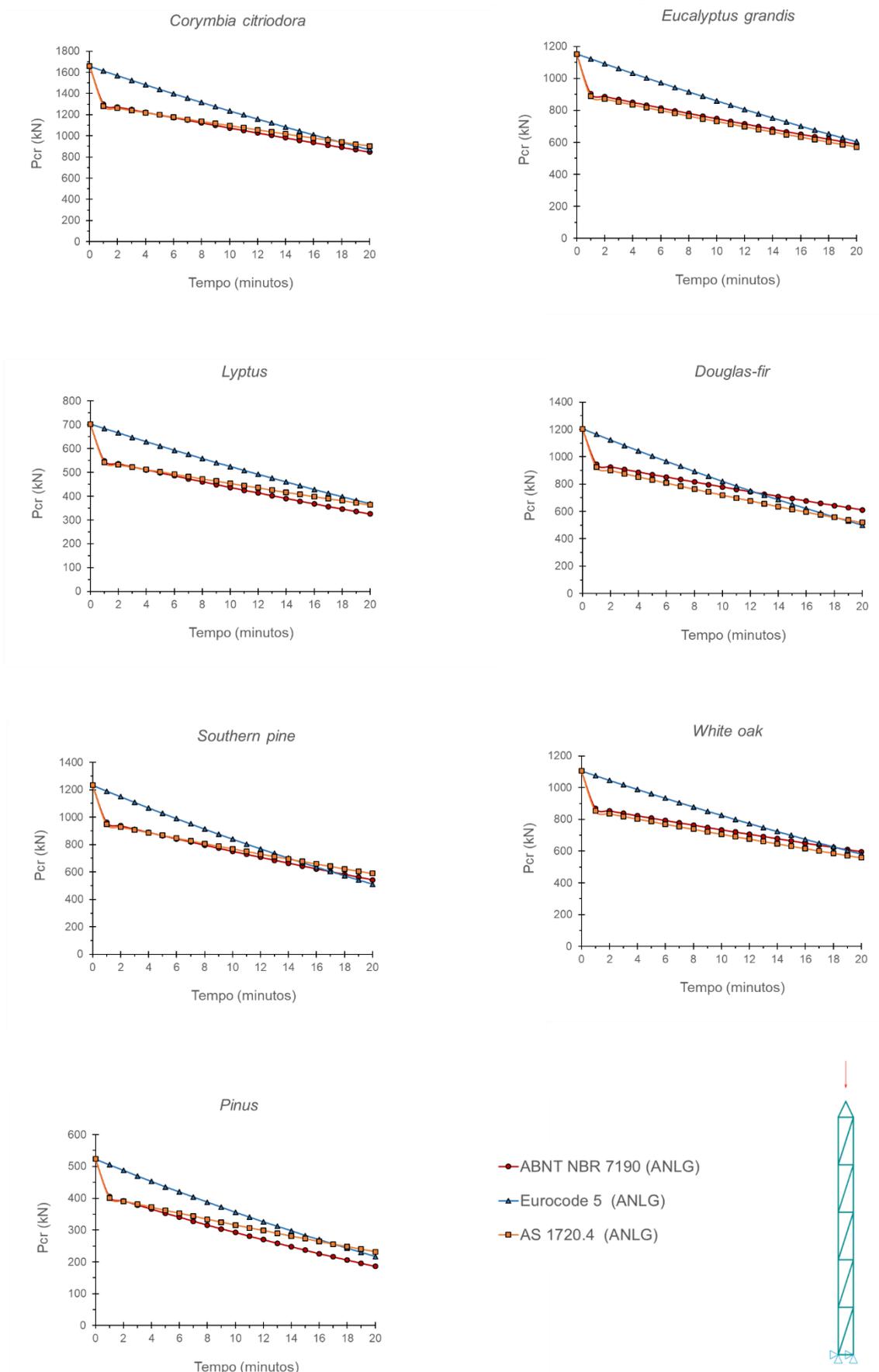
c) $P > P_{cr}$



— Configuração inicial
- - - Configuração deformada

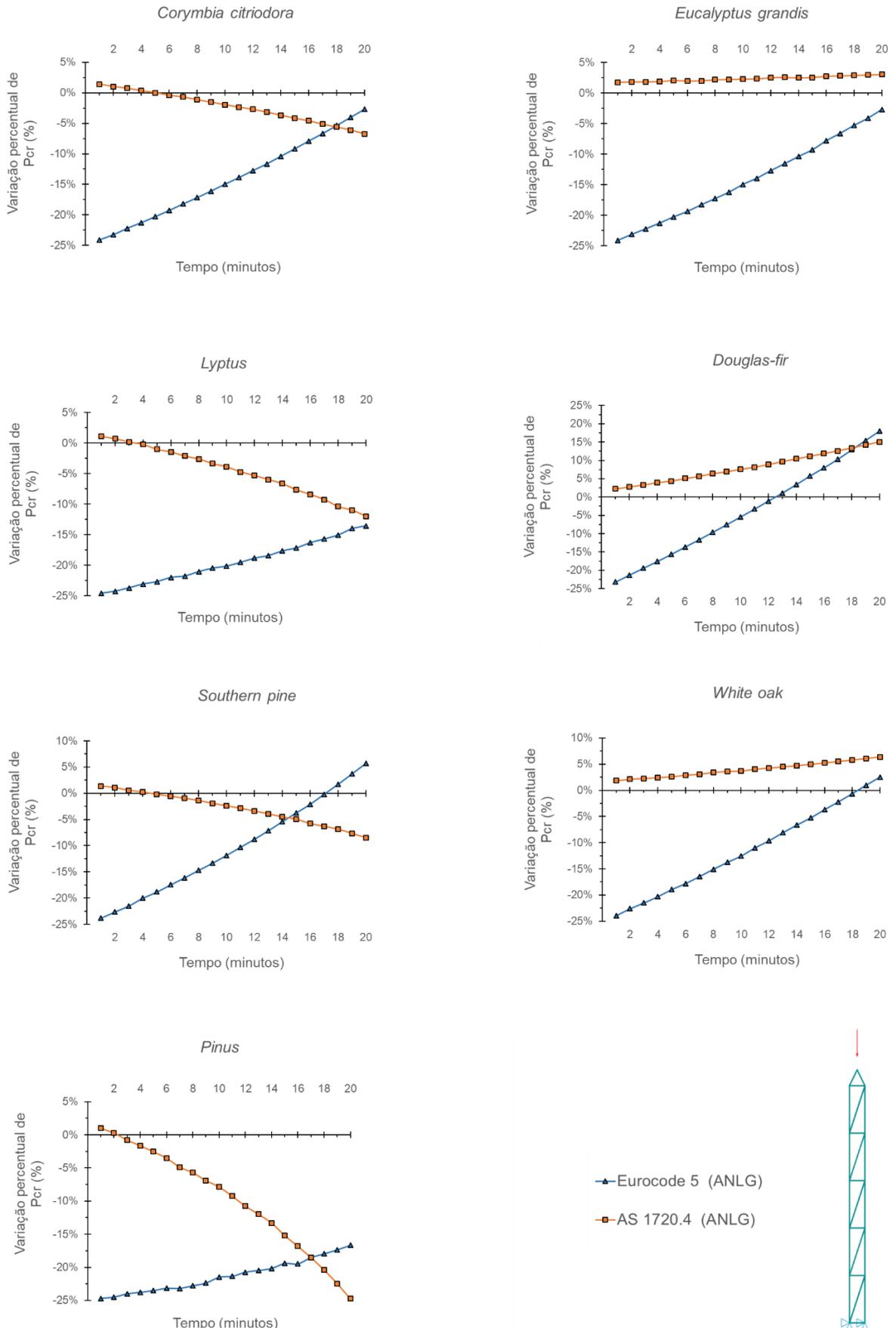
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.9 – Força crítica de instabilidade da treliça torre



Fonte: Autor (2022)

Figura 5.10 – Variação da força crítica de instabilidade da treliça torre



Fonte: Autor (2022)

A ocorrência de alguns saltos foi observada nos gráficos dos deslocamentos nodais máximos, assim como nos gráficos de tensões normais e forças internas nas barras mais solicitadas da treliça torre. Considerando os resultados proporcionados pela análise não linear geométrica realizada conforme procedimento I, os parâmetros aumentaram de forma significativa a partir dos 18 minutos de exposição ao fogo para a espécie *Lyptus*, por exemplo. O mesmo pode ser dito para as espécies: *Douglas-fir*, a partir dos 18 minutos de exposição para os procedimentos II e III; *Southern Pine*, a partir dos 18 minutos de exposição para os procedimentos I e II; *Pinus*, a partir dos 15 minutos de exposição para o procedimento I e 18 minutos para os procedimentos II e III. Essa variação acentuada nos resultados ocorreu devido à instabilidade da treliça, visto que a redução da seção resistente devido à carbonização proporcionou perda de estabilidade, e a força externa atuante superou a força crítica de instabilidade do sistema nos instantes referidos.

Embora a instabilidade tenha sido observada nos primeiros 20 minutos de incêndio para diversos modelos, em geral o fenômeno não foi a condição mais crítica para a treliça torre, uma vez que, ao longo do tempo de exposição ao fogo, a resistência à compressão paralela às fibras da barra mais solicitada foi superada primeiramente.

5.1.2 Arco treliçado

Testes iniciais foram realizados para a estimativa da força externa máxima aplicada nos modelos de arco treliçado. Primeiramente, buscou-se utilizar valores de força externa associados a um deslocamento máximo análogo a $L/200$, determinados a partir de uma análise não linear geométrica em temperatura ambiente. Contudo, em virtude da elevada rigidez proporcionada pelo sistema curvo, esse deslocamento foi observado somente após a resistência à compressão da barra mais solicitada ser ultrapassada em alguns modelos, o que inviabilizou adotar essa condição para o arco treliçado. Assim, valores inferiores foram testados para a força externa, principalmente nos modelos associados a espécies com menores parâmetros de resistência e módulo de elasticidade. O valor de 30 kN foi obtido como uma alternativa plausível após testes numéricos, e atribuído para as forças externas atuantes nos nós internos do banzo superior em todos os modelos. Os nós extremos do arco treliçado receberam somente metade desse valor, conforme apresentado no capítulo anterior e ilustrado na Figura 4.5.

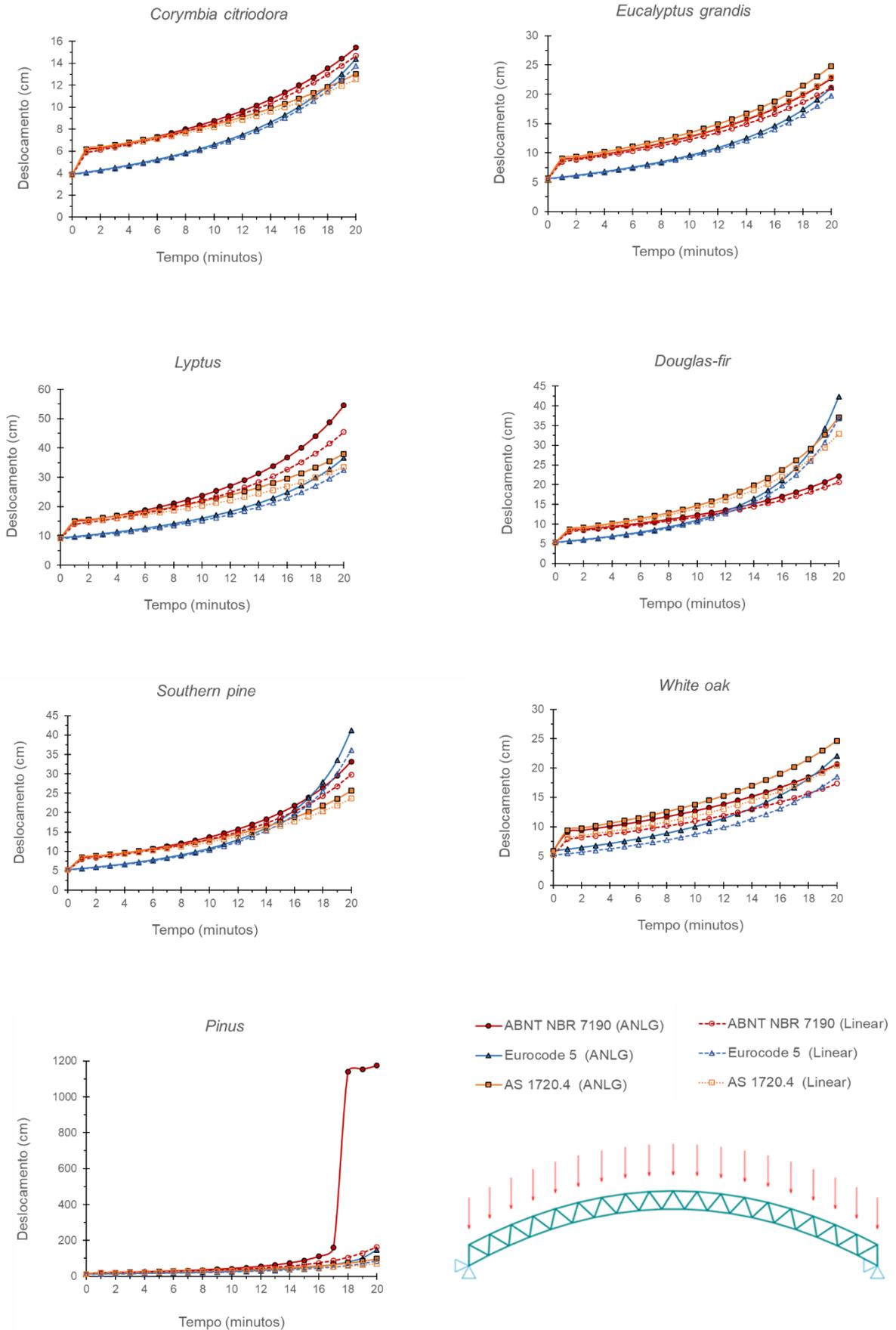
O deslocamento nodal máximo do arco treliçado incidiu na direção vertical do nó 30, sendo este o nó central do sistema. Sua variação é representada na Figura 5.11, considerando-

se as espécies de madeira, os tipos de análise e a variação do tempo de exposição ao fogo. A variação percentual, em relação ao procedimento I, é apontada na Figura 5.12. Em geral, notou-se que houve menor variação percentual entre os procedimentos utilizados, embora o procedimento II ainda tenha apresentado deslocamento com variação superior a 30% nos primeiros minutos de incêndio. Essa variação diminuiu conforme o tempo, mas somente para três espécies: *Corymbia citriodora*, *Eucalyptus grandis* e *White oak*. Para as espécies *Douglas-fir* e *Southern pine*, a variação absoluta do procedimento II diminuiu com o tempo, com resultados próximos dos valores obtidos pela análise não linear geométrica do procedimento I em alguns instantes, mas aumentou até os 20 minutos de incêndio. Com relação à espécie *Lyptus*, a variação do procedimento II foi quase constante ao longo do tempo. Já o procedimento III apresentou pouca variação nos primeiros minutos para todas as espécies, mas tal variação aumentou significativamente com o tempo. A única exceção foi relacionada à espécie *Eucalyptus grandis*, em que o procedimento III apresentou variação inferior a 10% aos 20 minutos.

Quanto às análises linear e não linear geométrica, constatou-se uma menor variação entre os resultados proporcionados por ambas, dependendo da espécie avaliada. Para as espécies *Corymbia citriodora*, *Eucalyptus grandis*, *Douglas-fir* e *Southern pine*, a variação do deslocamento foi inferior a 10%, na comparação entre as análises linear e não linear geométrica para o procedimento I. Ao longo do tempo, as espécies *Lyptus* e *White oak* exibiram variação superior a 10% quanto ao tipo de análise, mas inferior a 20%. A variação do deslocamento da espécie *Pinus*, conforme as duas análises, foi menor que 10% até o tempo de exposição de 7 minutos, aumentando posteriormente e de forma significativa nos minutos finais.

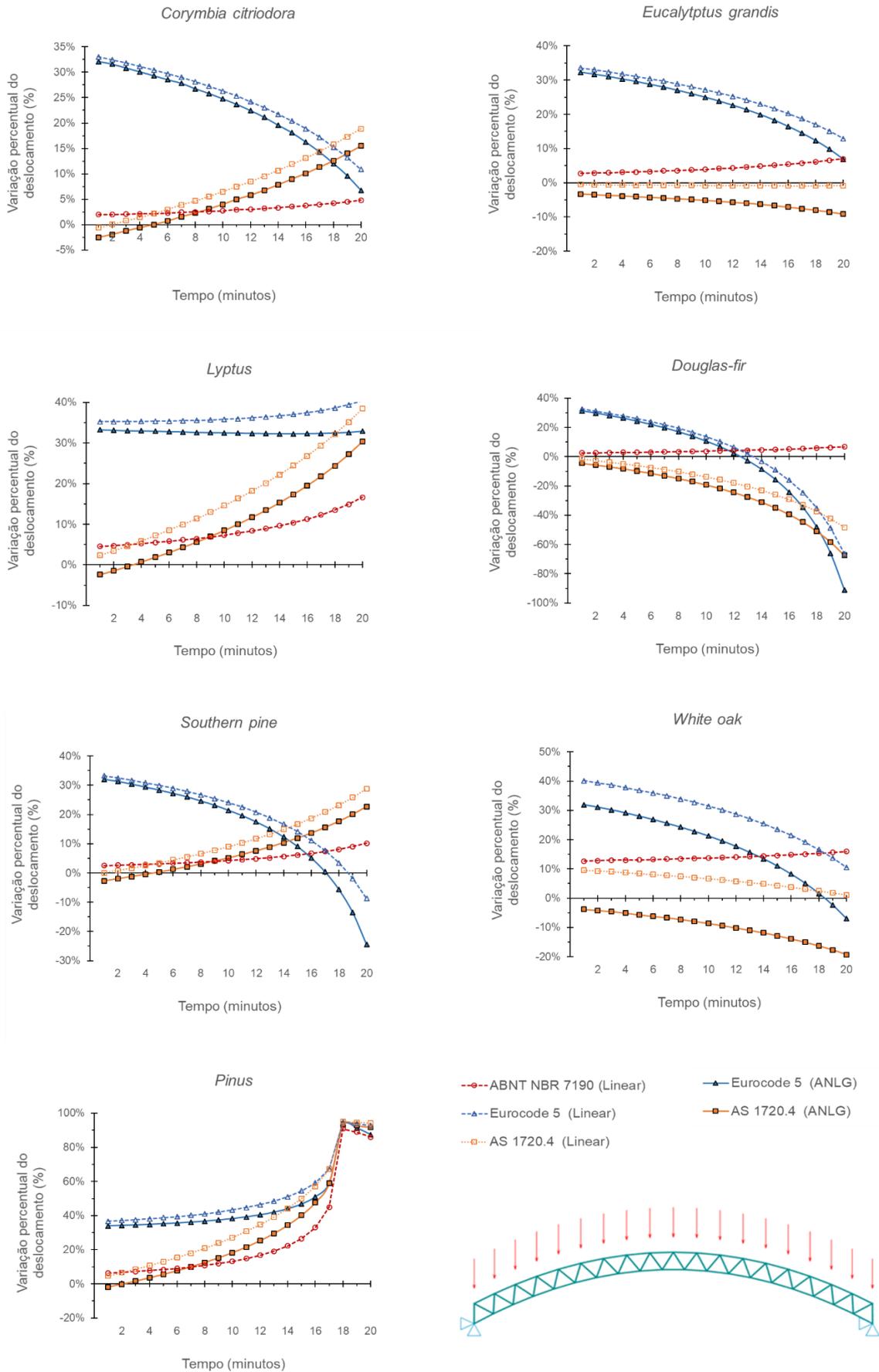
Como a geometria do arco treliçado e o carregamento atuante possuem simetria, a tensão normal máxima de compressão ocorreu em duas barras do sistema, compreendidas entre os nós 1-2 e 19-20. A Figura 5.14 ilustra a distribuição das tensões normais nos elementos do arco treliçado, no instante crítico em que a tensão normal de compressão em uma das barras mais solicitadas ultrapassou a resistência à compressão paralela às fibras de cada espécie de madeira. Em todos os casos, a resistência à tração somente foi superada pela tensão normal máxima de tração em instantes posteriores, logo a compressão foi mais crítica para o sistema do arco treliçado.

Figura 5.11 – Deslocamento máximo do arco treçado



Fonte: Autor (2022)

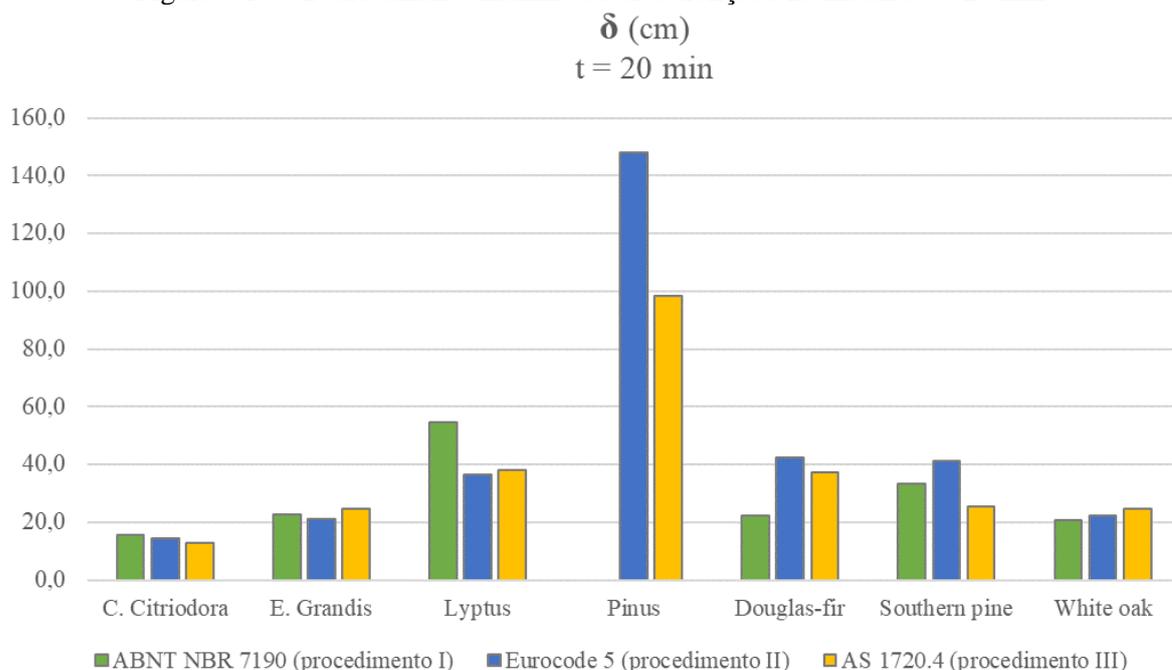
Figura 5.12 – Variação do deslocamento máximo do arco treliçado



Fonte: Autor (2022)

Os valores de deslocamento máximo do arco treliçado, aos 20 minutos de exposição ao fogo, são agrupados no gráfico da Figura 5.13, conforme as espécies de madeira e os procedimentos de análise. O valor obtido pelo procedimento I para a espécie *Pinus* foi omitido, uma vez que pode ser associado a um comportamento pós-crítico e possui ordem de grandeza muito maior que os demais.

