

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

CARLOS MORAES DE FREITAS JUNIOR

**MINIMIZAÇÃO DO RISCO DE CARTEIRAS
DE INVESTIMENTO ATRAVÉS DA
PROGRAMAÇÃO LINEAR E DA TEORIA DE
MARKOWITZ.**

SOROCABA
2022

Carlos Moraes de Freitas Junior

**Minimização do risco de carteiras de investimento
através da Programação Linear e da Teoria de Markowitz.**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação da Professora Doutora Silvia Maria Simões de Carvalho.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientadora: Silvia Maria Simões de Carvalho

Sorocaba
2022

Freitas Junior, Carlos Moraes de

Minimização do risco de carteiras de investimento
através da programação linear e da teoria de Markowitz.
/ Carlos Moraes de Freitas Junior -- 2022.
99f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São
Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Silvia Maria Simões de Carvalho
Banca Examinadora: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira,
Paulo Cesar Oliveira
Bibliografia

1. Teoria de Markowitz. 2. Programação linear. 3.
Carteira de investimento. I. Freitas Junior, Carlos
Moraes de. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Carlos Moraes de Freitas Junior, realizada em 15/07/2022.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho (UFSCar)

Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira (UNICAMP)

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Dedico este trabalho a todas as famílias enlutadas em razão da pandemia da COVID-19, que causou destruição para muito além dos investimentos. Escancarou a fragilidade sanitária de nosso país e mostrou como tudo pode se perder em questão de dias.

Àqueles e àquelas que ainda choram por seus amados entes, deixo aqui meus mais profundos sentimentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo o que tem feito por mim. Pelas graças em abundância ainda que eu nada mereça. Pelo perdão, vida e salvação concedidos por seu único filho Jesus Cristo.

Agradeço minha mãe por todo o suporte desde minha infância, sou muito privilegiado por todo seu cuidado. Aos meus irmãos que sempre apoiaram minha caminhada.

À minha noiva Mariana, que se abdicou de tanta coisa para me suportar e me acolher nos dias ruins. Continuemos a caminhada juntos.

À UFSCar, em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas por ofertarem um ensino de qualidade mesmo em meio à inúmeras dificuldades. Aos colegas de curso que estiveram ao meu lado enfrentando uma pandemia, ensino remoto e a distância. Nada disso foi capaz de nos esmorecer.

À minha orientadora Prof. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho que sempre mostrou-se comprometida com o projeto, esteve presente e me desafiou a alcançar lugares que não eu imaginava ser capaz de chegar. Por todo o carinho, compreensão e suporte espero muito poder trabalhar juntos novamente.

À minha colega Yara Verdum Santiago por todo auxílio e suporte durante os momentos mais decisivos da pesquisa. Sua experiência com o tema e habilidades com tratamento de dados foram fundamentais para alcançar o resultado esperado.

Aos professores convidados que compuseram a banca examinadora, pela disponibilidade e disposição em participar desse momento particularmente tão importante.

Por fim agradeço todas e todos que direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho fosse desenvolvido.

“Investir em conhecimento rende sempre os melhores juros.”

Benjamin Franklin

RESUMO

O estudo apresentado neste trabalho teve como objetivo a formação e otimização de carteiras de investimento com 20 ações negociadas na B3 com base na teoria de Markowitz sobre diversificação e na Programação Linear, considerando a minimização do risco de carteira, modelado a partir de um problema de programação quadrática e resolvido através de algoritmo implementado computacionalmente. O período de coleta de dados iniciou-se em 2020, ano em que houve uma crise econômica mundial em razão da pandemia da COVID-19 e consequentes medidas de isolamento. Foram formadas três carteiras durante o período pandêmico e observadas entre Janeiro de 2021 e Março de 2022, apresentando resultados dentro do esperado em comparação à estratégia $1/n$ e à variação percentual do Ibovespa.

Palavras-chave: teoria de Markowitz, programação linear, carteira de investimento, período pandêmico.

ABSTRACT

The study presented in this project aimed at the formation and optimization of portfolios with 20 shares traded on B3 based on Markowitz's modern portfolio theory and Linear Programming, considering the minimization of portfolio risk, modeled from a quadratic programming problem and solved through computationally implemented algorithm. The data collection period began in 2020, when there was a global economic crisis due to the COVID-19 pandemic and consequent isolation measures. Three portfolios were formed during the pandemic period, which were observed between January 2021 and March 2022 and showed results as expected compared to the $1/n$ strategy and the Ibovespa variation.

Keywords: modern portfolio theory, linear optimization, pandemic period.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Região factível.	21
Figura 2 – Curvas de nível.	22
Figura 3 – Região factível ilimitada, com solução ótima única.	22
Figura 4 – Região factível ilimitada, com infinitas soluções ótimas (minimização).	23
Figura 5 – Região factível limitada, com infinitas soluções ótimas (maximização).	23
Figura 6 – Não existe solução ótima (minimização).	23
Figura 7 – Não existe solução.	24
Figura 8 – Solução ótima degenerada.	24
Figura 9 – Trajetória do método simplex	28
Figura 10 – Forma gráfica do Exemplo 2.7.	30
Figura 11 – Solução ótima do Exemplo 2.7.	32
Figura 12 – <i>Tableau</i> canônico.	39
Figura 13 – Exemplo gráfico de uma região factível e solução ótima de um PPQ.	44
Figura 14 – Harry Max Markowitz.	45
Figura 15 – Canal de alta na ação PETR4.	53
Figura 16 – Pivô de baixa na ação PETR4.	54
Figura 17 – Cruzamento de médias móveis de 9 e 72 períodos em Bitcoin.	54
Figura 18 – Relação entre risco e retorno.	57
Figura 19 – Fronteira Eficiente.	57
Figura 20 – Portfólio de Risco Eficiente.	58
Figura 21 – Ilustração do <i>Downside Risk</i>	59
Figura 22 – Evolução percentual do PIB brasileiro.	62
Figura 23 – Casos registrados de COVID-19 no Brasil por milhão de habitantes.	64
Figura 24 – Matriz de correlação.	70
Figura 25 – Gráfico do Ibovespa entre 2018 e 2022.	77
Figura 26 – Gráfico de variação da cotação da ação SAPR11.	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pontos dados na Figura 10.	30
Tabela 2 – Primeiro <i>Tableau</i>	40
Tabela 3 – Segundo <i>Tableau</i>	40
Tabela 4 – Pessoas físicas (PF) na bolsa de valores do Brasil.	65
Tabela 5 – Ações selecionadas para composição de carteira de investimentos.	68
Tabela 6 – Ações selecionadas após comparação da correlação.	71
Tabela 7 – Comparação dos retornos obtidos em 2021.	72
Tabela 8 – Tempo de processamento do algoritmo <code>cvxopt.solvers.qp</code>	77
Tabela 9 – 11 ações selecionadas pelo algoritmo <code>cvxopt.solvers.qp</code> para o primeiro semestre de 2021.	79
Tabela 10 – Retorno e risco esperado <i>versus</i> real após primeiro semestre de 2021.	79
Tabela 11 – 12 ações selecionadas pelo algoritmo <code>cvxopt.solvers.qp</code> para o segundo semestre de 2021.	79
Tabela 12 – Retorno e risco esperado <i>versus</i> real após segundo semestre de 2021.	80
Tabela 13 – Comparação dos retornos obtidos em 2021.	80
Tabela 14 – 6 ações selecionadas pelo algoritmo <code>cvxopt.solvers.qp</code> para o ano de 2022.	81
Tabela 15 – Retorno e risco esperado <i>versus</i> real após os três primeiros meses de 2022.	81
Tabela 16 – Comparação dos retornos obtidos em 2022.	81

SUMÁRIO

Lista de ilustrações	9
Lista de tabelas	10
1 INTRODUÇÃO	13
2 PESQUISA OPERACIONAL	16
2.1 Programação Linear	18
2.1.1 George B. Dantzig	18
2.1.2 Características e exemplos de problemas de programação linear	19
2.1.3 Solução gráfica	20
2.1.4 Forma padrão	24
2.1.5 Transformação de problemas na forma padrão	25
2.2 O método Simplex	27
2.2.1 Solução básica	28
2.2.2 Teorema Fundamental da Programação Linear	32
2.2.3 As etapas do método simplex	33
2.2.3.1 Algoritmo Simplex	37
2.2.4 O <i>Tableau</i> simplex	38
2.3 Dualidade	41
2.3.1 Condições de KKT	42
2.4 Programação Quadrática	43
3 TEORIA DE PORTFÓLIO DE MARKOWITZ	45
3.1 Estatística Descritiva	46
3.1.1 Medidas de Centralidade	47
3.1.1.1 Média aritmética	47
3.1.1.2 Média aritmética ponderada	47
3.1.2 Medidas de dispersão	47
3.1.2.1 Variância	48
3.1.2.2 Desvio Padrão	48
3.1.2.3 Covariância	48
3.1.2.4 Correlação	49
3.1.3 Semivariância	49
3.1.4 Média móvel	50
3.1.5 Método 1/n	50

3.2	Conceitos básicos sobre investimentos	50
3.2.1	Risco e retorno	51
3.2.2	Análise Fundamentalista	52
3.2.3	Análise técnica	53
3.3	Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz	55
3.3.1	Fronteira eficiente	56
3.3.2	Formulação do Problema de Programação Quadrática	57
3.4	<i>Downside Risk</i>	59
3.4.1	Reformulação do Problema de Programação Quadrática	60
4	PANORAMA HISTÓRICO DAS CRISES ECONÔMICAS	62
4.1	A crise do novo Coronavírus	63
4.2	A Bolsa na pandemia	64
5	APLICAÇÃO	66
5.1	Pacote <code>cvxopt</code>	66
5.2	Construção da carteira de investimentos	67
5.3	Definição do PPQ	72
5.3.1	Restrições do problema	73
6	RESULTADOS	76
6.1	Métrica adotada	76
6.2	Desempenho do algoritmo utilizado	76
6.2.1	Carteira otimizada – 2021	78
6.2.2	Carteira otimizada – 2022 e análise de resultados	80
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
	REFERÊNCIAS	86
	ANEXO A – LINHAS DE PROGRAMAÇÃO EM PYTHON	91

1 INTRODUÇÃO

A humanidade aprendeu com seu próprio desenvolvimento a adaptar-se ao uso de recursos escassos, sejam eles os insumos para a agricultura, as ferramentas para caça, as estações favoráveis ao pasto ou mesmo as tropas disponíveis para batalha, lastro para estabilidade econômica e tempo para as tarefas diárias.

Seja para demandas primitivas ou problemas modernos, a escassez de recursos é um problema que permeia a civilização e tornou-se objeto de muitos estudos, em especial com o início da Segunda Guerra Mundial, dando início à área de pesquisa chamada Pesquisa Operacional, que pode ser entendida como um método científico de tomada de decisão e auxilia na administração desses recursos.

Dentro da Pesquisa Operacional existe a Programação Linear, uma área que busca otimizar problemas reais modelados matematicamente através de uma função linear que atende às restrições lineares. Por meio da programação linear, diversos problemas que envolvem recursos escassos puderam ser otimizados ao longo da história recente, por exemplo, o uso de radares militares e distribuição de tropas durante a Segunda Guerra Mundial.

Em meio ao cenário de guerra, surge a figura de George Dantzig, matemático norte-americano que tornou-se referência no campo de pesquisa operacional graças às suas publicações sobre resolução de problemas de programação linear através de um método chamado Simplex. Esta ferramenta permitiu resolver problemas cada vez maiores devido à sua aplicabilidade computacional.

Um dos problemas de programação linear está no campo das finanças, em especial na otimização de carteiras de investimento. Sendo o capital aplicado um recurso limitado, conhecer formas de otimizar a alocação desses recursos faz não só com que seja possível obter maiores lucros, como também proteger um patrimônio de forma mais inteligente e segura.

O economista americano Harry Markowitz desenvolveu uma teoria para construção de carteiras de investimentos, ou portfólio, tendo como principal base a diversificação entre os ativos que compõem este conjunto, isto é, não alocar todo o recurso disponível em apenas um lugar, mas definir parcelas de todo o valor disponível para serem alocadas em investimentos diversos, observando a relação de suas curvas de valorização. Markowitz recebeu em 1990 o Prêmio Nobel de Economia devido às suas contribuições para a área.

Markowitz e Dantzig se conheceram e sabiam sobre o trabalho um do outro. Aliando a diversificação inteligente entre os ativos e um método matemático para determinar o peso de cada um deles na carteira é possível maximizar lucros, expondo-se a mais riscos ou minimizar os riscos, ainda que com uma rentabilidade menor.

Conhecer essas pesquisas e aplicá-las em situações reais permite ao investidor um planejamento mais acertivo de seus investimentos pensando em diferentes metas e diferentes prazos, dependendo do nível de risco que está disposto a expor-se.

Em 2020, iniciou-se a pandemia da COVID-19 e com ela, uma crise sanitária generalizada que afetou rapidamente a economia mundial. Foi observada uma queda abrupta nas bolsas de valores ao redor do mundo, inclusive no Brasil. O que podia parecer um desastre total para os investidores de ações, logo começou a ser visto como um momento com ótimas oportunidades de lucro, apostando numa recuperação da economia em razão dos avanços na busca por uma vacina contra a doença.

O estudo aqui apresentado justifica-se pela alta procura por investimentos em renda variável pelo pequeno investidor que, muitas vezes, não está preparado educacional nem psicologicamente para envolver-se com a bolsa de valores e os riscos que maus investimentos podem causar. Outro fator importante está no olhar do investidor aos períodos de maior crise durante a história e como esses períodos podem gerar oportunidades de ganhos.

O objetivo geral deste trabalho é formar três carteiras de investimento em ações listadas na Bolsa de Valores do Brasil, a B3, através da Teoria Moderna de Portfólio, de Markowitz, minimizando seu risco por meio da resolução de um problema de programação quadrática através de um algoritmo implementado computacionalmente.

Os objetivos específicos desta pesquisa estão descritos a seguir:

- Apresentar o referencial teórico adotado para a pesquisa, apresentando um estudo sobre as áreas de Pesquisa Operacional e Teoria de Markowitz.
- Traçar um panorama histórico em relação às crises financeiras já enfrentadas pelo mercado de ações.
- Modelar matematicamente um problema de seleção de carteiras que visa minimizar seu risco diversificável através da Teoria de Markowitz.
- Resolver um problema de programação quadrática para solução numérica do problema real.
- Analisar os resultados obtidos por meio de comparações com outras estratégias.

Este trabalho está dividido em capítulos, sendo que o capítulo 2 traz um breve histórico sobre a Pesquisa Operacional e fornece o referencial teórico dos métodos matemáticos utilizados neste trabalho.

No Capítulo 3 é apresentada a Teoria Moderna de Portfólio, que fundamenta a diversificação inteligente de uma carteira de investimentos.

O Capítulo 4 mostra o panorama econômico vivido no período de observação, a partir do ano de 2020 até março de 2022. Neste intervalo de tempo a pandemia da COVID-19 influenciou diretamente o mundo dos investimentos e criou um cenário imprevisível.

No Capítulo 5 são montadas as carteiras de investimento através da Teoria Moderna de Portfólio e serão formulados os problemas de programação quadrática para resolução computacional com o pacote `cvxopt` em linguagem `Python`.

O Capítulo 6 é dedicado às discussões acerca dos resultados obtidos frente ao que se esperava no momento da construção das carteiras. Os resultados obtidos serão comparados à estratégia $1/n$, ao Ibovespa que é o principal índice da bolsa brasileira e às carteiras recomendadas de maior destaque no período.

No Capítulo 7 são feitas as considerações finais sobre o trabalho, bem como a sugestão de temas para trabalhos futuros.

2 PESQUISA OPERACIONAL

A administração de recursos finitos é um problema complexo que pode surgir de diferentes áreas de pesquisa como em logística, medicina, economia e engenharia. A partir da necessidade de se estudar os campos que abrangem problemas como este surgiu a Pesquisa Operacional (do inglês *Operational Research*), que é definida por Arenales et al. (2011) como um método científico de tomada de decisão, tendo como objeto de estudo problemas reais modelados matematicamente.

A pesquisa operacional emergiu no contexto da Segunda Guerra Mundial, mas o termo surgiu anos antes do início da guerra, em 1934, na Inglaterra, devido a invenção do radar. Na guerra, a pesquisa operacional foi fundamental no estudo de problemas de operações, como otimização da manutenção de aviões, escolha de aviões para diferentes missões e aumento da probabilidade de destruição de submarinos inimigos.

Dois anos após a invenção do radar, a Estação de Pesquisa Manor Bawdsey foi criada em Suffolk pelo ministério britânico de aviação. A estação tinha como objetivo estudar a tecnologia dos radares e determinar como esta poderia ser utilizada na interceptação de aviões inimigos.

Foi em 1938 que o termo *pesquisa operacional* foi atribuído ao superintendente da estação A.P. Rowe, que também estudava a eficiência de técnicas de interceptação com o uso de radares militares.

Em 1941 foi criada a Seção de Pesquisa Operacional do Comando de Força Aérea de Combate, voltada à solução de problemas relacionados a guerra, como controle de artilharia antiaérea e dimensionamento de comboios de frota.

Com o final da Guerra, os estudos na área de pesquisa operacional se expandiram, principalmente nos Estados Unidos e na Inglaterra. Em 1947 foi criado o SCOOP (*Scientific Computation of Optimal Programs*) e implementado no Pentágono como instrumento de auxílio na tomada de decisões sobre as operações da força aérea americana.

Foi durante este projeto que George Dantzig, matemático norte-americano que viveu entre os anos de 1914 e 2005 desenvolveu, formalizou e testou o método simplex, utilizado para resolver problemas de programação linear. Termo atribuído ao próprio Dantzig pelo economista T.C. Koopmans. O método simplex será detalhado na Seção 2.2.

Em 1952 foi fundada a ORSA (*Operations Research Society of America*) nos EUA e em 1953 a ORS (*Operational Research Society*), na Inglaterra. No mesmo ano, foi fundada a também americana TIMS (*The Institute of Management Sciences*). É perceptível o interesse nos estudos sobre pesquisa operacional no pós-guerra, cenário que abriu largada para uma corrida tecnológica e científica pelo mundo.

Em 1957, na Inglaterra, a primeira conferência internacional sobre pesquisa operacional foi realizada. No evento, americanos e ingleses apresentaram seus trabalhos em Oxford e

deixaram claras as diferenças no foco de suas pesquisas. Enquanto os ingleses estudavam casos específicos, os americanos abordavam métodos matemáticos para aplicação em diversos temas como a otimização linear e a organização de estoques.

Nas décadas de 1950 e 1960, a pesquisa operacional foi disseminada não somente no setor público como visto até aqui, mas também no setor privado, que viu uma oportunidade de melhorar as tomadas de decisão dentro das empresas e otimizar questões como lucro, tempo, custos de produção, transporte, etc.

Na década de 1970, a pesquisa operacional começou a ser estudada em cursos de graduação, uma evolução na questão educacional, uma vez que este tema era acessível apenas para alunos de pós-graduação até a década de 1960. Hoje, a pesquisa operacional está em cursos como Engenharia de Produção.

Após os EUA e a Inglaterra, outros países foram motivados a desenvolverem sociedades voltadas à pesquisa operacional. Atualmente tem-se a ORS (já citada) na Inglaterra, o INFORMS (*Institute for Operations Research and the Management Sciences*) nos EUA e que agregou sociedades mais antigas como a ORSA e a TIMS. Na Alemanha foi criada a GOR (*German Operations Research Society*), no Canadá a CORS (*Canadian Operations Research Society*) e a APDIO (Associação Portuguesa de Investigação Operacional) em Portugal. A ALIO (*Asociación Latino-Ibero-Americana de Investigación Operativa*), EURO (Associação das Sociedades de Pesquisa Operacional da Europa), APORS (Associação das Sociedades de Pesquisa Operacional da Ásia e do Pacífico) e a NORAM (Associação das Sociedades de Pesquisa Operacional da América do Norte). Por fim, existe a IFORS (*International Federation of Operational Research Societies*), uma federação internacional que reúne as sociedades de pesquisa operacional espalhadas pelo mundo, contando com 52 membros (ARENALES et al., 2011).

No Brasil, a pesquisa operacional ganhou visibilidade na década de 1960 e o primeiro simpósio de pesquisa operacional ocorreu em 1968, no ITA (Instituto Tecnológico de Astronáutica), em São José dos Campos-SP. A SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional) foi fundada em seguida, em 1969, e publica dois periódicos científicos: um chamado *Pesquisa Operacional*, cujo primeiro ano de publicação foi em 1981 e outro chamado *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, que é publicada desde 2009.

A SOBRAPO (PESQUISA OPERACIONAL, 2021) organiza simpósios anualmente e chegou à 53ª edição em 2021, desde o primeiro evento no ITA.

A pesquisa operacional utiliza ferramentas da informática e da computação como softwares, hardwares, algoritmos e rotinas para coleta e tratamento de dados para que o modelo matemático possa ser aplicado. Este modelo tem como função descrever um problema real seja de natureza econômica, social, comercial ou militar, por exemplo.

2.1 PROGRAMAÇÃO LINEAR

A programação linear ou otimização linear é definida por Bazaraa, Jarvis e Sherali (2008) como uma solução para problemas de minimização ou maximização de equações lineares, sujeitos a restrições lineares. Já para Luenberger e Ye (1984), a otimização tem um conceito mais amplo, definindo-a como um princípio fundamental da análise de vários problemas complexos de tomada de decisão ou de alocação.

Um grande marco da programação linear foi a publicação do método simplex, por George Dantzig, em 1947.

2.1.1 George B. Dantzig

George Bernard Dantzig nasceu em 1914, em Portland, no estado de Oregon (Estados Unidos da América). Formou-se bacharel em matemática e física pela Universidade de Maryland em 1936 e tornou-se mestre em 1938, pela universidade de Michigan, tendo atuado como estatístico júnior no *U.S. Bureau of Labor Statistics* entre os anos de 1937 e 1939. Em 1946, Dantzig concluiu seu doutorado em matemática pela UC–Berkeley, tendo atuado no ramo de análise de combate das Forças Aéreas entre 1941 e 1946.

Dantzig também atuou na Universidade de Stanford, a partir de 1966, no departamento de Pesquisa de Operações e Ciência da Computação. Em 1975, ele foi premiado com a Medalha Nacional da Ciência por sua contribuição para a programação linear e a invenção do método simplex.

George Dantzig orientou mais de 50 alunos em seus doutorados e deixou um legado importante para pesquisadores da área de programação linear, estatística e matemática. George Bernard Dantzig faleceu aos 90 anos, em 2005, por complicações de sua diabetes e doença cardiovascular, em sua casa em Stanford (LEVY, 2005).

Desde as contribuições de Dantzig, em especial o desenvolvimento do método simplex, pesquisadores e praticantes da área de pesquisa operacional vêm contribuindo para o crescimento e aperfeiçoamento da programação linear, seja por métodos computacionais cada vez mais eficazes ou seja pelo desenvolvimento de teoria matemática. Pode-se citar como exemplos o método dos elipsóides, desenvolvido por Khachiyan (1979) — que trata-se do primeiro método polinomial para solução de problemas de programação linear, mas que computacionalmente não é tão eficaz quanto o método simplex — e o método de pontos interiores, desenvolvido por Karmarkar (1984) que também é polinomial, porém ao contrário do método dos elipsóides, é eficaz computacionalmente e é capaz de resolver problemas de grande porte, cujo custo computacional é considerado alto para o método simplex (OLIVEIRA; FILHO, 1991).

