

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Jéssica Cristina Leonel de Souza

Problema de N Corpos e sua Relação com o Caos

Sorocaba

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Jéssica Cristina Leonel de Souza

Problema de N Corpos e sua Relação com o Caos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Federal de São Carlos, *Campus* Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Física. Sorocaba, 27 de Abril de 2022.

Orientador: Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão

Sorocaba

2022

Souza, Jessica Cristina Leonel de

Problema de N corpos e sua relação com o caos / Jessica
Cristina Leonel de Souza -- 2022.
53f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): Renato Fernandes Cantão

Banca Examinadora: José Roberto Ribeiro Bortoleto,
Tersio Guilherme de Souza Cruz

Bibliografia

1. Problema de N corpos. 2. Dinâmica caótica. 3.
Determinismo. I. Souza, Jessica Cristina Leonel de. II.
Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - *Campus Sorocaba*
Coordenação do Curso de Licenciatura em Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Folha de aprovação

Jéssica Cristina Leonel de Souza

“PROBLEMA DE N CORPOS E SUA RELAÇÃO COM O CAOS”

Orientador

Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão

Membro 1

Prof. Dr. José Roberto Ribeiro Bortoleto

Membro 2

Prof. Dr. Tersio Guilherme de Souza Cruz



Documento assinado digitalmente
TERSIO GUILHERME DE SOUZA CRUZ
Data: 29/04/2022 17:45:47-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Sorocaba, 27 de abril de 2022.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - SOROCABA
Rodovia João Leme dos Santos, Km 110 - SP-264
Bairro do Itinga - Sorocaba - São Paulo - Brasil
CEP 18052-780
Telefone: (15) 3229-8859

ATA DA DEFESA PÚBLICA
ATA N° 06/2022

Aos vinte e sete dias do mês de abril de 2022, por videoconferência pela plataforma do Google Meet, realizou-se a defesa pública do trabalho de Conclusão de Curso do estudante **Jéssica Cristina Leonel de Souza** do Curso de Licenciatura em Física – Sorocaba, devidamente matriculado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, perante a Banca Examinadora, composta pelos Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão, Prof. Dr. José Roberto Ribeiro Bortoleto e Prof. Dr. Tersio Guilherme de Souza Cruz segundo o estabelecido nas Normas para apresentação de Trabalho de Conclusão do Curso.

Após a apresentação e arguições, a Banca deliberou, segundo os critérios estabelecidos nas normas do TCC do curso:

Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão

Nota: 10,0

Prof. Dr. José Roberto Ribeiro Bortoleto

Nota: 10,0

Documento assinado digitalmente
gov.br TERSIO GUILHERME DE SOUZA CRUZ
Data: 29/04/2022 17:42:03-0300
Verifique em <https://verificador.itl.br>

Prof. Dr. Tersio Guilherme de Souza Cruz

Nota: 10,0

Com isso, o Trabalho foi considerado **APROVADO**, com nota final **10,0 (dez inteiros)**.

Sorocaba, 27 de abril de 2022.

Dedico esse trabalho à todos os alunos e alunas do ensino público brasileiro, que ingressaram em universidades públicas e enfrentaram o abismo acadêmico necessário para a conclusão da formação.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe cuja força, dedicação e amor fizeram de mim a mulher que sou hoje. Ela quem me estimulou a ser sempre a melhor parte de mim e a realizar os meus sonhos.

Agradeço ao meu marido, que é também meu melhor amigo, pelo apoio, constante estímulo, calma, paciência e amor que demonstrou durante todo o processo da minha formação.

Agradeço aos meus colegas Bianca, Felipe, Juliana, Jéssica e Matheus pelas constantes trocas de ideias e companheirismo. Agradeço também aos amigos Hugo, Thabata e Giovana que não frequentaram o curso comigo, mas que me ajudaram igualmente no decorrer do mesmo. E agradeço especialmente aos meus amigos Lucas, que está sempre despertando o melhor de mim, à Isis, que foi todo o meu suporte na primeira metade desse curso, e à Isabela por me incentivar e ajudar durante toda a segunda metade do curso e cuja amizade foi um presente que eu vou levar para o resto da vida.

Agradeço ao meu orientador Renato Fernandes Cantão que foi um excelente guia, com constante bom humor e paciência, e é também um dos melhores exemplos de professores que já tive. Agradeço também ao professor James Alves de Souza pela revisão nos conceitos de Física apresentados nesse trabalho.

Por último, mas não menos importante, agradeço à professora Luciana do curso de Química, ao professor James do curso de Física, e aos professores Cantão e Graciele do curso de Matemática, que eu conheci no decorrer do curso e que se tornaram exemplos para a minha prática docente devido ao amor, carinho e paixão que demonstraram em sala de aula acerca da profissão.

Não são nossas habilidades que mostram quem realmente somos, são as nossas escolhas.

Alvo Dumbledore

Resumo

A experiência diária nos mostra que a natureza é formada por inúmeros corpos interagindo entre si, sejam estes macroscópicos, como planetas e estrelas, ou microscópicos como átomos e moléculas. As leis de movimento estabelecidas por Isaac Newton no século XVII foram desenvolvidas para explicar como as forças agem sobre os corpos para produzir movimento e como os corpos interagem entre si. Newton foi o primeiro a resolver formalmente o problema de $N = 2$ corpos massivos movendo-se no espaço tridimensional, com suas posições e velocidades iniciais conhecidas, e interagindo entre si sob a ação exclusiva da gravidade. O sucesso da aplicação de sua lei da gravitação universal para a solução deste problema foi comprovado pela verificação das três leis de Kepler estabelecidas para a descrição do movimento dos planetas no sistema solar. Diante deste resultado, naturalmente Newton estendeu sua análise para o problema de $N = 3$ corpos, com o intuito de descrever o sistema Terra-Lua-Sol. Contudo, o problema para $N \geq 3$ tornou-se um desafio para a humanidade, permanecendo ainda hoje sem uma solução analítica completa que possa fornecer as trajetórias do sistema. Apesar disso, soluções restritas deste problema mostraram que dinâmicas extremamente complexas poderiam ser observadas em sistemas determinísticos simples. Estes resultados marcaram o início do estudo de sistemas caóticos. Neste trabalho apresentamos como as propriedades fundamentais destes sistemas podem ser introduzidas e discutidas a partir do problema de 2 corpos no contexto da mecânica celeste. Iniciamos com este problema para discutir os princípios e conceitos básicos da Mecânica Clássica como o estado inicial de um sistema, seu centro de massa e os princípios de conservação de energia e dos momentos angular e linear. Estes foram essenciais para demonstrar analiticamente que as trajetórias do sistema são descritas por órbitas estáveis e periódicas, conforme estabelecido pelas leis de Kepler. O surgimento do caos neste sistema é observado com a consideração do problema geral de $N = 3$ corpos. A adição de mais um corpo fez com que a estabilidade e a regularidade das trajetórias observadas no sistema de 2 corpos desaparecessem, dando lugar a trajetórias irregulares, não periódicas e extremamente sensíveis às mudanças nas condições iniciais do sistema. Toda a análise do sistema caótico foi feita numericamente. Pela comparação dos resultados obtidos para o sistema de 2 e 3 corpos foi possível mostrar que os sistemas caóticos são caracterizados não só por serem não lineares e exibirem sensibilidade às suas condições iniciais, mas também por possuírem uma dinâmica determinística.

Palavras-chave: Problema de 2 corpos. Problema de 3 corpos. Dinâmica caótica. Determinismo.

Abstract

Daily experience shows that nature is made up of countless bodies interacting with each other, macroscopic, like planets and stars, or microscopic, such as atoms and molecules. The laws of motion established by Isaac Newton in the 17th century were developed to explain how forces act on bodies to produce motion and how bodies interact with each other. Newton was the first to formally solve the problem of $N = 2$ massive bodies moving in three-dimensional space, with their initial positions and velocities known, and interacting with each other under the exclusive action of gravity. The universal gravitational law was successfully applied to solve this problem, proving the three laws of Kepler, which were established for the description of the motion of the planets in the solar system. From this result, Newton naturally extended his analysis to the three-body problem, in order to describe the Earth-Moon-Sun system. However, the problem for $N \geq 3$ bodies has become a challenge for humanity, remaining even today without a complete analytical solution, that can provide the trajectories of the system. Nevertheless, restricted solutions of this problem showed that extremely complex dynamics could be observed in simple deterministic systems. These results marked the beginning of the study of chaotic systems. In this work we present how the fundamental properties of these systems can be introduced and discussed from the two-body problem in the context of celestial mechanics. We start with this problem to discuss the basic principles and concepts of Classical Mechanics such as the initial state of a system, its center of mass and the principles of conservation of energy and of angular and linear momenta. These were essential to demonstrate analytically that the trajectories of the system are described by stable and periodic orbits, as established by Kepler's laws. The emergence of chaos in this system is observed by considering the general three-body problem. The addition of one more body caused the stability and regularity of the trajectories observed in the two-body system to disappear, giving way to irregular, non-periodic and extremely sensitive dependence on the initial conditions of the system. All analysis of the chaotic system was done numerically. By comparing the results obtained for the two- and three-body systems, it was possible to show that the chaotic systems are characterized not only for being non-linear and showing sensitive dependence on the initial conditions, but also for having a deterministic dynamics.

Keywords: Two-body problem. Three-body problem. Chaotic dynamics. Determinism.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Referencial inercial O, x, y, z	17
Figura 2	– Trajetória da evolução temporal no espaço tridimensional do sistema de dois corpos para $m_1 = m_2$ interagindo sob a ação exclusiva da força gravitacional, conforme a equação (2.5). Note que o CM executa uma trajetória retilínea, em pleno acordo com a discussão apresentada para obtenção da Equação (2.9). Os parâmetros utilizados para obtenção das trajetórias foram $\vec{r}_1 = (-0,5, 0e0)[m]$ e $\vec{v}_1 = (0,01, 0,01e0) [m/s]$ para m_1 , em azul, e $\vec{r}_2 = (0,5, 0e0) [m]$ e $\vec{v}_2 = (-0,05, 0e-0,1) [m/s]$ para m_2 , em vermelho.	20
Figura 3	– Referencial inercial utilizado para obtenção da primeira lei de Kepler, em que consideramos m_1 estacionário localizado na origem do sistema, de maneira que \vec{r} fornece a posição de m_2 . O versores do sistema de coordenadas polares são dados por \hat{r} e $\hat{\theta}$ e os versores do sistema de coordenadas cartesianas descritos por \hat{x} e \hat{y}	24
Figura 4	– Órbita elíptica, com excentricidade $e = c/a < 1$, sendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ em que a e b são os semieixos maior e menor, respectivamente. Em (a) ilustramos m_1 no foco direito, tendo este como origem do sistema de coordenadas, com o foco esquerdo, representado por um ponto, na posição angular θ_0 . Esta configuração corresponde ao sinal positivo da equação (2.38) e descreve a situação física obtida na equação (2.37). O corpo m_2 está posicionado em \vec{r} em um instante de tempo determinado, orbitando m_1 com velocidade \vec{v} . Em (b) apresentamos a situação correspondente ao sinal negativo da equação (2.38), com m_1 situado no foco esquerdo e o foco direito é representado por um ponto.	27
Figura 5	– Diferentes trajetórias de m_2 em relação a m_1 . Nesta representação consideramos m_1 localizada na origem da trajetória circular $e = 0$ e no foco esquerdo da elipse, $e < 1$, obtidas para $E < 0$. No caso de um estado não ligado $E > 0$, m_2 é espalhada por m_1 segundo uma trajetória hiperbólica para $e > 1$. As excentricidades destas trajetórias foram definidas conforme a equação (2.39). Note que o raio da trajetória circular é dado pelo fator de escala L^2/GM	28
Figura 6	– (a) A região sombreada ilustra a área varrida pelo vetor \vec{r} quando o corpo m_2 desloca-se de uma distância $v dt$ em sua órbita em relação a m_1 . Como o momento angular do sistema é conservado, a equação (2.42) mostra que, (b) \vec{r} varre áreas iguais A em tempos iguais Δt , conforme estabelecido pela segunda lei de Kepler.	29

- Figura 7 – Em (a) ilustramos o sistema geral de três corpos, representados pelas massas pontuais m_i , para $i = 1, 2, 3$, localizados nas respectivas posições \vec{r}_i em relação à origem O de um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) . O vetor $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ representa a distância entre m_i e m_j , para $i \neq j = 1, 2, 3$. Em (b) apresentamos os vetores das forças gravitacionais agindo entre os pares m_i e m_j , sendo \vec{F}_{ji} a força que o corpo m_j exerce em m_i 35
- Figura 8 – (a) Simulação das trajetórias aproximadas obtida para o problema geral de três corpos com massas $m_1, m_2 = 2m_1$ e $m_3 = 3m_1$ interagindo sob ação exclusiva da força gravitacional, conforme equações de (3.1) a (3.3). As condições iniciais do sistema, dadas pela posições (m) e velocidades (m/s), foram $\vec{r}_1 = (-10, 10e-11)$ e $\vec{v}_1 = (-3, 0e0)$ para m_1 (em vermelho), $\vec{r}_2 = (0, 0e0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 0e0)$ (em verde) e $\vec{r}_3 = (10, 10e12)$ e $\vec{v}_3 = (3, 0e0)$ para m_3 (em azul). Em (b) apresentamos as trajetórias do mesmo sistema considerando uma pequena modificação apenas na coordenada x do corpo m_1 de 10,0000 para 10,0005 m, para mostrar a sensibilidade nas condições iniciais do sistema. As posições iniciais são descritas nas figuras por bolinhas abertas e as finais por bolinhas fechadas. 36
- Figura 9 – Simulação das trajetórias aproximadas obtidas para o problema de dois corpos com massas iguais considerando as mesmas condições iniciais apresentadas na Figura 2 em (a), ou seja, $\vec{r}_1 = (-0,5, 0e0)$ [m] e $\vec{v}_1 = (0,01, 0,01e0)$ [m/s] para m_1 , em azul, e $\vec{r}_2 = (0,5, 0e0)$ [m] e $\vec{v}_2 = (-0,05, 0e-0,1)$ [m/s] para m_2 , em vermelho. Em (b) apresentamos o mesmo sistema modificando a coordenada x do corpo m_1 de $-0,5$ para $-0,6$ m, para mostrar que as trajetórias se mantêm essencialmente as mesmas, não apresentando qualquer sensibilidade à modificações no estado inicial do sistema. 37
- Figura 10 – Trajetórias aproximadas dos corpos de massa m_1 em (a), m_2 em (b) e m_3 em (c), considerando as mesmas condições utilizadas nas Figuras 8(a) e (b) para melhorar a visualização das trajetórias antes (vermelho) e depois (azul) da variação na condição inicial do corpo m_1 37
- Figura 11 – Representação das condições iniciais do sistema de dois corpos com m_2 orbitando m_1 . A posição inicial de m_2 em $t = 0$ é dada por \vec{r}_0 , para $\theta = 0$, e sua velocidade inicial por $\vec{v}_0 = v_{r_0}\hat{r} + v_{\theta_0}\hat{\theta}$. A origem do sistema é descrita no foco direito da órbita, situado na posição de m_1 , com o ângulo θ_0 descrevendo a posição angular do foco esquerdo da órbita. . . 51