Figura 5.13 – Deslocamento máximo do arco treliçado no instante $t = 20$ min



Fonte: Autor (2022)

Segundo o gráfico da Figura 5.13, percebe-se que o deslocamento da espécie *Pinus* foi consideravelmente maior. A espécie *Corymbia citriodora* apresentou menor deslocamento que os demais, em todos os casos. Efetuando uma comparação geral, é possível verificar a seguinte ordem de valores obtidos para o deslocamento máximo aos 20 minutos, considerando os procedimentos I, II e III, respectivamente:

- (i) *Pinus* > *Lyptus* > *Southern pine* > *Eucalyptus grandis* > *Douglas-fir* > *White oak* > *Corymbia citriodora*;
- (ii) *Pinus* > *Douglas-fir* > *Southern pine* > *Lyptus* > *White oak* > *Eucalyptus grandis* > *Corymbia citriodora*;
- (iii) *Pinus* > *Lyptus* > *Douglas-fir* > *Southern pine* > *Eucalyptus grandis* > *White oak* > *Corymbia citriodora*;

Verifica-se que, com exceção dos valores extremos proporcionados pelas espécies *Pinus* e *Corymbia Citriodora*, não há padrão na ordem dos resultados envolvendo o deslocamento máximo do arco treliçado aos 20 minutos de exposição ao fogo, considerando as propriedades de cada espécie de madeira.

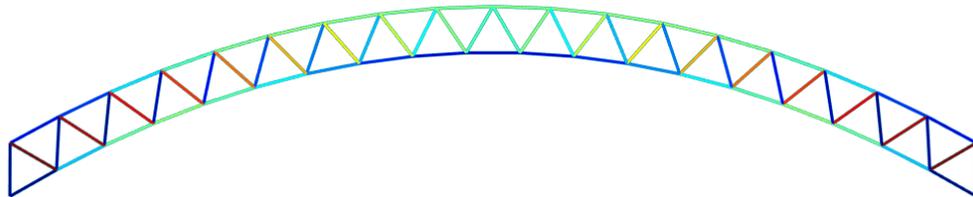
Figura 5.14 – Tensões nas barras do arco treliçado em instante crítico

(continua)

Espécie: *Corymbia citriodora* ($f_{c0} = 62$ MPa)

Procedimento: I

t = 10 min ($\beta = 0.58$ mm/min)

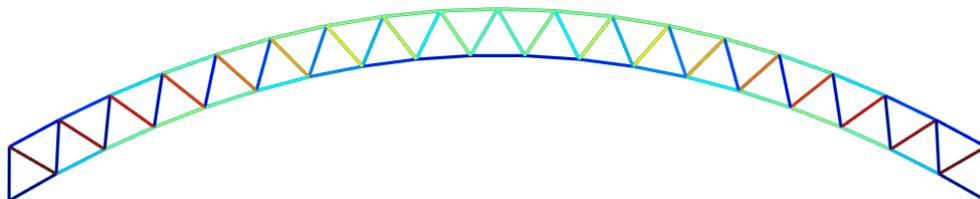


$\sigma = -63.31$ MPa	$\sigma = -35.7$ MPa	$\sigma = -15.19$ MPa	$\sigma = -7.72$ MPa	$\sigma = 1.32$ MPa
$\sigma = -63.31$ MPa	$\sigma = -32.4$ MPa	$\sigma = -15.19$ MPa	$\sigma = -7.72$ MPa	$\sigma = 2.46$ MPa
$\sigma = -53.07$ MPa	$\sigma = -32.4$ MPa	$\sigma = -13.24$ MPa	$\sigma = -6.38$ MPa	$\sigma = 2.47$ MPa
$\sigma = -53.07$ MPa	$\sigma = -28.72$ MPa	$\sigma = -13.24$ MPa	$\sigma = -6.38$ MPa	$\sigma = 3.56$ MPa
$\sigma = -43.84$ MPa	$\sigma = -28.72$ MPa	$\sigma = -12.59$ MPa	$\sigma = -5.03$ MPa	$\sigma = 3.56$ MPa
$\sigma = -43.84$ MPa	$\sigma = -27.64$ MPa	$\sigma = -11.5$ MPa	$\sigma = -5.03$ MPa	$\sigma = 4.62$ MPa
$\sigma = -41.96$ MPa	$\sigma = -27.64$ MPa	$\sigma = -11.5$ MPa	$\sigma = -3.7$ MPa	$\sigma = 4.62$ MPa
$\sigma = -41.96$ MPa	$\sigma = -22.95$ MPa	$\sigma = -10.3$ MPa	$\sigma = -3.69$ MPa	$\sigma = 5.62$ MPa
$\sigma = -41$ MPa	$\sigma = -22.95$ MPa	$\sigma = -10.3$ MPa	$\sigma = -2.38$ MPa	$\sigma = 5.62$ MPa
$\sigma = -41$ MPa	$\sigma = -21.97$ MPa	$\sigma = -10.29$ MPa	$\sigma = -2.38$ MPa	$\sigma = 6.57$ MPa
$\sigma = -39.09$ MPa	$\sigma = -21.97$ MPa	$\sigma = -10.29$ MPa	$\sigma = -1.11$ MPa	$\sigma = 6.57$ MPa
$\sigma = -39.09$ MPa	$\sigma = -18.43$ MPa	$\sigma = -9.03$ MPa	$\sigma = -1.11$ MPa	$\sigma = 7.43$ MPa
$\sigma = -36.22$ MPa	$\sigma = -18.43$ MPa	$\sigma = -9.03$ MPa	$\sigma = 0.13$ MPa	$\sigma = 7.43$ MPa
$\sigma = -36.21$ MPa	$\sigma = -15.43$ MPa	$\sigma = -8.08$ MPa	$\sigma = 0.13$ MPa	$\sigma = 8.21$ MPa
$\sigma = -35.7$ MPa	$\sigma = -15.43$ MPa	$\sigma = -8.08$ MPa	$\sigma = 1.32$ MPa	$\sigma = 8.21$ MPa

Espécie: *Eucalyptus grandis* ($f_{c0} = 40.3$ MPa)

Procedimento: III

t = 1 min ($\beta = 0.59$ mm/min)



$\sigma = -45.21$ MPa	$\sigma = -25.5$ MPa	$\sigma = -10.84$ MPa	$\sigma = -5.52$ MPa	$\sigma = 0.94$ MPa
$\sigma = -45.21$ MPa	$\sigma = -23.13$ MPa	$\sigma = -10.84$ MPa	$\sigma = -5.51$ MPa	$\sigma = 1.76$ MPa
$\sigma = -37.9$ MPa	$\sigma = -23.13$ MPa	$\sigma = -9.44$ MPa	$\sigma = -4.56$ MPa	$\sigma = 1.77$ MPa
$\sigma = -37.9$ MPa	$\sigma = -20.51$ MPa	$\sigma = -9.44$ MPa	$\sigma = -4.56$ MPa	$\sigma = 2.55$ MPa
$\sigma = -31.31$ MPa	$\sigma = -20.51$ MPa	$\sigma = -8.98$ MPa	$\sigma = -3.6$ MPa	$\sigma = 2.55$ MPa
$\sigma = -31.31$ MPa	$\sigma = -19.73$ MPa	$\sigma = -8.21$ MPa	$\sigma = -3.6$ MPa	$\sigma = 3.3$ MPa
$\sigma = -29.97$ MPa	$\sigma = -19.73$ MPa	$\sigma = -8.21$ MPa	$\sigma = -2.64$ MPa	$\sigma = 3.3$ MPa
$\sigma = -29.97$ MPa	$\sigma = -16.39$ MPa	$\sigma = -7.36$ MPa	$\sigma = -2.64$ MPa	$\sigma = 4.01$ MPa
$\sigma = -29.29$ MPa	$\sigma = -16.39$ MPa	$\sigma = -7.36$ MPa	$\sigma = -1.7$ MPa	$\sigma = 4.02$ MPa
$\sigma = -29.29$ MPa	$\sigma = -15.68$ MPa	$\sigma = -7.34$ MPa	$\sigma = -1.7$ MPa	$\sigma = 4.69$ MPa
$\sigma = -27.92$ MPa	$\sigma = -15.68$ MPa	$\sigma = -7.34$ MPa	$\sigma = -0.79$ MPa	$\sigma = 4.69$ MPa
$\sigma = -27.92$ MPa	$\sigma = -13.16$ MPa	$\sigma = -6.45$ MPa	$\sigma = -0.79$ MPa	$\sigma = 5.3$ MPa
$\sigma = -25.86$ MPa	$\sigma = -13.16$ MPa	$\sigma = -6.45$ MPa	$\sigma = 0.09$ MPa	$\sigma = 5.31$ MPa
$\sigma = -25.86$ MPa	$\sigma = -11.01$ MPa	$\sigma = -5.76$ MPa	$\sigma = 0.09$ MPa	$\sigma = 5.85$ MPa
$\sigma = -25.5$ MPa	$\sigma = -11.01$ MPa	$\sigma = -5.76$ MPa	$\sigma = 0.94$ MPa	$\sigma = 5.85$ MPa

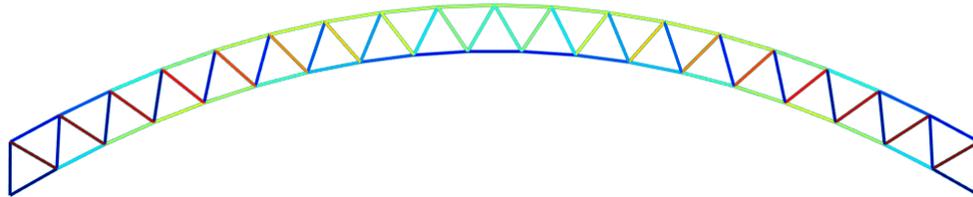
Figura 5.14 – Tensões nas barras do arco treliçado em instante crítico

(continuação)

Espécie: *Lyptus* ($f_{c0} = 60.7$ MPa)

Procedimento: I

t = 8 min ($\beta = 0.69$ mm/min)

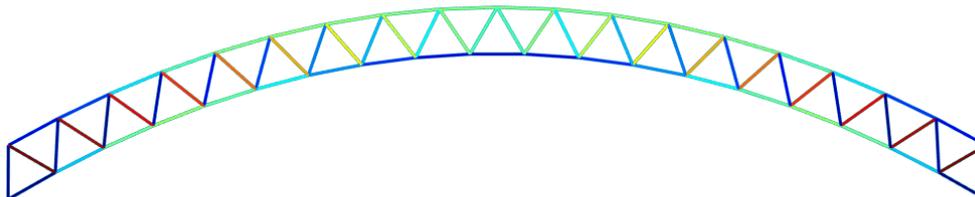


$\sigma = -63.12$ MPa	$\sigma = -36.07$ MPa	$\sigma = -14.53$ MPa	$\sigma = -7.41$ MPa	$\sigma = 1.5$ MPa
$\sigma = -63.12$ MPa	$\sigma = -32.09$ MPa	$\sigma = -14.53$ MPa	$\sigma = -7.41$ MPa	$\sigma = 2.72$ MPa
$\sigma = -53.38$ MPa	$\sigma = -32.08$ MPa	$\sigma = -12.54$ MPa	$\sigma = -6.63$ MPa	$\sigma = 2.72$ MPa
$\sigma = -53.38$ MPa	$\sigma = -28.89$ MPa	$\sigma = -12.54$ MPa	$\sigma = -6.63$ MPa	$\sigma = 3.85$ MPa
$\sigma = -44.29$ MPa	$\sigma = -28.89$ MPa	$\sigma = -11.84$ MPa	$\sigma = -5.26$ MPa	$\sigma = 3.85$ MPa
$\sigma = -44.29$ MPa	$\sigma = -27.02$ MPa	$\sigma = -11.18$ MPa	$\sigma = -5.26$ MPa	$\sigma = 4.9$ MPa
$\sigma = -42.6$ MPa	$\sigma = -27.01$ MPa	$\sigma = -11.18$ MPa	$\sigma = -3.87$ MPa	$\sigma = 4.9$ MPa
$\sigma = -42.6$ MPa	$\sigma = -22.86$ MPa	$\sigma = -10.26$ MPa	$\sigma = -3.86$ MPa	$\sigma = 5.82$ MPa
$\sigma = -41.53$ MPa	$\sigma = -22.86$ MPa	$\sigma = -10.26$ MPa	$\sigma = -2.47$ MPa	$\sigma = 5.82$ MPa
$\sigma = -41.53$ MPa	$\sigma = -21.12$ MPa	$\sigma = -9.6$ MPa	$\sigma = -2.47$ MPa	$\sigma = 6.61$ MPa
$\sigma = -39.4$ MPa	$\sigma = -21.12$ MPa	$\sigma = -9.6$ MPa	$\sigma = -1.1$ MPa	$\sigma = 6.61$ MPa
$\sigma = -39.4$ MPa	$\sigma = -18.08$ MPa	$\sigma = -9.16$ MPa	$\sigma = -1.1$ MPa	$\sigma = 7.21$ MPa
$\sigma = -36.23$ MPa	$\sigma = -18.08$ MPa	$\sigma = -9.16$ MPa	$\sigma = 0.23$ MPa	$\sigma = 7.21$ MPa
$\sigma = -36.23$ MPa	$\sigma = -14.63$ MPa	$\sigma = -7.94$ MPa	$\sigma = 0.23$ MPa	$\sigma = 7.59$ MPa
$\sigma = -36.08$ MPa	$\sigma = -14.63$ MPa	$\sigma = -7.94$ MPa	$\sigma = 1.5$ MPa	$\sigma = 7.59$ MPa

Espécie: *Douglas-fir* ($f_{c0} = 49.9$ MPa)

Procedimento: III

t = 3 min ($\beta = 0.74$ mm/min)



$\sigma = -50.47$ MPa	$\sigma = -28.48$ MPa	$\sigma = -12.08$ MPa	$\sigma = -6.17$ MPa	$\sigma = 1.06$ MPa
$\sigma = -50.47$ MPa	$\sigma = -25.82$ MPa	$\sigma = -12.08$ MPa	$\sigma = -6.17$ MPa	$\sigma = 1.98$ MPa
$\sigma = -42.34$ MPa	$\sigma = -25.82$ MPa	$\sigma = -10.52$ MPa	$\sigma = -5.1$ MPa	$\sigma = 1.98$ MPa
$\sigma = -42.33$ MPa	$\sigma = -22.91$ MPa	$\sigma = -10.52$ MPa	$\sigma = -5.1$ MPa	$\sigma = 2.86$ MPa
$\sigma = -34.98$ MPa	$\sigma = -22.91$ MPa	$\sigma = -10$ MPa	$\sigma = -4.03$ MPa	$\sigma = 2.86$ MPa
$\sigma = -34.98$ MPa	$\sigma = -22.01$ MPa	$\sigma = -9.15$ MPa	$\sigma = -4.02$ MPa	$\sigma = 3.7$ MPa
$\sigma = -33.49$ MPa	$\sigma = -22.01$ MPa	$\sigma = -9.15$ MPa	$\sigma = -2.96$ MPa	$\sigma = 3.7$ MPa
$\sigma = -33.49$ MPa	$\sigma = -18.3$ MPa	$\sigma = -8.21$ MPa	$\sigma = -2.95$ MPa	$\sigma = 4.49$ MPa
$\sigma = -32.72$ MPa	$\sigma = -18.3$ MPa	$\sigma = -8.21$ MPa	$\sigma = -1.9$ MPa	$\sigma = 4.49$ MPa
$\sigma = -32.72$ MPa	$\sigma = -17.48$ MPa	$\sigma = -8.17$ MPa	$\sigma = -1.9$ MPa	$\sigma = 5.24$ MPa
$\sigma = -31.19$ MPa	$\sigma = -17.48$ MPa	$\sigma = -8.17$ MPa	$\sigma = -0.88$ MPa	$\sigma = 5.24$ MPa
$\sigma = -31.18$ MPa	$\sigma = -14.68$ MPa	$\sigma = -7.21$ MPa	$\sigma = -0.88$ MPa	$\sigma = 5.92$ MPa
$\sigma = -28.88$ MPa	$\sigma = -14.68$ MPa	$\sigma = -7.21$ MPa	$\sigma = 0.11$ MPa	$\sigma = 5.92$ MPa
$\sigma = -28.88$ MPa	$\sigma = -12.26$ MPa	$\sigma = -6.4$ MPa	$\sigma = 0.11$ MPa	$\sigma = 6.51$ MPa
$\sigma = -28.48$ MPa	$\sigma = -12.26$ MPa	$\sigma = -6.4$ MPa	$\sigma = 1.06$ MPa	$\sigma = 6.51$ MPa

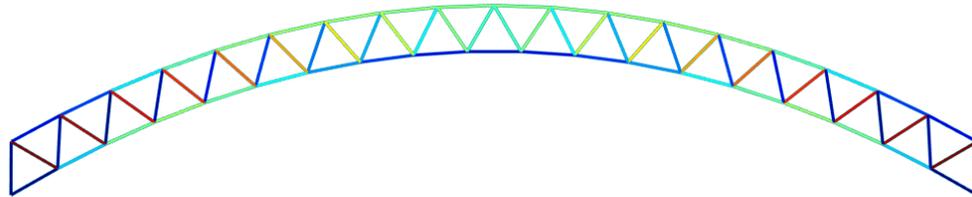
Figura 5.14 – Tensões nas barras do arco treliçado em instante crítico

(continuação)

Espécie: *Southern pine* ($f_{c0} = 58.4$ MPa)

Procedimento: I

$t = 7$ min ($\beta = 0.74$ mm/min)

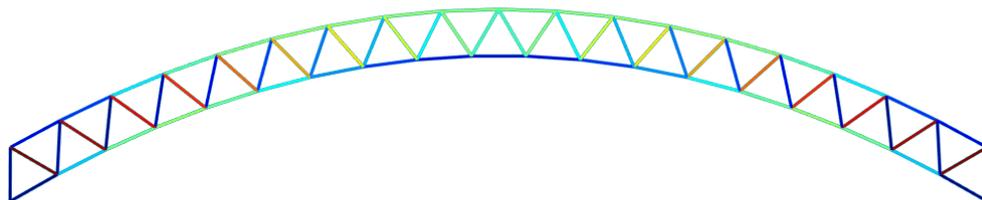


$\sigma = -60.55$ MPa	$\sigma = -34.23$ MPa	$\sigma = -14.43$ MPa	$\sigma = -7.43$ MPa	$\sigma = 1.3$ MPa
$\sigma = -60.55$ MPa	$\sigma = -30.95$ MPa	$\sigma = -14.43$ MPa	$\sigma = -7.43$ MPa	$\sigma = 2.41$ MPa
$\sigma = -50.85$ MPa	$\sigma = -30.94$ MPa	$\sigma = -12.54$ MPa	$\sigma = -6.15$ MPa	$\sigma = 2.41$ MPa
$\sigma = -50.85$ MPa	$\sigma = -27.52$ MPa	$\sigma = -12.53$ MPa	$\sigma = -6.15$ MPa	$\sigma = 3.47$ MPa
$\sigma = -42.04$ MPa	$\sigma = -27.52$ MPa	$\sigma = -11.9$ MPa	$\sigma = -4.86$ MPa	$\sigma = 3.47$ MPa
$\sigma = -42.04$ MPa	$\sigma = -26.33$ MPa	$\sigma = -10.94$ MPa	$\sigma = -4.86$ MPa	$\sigma = 4.47$ MPa
$\sigma = -40.28$ MPa	$\sigma = -26.33$ MPa	$\sigma = -10.94$ MPa	$\sigma = -3.57$ MPa	$\sigma = 4.48$ MPa
$\sigma = -40.28$ MPa	$\sigma = -21.95$ MPa	$\sigma = -9.85$ MPa	$\sigma = -3.57$ MPa	$\sigma = 5.42$ MPa
$\sigma = -39.35$ MPa	$\sigma = -21.95$ MPa	$\sigma = -9.85$ MPa	$\sigma = -2.3$ MPa	$\sigma = 5.42$ MPa
$\sigma = -39.34$ MPa	$\sigma = -20.86$ MPa	$\sigma = -9.71$ MPa	$\sigma = -2.29$ MPa	$\sigma = 6.29$ MPa
$\sigma = -37.47$ MPa	$\sigma = -20.86$ MPa	$\sigma = -9.71$ MPa	$\sigma = -1.06$ MPa	$\sigma = 6.29$ MPa
$\sigma = -37.47$ MPa	$\sigma = -17.57$ MPa	$\sigma = -8.67$ MPa	$\sigma = -1.06$ MPa	$\sigma = 7.07$ MPa
$\sigma = -34.66$ MPa	$\sigma = -17.57$ MPa	$\sigma = -8.67$ MPa	$\sigma = 0.14$ MPa	$\sigma = 7.07$ MPa
$\sigma = -34.66$ MPa	$\sigma = -14.59$ MPa	$\sigma = -7.6$ MPa	$\sigma = 0.14$ MPa	$\sigma = 7.74$ MPa
$\sigma = -34.24$ MPa	$\sigma = -14.59$ MPa	$\sigma = -7.6$ MPa	$\sigma = 1.3$ MPa	$\sigma = 7.74$ MPa