2.1.2 Características e exemplos de problemas de programação linear

Segundo Arenales et al. (2011, p.52), “Resolver um problema de otimização consiste em determinar uma solução ótima, isto é, determinar uma solução que satisfaça todas as restrições do problema e que atribua o melhor valor à função objetivo”.

Ainda sem definir os conceitos importantes para seu estudo, alguns exemplos de problemas de programação linear (PPL) podem ser citados, tais como:

a) Problemas de mistura:

- Consistem em combinar materiais para gerar novos materiais, como em uma receita culinária. A fração correspondente a cada componente da mistura, bem como a quantidade do produto final obtido podem ser definidas de maneira ótima através da programação linear;

b) Problemas de transporte:

- São problemas que provém da necessidade de distribuição de produtos que saem de um centro de distribuição e têm como destino mercados consumidores;

c) Problemas de planejamento de produção:

- mix de produção, que envolvem a produção de diversos produtos simultaneamente;
- seleção de processos quando vários produtos são produzidos em um determinado intervalo e deseja-se determinar a quantidade de cada produto em diferentes processos;
- dimensionamento de lotes que consiste em determinar o que produzir e quanto produzir de cada produto;

d) Problemas de programação de projetos:

- Visam determinar a ordem de execução de um conjunto de atividades, objetivando a otimização dos processos realizados;

e) Problemas de meio ambiente:

- Visam o cuidado com o meio ambiente, evitando que poluentes sejam despejados na natureza acima de uma taxa aceitável em algum processo produtivo (ARENALES et al., 2011).

Em especial, pode-se citar os problemas de gestão financeira, que surgem a partir da necessidade de tomada de decisões dentro da gestão financeira, como gerenciamento de fluxo de caixa ou balanceamento de carteira de investimentos, que é o objeto de estudo do presente trabalho.

Os estudos sobre finanças têm como base fundamental um recurso escasso: o dinheiro. Transações de empréstimo, compra e venda de diferentes ativos e produtos acarretam em uma valorização (ou desvalorização) do capital de uma pessoa ou empresa. Existe

uma extensa gama de investimentos que visam o crescimento patrimonial e as perguntas que frequentemente surgem quando se depara com todas as opções disponíveis são: “qual investimento tem o maior retorno?”, “qual investimento possui o menor risco?”, “qual investimento possui maior liquidez ¹?”

Cada uma dessas perguntas definem um perfil diferente de investidor e abre espaço para a discussão de qual a melhor combinação de ativos para se investir. Naturalmente se observa um problema de tomada de decisões em relação a um recurso escasso, podendo ser modelado matematicamente como um problema de programação linear e resolvido através de métodos conhecidos.

Aliás, cada um destes problemas reais podem ser modelados matematicamente e resolvidos através da programação linear. Por sua vez, a programação linear poderá retornar um resultado matemático aplicável ao mundo real, fechando um ciclo chamado de modelagem matemática.

2.1.3 Solução gráfica

Antes de seguir para a base teórica do método simplex, é importante verificar em um exemplo gráfico como o método funciona.

A visualização de soluções de um problema matemático, quando possível e mesmo que limitada a um desenho esquematizado no plano, pode ser bastante útil para melhorar nossa intuição sobre um problema em estudo. Em particular, a representação gráfica de problemas de otimização linear permite-nos intuir várias propriedades teóricas e delinear um método de solução[...] (ARENALES et al., 2011, p.54).

Exemplo 2.1. Seja o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a } & x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

As restrições e condição de não-negatividade do problema definem uma região gráfica chamada de região factível, onde estão localizadas todas as soluções que obedecem estas restrições e produzem uma solução para o problema.

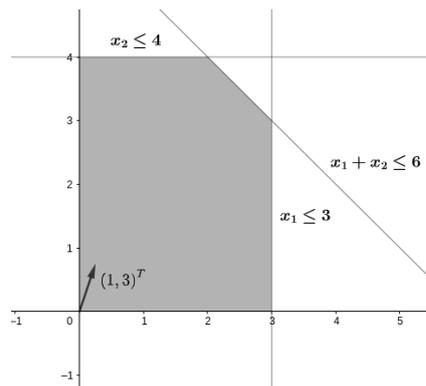
Definição 2.2 (*Região factível*). É possível se ter diversas soluções factíveis para um mesmo problema, definindo um conjunto de soluções chamado *região factível*.

¹ Liquidez é a capacidade de um ativo ser convertido em dinheiro. Quanto menor é o prazo para que a conversão ocorra, maior é a liquidez (ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS, 2022)

Definição 2.3 (*Solução factível*). A solução de um problema de programação linear será do tipo (x_1, x_2, \dots, x_n) e será dita *factível* se satisfizer todas as condições impostas nas Equações (2.2) e (2.3) (restrições).

Como trata-se de apenas duas variáveis, este é um problema de pequeno porte e é possível visualizá-lo a partir da Figura 1.

Figura 1 – Região factível.



Fonte: Compilação do autor.

Como uma primeira solução, pode-se obter o vetor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}) = 0.$$

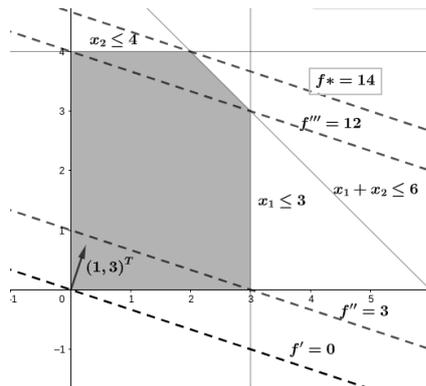
Esta solução é factível, pois obedece a todas as restrições. Inclusive, esta solução pertence a uma família de soluções tais que $x_1 + 3x_2 = 0$, denotada por uma reta. Esta reta recebe o nome de *curva de nível* e matematicamente diz-se que $f(x_1, x_2) = f'$, com $f' = 0$. Esta reta é perpendicular ao vetor dos coeficientes $(1, 3)^T$, conhecido como *vetor gradiente* de f e denotado por $\nabla f(x_1, x_2)$. O vetor gradiente é um importante indicador, pois aponta no sentido que a função cresce. Como trata-se de um problema de maximização, deve-se seguir no mesmo sentido do vetor gradiente, se fosse um problema de minimização, deveria se caminhar no sentido contrário ao vetor gradiente.

A Figura 2 mostra algumas curvas de nível a partir da direção indicada pelo vetor gradiente, seguindo de acordo com seu sentido, uma vez que trata-se de um problema de maximização.

É possível perceber que, continuando no sentido do vetor gradiente, obtém-se em certo momento um e somente um ponto que intercepta a região factível, na curva de nível $f^* = 14$. Este é o ponto que representa graficamente a *solução ótima* do problema, ou seja, o último vértice da região factível na direção do vetor dos coeficientes:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Figura 2 – Curvas de nível.



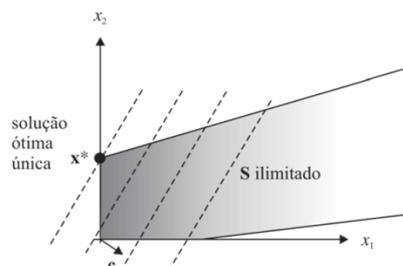
Fonte: Compilação do autor.

Definição 2.4 (*Solução ótima*). Dentre as soluções factíveis, busca-se a melhor das soluções, chamada de *solução ótima*. Para problemas de maximização, será aquela solução que atende a todas as restrições e faz com que a função objetivo assumam um valor máximo. Já para problemas de minimização, a lógica inverte, sendo a solução ótima aquela que faz com que a função objetivo assumam um valor mínimo.

Apesar de conveniente, a solução gráfica somente é possível para PPL com até três variáveis, que determinam um espaço \mathbb{R}^3 . Ainda assim a Programação Linear através de métodos como o simplex é capaz de determinar a solução ótima para inúmeros PPL em um espaço \mathbb{R}^n . O vetor dos coeficientes de dimensão n é determinado a partir da função principal do problema, chamada *função objetivo* e este vetor é perpendicular a um *hiperplano* de dimensão $n - 1$. Em particular, o hiperplano de um espaço \mathbb{R}^2 é uma reta, e de um espaço \mathbb{R}^3 é um plano.

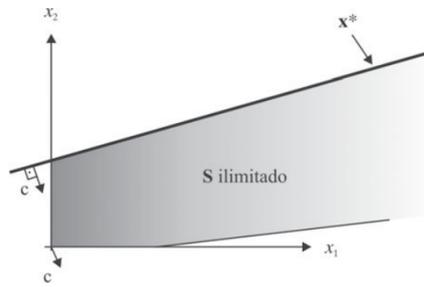
Existe uma série de possibilidades em relação à região factível e à solução ótima. A região factível dada no Exemplo 2.1 é uma região limitada, ou seja, forma um polígono, mas a região factível de um PPL pode ser ilimitada, como mostra a Figura 3. Neste caso, pode ou não haver uma solução ótima única. A Figura 4, por exemplo, mostra um exemplo de região ilimitada com várias soluções ótimas.

Figura 3 – Região factível ilimitada, com solução ótima única.



Fonte: Arenales et al. (2011, p. 63).

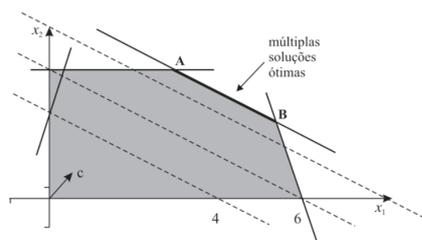
Figura 4 – Região factível ilimitada, com infinitas soluções ótimas (minimização).



Fonte: Arenales et al. (2011, p. 64).

Mesmo no caso de haver uma região factível limitada, ainda existe a possibilidade de não haver um vértice ótimo, mas um lado do polígono que coincida com a curva de nível, gerando várias soluções ótimas como mostra a Figura 5. Neste caso, para problemas reais, basta tomar uma das soluções ótimas e aplicá-la ao problema.

Figura 5 – Região factível limitada, com infinitas soluções ótimas (maximização).



Fonte: Arenales et al. (2011, p. 64).

Figura 6 – Não existe solução ótima (minimização).

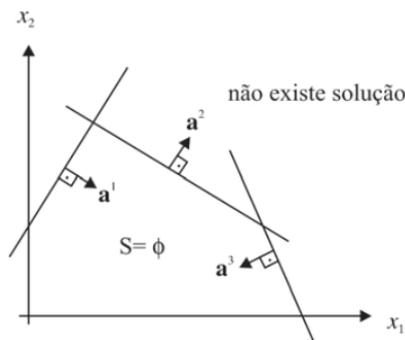


Fonte: Arenales et al. (2011, p. 65).

Existem casos em que não existe solução ótima (Figura 6) ou nenhuma solução, como na Figura 7, ou seja, a região factível é vazia, dando sinal de que o problema precisa ser modelado novamente.

A Figura 8 mostra um caso de solução ótima degenerada. Isso ocorre quando um vértice é interseção de dois pares distintos de retas ou hiperplanos quaisquer. Neste caso, a solução degenerada foi gerada em razão de uma nova restrição no problema proposto

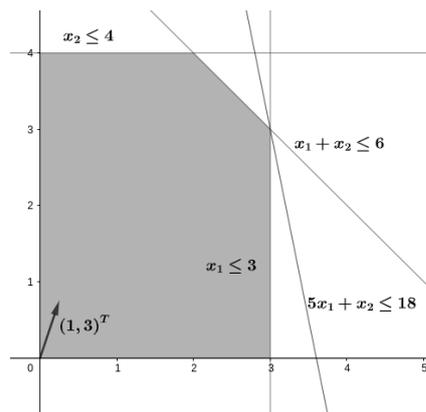
Figura 7 – Não existe solução.



Fonte: Arenales et al. (2011, p. 65).

no Exemplo 2.1, que diz que $5x_1 + x_2 \leq 18$. O vértice gerado então é denominado *vértice degenerado*. Estes vértices causam problemas em métodos de resolução de PPL, sendo aconselhável evitar restrições que se conflitem.

Figura 8 – Solução ótima degenerada.



Fonte: Compilação do autor.

2.1.4 Forma padrão

A programação linear apresenta uma grande versatilidade na resolução de problemas dentro da Pesquisa Operacional. Segundo Luenberger e Ye (1984, p. 2) “programação linear é sem dúvida o mecanismo mais natural para se formular uma vasta gama de problemas com um modesto esforço”. Um problema de programação linear consiste em maximizar ou minimizar uma função linear, conhecida como função objetivo e está sujeito a restrições lineares, representadas por equações ou inequações. Existe ainda uma condição de não negatividade, para garantir que as variáveis da função objetivo sejam sempre não negativas.

A forma padrão de um problema de programação linear pode variar dependendo do autor, podendo ser apresentada como um problema de maximização ou minimização da

função objetivo. A forma padrão é apresentada com restrições lineares em forma de equações.

A Equação (2.1) mostra a função linear a ser minimizada, conhecida como função objetivo, a Equação (2.2) mostra as restrições do problema e a Equação (2.3) mostra as condições de não negatividade (ARENALES et al., 2011).

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (2.3)$$

Pode-se reescrever a forma padrão de modo matricial, ou seja,

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = c^T \mathbf{x} \quad (2.4)$$

$$A\mathbf{x} = b$$

$$\mathbf{x} \geq 0,$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é uma matriz, chamada matriz dos coeficientes;

$c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ é o vetor de custos (transposto);

$x^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ é o vetor das variáveis (transposto);

$b^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ é o vetor dos termos independentes (transposto) e

$0^T = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$ é o vetor nulo (transposto).

Ainda que se adote uma forma padrão, problemas reais nem sempre serão modelados desta forma. Porém é possível obter-se problemas equivalentes, obedecendo a forma padrão, é o que será apresentado a seguir.

2.1.5 Transformação de problemas na forma padrão

Apesar do problema padrão apresentar uma função objetivo a ser minimizada, problemas de maximização podem ser transformados na forma padrão, sabendo que uma solução ótima de um problema de maximização faz com que se tenha uma solução factível $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ tal que para toda solução factível $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tem-se $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$. Se ambos os lados da inequação forem multiplicados por (-1) , então

$-f(\mathbf{x}^*) \leq -f(\mathbf{x})$, para toda solução factível \mathbf{x} , ou seja, maximizar $f(\mathbf{x})$ ou minimizar $-f(\mathbf{x})$ produzem a mesma solução ótima \mathbf{x}^* .

Outra adaptação necessária em muitos problemas de programação linear é quanto às restrições de desigualdade. Na Equação (2.2) da forma padrão, as restrições são apresentadas como equações. E se um problema apresentar desigualdades nas restrições?

Para transformar o problema na forma padrão, outras variáveis são adicionadas nas restrições e, conseqüentemente, na função objetivo. Para exemplificar, seja a restrição dada por:

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5.$$

Para que a restrição esteja na forma padrão, é necessário adicionar uma variável não negativa x_4 tal que,

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5.$$

Generalizando, seja a restrição:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Transforma-se esta restrição na forma padrão adicionando uma variável $x_k \geq 0$, tal que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_k = b_i.$$

Analogamente, se uma restrição do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

estiver no problema de programação linear, transforma-se a restrição na forma padrão subtraindo uma variável $x_k \geq 0$ de modo que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_k = b_i.$$

Estas variáveis introduzidas na restrição são chamadas de variáveis de folga e variáveis de excesso. Elas são muito importantes para a construção do problema na forma padrão.

O terceiro caso de transformações de problemas na forma padrão diz sobre as variáveis livres, que são aquelas que não precisam ser não negativas. Como na forma padrão todas as variáveis necessariamente são não negativas, um ajuste deve ser feito para que esta variável livre não interfira na solução do problema na forma padrão.

Utiliza-se o fato de que qualquer número pode ser escrito como a diferença entre dois números não negativos, ou seja, matematicamente tem-se que,

$$\forall x_i \in \mathbb{R}; x_i = x_i^+ - x_i^-, x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0.$$

Exemplo 2.5. Reescreva o seguinte problema de programação linear na forma padrão.

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 0,5x_3 \\ &\text{Sujeito a } x_1 + x_2 \geq 5 \\ &\quad x_2 - x_3 \leq 7 \\ &\quad x_1 \leq 3 \\ &\quad x_1 \text{ livre, } x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Transformando para a forma padrão, obtém-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } -f(x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -2x_1^+ + 2x_1^- + 3x_2 - 0,5x_3 \\ &\text{Sujeito a } x_1^+ - x_1^- + x_2 - x_4 = 5 \\ &\quad x_2 - x_3 + x_5 = 7 \\ &\quad x_1^+ - x_1^- + x_6 = 3 \\ &\quad x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

2.2 O MÉTODO SIMPLEX

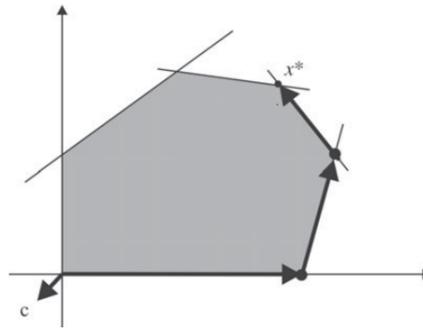
Em 1947, Dantzig publicou o Método Simplex, utilizado como uma poderosa ferramenta para resolver problemas de programação linear. A primeira aplicação de maior relevância do método simplex foi para resolver um problema de planejamento alimentar que continha 9 restrições e 27 variáveis não negativas. Utilizando calculadoras de mesa, o problema demorou 120 dias para ser resolvido através do método simplex. Apesar de ser um longo período, o feito possibilitou que, com a evolução das ferramentas de cálculo, em especial a computação, o método simplex fosse aplicado com cada vez mais rapidez. Hoje, o método pode ser aplicado em problemas com dezenas de milhares de restrições e variáveis sem tomar tanto tempo para ser resolvido, graças aos modernos computadores e implementações sofisticadas do algoritmo simplex (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2008).

A ideia do método simplex é encontrar soluções básicas factíveis para a função objetivo na forma padrão de modo que o valor da função objetivo se torne cada vez menor até que se alcance o valor mínimo, ou seja, se encontre a solução ótima.

O método simplex reproduz o processo de sair de um vértice em direção a outro melhor até encontrar a solução ótima, como mostrado na Figura 2, após um número finito de vezes, o que está representado na Figura 9.

As próximas seções fornecem a base teórica para que o método simplex seja implementado de modo que seja possível encontrar soluções para problemas de programação linear de uma forma bastante simples em comparação com os métodos até então conhecidos.

Figura 9 – Trajetória do método simplex



Fonte: (ARENALES et al., 2011, p.67). Adaptado.

2.2.1 Solução básica

A matriz de restrições A do problema de programação linear (PPL) (2.4) tem m colunas linearmente independentes (LI), com $m < n$. A partir destas características pode-se tomar as primeiras m colunas da matriz A e formar uma matriz quadrada e não singular $B_{m \times m}$. A fim de que se tenha uma variável não nula para cada linha, mantêm-se as m primeiras variáveis enquanto as restantes são igualadas a zero, construindo assim o vetor $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, 0)$. Desta forma, o problema de programação linear original se resume em resolver a Equação (2.5):

$$B\mathbf{x}_B = b, \quad (2.5)$$

e aplicá-la na equação $A\mathbf{x} = b$.

Definição 2.6 (*Variáveis básicas e solução básica*). Dadas m equações lineares com n incógnitas, pode-se tomar a submatriz $B_{m \times m}$ formada por colunas da matriz A . Com isso, se todas as $n - m$ variáveis não associadas às colunas da matriz B forem iguais a zero, a solução para as equações resultantes será chamada de *solução básica*. As variáveis associadas às colunas da matriz B são chamadas de *variáveis básicas* (LUENBERGER; YE, 1984).

Pode-se afirmar que quando as condições dadas são atendidas, ou seja, $m < n$ e as m colunas de A forem LI, sempre existe ao menos uma solução básica para a equação $A\mathbf{x} = b$.

De modo geral, um PPL em sua forma padrão pode ser escrito em forma matricial como $B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = b$, onde: B é uma matriz quadrada $m \times m$ e é chamada de matriz básica, pois é formada pelas variáveis básicas da função objetivo; \mathbf{x}_B é o vetor das variáveis básicas; N é uma matriz $m \times (n - m)$, chamada de matriz não-básica por ser formada pelas variáveis independentes da função objetivo; \mathbf{x}_N é o vetor das variáveis independentes. As variáveis não-básicas são nulas a fim de se obter vértices (pontos extremos) candidatos

a soluções ótimas, ou seja, pode-se reescrever o PPL original. Matematicamente,

$$A\mathbf{x} = b \Leftrightarrow B\mathbf{x}_B = 0.$$

Quando existe uma ou mais variáveis básicas iguais a zero, diz-se que elas geram uma solução básica degenerada e quando as variáveis básicas são todas positivas, elas geram uma solução básica não-degenerada.

Para que haja melhor visualização da solução básica, a seguir é apresentado um exemplo:

Exemplo 2.7. Seja o seguinte problema de programação linear².

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \\ \text{s.a. } & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & -x_1 + 3x_2 \geq -2 \\ & -x_1 - x_2 \geq -4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como visto na Página 25, este exemplo pode ser reescrito na forma padrão, ou seja, o problema apresentado é equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -x_1 + x_2 \\ \text{s.a. } & 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ & -x_1 + 3x_2 - x_4 = -2 \\ & -x_1 - x_2 - x_5 = -4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Ou, matricialmente,

$$A\mathbf{x} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

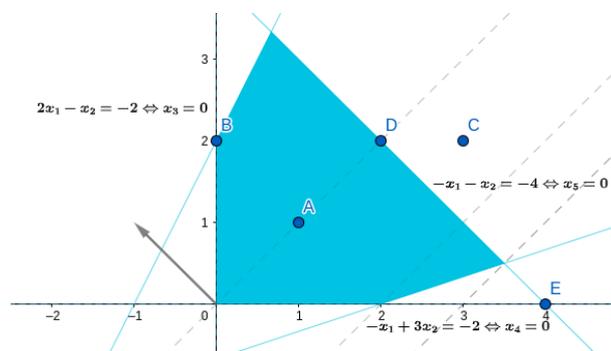
Com as variáveis de folga adicionadas ao problema, vê-se que:

² Kwong (2013, p. 17).

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 &\Leftrightarrow x_3 = 2x_1 - x_2 + 2, \\
 -x_1 + 3x_2 - x_4 = -2 &\Leftrightarrow x_4 = -x_1 + 3x_2 + 2, \\
 -x_1 - x_2 - x_5 = -4 &\Leftrightarrow x_5 = -x_1 - x_2 + 4.
 \end{aligned}$$

Ou seja, as variáveis de folga estão determinadas em função das variáveis x_1 e x_2 . A Figura 10 mostra graficamente a região determinada pelas restrições do problema, bem como o vetor dos coeficientes e alguns pontos de interesse.

Figura 10 – Forma gráfica do Exemplo 2.7.



Fonte: Compilação do autor.

Cada uma das restrições dadas dividem o plano em três partes. Por exemplo, a reta $-x_1 - x_2 = -4$ divide o plano em pontos que satisfazem $-x_1 - x_2 < -4$, pontos que satisfazem $-x_1 - x_2 = -4$ e pontos que satisfazem $-x_1 - x_2 > -4$. As retas apresentadas na Figura 10 só existem no espaço \mathbb{R}^2 se, e somente se a terceira variável da restrição dada a princípio for nula.

Analisando os pontos em destaque na Figura 10 obtém-se a Tabela 1, que mostra como cada variável se comporta no exemplo dado.

Tabela 1 – Pontos dados na Figura 10.

Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D
$x_1 = 1$	$x_1 = 0$	$x_1 = 3$	$x_1 = 2$
$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 2$	$x_2 = 2$
$x_3 = 2 \times 1 - 1 + 2 = 3$	$x_3 = 2 \times 0 - 2 + 2 = 0$	$x_3 = 2 \times 3 - 2 + 2 = 6$	$x_3 = 2 \times 2 - 2 + 2 = 4$
$x_4 = -1 + 3 \times 1 + 2 = 4$	$x_4 = -0 + 3 \times 2 + 2 = 8$	$x_4 = -3 + 2 \times 2 + 2 = 3$	$x_4 = -2 + 3 \times 2 + 2 = 6$
$x_5 = -1 - 1 + 4 = 2$	$x_5 = -0 - 2 + 4 = 2$	$x_5 = -3 - 2 + 4 = -1$	$x_5 = -2 - 2 + 4 = 0$

Fonte: elaboração do autor.

O ponto A pertence à região factível, pois as variáveis não são nulas e as restrições estão sendo atendidas. No entanto, A não está na fronteira da região factível não sendo, portanto, um candidato a solução ótima.

Estar na fronteira da região factível significa que o ponto está sobre alguma das retas originadas das restrições, como é o caso do ponto D. Observa-se que a variável x_5 é nula,

uma vez que D está sobre a reta originada pela restrição $-x_1 - x_2 - x_5 = -4$. Isto leva a conclusão de que quando um ponto está na fronteira da região factível, ao menos uma variável é nula.

Se uma variável é nula quando um ponto está sobre uma reta da fronteira da região factível, então quando o ponto estudado é um vértice, duas variáveis são nulas. Este é o caso do ponto B , cujas variáveis x_1 e x_3 são nulas. Esta condição é necessária, mas não suficiente. O ponto E , por exemplo, é determinado pelas variáveis:

$$\begin{aligned}x_1 &= 4 \\x_2 &= 0 \\x_3 &= 2 \times 4 - 0 + 2 = 10 \\x_4 &= -4 + 3 \times 0 + 2 = -2 \\x_5 &= -4 - 0 + 4 = 0.\end{aligned}$$

Ainda que se tenha $x_2 = x_5 = 0$, o ponto obtido não está na região factível, uma vez que $x_4 = -2$ e esta igualdade não atende à restrição de não negatividade.

A restrição de não negatividade também não é atendida no ponto C , pois:

$$x_1 = 3, x_2 = 2 \Rightarrow x_5 = -1 < 0.$$

Logo, C não está na região de factibilidade.

Olhando para o problema matricialmente, observa-se que se tem três equações (que compõem as restrições) e cinco variáveis, ou seja, trata-se de um sistema de equações lineares com dois graus de liberdade (ou duas variáveis livres).

Sob o olhar gráfico, para que se encontre um vértice da região factível, duas variáveis devem ser nulas.

Conclui-se intuitivamente que as variáveis livres (ou independentes) devem ser zeradas e as variáveis restantes devem ser determinadas resolvendo um sistema de equações lineares, por exemplo, pelo método de eliminação de Gauss-Jordan ³.

Para cada par de variáveis nulas, uma solução diferente é encontrada, seja ela factível como o ponto B ou infactível como o ponto E .

A Figura 11 mostra as curvas de nível, ortogonais ao vetor dos coeficientes. Como o PPL é de minimização, deve-se caminhar no sentido contrário ao vetor gradiente.

As curvas de nível apontam para o vértice cujas variáveis x_4 e x_5 são nulas, ou seja,

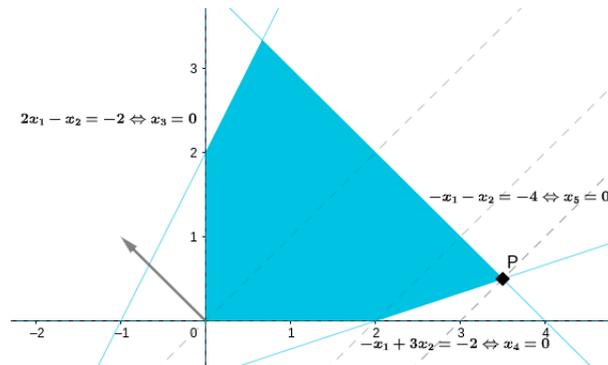
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

³ Método numérico para resolução de sistemas de equações lineares. (MOURA et al., 2020).

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_N \underbrace{\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}}_b.$$

Onde: B é a matriz dos coeficientes das variáveis básicas; N é a matriz dos coeficientes das variáveis não básicas; \mathbf{x}_B é o vetor das variáveis básicas e \mathbf{x}_N é o vetor das variáveis não básicas. É possível então particionar a matriz $A_{m \times n}$ e o vetor \mathbf{x} em função das variáveis básicas e não básicas.

Figura 11 – Solução ótima do Exemplo 2.7.



Fonte: Compilação do autor.

Definição 2.8 (partição básica). Seja uma matriz $A_{m \times n}$, denomina-se *partição básica* a partição das colunas da matriz A , ou seja, $A = [B \ N]$. Onde $B_{m \times m}$ é a *matriz básica* e $N_{m \times (n-m)}$ é a *matriz não-básica*. Esta partição acarreta em uma segunda:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}.$$

A partir desta definição, é possível reescrever a solução do problema de modo que:

$$A\mathbf{x} = b \Leftrightarrow [B \ N] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = b \tag{2.6}$$

$$B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = b$$

$$\Rightarrow B\mathbf{x}_B = b - N\mathbf{x}_N \Rightarrow B^{-1}B\mathbf{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\mathbf{x}_N$$

$$\therefore \mathbf{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\mathbf{x}_N \quad (\text{solução geral}). \tag{2.7}$$

2.2.2 Teorema Fundamental da Programação Linear

Este teorema fornece a base teórica para o método simplex e dá subsídios para o seu desenvolvimento por George Dantzig.

Teorema 2.9 (Teorema Fundamental da Programação Linear). *Dado um problema de programação linear em sua forma padrão (Equação (2.4)) em que A é uma matriz $m \times n$ de ordem m , tem-se:*

- i) se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível;*
- ii) se existe uma solução ótima, então existe uma solução básica ótima.*

Este teorema pode ser encontrado na literatura de Luenberger e Ye (1984, p. 21), assim como sua demonstração.

O teorema fundamental também garante que existe um número finito de iterações máximas para o método simplex, mais precisamente:

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Esta expressão vem da combinação de m colunas de um total de n . Dado o crescimento acelerado do número máximo de iterações em função do número de colunas da matriz A , problemas de grande porte⁴ tornam o uso do método simplex inviável.

Os problemas de pequeno porte podem ser resolvidos manualmente ou em computadores comuns. Os problemas intermediários podem ser resolvidos através de algoritmos matemáticos e um computador acessível a programadores, já os problemas de grande porte podem ser resolvidos somente utilizando computadores com alta capacidade e estrutura especialmente desenvolvida para estes fins.

Mas afinal, como se dá o método simplex? A seguir, será detalhada matematicamente uma base algébrica para o algoritmo simplex, implementável computacionalmente.

2.2.3 As etapas do método simplex

Tendo como ponto de partida as premissas listadas na Página 27, um problema de programação linear apresentará ao menos uma solução básica factível (se o problema tiver solução), a primeira pergunta a se fazer é: esta solução é ótima? Em caso positivo, o problema está resolvido. Em caso negativo, uma segunda pergunta deve ser feita: como determinar uma solução factível que seja melhor que a anterior?

Para responder à primeira pergunta, seja $\hat{\mathbf{x}}$ uma solução básica factível para um PPL. Fazendo a partição básica, tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_B \\ \hat{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix}, \text{ em que } \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = B^{-1}\mathbf{b} \geq 0 \\ \hat{\mathbf{x}}_N = 0 \end{cases}. \quad (2.8)$$

⁴ Segundo Luenberger e Ye (1984, p.5) “problemas de pequeno porte têm aproximadamente cinco incógnitas e restrições; problemas de porte intermediário têm entre cinco e cem ou mil variáveis; e problemas de grande porte têm milhares ou até milhões de variáveis e restrições.”

Da Equação (2.7), tem-se que para qualquer \mathbf{x}_N escolhido, uma solução diferente é obtida para o sistema $A\mathbf{x} = b$. Vem que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\mathbf{x}_N.$$

E da Equação (2.4), a função objetivo é escrita por:

$$f(\mathbf{x}) = c^T x.$$

Substituindo as equações e considerando a partição básica, pode-se escrever:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = c_B^T \mathbf{x}_B + c_N^T \mathbf{x}_N. \quad (2.9)$$

Na Equação (2.9), c_B^T é o vetor dos coeficientes das variáveis básicas da função objetivo e c_N^T é o vetor dos coeficientes das variáveis não-básicas da função objetivo.

Agora, substituindo a Equação (2.7) na Equação (2.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= c_B^T \underbrace{(B^{-1}b - B^{-1}N\mathbf{x}_N)}_{\mathbf{x}_B} + c_N^T \mathbf{x}_N \\ &= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}N\mathbf{x}_N + c_N^T \mathbf{x}_N. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Em especial, para uma solução $\hat{\mathbf{x}}$ dada pela Equação (2.8), o primeiro termo da Equação (2.10) é dado por:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = c_B^T \hat{\mathbf{x}}_B + c_N^T \hat{\mathbf{x}}_N = c_B^T B^{-1}b + c_N^T(0) = c_B^T B^{-1}b.$$

Seja o vetor $\lambda_{m \times 1}$ dado por:

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

Este vetor é chamado de *vetor multiplicador simplex*. Substituindo-o na Equação (2.10), tem-se que:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \underbrace{c_B^T B^{-1}b}_{f(\hat{\mathbf{x}})} - \underbrace{c_B^T B^{-1}N}_{\lambda^T} \mathbf{x}_N + c_N^T \mathbf{x}_N \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}) - \lambda^T N\mathbf{x}_N + c_N^T \mathbf{x}_N \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_N^T - \lambda^T N) \mathbf{x}_N. \end{aligned}$$

Como c_N^T , N e \mathbf{x}_N têm a mesma dimensão $(n - m)$, então:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \lambda^T a_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \lambda^T a_{N_2})x_{N_2} + \cdots + (c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}. \quad (2.11)$$

Onde c_{N_i} é um dos coeficientes das variáveis não-básicas, a_{N_i} é uma coluna da matriz N , de dimensão m e x_{N_i} é uma variável não-básica.

Cada coeficiente $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j})$ da Equação (2.11) é chamado de *custo relativo* e faz com que a expressão fique descrita como:

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1}x_{N_1} + \hat{c}_{N_2}x_{N_2} + \cdots + \hat{c}_{N_{n-m}}x_{N_{n-m}}. \quad (2.12)$$

Se a solução básica factível for tal que os custos relativos da função objetivo são não negativos, então a solução básica é ótima. Esta afirmação é conhecida como *condição de otimalidade*.

Mas e se a solução básica factível não for ótima? Como determinar uma solução melhor? A resposta para a segunda pergunta vem a seguir.

Suponha que a primeira solução básica factível não é ótima, ou seja, não atende à condição de otimalidade. Isto é:

$$\exists k \in \mathbb{N} \mid \hat{c}_{N_k} = (c_{N_k} - \lambda^T a_{N_k}) < 0.$$

Para encontrar outra solução básica que seja melhor que a anterior será necessária uma alteração na solução básica já obtida. Esta alteração é conhecida como *estratégia simplex* e consiste em perturbar as variáveis não-básicas da solução básica factível da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \geq 0, \\ x_{N_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-m, j \neq k. \end{cases}$$

A variável x_{N_k} será aquela cujo custo relativo for negativo. Esta variável deixará de ser nula, enquanto as outras variáveis não-básicas permanecerão tendo valor zero. Com isto, a Equação (2.12) será dada por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} \underbrace{0}_{x_{N_1}} + \cdots + \hat{c}_{N_k} \underbrace{\varepsilon}_{x_{N_k}} + \cdots + \hat{c}_{N_{n-m}} \underbrace{0}_{x_{N_{n-m}}} \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_k} \varepsilon. \end{aligned}$$

O valor da função objetivo obtida após este processo é menor que aquele obtido através da primeira solução básica factível, uma vez que $\hat{c}_{N_k} < 0$, ou seja, a função objetivo está sendo minimizada (otimizada, segundo a forma padrão). Quanto menor for o valor de \hat{c}_{N_k} , maior será a redução no valor da função objetivo. Por esta razão, quando mais de uma variável não básica gera custos relativos negativos, será escolhida pela estratégia simplex aquela com menor custo relativo. Esta escolha é conhecida como *Regra de Dantzig*. Da mesma forma, quanto maior for o valor de ε , menor será o valor assumido pela função objetivo.

Para que o sistema $A\mathbf{x} = b$ permaneça sendo satisfeito pela solução encontrada após a perturbação nas variáveis não-básicas, uma alteração também é necessária nas variáveis básicas. Da solução geral dada pela Equação (2.7) e pela Equação (2.8) vem que:

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\mathbf{x}_N = \hat{\mathbf{x}}_B - B^{-1}N\mathbf{x}_N. \quad (2.13)$$

Pela definição da matriz básica N e do vetor \mathbf{x}_N , após a modificação pela estratégia simplex, tem-se que:

$$N\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} a_{N_1} & \dots & a_{N_k} & \dots & a_{N_{n-m}} \end{bmatrix} (0 \dots \varepsilon \dots 0)^T = a_{N_k}\varepsilon.$$

Substituindo na Equação (2.13):

$$\mathbf{x}_B = \hat{\mathbf{x}}_B - B^{-1}a_{N_k}\varepsilon.$$

Colocando $\mathbf{y} = B^{-1}a_{N_k}$,

$$\mathbf{x}_B = \hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{y}\varepsilon \quad (2.14)$$

O vetor \mathbf{y} é conhecido como *direção simplex*, pois fornece os coeficientes para alterar as variáveis básicas de modo que continue valendo a solução para o sistema $A\mathbf{x} = b$. Para cada uma das variáveis básicas, ter-se-á:

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\varepsilon \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Como já é sabido que $\varepsilon \geq 0$ e que pela condição de não negatividade $\hat{x}_{B_i} \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, basta estudar o sinal de y_i . Assim,

Se $y_i \leq 0$, então $x_{B_i} \geq 0, \forall \varepsilon \geq 0$.

Se $y_i < 0$, então para que $x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\varepsilon \geq 0$ deve-se ter:

$$\hat{x}_{B_i} - y_i\varepsilon \geq 0 \Rightarrow \hat{x}_{B_i} \geq y_i\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}.$$

Como o que se procura é o maior valor possível de ε e ele pode valer no máximo o mesmo que $\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}$, então o valor procurado é:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \min. \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\}.$$

Em especial, quando $y_i \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ então não haverá um limitante superior para ε , fazendo com que o valor da função objetivo decresça indefinidamente, ou seja, existiriam infinitas soluções. Diz-se nestes casos, que foi encontrada uma *solução ótima ilimitada*, como mostra a Figura 6.

Caso a solução seja limitada, ou seja, $\exists l \mid y_l > 0$, então:

$$x_{B_l} = \hat{x}_{B_l} - y_l\varepsilon = \hat{x}_{B_l} - y_l \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \hat{x}_{B_l} - \hat{x}_{B_l} = 0.$$

Isto quer dizer que uma variável básica terá valor nulo, enquanto uma variável não-básica será não negativa. Em outras palavras, uma variável sai da base e outra variável entra. A nova solução terá a seguinte característica:

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(x_{B_1} \dots \underbrace{x_{N_k}}_{\hat{\varepsilon}} \dots \mid x_{N_1} \dots \underbrace{x_{B_l}}_0 \dots \right).$$

2.2.3.1 Algoritmo Simplex

Computacionalmente, o *algoritmo simplex*⁵ pode ser implementado através dos passos a seguir:

Seja um PPL escrito na forma padrão. O algoritmo simplex divide-se em duas fases, sendo a primeira caracterizada pelas entradas necessárias para o início da iteração. São elas: determinação de uma partição básica inicial, ou seja, uma matriz $A = [B \ N]$; determinação de dois vetores de índices básicos e não básicos, sendo:

$$(B_1, B_2, \dots, B_m) \text{ e } (N_1, N_2, \dots, N_{n-m}).$$

E determinação dos vetores das variáveis básicas e não básicas:

$$\mathbf{x}_B^T = (x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_m}) \text{ e } \mathbf{x}_N^T = (x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_{n-m}}).$$

A segunda fase é caracterizada pelo algoritmo em si:

- Passo 1 (cálculo da solução básica):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = B^{-1}b \\ \hat{\mathbf{x}}_N = 0 \end{cases}.$$

- Passo 2 (cálculo dos custos relativos):

(vetor multiplicador simplex):

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

(custos relativos):

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j}), \quad j = 1, 2, \dots, n - m.$$

(variável que entra na base):

$$\hat{c}_{N_k} = \min. \{ \hat{c}_{N_j}, j = 1, 2, \dots, n - m \} \text{ (a variável } x_{N_k} \text{ entra na base).}$$

- Passo 3 (teste de otimalidade):

Se $\hat{c}_k \geq 0$, então a solução é ótima e, neste caso, o algoritmo para.

Caso contrário, o algoritmo segue para o passo 4.

⁵ Na literatura, são encontradas diferentes formas de se implementar o método simplex computacionalmente. No presente trabalho, o algoritmo simplex segue o referencial de Arenales et al. (2011).

- Passo 4 (cálculo da direção simplex):

$$\mathbf{y} = B^{-1}a_{N_k}.$$

- Passo 5 (determinação do ε e da variável que sai da base):

Se $\mathbf{y} \leq 0$, então o problema não tem solução ótima finita e o algoritmo para. Caso contrário, determina-se a variável que sai da base:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \min. \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}, \text{ com } y_i > 0, i = 1, 2, \dots, m \right\} \text{ (a variável } x_{B_l} \text{ sai da base).}$$

- Passo 6 (nova partição básica):

$$\text{Nova matriz básica: } B = [a_{B_1}, \dots, a_{B_{l-1}}, a_{N_k}, a_{B_{l+1}}, a_{B_m}].$$

$$\text{Nova matriz não-básica: } N = [a_{N_1}, \dots, a_{N_{k-1}}, a_{B_l}, a_{N_{k+1}}, a_{N_{n-m}}].$$

- Passo 7:

Retornar ao passo 1.

2.2.4 O *Tableau* simplex

Tableau é uma forma de representação do método simplex através de tabelas que mostram os dados do problema e as alterações feitas pelo simplex.

A Figura 12 mostra um *tableau* canônico, onde a_1, a_2, \dots, a_m são as colunas da matriz básica, cujos coeficientes formam uma matriz identidade, ou seja, a diagonal principal é composta por coeficientes iguais a 1 e o restante dos coeficientes é nulo; $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ são as colunas da matriz não-básica, cujos coeficientes são $y_{1,m+1}, \dots, y_{i,m+1}, \dots, y_{m,m+1}$ para cada coluna não básica; b é a coluna correspondente ao valor da equação $Ax = b$, formada pelos coeficientes $y_{i0}, i = 1, 2, \dots, m$. Ainda é acrescentada uma linha formada pelos custos relativos das variáveis básicas (0), das não-básicas $r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_n$ e o valor $-z_0$, que vem da expressão $r_{m+1}x_{m+1} + r_{m+2}x_{m+2} + \dots + r_nx_n - z = -z_0$, sendo $z = f(\mathbf{x})$.

Para resolver problemas de otimização através de *tableau*, uma das possibilidades é seguir os passos a seguir:

- Passo 0: formar o *tableau* canônico a partir de uma solução básica factível;

Figura 12 – *Tableau* canônico.

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\cdots	\mathbf{a}_m	\mathbf{a}_{m+1}	\mathbf{a}_{m+2}	\cdots	\mathbf{a}_j	\cdots	\mathbf{a}_n	\mathbf{b}
1	0	\cdots	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	\cdots	y_{1j}	\cdots	y_{1n}	y_{10}
0	1	
.
.
0	0		.	$y_{i,m+1}$	$y_{i,m+2}$	\cdots	y_{ij}	\cdots	y_{in}	y_{i0}
.
.
0	0		1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	\cdots	y_{mj}	\cdots	y_{mn}	y_{m0}
0	0	\cdots	0	r_{m+1}	r_{m+2}	\cdots	r_j	\cdots	r_n	$-z_0$

Fonte: (LUENBERGER; YE, 1984, p. 46).

- Passo 1: se $r_j \geq 0$, então a solução básica factível é ótima e não há necessidade de prosseguir com o desenvolvimento do *tableau*;
- Passo 2: selecionar a coluna q cujo custo relativo for o mais negativo para determinar a variável que sai da base.
- Passo 3: dividir cada coeficiente da coluna c pelo coeficiente correspondente à mesma linha da coluna selecionada no passo anterior. Somente serão válidos os valores positivos da coluna selecionada anteriormente. Se não houver nenhum valor positivo, então o problema é ilimitado e não se prossegue para o próximo passo. Caso contrário, é selecionada a linha p que apresentou a menor razão y_{i0}/y_{iq} ;
- Passo 4: o coeficiente y_{pq} é *pivoteado* (método da eliminação de Gauss), atualizando todas as outras linhas e gerando um novo *tableau*. Após, basta retornar para o passo 1.

Exemplo 2.10.

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$$

$$\text{Sujeito a } x_1 + x_2 \leq 3$$

$$3x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Adicionando as variáveis de folga, tem-se:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + x_2 \\ &\text{Sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &\quad 3x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Passo 0 e 1: organizando os dados no *tableau* canônico, obtém-se a Tabela 2.2.4:

Tabela 2 – Primeiro *Tableau*.

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
	1	1	1	0	3
	3	-1	0	1	5
r^T	-1	1	0	0	0

Fonte: elaboração do autor.

Passo 2: como $r_1 < 0$, então a solução básica não é ótima e a coluna 1 entra na base.

Passo 3: $\frac{3}{1} > \frac{5}{3}$, então (passo 4) o coeficiente $a_{2,1}$ será pivoteado, gerando o segundo *tableau*, dado pela Tabela 2.2.4:

Tabela 3 – Segundo *Tableau*.

	a_1	a_2	a_3	a_4	b
	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
r^T	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

Fonte: elaboração do autor.

Iteração 2- passo 1: como nenhum custo relativo é negativo, então a solução encontrada é ótima, ou seja, $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 0 \Rightarrow f(\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{5}{3}$.

Portanto, com apenas duas iterações do algoritmo simplex a solução ótima para o PPL do exemplo pôde ser alcançada. O *tableau* é uma forma simples de resolver PPL de pequeno porte e mostra-se importante para a compreensão do algoritmo simplex, porém não é o foco deste trabalho, uma vez que pretende-se trabalhar com PPL com mais variáveis do que seria viável resolver através de *tableau*, por esta razão, buscou-se a implementação do algoritmo computacionalmente.

2.3 DUALIDADE

A resolução de um problema de programação linear pode acarretar em outro problema, como por exemplo quando busca-se maximizar o estoque de uma matéria-prima em um planejamento de produção. Como o custo de produção seria alterado? Ou em uma carteira de investimentos, que é o objeto de estudo deste trabalho, se o retorno da carteira for maximizado, como o risco atralado será alterado?

O primeiro problema é chamado de *problema primal* e o problema decorrente é chamado *problema dual*. Tanto os custos relativos como as restrições lineares são mantidas, porém se o problema primal é de minimização, o problema dual será de maximização e *vice-versa*. Os valores ótimos para as funções objetivo, quando as soluções forem finitas, são iguais.

Considerar a solução tanto do problema primal como do problema dual pode significar um incremento para o algoritmo simplex, podendo resultar em um menor preço computacional.