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	O PROBLEMA DE 2 CORPOS	15
2.1	A Lei da Gravitação Universal	16
2.1.1	Conservação do Momento Angular	19
2.1.2	Conservação da Energia	22
2.2	O Problema de 2 Corpos e as Leis de Kepler	23
2.2.1	Primeira Lei de Kepler	24
2.2.2	Segunda Lei de Kepler	28
2.2.3	Terceira Lei de Kepler	29
3	O PROBLEMA DE N CORPOS	32
3.1	O Problema de 3 Corpos e sua Relação com o Caos	33
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
	Referências	42
	APÊNDICES	45
	APÊNDICE A – VELOCIDADE E ACELERAÇÃO TOTAIS DO SISTEMA DE DOIS CORPOS REDUZIDO EM COORDENADAS POLARES	46
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO DIFERENCIAL NA VARIÁVEL $u(\theta)$ E OBTENÇÃO DE SUA SOLUÇÃO PARTICULAR	48
	APÊNDICE C – CONDIÇÕES INICIAIS E OBTENÇÃO DA CONSTATANTE C	51

1 Introdução

O problema de N corpos consiste na determinação do movimento de N corpos interagindo entre si em vários contextos na natureza, como na interação entre átomos e moléculas, sistemas biológicos, corpos celestes, entre outros, em que cada corpo interage com $N - 1$ corpos aos pares. Neste trabalho consideramos tal interação sob a ação exclusiva da força gravitacional.

A origem matemática do problema de N corpos deu-se com Newton no século XVII em sua obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (NEWTON, 1687). Newton apresentou a sua lei da gravitação universal e mostrou que ela concordava com as leis de Kepler ao resolver o problema de $N = 2$ corpos. Neste problema são considerados dois corpos de extensão desprezível, pontuais, orbitando o centro de massa do sistema. Um exemplo típico de problema de dois corpos neste contexto é a Lua orbitando a Terra ou a Terra orbitando o Sol.

Newton também foi o primeiro a estudar o problema de $N = 3$ corpos, pensando no movimento do sistema Terra-Lua-Sol, mas encontrou dificuldades extremas na busca de uma solução. Após Newton, a obtenção de uma solução completa para o problema de $N > 2$ corpos tornou-se uma prioridade entre vários cientistas e matemáticos. No século XIX o rei Oscar II da Suécia e da Noruega ofereceu um prêmio para quem resolvesse o problema. O prêmio foi conferido ao matemático, físico e filósofo francês Henri Poincaré, que teve o seu trabalho publicado em 1890. Apesar de Poincaré discutir diversos conceitos de maneira geral, ele se restringiu ao problema de 3 corpos de maneira bastante simplificada, considerando apenas dois graus de liberdade, ou seja, ele considerou os 3 corpos se movendo no mesmo plano (BARROW-GREEN, 1997).

O problema de N corpos permanece ainda hoje sem uma solução analítica completa e prática (ARDOUREL; JEBEILE, 2016). A impossibilidade de obtenção desta solução já havia sido antecipada pelo próprio Poincaré. Segundo ele, se esta solução existisse, a mesma exigiria métodos e instrumentos analíticos diferentes e muito mais complicados do que aqueles que ele conhecia. Apesar da simplificação utilizada no problema de 3 corpos, Poincaré pôde concluir que sistemas determinísticos simples podem apresentar uma dinâmica extremamente complexa. Com esta descoberta ele marcava o início da história da teoria do caos (BARROW-GREEN, 1997).

Uma característica marcante na dinâmica de sistemas caóticos é a dependência, extremamente sensível, a modificações nas condições iniciais do sistema. Isso significa que um sistema caótico iniciando o seu movimento a partir de dois estados iniciais muito parecidos, pode desenvolver trajetórias radicalmente divergentes. Tal sensibilidade

é referida popularmente como “*o efeito borboleta*”, para caracterizar de maneira similar a sensibilidade nas mudanças climáticas observadas em nosso planeta. Nesse efeito, a movimentação do ar provocada nas vizinhanças das asas de uma borboleta situada em alguma região do Brasil poderia fazer a diferença, após alguns meses, na trajetória de um furacão que poderia passar pelos Estados Unidos, causando destruição, ou se dirigir para o meio do oceano Atlântico sem causar qualquer prejuízo.

Neste trabalho apresentamos como os aspectos fundamentais de um sistema que apresenta dinâmica caótica, como não linearidade, sensibilidade às condições iniciais e determinismo, podem ser introduzidos no contexto da mecânica celeste, a partir de um sistema de 2 corpos sujeito à ação exclusiva da força gravitacional. O problema de 2 corpos foi utilizado para elencar conceitos importantes da Mecânica Clássica como o centro de massa de um sistema de N corpos, leis de Newton e os princípios de conservação de energia e momentos angular e linear. A partir destes conceitos e da lei da gravitação universal de Newton, que é uma lei de forças não lineares, foi possível obter analiticamente as três leis de Kepler. A evolução temporal do sistema foi obtida numericamente para mostrar a periodicidade e a estabilidade das trajetórias dos dois corpos orbitando o centro de massa do sistema. O surgimento do caos neste sistema, observado pela irregularidade de suas trajetórias e imprevisibilidade de seu estado final, decorrente da sensibilidade a mudanças em seu estado inicial, foi mostrado pela adição de um terceiro corpo. Como tratamos o problema geral de 3 corpos, tais trajetórias tiveram que ser obtidas numericamente, uma vez que o sistema não possui solução analítica.

A comparação dos resultados obtidos para os dois sistemas foi muito importante para mostrar que a não linearidade é um requisito necessário, mas não suficiente para observação de uma dinâmica caótica, uma vez que ambos os sistemas de 2 e 3 corpos são descritos por leis de forças não lineares. Para que o sistema seja caótico, este deve exibir também sensibilidade em seu estado em um determinado instante de tempo e possuir uma dinâmica determinística não periódica. Tais comparações foram úteis também para elucidar o que é uma solução analítica e a importância dos métodos numéricos para a análise de sistemas físicos reais.

2 O Problema de 2 Corpos

O problema de 2 corpos consiste na determinação do movimento realizado por dois corpos interagindo sob a ação exclusiva da força gravitacional. A primeira solução para este problema foi publicada em 1687 por Isaac Newton em seus *Principia* (NEWTON, 1687, 1846), mas o movimento de corpos celestes é estudado desde os primórdios da humanidade, tendo avançado significativamente com Ptolomeu, Copérnico, Tycho Brahe e Kepler (VOLCHAN, 2007; CELLETTI, 2010).

Para os povos da antiguidade clássica a análise da dinâmica celeste resultou, por exemplo, na elaboração de calendários, em previsões acerca das cheias do rio Nilo, na organização da agricultura, e também possuía significado religioso e político (PIRES, 2011; VOLCHAN, 2007). A principal contribuição desta época para o desenvolvimento da Astronomia e da Mecânica Celeste foi a grande quantidade de registros do movimento dos astros.

Baseado nesses registros astronômicos e também em seus próprios, Ptolomeu publicou no século II, seu livro conhecido como *Almagesto*, em que o movimento dos planetas é descrito (PIRES, 2011). Ele considerava os corpos celestes como divinos e, portanto, não obedeciam às mesmas leis terrestres. Sua teoria era baseada em movimentos circulares uniformes, sendo composta por quarenta círculos ao todo. Ele considerou a Terra como o centro do universo e sem rotação. O Sol também orbitava a Terra, mas o centro da órbita circular correspondente era deslocado. Apesar de inconsistente com a realidade, sua teoria foi muito precisa para a realização de previsões do movimento dos astros e permaneceu desta forma até a invenção do telescópio (PIRES, 2011).

Muitos séculos depois, em 1543, Copérnico publicou uma teoria alternativa para explicar os fenômenos celestes, considerando o Sol como o centro de referência no qual tanto a Terra quanto os outros planetas orbitavam. Em sua representação, Copérnico considerava a Terra como um planeta que, além de orbitar o Sol anualmente, também girava em torno de seu próprio eixo uma vez por dia. A teoria de Copérnico influenciou de maneira significativa pensadores do pós-revolução científica como Galileu, Kepler, Descartes e Newton (PIRES, 2011).

Outra figura muito importante para o estudo e a compreensão do sistema solar foi o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601). Ele se dedicou ao desenvolvimento de instrumentos astronômicos e à observação do movimento dos astros. Devido ao suporte financeiro recebido do rei da Dinamarca e da Noruega Frederick II e sua meticulosidade na organização dos dados, suas observações e registros foram os mais precisos possíveis antes da invenção do telescópio. Ele propôs uma teoria do sistema solar que continha

tanto elementos do sistema geocêntrico de Ptolomeu quanto do sistema heliocêntrico de Copérnico. Sua teoria não evoluiu devido a sua dificuldade com a Matemática (PIRES, 2011).

O astrônomo Johannes Kepler começou a trabalhar com Tycho Brahe em 1600, sendo encarregado de estudar o movimento de Marte. Com a morte de Brahe, Kepler tornou-se seu sucessor e herdou seus registros astronômicos. Em 1609 ele publicou seu livro *Nova astronomia baseada nas causas, ou Física celeste tratada por meio de comentários sobre o movimento do planeta Marte*, que contém, entre outras ideias, suas duas primeiras leis. Em 1619 publicou *A Harmonia do Mundo*, que contém sua terceira lei, juntamente com outras informações. Apesar de serem hoje conhecidas como as três leis de Kepler, o autor não as destacou de suas outras ideias e elas só foram reconhecidas como leis após sua morte (PIRES, 2011).

Kepler também apresentou hipóteses sobre a existência de uma força de atração entre os corpos, que possuía limite de alcance, atraía apenas corpos iguais e diminuía com a distância entre estes. Ele se baseou nas ideias de Gilbert sobre magnetismo, de maneira que ele não acreditava em forças à distância e, portanto, considerava a força de atração entre o Sol e outros planetas de natureza magnética. Ele concluiu também que as marés eram causadas pela Lua (PIRES, 2011).

Isaac Newton, com a publicação de seus *Principia* no século XVII, unifica a física do movimento terrestre e celeste, introduzindo leis universais. Com a Lei da Gravitação Universal e suas três leis de movimento, ele comprova as três leis de Kepler e resolve o problema de dois corpos interagindo sob ação exclusiva da força gravitacional (PIRES, 2011).

O tratamento das leis de Kepler do movimento planetário está entre as partes mais exaltadas da obra de Newton. Nesta seção resolvemos o problema de dois corpos a partir do cálculo diferencial e integral, inventado independentemente por Newton e Leibniz no final do século XVII. Apesar disso, o próprio Newton utiliza geometria para obtenção de sua solução nos *Principia*. A solução desse problema considerando o cálculo diferencial e integral aparece mais tarde (CHANDRASEKHAR, 1995; GLEISNER, 2013).

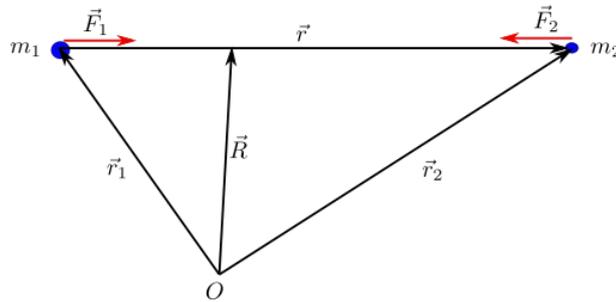
2.1 A Lei da Gravitação Universal

A Lei da Gravitação Universal de Newton estabelece que duas partículas massivas quaisquer são atraídas mutuamente com uma força cujo módulo é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre estas. A forma como esta lei é descrita é uma generalização ousada de Newton, pois ele considerou inicialmente em seus estudos apenas a força da gravitação que a Terra exerce sobre a Lua, ambas corpos extensos e não partículas, ou mais comumente, pontos materiais. Para provar que estes corpos, considerados como esféricos,

produziam a mesma força gravitacional que uma partícula pontual de massa equivalente situada no centro da esfera, ele inventou o cálculo diferencial e integral (CUSHING, 1982).

Assim, a interação entre dois corpos com massas constantes m_1 e m_2 sob ação exclusiva da força gravitacional, pode ser descrita considerando os corpos como pontos materiais, conforme ilustrado na Figura 1. Considerando um referencial inercial em coordenadas cartesianas (x, y, z) , os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 descrevem a posição dos corpos com relação à origem O . Como estabelecido por Newton, a força gravitacional entre m_1 e m_2 é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre estes corpos. Na nossa representação, Figura 1, esta distância é descrita pelo vetor \vec{r} . Este também define a linha de ação da força gravitacional de m_1 em relação a m_2 e vice-versa.

Figura 1 – Sistema de dois corpos representados por massas pontuais m_1 e m_2 , localizados nas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , respectivamente, em relação à origem O de um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) . O vetor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, cujo versor é dado por \hat{r} , fornece a direção de ação da força gravitacional, com \vec{F}_1 representando a força que o corpo 2 exerce em 1 e \vec{F}_2 a força que o corpo 1 exerce em 2. Os vetores que representam as forças estão deslocados para melhor visualização da figura. O vetor \vec{R} representa a posição do centro de massa do sistema.



Fonte: Elaborado pela autora.

Considerando que \vec{r} inicia em m_1 e termina em m_2 , de maneira que $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, a força gravitacional de 1 em 2, \vec{F}_2 , terá direção oposta, ou seja,

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (2.1)$$

sendo $G = 6,674\,30 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ a constante gravitacional universal, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a magnitude do vetor \vec{r} e $\hat{r} = \vec{r}/r$ o seu versor. Naturalmente, se considerarmos a força gravitacional de 2 em 1, dada por \vec{F}_1 , teremos $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, conforme estabelecido pela terceira lei de Newton.