Espécie: *White oak* ($f_{c0} = 51.3$ MPa)

Procedimento: III

$t = 5$ min ($\beta = 0.57$ mm/min)



$\sigma = -52.86$ MPa	$\sigma = -29.88$ MPa	$\sigma = -12.61$ MPa	$\sigma = -6.48$ MPa	$\sigma = 1.13$ MPa
$\sigma = -52.86$ MPa	$\sigma = -27.02$ MPa	$\sigma = -12.61$ MPa	$\sigma = -6.48$ MPa	$\sigma = 2.1$ MPa
$\sigma = -44.38$ MPa	$\sigma = -27.02$ MPa	$\sigma = -10.96$ MPa	$\sigma = -5.36$ MPa	$\sigma = 2.1$ MPa
$\sigma = -44.38$ MPa	$\sigma = -24.02$ MPa	$\sigma = -10.96$ MPa	$\sigma = -5.36$ MPa	$\sigma = 3.02$ MPa
$\sigma = -36.69$ MPa	$\sigma = -24.02$ MPa	$\sigma = -10.41$ MPa	$\sigma = -4.24$ MPa	$\sigma = 3.02$ MPa
$\sigma = -36.69$ MPa	$\sigma = -23$ MPa	$\sigma = -9.56$ MPa	$\sigma = -4.24$ MPa	$\sigma = 3.9$ MPa
$\sigma = -35.15$ MPa	$\sigma = -23$ MPa	$\sigma = -9.56$ MPa	$\sigma = -3.11$ MPa	$\sigma = 3.9$ MPa
$\sigma = -35.15$ MPa	$\sigma = -19.16$ MPa	$\sigma = -8.6$ MPa	$\sigma = -3.11$ MPa	$\sigma = 4.72$ MPa
$\sigma = -34.34$ MPa	$\sigma = -19.16$ MPa	$\sigma = -8.6$ MPa	$\sigma = -2$ MPa	$\sigma = 4.72$ MPa
$\sigma = -34.33$ MPa	$\sigma = -18.23$ MPa	$\sigma = -8.49$ MPa	$\sigma = -2$ MPa	$\sigma = 5.49$ MPa
$\sigma = -32.7$ MPa	$\sigma = -18.23$ MPa	$\sigma = -8.49$ MPa	$\sigma = -0.92$ MPa	$\sigma = 5.49$ MPa
$\sigma = -32.7$ MPa	$\sigma = -15.35$ MPa	$\sigma = -7.57$ MPa	$\sigma = -0.92$ MPa	$\sigma = 6.18$ MPa
$\sigma = -30.26$ MPa	$\sigma = -15.35$ MPa	$\sigma = -7.57$ MPa	$\sigma = 0.12$ MPa	$\sigma = 6.18$ MPa
$\sigma = -30.26$ MPa	$\sigma = -12.76$ MPa	$\sigma = -6.65$ MPa	$\sigma = 0.12$ MPa	$\sigma = 6.77$ MPa
$\sigma = -29.88$ MPa	$\sigma = -12.76$ MPa	$\sigma = -6.65$ MPa	$\sigma = 1.13$ MPa	$\sigma = 6.77$ MPa

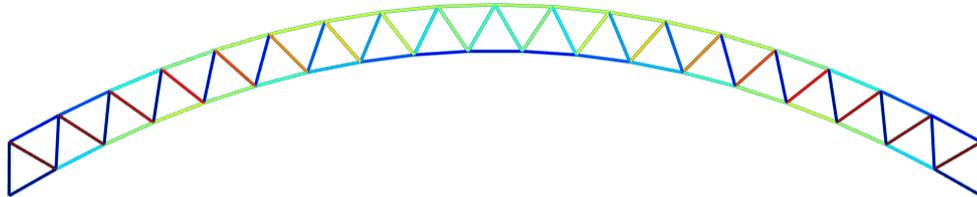
Figura 5.14 – Tensões nas barras do arco treliçado em instante crítico

(continuação)

Espécie: *Pinus* ($f_{c0} = 32.1$ MPa)

Procedimento: III

t = 1 min ($\beta = 0.71$ mm/min)



$\sigma = -46.4$ MPa	$\sigma = -26.51$ MPa	$\sigma = -10.7$ MPa	$\sigma = -5.46$ MPa	$\sigma = 1.1$ MPa
$\sigma = -46.4$ MPa	$\sigma = -23.59$ MPa	$\sigma = -10.7$ MPa	$\sigma = -5.46$ MPa	$\sigma = 1.99$ MPa
$\sigma = -39.23$ MPa	$\sigma = -23.59$ MPa	$\sigma = -9.23$ MPa	$\sigma = -4.87$ MPa	$\sigma = 2$ MPa
$\sigma = -32.55$ MPa	$\sigma = -21.23$ MPa	$\sigma = -8.71$ MPa	$\sigma = -4.87$ MPa	$\sigma = 2.83$ MPa
$\sigma = -32.55$ MPa	$\sigma = -19.87$ MPa	$\sigma = -8.22$ MPa	$\sigma = -3.86$ MPa	$\sigma = 2.83$ MPa
$\sigma = -31.3$ MPa	$\sigma = -19.87$ MPa	$\sigma = -8.22$ MPa	$\sigma = -3.86$ MPa	$\sigma = 3.6$ MPa
$\sigma = -31.3$ MPa	$\sigma = -16.81$ MPa	$\sigma = -7.54$ MPa	$\sigma = -2.84$ MPa	$\sigma = 4.27$ MPa
$\sigma = -30.52$ MPa	$\sigma = -16.81$ MPa	$\sigma = -7.54$ MPa	$\sigma = -1.82$ MPa	$\sigma = 4.28$ MPa
$\sigma = -30.52$ MPa	$\sigma = -15.54$ MPa	$\sigma = -7.07$ MPa	$\sigma = -1.81$ MPa	$\sigma = 4.86$ MPa
$\sigma = -28.96$ MPa	$\sigma = -15.54$ MPa	$\sigma = -7.07$ MPa	$\sigma = -0.81$ MPa	$\sigma = 4.86$ MPa
$\sigma = -28.96$ MPa	$\sigma = -13.3$ MPa	$\sigma = -6.73$ MPa	$\sigma = -0.81$ MPa	$\sigma = 5.31$ MPa
$\sigma = -26.64$ MPa	$\sigma = -13.3$ MPa	$\sigma = -6.73$ MPa	$\sigma = 0.16$ MPa	$\sigma = 5.31$ MPa
$\sigma = -26.64$ MPa	$\sigma = -10.76$ MPa	$\sigma = -5.83$ MPa	$\sigma = 0.17$ MPa	$\sigma = 5.59$ MPa
$\sigma = -26.51$ MPa	$\sigma = -10.76$ MPa	$\sigma = -5.83$ MPa	$\sigma = 1.1$ MPa	$\sigma = 5.59$ MPa

Fonte: Autor (2022)

Conforme as representações gráficas das tensões nas barras do arco treliçado (Figura 5.14), relacionadas aos instantes críticos da estrutura em situação de incêndio, foi possível identificar o valor do tempo crítico e o procedimento mais desfavorável. Observou-se que o procedimento I alcançou menor tempo crítico de incêndio para as espécies *Corymbia citriodora*, *Lyptus* e *Southern pine*, enquanto o procedimento III estimou para as espécies *Eucalyptus grandis*, *Douglas-fir*, *White oak* e *Pinus*. Os arcos treliçados das espécies *Eucalyptus grandis* e *Pinus* apresentaram falha já no primeiro minuto de incêndio, embora o tempo crítico exato certamente seria menor e compreendido em segundos. Apesar disso, não foi possível fazer tal estimativa, uma vez que o algoritmo desenvolvido trabalha somente com tempo de exposição ao fogo fornecido por números inteiros em minutos, uma forma usual. As espécies *Eucalyptus grandis* e *Pinus* possuem os menores valores de resistência dentre as sete espécies avaliadas, ainda que não sejam associadas aos maiores valores de taxas de carbonização. Além disso, a espécie *Eucalyptus grandis* possui módulo de elasticidade superior ao das espécies *Lyptus* e *White oak*, logo a rigidez não proporcionou vantagem em termos de tempo máximo de exposição ao fogo nesse caso. A espécie *Corymbia citriodora*, que possui os maiores parâmetros de resistência e rigidez, apresentou o maior tempo crítico de incêndio observado para o arco treliçado (10 minutos), para as forças nodais de 30 kN.

As variações da tensão normal na barra mais solicitada dos modelos de arco treliçado são expostas nos gráficos da Figura 5.15, conforme o tempo de exposição ao fogo, as espécies de madeira e o tipo de análise. A variação percentual, em relação ao procedimento I, é indicada na Figura 5.16. Considerando as diferentes espécies e tipos de análise, na variação da tensão normal alguns padrões semelhantes aos exibidos no caso do deslocamento também foram constatados. Em geral, os resultados obtidos por análise não linear geométrica a partir do procedimento II indicaram variação muito maior em relação ao procedimento I, com diferenças iniciais de aproximadamente 35% nos primeiros minutos de incêndio. Até o tempo de exposição de 8 minutos, os valores obtidos conforme procedimento III apresentaram maior concordância com aqueles alcançados pelo procedimento I, com exceção da espécie *Douglas-fir*, cuja variação foi aproximadamente igual a 20% nesse instante. Também foi verificada maior proximidade entre os resultados alcançados pelas análises linear e não linear geométrica, comparando-se a variação entre ambas para o procedimento I.

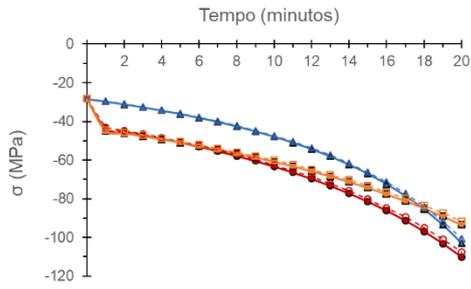
A variação da força interna na barra mais solicitada do arco treliçado, para cada análise e espécie de madeira ao longo do tempo de exposição ao fogo, são indicadas na Figura 5.17, com a variação percentual apontada na Figura 5.18. A força interna de compressão foi verificada nas barras mais solicitadas do arco treliçado, compreendidas entre os nós 1-2 e 19-20. As variações exibiram padrão semelhante aos da tensão normal na barra mais solicitada.

Exemplos de configurações deformadas do arco treliçado são destacados na Figura 5.19. No primeiro caso (5.19a), a configuração deformada devido à aplicação de força externa inferior à força crítica de instabilidade é indicada. No segundo caso (5.19b), o primeiro modo de instabilidade do arco treliçado é simulado, quando a força externa é equivalente à força crítica. No terceiro caso (5.19c), a configuração pós-instabilidade é representada, com a força externa sendo superior à força crítica.

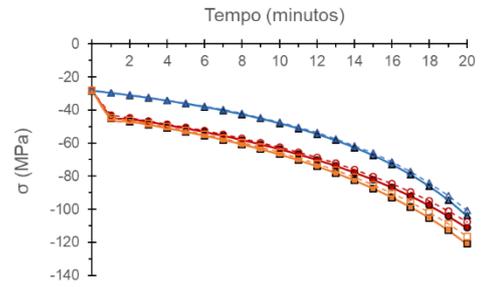
A variação da força crítica de instabilidade do arco treliçado é apontada na Figura 5.20, em função de cada espécie prevista e o tempo de exposição ao fogo. A variação percentual é representada na Figura 5.21. Observou-se que, até o tempo de exposição de 8 minutos, o procedimento III determinou forças críticas com variação percentual absoluta inferior a 10% em relação ao procedimento I. Já o procedimento II alcançou forças críticas com valores superiores aos demais, e com variações maiores que 40% nos primeiros minutos de incêndio, que foram diminuindo conforme o tempo para as espécies de madeira, com exceção da espécie *Douglas-fir*. Para tal espécie, a variação percentual da força crítica diminuiu até os 12 minutos, mas aumentou a partir desse instante, e permaneceu acima de 40% aos 20 minutos.

Figura 5.15 – Tensão normal na barra mais solicitada do arco treliçado

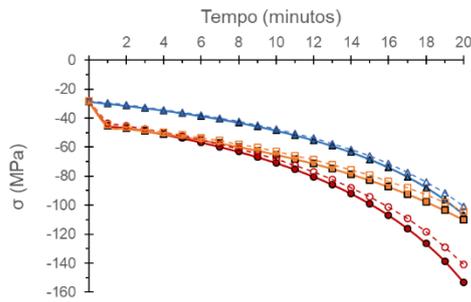
Corymbia citriodora



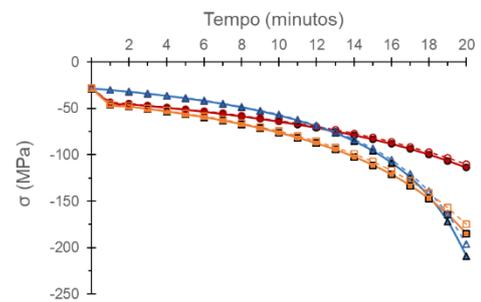
Eucalyptus grandis



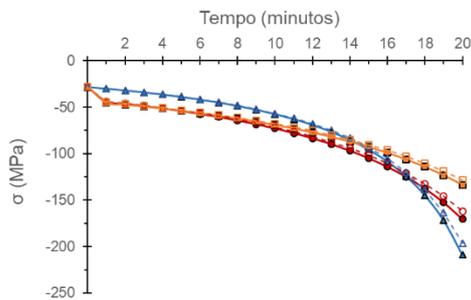
Lyptus



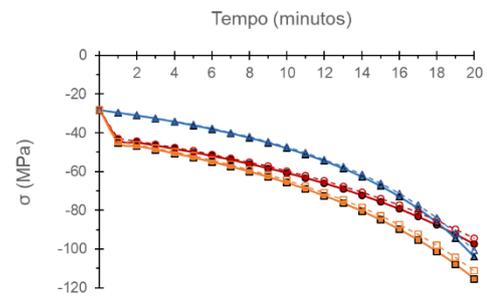
Douglas-fir



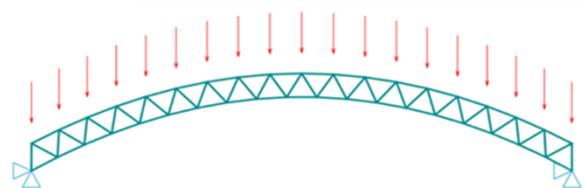
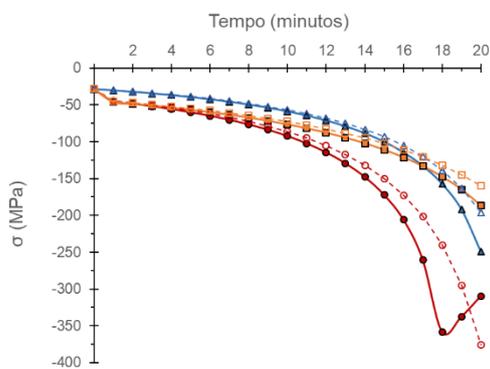
Southern pine



White oak

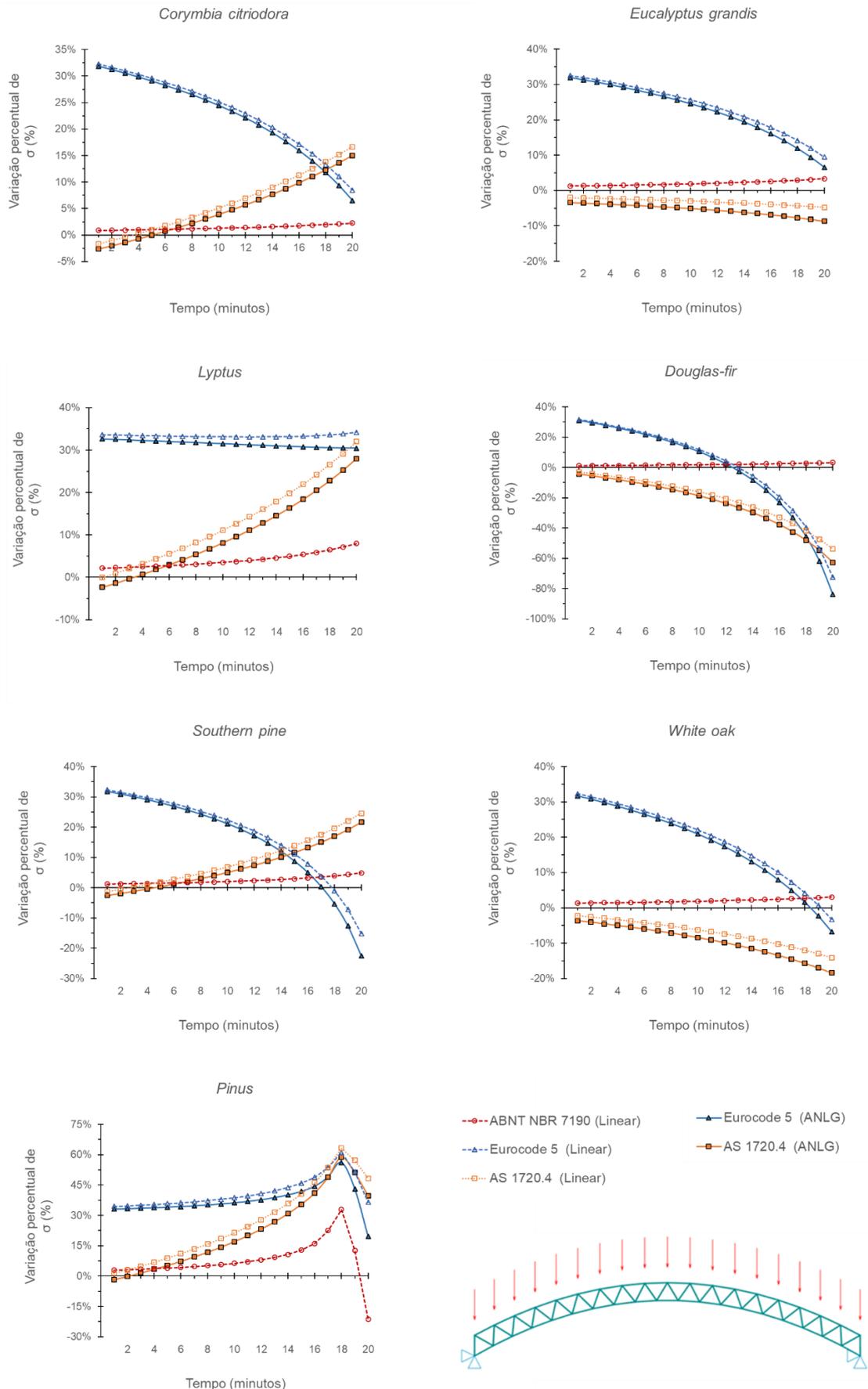


Pinus



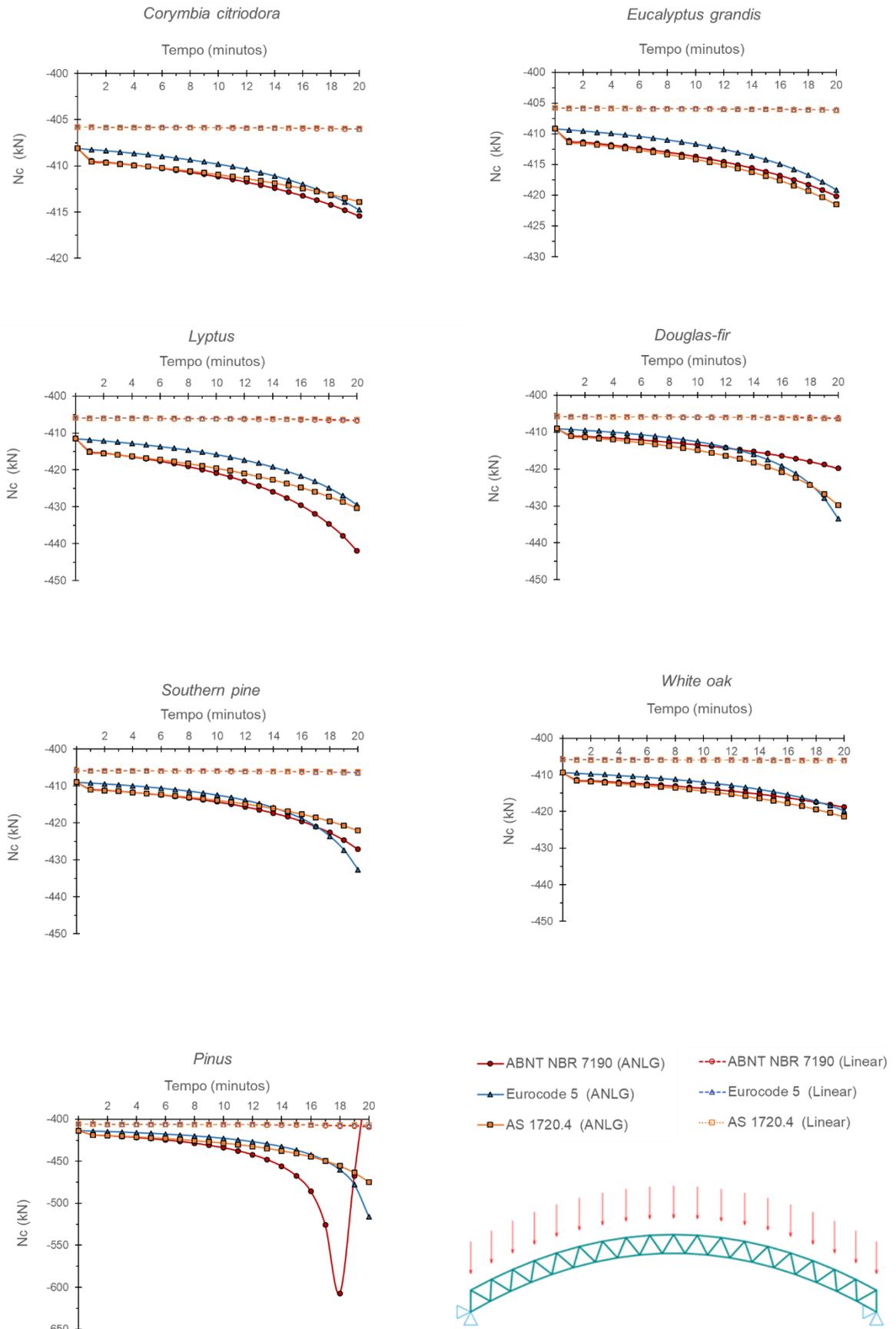
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.16 – Variação da tensão normal na barra mais solicitada do arco treliçado