Matematicamente, pode-se definir o problema dual a partir do primal conforme mostra a Equação (2.15).

$$\begin{array}{ll}
 \textit{Primal} & \textit{Dual} \\
 \text{Minimizar } c^T \mathbf{x} & \text{Maximizar } b^T \mathbf{y} \\
 \text{Sujeito a } A\mathbf{x} = b & \text{Sujeito a } A^T \mathbf{y} \leq c \\
 \mathbf{x} \geq 0 & \mathbf{y} \text{ livre}
 \end{array} \quad (2.15)$$

O termo novo em relação à forma padrão já vista anteriormente é \mathbf{y} que é um vetor de dimensão m . Se o vetor \mathbf{x} é a variável do problema primal, \mathbf{y} é a variável do problema dual. Esta forma é conhecida como forma assimétrica de dualidade e pode ser aplicada a diversos tipos de PPL.

Ao contrário da forma padrão vista na Equação (2.4), a forma simétrica de dualidade mostra as restrições como inequações. Se alguma dessas inequações tornarem-se equações no problema primal, como mostra a Equação (2.15), as variáveis de \mathbf{y} correspondentes no problema dual serão variáveis livres. O contrário também é verdadeiro.

Lema 2.11 (Lema da dualidade fraca). *Se \mathbf{x} e \mathbf{y} são soluções factíveis para os problemas primal e dual, respectivamente, então $c^T \mathbf{x} \geq b^T \mathbf{y}$.*

Prova:

Pela Equação (2.15), tem-se que $A\mathbf{x} = b$. Logo,

$$A^T \mathbf{y} \mathbf{x} = b^T \mathbf{y},$$

Pelo problema dual,

$$c^T \geq A^T \mathbf{y} \Rightarrow c^T \mathbf{x} \geq A^T \mathbf{y} \mathbf{x} \Rightarrow c^T \mathbf{x} \geq b^T \mathbf{y}.$$

Esta sentença é garantida pela condição de não negatividade do problema primal, ou seja, $\mathbf{x} \geq 0$.

Portanto,

$$c^T \mathbf{x} \geq b^T \mathbf{y}. \blacksquare$$

Este lema mostra que quando existe uma solução factível para algum dos problemas, esta solução de um limitará o valor da função objetivo do outro problema, sendo a solução do problema primal um limitante inferior e a solução do problema dual um limitante superior. Desta forma, pode-se expressar o seguinte corolário:

Corolário 2.12. *Se \mathbf{x}_0 e \mathbf{y}_0 são soluções factíveis para os problemas primal e dual, respectivamente, e se $c^T \mathbf{x}_0 = b^T \mathbf{y}_0$, então \mathbf{x}_0 e \mathbf{y}_0 são soluções ótimas para seus respectivos problemas.*

O Teorema da Dualidade da Programação Linear mostra que o contrário também é válido:

Teorema 2.13 (Teorema da dualidade da programação linear). *Se algum dos problemas primal ou dual tiver uma solução finita ótima, então o outro também tem e os valores correspondentes das funções objetivo são iguais. Se algum dos problemas for ilimitado, então o outro não tem solução factível.*

A demonstração deste teorema foge do escopo deste trabalho e pode ser verificada em Luenberger e Ye (1984, p. 83).

Em decorrência do Teorema (2.13), pode-se afirmar que quando um problema primal é resolvido através do método simplex, então a solução para seu problema dual é imediata.

2.3.1 Condições de KKT

As condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) formam a principal base para a programação não linear, outra vertente da Pesquisa Operacional. Para a programação linear, as condições de KKT são necessárias e suficientes para que uma solução seja ótima, por esta razão, elas também são chamadas de condições de otimalidade.

Teorema 2.14 (Folgas complementares). *Sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} soluções factíveis dos problemas primal e dual, respectivamente. Os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,*

$$i) \mathbf{y}_i (A_i^T \mathbf{x} - b_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$ii) (c_j - a_j^T \mathbf{y}) x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Como pela definição de problema primal, $A\mathbf{x} = b$ então $\mathbf{y}_i (A_i^T \mathbf{x} - b_i) = 0, \forall i$. Sem perda de generalidade, pode-se reescrever o teorema de modo que, sejam $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tais que:

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= b \\
\mathbf{x} &\geq 0 \\
A^T\mathbf{y} &\leq c.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Então, os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

$$(c_j - a_j^T\mathbf{y})\mathbf{x}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, incrementa-se mais uma restrição ao problema e vem que:

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= b \\
A^T\mathbf{y} &\leq c \\
(c_j - a_j^T\mathbf{y})\mathbf{x}_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
\mathbf{x} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Seja $s_j = c_j - a_j^T\mathbf{y}$, então $c_j - a_j^T\mathbf{y})\mathbf{x}_j = s_j\mathbf{x}_j$. Como $s_j = c_j - a_j^T\mathbf{y}$ então $A^T\mathbf{y} + s = c$. Logo, o teorema das folgas complementares pode ser reescrito como:

Teorema 2.15 (Condições de KKT). *Sejam $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ e $s \in \mathbb{R}^n$. Os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se, satisfazem:*

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= b \\
A^T\mathbf{y} + s &= c \\
s_j\mathbf{x}_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
\mathbf{x}, s &\geq 0.
\end{aligned}$$

Essas são as condições de KKT, um dos principais resultados da otimização linear, bem como da otimização não-linear. Sua demonstração pode ser encontrada em (LUENBERGER; YE, 1984).

Na próxima seção será discutida a programação quadrática, utilizada na aplicação deste trabalho.

2.4 PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

A programação quadrática é um caso especial de programação não-linear, que pode ser resolvida através de métodos numéricos, implementados computacionalmente como mostram trabalhos como Forsgren, Gill e Wong (2015), Van de Panne e Whinston (1964) e Goldfarb e Idnani (1983). A resolução de Problemas de Programação Quadrática (PPQ)

é possível em razão da convexidade da função objetivo, que é quadrática e da linearidade das restrições.

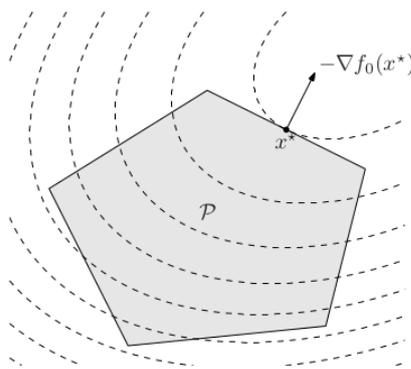
Um PPQ é definido pela Equação (2.17), onde H é uma matriz quadrada e simétrica de ordem n , A é uma matriz $n \times m$, c é o vetor n -dimensional dos coeficientes dos termos lineares da função objetivo e b um vetor de ordem m (GOLDFARB; IDNANI, 1983).

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T H \mathbf{x} + c^T \mathbf{x} & (2.17) \\ \text{Sujeito a } A \mathbf{x} &= b \\ \mathbf{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Wolfe (1959) propõe uma resolução de PPQ através da linearização da função objetivo pela resolução das soluções de KKT e do método simplex, baseado no trabalho de Barankin e Dorfman (1958). Hildreth (1957) desenvolveu um método de resolução de PPQ contando com uma aplicação computacional de simples iterações para problemas cuja função objetivo seja estritamente convexa. Markowitz (1999) também propôs um método baseado nos trabalhos de Barankin e Dorfman (1958), utilizando-se das condições de KKT.

Beale (1955) apresentou um método de otimização convexa que não utiliza a linearização, mas derivadas parciais para obtenção do ponto crítico da função objetivo, como mostra a Figura 13.

Figura 13 – Exemplo gráfico de uma região factível e solução ótima de um PPQ.



Fonte: (BOYD, S.; BOYD, S. P.; VANDENBERGHE, 2004, p. 153).

Na Teoria Moderna de Portfólio, de Markowitz, que será vista com mais detalhes no próximo capítulo, a matriz H é a matriz de Covariâncias entre diferentes ativos. Já na Teoria Pós-Moderna de Portfólio, também de Markowitz, H é a matriz de semicovariâncias.

O próximo capítulo dedica-se a Teoria Moderna de Portfólio, cujo principal referencial teórico é Harry Markowitz. A Seção 3.1 introduz termos e conceitos ligados à estatística descritiva, necessária para o desenvolvimento da teoria de Markowitz.

3 TEORIA DE PORTFÓLIO DE MARKOWITZ

Alcançar a independência financeira têm sido um objetivo comum para as pessoas há muito tempo. A ideia de conseguir gerar uma renda sem mais precisar trabalhar para alcançá-la parece muito atraente. Atingir esta meta é possível através de boas decisões acerca de trabalho, consumo e principalmente investimentos.

Tomar boas decisões é uma ação intimamente ligada ao presente estudo sobre problemas de programação linear. Em especial, tomar decisões sobre seu próprio dinheiro carrega consigo uma responsabilidade muito grande, que vai além dos números.

Existem diversas formas de investir recursos financeiros, desde a poupança até o mercado de ações e seus derivativos. Cada opção de investimento está atrelada a retornos e riscos diretamente proporcionais, ou seja, quanto maior o retorno, maior será o risco relacionado. Então como escolher de forma eficiente os melhores investimentos, obtendo maior retorno e menor risco? Buscando responder esta pergunta, Harry Markowitz desenvolveu e publicou em 1952 o que resultou na Teoria Moderna de Portfólio ou do inglês, *Modern Portfolio Theory* (MPT).

Harry Max Markowitz nasceu em 24 de Agosto de 1927, em Chicago-EUA. Formou-se na Universidade de Chicago e especializou-se em economia na mesma universidade.

Figura 14 – Harry Max Markowitz.



Fonte: (DIEGO, 2022).

Em sua dissertação, Markowitz decidiu aplicar a Matemática na análise do mercado de ações. Após perceber que o modelo mais aceito naquele momento era carente quanto a análise do impacto do risco, Markowitz desenvolveu a teoria de alocação de portfólio sob incerteza. Esta teoria foi publicada no *Journal of Finance*, em 1952.

No mesmo ano, Markowitz conheceu George Dantzig ao começar seu trabalho na RAND Corporation, uma instituição sem fins lucrativos que ajuda a melhorar a política e a tomada de decisões através de pesquisa e análise. Markowitz pesquisou técnicas de

otimização com a ajuda de Dantzig e desenvolveu um algoritmo voltado para a identificação de carteiras ótimas de média-variância, baseando-se no que mais tarde foi chamado de fronteira eficiente de Markowitz.

Em 1955, Markowitz recebeu o título de Ph.D. pela Universidade de Chicago após apresentar sua tese sobre a teoria de portfólio. Em um artigo de 1956, ele publicou o algoritmo de linha crítica e depois, escreveu um livro sobre alocação de recursos e construção de portfólio, publicado em 1959.

Markowitz recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 1990, quando era professor de finanças no Baruch College da Universidade de Nova Iorque (DIEGO, 2022).

Nos dias atuais, Harry Markowitz é professor adjunto de finanças e contabilidade na Universidade de Califórnia em San Diego-EUA e continua contribuindo para pesquisas em investimentos.

O interesse por parte de pesquisadores de instituições brasileiras pela teoria de Markowitz aplicada a investimentos em abrangência nacional se mostra relevante ao encontrar 56 trabalhos em nível de mestrado e doutorado que tratam do assunto. Destes, 10 estão disponíveis para leitura através da plataforma Sucupira, disponibilizada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) de forma online.

Miranda et al. (2021) e Siervo (2017) realizaram uma aplicação da Teoria Moderna de Portfólio (MPT) no mercado de ações em diferentes períodos, realizando a comparação com outros referenciais.

Silva (2016) e Alves (2020) pesquisaram o mercado de fundos de investimento e utilizaram a MPT para otimizar carteiras desse tipo.

Iório et al. (2014) e Leite (2021) analisaram os fundos de investimento imobiliário e compararam com outros investimentos seu rendimento e variação.

Macola (2021) e Castro (2014) realizaram estudos acerca de carteiras de fundos de previdência e compararam com carteiras formadas através da MPT.

Kaupa et al. (2013) aplicou a MPT ao mercado de ações utilizando inteligência artificial.

Cavalcante (2013) apresenta em seu trabalho uma aplicação da teoria de Markowitz com carteiras de ações utilizando o *Downside Risk*, método utilizado no presente trabalho.

Para fornecer subsídios para a teoria de Markowitz, é necessário conhecer alguns conceitos e parâmetros estatísticos, apresentados a seguir.

3.1 ESTATÍSTICA DESCRITIVA

Seja um conjunto finito de dados, que podem ser coletados através de diversos meios, tais como entrevistas, pesquisas de campo, relatórios, etc. A depender do tamanho deste conjunto de dados, torna-se uma tarefa árdua mas necessária identificar, compreender e apresentar tendências e características. Neste sentido, surge a necessidade de se estudar formas de tratamento destes dados, o que é denominado como Estatística.

A estatística descritiva é uma ferramenta utilizada para descrever dados, seja por suas tendências de centralidade, seja pelas características de dispersão dos dados. Sua importância para o desenvolvimento da presente pesquisa se deu no sentido de identificar tendências dos dados a fim de selecionar ativos alinhados com a estratégia de investimento atribuída pelo investidor.

A Teoria Moderna de Portfólios, de Harry Markowitz, necessita de parâmetros estatísticos para a construção de uma carteira de investimentos. A seguir, são apresentados conceitos estatísticos e relações matemáticas utilizadas na seleção de carteiras de investimento.

3.1.1 Medidas de Centralidade

Média aritmética, média aritmética ponderada, moda e mediana são parâmetros estatísticos conhecidos como medidas de centralidade. Uma medida de centralidade é dada por um número real, atrelado às amostras previamente coletadas pelos diversos meios já citados. A depender da amplitude dos dados, uma medida pode retratar as tendências de forma mais fiel que outra, sendo importante entender os métodos de obtenção dessas medidas.

3.1.1.1 Média aritmética

Seja a variável quantitativa x , que assume valores x_1, x_2, \dots, x_n . Define-se média aritmética como:

$$\bar{x} \in \mathbb{R}; \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

3.1.1.2 Média aritmética ponderada

Existem casos em que uma mesma amostra aparece diversas vezes dentro de um conjunto de dados, esta amostra então tem um peso maior dentro deste conjunto. Para considerar este peso dentro do cálculo da média aritmética, define-se a média aritmética ponderada como:

$$\bar{x} \in \mathbb{R}; \bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{\sum_{i=1}^k n_i},$$

onde n_i são os pesos de cada um dos valores assumidos por x .

3.1.2 Medidas de dispersão

As medidas de dispersão (ou variabilidade) são utilizadas para mensurar o grau de variação do conjunto de dados ou amostras em relação a sua média aritmética. A seguir são

definidas algumas medidas de dispersão importantes na construção de conceitos adotados pela Teoria de Portfólio, de Markowitz.

3.1.2.1 Variância

A variância é uma medida capaz de medir a variabilidade dos dados de um conjunto através da soma dos quadrados das diferenças entre cada amostra e a média dos dados. Esta soma é dividida pelo número total de dados do conjunto. Matematicamente, seja uma variável x , que assume os valores (x_1, x_2, \dots, x_n) . Então a variância σ^2 deste conjunto de dados será dada pela expressão,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Apesar de uma boa ferramenta, a variância é uma medida quadrática, enquanto os dados são lineares. Para resolver esta questão da medida quadrática, basta extrair a raiz quadrada da variância. Define-se assim o desvio padrão.

3.1.2.2 Desvio Padrão

O desvio padrão σ de um conjunto de dados é calculado extraíndo-se a raiz quadrada da variância deste mesmo conjunto. Matematicamente, temos a expressão,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

O desvio padrão é capaz de mensurar o quão homogêneo é um conjunto de dados em comparação a outro, assim como também identifica quando um conjunto apresenta dados mais esparsos que outro conjunto. Um conjunto A , com média aritmética \bar{x} e desvio padrão σ_1 é mais homogêneo que um conjunto B , com a mesma média \bar{x} , mas com um desvio padrão $\sigma_2 > \sigma_1$.

3.1.2.3 Covariância

A covariância mensura o grau de dependência linear entre dois conjuntos de dados, desde que estes conjuntos estejam em uma mesma unidade de medida. Matematicamente, a covariância pode ser definida da seguinte forma:

Sejam x, y duas variáveis quantitativas, tais que (x_1, x_2, \dots, x_n) é o conjunto dos valores assumidos por x e (y_1, y_2, \dots, y_n) é o conjunto de valores assumidos por y . Então a covariância $S_{x,y}$ entre as variáveis x e y é dada por:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}.$$

A covariância atua como um instrumento para relacionar dois conjuntos de dados que podem representar diferentes ativos financeiros dentro de uma carteira de investimento. Como trata-se de um produto, a covariância assumirá um valor positivo se os sinais das diferenças entre cada dado e a média aritmética referente a mesma variável forem iguais e assumirá um valor negativo se os sinais forem diferentes. Logo, se a covariância for positiva, os conjuntos de dados tendem a ter um comportamento semelhante quanto a tendências de alta ou de queda. Quando o valor da covariância é negativo, o comportamento dos conjuntos de dados são diferentes, ou seja, têm tendências contrárias quando se trata de ativos financeiros.

3.1.2.4 Correlação

Trata-se de uma medida de associação linear entre duas variáveis. A vantagem do uso da correlação em relação à covariância é que as unidades de medida dos conjuntos de dados não influenciam em seu cálculo. Matematicamente, a correlação $r_{x,y}$ é dada pela expressão:

$$r_{xy} \in [-1, 1]; r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Quanto mais próximo do valor 1, maior é o grau de relação positiva entre os conjuntos de dados, assim como quanto mais próximo de -1 , maior é o grau de relação negativa entre os conjuntos de dados. Quanto mais próximo de 0 for a correlação, menor será o grau de relação entre os conjuntos de dados.

3.1.3 Semivariância

Esta medida utiliza as diferenças negativas em relação à média dos dados apresentados, ao contrário da variância que considera as diferenças positivas e negativas do mesmo modo. Em investimentos, a semivariância é uma importante ferramenta no estudo do risco atrelado a investimentos diversos (BRITO NETO; VOLKMER, 2001).

Ao considerar apenas as diferenças negativas, o modelo de determinação do risco de uma carteira de investimentos será baseado apenas nas variações negativas do preço de um ativo, ou seja, quando houve perdas no período. As variações positivas indicam ganho, uma vez que quando isto ocorre, o preço do ativo está acima da média histórica do período (VALVERDE, 2019).

Matematicamente, serão considerados para cálculo da semivariância os valores dados pela Equação (3.1):

$$\min\{z_i, 0\} = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i < 0 \\ 0, & \text{se } z_i \geq 0 \end{cases} . \quad (3.1)$$

Onde $z_i = x_i - \bar{x}$ é a diferença entre uma amostra e a média.

Tomando todos os valores $z_i < 0$, a semivariância ς poderá ser calculada como mostra a Equação (3.2).

$$\varsigma = \frac{\sum_{i=1}^N z_i^2}{N}. \quad (3.2)$$

Onde N é o número de amostras.

3.1.4 Média móvel

A média móvel é utilizada como ferramenta para suavizar curvas obtidas a partir de um conjunto com muitas amostras, facilitando a identificação de tendências nesta curva. Seu cálculo é feito da mesma forma que a média aritmética já definida, porém, é fixado um período ou quantidade de amostras k , tal que:

$$M_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{i+j}. \quad (3.3)$$

3.1.5 Método 1/n

O método 1/n consiste em multiplicar um conjunto de n amostras por $\frac{1}{n}$, atribuindo mesmo peso para cada uma das amostras e resultando na própria média aritmética quando somados os valores obtidos. Este conceito ajuda na alocação de recursos em investimentos sem utilizar métodos mais robustos como os de programação linear ou não-linear, porém não considera outros fatores como o risco associado a cada ativo.

O método 1/n será utilizado na análise comparativa com o método proposto neste trabalho, baseado nos trabalhos de Markowitz e na otimização quadrática.

Na Seção 3.2 serão introduzidos conceitos sobre investimentos, necessários para melhor compreensão sobre o modelo de Markowitz.

3.2 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE INVESTIMENTOS

Para falar de conceitos relacionados a investimentos, um bom ponto de partida é definir o que é investir. As pessoas investem de diversas formas: tempo em suas atividades e esforço em seus objetivos, por exemplo. Pode-se dizer que investir está relacionado com aquilo que se tem posse. Quando trata-se de investimento relacionado à finanças, o interesse é o de alocar de forma eficiente o dinheiro que se tem posse para alcançar diferentes objetivos, metas, sonhos. Para tanto, diferentes metodologias e técnicas podem ser aplicadas, desde poupança, disponível em grandes bancos, até operações arrojadas em bolsa de valores.

A bolsa de valores é o lugar onde negociam-se ações de empresas de capital aberto, ou seja, qualquer pessoa pode tornar-se sócio acionista desta empresa (SILVA, 2016). No

Brasil, a bolsa de valores é chamada de B3 (Brasil, Bolsa, Balcão), sucessora da antiga BM&FBovespa.

Os investimentos podem ser divididos em renda fixa e renda variável, sendo que os investimentos de renda fixa apresentam pouca volatilidade e conseqüente baixo risco. São exemplos de investimentos de renda fixa: poupança, CDB (Certificado de Depósito Bancário), RDB (Recibo de Depósito Bancário), LC (Letra de Câmbio), LCI (Letra de Crédito Imobiliário), LCA (Letra de Crédito Agrícola), CRI (Certificado de Recebíveis Imobiliários), CRA (Certificado de Recebíveis Agrícolas), Debêntures, LF (Letra Financeira). Além destes investimentos, existe o Tesouro Direto, composto por títulos de renda fixa emitidos pelo Tesouro Nacional Brasileiro.

Já na renda variável, são encontrados investimentos como: ações de empresas listadas na B3; BDR (*Brazilian Depositary Receipts*), que são certificados que representam ações de empresas negociadas em mercados internacionais, como Coca Cola, Disney e Netflix, por exemplo; FII (Fundos de Investimento Imobiliários); ETF (*Exchange Traded Fund*) ou fundo de índices. Estes dois últimos são fundos de investimento, ou seja, carteiras de ativos administradas por gestores qualificados. Além destes fundos, existem outros como os de renda fixa, de ações e os fundos multimercado.

Na renda variável ainda existe as operações avançadas, como negociação de derivativos que correspondem entre outras operações as opções de compra e venda de ações, mini índice, mini dólar, etc.

Os investimentos listados via de regra buscam superar a desvalorização da moeda acarretada pela inflação, que é medida através de índices econômicos, em especial o IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo). Inclusive, existem títulos do tesouro direto que garantem margem de lucro acima do IPCA, o Tesouro IPCA+ 2035, por exemplo, garante retorno acima do IPCA e tem vencimento programado para 2035. Isto quer dizer que quem investir hoje neste título, poderá resgatar seu investimento em 2035, corrigido pelo IPCA acrescido de uma taxa fixa.

Tanto em renda fixa como na renda variável, existe a incidência do Imposto de Renda, com diferentes taxas para diferentes ativos, podendo alguns investimentos serem isentos.

Dada a variedade de investimentos e diferentes expectativas de lucro e de risco, o investidor tende a montar uma carteira ou portfólio, ou seja, um conjunto de diferentes ativos financeiros, seja de renda fixa, variável ou ativos alternativos como compra e venda de imóveis, por exemplo.

3.2.1 Risco e retorno

Seria agradavelmente suficiente que se estabelecesse um retorno esperado para um ativo e este não tivesse nenhum risco atrelado. Infelizmente, a relação entre o risco de perder capital em uma aplicação financeira e o retorno que se pode ter, aumentando o capital que se tinha anteriormente é diretamente proporcional, ou seja, quanto menor é o

risco de perdas que quer se expor, menor será o retorno percentual sobre o capital aplicado e o contrário também é válido, isto é, quanto maior é o risco que se está disposto expor-se, maior deve ser o retorno. A partir desta relação, diversificar ativos buscando controlar o risco de uma carteira parece ser uma ótima estratégia.