A equação da Lei da Gravitação Universal (2.1) é escrita da forma como a conhecemos hoje devido a Laplace (século XVIII). A constante G foi obtida experimentalmente em 1798 por Henry Cavendish (PIRES, 2011).

Pela segunda lei de Newton, se o sistema analisado possui massa m constante e momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$, sendo $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ sua velocidade, a força resultante aplicada neste

é dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, \quad (2.2)$$

em que $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$ é a aceleração total do sistema. Dessa forma, as forças em m_1 e m_2 podem ser descritas, respectivamente, por:

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = m_1 \vec{a}_1 \quad (2.3)$$

e

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = m_2 \vec{a}_2. \quad (2.4)$$

Para o sistema total, composto pelos dois corpos, as equações (2.3) e (2.4) nos conduzem a,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0. \quad (2.5)$$

A equação (2.5) nos diz que o momento linear total $\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ do sistema se conserva, uma vez que podemos escrever (2.5) como $d\vec{P}/dt = 0$. Se considerarmos o momento total do sistema de dois corpos em função de sua massa total $M = m_1 + m_2$ e de uma coordenada total \vec{R} , esta última pode ser identificada como:

$$\vec{P} = M \frac{d\vec{R}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt},$$

e portanto,

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}. \quad (2.6)$$

O vetor \vec{R} descreve a posição do centro de massa (CM) do sistema. Todo sistema físico massivo possui um CM, seja este composto por um único corpo extenso ou por um conjunto de corpos independentes, como no presente caso. O CM define o ponto comum do sistema em que este pode ser balanceado, ou seja, é o ponto em que podemos considerar que toda a massa do sistema está localizada ou onde todas as forças estão atuando no sistema (HALLIDAY; RESNICK, 2012). Intuitivamente utilizamos o CM quando fazemos o diagrama de forças de um sistema para descrever o seu movimento de forma teórica.

No sistema em questão, m_1 e m_2 irão orbitar um em relação ao outro em torno do CM do sistema¹. Isso significa que eles descrevem suas trajetórias em relação a este ponto comum, localizado entre m_1 e m_2 , como ilustrado na Figura 1. Caso $m_1 \gg m_2$, o CM do sistema estará localizado muito próximo de m_1 e teremos o movimento de dois corpos reduzido ao movimento de um único corpo orbitando outro, este segundo em repouso. Uma situação semelhante a esta é o sistema Sol-Terra. Como o Sol possui uma massa de mais de 330 mil vezes a massa da Terra, o CM desse sistema é muito próximo do centro do Sol. É por isso que descrevemos esse sistema como a Terra orbitando o Sol.

¹ Em Mecânica Celeste o CM é conhecido como o *baricentro* do sistema.

Já se considerarmos Júpiter, por exemplo, cuja massa é mais de 300 vezes a massa da Terra, o CM do sistema Sol-Júpiter estará localizado fora da superfície solar, de maneira que é possível detectar também a órbita do Sol em torno deste ponto. Para o sistema solar, composto pelo Sol e todos os corpos celestes combinados, como planetas, cometas e asteroides, este também possui um CM. Como os corpos celestes estão muito distantes uns dos outros e se movimentando, o CM de massa do sistema solar tem sua posição modificada constantemente.

Diante disso, podemos questionar se o CM do sistema de 2 corpos em consideração executa algum tipo de movimento. Como a resultante das forças no CM desse sistema é nula, pois $d\vec{P}/dt = 0$, pode-se, pela primeira lei de Newton, concluir que o CM se move em linha reta com velocidade constante. Isso pode ser verificado integrando-se a equação (2.5) em relação ao tempo, ou seja,

$$\int m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} dt + \int m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} dt = \int 0 dt \implies m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{C}_1, \quad (2.7)$$

sendo \vec{C}_1 um vetor constante. Integrando novamente:

$$\int m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} dt + \int m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} dt = \int \vec{C}_1 dt \implies m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2, \quad (2.8)$$

em que \vec{C}_2 também é um vetor constante. Reescrevendo a equação (2.8) com relação à posição do CM, dada por (2.6), tem-se,

$$M \vec{R} = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2, \quad (2.9)$$

de maneira que,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{C}_1}{M}, \quad (2.10)$$

mostrando que o CM do sistema de dois corpos se move com velocidade constante, uma vez que \vec{C}_1/M é constante.

O fato da força gravitacional sempre atrair m_1 em direção a m_2 e vice-versa através do CM, posicionado na linha que une os dois corpos, faz com que o movimento desse sistema seja planar. Isso pode facilitar consideravelmente a resolução do problema, pois podemos reduzir a descrição do movimento do sistema para duas dimensões. Para provar isso, mostramos na próxima seção que a Lei da Gravitação Universal tem como consequência direta a conservação do momento angular no problema de dois corpos.

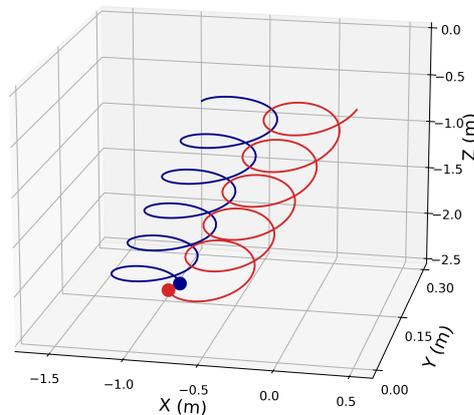
2.1.1 Conservação do Momento Angular

Nosso propósito nesta seção é demonstrar que o momento angular total do sistema de dois corpos se conserva. Fisicamente, isso significa que o movimento do sistema é planar, da mesma forma como nos é apresentado o sistema solar, com as órbitas planetárias,

como a da Terra, descritas por superfícies planas em duas dimensões. Se considerarmos um eixo de rotação, passando pelo centro de massa (CM) do sistema de dois corpos, o vetor momento angular \vec{L} terá a direção deste eixo, sendo perpendicular ao plano da órbita dos dois corpos. Se o momento angular é conservado, a magnitude e a direção de \vec{L} permanecem inalterados à medida que o tempo evolui, não havendo giros ou nutações desse vetor em torno do CM, ou seja, o plano da órbita não é modificado.

Na Figura 2 mostramos isso visualmente através da resolução numérica da equação (2.5) para $m_1 = m_2$, a partir de um algoritmo disponibilizado na forma de código aberto (DESHMUKH, 2019). Como estamos interessados na trajetória da evolução temporal do sistema, apresentamos suas órbitas em três dimensões. Note que as espirais executadas pelo sistema não sofrem nenhuma deformação, mostrando que a direção do eixo de rotação, localizado no CM exatamente em $r/2$, permanece inalterada à medida que o tempo evolui. É isso que queremos dizer quando falamos que este eixo não sofre giros ou nutações em torno do CM. Como o momento angular \vec{L} possui a mesma direção deste eixo, tem-se que $d\vec{L}/dt = 0$ mostrando que o mesmo se conserva e o sistema mantém sua órbita planar, aproximadamente em xy , à medida que o tempo evolui. Note também que o CM do sistema evolui no tempo à velocidade constante, como demonstrado na Equação (2.9), uma vez que as distâncias entre as órbitas planares são as mesmas. A seguir identificamos o valor de \vec{L} e mostramos analiticamente sua conservação.

Figura 2 – Trajetória da evolução temporal no espaço tridimensional do sistema de dois corpos para $m_1 = m_2$ interagindo sob a ação exclusiva da força gravitacional, conforme a equação (2.5). Note que o CM executa uma trajetória retilínea, em pleno acordo com a discussão apresentada para obtenção da Equação (2.9). Os parâmetros utilizados para obtenção das trajetórias foram $\vec{r}_1 = (-0,5; 0; 0)$ [m] e $\vec{v}_1 = (0,01; 0,01; 0)$ [m/s] para m_1 , em azul, e $\vec{r}_2 = (0,5; 0; 0)$ [m] e $\vec{v}_2 = (-0,05; 0; -0,1)$ [m/s] para m_2 , em vermelho.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para encontrar o vetor momento angular total do sistema analiticamente e mostrar

que a lei da gravitação conduz à sua conservação, vamos utilizar, por simplicidade, o método da massa reduzida. Semelhante ao que foi feito para o CM do sistema na seção anterior, este método também consiste em reduzir o problema de dois corpos a um problema de um único corpo. Para isso utilizamos o vetor relativo $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para expressar o movimento do corpo m_2 em relação a m_1 .

Reescrevendo o versor de \vec{r} , dado por $\hat{r} = \vec{r}/r$, nas Equações (2.3) e (2.4), e fazendo $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ obtém-se:

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \right) = - \left(G \frac{m_1 m_2}{m_2} \frac{\vec{r}}{r^3} + G \frac{m_1 m_2}{m_1} \frac{\vec{r}}{r^3} \right),$$

de maneira que,

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} &= -G(m_1 m_2) \left(\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} \right) \frac{\vec{r}}{r^3}, \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -\frac{G(m_1 m_2)}{\mu} \frac{\vec{r}}{r^3}, \end{aligned}$$

resultando em

$$\mu \vec{a} = -G(m_1 m_2) \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2.11)$$

sendo $\vec{a} = d^2 \vec{r}/dt^2$ a aceleração e $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ a massa equivalente do sistema reduzido. Note que a equação (2.11) é a expressão da segunda lei de Newton do sistema reduzido de massa μ . Se considerarmos $m_1 \gg m_2$ ou $m_2 \gg m_1$ tem-se que $\mu = m_2$ ou $\mu = m_1$, respectivamente. Para qualquer outra relação entre m_1 e m_2 o valor de μ será menor que m_1 ou m_2 , sendo por isso considerada como a massa reduzida do sistema.

A equação (2.11) ainda pode ser simplificada como:

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}, \quad (2.12)$$

onde $M = m_1 + m_2$ representa a massa total do sistema. Esta equação descreve a força por unidade de massa reduzida do sistema, ou simplesmente a sua força reduzida².

Uma vez que a órbita do sistema é definida pelos vetores \vec{r} e $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, o momento angular reduzido é definido por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$. Para as trajetórias apresentadas na Figura 2, os vetores \vec{r} e \vec{v} estão situados no mesmo plano, aproximadamente em xy . Como o movimento dos corpos se dá no sentido horário neste plano, considerando o eixo y na vertical, pelo produto vetorial entre \vec{r} e \vec{v} a direção e o sentido do vetor momento angular \vec{L} total do sistema será próximo do eixo z negativo.

Para mostrar que esta grandeza é constante vamos fazer o produto vetorial de \vec{r} pela força reduzida, dada pela equação (2.12), ou seja,

$$\vec{r} \times \vec{a} = -\vec{r} \times \frac{GM}{r^3} \vec{r}. \quad (2.13)$$

² Sempre que nos referirmos a uma grandeza física reduzida, significa que estamos considerando a mesma grandeza dividida pela massa reduzida μ .

Como o produto vetorial no segundo membro da equação (2.13) é nulo, $\vec{r} \times (GM/r^3) \vec{r} = 0$, tem-se que,

$$\vec{r} \times \vec{a} = 0. \quad (2.14)$$

A expressão (2.14) é o torque reduzido do sistema, $\vec{\tau} = 0$, e é nulo porque a força gravitacional é paralela ao vetor deslocamento. O torque expressa a variação temporal do momento angular do sistema, de modo que:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \quad (2.15)$$

Esse resultado mostra que na ausência de qualquer torque o momento angular total do sistema precisa ser constante e portanto, o movimento do sistema de dois corpos é planar e pode ser descrito em duas dimensões, como queríamos demonstrar. Uma outra implicação direta da lei da gravitação de Newton é a conservação da energia mecânica do sistema, demonstrada na próxima seção.

2.1.2 Conservação da Energia

A conservação da energia é outra lei que também pode ser observada e explorada a partir da lei da gravitação de Newton. Uma vez que o sistema de dois corpos interage através de um potencial central, isto é, um potencial de energia que depende apenas da distância dos corpos em relação a origem, esta lei de conservação é imediata.

Para demonstrá-la vamos fazer o produto escalar da força reduzida, dada pela equação (2.12), com a velocidade \vec{v} , de maneira que

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot \vec{v}. \quad (2.16)$$

Esta operação nos fornece a variação da energia do sistema no tempo, também conhecida como a potência dissipada pelo mesmo $\mathcal{P} = dE/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Se a energia for realmente conservada devemos observar $dE/dt = 0$. Para isso precisamos identificar a energia do sistema.

Vamos escrever a equação (2.16) em termos de \vec{r} para facilitar a resolução dos produtos escalares,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.17)$$

O primeiro membro da equação (2.17) é descrito por,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2, \quad (2.18)$$

uma vez que:

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Sabendo que,

$$\hat{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt},$$

conforme demonstrado no Apêndice A, podemos resolver o segundo membro de (2.17) como:

$$\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{GM}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{-GM}{r} \right),$$

resultando em

$$\frac{GM}{r^2} \hat{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{-GM}{r} \right). \quad (2.19)$$

Substituindo os resultados (2.18) e (2.19) em (2.17) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 &= - \frac{d}{dt} \left(\frac{-GM}{r} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \right) &= 0, \end{aligned}$$

de onde conclui-se que

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (2.20)$$

sendo

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}, \quad (2.21)$$

a energia mecânica reduzida do sistema, dada pela energia cinética mais a energia potencial, ambos por unidade de massa reduzida. A energia potencial é negativa porque a força gravitacional é atrativa. Dessa forma fica demonstrado que a energia do sistema se conserva. Na próxima seção exploraremos o sistema de dois corpos e as leis de conservação decorrentes da lei da gravitação de Newton para provar as três leis de Kepler.