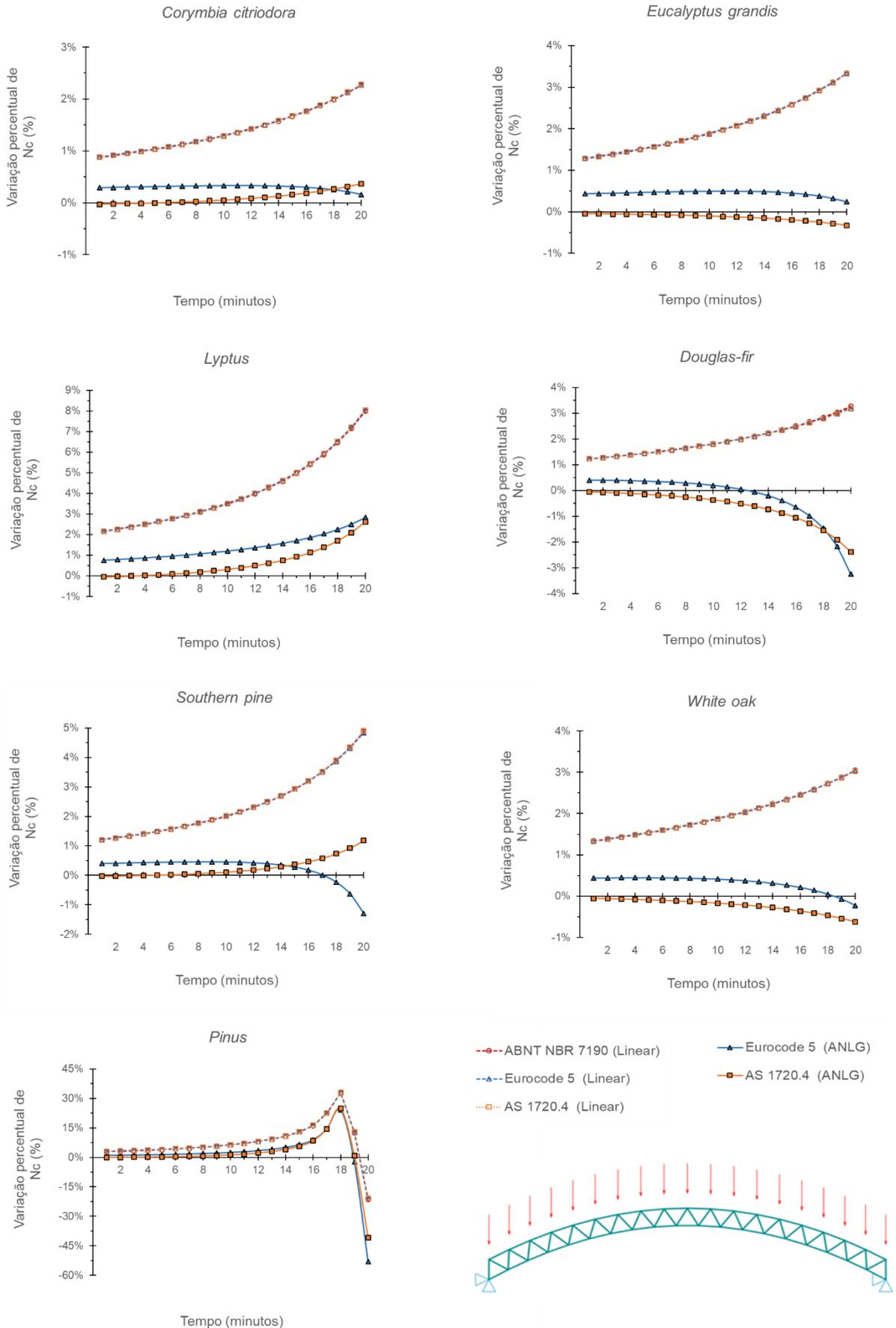
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.17 – Força de compressão na barra mais solicitada do arco treçado



Fonte: Autor (2022)

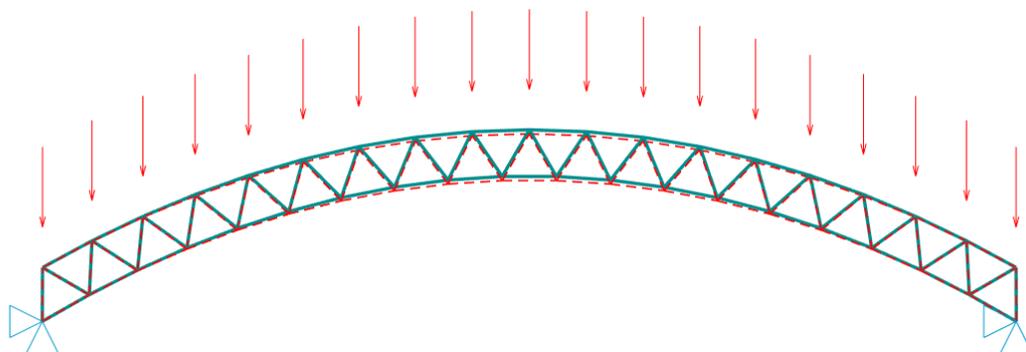
Figura 5.18 – Variação da força interna na barra mais solicitada do arco treliçado



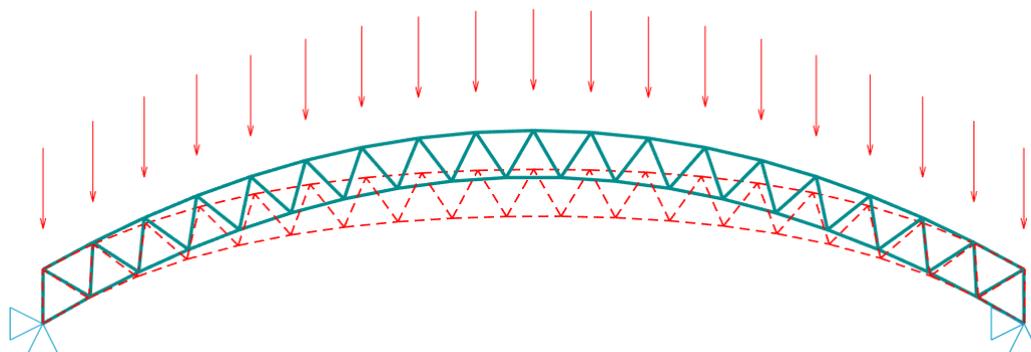
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.19 – Configurações iniciais e deformadas do arco treçado

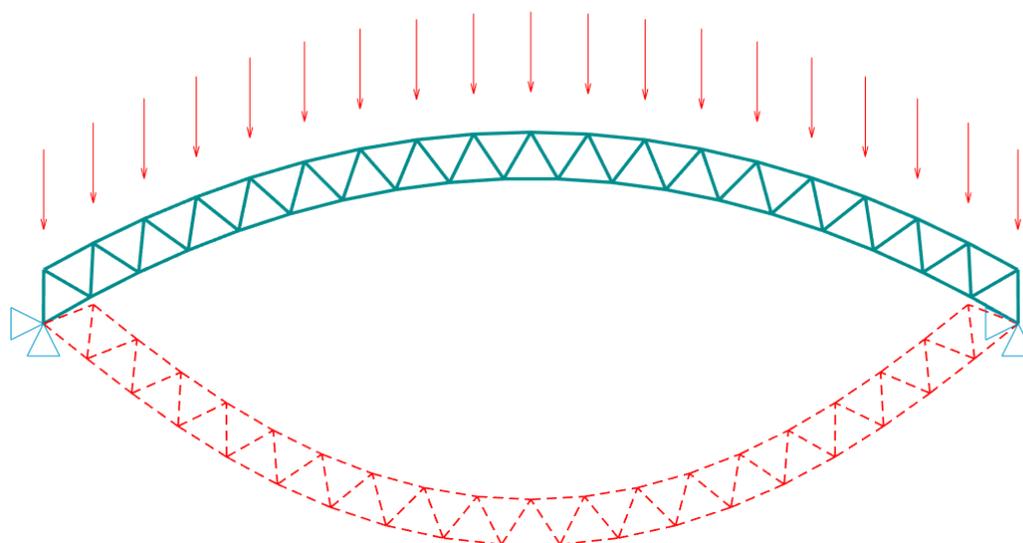
a) $P < P_{cr}$



b) $P = P_{cr}$



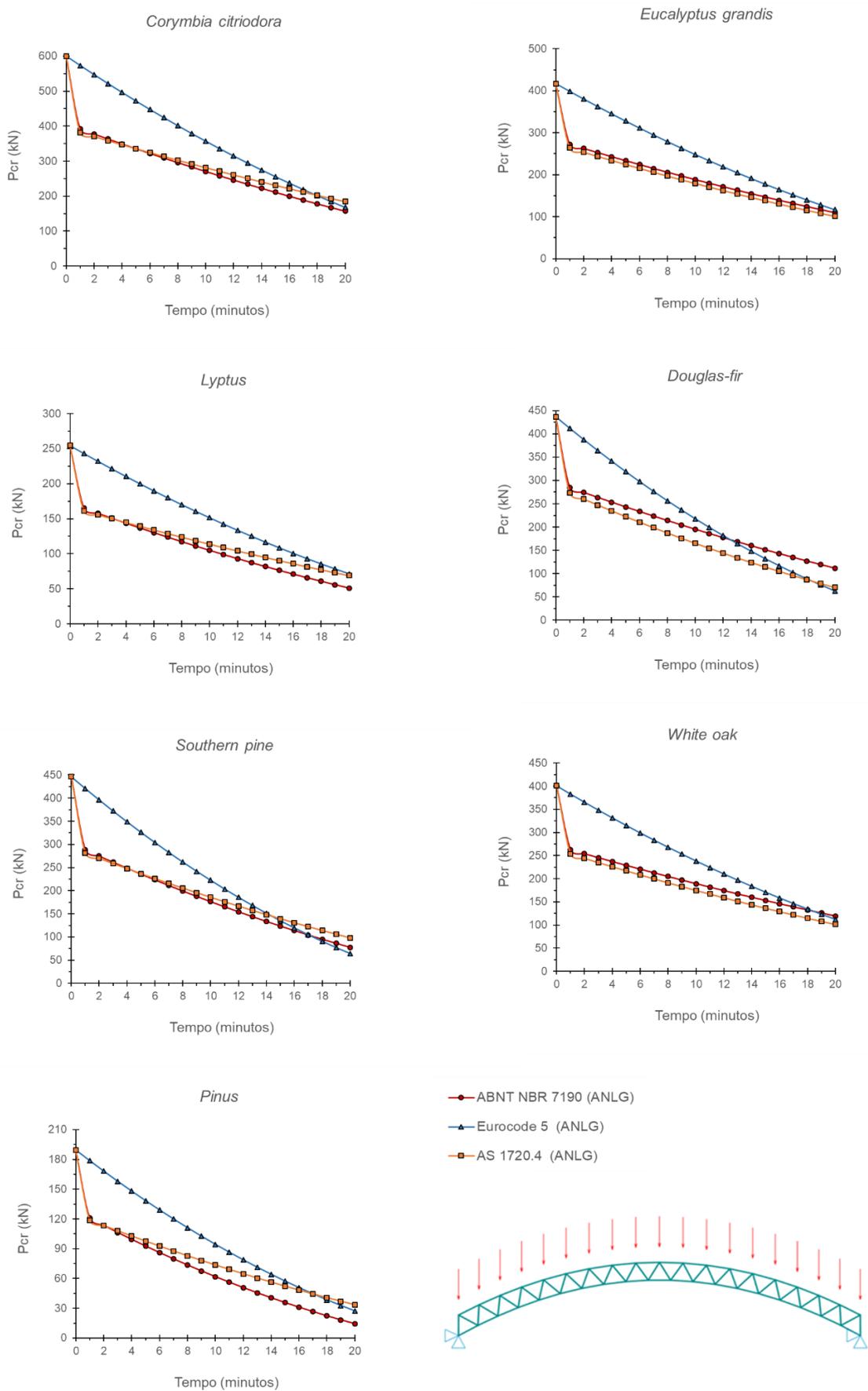
c) $P > P_{cr}$



— Configuração inicial
- - - Configuração deformada

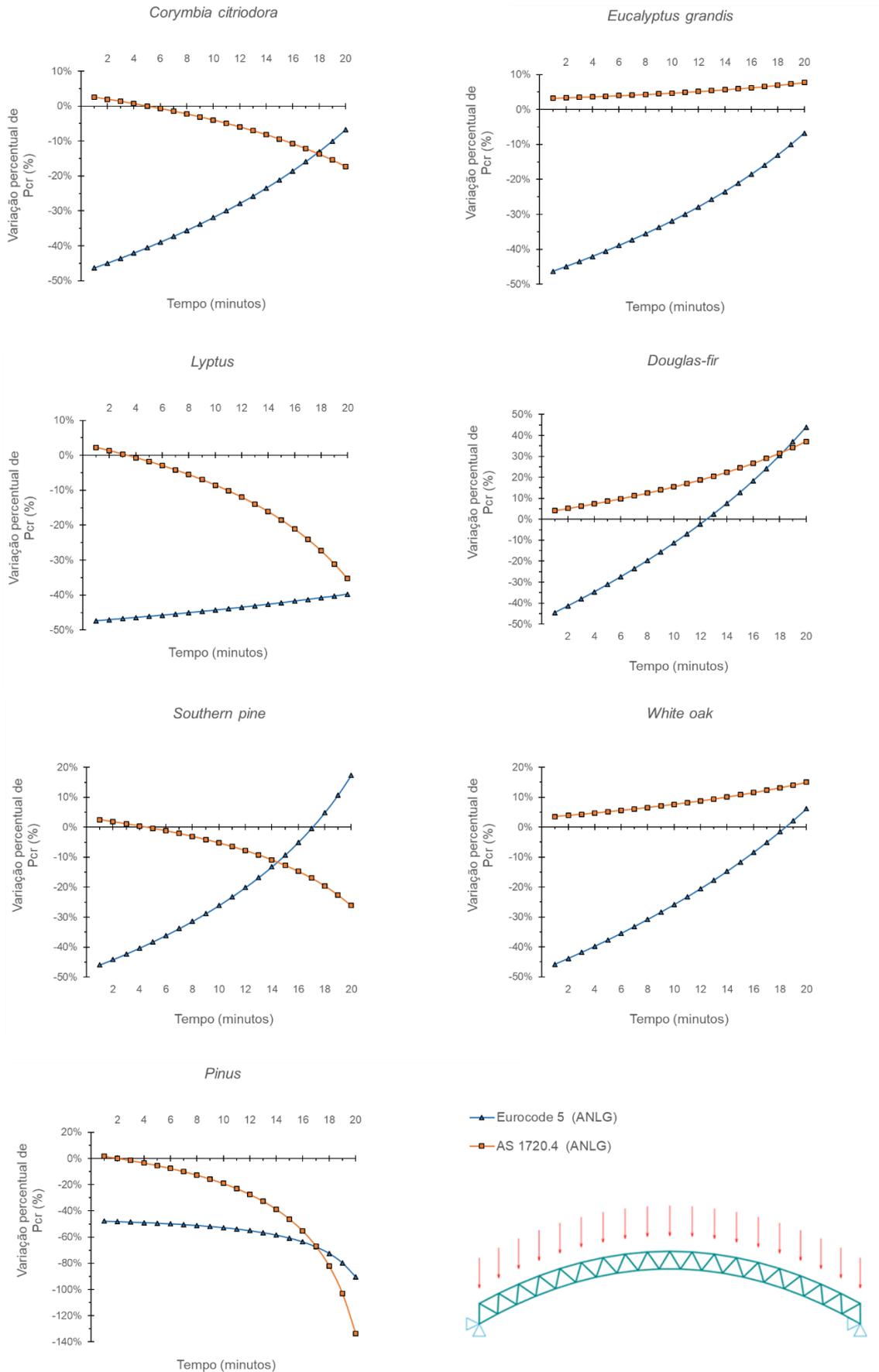
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.20 – Força crítica de instabilidade do arco treliçado



Fonte: Autor (2022)

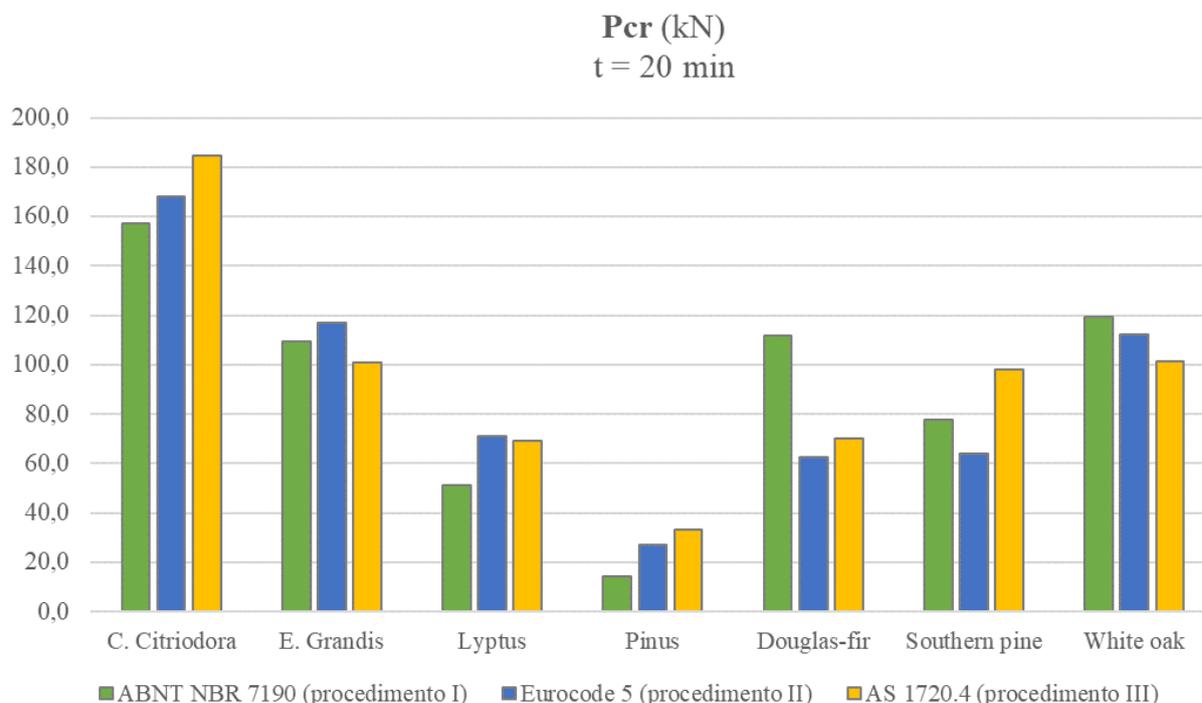
Figura 5.21 – Variação da força crítica de instabilidade do arco treliçado



Fonte: Autor (2022)

Considerando o tempo total de 20 minutos de exposição ao fogo, também é possível agrupar os valores de força crítica de instabilidade do arco treliçado no gráfico da Figura 5.22, de acordo com as espécies de madeira e os procedimentos de análise.

Figura 5.22 – Forças críticas de instabilidade do arco treliçado quando $t = 20$ min



Fonte: Autor (2022)

Comparando-se a força crítica do arco treliçado associada a cada espécie de madeira no instante de 20 minutos, pode-se ordenar os valores de forma decrescente, conforme os procedimentos I, II e III, respectivamente:

- (i) *Corymbia citriodora* > *White oak* > *Douglas-fir* > *Eucalyptus grandis* > *Southern pine* > *Lyptus* > *Pinus*;
- (ii) *Corymbia citriodora* > *Eucalyptus grandis* > *White oak* > *Lyptus* > *Southern pine* > *Douglas-fir* > *Pinus*;
- (iii) *Corymbia citriodora* > *White oak* > *Eucalyptus grandis* > *Southern pine* > *Douglas-fir* > *Lyptus* > *Pinus*.

A partir de todos os procedimentos, a espécie *Corymbia citriodora*, que possui os maiores parâmetros de resistência e rigidez, também alcançou a maior força crítica de instabilidade aos 20 minutos. Inversamente, a espécie *Pinus*, que exibe os menores parâmetros de resistência e rigidez, foi associada à menor força crítica nas três situações. As demais espécies não apresentaram um padrão bem definido na ordem de valores, logo não houve relação direta entre rigidez e força crítica ou taxa de carbonização e força crítica.

Considerando as forças atuantes com valores em função de 30 kN para todos os modelos de arco treliçado, ao longo do tempo de exposição ao fogo, a instabilidade foi verificada somente para o sistema constituído por espécie *Pinus*. Isso pode ser verificado no gráfico da Figura 5.20, onde o valor da força crítica permanece abaixo dos 30 kN para o procedimento I a partir dos 17 minutos, e 20 minutos para o procedimento II. Além disso, nos gráficos relacionados a deslocamento nodal, tensão normal e força interna, percebe-se maior variação nos resultados da espécie *Pinus* a partir desses instantes, de acordo com as análises não lineares dos procedimentos I e II.