O risco de um ativo está atrelado à intensidade e frequência que sua cotação pode oscilar dentro de determinado período, independentemente da classe em que está inserido. A esta intensidade dá-se o nome de volatilidade, que pode ser alta quando um mercado oscila de forma intensa ou baixa quando um ativo oscila de forma suave, como no caso de investimentos de renda fixa pós-fixados, que são atrelados a algum índice, normalmente ao CDI (Certificado de Depósito Interbancário) ou ao IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo).

A volatilidade de um ativo pode advir de aspectos externos, como uma crise econômica, variação dos juros (Selic) e inflação, variação de outras moedas como o dólar, por exemplo ou pode ocorrer por alguma tomada de decisão ou resultado interno, que são divulgados através de cartas abertas das empresas ao mercado, os chamados fatos relevantes, trazendo resultados trimestrais ou decisões tomadas em assembleia.

No mercado de ações, costuma-se falar em dois principais tipos de análise, que servem como bases para decisão de compra e venda de ativos: a análise fundamentalista e a análise técnica.

3.2.2 Análise Fundamentalista

Na análise fundamentalista busca-se entender a fundo como uma empresa é capaz de gerar lucro e qual o potencial desse lucro se perpetuar ao longo prazo. Utiliza-se indicadores como receita (ganhos da empresa), lucro por ação (lucro líquido dividido pelo número de ações no mercado), P/L (preço das ações dividido pelo lucro por ação) e margens de lucro da empresa (PINTO, 2020).

Para investidores que têm o objetivo de manter um ativo em carteira por muitos anos, a análise fundamentalista é essencial, pois mostra um panorama não só do presente, como também as projeções para o futuro.

Com a análise fundamentalista, o investidor é capaz de estimar o *valuation* de uma empresa, que é quanto aquela empresa deveria valer, em dinheiro. O *valuation* permite estimar um valor para a ação e assim o investidor projeta um preço teto que pode pagar por esta ação.

Junto à análise fundamentalista está a análise técnica, que é fornece ferramentas para se estimar o momento de entrada e saída (compra e venda) de um ativo.

3.2.3 Análise técnica

Tanto para a técnica de *buy and hold* que trata-se de comprar um ativo e mantê-lo em carteira por anos, como para operações rápidas, executadas dentro de um mesmo dia (*day trade*) ou entre dias, semanas ou meses (*swing trade*) a análise técnica auxilia na tomada de decisão de compra e venda de ativos, mostrando graficamente momentos oportunos para entrada e saída de operações a partir de figuras gráficas que podem indicar uma reversão de tendência dos preços, uma correção no preço, ou um *crash*¹, por exemplo.

A Figura 15 mostra um canal de alta, padrão gráfico que explicita uma tendência de alta na cotação de um ativo.

Figura 15 – Canal de alta na ação PETR4.



Fonte: compilação do autor.

A Figura 16 mostra um pivô de baixa, que indica uma reversão de tendência no preço das ações. Os pontos de A até E são fundos, ou seja, menor cotação dentro de um curto período e os pontos de F até J são topos, maiores cotações em um curto período. A tendência de alta pode ser reconhecida quando os fundos são ascendentes e a reversão de tendência pode ser reconhecida com a sequência de topos descendentes em seguida. O pivô de baixa, formado pelos pontos F, K, L e M confirmam a tendência de baixa.

A Figura 17 mostra como as médias móveis podem ser utilizadas como sinal de entrada e saída de operações de compra e venda de ações. A curva que acompanha as barras verdes e vermelhas de perto é a forma gráfica da média móvel de 9 períodos, já a curva mais suave representa a média de 72 períodos. Quando a média de 9 períodos cruza a de 72 de baixo para cima (pontos A, C, E), indica-se compra do ativo pelo sinal gráfico e quando há um cruzamento para baixo (pontos B e D), indica-se venda do ativo. Um cuidado que deve-se tomar é em períodos como entre as sequências de pontos A-B e D-E, isto porque, apesar do cruzamento para cima em A, logo houve um cruzamento para baixo em B, podendo fazer com que o investidor sofra prejuízo em uma operação de curto prazo. O mesmo vale para o cruzamento para baixo em D e rápida reversão para cima em E.

¹ Queda abrupta e intensa na cotação de um ativo ou bolsa.

Figura 16 – Pivô de baixa na ação PETR4.



Fonte: compilação do autor.

Indica-se que outros fatores estejam alinhados ao sinal gráfico, como a confirmação de tendência observando fundos e topos.

Figura 17 – Cruzamento de médias móveis de 9 e 72 períodos em Bitcoin.



Fonte: compilação do autor.

Esses são alguns exemplos de como a análise gráfica pode ser utilizada como uma ferramenta no auxílio a tomadas de decisão de compra e venda de diversos ativos.

Na Seção 3.3, será apresentada e discutida a Teoria Moderna de Portfólio, de Harry Markowitz, que fornecerá subsídios para a construção da carteira de investimentos desejada.

3.3 TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO DE MARKOWITZ

Uma vez definida a carteira de investimentos ou portfólio, o questionamento que surge naturalmente é: como realizar a alocação de ativos na carteira de modo a obter maior retorno possível, submetendo-se a um pequeno risco de perda? Harry Markowitz buscou responder esta pergunta norteadora através da construção de um raciocínio sistemático que culminou em seu mais reconhecido trabalho: a Teoria Moderna de Portfólio.

Esta teoria baseia-se no princípio da diversificação, ou seja, quanto mais diversificados forem os ativos que compõem a carteira, menor será o risco de perdas. Considera-se também a aleatoriedade do mercado, isto é, o mercado de ativos não segue um padrão determinado. Apesar da análise técnica estudar diferentes formas de identificar tendências e momentos de entrada e saída de operações, ainda assim existe o risco da previsão estar errada, justamente devido à aleatoriedade do mercado. O terceiro ponto que norteia a Teoria Moderna de Portfólio é a relação entre risco e retorno, buscando responder à pergunta inicial desta seção.

O retorno de um portfólio de investimentos pode ser dado matematicamente pela Equação (3.4).

$$r_P = \sum_{i=1}^N w_i r_i. \quad (3.4)$$

Onde r_P é o retorno do portfólio; w_i é o peso percentual de cada ativo i na carteira; r_i é o retorno de cada ativo da carteira e N é o número de ativos.

O risco de um portfólio pode ser calculado pela sua variância σ^2 ou analogamente pelo seu desvio padrão σ com base nas covariâncias e variâncias entre os ativos, como mostra a Equação (3.5) (HIEDA; ODA, 1998).

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}}. \quad (3.5)$$

Em que σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j . Se $i = j$, então trata-se de um mesmo ativo e considera-se sua variância. w_i e w_j são os pesos dos ativos i e j , respectivamente e N é a quantidade de ativos em carteira.

Sabendo calcular risco e retorno, qual seria a carteira de investimentos perfeita? A resposta é: depende do perfil do investidor.

Existem três principais classificações para o nível de aversão ao risco de um investidor: conservador, moderado e agressivo.

O investidor conservador não tolera grandes volatilidades em sua carteira de investimentos, aceita ganhos menores desde que se tenha um risco muito baixo ou nenhum risco atrelado e normalmente não quer expor-se ao mercado por um longo prazo, necessita de liquidez. Por estes motivos, o investidor conservador prefere investir em títulos de renda fixa, que apresentam previsibilidade maior que a renda variável.

O investidor moderado aceita um pouco mais de risco, mas ainda preocupa-se com o prazo de resgate e é reticente ao mercado de ações e derivativos. Este investidor opta por títulos de renda fixa e pode expor-se à renda variável através de fundos de investimento.

Para o investidor arrojado ou agressivo é aceitável expor-se a maior risco desde que se tenha a possibilidade de maiores ganhos. Seus objetivos são de médio e longo prazo e pode optar por investir tanto em renda fixa como em renda variável.

Apesar desses perfis serem traçados assim que uma pessoa abre conta em uma corretora de valores, o investidor só conhece seu perfil com o passar do tempo, expondo-se ao risco até o ponto em que deixe de sentir-se confortável com as oscilações do mercado.

3.3.1 Fronteira eficiente

Uma carteira com dois ou mais ativos pode ser balanceada de diversas formas, atribuindo diferentes pesos para cada ativo. Uma carteira com dois ativos A e B, por exemplo, pode ser composta por 50% de cada ativo ou 30% do ativo A e 70% do ativo B.

A Figura 18 mostra uma composição de carteira com dois ativos levando em consideração o nível de correlação entre eles, ou seja, o nível de relação que as oscilações de cada ativo apresenta entre si.

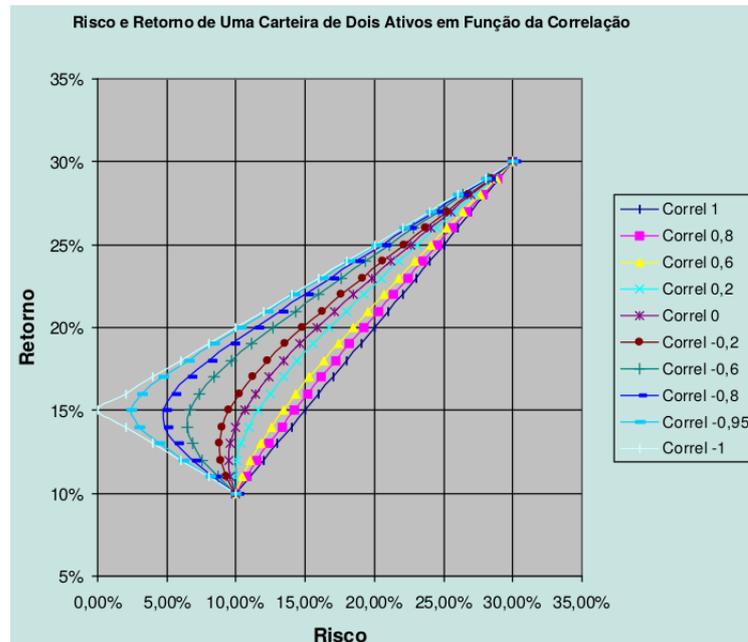
Um cenário em que dois ativos com risco atrelado são totalmente descorrelacionados, isto é, sua correlação é igual a -1 , é impossível de se obter. Neste caso, um certo retorno seria obtido sem nenhum risco.

As curvas formadas na Figura 18 mostram que para um mesmo nível de risco existem dois retornos possíveis. Um investidor sensato estará sempre inclinado a escolher aquela composição com menor risco entre as disponíveis, então esta curva pode ser considerada a partir de um ponto E em que haja apenas um risco possível para tal retorno até o ponto S que representa o máximo retorno possível. Esta curva é chamada de *fronteira eficiente* e é exibida na Figura 19.

Mesmo com a evidência de uma fronteira eficiente, são muitos os pontos possíveis de interesse. Tobin (1958) escreveu em seu artigo uma proposta de solução para este problema através da determinação de um ponto ótimo da fronteira eficiente. Este ponto é determinado adicionando um ativo livre de risco ao portfólio, por exemplo, um título do tesouro nacional atrelado à taxa básica de juros (Tesouro Selic). Este ativo será representado pelo ponto P sobre o eixo dos retornos (risco zero). O ponto ótimo Q será aquele cuja reta PQ é tangente à fronteira eficiente, como mostra a Figura 20.

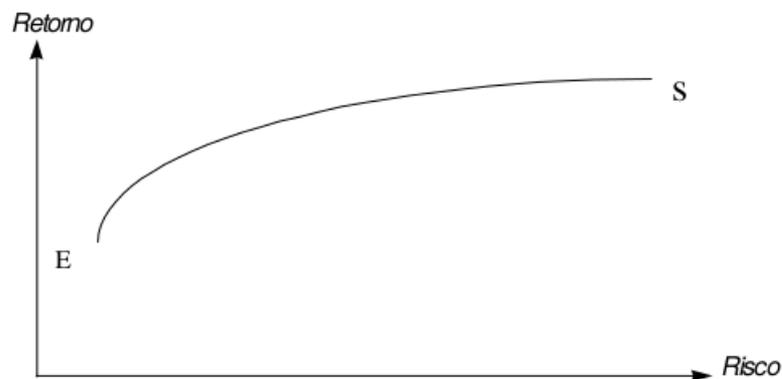
O ponto Q da curva formada é chamado de Portfólio de Risco Eficiente.

Figura 18 – Relação entre risco e retorno.



Fonte: (GONÇALVES JR; PAMPLONA; MONTEVECHI, 2002, p. 5).

Figura 19 – Fronteira Eficiente.



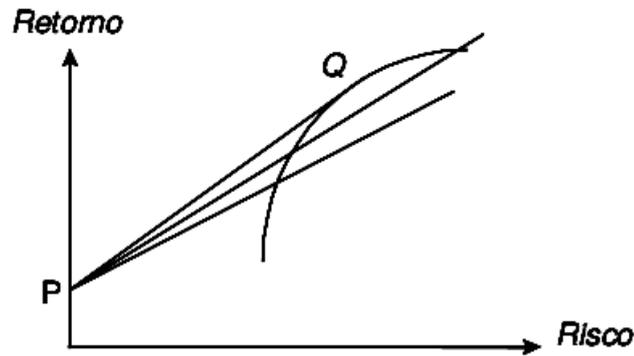
Fonte: (HIEDA; ODA, 1998, p. 4).

O que une os trabalhos de Markowitz e Dantzig é a formulação de um Problema de Programação Quadrática (PPQ) a partir da modelagem de uma seleção de carteiras. Na Seção 3.3.2 este problema será formulado e discutido.

3.3.2 Formulação do Problema de Programação Quadrática

Nesse modelo um investidor deve escolher um conjunto de ativos para compor uma carteira, obedecendo a restrições de disponibilidade de recursos ou outra natureza. Consideram-se N ativos, com taxas de retorno r_1, r_2, \dots, r_N , sendo que um portfólio é especificado pela quantidade investida em cada ativo, w_1, w_2, \dots, w_N . As taxas de retorno

Figura 20 – Portfólio de Risco Eficiente.



Fonte: (HIEDA; ODA, 1998, p. 7).

são consideradas variáveis aleatórias. Os dados do modelo (que supõem-se conhecidos) são o vetor das taxas de retorno esperadas, $E(R)$, e a matriz de covariância das taxas de retorno, $Cov(R)$. É um pressuposto do modelo termos a matriz de covariância definida positiva.

O modelo de média-variância de Markowitz pode ser descrito pelo seguinte PPQ:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j S_{ij} \quad (3.6)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{i=1}^N w_i r_i = \mu \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (3.8)$$

$$w_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.9)$$

Onde $S_{i,j}$ é a covariância entre os ativos i e j , μ é o retorno esperado para o portfólio. Em outras palavras, pretende-se determinar um portfólio com N ativos já selecionados cujo retorno esperado seja μ e todo o capital disponível seja investido. O risco do portfólio será minimizado solucionando o PPQ atribuindo a cada ativo um peso na carteira. Este peso pertencerá a um intervalo fechado $[0\%, 100\%]$, correspondente ao total investido.

A função objetivo do PPQ formulado, dada pela Equação (3.6) é a variância dos dados obtidos através do histórico de cotação dos ativos que pertencem ao portfólio. O cálculo da variância representará o risco da carteira, que deve ser minimizado.

Na Seção 3.4 será introduzido o conceito de *Downside Risk*, método utilizado para cálculo do risco da carteira de investimentos utilizando a semivariância.

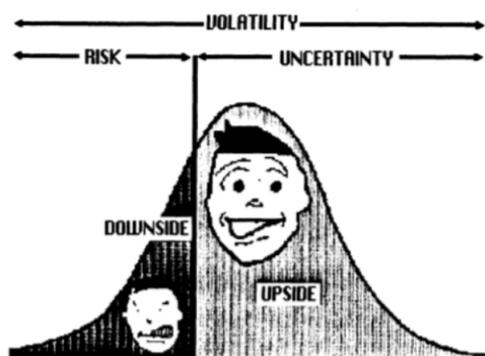
3.4 DOWNSIDE RISK

A Teoria Moderna de Carteiras de Investimento ou do inglês, *Modern Portfolio Theory* (MPT) de Markowitz fornece um cálculo de risco da carteira baseado nas variâncias e covariâncias dos ativos selecionados. Com o avanço dos estudos pós MPT, surgiu o questionamento sobre a forma de calcular esse risco, uma vez que o cálculo da variância faz com que dados heterogêneos sejam interpretados como maior volatilidade de uma ação e conseqüente risco ao investidor, sem diferenciar oscilações acima do retorno médio e abaixo desse valor.

Sempre que há um retorno acima da média, o resultado é positivo para o investidor que deseja o maior lucro possível, ou seja, não deveria ser considerado risco à carteira uma oscilação positiva, ao contrário das oscilações abaixo da média, que trazem sim um risco ao capital investido.

A partir dos estudos e revisões de Markowitz surge a *Post Modern Portfolio Theory* (PMPT) que considera apenas o lado negativo de uma distribuição normal de probabilidades dos dados colhidos a partir dos retornos médios dos ativos. O *downside risk* é ilustrado de forma lúdica na Figura 21. A partir de determinado valor, a volatilidade é considerada apenas como incerteza e não risco ao investidor, diferente do modelo clássico de Markowitz (ESTRADA, 2008).

Figura 21 – Ilustração do *Downside Risk*.



Fonte: (VALVERDE, 2019, p. 14).

As distribuições de probabilidade podem ser descritas como curvas simétricas ou assimétricas em relação à média das amostras. Na MPT não se considerava as distribuições assimétricas, o que passou a ser relevante na PMPT, pois assimetrias podem evidenciar ativos com mais ou menos risco, dependendo do nível de discrepância e se é assimétrica à direita (positiva) ou à esquerda (negativa).

Desta forma, o PPQ apresentado pela Equação (3.6) permanece quase o mesmo, porém utilizando a semivariância como medida de risco da carteira. É o que será visto na Seção 3.4.1.

3.4.1 Reformulação do Problema de Programação Quadrática

Através da PMPT, passou-se a adotar o *downside risk* como medida de risco para a carteira. Assim, o PPQ pode ser reformulado como mostrado na Equação (3.10):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \Omega_{ij} \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^N w_i r_i = \mu \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Onde Ω_{ij} é a semi-covariância entre dois ativos ou semivariância quando $i = j$ e é dado por:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\min(r_{it}, 0) \times \min(r_{jt}, 0)].$$

Neste modelo utiliza-se $\min(r_i, 0)$, embora seja possível calcular de outras formas como $\min(r_i, \bar{r})$ ou $\min(r_i, s)$, sendo s um retorno desejado pelo investidor. A escolha pela comparação com o 0 se dá em razão da simetria da matriz de semi-covariância ($\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, T$), necessária para o algoritmo de resolução de PPQ. Utilizando como comparação \bar{r} ou s existe a possibilidade de que a matriz gerada não seja simétrica, trazendo mais complexidade à resolução do problema (ESTRADA, 2008).

A Equação (3.11) mostra a formulação matricial do problema:

$$\min \quad \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} \quad (3.11)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{r} = \mu \quad (3.12)$$

$$\mathbf{w}^T \vec{1} = 1 \quad (3.13)$$

$$I \mathbf{w} \geq \vec{0}. \quad (3.14)$$

Desta forma, será considerado o risco a cada período envolvendo dois ativos de uma carteira. Para que seja um valor não nulo, os retornos dos dois ativos em um determinado período devem ser negativos, ou seja, se algum deles for não negativo, será considerado nulo e seu produto também será, não gerando maior risco.

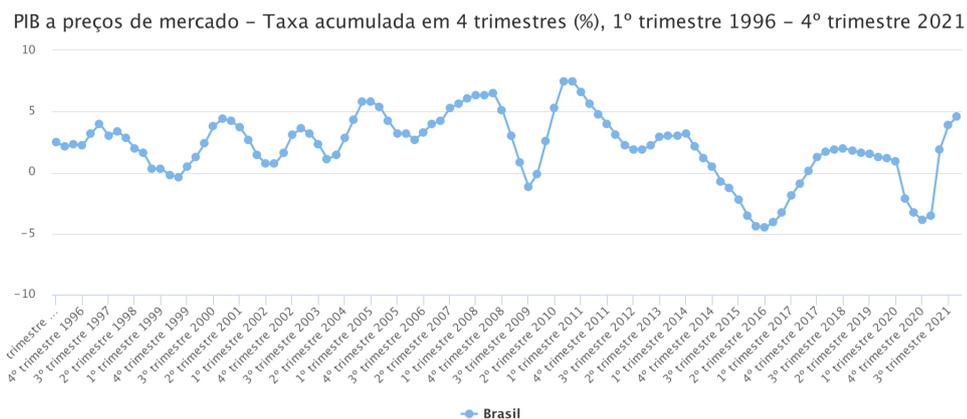
No Capítulo 4 serão analisados os diferentes cenários que compuseram o período de aplicação do presente trabalho, apresentando as expectativas do mercado financeiro para

o ano de 2020 e um breve histórico sobre a pandemia do novo Coronavírus que teve início em março daquele ano.

4 PANORAMA HISTÓRICO DAS CRISES ECONÔMICAS

O Brasil enfrentou uma recessão econômica em 2020 em razão da pandemia do novo Coronavírus, o que quer dizer que a economia do país esteve em período de retração. O principal indicador de uma recessão econômica é o Produto Interno Bruto (PIB) que representa a soma de toda a produção de um país. Quando o PIB apresenta queda percentual por dois trimestres consecutivos, entende-se que o país está em recessão. A Figura 22 mostra a evolução percentual do PIB brasileiro de 1996 até 2021 e evidencia o período de recessão econômica vivida no período mais grave da pandemia, assim como em outros momentos de crise.

Figura 22 – Evolução percentual do PIB brasileiro.



Fonte: IBGE.

O gráfico evidencia outros períodos de recessão, como a crise política enfrentada entre 2014 e 2016 que culminou no *impeachment* da então presidente Dilma Rousseff. Isto mostra que uma crise econômica pode advir de diversas formas, como já foi observado no decorrer da história.

O Pânico de 1873 que se arrastou por quatro anos foi uma crise financeira desencadeada principalmente por três fatores: a inflação americana, os investimentos desenfreados em ferrovias e a Guerra Franco-Prussiana.

Em 1908 houve uma crise financeira mundial que estimulou o estabelecimento do Federal Reserve, o banco central americano.

Em 1914 uma crise diplomática desencadeou uma série de conflitos e o início da Primeira Guerra Mundial. Com o cenário incerto e hostil, muitos investidores retiraram grande parte de seus capitais alocados em bolsa, levando à uma crise econômica nas bolsas

mundiais, em especial a de Londres e a de Nova Iorque. Em 1917 outra crise se estabeleceu com o fim da Primeira Guerra Mundial, momento em que os países recuperavam-se dos prejuízos causados pelos conflitos.

Em um momento de euforia gerada pela recuperação financeira nos EUA, a década de 1920 foi marcada pela entrada de muitas pessoas na bolsa, fazendo com que houvesse uma bolha na bolsa de valores, ou seja, as ações estavam sendo negociadas a preços muito acima do preço justo. Em 24 de Outubro de 1929 ocorreu a chamada Quinta Feira Negra, o maior *crash*¹ da bolsa americana do século XX.

Em 1945, com o fim da Segunda Guerra Mundial, o mundo enfrentou uma forte recessão em consequência aos estragos deixados pela guerra.