2.2 O Problema de 2 Corpos e as Leis de Kepler

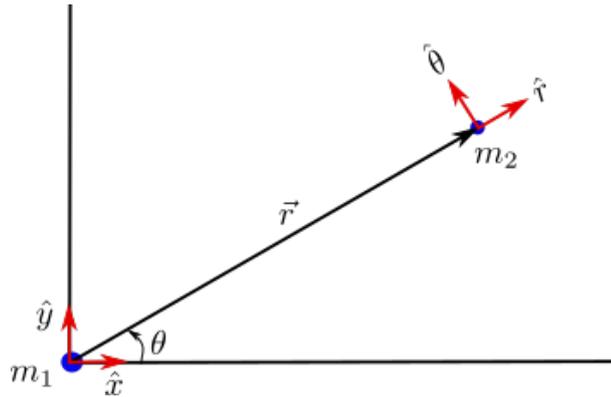
O problema de dois corpos também é conhecido como o problema de Newton-Kepler, pois Johannes Kepler foi um dos gigantes em que Newton se baseou para o desenvolvimento de seu trabalho. No século XVII Kepler mostrou em seus cálculos, utilizando os registros de observações fornecidos por Tycho Brahe, que as órbitas planetárias em torno do Sol são elipses. Isso foi, de certa forma, perturbador para os estudiosos da época, pois eles acreditavam que o círculo era a forma geométrica divina que governava os corpos celestes. Apesar de sua descoberta, Kepler nunca explicou porque os planetas se moviam em trajetórias elípticas. A seguir apresentamos como as leis de Kepler podem ser obtidas a partir da lei da gravitação de Newton utilizando o cálculo diferencial.

2.2.1 Primeira Lei de Kepler

A Primeira Lei de Kepler estabelece que *os planetas se movem em trajetórias elípticas com o Sol em um dos focos* (SYMON, 1996).

Para demonstrar essa lei vamos considerar o sistema de dois corpos reduzido, apresentado na Seção 2.1.1, em coordenadas polares com o corpo de massa m_1 localizado na origem do nosso referencial inercial, conforme ilustrado na Figura 3. Uma vez que m_1 está parado nesta configuração, o que equivale a considerar $m_1 \gg m_2$, como o Sol em relação a Terra, a velocidade inicial de m_2 irá definir o plano da órbita. Como já discutido, a força gravitacional age somente na direção de \hat{r} , sem qualquer componente na direção de $\hat{\theta}$.

Figura 3 – Referencial inercial utilizado para obtenção da primeira lei de Kepler, em que consideramos m_1 estacionário localizado na origem do sistema, de maneira que \vec{r} fornece a posição de m_2 . O versores do sistema de coordenadas polares são dados por \hat{r} e $\hat{\theta}$ e os versores do sistema de coordenadas cartesianas descritos por \hat{x} e \hat{y} .



Fonte: Elaborado pela autora.

Para obtenção da aceleração de m_2 consideramos sua posição $\vec{r} = r\hat{r}(\theta)$ em um determinado instante de tempo t , sendo $r = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$. Dessa forma, sua velocidade é dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}, \quad (2.22)$$

sendo $v_r = dr/dt$ e $v_\theta = r d\theta/dt = r\omega$ as velocidades radial e tangencial de m_2 , respectivamente, com $\omega = d\theta/dt$ descrevendo sua velocidade angular. Sua aceleração é obtida derivando-se (2.22), ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_r\hat{r}) + \frac{d}{dt}(v_\theta\hat{\theta}) = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}, \quad (2.23)$$

em que $a_r = (d^2r/dt^2 - r\omega^2)$ e $a_\theta = (r\alpha + 2\omega v_r)$ são as acelerações radial e tangencial de m_2 , respectivamente. A quantidade $\alpha = d\omega/dt$ é a sua aceleração angular. Todos os detalhes para obtenção dos resultados (2.22) e (2.23) são apresentados no Apêndice A.

Pela lei da gravitação de Newton, a aceleração tangencial é nula $a_\theta = 0$, pois a força gravitacional é dada na direção de \hat{r} , ou seja, $\vec{F}_2 = \mu \vec{a}_r$. Note que a aceleração radial é dada não só pela variação de r , mas também pela variação de θ , sendo o termo $r\omega^2 = v_\theta^2/r$ conhecido como aceleração centrípeta. Dessa forma, ficamos com um sistema composto por duas equações diferenciais dadas por:

$$r \frac{d\omega}{dt} + 2\omega v_r = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 = -\frac{GM}{r^2}. \quad (2.25)$$

Para demonstrar que m_2 executa uma trajetória elíptica em torno de m_1 utilizamos a equação (2.25). Esta pode ser escrita em função do momento angular \vec{L} , que é dado por (NUSSENZVEIG, 2002):

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{L}. \quad (2.26)$$

Resolvendo o produto vetorial triplo de (2.26) (ARFKEN, 2007), tem-se:

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = r^2 \vec{\omega} = \vec{L}, \quad (2.27)$$

pois os vetores \vec{r} e $\vec{\omega}$ são ortogonais entre si, de modo que o produto escalar entre eles é nulo. Assim, o módulo do momento angular do sistema é dado por:

$$r^2 \omega = L. \quad (2.28)$$

Como vimos anteriormente, tanto o módulo quanto a direção do momento angular são constantes. Substituindo o resultado (2.28) em (2.25) obtém-se,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (2.29)$$

Multiplicando (2.29) por r^2/L^2 ficamos com:

$$\frac{r^2}{L^2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r} = -\frac{GM}{L^2}. \quad (2.30)$$

A solução desta última equação diferencial nos fornece a posição de m_2 em função do tempo, ou seja, $r(t)$. Como estamos interessados na trajetória de m_2 , vamos eliminar a dependência temporal de (2.30) para obtenção de $r(\theta)$. Para isso, vamos fazer a mudança de variável $u = 1/r$, de maneira que o primeiro termo de (2.30), conforme demonstrado no Apêndice B, possa ser escrito como,

$$\frac{r^2}{L^2} \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{d^2 u}{d\theta^2}. \quad (2.31)$$

Dessa forma a equação (2.30) torna-se:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{L^2}. \quad (2.32)$$

A equação (2.32) é uma equação diferencial ordinária (EDO) não homogênea de segunda ordem, cuja solução geral é dada por:

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{GM}{L^2}, \quad (2.33)$$

em que as constantes A e B dependem das condições iniciais do problema. Pela relação trigonométrica $\cos(\theta - \theta_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0$, podemos reescrever a solução (2.33) em função de outras duas constantes C e θ_0 , uma vez que podemos identificar $A = C \cos \theta_0$ e $B = C \sin \theta_0$, o que fornece $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Substituindo na solução (2.33) tem-se:

$$u(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{L^2}. \quad (2.34)$$

A solução expressa na forma da equação (2.34) é mais conveniente para compararmos com a forma polar geral de uma elipse, uma vez que nosso objetivo é demonstrar a primeira lei de Kepler, também conhecida como a lei das órbitas elípticas. Considerando as condições iniciais, $t = 0$, do sistema na posição $\theta(0) = 0$ e $r(0) = r_0$, com velocidade $v_r(0) = v_{r_0}$ e $v_\theta(0) = r_0 \omega_0 = v_{\theta_0}$, demonstramos no Apêndice C que,

$$C = \frac{GM}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2}}, \quad (2.35)$$

sendo E e L a energia e o momento angular totais do sistema reduzido, dados pelas equações (2.21) e (2.28), respectivamente.

Substituindo (2.35) em (2.34) obtém-se,

$$u(\theta) = \frac{GM}{L^2} \left[1 + \left(\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2}} \right) \cos(\theta - \theta_0) \right]. \quad (2.36)$$

Para obtenção de $r = r(\theta)$ tem-se que $u(\theta) = 1/r(\theta)$, de maneira que:

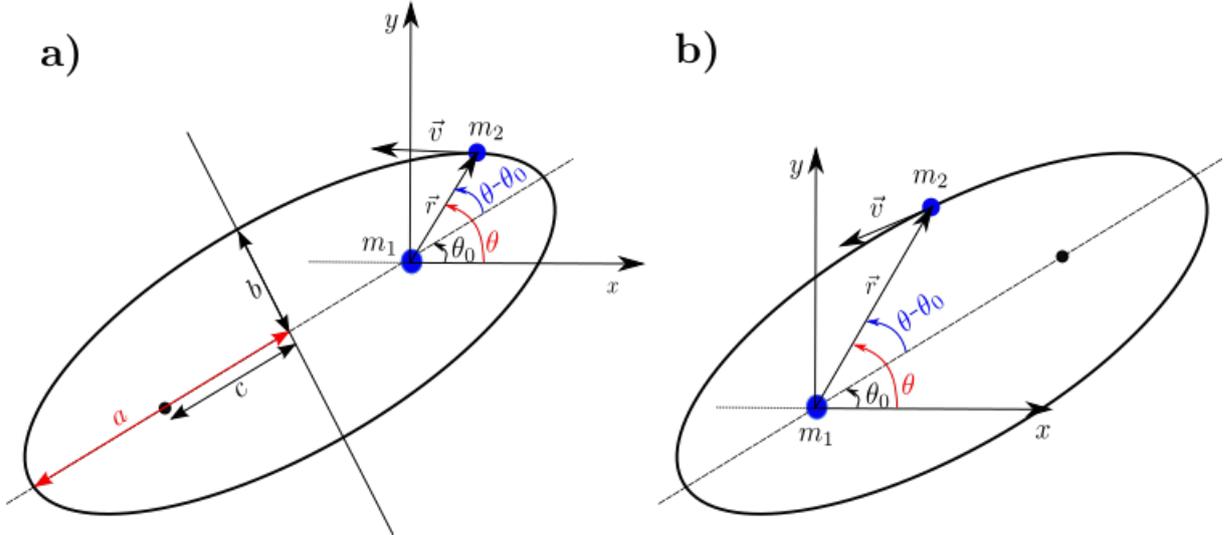
$$r(\theta) = \frac{L^2/GM}{1 + \left(\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2}} \right) \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (2.37)$$

A forma polar geral de uma elipse com origem em um dos focos, com o outro foco situado na posição angular θ_0 , semieixo maior dado por a e excentricidade e , é dada por:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (2.38)$$

em que o sinal positivo descreve a elipse com origem no foco direito e o sinal negativo, a elipse com origem no foco esquerdo (GLEISNER, 2013), conforme ilustrado nas Figuras 4(a) e (b), respectivamente.

Figura 4 – Órbita elíptica, com excentricidade $e = c/a < 1$, sendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ em que a e b são os semieixos maior e menor, respectivamente. Em (a) ilustramos m_1 no foco direito, tendo este como origem do sistema de coordenadas, com o foco esquerdo, representado por um ponto, na posição angular θ_0 . Esta configuração corresponde ao sinal positivo da equação (2.38) e descreve a situação física obtida na equação (2.37). O corpo m_2 está posicionado em \vec{r} em um instante de tempo determinado, orbitando m_1 com velocidade \vec{v} . Em (b) apresentamos a situação correspondente ao sinal negativo da equação (2.38), com m_1 situado no foco esquerdo e o foco direito é representado por um ponto.



Fonte: Elaborado pela autora.

Comparando as equações (2.37) e (2.38), para o caso em que a elipse possui a origem no foco direito, como na Figura 4(a), tem-se que:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2}}, \quad (2.39)$$

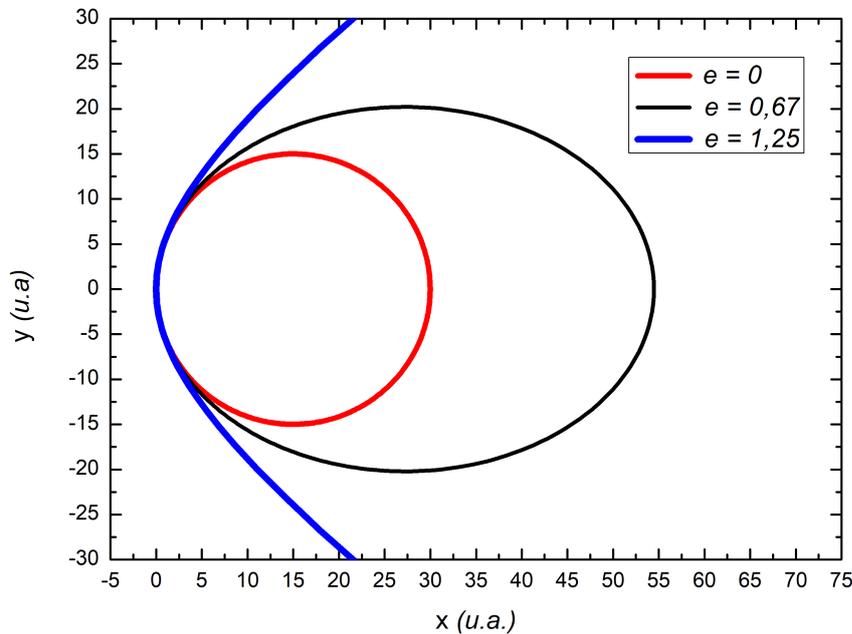
$$a = -\frac{GM}{2E}. \quad (2.40)$$

Portanto, podemos identificar a possibilidade de m_2 orbitar m_1 a partir dos parâmetros físicos do sistema. Pela equação (2.39) a órbita será elíptica se $e < 1$, como mostrado na Figura 4. Isso é possível se a energia do sistema for negativa, ou seja, $E < 0$, o que significa que o sistema está em um estado ligado, o qual é estabelecido através de uma força de atração, como no caso da força gravitacional de Newton. Isso prova a lei das órbitas elípticas de Kepler, ou sua primeira lei. Para um estado não ligado $E \geq 0$ a órbita não é limitada e temos uma situação de espalhamento, que pode ser parabólico se $E = 0$ e $e = 1$ ($a \rightarrow \infty$), ou hiperbólico se $E > 0$ e $e > 1$ ($a < 0$). Esta última situação fornece $r \rightarrow \infty$ para algum valor de θ , uma vez que $\cos(\theta - \theta_0)$ varia entre -1 e 1 .

Podemos obter um fator de escala com os parâmetros físicos considerando a excentricidade de um círculo $e = 0$, pois os focos neste caso são coincidentes $c = 0$,

o que fornece $2EL^2/G^2M^2 = -1$, ou seja, $E = -G^2M^2/2L^2$. Conseqüentemente, pela equação (2.40), este fator é dado por $a = L^2/GM$, fornecendo o raio da órbita circular. O gráfico da Figura 5 mostra as trajetórias do corpo m_2 em relação a m_1 . Para um estado ligado $E < 0$ é possível obter $e = 0$ e $e < 1$ para as órbitas circular e elíptica, respectivamente, e para $E > 0$ e $e > 1$ o corpo m_2 é espalhado seguindo uma trajetória hiperbólica. Note que consideramos o fator de escala L^2/GM nos eixos x e y .

Figura 5 – Diferentes trajetórias de m_2 em relação a m_1 . Nesta representação consideramos m_1 localizada na origem da trajetória circular $e = 0$ e no foco esquerdo da elipse, $e < 1$, obtidas para $E < 0$. No caso de um estado não ligado $E > 0$, m_2 é espalhada por m_1 segundo uma trajetória hiperbólica para $e > 1$. As excentricidades destas trajetórias foram definidas conforme a equação (2.39). Note que o raio da trajetória circular é dado pelo fator de escala L^2/GM .