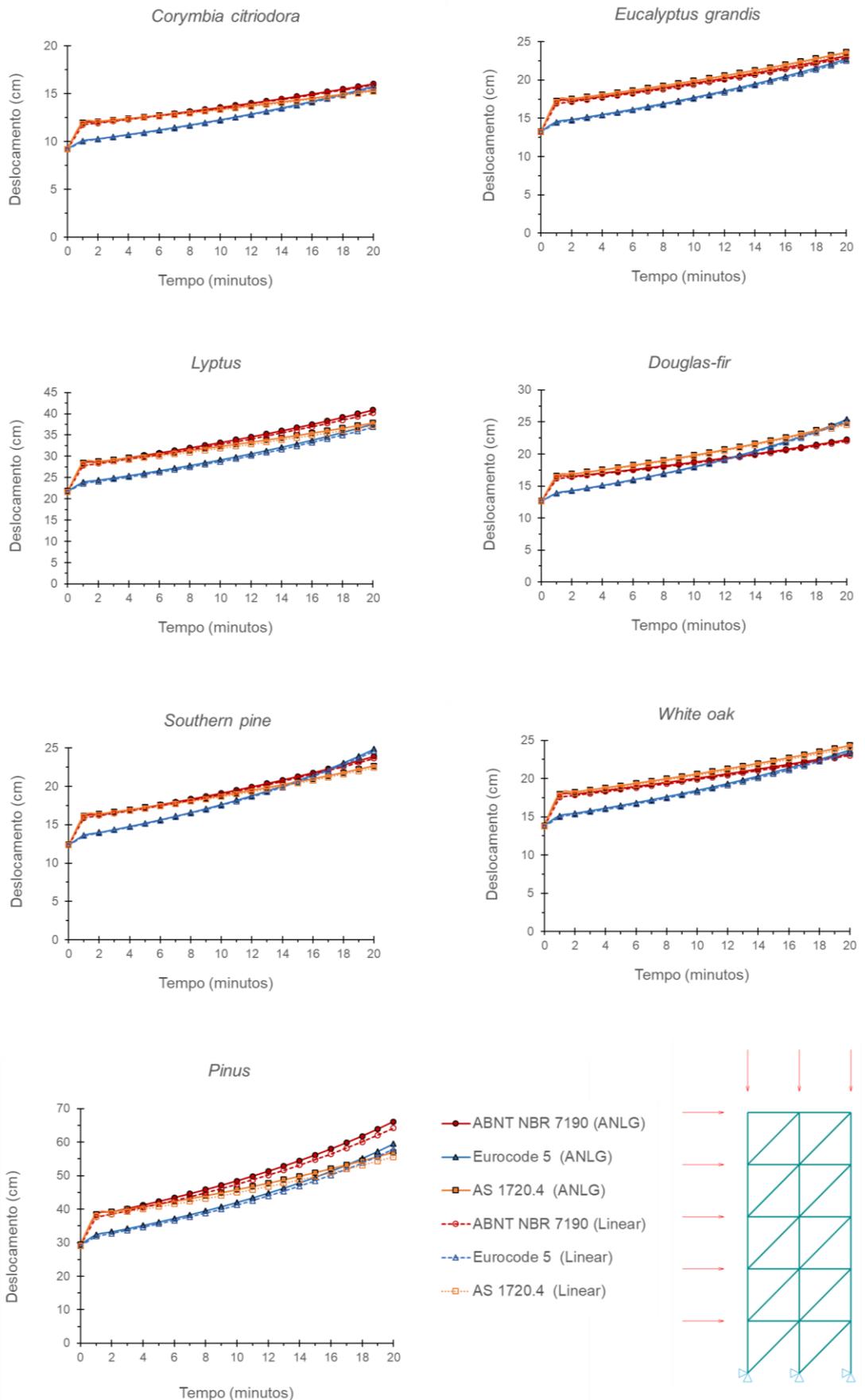
Assim como no caso da treliça torre, ainda que a instabilidade tenha sido observada nos primeiros 20 minutos de incêndio para o arco treliçado de *Pinus*, esse fenômeno não foi a condição mais crítica para o sistema, visto que a resistência à compressão paralela às fibras da barra mais solicitada foi superada primeiramente ao longo do tempo de exposição ao fogo. A principal diferença, comparando-se com a treliça torre, foi que a instabilidade do arco treliçado constituído pela espécie *Pinus* foi observado, o que se justifica pelas diferenças entre a configuração dos carregamentos e as características geométricas de cada tipologia.

5.1.2 Pórtico treliçado

Para as análises dos modelos de pórtico treliçado, também foram realizados testes voltados à estimativa das forças externas aplicadas, que atuam nas direções vertical e horizontal do sistema. Assim como no caso do arco treliçado, inicialmente buscou-se determinar valores de força externa associados a um deslocamento máximo análogo a $L/200$, a partir de uma análise não linear geométrica em temperatura ambiente. Porém, tal deslocamento também foi notado somente após a resistência à compressão da barra mais solicitada ser superada. Assim, valores inferiores foram testados para a força externa, e observou-se que o valor de $P = 65$ kN foi obtido como uma alternativa aceitável após novos testes numéricos. Conseqüentemente, as forças externas atuantes no pórtico treliçado foram atribuídas em função de tal valor adotado para P , de acordo com as relações mencionadas no capítulo anterior e na representação da Figura 4.7.

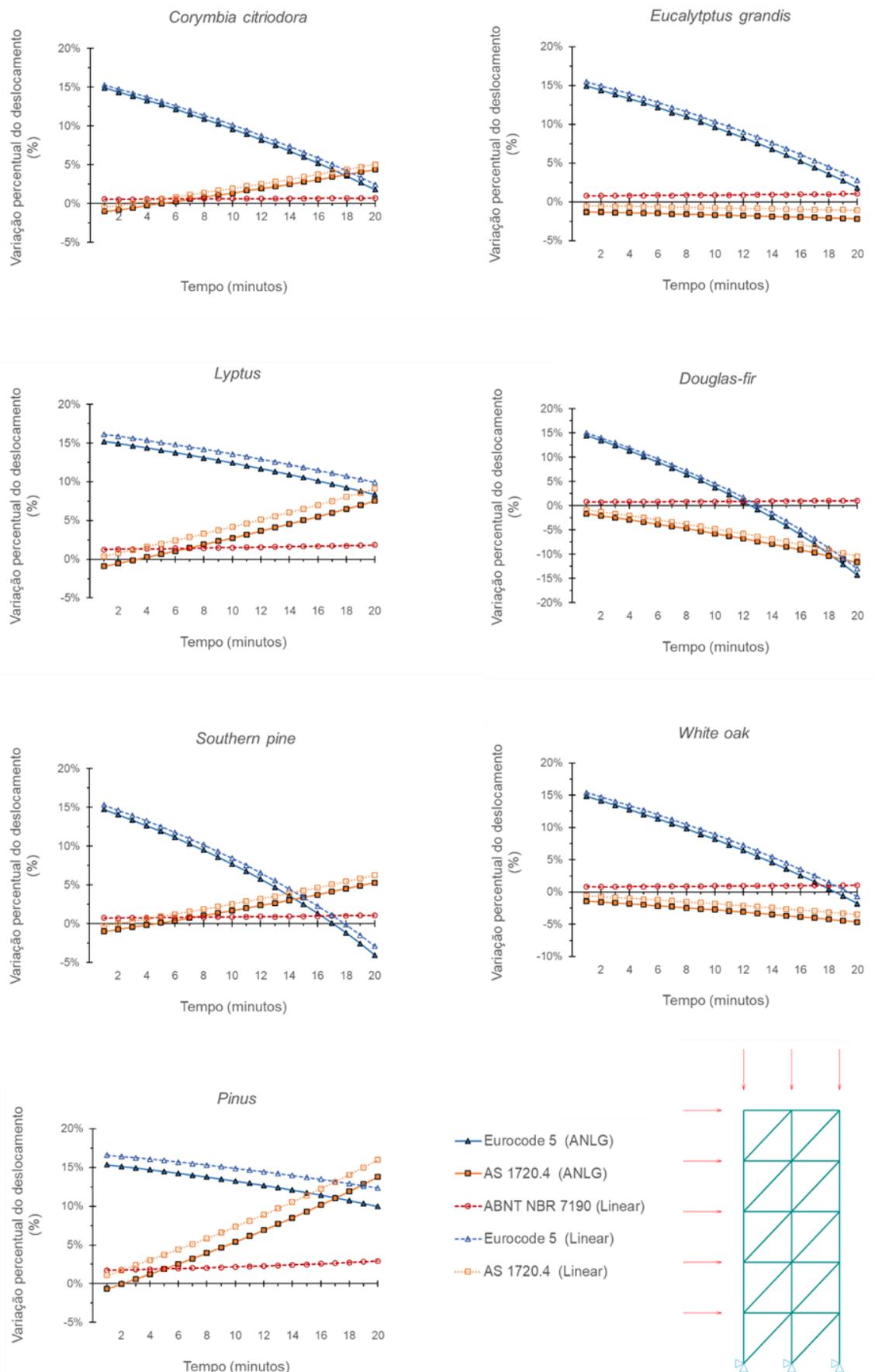
O deslocamento nodal máximo do pórtico treliçado foi verificado na direção horizontal do nó 6, localizado na extremidade superior à esquerda do sistema. Sua variação é representada na Figura 5.23, considerando-se as formas de análise, espécies de madeira e a variação do tempo de exposição ao fogo. A variação percentual relacionada ao procedimento I é indicada na Figura 5.24.

Figura 5.23 – Deslocamento máximo do pórtico treliçado



Fonte: Autor (2022)

Figura 5.24 – Variação do deslocamento máximo do pórtico treliçado



Fonte: Autor (2022)

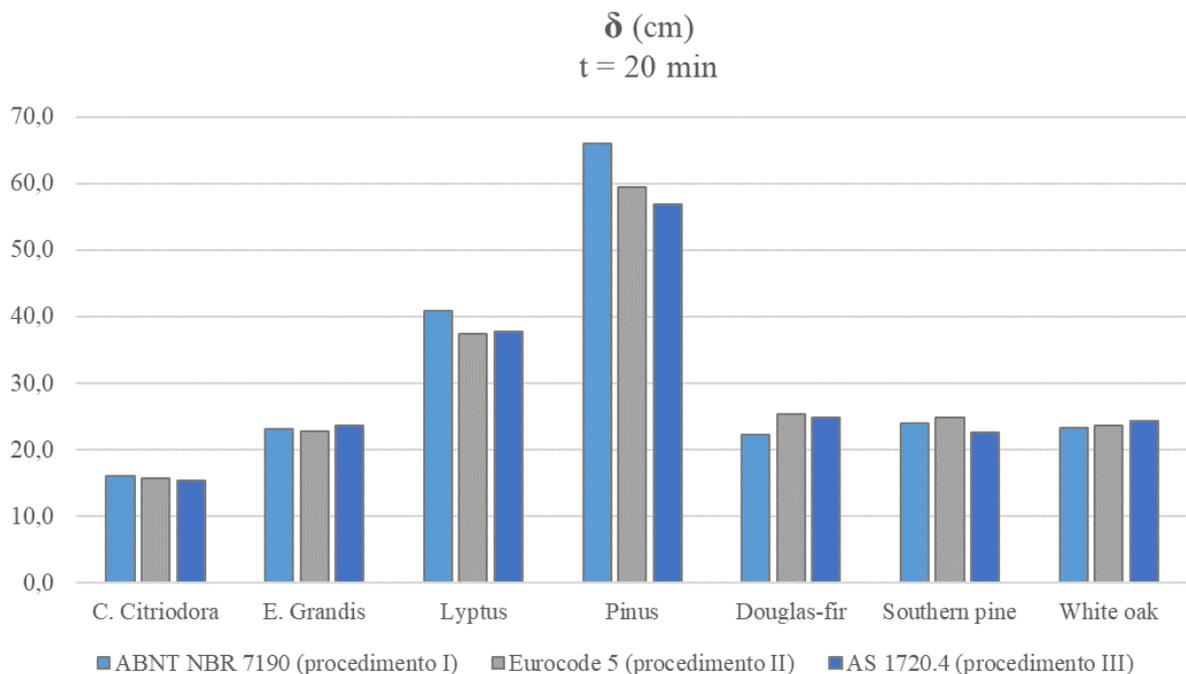
Variações ainda menores foram observados nos deslocamentos do pórtico treliçado, comparando-se as análises linear e não linear geométrica, assim como os procedimentos normativos. Para os valores adotados de forças externas, a diferença entre os resultados proporcionados pelas análises linear e não linear geométrica foi inferior a 3% para um mesmo procedimento.

Uma variação maior foi verificada comparando-se os valores de deslocamento alcançados pelo procedimento II, que apresentou diferença de aproximadamente 15% nos primeiros minutos de incêndio em relação ao procedimento I, embora tenha diminuído conforme o tempo.

Um aumento significativo para o deslocamento previsto pelo procedimento III para a espécie *Pinus* foi observado ao longo do tempo. Apesar disso, a capacidade resistente dessa espécie certamente não suportaria a exposição do fogo durante o período considerado, tendo em vista as dimensões das seções transversais das barras.

No gráfico da Figura 5.25 são representados os valores de deslocamento máximo do pórtico treliçado aos 20 minutos de incêndio, de acordo com as espécies de madeira e os procedimentos empregados, e considerando a determinação dos deslocamentos por análise não linear geométrica.

Figura 5.25 – Deslocamento máximo do pórtico treliçado quando $t = 20$ min



Fonte: Autor (2022)

Segundo o gráfico anterior (Figura 5.25), em todos os casos a espécie *Corymbia citriodora* apresentou menores deslocamentos que as demais, enquanto a espécie *Pinus* proporcionou os maiores deslocamentos, seguida pela espécie *Lyptus*. Comparando os valores em geral, é possível verificar a seguinte ordem para o deslocamento máximo determinado conforme cada espécie, considerando os procedimentos I, II e III, respectivamente:

- (i) *Pinus* > *Lyptus* > *Southern pine* > *White oak* > *Eucalyptus grandis* > *Douglas-fir* > *Corymbia citriodora*;
- (ii) *Pinus* > *Lyptus* > *Douglas-fir* > *Southern pine* > *White oak* > *Eucalyptus grandis* > *Corymbia citriodora*;
- (iii) *Pinus* > *Lyptus* > *Douglas-fir* > *White oak* > *Eucalyptus grandis* > *Southern pine* > *Corymbia citriodora*;

Assim como na análise do arco treliçado, verifica-se que, com exceção dos valores extremos proporcionados pelas espécies *Pinus*, *Lyptus* e *Corymbia Citriodora*, não há um padrão recorrente na ordem dos resultados envolvendo o deslocamento máximo do arco treliçado aos 20 minutos de exposição, considerando as propriedades de cada espécie de madeira.

No pórtico treliçado analisado, em todos os casos a maior tensão normal de compressão foi observada na barra compreendida entre os nós 1-2, enquanto a maior tensão normal de tração foi verificada na barra entre os nós 13-14.

No gráfico da Figura 5.26 são representadas as distribuições de tensões normais nos elementos do pórtico treliçado, para o instante crítico em que a tensão normal na barra mais solicitada superou a resistência paralela às fibras da madeira. Em geral, as falhas foram provocadas por compressão, exceto no caso do pórtico treliçado constituído pela espécie *Lyptus*, cuja falha ocorreu por tração. A análise em situação de incêndio do pórtico treliçado de *Pinus* não foi relevante nesse caso, uma vez que, considerando as forças externas atuantes, a falha foi verificada ainda em temperatura ambiente ($t = 0$).

De forma semelhante ao que foi observado nas análises do arco treliçado, o procedimento I alcançou menor tempo crítico de incêndio para os pórticos treliçados das espécies *Corymbia citriodora*, *Lyptus* e *Southern pine*, enquanto o procedimento III determinou para as espécies *Eucalyptus grandis*, *Douglas-fir* e *White oak*. Como a falha do sistema constituído pela espécie *Pinus* foi provocada ainda em temperatura ambiente, não foi possível identificar o procedimento mais desfavorável relacionado a ela. A espécie *Corymbia citriodora* apresentou novamente o maior tempo crítico de incêndio, igual a 20 minutos, devido à resistência proporcionada pelo material.

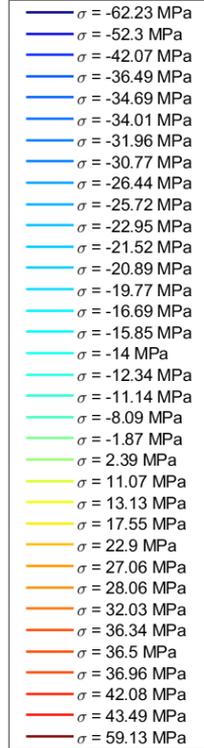
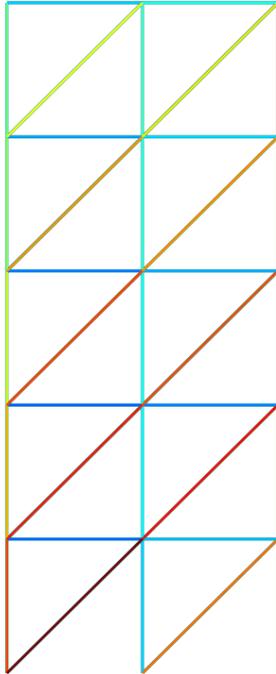
Figura 5.26 – Tensões nas barras do pórtico treliçado em instante crítico

(continua)

Espécie: *Corymbia citriodora* ($f_{c0} = 62$ MPa; $f_{t0} = 123.6$ MPa)

Procedimento: I

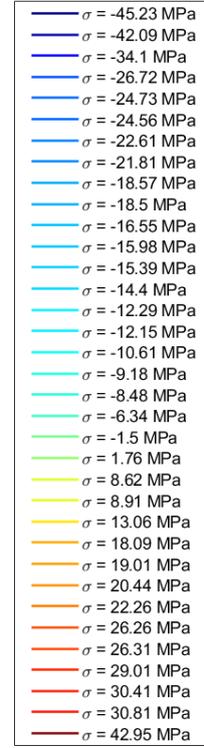
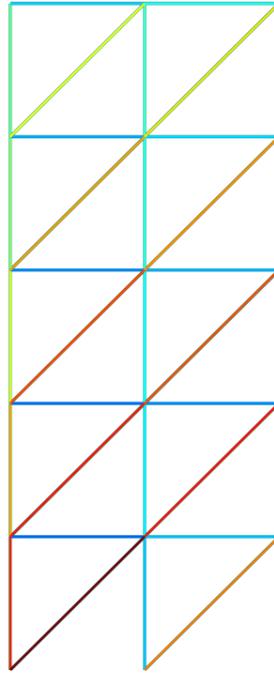
t = 20 min ($\beta = 0.58$ mm/min)



Espécie: *Eucalyptus grandis* ($f_{c0} = 40.3$ MPa; $f_{t0} = 70.2$ MPa)

Procedimento: III

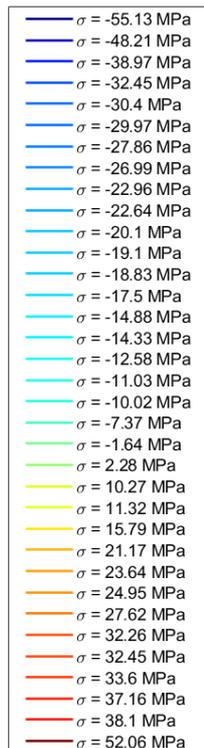
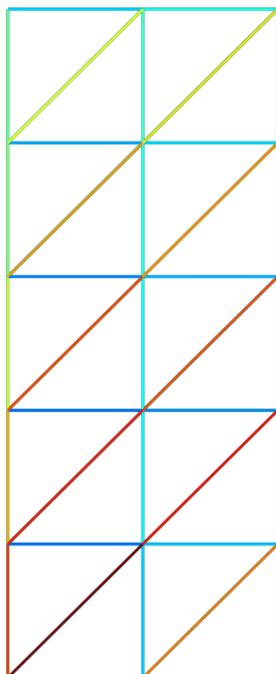
t = 1 min ($\beta = 0.59$ mm/min)



Espécie: *Lyptus* ($f_{c0} = 60.7$ MPa; $f_{t0} = 51.2$ MPa)

Procedimento: I

t = 11 min ($\beta = 0.69$ mm/min)



Espécie: *Douglas-fir* ($f_{c0} = 49.9$ MPa; $f_{t0} = 107.6$ MPa)

Procedimento: III

t = 6 min ($\beta = 0.74$ mm/min)

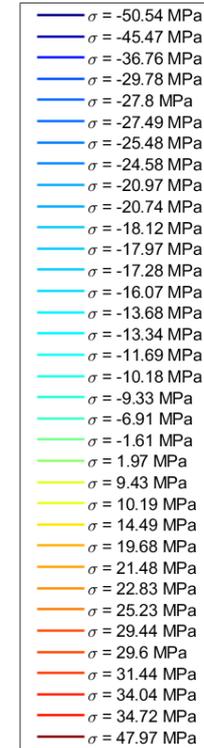
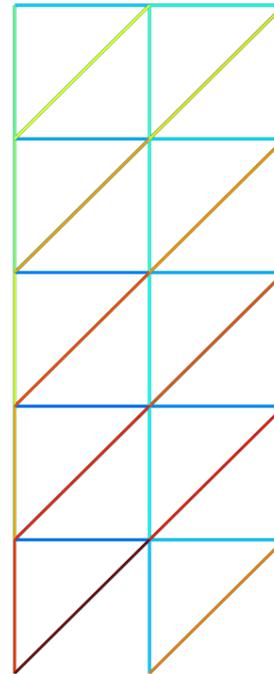
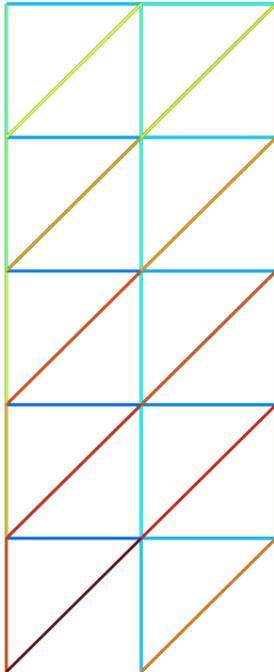


Figura 5.26 – Tensões nas barras do pórtico treliçado em instante crítico (continuação)