Em 2008 ocorreu a chamada crise do *subprime* ou crise das hipotecas nos EUA decorrente de grande número de inadimplentes que surgiram graças a facilidade de empréstimo e financiamento imobiliário. Quando os números vieram à tona, grandes bancos e financiadoras faliram ou tiveram que ser resgatadas pelos seus governos centrais. Estas grandes ondas de crise não afetaram em mesma medida países emergentes como o Brasil.

Em 2020 a crise do novo Coronavírus afetou a economia mundial em grande escala devido às restrições de circulação de pessoas impostas para controlar a expansão da doença Covid-19 (BBC, 2020).

A próxima seção trata especificamente desta crise sanitária, que acarretou em uma série de crises em outras áreas, além de infelizmente deixar muitos mortos no período e até hoje.

4.1 A CRISE DO NOVO CORONAVÍRUS

Em dezembro de 2019, alguns casos de pneumonia começaram a ser registrados em pacientes de Wuhan, província chinesa de Hubei. Em janeiro de 2020, foi possível estabelecer a causa, uma nova cepa de um vírus pertencente à família *Coronaviridae*. O Comitê Internacional de Taxonomia de Vírus o nomeou como: Síndrome Respiratória Aguda Grave, ou Síndrome Coronavírus Dois, ou ainda Sars-CoV-2. Esse vírus está relacionado à transmissão zoonótica e tem como principais sintomas febre, cansaço e tosse seca, que se transmite por via aérea com alto índice de contágio, o que forçou medidas que restringissem a concentração de pessoas (OPAS, 2020).

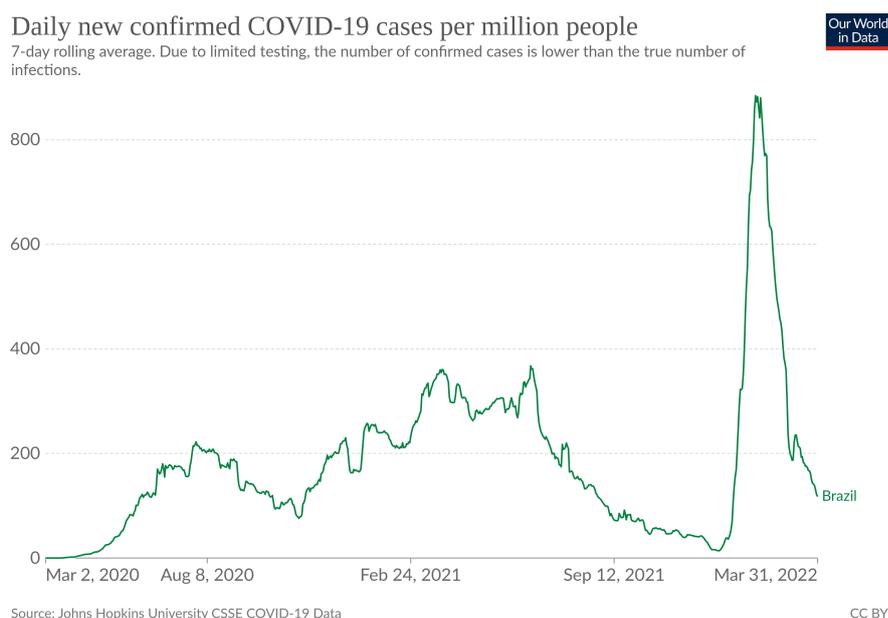
Em 11 de março de 2020 a OMS (Organização Mundial da Saúde) caracterizou a COVID-19 como pandemia. A partir daí, os países foram gradativamente adotando medidas de restrição da circulação de pessoas nas ruas, além do uso obrigatório de máscaras.

¹ A palavra *crash* quer dizer colapso em inglês e é usada no meio financeiro para identificar períodos de queda brusca e acentuada em uma bolsa de valores.

Governantes brasileiros, com base nas experiências de outros países, decidiram implementar um plano de contenção e mitigação da infecção por Coronavírus através do fechamento de estabelecimentos públicos e privados, restrição de mobilidade nas fronteiras e isolamento temporário da população.

A Figura 23 mostra a evolução do número de casos de COVID-19 registrados no Brasil no período que compreende o presente estudo.

Figura 23 – Casos registrados de COVID-19 no Brasil por milhão de habitantes.



Fonte: *Our World in Data*, disponível em <https://ourworldindata.org/covid-cases>.

O medo de uma ameaça invisível e desconhecida causou grande impacto nas economias ao redor do mundo, fazendo com que as bolsas de valores sentissem uma abrupta e contundente queda.

4.2 A BOLSA NA PANDEMIA

O mercado financeiro reagiu à notícia sobre a pandemia do novo Coronavírus de forma drástica e intensa, considerado-a uma das maiores crises sanitárias da história. O termo *Circuit breaker*² passou a ser utilizado com certa frequência. Apenas em 2020, o circuit breaker foi acionado 6 vezes em 8 pregões. Em toda a história, ele foi acionado 24 vezes (BRASIL BOLSA BALCÃO, 2020), o que evidencia a gravidade da crise enfrentada.

Como forma de estímulo à economia, o Comitê de Política Monetária (Copom) realizou sucessivos cortes na taxa básica de juros, conhecida como taxa Selic, entre Outubro de

² O *circuit breaker* é um mecanismo de proteção que interrompe os negócios nas bolsas de valores do Brasil quando as quedas são muito expressivas, ou seja, o índice IBOVESPA cai mais que 10%.

2016 e Agosto de 2020 (BRASIL, 2022). Durante esse período de queda da Selic houve grande adesão de pessoas físicas à bolsa de valores, principalmente quando a queda se intensificou entre 2019 e 2020, atingindo 2% a.a. A Tabela 4 mostra a evolução do número de CPFs na bolsa de valores, este número considera o CPF cadastrado em cada corretora, podendo uma mesma pessoa estar listada várias vezes na bolsa.

O movimento de entrada de um grande número de pessoas na bolsa foi impulsionado justamente pela redução da Selic, isto é, com a tendência de baixa dos juros que regem os investimentos em renda fixa pós-fixados juntamente com a inflação, o investidor individual viu na renda variável uma oportunidade de obter ganhos mais expressivos. A entrada de mais pessoas para a bolsa compensou a retirada de capital estrangeiro, causando pequeno equilíbrio à balança financeira.

Desde Março de 2021 até o momento da entrega deste trabalho, a taxa Selic sofreu seguidos aumentos chegando a 13,25% a.a. em Junho de 2022. A curva crescente nos juros impactou setores como varejo e construção pela dificuldade crescente em realizar financiamentos e empréstimos sujeitos a juros cada vez mais altos. Essa dificuldade dos setores mais sensíveis aos juros fez com que empresas menos sólidas no mercado de ações sofressem seguidas quedas, como a varejista Magazine Luisa (MGLU3) e a construtora MRV (MRVE3).

Tabela 4 – Pessoas físicas (PF) na bolsa de valores do Brasil.

Ano	Número de PF
2021	5 014 261
2020	3 266 708
2019	1 691 651
2018	836 176

Fonte: (BRASIL BOLSA BALCÃO, 2022).

Muitos influenciadores digitais de finanças emergiram ou se alavancaram nesse período de crise. Pode-se citar como exemplo a ex-jornalista Nathalia Arcuri, do canal “Me Poupe!” e o empresário Thiago Nigro, do canal “Primo Rico”, ambos da plataforma Youtube. A ascensão desses influenciadores evidencia o crescimento da procura por conteúdos voltados aos investimentos no Brasil e reafirma a importância da educação financeira para a formação cidadã dos indivíduos.

Após todos os apontamentos acerca do panorama vivido até a crise de 2020, no Capítulo 5 será montada a carteira de investimentos com base na teoria de Markowitz e otimizada a partir de métodos computacionais de resolução de PPQ.

5 APLICAÇÃO

Após a compreensão do assunto e o embasamento teórico que fomenta o estudo sobre construção de carteiras de investimentos de forma a obter maiores ganhos ou riscos reduzidos a partir da diversificação e otimização linear, propõe-se uma aplicação das teorias de Markowitz e Dantzig com o objetivo de obter uma carteira composta por ações de empresas negociadas na bolsa brasileira, a B3.

Com o objetivo de minimizar o risco associado à carteira de investimentos, deve-se buscar um retorno específico. O retorno da carteira formada neste trabalho considerou os ganhos de um dos maiores investidores da história: Warren Buffet.

Warren Buffet é conhecido por seus investimentos muito rentáveis e por sua perspicácia em notar e aproveitar-se dos ciclos econômicos. Buffet ostenta uma média de retorno de 20% ao ano com seus investimentos. Marca difícil de ser batida por investidores em um prazo tão longo, sustentando os ganhos por mais de 50 anos (HAGSTROM, 2013).

Desta forma, buscou-se obter um retorno de 20% a.a. com a carteira de ações e, como os ativos foram analisados mensalmente, a taxa utilizada foi de 1,53% a.m., como mostra a Equação (5.1). A Seção 5.2 mostra como a carteira de ações foi formada, utilizando a teoria de Markowitz e métodos computacionais de resolução de PPQ.

$$\begin{aligned}
 120\% &= (1 + i)^{12} \\
 \Rightarrow \sqrt[12]{1,2} &= 1 + i \\
 \Rightarrow i &= 1,0153 - 1 \\
 \Rightarrow i &= 0,0153 \\
 &= 1,53\%.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1 PACOTE CVXOPT

Neste trabalho foi utilizado o pacote `cvxopt` (VANDENBERGHE, 2010), implementado computacionalmente através da linguagem de programação Python. A escolha deu-se em razão do livre acesso às plataformas de programação em Python, como o `Jupyter Notebook` que é executado diretamente no *browser*, sem a necessidade de internet para muitos pacotes. O algoritmo `cvxopt.solvers.qp` resolve problemas de programação quadrática através de *solvers* que linearizam a função objetivo do problema dispondo das condições de KKT e utilizam métodos de resolução de problemas de programação linear, isto ocorre desde que a função objetivo seja convexa e a matriz de coeficientes dos termos quadráticos do problema seja simétrica (BOYD, S.; BOYD, S. P.; VANDENBERGHE,

2004). A Equação (5.2) mostra a forma padrão de entrada do algoritmo, em que \mathbf{x} é o vetor das variáveis, P é a matriz dos coeficientes dos termos quadráticos da função objetivo, q é o vetor dos coeficientes dos termos lineares da função objetivo, $A\mathbf{x} = b$ são as restrições em forma de equações e $G\mathbf{x} \leq h$ representa a entrada de restrições em forma de inequações, sendo necessário que o algoritmo inclua variáveis de folga e excesso.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \frac{1}{2}\mathbf{x}^T P\mathbf{x} + q^T \mathbf{x} \\ &\text{Sujeito à } G\mathbf{x} \leq h \\ &A\mathbf{x} = b. \end{aligned} \tag{5.2}$$

A saída do algoritmo é composta por uma mensagem informando se foi encontrada solução ótima, o vetor das variáveis \mathbf{x} e o valor da função objetivo.

Para o presente trabalho, o vetor \mathbf{x} contém os pesos percentuais das ações a serem definidos através da otimização. A matriz P é a matriz de semi-covariâncias dos ativos e o vetor q é nulo, uma vez que não existem termos lineares na função objetivo. G , h , A e b estão relacionados às restrições de construção da carteira, que serão vistas com mais detalhes na Seção 5.2.

5.2 CONSTRUÇÃO DA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS

Devido ao grande número de ativos disponíveis na bolsa brasileira, foram selecionadas 35 ações, negociadas no período de Janeiro à Dezembro de 2020. A seleção de tais ações deu-se pela análise fundamentalista, que estuda o cenário econômico e os ciclos do mercado, bem como aspectos específicos de cada empresa.

A Tabela 5 mostra as 35 ações escolhidas na bolsa brasileira. Foram selecionadas empresas de 22 setores diferentes, o que auxilia na diversificação proposta por Markowitz.

As ações de 1 à 12 são de empresas de setores perenes, ou seja, tem baixa volatilidade no longo prazo e costumam valorizar-se sem relação com os ciclos de mercado, dada a demanda por serviços básicos como água, saneamento e energia elétrica, bem como o setor de seguros, que foi impactado pela crise do Coronavírus, porém aumentou a base de clientes nas empresas, fazendo com que sua recuperação fosse acelerada. O setor bancário destaca-se com a alta dos juros, porém, não deixa de gerar lucro em períodos de baixa dos juros devido à sua capacidade de transferência de valores e financiamento de empresas.

A procura constante pela evolução da infraestrutura de empresas faz com que setores ligados a metalurgia, máquinas e equipamentos sejam sólidos e apresentem crescimento quase constante. Fato que apoiou a escolha de empresas como Weg (WEGE3), Gerdau (GGBR4) e Unipar (UNIP6).

Algumas empresas representam quase o todo de seus setores, fazendo com que sejam bastante sólidas, como Telefônica (VIVT3), Ambev (ABEV3) e Brasil Agro (AGRO3).

Tabela 5 – Ações selecionadas para composição de carteira de investimentos.

Número	Código de negociação	Empresa	Setor econômico
1	SAPR11	Sanepar	Água e saneamento
2	CSMG3	Copasa	
3	SBSP3	Sabesp	
4	WIZS3	Wiz	Previdência e seguros
5	PSSA3	Porto Seguro	
6	BBSE3	BB Seguridade	
7	ITSA4	Itausa	Intermediários financeiros
8	BBDC4	Bradesco	
9	BPAC11	BTG Pactual	
10	TAE11	Taes	Energia elétrica
11	ENBR3	EDP Energias do Brasil	
12	TRPL4	Transmissão Paulista	
13	WEGE3	Weg	Máquinas e equipamentos
14	ABEV3	Ambev	Bebidas
15	VIVT3	Telefônica Brasil	Telefonia
16	AGRO3	Brasil Agro	Agropecuária
17	BRAP4	Bradespar	Mineração
18	CYRE3	Cyrela Brazil Realty	Construção
19	EZTC3	EZTec	
20	PETR4	Petrobrás	Petróleo
21	PRI03	Petrorio	
22	LREN3	Lojas Renner	Comércio
23	RADL3	RaiaDrograsil	
24	MGLU3	Magazine Luiza	
25	CVCB3	CVC	Viagens e Lazer
26	GGBR4	Gerdau	Siderurgia e Metalurgia
27	RENT3	Localiza	Diversos
28	HOOT4	Hoteis Othon	Hoteis e Restaurantes
29	MRFG3	Marfrig	Alimentos Processados
30	CCRO3	CCR	Transportes
31	KLBN11	Klabin	Papel e celulose
32	MYPK3	IOCHPE-MAXION	Automóveis e motocicletas
33	UNIP6	Unipar	Químicos
34	AZUL4	Azul	Transportes aéreos
35	GOLL4	Gol	

Fonte: compilação do autor.

Nos setores cíclicos, impactados pela variação dos juros e inflação, destacam-se construção e comércio, que se desvalorizam com a alta dos juros, por estarem ligadas ao consumo de bens e financiamentos, que ficam mais caros com os juros altos. Também destacam-se as *commodities*, que são impactadas positivamente pelo ciclo de alta dos juros. Empresas como Petrobrás (PETR4), Brasil Agro (AGRO3), Bradespar (BRAP4), Marfrig (MRFG3) e Petrorio (PRIO3) são destaques destes setores.

Para completar, foram escolhidas empresas fortemente impactadas pela pandemia. Setores como o de transportes aéreos, viagens e lazer ainda sofrem com a desvalorização causada pelas restrições aplicadas ao redor do mundo.

Numa análise geral, as ações foram escolhidas considerando a solidez de empresas em seus setores, fazendo com que os lucros destas empresas sejam em sua maioria crescentes, o que impacta positivamente no valor de mercado obtido pelo produto entre o número de ações em circulação e seu preço unitário.

Outras empresas de menor valor de mercado foram escolhidas devido a seu potencial de crescimento nos próximos anos, casos como Magazine Luiza (MGLU3), EDP Energias do Brasil (ENBR3) e banco BTG Pactual (BPAC11). Apesar da volatilidade que empresas cíclicas podem gerar na carteira, uma composição entre setores que se beneficiam com a alta dos juros como os bancos e *commodities* e os que sofrem nesse aspecto como construtoras e comércio fornecem diversificação através da baixa correlação.

Após a análise fundamentalista das empresas selecionadas, utilizou-se um método quantitativo para filtrar as ações e escolher aquelas que fornecem um menor nível de correlação.

Através da Teoria Moderna de Carteiras de Investimento (do inglês, *Modern Portfolio Theory*) de Markowitz, foram selecionadas 20 ações para compor a carteira de investimentos, observando a correlação entre as empresas. Quanto maior for o grau de correlação entre duas ou mais empresas, maior será o risco diversificável da carteira, uma vez que existe a possibilidade de crise no setor que afeta todas essas ações, causando desvalorização dos papéis e, conseqüentemente, da carteira. Por outro lado, empresas pouco correlacionadas fornecem uma boa diversificação para a carteira e menor risco ao capital do investidor, mesmo que para isso os rendimentos sejam reduzidos.

A partir da ferramenta **correlação** do software **Libreoffice Calc**, uma matriz triangular é gerada (a Figura 24 mostra os dados das empresas com menores níveis de correlação, bem como os maiores índices de correlação entre as 20 determinadas pelo método), sendo possível determinar as empresas com menores níveis de correlação, listadas na Tabela 6.

Tendo a carteira de ações definida, utilizou-se o pacote **cvxopt**, implementado computacionalmente em linguagem de programação *Python* para resolver um Problema de Programação Quadrática cuja função objetivo é dada pelo risco da carteira, calculado em relação às semivariâncias e semi-covariâncias entre os ativos em carteira. Ao final do

Figura 24 – Matriz de correlação.

Planilha1

	SAPR1 1	CSMG 3	BBSE3	BPAC1 1	TAAE1 1	WEGE 3	ABEV3	VIVT3	AGRO 3	PETRA 3	LREN3	RADL3	MGLU 3
SAPR1 1	1												
CSMG 3	0,7395	1											
BBSE3	0,6107	0,7097	1										
BPAC1 1	0,9193	0,6759	0,73	1									
TAAE1 1	0,4772	0,8401	0,8456	0,5107	1								
WEGE 3	0,7071	0,2947	0,4241	0,6893	0,2693	1							
ABEV3	0,6144	0,7534	0,6477	0,6998	0,6247	0,2082	1						
VIVT3	0,0768	0,0817	0,1198	0,1296	0,1042	0,1333	0,3902	1					
AGRO 3	0,2503	0,5378	0,7046	0,3521	0,718	0,18	0,3311	-0,079	1				
PETRA 4	0,7069	0,906	0,8963	0,7534	0,9053	0,4307	0,6723	0,0205	0,6408	1			
LREN3	0,6986	0,7636	0,8997	0,7585	0,8397	0,482	0,5465	-0,036	0,6816	0,9169	1		
RADL3	0,5643	0,5499	0,434	0,4467	0,5509	0,6598	0,4729	0,3308	0,4483	0,4704	0,4688	1	
MGLU 3	0,6573	0,5874	0,3245	0,6438	0,4329	0,5807	0,3292	0,0114	0,157	0,6108	0,6156	0,3766	1
GGBR 4	0,7846	0,7162	0,6435	0,8467	0,6245	0,613	0,6625	-0,086	0,3748	0,7841	0,8016	0,523	0,7891
RENT3	0,7406	0,7212	0,6122	0,6866	0,6811	0,7549	0,487	-0,033	0,5119	0,7577	0,7512	0,818	0,7025
MRFG 3	0,4345	0,4333	0,5038	0,4235	0,4783	0,467	-0,072	-0,251	0,4041	0,6374	0,701	0,1691	0,631
KLBN1 1	0,3998	0,4728	0,4547	0,4602	0,5083	0,24	0,2588	-0,034	0,2179	0,6114	0,7286	0,1008	0,785
MYPK 3	0,6454	0,8502	0,6608	0,5872	0,792	0,3709	0,6352	-0,226	0,6258	0,8027	0,741	0,6626	0,4679
UNIP6	0,1561	0,4296	0,6997	0,3911	0,6092	0,067	0,682	0,3449	0,3311	0,6097	0,4843	0,142	0,1131
AZUL4	0,489	0,5717	0,8798	0,6383	0,7345	0,2776	0,6967	0,1199	0,6892	0,7129	0,8238	0,4569	0,2038

Fonte: elaborado pelo autor.

processo, obteve-se o peso percentual do capital a ser alocado para cada ação.

Desta forma, foram otimizadas três carteiras de investimento, sendo que o ano de 2020 foi utilizado para construção de uma carteira que foi acompanhada entre Janeiro e Junho de 2021, que foi o período utilizado para definição de uma carteira para ser observada entre Julho de 2021 e Dezembro de 2021, período este utilizado para montar uma terceira carteira, observada entre Janeiro e Março de 2022.

O ano de 2020 foi marcado pelo *crash* da bolsa em razão da pandemia da COVID-19, este fato foi levado em consideração na escolha do primeiro período observado, uma vez que foi possível observar a capacidade de recuperação das empresas frente a grandes crises econômicas e cenários desfavoráveis.

A carteira foi acompanhada durante o ano de 2021 e primeiro trimestre de 2022 com o objetivo de realizar realocações de capital de acordo com as saídas do algoritmo que foi sendo atualizado com dados mais recentes das ações em carteira, sendo possível observar as mudanças nos pesos percentuais de cada ação.

Em março de 2022 obteve-se a última versão da carteira de investimentos, podendo ser comparada com sugestões de investimentos feitas por casas de análise, corretoras e com o método $1/n$, além do índice Ibovespa.

Tabela 6 – Ações selecionadas após comparação da correlação.

N	Ticker
1	SAPR11
2	CSMG3
3	BBSE3
4	BPAC11
5	TAEE11
6	WEGE3
7	ABEV3
8	VIVT3
9	AGRO3
10	PETR4
11	LREN3
12	RADL3
13	MGLU3
14	GGBR4
15	RENT3
16	MRFG3
17	KLBN11
18	MYPK3
19	UNIP6
20	AZUL4

Fonte: elaborado pelo autor.

5.3 DEFINIÇÃO DO PPQ

Primeiramente são definidas as variáveis do problema, dadas pelos pesos percentuais de cada ação, apresentadas pela Tabela 7 e reunidas no vetor \mathbf{w} das variáveis, na Equação (5.3).

Tabela 7 – Comparação dos retornos obtidos em 2021.

Variável	Definição
w_1	Peso percentual do ativo SAPR11
w_2	Peso percentual do ativo CSMG3
w_3	Peso percentual do ativo BBSE3
w_4	Peso percentual do ativo BPAC11
w_5	Peso percentual do ativo TAEE11
w_6	Peso percentual do ativo WEGE3
w_7	Peso percentual do ativo ABEV3
w_8	Peso percentual do ativo VIVT3
w_9	Peso percentual do ativo AGRO3
w_{10}	Peso percentual do ativo PETR4
w_{11}	Peso percentual do ativo LREN3
w_{12}	Peso percentual do ativo RADL3
w_{13}	Peso percentual do ativo MGLU3
w_{14}	Peso percentual do ativo GGBR4
w_{15}	Peso percentual do ativo RENT3
w_{16}	Peso percentual do ativo MRFG3
w_{17}	Peso percentual do ativo KLBN11
w_{18}	Peso percentual do ativo MYPK3
w_{19}	Peso percentual do ativo UNIP6
w_{20}	Peso percentual do ativo AZUL4

Fonte: elaborado pelo autor.