Fonte: Elaborado pela autora.

2.2.2 Segunda Lei de Kepler

A segunda lei de Kepler, também conhecida como a lei das áreas, estabelece que *o vetor radial que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais da órbita em tempos iguais* (SYMON, 1996). A demonstração dessa lei surge como uma consequência da conservação do momento angular.

Na Figura 6(a) ilustra-se que, à medida que o corpo m_2 se desloca de uma distância $v dt$ em sua órbita em torno de m_1 , o vetor radial \vec{r} de m_1 a m_2 varre, no tempo dt , a área sombreada dada por dA . Como o intervalo de tempo dt é muito pequeno, a área sombreada pode ser aproximada pela área de um triângulo, dada por,

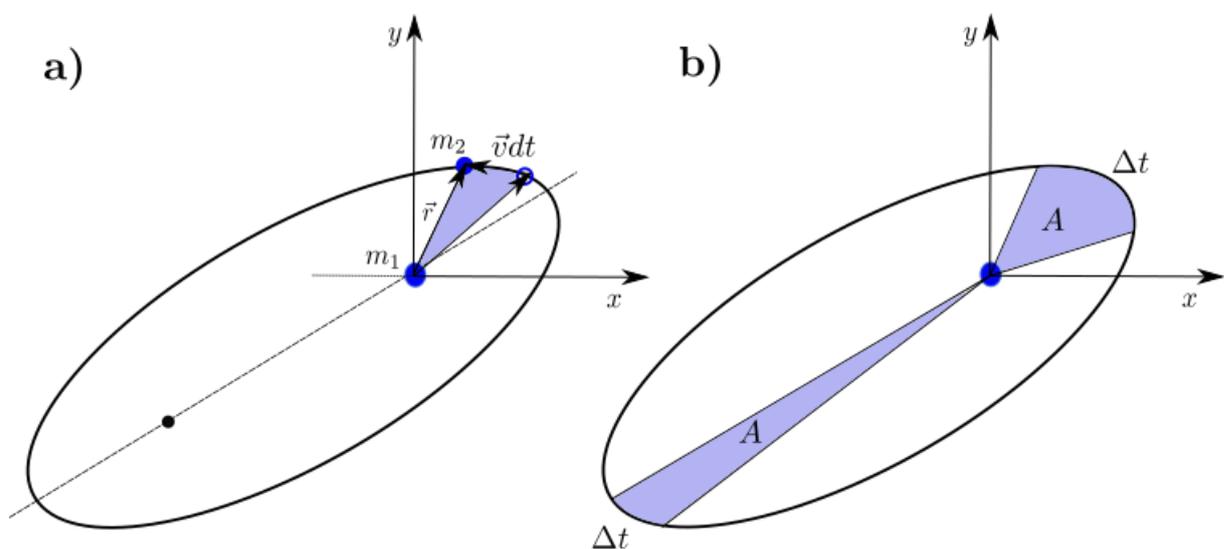
$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{2} dt, \quad (2.41)$$

o que fornece,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2}, \quad (2.42)$$

ou seja, a área varrida pelo vetor \vec{r} no tempo dt é constante, uma vez que o momento angular do sistema reduzido é constante. Isso significa que o vetor \vec{r} varre áreas iguais em tempos iguais, como ilustrado na Figura 6(b), o que prova a segunda lei de Kepler.

Figura 6 – (a) A região sombreada ilustra a área varrida pelo vetor \vec{r} quando o corpo m_2 desloca-se de uma distância $v dt$ em sua órbita em relação a m_1 . Como o momento angular do sistema é conservado, a equação (2.42) mostra que, (b) \vec{r} varre áreas iguais A em tempos iguais Δt , conforme estabelecido pela segunda lei de Kepler.



Fonte: Elaborado pela autora.

2.2.3 Terceira Lei de Kepler

A terceira Lei de Kepler, também conhecida como a lei dos períodos, estabelece que *a razão do quadrado do período de revolução de um planeta pelo cubo do semieixo maior de sua órbita é a mesma para todas as órbitas fechadas* (MACKAY; SALOUR, 2015).

Kepler publicou sua terceira lei em 1619, dez anos depois de ter publicado suas primeiras duas leis. Usualmente esta lei é obtida de maneira simplificada diretamente da lei da gravitação de Newton considerando órbitas circulares, especificamente, o que equivale a fazer $d^2r/dt^2 = 0$ na equação (2.25), levando-se em conta apenas a aceleração centrípeta $r\omega^2 = v_\theta^2/r$ do sistema (MACKAY; SALOUR, 2015; HALLIDAY; RESNICK, 2012; YOUNG; FREEDMAN, 2008). Como a terceira lei não trata especificamente de órbitas circulares, derivamos a mesma como resultado, ou consequência, das duas primeiras leis de Kepler.

Pela segunda lei de Kepler, descrita pela equação (2.42), a área varrida pelo vetor posição de m_2 aumenta a uma taxa constante com o tempo, ou seja, $dA = (L/2)dt$. Se considerarmos a área total A da órbita varrida no período de revolução de m_2 , dado por T , tem-se $A = (L/2)T$. Para uma órbita elíptica, conforme estabelecido pela primeira lei de Kepler, com área $A = \pi ab$, sendo a e b seus semieixos maior e menor, respectivamente, tem-se:

$$\frac{L}{2}T = \pi ab. \quad (2.43)$$

Como a terceira lei de Kepler trata do quadrado do período, elevando-se (2.43) ao quadrado obtém-se,

$$\frac{L^2}{4}T^2 = \pi^2 a^2 b^2. \quad (2.44)$$

O semieixo menor b pode ser obtido em função do semieixo maior a e da excentricidade e da elipse a partir da relação com a distância do centro da elipse ao foco dada por c . Sendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e $e = c/a$, tem-se que $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, o que fornece $b^2 = a^2(1 - e^2)$. Dessa forma, a equação (2.44) pode ser reescrita como:

$$\frac{L^2}{4}T^2 = \pi^2 a^4(1 - e^2). \quad (2.45)$$

Para eliminar a excentricidade e da equação (2.45), consideramos a forma polar geral da elipse, dada pela equação (2.38), fazendo-se $\theta = \theta_0$ para obtenção do valor mínimo de $r(\theta)$, ou seja, $r_{\min} = r(\theta_0)$, pois para este valor de θ obtemos o valor máximo da função cosseno, $\cos 0 = 1$. Logo,

$$r(\theta = \theta_0) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta_0 - \theta_0)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a \frac{(1 + e)(1 - e)}{1 + e},$$

e assim

$$r_{\min} = a(1 - e). \quad (2.46)$$

Utilizando o mesmo procedimento podemos obter r_{\min} em função dos parâmetros físicos do sistema através da equação da primeira lei de Kepler (2.37), o que fornece:

$$r_{\min} = \frac{L^2/GM}{1 + e}. \quad (2.47)$$

Das equações (2.46) e (2.47) obtém-se,

$$a(1 - e) = \frac{L^2/GM}{1 + e},$$

que leva a

$$1 - e^2 = \frac{L^2}{aGM}. \quad (2.48)$$

Substituindo a relação (2.48) na equação (2.45) obtemos

$$\frac{L^2}{4}T^2 = \pi^2 a^4 \frac{L^2}{aGM},$$

e finalmente

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \quad (2.49)$$

ficando assim demonstrada a terceira lei de Kepler, uma vez que G e M são constantes.

Vimos através do problema de dois corpos que a trajetória de um corpo em relação ao outro pode ser prevista através da lei de forças estabelecida por Newton, dada pela gravitação universal. A Mecânica Clássica é uma teoria desenvolvida na Física para prever, em boa aproximação, o futuro de sistemas a nível macroscópico. Para isso é necessário conhecermos o seu estado inicial, dado pela posição e a velocidade (momento) do mesmo, e a lei de movimento que governa o sistema. Porém, existem sistemas em que não é possível conhecer com precisão o seu estado inicial. Quando lançamos uma moeda, por exemplo, atribuímos o resultado final à probabilidade de observarmos 50% cara ou coroa. Essa incerteza no resultado é consequência de não conhecermos exatamente o estado inicial do sistema. Se fizermos um lançamento controlado da moeda, conhecendo todas as condições iniciais do sistema, como a força que será aplicada, a posição da moeda, sua distribuição de massa, a força de atrito que o ar exerce em sua superfície durante o movimento, etc, determinaríamos com precisão se o resultado final seria cara ou coroa. Adicionalmente a isso, poderíamos determinar também a trajetória da moeda, a quantidade de giros que ela pode dar em seu movimento, o tempo de voo, a velocidade de impacto, entre outras propriedades.

Diante desse exemplo surge naturalmente a questão sobre o que é conhecer precisamente o estado inicial de um sistema físico. E isso é muito importante, pois a natureza nos mostra que diferenças muito pequenas nas condições iniciais de um sistema podem conduzir à consequências muito significativas no futuro do mesmo, nos fazendo acreditar que tais sistemas evoluem aleatoriamente. Exemplos característicos de sistemas que são muito sensíveis às condições iniciais são as turbulências observadas no fluxo de fumaça proveniente de um incenso ou nas correntes oceânicas, ou ainda nas mudanças climáticas drásticas observadas de um dia para outro.

Na próxima seção mostramos que esse comportamento também pode surgir a partir de sistemas estáveis, com trajetórias regulares, como o sistema de dois corpos que acabamos de apresentar, bastando adicionar mais um corpo ao sistema, para que o mesmo seja conduzido a uma dinâmica imprevisível e irregular, também conhecida como caótica.

3 O Problema de N Corpos

O problema de N corpos consiste na determinação do movimento realizado por N corpos interagindo entre si aos pares. Considerando o problema na mecânica celeste, esta interação se dá exclusivamente sob a ação da força gravitacional. Para $N > 2$ o problema apresenta um grau de complexidade muito maior do que o que vimos anteriormente, pois este não possui solução analítica na forma fechada (VOLCHAN, 2007; ARDOUREL; JEBEILE, 2016).

Uma solução analítica é uma solução exata que nos permite fazer previsões quantitativas precisas sobre o sistema em estudo e pode ser do tipo fechada ou série infinita. Em ambos os casos, seja através de um número finito de operações algébricas ou de uma soma infinita de funções, respectivamente, as soluções devem ser expressas através de um número finito (ARDOUREL; JEBEILE, 2016). Por fornecerem soluções exatas, as soluções analíticas são geralmente consideradas como a melhor opção para a obtenção de previsões quantitativas, como as trajetórias do sistema de dois corpos apresentadas na seção anterior.

Contudo, existem situações em que os métodos aproximativos, como o de perturbações ou numéricos, são a melhor opção. Estes são imprescindíveis quando a obtenção da solução analítica do problema é inviável do ponto de vista prático, ou quando o problema não possui solução analítica. O problema de N corpos, para $N > 2$, é um exemplo cujas soluções analíticas existentes são inviáveis, pois não é possível utilizá-las para calcular as trajetórias do sistema. Estas soluções foram obtidas por Sundman (1907; 1909) e Wang (1991) e são do tipo séries infinitas. O problema prático dessas soluções é que as mesmas convergem muito lentamente, fazendo com que a obtenção de previsões quantitativas seja impossível (ARDOUREL; JEBEILE, 2016). Devido a isso, soluções do tipo fechada para algumas configurações específicas acerca da posição e das massas dos corpos foram obtidas ao longo dos anos e são conhecidas como soluções restritas ou particulares (PRAZERES, 2010; ROY; CLARKE, 2003). As primeiras soluções particulares foram encontradas para $N = 3$ corpos no ano de 1772, sendo uma encontrada por Euler, conhecida como solução homográfica colinear, e outra obtida por Lagrange, conhecida como solução homográfica equilátera. Apesar disso, existem soluções restritas para diferentes valores de N (LIMA, 2016; CHAVES, 2009; DEPETRI, 2011).

O método de perturbações permite analisar o problema de $N > 2$ corpos qualitativamente. A partir da obtenção da órbita elíptica devido à interação de dois corpos, as perturbações são geradas e analisadas nos elementos dessa órbita pela inserção de outros corpos. Este método também é aplicado de maneira eficiente em sistemas de satélites, aste-

roides perturbados por Júpiter e nas órbitas de satélites artificiais da Terra (PRAZERES, 2010; ROY; CLARKE, 2003). Dentre as principais desvantagens desse método está a não possibilidade de obtenção de fórmulas gerais para as trajetórias dos corpos e a geração de um grande acúmulo de erros de arredondamento (ROY; CLARKE, 2003).

Os métodos numéricos podem fornecer soluções aproximadas mais viáveis na ausência de soluções analíticas. Estes transformam equações diferenciais em equações de diferenças. Apesar da ocorrência e acúmulo de erros com os métodos numéricos, estes são muito mais eficientes e confiáveis do que as soluções analíticas existentes para a obtenção das trajetórias dos corpos no problema de $N > 2$ corpos e tem sido utilizadas extensivamente para a análise do problema (ARDOUREL; JEBEILE, 2016).

A seguir apresentamos as consequências de adicionarmos apenas um corpo no problema de 2 corpos e discutimos algumas das principais características que o sistema deve ter para a observação do surgimento do comportamento caótico em sua dinâmica.

3.1 O Problema de 3 Corpos e sua Relação com o Caos

O problema de 3 corpos surge em diferentes contextos na natureza. Além de ser usualmente tratado em mecânica celeste, este também é fundamental em física atômica e de altas energias. O íon negativo do hidrogênio é um exemplo de sistema de 3 corpos, pois consiste de um próton e dois elétrons. Este é determinante para que a temperatura da superfície solar atinja $6.000 K$. O próton é outro exemplo, sendo constituído de três quarks e o seu momento magnético ainda não é adequadamente entendido (GUTZWILLER, 2007). Na simulação de fluidos e cristais a consideração de forças de 3 corpos nos potenciais de interação também tem sido aplicada com sucesso para a obtenção da dinâmica e propriedades dos sistemas simulados (ALLEN; TILDESLEY, 1987).