Espécie: *Southern pine* ($f_{c0} = 58.4$ MPa; $f_{t0} = 100$ MPa)

Procedimento: I

t = 13 min ($\beta = 0.74$ mm/min)

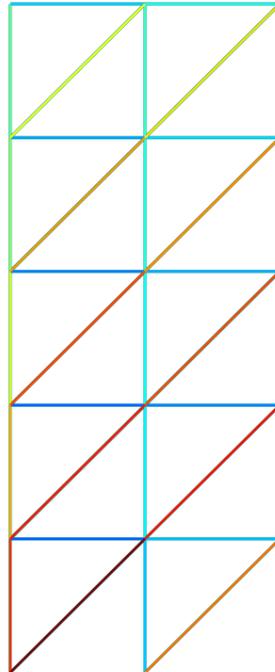


- $\sigma = -58.44$ MPa
- $\sigma = -50.16$ MPa
- $\sigma = -40.43$ MPa
- $\sigma = -34.32$ MPa
- $\sigma = -32.42$ MPa
- $\sigma = -31.87$ MPa
- $\sigma = -29.8$ MPa
- $\sigma = -28.75$ MPa
- $\sigma = -24.61$ MPa
- $\sigma = -24.08$ MPa
- $\sigma = -21.39$ MPa
- $\sigma = -20.11$ MPa
- $\sigma = -19.96$ MPa
- $\sigma = -18.56$ MPa
- $\sigma = -15.72$ MPa
- $\sigma = -15.05$ MPa
- $\sigma = -13.26$ MPa
- $\sigma = -11.64$ MPa
- $\sigma = -10.55$ MPa
- $\sigma = -7.72$ MPa
- $\sigma = -1.77$ MPa
- $\sigma = 2.29$ MPa
- $\sigma = 10.6$ MPa
- $\sigma = 12.16$ MPa
- $\sigma = 16.59$ MPa
- $\sigma = 21.93$ MPa
- $\sigma = 25.23$ MPa
- $\sigma = 26.38$ MPa
- $\sigma = 29.74$ MPa
- $\sigma = 34.22$ MPa
- $\sigma = 34.55$ MPa
- $\sigma = 34.85$ MPa
- $\sigma = 39.46$ MPa
- $\sigma = 40.61$ MPa
- $\sigma = 55.43$ MPa

Espécie: *White oak* ($f_{c0} = 51.3$ MPa; $f_{t0} = 105$ MPa)

Procedimento: III

t = 9 min ($\beta = 0.57$ mm/min)

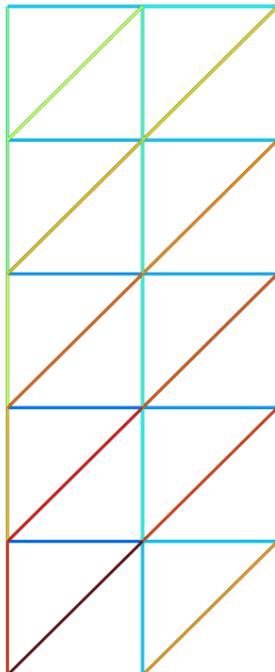


- $\sigma = -51.63$ MPa
- $\sigma = -46.14$ MPa
- $\sigma = -37.29$ MPa
- $\sigma = -30.42$ MPa
- $\sigma = -28.43$ MPa
- $\sigma = -28.09$ MPa
- $\sigma = -26.06$ MPa
- $\sigma = -25.15$ MPa
- $\sigma = -21.46$ MPa
- $\sigma = -21.2$ MPa
- $\sigma = -18.58$ MPa
- $\sigma = -18.25$ MPa
- $\sigma = -17.66$ MPa
- $\sigma = -16.42$ MPa
- $\sigma = -13.96$ MPa
- $\sigma = -13.58$ MPa
- $\sigma = -11.91$ MPa
- $\sigma = -10.38$ MPa
- $\sigma = -9.5$ MPa
- $\sigma = -7.02$ MPa
- $\sigma = -1.63$ MPa
- $\sigma = 2.03$ MPa
- $\sigma = 9.62$ MPa
- $\sigma = 10.45$ MPa
- $\sigma = 14.79$ MPa
- $\sigma = 20.02$ MPa
- $\sigma = 21.99$ MPa
- $\sigma = 23.33$ MPa
- $\sigma = 25.83$ MPa
- $\sigma = 30.11$ MPa
- $\sigma = 30.28$ MPa
- $\sigma = 31.94$ MPa
- $\sigma = 34.78$ MPa
- $\sigma = 35.53$ MPa
- $\sigma = 48.97$ MPa

Espécie: *Pinus* ($f_{c0} = 32.1$ MPa; $f_{t0} = 27.5$ MPa)

Procedimento: indefinido

t = 0 min ($\beta = 0.95$ mm/min)



- $\sigma = -36.84$ MPa
- $\sigma = -30.29$ MPa
- $\sigma = -21.31$ MPa
- $\sigma = -20.76$ MPa
- $\sigma = -19.43$ MPa
- $\sigma = -17.15$ MPa
- $\sigma = -16.54$ MPa
- $\sigma = -15.29$ MPa
- $\sigma = -13.69$ MPa
- $\sigma = -12.95$ MPa
- $\sigma = -12.74$ MPa
- $\sigma = -12.57$ MPa
- $\sigma = -12.45$ MPa
- $\sigma = -12.35$ MPa
- $\sigma = -8.6$ MPa
- $\sigma = -8.13$ MPa
- $\sigma = -6.48$ MPa
- $\sigma = -6.07$ MPa
- $\sigma = -5.43$ MPa
- $\sigma = -4.8$ MPa
- $\sigma = -1.25$ MPa
- $\sigma = 0.93$ MPa
- $\sigma = 5.46$ MPa
- $\sigma = 6.32$ MPa
- $\sigma = 12.28$ MPa
- $\sigma = 13.89$ MPa
- $\sigma = 14.25$ MPa
- $\sigma = 17.07$ MPa
- $\sigma = 17.92$ MPa
- $\sigma = 20.6$ MPa
- $\sigma = 21.78$ MPa
- $\sigma = 23.41$ MPa
- $\sigma = 24.21$ MPa
- $\sigma = 25.94$ MPa
- $\sigma = 35.23$ MPa

Fonte: Autor (2022)

As variações de tensão normal na barra mais solicitada dos modelos de pórtico treliçado são indicadas nos gráficos da Figura 5.27, de acordo o tempo de exposição ao fogo, as espécies de madeira e a forma de análise. A variação percentual relacionada ao procedimento I é representada na Figura 5.28.

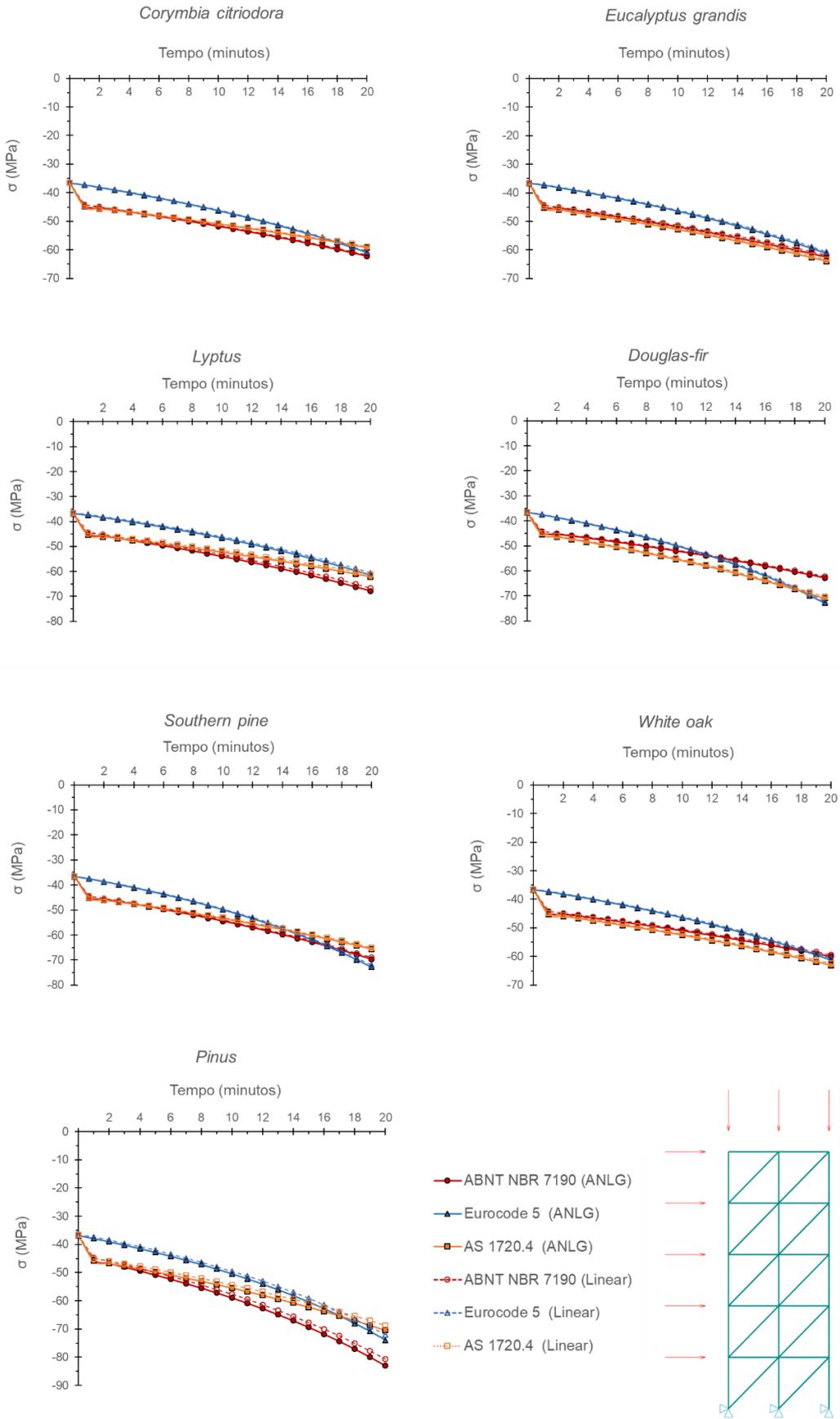
Assim como visto na variação dos deslocamentos, as diferenças também não foram notáveis para as tensões normais, nem para as forças internas na barra mais solicitada do pórtico (Figuras 5.29 e 5.30). As tensões normais apresentaram variações semelhantes às verificadas nos deslocamentos, com o procedimento II fornecendo valores aproximadamente 15% maiores nos primeiros minutos de incêndio. No caso das forças internas, a variação foi inferior a 2% para a espécie *Pinus* e 1% para as demais espécies, considerando tanto a forma de análise quanto o procedimento adotado. Consequentemente, não houve alterações expressivas entre uma análise linear ou não linear geométrica para o pórtico treliçado avaliado.

Possíveis configurações deformadas do pórtico treliçado são ilustradas na Figura 5.31. Na primeira representação (5.31a), confere-se a configuração deformada devido à aplicação de força externa inferior à força crítica de instabilidade. Na segunda representação (5.31b), o primeiro modo de instabilidade do pórtico treliçado é simulado, quando a força externa é equivalente à força crítica. No terceiro caso (5.31c), a configuração pós-instabilidade é representada, situação na qual a força externa é maior que a força crítica.

A variação da força crítica de instabilidade do pórtico treliçado é visualizada na Figura 5.32, em função de cada espécie prevista e o tempo de exposição ao fogo. A variação percentual é representada na Figura 5.33. Com exceção do modelo de espécie *Pinus*, o procedimento III determinou forças críticas com variação percentual absoluta inferior a 10% em relação ao procedimento I. Já o procedimento II alcançou forças críticas com valores superiores aos demais, e com variações de aproximadamente 20% nos primeiros minutos de incêndio, que foram diminuindo conforme o tempo, com exceção da espécie *Douglas-fir*. Para o modelo de tal espécie, a variação percentual da força crítica diminuiu até os 12 minutos, mas aumentou a partir desse instante, e permaneceu acima de 15% aos 20 minutos.

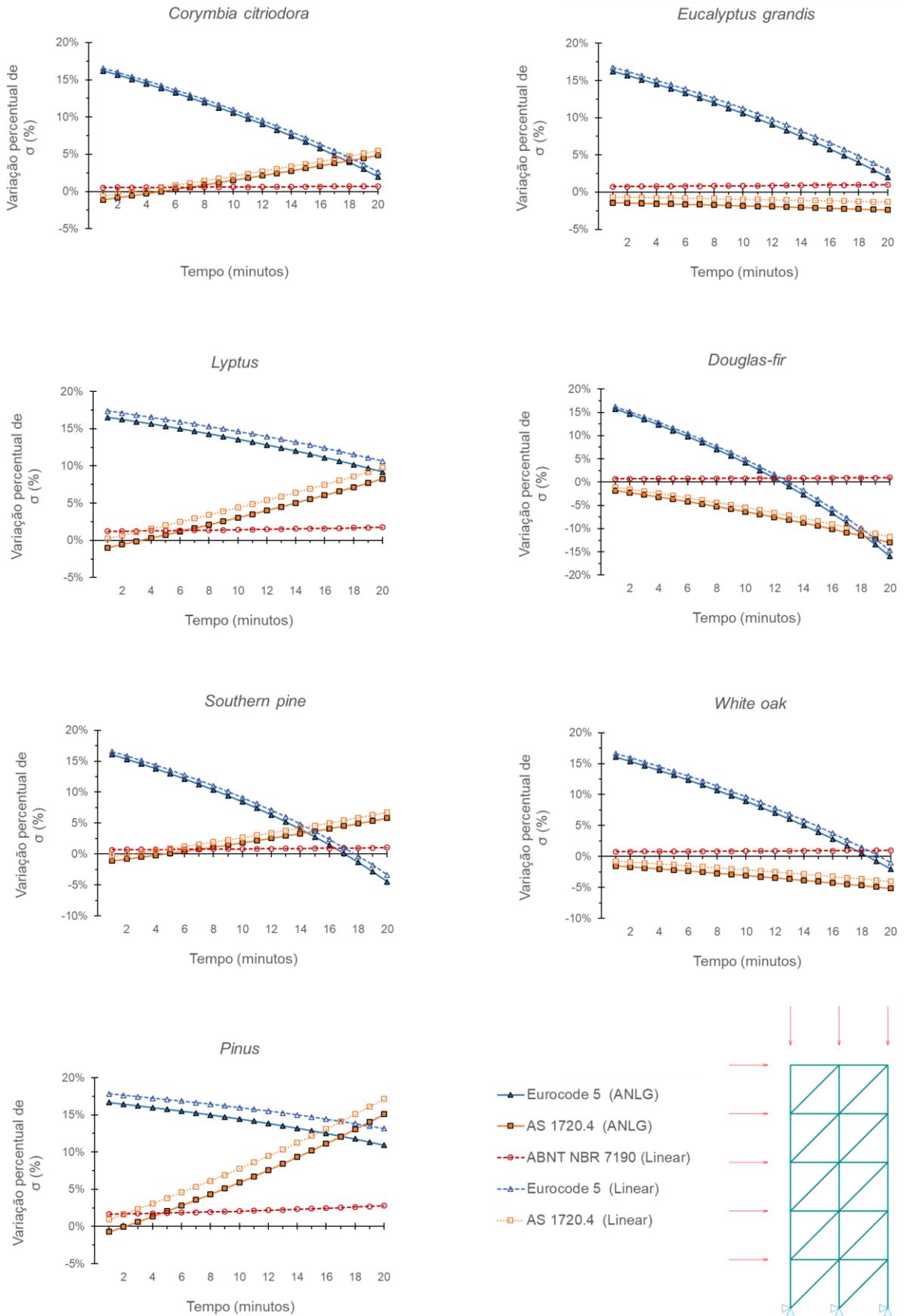
Os valores de força crítica de instabilidade do pórtico treliçado também foram agrupados no gráfico da Figura 5.34, de acordo com as espécies de madeira, os procedimentos de análise e considerando o tempo máximo de exposição ao fogo que foi previsto (20 minutos).

Figura 5.27 – Tensão normal na barra mais solicitada do pórtico treliçado



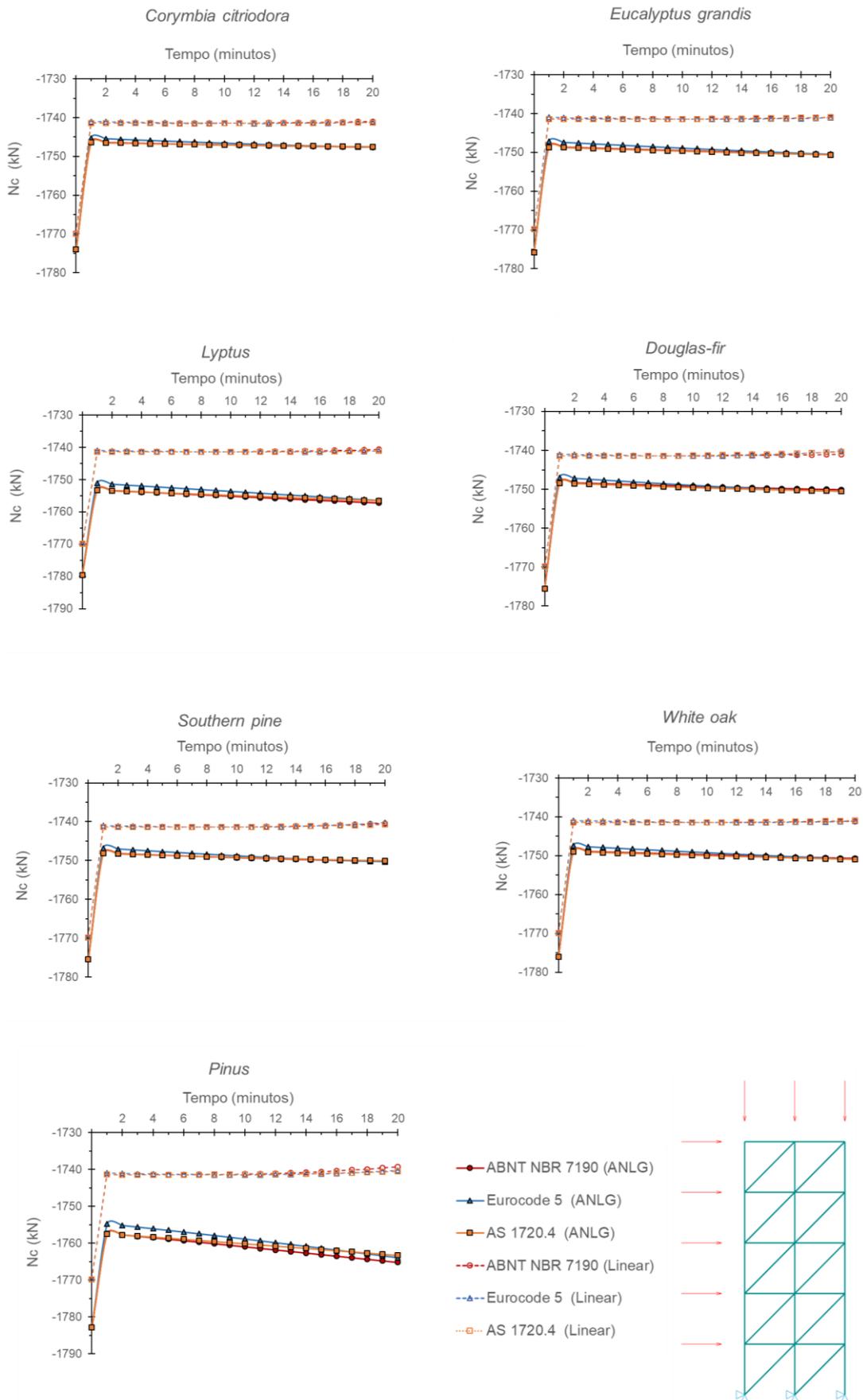
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.28 – Variação da tensão normal na barra mais solicitada do pórtico treliçado



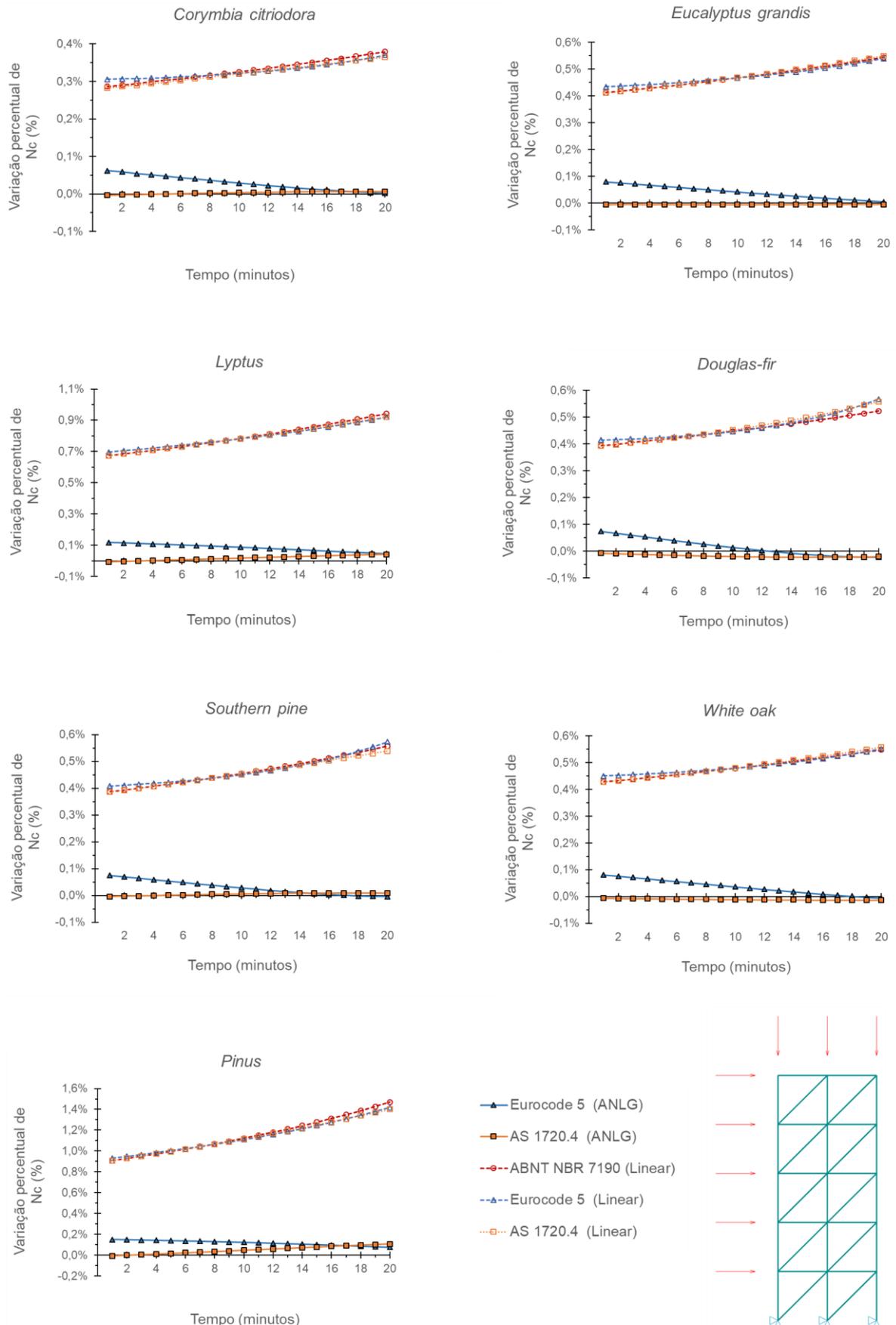
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.29 – Força de compressão na barra mais solicitada do pórtico treliçado