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{20} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Através do Libreoffice Calc, calculou-se a matriz de semicovariância entre os 20

ativos, com base no ano de 2020 e que está apresentada na Equação (5.4).

$$\Omega = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,6 & 1,3 & 0,3 & 0,6 & 0,6 & 0,1 & 0,2 & 1,2 & 1 & 0,5 & 0,6 & 1 & 1,2 & 0,8 & 0,4 & 1,1 & 0,3 & 1,5 \\ 0,9 & 1,1 & 0,6 & 1,4 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 0,2 & 0,2 & 1,3 & 1 & 0,5 & 0,7 & 1,2 & 1,3 & 0,7 & 0,5 & 1,3 & 0,4 & 1,8 \\ 0,6 & 0,6 & 0,5 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,4 & 0,1 & 0,1 & 1 & 0,8 & 0,3 & 0,5 & 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,4 & 0,8 & 0,3 & 1,3 \\ 1,3 & 1,4 & 1 & 2,3 & 0,6 & 1 & 1 & 0,2 & 0,3 & 2,1 & 1,7 & 0,7 & 1,1 & 1,8 & 2,1 & 1,2 & 0,8 & 1,9 & 0,6 & 2,8 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,1 & 0,6 & 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0,6 & 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,6 & 0,4 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0,1 & 0,8 & 0,7 & 0,3 & 0,4 & 0,7 & 0,9 & 0,5 & 0,3 & 0,8 & 0,2 & 1,1 \\ 0,6 & 0,8 & 0,4 & 1 & 0,3 & 0,4 & 0,7 & 0,2 & 0,2 & 0,9 & 0,7 & 0,4 & 0,5 & 0,8 & 0,9 & 0,4 & 0,4 & 0,9 & 0,5 & 1,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 1,2 & 1,3 & 1 & 2,1 & 0,6 & 0,8 & 0,9 & 0,2 & 0,3 & 1,9 & 1,5 & 0,6 & 1 & 1,7 & 1,8 & 1,1 & 0,8 & 1,7 & 0,7 & 2,5 \\ 1 & 1 & 0,8 & 1,7 & 0,5 & 0,7 & 0,7 & 0,1 & 0,2 & 1,5 & 1,3 & 0,5 & 0,8 & 1,3 & 1,5 & 1 & 0,6 & 1,3 & 0,5 & 2 \\ 0,5 & 0,5 & 0,3 & 0,7 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,6 & 0,5 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,7 & 0,3 & 0,2 & 0,7 & 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,7 & 0,5 & 1,1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,1 & 0,2 & 1 & 0,8 & 0,3 & 0,5 & 0,9 & 0,9 & 0,6 & 0,4 & 0,9 & 0,4 & 1,3 \\ 1 & 1,2 & 0,8 & 1,8 & 0,5 & 0,7 & 0,8 & 0,1 & 0,3 & 1,7 & 1,3 & 0,5 & 0,9 & 1,6 & 1,7 & 0,9 & 0,7 & 1,5 & 0,6 & 2,4 \\ 1,2 & 1,3 & 0,9 & 2,1 & 0,6 & 0,9 & 0,9 & 0,1 & 0,3 & 1,8 & 1,5 & 0,7 & 0,9 & 1,7 & 1,9 & 1 & 0,7 & 1,7 & 0,5 & 2,5 \\ 0,8 & 0,7 & 0,6 & 1,2 & 0,3 & 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0,1 & 1,1 & 1 & 0,3 & 0,6 & 0,9 & 1 & 0,9 & 0,5 & 0,9 & 0,3 & 1,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 & 0,8 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,8 & 0,6 & 0,2 & 0,4 & 0,7 & 0,7 & 0,5 & 0,3 & 0,6 & 0,3 & 1 \\ 1,1 & 1,3 & 0,8 & 1,9 & 0,5 & 0,8 & 0,9 & 0,1 & 0,3 & 1,7 & 1,3 & 0,7 & 0,9 & 1,5 & 1,7 & 0,9 & 0,6 & 1,6 & 0,6 & 2,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,7 & 0,5 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,5 & 0,3 & 0,3 & 0,6 & 0,5 & 0,9 \\ 1,5 & 1,8 & 1,3 & 2,8 & 0,8 & 1,1 & 1,3 & 0,2 & 0,5 & 2,5 & 2 & 0,8 & 1,3 & 2,4 & 2,5 & 1,4 & 1 & 2,3 & 0,9 & 3,9 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

5.3.1 Restrições do problema

Uma das restrições do problema obriga a aplicação de todo o capital do investidor, ou seja,

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{20} = 1.$$

A restrição de não negatividade é definida pela Equação (5.5) e do retorno esperado $\mathbf{r} = 1,53\%$ a.m. definida pela Equação (5.6).

$$I_{20} \mathbf{w} \geq \vec{0}. \quad (5.5)$$

Onde I_{20} é uma matriz identidade de ordem 20.

$$\mathbf{w}^T \mathbf{r} = \mu \Rightarrow [w_1, w_2, \dots, w_{20}] \begin{bmatrix} -0,02 \\ -0,002 \\ -0,005 \\ 0,052 \\ 0,014 \\ 0,077 \\ -0,006 \\ 0,003 \\ 0,03 \\ 0,016 \\ -0,01 \\ 0,014 \\ 0,074 \\ 0,033 \\ 0,054 \\ 0,047 \\ 0,036 \\ -0,016 \\ 0,044 \\ 0,019 \end{bmatrix} = 1,53\%. \quad (5.6)$$

Mais uma restrição foi aplicada, reduzindo a alocação máxima em cada ativo. Essa medida foi tomada em razão do risco que a alta exposição a um único ativo pode causar para a carteira e conseqüentemente ao capital investido. Ao considerar o número de 20 ativos em carteira, optou-se a alocação máxima de 10% em cada ativo, ou seja, ao menos 10 ativos estariam representados ao final da otimização. Em um dos períodos este valor aumentou para 18%, uma vez que nenhuma solução factível foi encontrada pelo algoritmo utilizado atribuindo peso menor às ações em razão da forte queda das cotações no semestre anterior, não sendo possível atingir o retorno esperado. A Equação (5.7) mostra a restrição aplicada, onde I_{20} é a matriz identidade de ordem 20.

$$I_{20} \mathbf{w} \leq \underbrace{(10\%, 10\%, \dots, 10\%)^T}_{20 \times}. \quad (5.7)$$

Após a definição das restrições e da função objetivo, tem-se o seguinte problema, que atende a forma padrão do algoritmo `cvxopt.solvers.qp` (Equação (5.2)):

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} \\ \text{Sujeito a } & \mathbf{w}^T \mathbf{r} = 0,0153 \\ & \mathbf{w}^T \vec{1} = 1 \\ & -I_{20} \mathbf{w} \leq \vec{0} \\ & I_{20} \mathbf{w} \leq \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ \vdots \\ 0,1 \end{bmatrix} \\ & \vec{1} = (1, 1, \dots, 1) \end{aligned} \tag{5.8}$$

No Capítulo 6 serão discutidos os resultados obtidos através da aplicação realizada.

6 RESULTADOS

Através do estudo sobre programação linear e quadrática e da diversificação proposta por Markowitz, buscou-se formar uma carteira de ações cujo risco fosse minimizado através da baixa correlação entre os ativos e da programação quadrática.

Um investidor tem como principal objetivo obter maior retorno expondo-se ao menor risco possível. Como o problema de programação quadrática elaborado neste trabalho objetiva minimizar a semivariância da carteira, o retorno esperado deve ser baseado na média dos ganhos passados, ou seja, não há garantias de que o cenário será repetido no período que se segue.

6.1 MÉTRICA ADOTADA

Para possibilitar comparação e medir a eficácia do método de otimização, utilizou-se o retorno real obtido e a volatilidade no período de aplicação.

A carteira otimizada foi comparada com carteiras recomendadas com melhor desempenho no período, método $1/n$ e o índice Ibovespa (IBOV), que é constituído pelas empresas de maior volume negociado na bolsa brasileira.

O objetivo de minimizar o risco significa ter menor volatilidade negativa em períodos de queda da bolsa e obter bons ganhos em períodos de alta. A efetividade do método utilizado será medida a partir de comparações com o índice de maior peso na bolsa brasileira e carteiras construídas a partir de óticas muitas vezes diferentes das vistas neste trabalho, sendo enviesadas por outras teorias e análises.

6.2 DESEMPENHO DO ALGORITMO UTILIZADO

Para a resolução dos problemas de programação quadrática modelados para cada um dos períodos de interesse, foi utilizado um *notebook* com processador ®Intel Core i3, com sistema operacional Linux Mint 19. Optou-se pela plataforma *jupyter notebook* para escrita e edição do algoritmo em linguagem Python versão 3.6.

Um problema formulado com 20 variáveis exige um algoritmo robusto para que seja possível a determinação de uma solução ótima. O algoritmo `cvxopt.solvers.qp` foi executado por 3 vezes, sendo duas para o ano de 2021 e uma para o ano de 2022. Os tempos de processamento do algoritmo foram registrados pelo pacote `time`, do Python e estão registrados na Tabela 8, bem como o número de iterações realizadas pelo algoritmo até encontrar a solução ótima.

Tabela 8 – Tempo de processamento do algoritmo `cvxopt.solvers.qp`.

Período de observação do PPQ	Tempo de processamento	Iterações
2021 – 1º semestre	$8,93 \times 10^{-3}$ s	7
2021 – 2º semestre	$8,67 \times 10^{-3}$ s	7
2022 – 1º semestre	$9,41 \times 10^{-3}$ s	10

Fonte: elaborado pelo autor.

O algoritmo utilizado recorre à linearização da função objetivo para determinar o ponto ótimo da região factível e, como o problema apresentado incluía 20 variáveis, a obtenção de uma solução ótima após 7 iterações pode ser considerada uma solução rápida.

Pode-se observar na Tabela 8 que para o 1º trimestre de 2022 o método necessitou de mais iterações para obter a solução ótima. Esta ocorrência deve-se ao fato de que os dados estavam distribuídos de tal forma que foi mais difícil encontrar soluções factíveis. Ao refletir sobre essa diferença, é possível observar que durante o segundo semestre de 2021, período durante o qual foram colhidos os dados para montagem da carteira de 2022, grande parte dos ativos da bolsa brasileira apresentou queda em suas cotações, como mostra a Figura 25. A elipse em destaque evidencia um movimento de queda nas cotações representadas pela linha azul.

Figura 25 – Gráfico do Ibovespa entre 2018 e 2022.



Fonte: *Tradingview*, disponível em: <https://br.tradingview.com/chart/gFYK7hTQ/?symbol=BMFBOVESPA%3AIBOV>.

Esse movimento de baixa fez com que os dados gerados para retorno médio fossem em maior parte negativos, tornando maior o risco da carteira e mais morosa a determinação de uma solução cuja restrição de retorno esperado e peso máximo por ação fossem atendidas.

Ainda que exista essa diferença no número de iterações, não foi observada maior assimetria no tempo de processamento do algoritmo, o que significa que para problemas

desta magnitude o algoritmo utilizado é suficientemente capaz de determinar a solução ótima em pouco tempo.

Através dos resultados obtidos pelo algoritmo utilizado, é possível realizar a otimização sem muitos recursos, desde que se tenha computador e internet. A próxima seção traz os resultados numéricos obtidos através da otimização quadrática.

6.2.1 Carteira otimizada – 2021

Após um movimento crítico do mercado de ações em março de 2020, em decorrência da pandemia de COVID-19, muitos investidores venderam suas ações, derrubando o preço de quase todos os ativos de renda variável disponíveis na B3. Esse momento de desespero dos investidores foi convertido em euforia no segundo semestre de 2020, principalmente pela divulgação sobre avanço de pesquisas que buscaram a criação de uma vacina contra a doença.

A esperança de que a economia logo voltaria a crescer e que os preços das ações estavam baixos demais em relação ao potencial das empresas fez com que muitos investidores injetassem dinheiro na bolsa, causando alta nos papéis até Junho de 2021. Neste momento, a taxa básica de juros (Selic) alcançava mínimas históricas, chegando a 2% a.a. em Março e os olhos dos pequenos investidores também se voltaram para a bolsa. Ativos como MGLU3, WEGE3, PETR4, VALE3 tiveram uma super valorização até este período.

Já no segundo semestre de 2021, a alta da inflação que passou de 10% a.a. fez com que o Comitê de Política Monetária (COPOM) do Banco Central aumentasse a taxa de juros, chegando a 7% a.a. em Dezembro. Esse cenário fez com que a bolsa brasileira sofresse com uma queda durante todo o segundo semestre de 2021.

Neste ano foram formadas duas carteiras de investimento, uma considerando o período de 2020 e sendo observada entre Janeiro e Junho de 2021 e outra considerando o período de observação da carteira anterior e sendo acompanhada entre Julho e Dezembro do mesmo ano.

Através do pacote `cvxopt` e da ferramenta `cvxopt.solvers.qp`, que otimiza problemas de programação quadrática, foi possível escolher 11 ações dentre as 20 iniciais, com um retorno esperado de 1,53% a.m. e risco esperado de 0,15%. As 11 ações selecionadas, bem como o peso percentual de cada uma estão apresentados na Tabela 9.

Como o retorno esperado foi calculado ao mês, considerando 6 meses tem-se:

$$(1 + 0,0153)^6 - 1 = 0,0954 = 9,54\%.$$

A Tabela 10 mostra a comparação entre retorno e risco esperados e obtidos.

No segundo semestre de 2021, o retorno esperado foi o mesmo, 9,54% e o risco de 2,89%. A Tabela 11 mostra as 12 ações selecionadas através do algoritmo `cvxopt`.

A Tabela 12 mostra a comparação entre retorno e risco esperados e obtidos no segundo semestre de 2021.

Tabela 9 – 11 ações selecionadas pelo algoritmo `cvxopt.solvers.qp` para o primeiro semestre de 2021.

Ticker	Peso na carteira
SAPR11	10%
CSMG3	4%
BBSE3	10%
TAEE11	10%
WEGE3	6%
ABEV3	10%
VIVT3	10%
AGRO3	10%
RADL3	10%
KLBN11	10%
UNIP6	10%
Total	100%

Fonte: compilação do autor.

Tabela 10 – Retorno e risco esperado *versus* real após primeiro semestre de 2021.

Retorno Esperado	Retorno obtido	Risco esperado	Risco real
9,54%	7,98	0,15%	1,48%

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 11 – 12 ações selecionadas pelo algoritmo `cvxopt.solvers.qp` para o segundo semestre de 2021.

Ticker	Peso na carteira
BPAC11	10%
TAEE11	10%
WEGE3	10%
ABEV3	7%
VIVT3	10%
MGLU3	3%
GGBR4	8%
RENT3	10%
MRFG3	10%
KLBN11	10%
UNIP6	2%
AZUL4	10%
Total	100%

Fonte: elaborado pelo autor.

Em 2021, a carteira recomendada com maior rentabilidade foi a Quantitas, gestora de recursos brasileira (ALMEIDA, 2022). O retorno alcançado foi de 10,31% contra uma queda de 11,92% do Ibovespa.

Como a carteira aqui proposta foi modificada a cada semestre, o retorno total da

Tabela 12 – Retorno e risco esperado *versus* real após segundo semestre de 2021.

Retorno Esperado	Retorno obtido	Risco esperado	Risco real
9,54%	-9,17%	0,03%	3,27%

Fonte: elaborado pelo autor.

carteira em 2021 foi de:

$$\begin{aligned}
 & [(1 + 0,0798) \times (1 - 0,0917)] - 1 \\
 & = (1,0798 \times 0,9083) - 1 \\
 & = 0,9808 - 1 \\
 & = -1,92\%.
 \end{aligned}$$

Isto significa que houve prejuízo no ano de 2021 e esta perda está relacionada à forte queda da bolsa no segundo semestre de 2021.

A Tabela 13 traz uma comparação entre o retorno da carteira recomendada da Quantitas, Ibovespa, método $1/n$ e carteira otimizada.

Tabela 13 – Comparação dos retornos obtidos em 2021.

Carteira otimizada	Método $1/n$	Ibovespa	Quantitas
-1,92%	-3,57%	-11,92%	10,31%

Fonte: elaborado pelo autor.

Uma terceira carteira foi construída para o ano de 2022, considerando o segundo semestre de 2021.

6.2.2 Carteira otimizada – 2022 e análise de resultados

Foram selecionadas 6 ações pelo algoritmo utilizado. Os pesos e as ações estão apresentados na Tabela 14.

A Tabela 15 mostra a comparação entre retorno e risco esperados e obtidos nos três primeiros meses de 2022 e a Tabela 16 traz uma comparação entre o retorno da carteira otimizada, do Ibovespa, do método $1/n$ e da carteira recomendada da Ágora, que liderava o *ranking* de carteiras recomendadas em março de 2022 (MAMONA; ALMEIDA, 2022).

Considerando todo o período, o retorno esperado foi de 25,6% e o retorno real foi de 7,98%, 70% abaixo do esperado. Este resultado enfatiza a destreza, experiência e sensibilidade de mercado que o investidor precisa ter para alcançar resultados sólidos ao longo dos anos, como Warren Buffet.

Já em comparação com o método $1/n$, que dividiria a carteira em pesos iguais para cada ação, a carteira otimizada alcançou um resultado 153% melhor, obtendo retorno maior que o dobro dos 3,6% obtidos pelo método $1/n$.

Tabela 14 – 6 ações selecionadas pelo algoritmo `cvxopt.solvers.qp` para o ano de 2022.

Ticker	Peso na carteira
TAEE11	18 %
VIVT3	18 %
PETR4	13 %
GGBR4	18 %
MRFG3	18 %
UNIP6	15 %
Total	100 %

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 15 – Retorno e risco esperado *versus* real após os três primeiros meses de 2022.

Retorno Esperado	Retorno obtido	Risco esperado	Risco real
4,66%	10,10%	0,15%	0,28%

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 16 – Comparação dos retornos obtidos em 2022.

Carteira otimizada	Método $1/n$	Ibovespa	Ágora
10,10%	6,77%	14,47%	11%

Fonte: elaborado pelo autor.

A carteira otimizada neste trabalho ainda obteve um desempenho quase 10 vezes acima do índice Ibovespa, que acumulou alta de 0,8% no período estudado.

As carteiras recomendadas que obtiveram melhores desempenhos no período estudado alcançaram resultados mais expressivos que a carteira otimizada. Isso deve-se ao fato de que a análise de correlação e diversificação nos investimentos não representa o todo na construção de carteiras de ações. Outros aspectos como momento do mercado, política interna e externa, juros, inflação, desemprego e uma série de fatores são considerados pelas corretoras e especialistas na escolha de ativos.

O período de revisão da carteira também é um fator importante. Algumas ações, como a Sanepar (SAPR11) mostraram sinais gráficos de que uma tendência de queda estava se iniciando nos primeiros meses de 2021, o que não é observado pelo problema de programação quadrática, mas através do cálculo de médias móveis. A Figura 26 mostra que no ponto *A* a média de 9 períodos cruzou a de 72 períodos para cima, indicando compra, mas no ponto *B* cruzou para baixo, indicando venda logo no segundo mês de 2021. Ao longo do primeiro semestre, a ação caiu 20,1% e representava 10% da carteira, ou seja, resultou em queda de 2% do capital investido.

Figura 26 – Gráfico de variação da cotação da ação SAPR11.



Fonte: *Tradingview*, disponível em: <https://br.tradingview.com/chart/gFYK7hTQ/?symbol=BMFBOVESPA%3AIBOV>.

A leitura gráfica, portanto, poderia ser um aliado da estratégia adotada, identificando pontos de compra e venda de ações. Vale lembrar que as carteiras recomendadas são modificadas a cada mês, o que permite uma leitura mais recente do cenário da economia.

O Capítulo 7 traz as considerações finais sobre o presente trabalho.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se para alguns a bolsa de valores é loteria e para outros é cemitério de espertalhões, a história mostra que investir em ações não é trivial, lucrar muitas vezes não é sorte e ter prejuízo pode não significar o fim do mundo.

Este trabalho trouxe um estudo sobre Pesquisa Operacional, em especial Programação Linear, que busca otimizar processos e problemas reais cujos recursos aplicados são escassos e que carecem de atenção ao atribuir destino a cada uma de suas parcelas. Dentre esses recursos está o dinheiro, que sempre foi sinônimo de poder e controle na esfera social e política. Para a sociedade como um todo, saber administrar suas finanças apresenta-se como atividade diária dadas as dificuldades enfrentadas quanto a falta de emprego, inflação e impostos. Para aqueles que tem o privilégio de fazer sobrar algum dinheiro, investir de forma correta parece ser uma solução otimista para o futuro.

Em 2020 a pandemia do novo Coronavírus fez o mundo parar e se reinventar em diferentes aspectos. Muitas pessoas começaram a negociar na bolsa de valores, atraídos pela oportunidade de lucrar bem acima da taxa oferecida pela poupança e outros investimentos de renda fixa. A oportunidade que se apresentou também pode ter sido responsável por grandes frustrações ao aplicar seu dinheiro e vê-lo se diluindo em meio aos bilhões negociados na bolsa.

Conhecer as empresas e saber aportar de forma consciente seu dinheiro pode evitar grandes perdas e gerar bons resultados a longo prazo. Para tanto, Harry Markowitz, economista estadunidense e ganhador do prêmio Nobel de economia desenvolveu um estudo sobre diversificação nos investimentos. Baseando-se em sua Teoria Moderna de Carteiras de Investimento, foram selecionados 35 ativos e desses, 20 foram escolhidos para formulação de um problema de programação quadrática.

O problema definido foi resolvido através de métodos computacionais, desenvolvidos a partir da Programação Linear e Não-Linear, cujo principal método estudado foi o método Simplex, proposto por George Dantzig. Este método é capaz de resolver inúmeros problemas de programação linear, inclusive de grande porte, o que revolucionou a Pesquisa Operacional.

O objetivo principal da otimização foi de minimizar o risco da carteira, definido por uma função quadrática e que se baseia no *Downside Risk*, presente na Teoria Pós Moderna de Portfolio, de Markowitz. O *Downside Risk* considera apenas as quedas na cotação de um ativo como risco e as variações positivas são tidas como incertezas.

Através do pacote `cvxopt` foi possível a formação de três carteiras para acompanhamento de três períodos diferentes após a principal queda da bolsa brasileira, em 2020. A carteira otimizada apresentou resultados satisfatórios quanto a volatilidade e

ao retorno, superando o índice Ibovespa e o método $1/n$ que distribui uniformemente o capital entre as ações escolhidas.

Os desempenhos das carteiras recomendadas pela gestora Quantitas em 2021 e pela corretora Ágora em 2022 foram superiores ao da carteira otimizada neste trabalho. A diferença nos rendimentos ocorre em razão do cenário de grande incerteza que o mercado de ações vem submetendo-se, deixando a análise para seleção de empresas cada vez mais complexa. Sabe-se que investimentos em renda variável acarretam em riscos ao capital investido e este risco cresce em períodos de recessão da economia, recebendo o nome de risco sistêmico ou não-diversificável. A queda do índice Ibovespa é um sinal relevante para notar que todo o sistema de ações vem sofrendo com quedas nas cotações após o ápice da crise da COVID-19.

Os métodos numéricos de análise e formação de carteiras de investimentos apresentam-se como importantes aliados na mitigação do risco diversificável. A busca por indicadores econômicos auxiliam na escolha mais apurada dos ativos que comporão uma seleção de investimentos e a partir do estudo de correlação entre essas empresas, a carteira estará apta para a otimização seguindo critérios como retorno desejado e peso máximo dentro do portfólio.

Além disso, a otimização proposta neste trabalho pode aplicar-se a investidores de diferentes perfis de risco. Um investidor conservador aceitará um retorno mais modesto em troca da redução do risco da carteira, enquanto um investidor moderado poderá expor-se mais para buscar melhores retornos e um investidor arrojado poderá expor-se mais a determinados ativos, ou seja, poderá atribuir peso maior que 10% para cada ativo.