No contexto em que estamos trabalhando, o da mecânica celeste, o problema de 3 corpos consiste no movimento de três corpos celestiais interagindo gravitacionalmente. Newton também considerou este problema para analisar o movimento da Lua sob a influência do Sol e da Terra (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005). Essa análise é muito importante, pois o movimento da Terra e da Lua, ou mesmo de outros planetas, não é um problema estritamente de dois corpos. A força gravitacional de um terceiro corpo celeste fornece uma força extra ao sistema de dois corpos que pode fazer com que a órbita elíptica, calculada anteriormente, seja perturbada significativamente. Esta força adicional poderia, por exemplo, modificar a órbita da Terra de maneira que a mesma colapsasse no Sol e o mesmo poderia acontecer com a Lua em relação a Terra. Outra consequência seria tirar a Terra ou a Lua de órbita de maneira que ambas escapassem e continuassem seus movimentos no espaço profundo. Em todas essas situações, as consequências para nós no planeta Terra seriam devastadoras. E isso é realmente algo para nós pensarmos

e nos preocuparmos, uma vez que o sistema solar é um sistema dinâmico. Isso significa que, com o decorrer do tempo, combinações planetárias ou passagens de asteroides muito massivos nas vizinhanças da Terra ou da Lua podem exercer influências significativas em suas órbitas.

Apesar de sua importância, o problema de 3 corpos é muito difícil de ser resolvido de maneira geral. Neste caso, todas as três massas do sistema são diferentes de zero e suas condições iniciais, dadas pelas posições e velocidades das mesmas, são quaisquer. A dificuldade em derivar uma solução geral para este problema está no fato de não existir, até onde sabemos, transformações de coordenadas que simplificariam o problema, como o que foi feito na seção 2 para o problema de 2 corpos, ao considerarmos o sistema reduzido (VALTONEN; KARTTUNEN, 2005). Naquela situação a linha da força de atração gravitacional mútua entre as duas massas passa pelo centro de massa do sistema. Já no sistema geral de três corpos isso não acontece, de maneira que o movimento de cada corpo deve ser considerado em conjunto com o movimento dos outros dois corpos, podendo ocorrer movimentos de extraordinária complexidade, o que faz com que o problema seja intratável analiticamente.

Para tornar essa discussão mais palpável, vamos considerar o problema geral de 3 corpos com massas constantes m_1 , m_2 e m_3 sob a ação exclusiva da força gravitacional, conforme ilustrado na Figura 7. Considerando um referencial inercial em coordenadas cartesianas (x, y, z) , os vetores \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 descrevem a posição dos corpos com relação à origem O . Como estabelecido por Newton, a força gravitacional entre os pares m_i e m_j , para $i \neq j = 1, 2, 3$, é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os respectivos corpos. Na nossa representação, Figura 7(a), a distância entre m_i e m_j é descrita pelo vetor \vec{r}_{ji} . Estes também definem as linhas de ação da força gravitacional entre os pares, apresentadas na Figura 7(b).

A força resultante \vec{F}_{Ri} atuando no corpo m_i é descrita pela soma das forças $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$, para i e $j = 1, 2, 3$, de maneira que,

$$\vec{F}_{R1} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} + G \frac{m_1 m_3}{r_{31}^2} \hat{r}_{31} = m_1 \vec{a}_1 \quad (3.1)$$

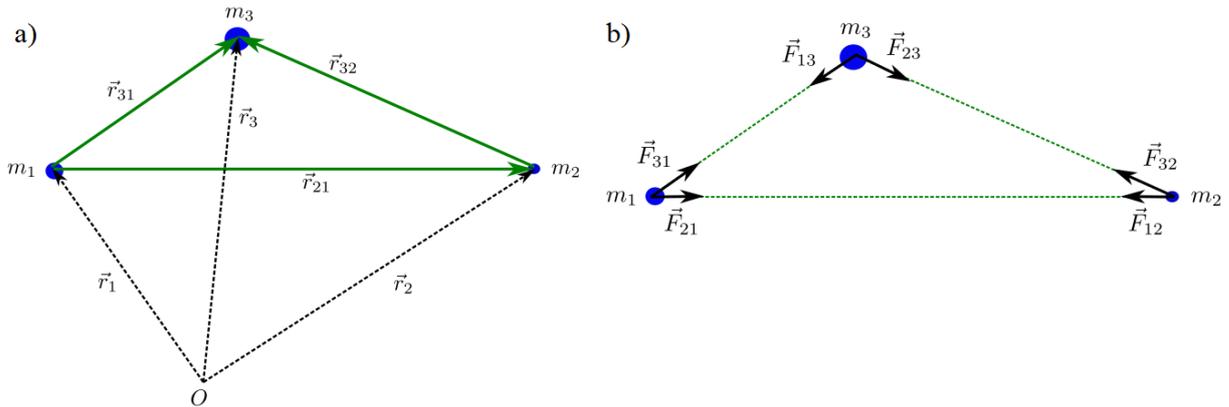
$$\vec{F}_{R2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} + G \frac{m_2 m_3}{r_{32}^2} \hat{r}_{32} = m_2 \vec{a}_2 \quad (3.2)$$

$$\vec{F}_{R3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = -G \frac{m_1 m_3}{r_{31}^2} \hat{r}_{31} - G \frac{m_2 m_3}{r_{32}^2} \hat{r}_{32} = m_3 \vec{a}_3 \quad (3.3)$$

Cada corpo no problema geral de N corpos possui 6 graus de liberdade, três relacionados ao movimento de translação em x , y e z e os outros três relacionados à velocidade, ou o momento, nestas mesmas direções. Dessa forma, o sistema geral de $N = 3$ corpos possui 18 graus de liberdade ou 18 dimensões. Portanto, para obtenção

das funções incógnitas do sistema de equações de (3.1) a (3.3), dadas pelas posições $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ de cada corpo em relação ao tempo, precisamos das posições e das velocidades iniciais dos três corpos.

Figura 7 – Em (a) ilustramos o sistema geral de três corpos, representados pelas massas pontuais m_i , para $i = 1, 2, 3$, localizados nas respectivas posições \vec{r}_i em relação à origem O de um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) . O vetor $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ representa a distância entre m_i e m_j , para $i \neq j = 1, 2, 3$. Em (b) apresentamos os vetores das forças gravitacionais agindo entre os pares m_i e m_j , sendo \vec{F}_{ji} a força que o corpo m_j exerce em m_i .



Fonte: Elaborado pela autora.

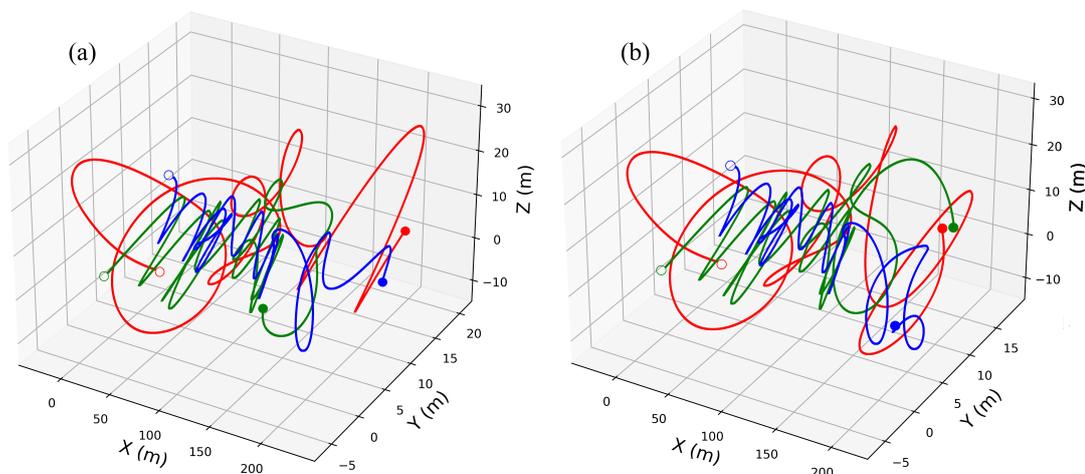
Como não existe uma solução analítica geral para o problema de 3 corpos, como a apresentada na seção 2 para o problema de 2 corpos, resolvemos o sistema de equações diferenciais de (3.1) a (3.3) numericamente a partir de um algoritmo de código aberto (BADGER, 2005). Na Figura 8(a) apresentamos as trajetórias $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ obtidas para os três corpos com massas m_1 , $m_2 = 2m_1$ e $m_3 = 3m_1$ e estados iniciais dados por $\vec{r}_1 = (-10; 10; -11)$ e $\vec{v}_1 = (-3; 0; 0)$ para m_1 (em vermelho), $\vec{r}_2 = (0; 0; 0)$ e $\vec{v}_2 = (0; 0; 0)$ para m_2 (em verde) e $\vec{r}_3 = (10; 10; 12)$ e $\vec{v}_3 = (3; 0; 0)$ para m_3 (em azul). As posições e velocidades são descritas em metros (m) e metros por segundo (m/s), respectivamente. Pelas trajetórias apresentadas nesta figura nota-se que as mesmas não são periódicas, como no caso das trajetórias dos dois corpos apresentadas na Figura 9.

Dessa forma podemos dizer que as trajetórias observadas no sistema de dois corpos são regulares, enquanto que para o sistema de três corpos são irregulares. Um exemplo de sistema macroscópico que apresenta movimento regular, além das órbitas dos planetas, é uma bola caindo sob o efeito da força gravitacional ou uma corrente de elétrons movendo-se em um fio condutor devido a aplicação de uma força elétrica estabelecida por uma diferença de potencial. Já uma nuvem, por exemplo, executa um movimento irregular. A maneira que as nuvens se aglomeram ou dispersam é imprevisível. Este tipo de irregularidade é o que torna a previsão do clima tão difícil. Uma característica de movimentos irregulares, ou não periódicos, é que estes são muito sensíveis à mudanças no estado do sistema em algum

instante de tempo. Esta sensibilidade pode ser observada a partir de pequenas alterações nas condições iniciais do sistema, por exemplo.

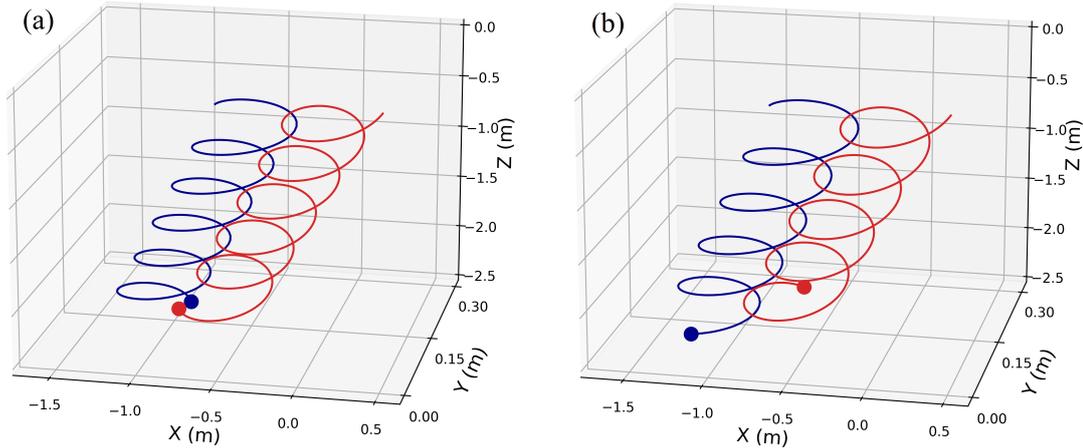
Para verificar isso mostramos as trajetórias do sistema de três corpos na Figura 8(b), considerando apenas uma pequena modificação na coordenada x do corpo m_1 de 10,0000 para 10,0005 m, ou seja, uma modificação da ordem de 0,001% na coordenada. Todos os outros parâmetros são os mesmos utilizados para obtenção das trajetórias apresentadas na Figura 8(a). Se compararmos as trajetórias obtidas nas Figuras 8(a) e 8(b), é possível notar que a pequena modificação em apenas uma coordenada do corpo m_1 conduziu a mudanças dramáticas nas trajetórias dos três corpos. Estas mostram que os corpos partem das mesmas posições iniciais, dadas pelas bolinhas abertas nas Figuras 8(a) e 8(b), mas terminam seus movimentos, no tempo utilizado na simulação, em posições muito diferentes. Para melhorar a visualização dessa divergência apresentamos na Figura 10 a trajetória de cada corpo separadamente para as mesmas condições utilizadas nas Figuras 8(a) e (b). Note que cada corpo parte praticamente do mesmo estado inicial nas duas situações, com as trajetórias coincidindo até a metade do intervalo de tempo considerado para a realização das simulações e divergindo significativamente até atingir o estado final do sistema.

Figura 8 – (a) Simulação das trajetórias aproximadas obtida para o problema geral de três corpos com massas m_1 , $m_2 = 2m_1$ e $m_3 = 3m_1$ interagindo sob ação exclusiva da força gravitacional, conforme equações de (3.1) a (3.3). As condições iniciais do sistema, dadas pela posições (m) e velocidades (m/s), foram $\vec{r}_1 = (-10; 10; -11)$ e $\vec{v}_1 = (-3; 0; 0)$ para m_1 (em vermelho), $\vec{r}_2 = (0; 0; 0)$ e $\vec{v}_2 = (0; 0; 0)$ (em verde) e $\vec{r}_3 = (10; 10; 12)$ e $\vec{v}_3 = (3; 0; 0)$ para m_3 (em azul). Em (b) apresentamos as trajetórias do mesmo sistema considerando uma pequena modificação apenas na coordenada x do corpo m_1 de 10,0000 para 10,0005 m, para mostrar a sensibilidade nas condições iniciais do sistema. As posições iniciais são descritas nas figuras por bolinhas abertas e as finais por bolinhas fechadas.