Fonte: Autor (2022)

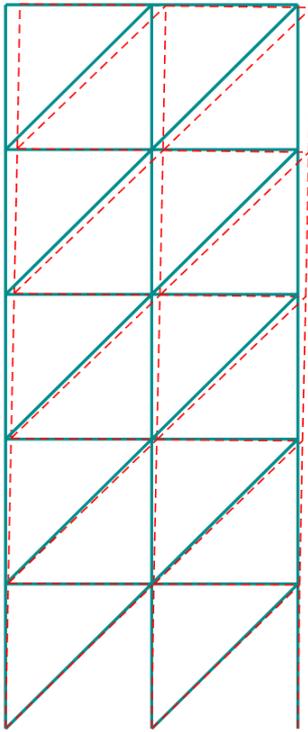
Figura 5.30 – Variação da força interna na barra mais solicitada do pórtico treliçado



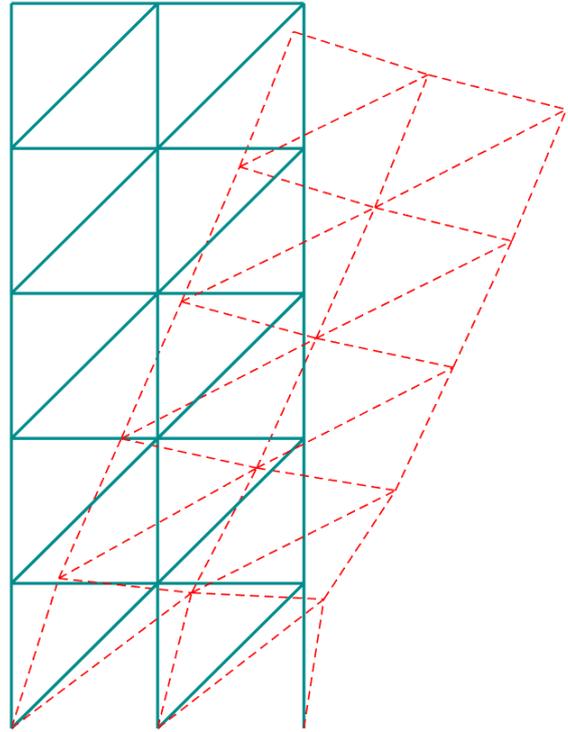
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.31 – Configurações iniciais e deformadas do pórtico treçado

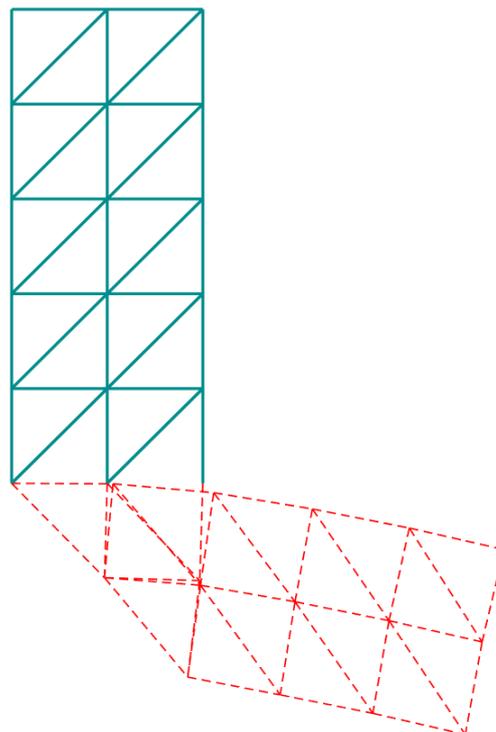
a) $P < P_{cr}$



b) $P = P_{cr}$



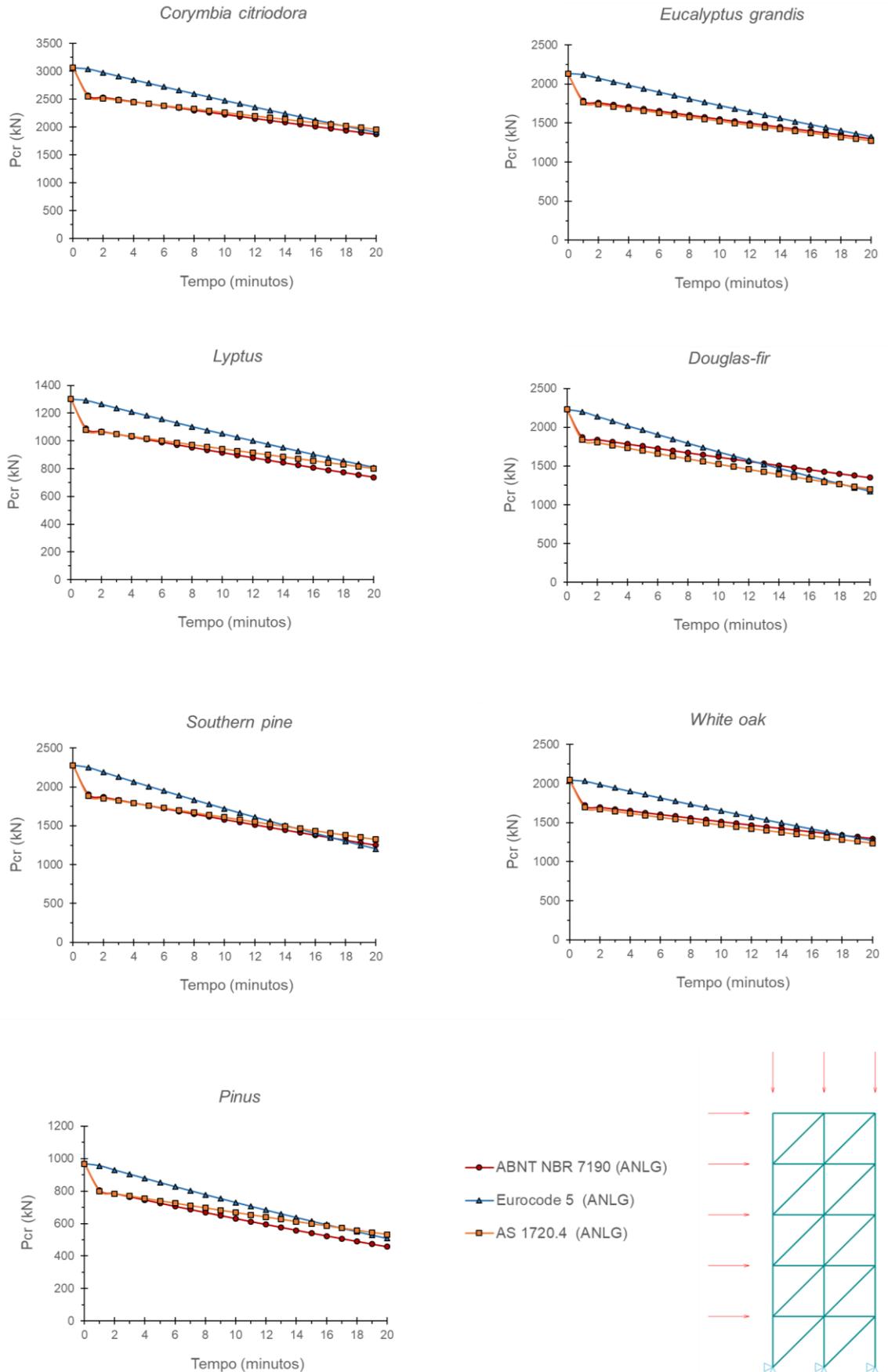
c) $P > P_{cr}$



— Configuração inicial
- - - Configuração deformada

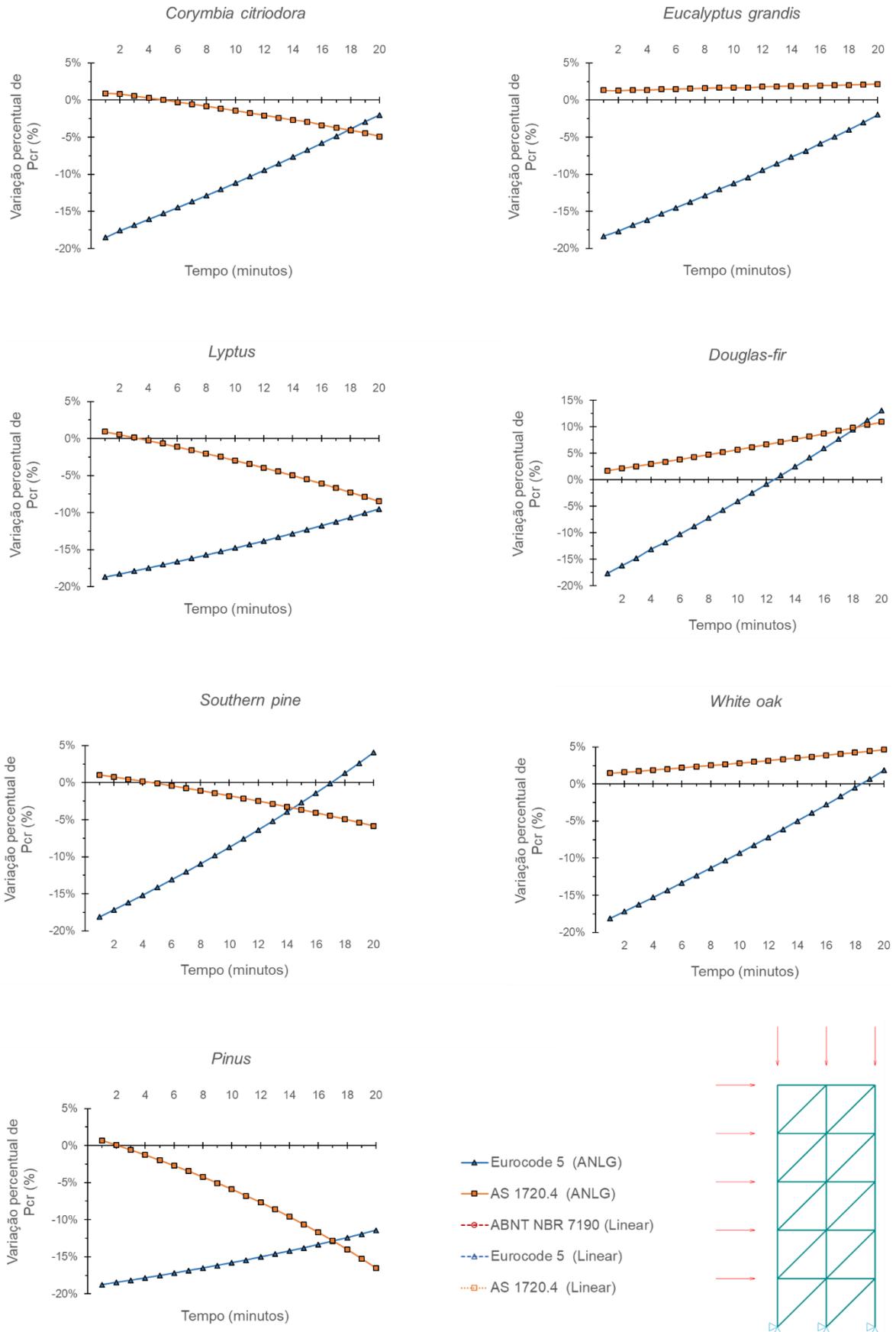
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.32 – Força crítica de instabilidade do pórtico treliçado



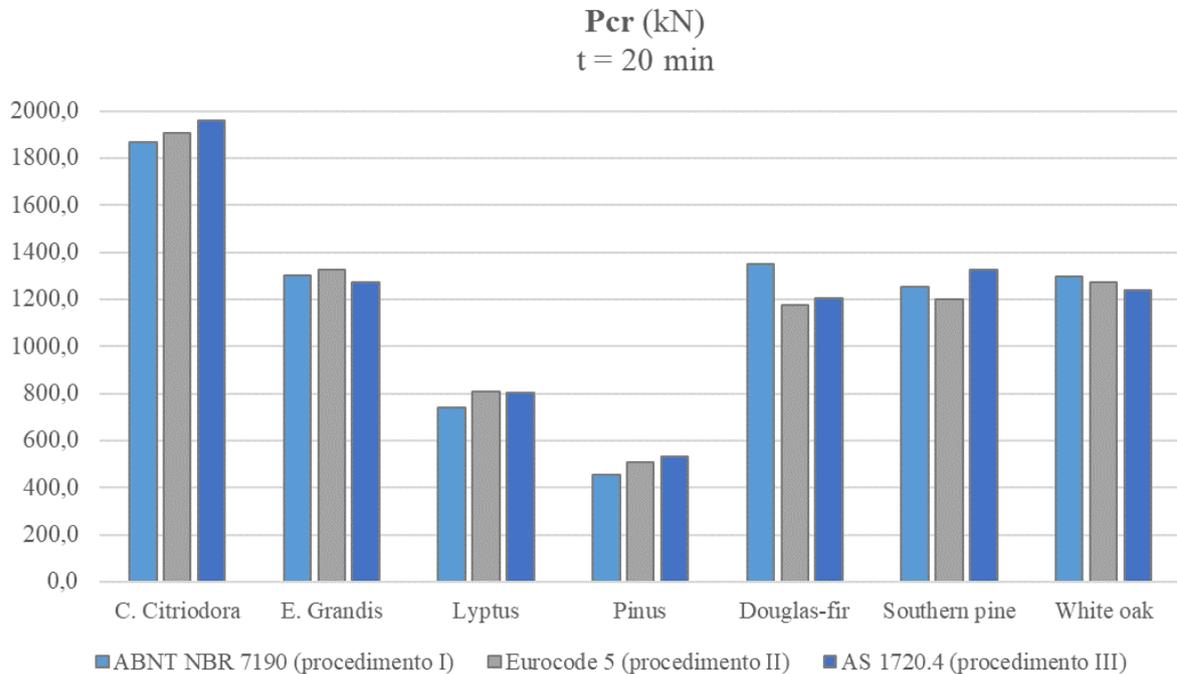
Fonte: Autor (2022)

Figura 5.33 – Variação da força crítica de instabilidade do pórtico treliçado



Fonte: Autor (2022)

Figura 5.34 – Variação da força crítica de instabilidade do pórtico treliçado



Fonte: Autor (2022)

Considerando o gráfico da Figura 5.34, é possível comparar os valores de força crítica dos pórticos treliçados constituídos por cada espécie de madeira no instante de 20 minutos. A seguinte ordem decrescente é alcançada a partir da comparação dos resultados conforme os procedimentos I, II e III, respectivamente:

- (i) *Corymbia citriodora* > *Douglas-fir* > *Eucalyptus grandis* > *White oak* > *Southern pine* > *Lyptus* > *Pinus*;
- (ii) *Corymbia citriodora* > *Eucalyptus grandis* > *White oak* > *Southern pine* > *Douglas-fir* > *Lyptus* > *Pinus*;
- (iii) *Corymbia citriodora* > *Southern pine* > *White oak* > *Eucalyptus grandis* > *Douglas-fir* > *Lyptus* > *Pinus*.

Observa-se que, novamente, a espécie *Corymbia citriodora* alcançou a maior força crítica de instabilidade aos 20 minutos. Enquanto isso, a espécie *Pinus* foi associada ao menor valor de acordo com os três procedimentos, e a espécie *Lyptus* ao segundo menor. Assim como na análise do arco treliçado, a ordem dos valores associados às outras espécies não foi padronizada, logo também não houve relação direta entre rigidez e força crítica ou taxa de carbonização e força crítica para o modelo de pórtico treliçado estudado.

Uma vez consideradas as ações atuantes nas direções vertical e horizontal em função da força $P = 65$ kN, a força crítica de instabilidade não foi alcançada nos modelos analisados.

Nem mesmo nos pórticos referentes à espécie *Pinus*, visto que o menor valor de força crítica foi obtido conforme o procedimento I e equivalente a $P_{cr} = 457,3$ kN, no tempo de 20 minutos de exposição ao fogo.

Dessa forma, a instabilidade não foi uma condição crítica para os modelos de pórtico treliçado, uma vez que o valor de força crítica não foi atingido conforme as ações atuantes. Já a resistência à compressão paralela às fibras da barra mais solicitada foi superada ao longo do tempo de exposição ao fogo, como visto nos diagramas de tensões normais.

5.2 Processamento da força crítica de instabilidade

Uma das maiores vantagens da aplicação do processo iterativo da força crítica aparente refere-se ao tempo de processamento necessário para convergência do modelo numérico, como uma quantidade menor de iterações são aplicadas no processamento de forças críticas de instabilidade a partir de uma análise não linear geométrica.

São apresentados, na Tabela 5.2, o número de iterações e o tempo necessário para convergência na determinação da força crítica de instabilidade de treliças da espécie *Pinus*, em temperatura ambiente. Assim como nas demais análises, a formulação posicional do MEF foi utilizada na análise não linear geométrica. Observa-se que os tempos necessários para convergência aplicando o processo iterativo da força crítica aparente (PFCA) foram menores que aqueles obtidos por um processo convencional, além da quantidade de iterações necessárias.

Tabela 5.2 – Iterações e tempo para convergência de forças críticas

Modelo estrutural	P_{cr} (kN)	Iterações			Tempo (s)		
		PFCA (A)	Convencional (B)	A / B	PFCA (C)	Convencional (D)	C / D
Treliça torre	523,0	90	1200	0,075	0,71	5,69	0,125
Arco treliçado	189,4	60	500	0,120	1,52	8,65	0,176
Pórtico treliçado	967,3	100	2000	0,050	2,29	15,39	0,149

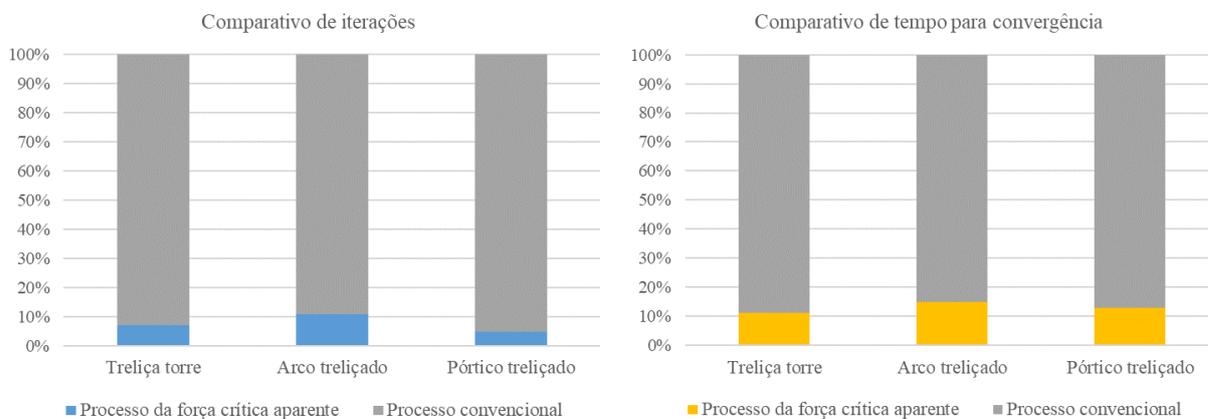
Fonte: Autor (2022)

É importante ressaltar que, no processo convencional, as forças externas são aplicadas gradualmente à estrutura, a um passo de carga unitário ou inferior, e verifica-se o autovalor mínimo da matriz Hessiana a cada passo. Como apresentado no capítulo anterior, a condição crítica é atingida quando a matriz Hessiana deixa de ser positiva definida, o que implica em determinante nulo ou negativo, com ao menos um autovalor também nulo ou negativo. O processo iterativo da força crítica aparente busca reduzir a quantidade iterações envolvidas, o

que resulta em uma conseqüente diminuição do tempo de processamento. Tal redução do número de iterações é ocasionada pela aplicação estratégica das forças externas em intervalos sucessivos, embora algumas limitações possam afetar a precisão do procedimento, como já mencionado.

Com relação à quantidade de iterações e tempo necessário para convergência do processamento da força crítica, dois gráficos comparativos são indicados na Figura 5.35, que consideram os dois processos empregados. O processo convencional, que alcançou maiores valores em geral, é utilizado como referência na variação percentual. Nota-se que o número de iterações pelo processo iterativo da força crítica aparente não superou 12% da quantidade empregada pelo processo convencional, enquanto o tempo necessário para convergência foi menor que 18% do total. Portanto, compreende-se que a utilização do processo iterativo da força crítica aparente reduz o custo computacional envolvido na determinação da força crítica de flambagem de treliças. Isso foi vantajoso no estudo presente, uma vez que envolveu mais de duas mil simulações de treliças planas em situação de incêndio, considerando a variação do parâmetro a cada minuto.