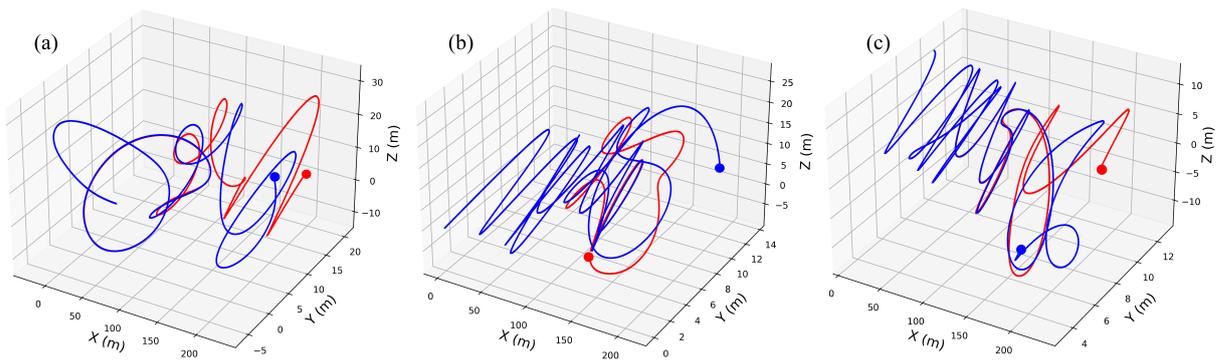
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 9 – Simulação das trajetórias aproximadas obtidas para o problema de dois corpos com massas iguais considerando as mesmas condições iniciais apresentadas na Figura 2 em (a), ou seja, $\vec{r}_1 = (-0,5; 0; 0)$ [m] e $\vec{v}_1 = (0,01; 0,01; 0)$ [m/s] para m_1 , em azul, e $\vec{r}_2 = (0,5; 0; 0)$ [m] e $\vec{v}_2 = (-0,05; 0; -0,1)$ [m/s] para m_2 , em vermelho. Em (b) apresentamos o mesmo sistema modificando a coordenada x do corpo m_1 de $-0,5$ para $-0,6$ m, para mostrar que as trajetórias se mantêm essencialmente as mesmas, não apresentando qualquer sensibilidade à modificações no estado inicial do sistema.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 10 – Trajetórias aproximadas dos corpos de massa m_1 em (a), m_2 em (b) e m_3 em (c), considerando as mesmas condições utilizadas nas Figuras 8(a) e (b) para melhorar a visualização das trajetórias antes (vermelho) e depois (azul) da variação na condição inicial do corpo m_1 .



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 9(b) consideramos também uma alteração na coordenada x do corpo m_1 do problema de 2 corpos de $-0,5$ m para $-0,6$ m, o que representa uma modificação de 20% na coordenada, ou seja, bem mais expressiva que aquela realizada no problema de 3 corpos. O resultado mostra que o sistema não apresenta qualquer sensibilidade às

condições iniciais, de maneira que sua dinâmica se mantém regular em ambos os casos, com órbitas periódicas estáveis e bem definidas.

Na linguagem popular, o comportamento irregular e divergente apresentado nas Figuras 8 e 10 é chamado de “efeito borboleta”. Matematicamente, o termo para tais irregularidades é conhecido como *caos*. Qualquer sistema tridimensional composto por três ou mais corpos interagindo sob a ação de forças não lineares, como a força gravitacional, apresentando sensibilidade a modificações em seu estado em um determinado instante de tempo e cuja dinâmica é não periódica, apresenta comportamento caótico. Esse comportamento é caracterizado pelo crescimento rápido da incerteza dos resultados obtidos para o sistema através dos modelos matemáticos utilizados (SMITH, 2007).

Quando falamos em incerteza e imprevisibilidade do estado de um sistema em um determinado instante de tempo t , a partir de seu estado inicial, podemos ser levados a suspeitar de um dos princípios básicos da Mecânica Clássica, chamado de *determinismo*. De acordo com as leis de Newton o futuro do sistema solar, por exemplo, ou qualquer outro sistema clássico, pode ser completamente determinado em um instante de tempo posterior t_2 a partir de um instante anterior $t_1 < t_2$, se tivermos conhecimento sobre o estado do sistema em t_1 e a lei de forças que governa o movimento do mesmo. O sistema de 3 corpos que acabamos de apresentar foi resolvido utilizando os princípios da teoria da Mecânica Clássica. Se este é o caso, como se aplica então o conceito de determinismo para as trajetórias obtidas para este sistema, se o mesmo apresenta um movimento irregular? Ou seja, como podemos falar em determinismo se o estado do sistema de 3 corpos em um tempo posterior é imprevisível e sofre mudanças significativas quando realizamos pequenas modificações no seu estado inicial? E também, porque as órbitas dos planetas do sistema solar são tão bem definidas se este é um sistema de N corpos?

Essas dúvidas podem surgir porque o determinismo da Mecânica Clássica por vezes é vinculado, de maneira inadequada, ao sucesso de predizer com certeza absoluta o que irá acontecer com o sistema no futuro. Mas nós só adquirimos conhecimento sobre o estado futuro de um sistema depois que realizamos cálculos sobre este estado, os quais podem ser confirmados através de medições no sistema. Vale lembrar que existe uma margem de erro nestas previsões, pois como já discutido, usualmente utilizamos métodos aproximativos na ciência. Apesar da imprevisibilidade ou incerteza do estado futuro de um sistema que apresenta comportamento caótico, após realizarmos modificações em seu estado inicial, este é determinístico se o seu estado inicial e a lei de forças que rege tal movimento forem conhecidos. Uma prova disso é a obtenção da mesma trajetória do sistema se considerarmos inúmeras simulações para as mesmas condições iniciais. Se o estado final do sistema fosse diferente para cada simulação, mesmo considerando as mesmas condições iniciais, a dinâmica do sistema seria classificada como *aleatória* ou *estocástica* e não determinística. Portanto, sistemas caóticos além de serem não lineares, apresentarem

uma dinâmica irregular e instável, devido à sensibilidade em suas condições iniciais, estes também apresentam uma dinâmica determinística (SMITH, 2007).

Os planetas do sistema solar possuem órbitas bem definidas pois a massa do Sol é muito maior do que a massa dos planetas e a distância entre eles é muito grande, permitindo com que a ação gravitacional dos outros corpos sejam desprezadas. Porém, a mesma estabilidade não é observada a todo instante no movimento de asteroides, por exemplo, uma vez que eles estão interagindo com outros corpos próximos e com massas aproximadas. É importante ressaltar que a estabilidade do sistema solar a longo prazo não pode ser definida, pois em bilhões de anos a ação conjunta da força gravitacional dos planetas e outros corpos podem causar mudanças drásticas no comportamento desse sistema.

O início dos estudos de sistemas que apresentam dinâmica caótica é creditado ao matemático francês Henri Poincaré em seus trabalhos desenvolvidos na década de 1890. Poincaré foi parcialmente motivado pelo comportamento complexo das trajetórias do sistema de 3 corpos celestes, como o que acabamos de descrever. Dentre outros nomes que forneceram notáveis contribuições para o desenvolvimento da teoria do caos podemos citar os trabalhos de G. Birkhoff na década de 1920, M. L. Cartwright e J. E. Littlewood nos anos 1940, do soviético A. N. Kolmogorov e colaboradores em 1954, de S. Smale em 1960, e Edward Lorenz em 1961 cujo trabalho resultou no termo popular “efeito borboleta”. Apesar destes e outros trabalhos, a análise de dinâmicas caóticas em sistemas físicos reais não foi amplamente apreciada até o final do século XX devido à sua complexidade. Com o advento dos computadores e o desenvolvimento dos métodos numéricos esta situação mudou drasticamente, de maneira que o caráter caótico de evoluções temporais em situações de importância prática tem sido cada vez mais explorado. Para saber mais sobre o desenvolvimento da teoria do caos e sua importância recomendamos os livros dos Gleick (1989) e do Ott (OTT, 1993) e o artigo do Oestreicher (2007).

4 Considerações Finais

Com este trabalho objetivamos introduzir o caos para estudantes de graduação de uma maneira mais elementar, elencando seus aspectos fundamentais a partir de conceitos familiares da Mecânica Clássica, e mostrar a importância da matemática como metodologia científica para a análise e discussão de problemas físicos, seja através da obtenção de soluções analíticas ou métodos aproximativos, como simulações computacionais.

Para isso, mostramos o surgimento de uma dinâmica caótica no problema geral de 3 corpos tendo como ponto de partida o problema de 2 corpos no contexto da mecânica celeste. Optamos por esta abordagem para elencar conceitos importantes da Mecânica Clássica como o que é o estado inicial de um sistema, trajetórias, segunda e terceira leis de Newton, centro de massa, conservação do momento linear e angular e conservação da energia. Com o problema de dois corpos foi possível demonstrar analiticamente as três leis de Kepler a partir da lei da gravitação universal de Newton. Este também foi resolvido numericamente para mostrar a estabilidade e a periodicidade das trajetórias dos dois corpos orbitando o centro de massa do sistema, que se move em linha reta com velocidade constante. Este resultado contribuiu, adicionalmente, para fornecer uma representação visual do significado da lei de conservação do momento angular.

Ao adicionarmos o terceiro corpo no problema de 2 corpos foi possível apreciar o slogan popular do “efeito borboleta” para o caos, traduzido matematicamente na sensibilidade do sistema às mudanças em seu estado inicial. Os resultados obtidos mostram claramente que uma modificação mínima em apenas uma coordenada de um dos três corpos considerados, conduz à mudanças surpreendentes na dinâmica do sistema. A partir do que foi desenvolvido para o problema de 2 corpos foi possível facilitar a descrição sobre o que é um movimento irregular e mostrar que a não linearidade nas equações que descrevem a dinâmica caótica do sistema de 3 corpos não é suficiente para observar este comportamento, uma vez que esta também é observada nas equações do sistema de 2 corpos. Finalizamos mostrando que sistemas caóticos no contexto considerado são caracterizados não só por serem não lineares e exibirem sensibilidade em seu estado em um determinado instante de tempo, mas também por possuírem uma dinâmica determinística.

Do ponto de vista operacional, discutimos de maneira introdutória a importância da obtenção de uma solução analítica para a realização de previsões em um sistema físico e como os métodos aproximativos, como os numéricos, podem contribuir significativamente diante da impossibilidade de obtenção de uma solução analítica que seja viável ou sem significado prático, como no caso do problema de $N > 2$ corpos.

Esperamos que este trabalho possa ser útil para estudantes de graduação em Física

que queiram conhecer os aspectos básicos de um sistema que apresenta dinâmica caótica ou mesmo estudantes em geral que tenham um mínimo conhecimento sobre Mecânica Clássica.

Referências

- ALLEN, M. P.; TILDESLEY, D. J. **Computer Simulation of Liquids**. Oxford Science Publications, 1987.
- ARDOUREL, V.; JEBEILE, J. On the presumed superiority of analytical solutions over numerical methods. **Euro Jnl Phil Sci**, p. 201–220, jul. 2016.
- ARFKEN, G. B. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- BADGER, Benjamim. The three body problem, 2005. Disponível em: <https://blbadger.github.io/3-body-problem.html>. Acesso em: 12 abr. 2022.
- BARROW-GREEN, J. **Poincaré and the Three Body Problem**. History of Mathematics. Providence: American Mathematical Society, 1997.
- CELLETTI, A. **Stability and Chaos in Celestial Mechanics**. 2. ed. Chichester: Praxis Publishing Ltd., 2010.
- CHANDRASEKHAR, S. **Newton's Principia for the Common Reader**. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- CHAVES, F. E. **Configurações Centrais no Problema de n Corpos**. 2009. Mestrado em Ciências em Física e Matemática Aplicada – Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada, Itajubá.
- CUSHING, J. T. Kepler's laws and universal gravitation in Newton's Principia. **American Journal of Physics**, v. 50, n. 7, p. 617–628, jul. 1982.
- DEPETRI, G. I. **Coreografias no Problema de N corpos**. 2011. Mestrado em Ciências – Instituto de Física, São Paulo.
- DESHMUKH, G. Modelling the Three Body Problem in Classical Mechanics using Python, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.107.100401>. Acesso em: 5 mar. 2022.
- GLEICK, J. **Caos: A Criação de uma Nova Ciência**. 16. ed. São Paulo: Elsevier Editora Ltda, 1989.
- GLEISNER, F. **Three solutions to the two-body problem**. 2013. Bachelor in Mathematics – Linnæus University, Sweden.

- GUTZWILLER, Martin C. The Three-Body Problem. **Physics Today**, n. 4, p. 59–60, 2007.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, J. R. **Fundamentos da Física: Mecânica**. 9. ed. Rio de Janeiro: LCT - Livros Técnicos e Científicos Ltda., 2012.
- LIMA, A. R. **Existência de configurações centrais convexas e côncavas no problema de 4 corpos**. 2016. Mestrado em Ciências em Física e Matemática Aplicada – Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada, Itajubá.
- MACKAY, Niall J.; SALOUR, Sam. Kepler unbound: Some elegant curiosities of classical mechanics. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 83, n. 1, p. 47–52, jan. 2015. DOI: 10.1119/1.4895393.
- NEWTON, I. **Newton's Principia: the Mathematical Principles of Natural Philosophy**. New York: Daniel Adee, 1846.
- NEWTON, I. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**. 1. ed. London, 1687.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Um Curso de Física Básica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- OESTREICHER, C. A history of chaos theory. **Dialogues in Clinical Neuroscience**, v. 9, 2007.
- OTT, Edward. **Chaos in dynamical systems**. Cambridge University Press, 1993.
- PIRES, A. S. T. **Evolução dos conceitos da Física**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- PRAZERES, R. F. dos. **Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos**. 2010. Mestrado em Ensino de Matemática – Instituto de Matemática, Rio de Janeiro.
- ROY, A. E.; CLARKE, D. **Astronomy: Principles and Practice**. 4. ed. Flórida: CRC Press, 2003.
- SMITH, Leonard A. **Chaos: A Very Short Introduction**. Oxford University Press, 2007.
- SUNDMAN, K. Nouvelles recherches sur le probleme des trois corps. **Acta Societatis Scientiarum Fennicae**, n. 9, 1909.
- SUNDMAN, K. Recherches sur le probleme des trios corps. **Acta Societatis Scientiarum Fennicae**, 1907.

SYMON, K. R. **Mecânica**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda., 1996.

VALTONEN, Mauri; KARTTUNEN, Hannu. **The Three-Body Problem**. Cambridge University Press, 2005.

VOLCHAN, S. B. **Uma introdução a Mecânica Celeste**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

WANG, Q. D. The global solution of the n-body problem. **Celestial Mechanics and Dynamics Astronomy**, n. 1, p. 73–88, 1991.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física II: Termodinâmica e Ondas**. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Apêndices

APÊNDICE A – Velocidade e aceleração totais do sistema de dois corpos reduzido em coordenadas polares

Na Seção 2.1.2 utilizamos a relação,

$$\hat{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt},$$

para demonstrar a conservação da energia mecânica do sistema reduzido de dois corpos. Essa relação pode ser verificada a partir da velocidade total desse sistema, dada por,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}. \quad (\text{A.1})$$

Como discutido, o sistema reduzido pode ser descrito em duas dimensões (x, y) . Em coordenadas polares (r, θ) , as coordenadas x e y são relacionadas a r e a θ como $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Os versores \hat{r} e $\hat{\theta}$, definidos na direção de aumento de r e de θ , respectivamente, são relacionados aos versores cartesianos \hat{x} e \hat{y} através das relações:

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta, \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta. \quad (\text{A.3})$$

Como $r = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$, se derivarmos a equação (A.2) em relação ao tempo tem-se,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\hat{x} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \hat{y} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} [-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta] = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta},$$

e portanto,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo este último resultado na equação (A.1) obtemos a velocidade total do sistema, ou seja,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}, \quad (\text{A.5})$$

a qual pode ser escrita como $\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$, sendo $v_r = dr/dt$ e $v_\theta = r d\theta/dt = r\omega$, suas componentes radial e tangencial, da mesma maneira que foi apresentado na equação (2.22) da Seção 2.2.1. A velocidade angular do sistema é dada por $\omega = d\theta/dt$.