Figura 5.35 – Comparativos percentuais dos processos utilizados



Fonte: Autor (2022)

É interessante observar, ainda, que o processo pode ser estendido a sistemas treliçados constituídos por outros materiais além da madeira, em aplicações que podem ser abordadas em trabalhos futuros. No caso das treliças de madeira, o processo foi válido para estimativas envolvendo condições normais de temperatura ambiente e em situação de incêndio. O processo iterativo foi adotado em conjunto com os procedimentos do método da seção transversal reduzida, para considerar os efeitos deletérios da exposição ao fogo, e o MEF posicional, para a aplicação de análise não linear geométrica.

5.3 Discussão final

Com base nas análises efetuadas e resultados obtidos, algumas considerações podem ser levantadas sobre a influência de fatores relevantes, como: (i) formas de análise linear e não linear geométrica, (ii) critérios normativos associados ao método da seção transversal reduzida, (iii) parâmetros envolvidos no comportamento das treliças de madeira em situação de incêndio e (iv) estimativa da força crítica de instabilidade de acordo com o processo iterativo proposto no trabalho.

Mesmo que os sistemas treliçados sejam considerados menos deformáveis devido à disposição das barras e aplicação das forças sobre os nós, que proporcionam a eliminação de outros esforços internos além da força normal, variações foram notadas após as análises geometricamente não lineares pelo MEF posicional. Parâmetros como deslocamentos nodais, tensões normais e forças internas foram mais acentuados nos modelos de treliça torre, em comparação com a análise linear geométrica, tanto nas simulações em temperatura ambiente quanto em situação de incêndio. Outras variações também foram aferidas nos modelos de arco treliçado e, em menor grau, naqueles referentes ao pórtico treliçado.

A análise não linear geométrica também permitiu a determinação de forças críticas de instabilidade, o que não é possível na análise linear. Isso demonstra a importância de adotar análises não lineares no projeto de estruturas de madeira, cujos procedimentos podem ser mais racionais e afetar significativamente os resultados obtidos, de acordo com as propriedades do sistema analisado.

Assim como ressaltado por Silva et al. (2021a) e Silva et al. (2022), a discussão sobre a utilização de análises não lineares é pertinente e provavelmente terá maior atenção em futuras revisões da norma brasileira ABNT NBR 7190, visto que não é amplamente prevista em seu estado atual devido às limitações computacionais de épocas passadas. Com os avanços tecnológicos recentes, o processamento dessas análises pode ser realizado com maior velocidade e menor custo computacional, ainda que exija formulações mais robustas. Nesse contexto, a programação em ambiente MATLAB mostrou-se satisfatória, como permitiu o processamento das análises a partir de uma linguagem voltada especialmente a operações matemáticas e matriciais, além de possibilitar a geração de figuras e gráficos diversos no pós-processamento.

Quanto à influência dos modelos de carbonização, foi observado que a hipótese de menor profundidade de carbonização inicial pode provocar resultados mais conservadores, como verificado nos modelos baseados na norma europeia Eurocode 5. Tal norma considera o

aquecimento lento do material nos primeiros 20 minutos de exposição ao fogo, e adota-se um coeficiente para reduzir o efeito da profundidade inicial de carbonização da madeira. Dependendo da classificação da madeira, os valores de taxa de carbonização sugeridos pela norma europeia são praticamente fixos, e, para os modelos estruturais analisados com base nessa norma, foram identificados tempos críticos de exposição ao fogo com valores maiores.

Por outro lado, uma redução da profundidade de carbonização inicial do material não é prevista no projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190 ou na norma australiana AS 1720.4, e não existem coeficientes de redução quanto à carbonização indicados nesses códigos. Por esses motivos, é interessante que o efeito da redução da carbonização inicial seja investigado para mais espécies de madeira, a fim de confirmar ou descartar a necessidade de prever coeficientes redutores durante as análises em situação de incêndio nos minutos iniciais, como essa consideração pode afetar diretamente os parâmetros calculados. É importante observar que os menores valores de tempo crítico de incêndio foram observados nos modelos de treliça cujos procedimentos de análise foram baseados nas normas brasileira e australiana.

Ainda com base nos resultados alcançados, não houve relação direta entre tempo crítico de incêndio e taxa de carbonização, uma vez que os modelos com maiores valores de taxas não foram, necessariamente, aqueles que exibiram comportamento mais desfavorável nas análises em situação de incêndio. Isso foi constatado mesmo nos casos em que as ações atuantes foram aplicadas com os mesmos valores, assim como as seções transversais e outras propriedades geométricas, sendo a espécie de madeira e suas propriedades físicas as únicas variações de um modelo para outro.

Os resultados obtidos não apresentaram padrões na ordem de valores, com exceção das espécies *Corymbia citriodora* e *Pinus*, que foram as espécies com os maiores e menores valores de resistência e rigidez, respectivamente, e também associadas aos maiores e menores parâmetros determinados. Dessa forma, a análise não linear geométrica das treliças em situação de incêndio envolveu a interação de diversas variáveis, de tal modo que a resposta da estrutura foi influenciada pelas ações atuantes, propriedades geométricas do sistema estrutural, condições de contorno e propriedades físicas e mecânicas da madeira, como resistência, módulo de elasticidade e taxa de carbonização. Inspeções simples, baseadas somente nos valores de taxas de carbonização das espécies de madeira, são inadequadas e devem ser evitadas. Além disso, é interessante ressaltar que a variação nas taxas de carbonização da madeira é influenciada por vários fatores, incluindo a própria anatomia da madeira, como as espécies *Douglas-fir* e *Pinus* exibiram valores semelhantes de densidade aparente, mas diferenças notáveis nos valores experimentais de taxa de carbonização.

Outro aspecto importante a ser observado refere-se à proximidade dos procedimentos normativos do projeto de revisão da ABNT NBR 7190 e da norma australiana AS 1720.4. Embora os resultados obtidos a partir do projeto de revisão da norma brasileira considerarem valores experimentais para a taxa de carbonização, os resultados alcançados foram próximos em muitos casos. Como a norma australiana indica uma expressão geral para estimar a taxa de carbonização com base na densidade aparente da madeira, seria interessante que a norma brasileira, em futura revisão, previsse um modelo semelhante na ausência de dados experimentais. Assim, a adoção de um modelo numérico permitiria estimar a taxa de carbonização da madeira conforme suas propriedades físicas, podendo considerar possíveis adaptações na formulação segundo as características das espécies mais utilizadas na construção civil brasileira.

No caso dos três sistemas treliçados investigados, o processo iterativo da força crítica aparente foi aplicado na determinação dos valores de força crítica de instabilidade. Esse procedimento, que consiste em uma aplicação estratégica das forças externas, possibilitou a redução do número de iterações e do tempo de processamento para as estimativas das forças críticas. Quando comparado a um processo convencional, o processo iterativo da força crítica aparente reduziu em mais de 80% a quantidade de iterações e tempo necessário para convergência, sendo uma aplicação evidentemente vantajosa em termos computacionais.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste capítulo são abordadas as principais conclusões do trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros, que poderão ampliar a discussão proposta, a aplicação dos métodos e a geração de novos resultados e conclusões.

6.1 Conclusões

No trabalho investigou-se a influência de modelos de taxa de carbonização na análise não linear geométrica de treliças planas de madeira em situação de incêndio. Para isso, foram empregados modelos de taxa de carbonização das normas ABNT NBR 7190, EN 1995-1-2 e AS 1720.4. A formulação posicional do Método dos Elementos Finitos foi utilizada na concepção da análise não linear geométrica, enquanto o método da seção transversal reduzida foi aplicado para simular os efeitos da exposição ao fogo nos elementos de madeira. A implementação computacional foi realizada a partir de códigos desenvolvidos em linguagem MATLAB, os quais também permitiram a geração de diversas figuras para representação dos modelos estruturais e diagramas.

Com relação aos resultados numéricos, foi possível observar que uma simples análise linear geométrica pode conduzir a valores inferiores de tensões, esforços internos e deslocamentos, dependendo das solicitações e das propriedades físicas e geométricas da estrutura. Em diversos casos, essa variação foi constatada tanto em condições normais com temperatura ambiente quanto na avaliação em situação de incêndio. Dessa forma, o emprego de uma análise não linear geométrica foi pertinente, uma vez que permitiu a determinação de valores mais precisos de tensões, esforços internos e deslocamentos, além de possibilitar a avaliação da instabilidade do sistema estrutural. Por esses motivos, o emprego de análise não linear geométrica para o projeto de estruturas de madeira é recomendado, assim como sua especificação em futuras discussões e revisões da norma brasileira ABNT NBR 7190, mesmo que implique em maior custo computacional e robustez do procedimento de análise.

Quanto ao comportamento dos modelos estruturais analisados em situação de incêndio, foi verificado que os valores estimados segundo as recomendações da norma europeia Eurocode 5 foram menores devido à hipótese de aquecimento lento da madeira e menor profundidade de carbonização inicial. Por outro lado, como essa hipótese não é prevista no projeto de revisão da norma brasileira ABNT NBR 7190 ou na norma australiana AS 1720.4, os parâmetros obtidos conforme as especificações de ambas foram mais desfavoráveis para a estrutura em geral. Portanto, é importante que o efeito do aquecimento

lento ainda seja amplamente investigado em estudos futuros, com o objetivo de atestar sua influência nos primeiros 20 minutos de exposição ao fogo, uma vez que os parâmetros finais da estrutura podem ser significativamente influenciados por essa hipótese.

A comparação dos resultados obtidos segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190 e a norma australiana AS 1720.4 mostrou que houve pouca variação em alguns casos, ainda que o modelo utilizado pela norma australiana tenha considerado uma expressão geral para estimativa da taxa de carbonização em função da densidade aparente da madeira. Um modelo semelhante também poderia ser previsto em futura revisão da norma brasileira, assim como valores experimentais já estabelecidos para algumas espécies. De tal modo, evitaria a utilização de taxas de carbonização em valores praticamente fixos, que variam somente de acordo com a classificação da madeira e do tipo de elemento, pois tal situação é simplificadora e pode contribuir para resultados imprecisos quando comparada a valores experimentais. Com a inclusão de um modelo próprio, as recomendações voltadas para a previsão de situação de incêndio ficariam ainda mais detalhadas, e contribuiria para proporcionar mais segurança às estruturas projetadas e analisadas conforme tal condição.

Por fim, é importante destacar a eficácia do procedimento da força crítica aparente, que foi proposto no trabalho com o objetivo de determinar forças críticas de instabilidade com menor esforço computacional. Por meio de aplicações estratégicas das forças externas em intervalos sucessivos e armazenamento dos parâmetros calculados ao longo do processo, ele possibilitou reduções de aproximadamente 80% do número de iterações e tempo necessário para convergência da análise numérica, quando comparado a um procedimento convencional. Logo, o processo iterativo da força crítica aparente proporcionou vantagens no aproveitamento dos recursos computacionais e na diminuição do trabalho algébrico voltado para as estimativas de forças críticas de instabilidade, enquanto poderá ser expandido e utilizado como uma estratégia numérica na abordagem de outras aplicações em trabalhos futuros.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como possíveis sugestões para trabalhos futuros, recomenda-se:

1. Aplicar os modelos de incêndio e de análise não linear geométrica pelo MEF Posicional na investigação de outros sistemas estruturais de madeira, como vigas e painéis, efetuando-se adaptações necessárias conforme suas propriedades e de seus elementos.

2. Incorporar a análise não linear física das ligações e da madeira, assim como o efeito do incêndio nas ligações.
3. Expandir a utilização do processo da força crítica aparente na análise de outros sistemas estruturais de madeira.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190**: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 1997.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190**: Projeto de estruturas de madeira (Projeto de Revisão). Rio de Janeiro, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14432**: Exigências de resistência ao fogo de elementos construtivos de edificações — Procedimento. Rio de Janeiro, 2001.

ASSOCIATION SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM E-119**: standard test methods for fire tests of building construction and materials. Philadelphia, 2010.

AUSTRALIAN STANDARD. **AS 1720.4**: Timber Structures – Part 4: Fire resistance for structural adequacy of timber members. Homebush, 2006.

BARATA, T. Q. F.; GANDINI, J. M. D. Projeto arquitetônico e estrutural em madeira para unidade habitacional. In: **Anais do 1º Congresso Ibero-Latino Americano da Madeira na Construção**, Coimbra, 2011.

BARTLETT, A. I.; HADDEN, R. M.; BISBY, L. A. A review of factors affecting the burning behaviour of wood for application to tall timber construction. **Fire Technology**, v. 55, p. 1-49, 2019.

BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. Structural stability: elastic, inelastic, fracture, and damage theories. New York: Oxford University Press, 1991.

CALIL JUNIOR, C.; LAHR, F. A. R.; MARTINS, G. C. A.; DIAS, Antonio A. **Estruturas de Madeira** - projetos, dimensionamento e exemplos de cálculo. Grupo Editorial Nacional LTC, 2021.

CARRASCO, E. V. M.; OLIVEIRA, A. L. C.; MANTILLA, J. N. R. Influência da temperatura na resistência e no módulo de elasticidade em madeira de híbridos de eucaliptos. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 26, n. 2, p. 389-400, 2016.

CHRISTOFORO, A. L.; PANZERA, T. H.; SILVEIRA, M. E.; SILVA, D. A. L.; PINHEIRO, R. V.; LAHR, F. A. R. Avaliação numérica do módulo de elasticidade em vigas roliças de madeira da espécie *Pinus elliottii*. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 26, n. 4, p. 1271-1279, 2016.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular).

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 193, p. 3541-3557, 2004.

CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional: análise estática e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018.

CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for nonlinear three dimensional beam-elements. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 81, p. 131-150, 1990.

DICKSON, M.; PARKER, D. Engineered timber and structural form in sustainable design. **Construction Materials**, v. 168, n. 4, p. 161-172, 2015.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1995-1**: Design of timber structures – Part 1-2: General – Structural fire design. Brussels, 2004.

FIGUEROA, M. J. M.; MORAES, P. D. Comportamento da madeira a temperaturas elevadas. **Ambiente Construído (Online)**, v. 9, p. 158-174, 2009.

FIRMANTI, A.; BACHTIAR, E.; SURJOKUSUMO, S.; KOMATSU K.; KAWAI, S. Mechanical stress grading of tropical timbers without regard to species. **Journal of Wood Science**, v. 51, n. 1, p. 339–347, 2005.

FONSECA, E. M. M.; COELHO, D. C. S.; BARREIRA, L. M. S. Structural safety in wooden beams under thermal and mechanical loading conditions. **International Journal of Safety and Security Engineering**, v. 2, n. 3, p. 242-255, 2012.

FOREST PRODUCTS LABORATORY. **Wood handbook—Wood as an engineering material**. General Technical Report FPL-GTR-190. Madison, Wisconsin: United States Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory, 508 p, 2010.

FRIQUIN, K. Material properties and external factors influencing the charring rate of solid wood and glue-laminated timber. **Fire and Materials**, v. 35, p. 303-327, 2011.

GERHARDS, C. C. Effect of moisture content and temperature on the mechanical properties of wood: an analysis of immediate effects. **Wood and Fiber**, v. 14, p. 4-36, 1982.

GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite elements in analysis and design**, v. 42, p. 1079-1086, 2006.

GRECO, M.; VENTURINI, W. S. Stability analysis of three-dimensional trusses. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 3, p. 325-344, 2006.

GRECO, M.; VICENTE, C. E. R. Analytical solutions for geometrically nonlinear trusses. **Revista Escola de Minas (REM)**, v. 62, n. 2, p. 205-214, 2009.

HOLMBERG, S.; PERSSON, K.; PETERSSON, H. Nonlinear mechanical behaviour and analysis of wood and fibre materials. **Computer and Structures**, v. 72, p. 459-480, 1999.

HU, M.; JOHANSSON, M.; OLSSON, A.; OSCARSSON, J.; BERTIL E. Local variation of modulus of elasticity in timber determined on the basis of non-contact deformation measurement and scanned fibre orientation. **European Journal of Wood and Wood Products**, v. 73, p. 17-27, 2015.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 834-1**: Fire resistance tests – Elements of building construction – Part 1: General requirements, 1999.

JIANG, J.; LI, J.; GAO, Q. Effect of flame retardant treatment on dimensional stability and thermal degradation of wood. **Construction and Building Materials**, v. 75, n. 30, p. 74-81, 2015.

MORENO JUNIOR, A. L.; MOLINA, J. C. Considerações de interesse sobre a avaliação em laboratório de elementos estruturais em situação de incêndio: contribuições à revisão da NBR 5628:2001. **Ambiente Construído (Online)**, v. 12, n. 4, p. 37-53, 2012.

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo Método dos Elementos Finitos Posicional**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LAHR, F. A. R. **Arco treliçado de madeira**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1978.

LAHR, F. A. R.; CHRISTOFORO A. L.; SILVA, C. E. G.; JUNIOR, J. R. A.; PINHEIRO, R. V. Avaliação de propriedades físicas e mecânicas de madeiras de jatobá (*Hymenaea stilbocarpa Hayne*) com diferentes teores de umidade e extraídas de regiões distintas. **Revista Árvore**, v. 40, p.147-154, 2016.

MARTINS, G. C. A. **Determinação de um modelo para a taxa de carbonização transversal a grã para a madeira de E. citriodora e E. grandis**. Tese (Doutorado em Ciência e Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

MOLINA, J. C.; CALIL JUNIOR, C.; KIMURA, E. F. A.; PINTO, E. M.; REGOBELLO, R. Análise numérica do comportamento de elementos de madeira em situação de incêndio. **Floresta e Ambiente**, v. 19, p. 162-170, 2012.

MOLITERNO, A. **Caderno de projetos de telhados em estruturas de madeira**. 4 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

NARQUES, T. V. N.; SILVA, T. D.; CHRISTOFORO, A. L.; TEIXEIRA, J. N.; LAHR, F. A. R. Influência de métodos de cálculo do TRRF na verificação de edifícios em situação de incêndio. **HOLOS**, v. 1, p. 1-15, 2021.

NI, Z. P.; QIU, P. F. Experimental study on fire resistance performance of glulam beams. **Applied Mechanics and Materials**, v. 193-194, n. 1, p. 539-543, 2012.

PINTO, E. M. **Determinação de um modelo para a taxa de carbonização transversal a grã para a madeira de E. citriodora e E. grandis**. Tese (Doutorado em Ciência e Engenharia de Materiais), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

PINTO, E. M.; MACHADO, G. O.; FELIPETTO, R. P. F.; SILVA, D. A. L.; CHRISTOFORO, A. L.; ROCCO, F. A. L.; CALIL JUNIOR, C. Thermal degradation and charring rate of *Corymbia Citriodora* and *Eucalyptus Grandis* wood species. **The Open Construction and Building Technology Journal**, v. 10, p. 450-456, 2016.

PRIES, M.; MAI, C. Fire resistance of wood treated with a cationic silica sol. **European Journal of Wood and Wood Products**, v. 71, n. 2, p. 237-244, 2013.

PURKISS, J. A. **Fire safety engineering design of structures**. Butterworth-Heinemann, 2.ed., 2007.

RODMAN, U.; SAJE, M.; PLANINC I; ZUPAN, D. The lateral buckling of timber arches. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 13, n. 8, 2013.

SCHAFFER, E. L. **Charring rate of select woods**: transverse to grain. U. S. Department of Agriculture, Forest Service. Forest Products Laboratory, 1967.

SCHIMID, J.; MENIS, A.; FRAGIACOMO, M.; CLEMENTE, I.; BOCHICCHIO, G. Behaviour of loaded cross-laminated timber wall elements in fire conditions. **Fire Technology**, v. 51, p. 1341-1370, 2015.

SCHNABL, S.; TURK, G.; PLANINC, I. Buckling of timber columns exposed to fire. **Fire Safety Journal**, v. 46, n. 7, p. 431-439, 2011.

SHI, J. Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method. **Computers & Structures**, v. 58, p. 203-202, 1996.

SILVA, D. A. L.; LAHR, F. A. R.; FARIA, O. B.; CHAUD, E. Influence of wood moisture content on the modulus of elasticity in compression parallel to the grain. **Materials Research**, v. 15, n. 2, p. 300-304, 2012.

SILVA, T. D.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos Posicional para análise não linear geométrica de treliças Howe de madeira**. In: Anais do 4º Congresso do Instituto Politécnico da PUC Minas, Belo Horizonte, 2020.

SILVA, T. D.; CHRISTOFORO, A. L.; NARQUES, T. V. N.; TEIXEIRA, J. N.; LAHR, F. A. R. Análise não linear geométrica de treliças planas de madeira a partir do método dos elementos finitos posicional. **Revista Principia**, v. 57, p. 112-120, 2021.

SILVA, T. D.; NARQUES, T. V. N.; ALMEIDA, J. P. B.; CHRISTOFORO, A. L. Variação da capacidade resistente de vigas de madeira em situação de incêndio. **Revista Principia**, v. 57, p. 190-198, 2021.

SILVA, T. D.; CHRISTOFORO, A. L.; PANZERA, T. H.; MOLINA, J. C.; LAHR, F. A. R. Influence of the timber elastic modulus on the geometric nonlinear structural analysis of truss arches. **Revista Árvore**, v. 46, p. 1-10, 2022.

TEIXEIRA, D. E. Evaluation of maximum strength and modulus of elasticity of Douglas-fir lumber in axial to grain tension by two nondestructive techniques. **Brazilian Journal of Wood Science**, v. 7, n. 1, p. 1–6, 2016.

TIMOSHENKO, S. **History of Strength of Materials**. McGraw-Hill, New York, 1953.

WHITE, R. H. **Charring rates of different wood species**. PhD thesis, University of Wisconsin, Madison, 1998.

ZANGIÁCOMO, A. L.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Módulo de elasticidade aparente em vigas roliças estruturais de madeira *Pinus elliottii*. **Ambiente Construído**, v. 14, p. 7-13, 2014.