Fazendo o produto escalar de \hat{r} por $d\vec{r}/dt$ na equação (A.5) obtemos a relação utilizada na Seção 2.1.2,

$$\hat{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}(\hat{r} \cdot \hat{r}) + r\frac{d\theta}{dt}(\hat{\theta} \cdot \hat{r}) = \frac{dr}{dt},$$

uma vez que $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ e $\hat{\theta} \cdot \hat{r} = 0$, pois \hat{r} e $\hat{\theta}$ são ortonormais.

Para obtenção da aceleração total do sistema de dois corpos reduzido em coordenadas polares, equivalente à equação (2.23) da Seção 2.2.1, basta derivar a equação (A.5) em relação ao tempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{r} \right) + \frac{d}{dt} (r\omega \hat{\theta}), \quad (\text{A.6})$$

Aplicando a regra do produto para as derivadas, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{r} + v_r \frac{d\hat{r}}{dt} + \left[\frac{d}{dt} (r\omega) \right] \hat{\theta} + r\omega \frac{d\hat{\theta}}{dt}, \\ \vec{a} &= \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{r} + v_r \frac{d\hat{r}}{dt} + \left(\frac{dr}{dt} \omega + r \frac{d\omega}{dt} \right) \hat{\theta} + r\omega \frac{d\hat{\theta}}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Pela equação (A.3) a derivada $d\hat{\theta}/dt$ é calculada como,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\hat{x} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - \hat{y} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{d\theta}{dt} [\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ou seja,

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{r}. \quad (\text{A.9})$$

Utilizando os resultados (A.4) e (A.8) a aceleração total, dada pela equação (A.7), pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{r} + v_r \omega \hat{\theta} + \left(v_r \omega + r \frac{d\omega}{dt} \right) \hat{\theta} - r\omega^2 \hat{r}, \\ \vec{a} &= \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \hat{r} + (r\alpha + 2\omega v_r) \hat{\theta}, \end{aligned}$$

de onde conclui-se que,

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}, \quad (\text{A.10})$$

sendo $\alpha = d\omega/dt$ a aceleração angular, $a_r = (d^2 r/dt^2 - r\omega^2)$ e $a_\theta = (r\alpha + 2\omega v_r)$ as componentes radial e tangencial da aceleração de m_2 , como apresentado na equação (2.23).

APÊNDICE B – equação diferencial na variável $u(\theta)$ e obtenção de sua solução particular

Na Seção 2.2.1 fizemos a mudança de variável $u = 1/r$ na equação (2.30), dada por,

$$\frac{r^2}{L^2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r} = -\frac{GM}{L^2},$$

para obtenção da trajetória do sistema, ou seja, $r(\theta)$. Para encontrarmos a aceleração do sistema $d^2 r/dt^2$ na variável $u(\theta)$, vamos calcular a derivada segunda de $u = 1/r$ em relação a θ . Uma vez que $\theta = \theta(t)$ tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\theta} = - \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \right) \frac{1}{\omega} = -\frac{v}{r^2 \omega} = -\frac{v}{L}, \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{v}{L} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{L} \right) \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{L} \frac{dv}{dt} + v \frac{d(L^{-1})}{dt} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Como o momento angular é constante o termo $d(L^{-1})/dt$ é nulo, e sendo $dv/dt = d^2 r/dt^2$ a equação (B.1) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= -\frac{1}{L\omega} \frac{d^2 r}{dt^2}, \\ \therefore \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= -\frac{r^2}{L^2} \frac{d^2 r}{dt^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

em que utilizamos $\omega = L/r^2$. Note que o resultado (B.2) é exatamente o primeiro termo da equação diferencial na variável r , mostrada no início deste apêndice, de maneira que esta pode ser escrita na variável u como,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{L^2}. \quad (\text{B.3})$$

Como discutido na Seção 2.2.1, (B.3) é uma equação diferencial ordinária não homogênea de segunda ordem. A solução da equação homogênea,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0, \quad (\text{B.4})$$

é do tipo oscilador harmônico $u_h(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta$ com as constantes A e B obtidas a partir das condições iniciais do problema. A solução particular será do mesmo tipo, ou seja,

$$u_p(\theta) = A_p \cos \theta + B_p \sin \theta. \quad (\text{B.5})$$

Neste apêndice mostramos como obter A_p e B_p para encontrar a solução particular da equação diferencial não homogênea. Para isso, vamos calcular a derivada primeira de (B.5),

$$\begin{aligned}\frac{du_p}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(A_p \cos \theta) + \frac{d}{d\theta}(B_p \sin \theta), \\ \frac{du_p}{d\theta} &= \frac{dA_p}{d\theta} \cos \theta - A_p \sin \theta + \frac{dB_p}{d\theta} \sin \theta + B_p \cos \theta, \\ \frac{du_p}{d\theta} &= \left[\frac{dA_p}{d\theta} \cos \theta + \frac{dB_p}{d\theta} \sin \theta \right] + [B_p \cos \theta - A_p \sin \theta].\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Fazendo,

$$\frac{dA_p}{d\theta} \cos \theta + \frac{dB_p}{d\theta} \sin \theta = 0, \quad (\text{B.7})$$

a derivada segunda de u_p , de acordo com a equação (B.6), é dada por:

$$\frac{d^2 u_p}{d\theta^2} = \frac{dB_p}{d\theta} \cos \theta - B_p \sin \theta - \frac{dA_p}{d\theta} \sin \theta - A_p \cos \theta. \quad (\text{B.8})$$

Pelas equações (B.5) e (B.8) podemos escrever a equação (B.3) como,

$$\frac{dB_p}{d\theta} \cos \theta - \frac{dA_p}{d\theta} \sin \theta - B_p \sin \theta - A_p \cos \theta + A_p \cos \theta + B_p \sin \theta = \frac{GM}{L^2},$$

que leva a

$$\frac{dB_p}{d\theta} \cos \theta - \frac{dA_p}{d\theta} \sin \theta = \frac{GM}{L^2}. \quad (\text{B.9})$$

Multiplicando as equações (B.7) e (B.9), por $\cos \theta$ e $-\sin \theta$, respectivamente, e somando-as obtém-se:

$$\frac{dA_p}{d\theta} = -\frac{GM}{L^2} \sin \theta. \quad (\text{B.10})$$

Para obtenção de A_p é necessário integrar a equação (B.10), ou seja,

$$\begin{aligned}A_p &= \int_0^\theta -\frac{GM}{L^2} \sin(\theta') d\theta' = \frac{GM}{L^2} [\cos \theta - \cos(0)] + A_0, \\ A_p &= \frac{GM}{L^2} \cos \theta - \frac{GM}{L^2} + A_0.\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Considerando $A_0 = GM/L^2$, obtemos finalmente,

$$A_p = \frac{GM}{L^2} \cos \theta. \quad (\text{B.12})$$

Para obtenção de B_p basta substituir a equação (B.10) na equação (B.7) e integrar, o que fornece:

$$B_p = \frac{GM}{L^2} \sin \theta. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo (B.12) e (B.13) na equação da solução particular (B.5), obtém-se,

$$u_p = \frac{GM}{L^2} \cos^2(\theta) + \frac{GM}{L^2} \sin^2(\theta) = \frac{GM}{L^2},$$

e finalmente, chega-se a

$$u_p = \frac{GM}{L^2}. \quad (\text{B.14})$$

Desta forma, a solução geral da equação diferencial não homogênea pode ser escrita como:

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{GM}{L^2}, \quad (\text{B.15})$$

ou em função das constantes C e θ_0 , como na equação (2.34) apresentada na Seção 2.2.1,

$$u(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{L^2},$$

sendo $A = C \cos \theta_0$ e $B = C \sin \theta_0$, de maneira que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

APÊNDICE C – Condições iniciais e obtenção da constante C

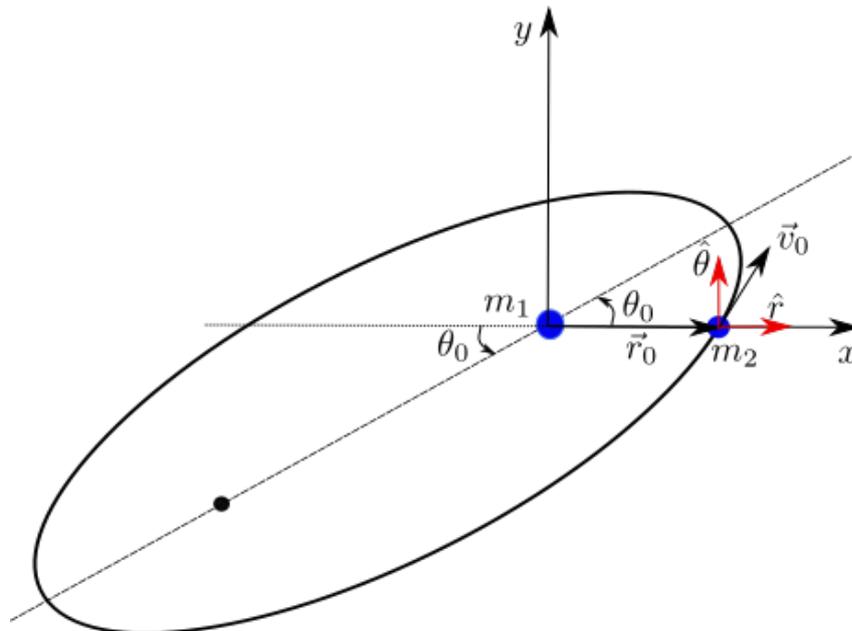
Para obtenção da órbita $r(\theta)$ de m_2 em relação a m_1 , como função dos parâmetros físicos do sistema é necessário obter a constante C , conforme estabelecido na Seção 2.2.1. A constante C está relacionada com as constantes A e B na forma,

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (\text{C.1})$$

pois $A = C \cos \theta_0$ e $B = C \sin \theta_0$. Logo, para determinar C precisamos obter A e B .

Estas constantes são determinadas a partir das condições iniciais $t = 0$ do sistema, as quais são estabelecidas na posição $\theta(0) = 0$ e $r(\theta = 0) = r_0$, com as componentes radial e angular da velocidade inicial v_0 dadas, respectivamente, por $v_r(0) = v_{r_0}$ e $v_\theta(0) = r_0\omega_0 = v_{\theta_0}$, conforme ilustrado na figura 11.

Figura 11 – Representação das condições iniciais do sistema de dois corpos com m_2 orbitando m_1 . A posição inicial de m_2 em $t = 0$ é dada por \vec{r}_0 , para $\theta = 0$, e sua velocidade inicial por $\vec{v}_0 = v_{r_0}\hat{r} + v_{\theta_0}\hat{\theta}$. A origem do sistema é descrita no foco direito da órbita, situado na posição de m_1 , com o ângulo θ_0 descrevendo a posição angular do foco esquerdo da órbita.



Para obtenção de A e B vamos considerar a solução geral da equação diferencial (2.32), dada pela equação,

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{GM}{L^2}, \quad (\text{C.2})$$

e sua derivada:

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -A \operatorname{sen} \theta + B \cos \theta. \quad (\text{C.3})$$

Considerando então $\theta = 0$ em $t = 0$, obtém-se de (C.2) e (C.3) que,

$$u(0) = A + \frac{GM}{L^2}, \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{du(0)}{d\theta} = B. \quad (\text{C.5})$$

A constante A pode ser obtida diretamente da equação (C.4), uma vez que $u(0) = 1/r_0$. Logo,

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{L^2}. \quad (\text{C.6})$$

Como $u = 1/r$, $r = r(\theta)$ e $\theta = \theta(t)$ a derivada $du/d\theta$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta}, \\ \therefore \frac{du}{d\theta} &= -\frac{v_r}{r^2 \omega}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

o que fornece pela equação (C.5),

$$\begin{aligned} \frac{du(0)}{d\theta} &= -\frac{v_{r0}}{r_0^2 \omega_0}, \\ \therefore B &= -\frac{v_{r0}}{L}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Substituindo (C.6) e (C.8) em (C.1), tem-se:

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{L^2}\right)^2 + \left(-\frac{v_{r0}}{L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - \frac{2GM}{r_0 L^2} + \left(\frac{GM}{L^2}\right)^2 + \frac{v_{r0}^2}{L^2}}, \\ &= \frac{GM}{L^2} \sqrt{1 + \left(\frac{L^2}{GM}\right)^2 \left[\frac{v_{r0}^2}{L^2} + \frac{1}{r_0^2} - \frac{2GM}{r_0 L^2}\right]}, \\ &= \frac{GM}{L^2} \sqrt{1 + \left(\frac{L^2}{GM}\right)^2 \left[\frac{v_{r0}^2}{L^2} + \frac{v_{\theta 0}^2}{r_0^2 v_{\theta 0}^2} - \frac{2GM}{r_0 L^2}\right]}, \\ &= \frac{GM}{L^2} \sqrt{1 + \left(\frac{L^2}{GM}\right)^2 \left[\frac{v_{r0}^2 + v_{\theta 0}^2}{L^2} - \frac{2GM}{r_0 L^2}\right]}, \\ &= \frac{GM}{L^2} \sqrt{1 + \left(\frac{L^2}{GM}\right)^2 \frac{1}{L^2} \left[v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}\right]}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

resultando em,

$$C = \frac{GM}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2}}. \quad (\text{C.10})$$

Para obtenção deste último resultado utilizamos a velocidade inicial total $v_0^2 = v_{r_0}^2 + v_{\theta_0}^2$ e a equação da energia total do sistema reduzido (2.21), dada por $E = v_0^2/2 - GM/r_0$. Como a energia e o momento angular do sistema se conservam $E_0 = E$ e $L_0 = L$, a expressão (C.10) é válida para qualquer instante de tempo.