Chama atenção o resultado obtido pela carteira frente ao referencial do índice Ibovespa, especialmente por retratar a capacidade de suportar momentos de baixa na bolsa brasileira e por conta disso, não ser necessárias grandes recuperações para atingir patamares anteriores. Utilizando o método proposto neste trabalho, um investidor necessitaria de poucas horas a cada semestre para monitorar a carteira de investimentos e realizar decisões a partir do cenário que se mostrar favorável.

Este trabalho poderá ser aproveitado como uma proposta de ensino para disciplinas de nível superior em cursos como engenharias, economia, administração e matemática. A aplicação da Programação Linear em investimentos pode ser uma forte ferramenta para despertar o interesse em seu estudo e possível crescimento da comunidade científica em torno do assunto.

Trabalhos futuros poderão dedicar-se a estudos sobre métodos gráficos como o cruzamento de médias móveis de diferentes períodos para definição de momentos de compra e venda de ações. Esta ferramenta seria utilizada neste trabalho, porém fugiu do escopo. Apesar disto, mostra-se como um ponto de melhoria da proposta apresentada. Sua utilização poderá enriquecer a metodologia em busca de resultados superiores aos apresentados aqui. Outros trabalhos poderão realizar o acompanhamento mensal da

realocação da carteira, mitigando ainda mais os riscos atrelados, pois no período que compreendeu o ano de 2022, a carteira foi observada durante 3 meses e conseguiu um resultado superior a períodos maiores. Um número maior de realocações de capital considerando a otimização pelo modelo *Downside Risk* poderá apurar ainda mais os resultados alcançados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Marília. **A estratégia da Quantitas, carteira líder em retorno na EXAME em 2021**. 2022. Disponível em: <<https://exame.com/invest/mercados/a-estrategia-da-quantitas-carreira-com-maior-retorno-na-exame-invest/>>. Acesso em: 14 jun. 2022. Citado na p. 79.
- ALVES, Delmário Prates. A Estatística como auxílio na seleção de carteiras de investimento: uma aplicação por meio do modelo de Markowitz, 2020. Citado na p. 46.
- ARENALES, Marcos et al. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011. Citado nas pp. 16, 17, 19, 20, 22–25, 28, 37.
- BARANKIN, E. W.; DORFMAN, R. On quadratic programming. **University of California Press**, 1958. Citado na p. 44.
- BAZARAA, Mokhtar S; JARVIS, John J; SHERALI, Hanis D. **Linear programming and network flows**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado nas pp. 18, 27.
- BBC. **As 14 recessões dos últimos 150 anos: e por que a do coronavírus deve ser a 4ª pior**. 2020. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/internacional-53239921>>. Acesso em: 19 abr. 2022. Citado na p. 63.
- BEALE, Evelyn ML. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, Wiley Online Library, v. 17, n. 2, p. 173–184, 1955. Citado na p. 44.
- BOYD, Stephen; BOYD, Stephen P; VANDENBERGHE, Lieven. **Convex optimization**. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado nas pp. 44, 66.
- BRASIL. **Taxas de juros básicas – Histórico**. 2022. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicotaxasjuros>>. Acesso em: 21 jun. 2022. Citado na p. 65.
- BRASIL BOLSA BALCÃO, B3. **B3 aciona circuit breaker**. 2020. Disponível em: <https://www.b3.com.br/pt_br/noticias/circuit-breaker.htm>. Acesso em: 21 abr. 2022. Citado na p. 64.
- _____. **Perfil pessoas físicas**. 2022. Disponível em: <https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/perfil-pessoas-fisicas/genero/>. Acesso em: 21 abr. 2022. Citado na p. 65.

- BRITO NETO, Christóvão Thiago; VOLKMER, João Felipe. As carteiras de investimento e a semivariância. **Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção–Enegep**, v. 21, 2001. Citado na p. 49.
- CASTRO, Lucas Ferreira de. Estratégia de composição de carreira ótima de fundos de investimento para os regimes próprios de previdência social com base na seleção de portfólio de Markowitz, 2014. Citado na p. 46.
- CAVALCANTE, Daniel Menezes. Carteiras de mínima variância: comparação intertemporal com índices de mercado, 2013. Citado na p. 46.
- DIEGO, UC San. **Harry Markowitz**. 2022. Disponível em: <<https://rady.ucsd.edu/people/faculty/markowitz/>>. Acesso em: 17 mar. 2022. Citado nas pp. 45, 46.
- ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS, Associação das. **O que é liquidez?** 2022. Disponível em: <<https://comoinvestir.anbima.com.br/escolha/compreensao-de-conceitos/o-que-e-liquidez-2/>>. Acesso em: 9 fev. 2022. Citado na p. 20.
- ESTRADA, Javier. Mean-semivariance optimization: A heuristic approach. **Journal of Applied Finance (Formerly Financial Practice and Education)**, v. 18, n. 1, 2008. Citado nas pp. 59, 60.
- FORSGREN, Anders; GILL, Philip E; WONG, Elizabeth. Primal and dual active-set methods for convex quadratic programming. eng. **Mathematical programming**, Springer Berlin Heidelberg, Berlin/Heidelberg, v. 159, n. 1-2, p. 469–508, 2015. ISSN 0025-5610. Citado na p. 43.
- GOLDFARB, Donald; IDNANI, Ashok. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. **Mathematical programming**, Springer, v. 27, n. 1, p. 1–33, 1983. Citado nas pp. 43, 44.
- GONÇALVES JR, Cleber; PAMPLONA, Edson de O.; MONTEVECHI, José A. Seleção de Carteiras Através do Modelo de Markowitz para Pequenos Investidores (Com o Uso de Planilhas Eletrônicas). **IX Simpep**, 2002. Citado na p. 57.
- HAGSTROM, Robert G. **The Warren Buffett Way**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado na p. 66.
- HIEDA, Akinori; ODA, André Luiz. Um estudo sobre a utilização de dados históricos no modelo de Markowitz aplicado a Bolsa de Valores de São Paulo. **Seminários de Administração**, v. 3, p. 1998, 1998. Citado nas pp. 55, 57, 58.
- HILDRETH, Clifford. A quadratic programming procedure. **Naval research logistics quarterly**, Wiley Online Library, v. 4, n. 1, p. 79–85, 1957. Citado na p. 44.

- IÓRIO, Fabio Roberto et al. Análise do desempenho de carteiras de fundos de investimento imobiliário negociados na BM&FBOVESPA entre 2011 e 2013. FECAP-Faculdade Escola de Comércio Álvares Penteado, 2014. Citado na p. 46.
- KARMAKAR, Narendra. A new polynomial-time algorithm for linear programming. **Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing**, p. 302–311, 1984. Citado na p. 18.
- KAUPA, Paulo Henrique et al. Aplicação de técnicas da inteligência artificial na seleção de ações para investimento na bolsa de valores de São Paulo. Universidade Nove de Julho, 2013. Citado na p. 46.
- KHACHIYAN, Leonid Genrikhovich. A polynomial algorithm in linear programming. **Doklady Akademii Nauk**, v. 244, n. 5, p. 1093–1096, 1979. Citado na p. 18.
- KWONG, Wu Hong. **Programação linear: uma abordagem prática**. [S.l.]: EdUFSCar, 2013. Citado na p. 29.
- LEITE, Carlos Henrique Lopes. **Rentabilidade do índice de Fundos de Investimento Imobiliários: uma análise da correlação com os mercados de ações e a taxa de juros**. 2021. Tese (Doutorado). Citado na p. 46.
- LEVY, Dawn. **George B. Dantzig, operations research professor, dies at 90**. 2005. Disponível em: <<https://news.stanford.edu/news/2005/may25/dantzigobit-052505.html>>. Acesso em: 4 jan. 2022. Citado na p. 18.
- LUENBERGER, David G; YE, Yinyu. **Linear and nonlinear programming**. [S.l.]: Springer, 1984. v. 2. Citado nas pp. 18, 24, 28, 33, 39, 42, 43.
- MACOLA, Alinne Costa. **FUNPRESP - EXE x CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS DIVERSIFICADAS: UMA ANÁLISE ECONÔMICA COMO INSTRUMENTO AUXILIAR DOS SERVIDORES PÚBLICOS FEDERAIS EFETIVOS DO PODER EXECUTIVO NO PROCESSO DE ADESÃO À RENDA DE APOSENTADORIA**. 2021. Diss. (Mestrado) – UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ. Citado na p. 46.
- MAMONA, Karla; ALMEIDA, Marília. **As ações mais recomendadas para abril, segundo 14 corretoras**. 2022. Disponível em: <<https://exame.com/invest/onde-investir/coes-recomendadas-abril-14-corretoras/>>. Acesso em: 15 jun. 2022. Citado na p. 80.
- MARKOWITZ, Harry M. The Early History of Portfolio Theory: 1600–1960. **Financial Analysts Journal**, Routledge, v. 55, n. 4, p. 5–16, 1999. DOI: 10.2469/faj.v55.n4.2281. eprint: <https://doi.org/10.2469/faj.v55.n4.2281>. Disponível em: <<https://doi.org/10.2469/faj.v55.n4.2281>>. Citado na p. 44.

- MIRANDA, Patrik Borges de et al. **Estratégias de gestão de carteiras de investimentos no mercado brasileiro**. 2021. Diss. (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Citado na p. 46.
- MOURA, Alexsandro Pinheiro de et al. Comparativo entre os Métodos Numéricos de Gauss-Jordan e eliminação de Gauss. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, 2020. Citado na p. 31.
- OLIVEIRA, Aurélio Ribeiro L. de; FILHO, Christiano Lyra. Implementação de um método de pontos interiores para programação linear. **SBA: controle & automação**, 1991. Citado na p. 18.
- OPAS. **Histórico da pandemia de COVID-19**. 2020. Disponível em: <<https://www.paho.org/pt/covid19/historico-da-pandemia-covid-19>>. Acesso em: 21 abr. 2022. Citado na p. 63.
- PESQUISA OPERACIONAL, Sociedade Brasileira de. **SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. 2021. Disponível em: <<https://www.sobrapo.org.br/sbpo-simposio-brasileiro-de-pesquisa-operacional>>. Acesso em: 22 fev. 2022. Citado na p. 17.
- PINTO, Leonardo. **Análise fundamentalista x análise técnica**: entenda as diferenças entre os métodos para investir na Bolsa. 2020. Disponível em: <<https://rady.ucsd.edu/people/faculty/markowitz/https://conteudos.xpi.com.br/aprenda-a-investir/relatorios/analise-fundamentalista-x-analise-tecnica-entenda-diferencas/>>. Acesso em: 29 mar. 2022. Citado na p. 52.
- SIERVO, Juliano Squarson Di. Aplicação de programação linear na seleção de carteiras de investimento. Universidade Federal de São Carlos, 2017. Citado na p. 46.
- SILVA, Rodrigo Borsatto Sommer da. Abordagem histórica da Bolsa de Valores. **Maiêutica-Estudos Contemporâneos em Gestão Organizacional**, v. 4, n. 1, 2016. Citado nas pp. 46, 50.
- TOBIN, James. Liquidity preference as behavior towards risk. **The review of economic studies**, JSTOR, v. 25, n. 2, p. 65–86, 1958. Citado na p. 56.
- VALVERDE, Catarina Salomé Dias. **Otimização de uma carteira internacional com base na semi-variância**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de Lisboa. Citado nas pp. 49, 59.
- VAN DE PANNE, Cornelis; WHINSTON, Andrew. The simplex and the dual method for quadratic programming. **Journal of the Operational Research Society**, Springer, v. 15, n. 4, p. 355–388, 1964. Citado na p. 43.
- VANDENBERGHE, Lieven. The CVXOPT linear and quadratic cone program solvers. **Online: <http://cvxopt.org/documentation/coneprog.pdf>**, 2010. Citado na p. 66.

WOLFE, Philip. The simplex method for quadratic programming. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 382–398, 1959. Citado na p. 44.

ANEXO A – LINHAS DE PROGRAMAÇÃO EM PYTHON

Neste anexo são apresentados os programas executados em Python para otimização das carteiras de investimento estudadas durante o trabalho. Foram usados 3 programas para atender a períodos distintos de observação. Todos seguem o mesmo raciocínio, porém com dados diferentes.

Carteira Otimizada 2021-1

June 17, 2022

```
In [1]: #Importando pacotes
import cvxopt as co
import numpy as np
import time

In [2]: #Forma matricial padrão
#minimize (1/2)*x'*P*x + q'*x
#subject to G*x <= h
#          A*x = b.

In [3]: #Matriz 20x20 de semi-covariância
P = co.matrix(np.array([[0.00900127100370371,0.00924840916666667,0.00601004666666667,0
[0.00924840916666667,0.01079436,0.00633158083333334,0.01448269
[0.00601004666666667,0.00633158083333334,0.0051017,0.010380676
[0.0134172983333333,0.0144826958333333,0.0103806766666667,0.02
[0.00338951166666667,0.00377284916666667,0.00271763083333333,0
[0.00583365438888889,0.0059887975,0.0041279325,0.009593815,0.0
[0.005857285,0.007692915,0.00427407833333333,0.009862291666666
[0.00139795166666667,0.00173675583333333,0.000973423333333334,
[0.00169137333333333,0.002161765,0.00142998833333333,0.0031321
[0.01160436,0.01272108166666667,0.0095219125,0.020793613333333
[0.00959773166666667,0.01044301,0.00765685916666667,0.01690027
[0.005004435,0.00545521333333333,0.00308624666666667,0.0073795
[0.00588688711111111,0.0065910675,0.00474043333333333,0.010765
[0.00984853,0.0115582783333333,0.00788207333333333,0.018440526
[0.0118473675,0.0129907283333333,0.00889378083333333,0.0207349
[0.00754669833333334,0.00748672083333334,0.00603848,0.01243981
[0.00443598416666667,0.00495269666666667,0.00380811666666667,0
[0.01120367916666667,0.01281442666666667,0.00829395833333333,0.0
[0.00291055833333333,0.00431037166666667,0.0033068975,0.006469
[0.01514350666666667,0.01793209166666667,0.0126821208333333,0.02
]),tc = "d")

In [4]: #parte linear da equação objetivo (zerada)
q = co.matrix(np.zeros([20,1]), tc="d")

In [5]: #Retorno médio mensal
retorno = np.array([[ -0.0202477777777778,-0.00188333333333334,-0.00514166666666667,0.01
```

```

In [6]: #Restrições de não negatividade
        nao_neg = np.identity(20)
        peso_max = -1*np.identity(20)

In [7]: G = -1*co.matrix(np.concatenate((nao_neg,peso_max),axis=0), tc="d")

In [8]: #vetor nulo para não negatividade
        zeros = np.zeros([40,1])
        for n in range(20,40):
            zeros[n,0] = 0.1
        h = co.matrix(zeros, tc="d")

In [9]: #matriz A contendo coeficientes para restrição de
        #uso total do capital e retorno esperado.
        uns = np.ones([1,20])
        A = co.matrix(np.concatenate((uns,retorno), axis=0), tc="d")

In [10]: #vetor com 100% do capital aplicado e retorno esperado.
        b = co.matrix(np.array([[1],[0.0153]]), tc="d")

In [11]: #solver
        inicio = time.time()
        sol = co.solvers.qp(P,q,G,h,A,b)
        fim = time.time()
        print("Risco da carteira: ",round((100*sol["primal objective"]),2),"%")
        print("Tempo de execução: ", round((fim - inicio),2),"s")

        pcost      dcost      gap      pres      dres
0:  3.6071e-03  -2.0380e+00  2e+00  1e-17  4e-16
1:  3.5942e-03  -2.4716e-02  3e-02  7e-17  7e-16
2:  2.9416e-03  -9.4678e-04  4e-03  6e-17  1e-16
3:  1.7832e-03  1.2339e-03  5e-04  6e-17  5e-18
4:  1.5253e-03  1.4233e-03  1e-04  6e-17  5e-18
5:  1.4859e-03  1.4687e-03  2e-05  2e-16  3e-18
6:  1.4769e-03  1.4762e-03  6e-07  2e-16  4e-18
7:  1.4765e-03  1.4765e-03  2e-08  1e-16  4e-18

Optimal solution found.
Risco da carteira:  0.15 %
Tempo de execução:  0.15 s

In [12]: tickers = list(["SAPR11","CSMG3","BBSE3","BPAC11","TAE11",
                        "WEGE3","ABEV3","VIVT3","AGRO3","PETR4",
                        "LREN3","RADL3","MGLU3","GGBR4","RENT3",
                        "MRFG3","KLB11","MYPK3","UNIP6","AZUL4"])

        for i in range(0,20):
            if sol["x"][i]>0.01:
                print(tickers[i], round(100*sol["x"][i],0),"%"),
            else:
                print(tickers[i],"0%")

```

SAPR11 10.0 %
CSMG3 4.0 %
BBSE3 10.0 %
BPAC11 0%
TAEE11 10.0 %
WEGE3 6.0 %
ABEV3 10.0 %
VIVT3 10.0 %
AGRO3 10.0 %
PETR4 0%
LREN3 0%
RADL3 10.0 %
MGLU3 0%
GGBR4 0%
RENT3 0%
MRFG3 0%
KLBN11 10.0 %
MYPK3 0%
UNIP6 10.0 %
AZUL4 0%


```

In [6]: #Restrições de não negatividade
        nao_neg = np.identity(20)
        peso_max = -1*np.identity(20)

In [7]: G =-1*co.matrix(np.concatenate((nao_neg,peso_max),axis=0), tc="d")

In [8]: #vetor nulo para não negatividade
        zeros = np.zeros([40,1])
        for n in range(20,40):
            zeros[n,0] = 0.1
        h = co.matrix(zeros, tc="d")

In [9]: #matriz A contendo coeficientes para restrição de uso total do capital e retorno esperado
        uns = np.ones([1,20])
        A = co.matrix(np.concatenate((uns,retorno), axis=0), tc="d")

In [10]: #vetor com 100% do capital aplicado e retorno esperado.
        b = co.matrix(np.array([[1],[0.0153]]), tc="d")

In [11]: #solver
        inicio = time.time()
        sol = co.solvers.qp(P,q,G,h,A,b)
        fim = time.time()
        print("Risco da carteira: ",round((100*sol["primal objective"]),2),"%")
        print("Tempo de execução: ", round((fim - inicio),2),"s")

        pcost      dcost      gap      pres      dres
0:  5.9762e-04  -2.0130e+00  2e+00  0e+00  2e-16
1:  5.9731e-04  -2.0596e-02  2e-02  7e-17  9e-16
2:  5.7085e-04  -5.6908e-04  1e-03  5e-17  5e-17
3:  3.7125e-04  2.0911e-04  2e-04  6e-17  3e-18
4:  3.0197e-04  2.7954e-04  2e-05  1e-16  9e-19
5:  2.9133e-04  2.8755e-04  4e-06  2e-16  5e-19
6:  2.8941e-04  2.8891e-04  5e-07  1e-16  6e-19
7:  2.8915e-04  2.8913e-04  1e-08  6e-17  6e-19

Optimal solution found.
Risco da carteira:  0.03 %
Tempo de execução:  0.01 s

In [12]: tickers = list(["SAPR11", "CSMG3", "BBSE3", "BPAC11", "TAEE11",
                        "WEGE3", "ABEV3", "VIVT3", "AGRO3", "PETR4",
                        "LREN3", "RADL3", "MGLU3", "GGBR4", "RENT3",
                        "MRFG3", "KLBN11", "MYPK3", "UNIP6", "AZUL4"])

        for i in range (0,20):
            if sol["x"][i]>0.01:
                print(tickers[i], round(100*sol["x"][i],0),"%"),
            else:
                print(tickers[i], "0%")

```

SAPR11 0%
CSMG3 0%
BBSE3 0%
BPAC11 10.0 %
TAE11 10.0 %
WEGE3 10.0 %
ABEV3 7.0 %
VIVT3 10.0 %
AGRO3 0%
PETR4 0%
LREN3 0%
RADL3 0%
MGLU3 3.0 %
GGBR4 8.0 %
RENT3 10.0 %
MRFG3 10.0 %
KLBN11 10.0 %
MYPK3 0%
UNIP6 1.0 %
AZUL4 10.0 %

Carteira Otimizada 2022

June 17, 2022

```
In [1]: #Importando pacotes
import cvxopt as co
import sympy as sp
import numpy as np
import time
```

```
In [2]: #Forma matricial padrão
#minimize (1/2)*x'*P*x + q'*x
#subject to G*x <= h
#          A*x = b.
```

```
In [3]: #Matriz 20x20 de semi-covariância
```

```
P = co.matrix(np.array([[0.001064105,0.001237453333333333,0.000861566666666667,0.001487096666666667,0.001237453333333333,0.002471281666666667,0.001851866666666667,0.000861566666666667,0.001851866666666667,0.003389516666666667,0.001487096666666667,0.001863095,0.001783851666666667,0.005126816666666667,0.00010538,0.000270916666666667,0.000200333333333333,0.001216666666666667,0.000525666666666667,0.001398753333333333,0.001177286666666667,0.00046509,0.001229621666666667,0.000855403333333333,0.002749616666666667,0.000235143333333333,0.000427298333333333,0.00027788,0.000489166666666667,0.001761555,0.001698953333333333,0.001701835,0.0042056633333333,0.000900226666666667,0.001548583333333333,0.001102983333333333,0.001431061666666667,0.001970075,0.002650061666666667,0.004038816666666667,0.000203205,0.000537521666666667,0.000341586666666667,0.002100166666666667,0.002707046666666667,0.00422975,0.005008876666666667,0.012309281666666667,0.00015852,0.000073216666666667,0.001151265,0.0010277283333333,0.001743843333333333,0.000928111666666667,0.002299361666666667,0.001160293333333333,0.001075866666666667,0.00131614,0.000317166666666667,0.001318135,0.00152558,0.00089131,0.002857855,0.00072618,0.000403295,0.003156213333333333,0.002481238333333333,0.003169016666666667,0.001405058333333333,0.001578451666666667,0.00086135,0.003732191666666667,0.003791605,0.003368526666666667,0.002508743333333333,0.007784016666666667
```

```
),tc = "d")
```

```
In [4]: #parte linear da equação objetivo (zerada)
```

```
q = co.matrix(np.zeros([20,1]), tc="d")
```

```
In [5]: #Retorno médio mensal
```

```
retorno = np.array([-0.0127166666666667,-0.03165,-0.015,-0.0595666666666667,-0.002016666666666667
```

```

In [6]: #Restrições de não negatividade
        nao_neg = np.identity(20)
        peso_max = -1*np.identity(20)

In [7]: G =-1*co.matrix(np.concatenate((nao_neg,peso_max),axis=0), tc="d")

In [8]: #vetor nulo para não negatividade
        zeros = np.zeros([40,1])
        for n in range(20,40):
            zeros[n,0] = 0.18
        h = co.matrix(zeros, tc="d")

In [9]: #matriz A contendo coeficientes para restrição de uso total do capital e retorno esperado
        uns = np.ones([1,20])
        A = co.matrix(np.concatenate((uns,retorno), axis=0), tc="d")

In [10]: #vetor com 100% do capital aplicado e retorno esperado.
        b = co.matrix(np.array([[1],[0.0153]]), tc="d")

In [11]: #solver
        inicio = time.time()
        sol = co.solvers.qp(P,q,G,h,A,b)
        fim = time.time()
        print("Risco da carteira: ",round((100*sol["primal objective"]),2),"%")
        print("Tempo de execução: ", round((fim - inicio),2),"s")

        pcost      dcost      gap      pres      dres
0:  2.8261e-04  -4.0611e+00  5e+01  7e+00  5e-16
1:  2.8847e-04  -3.3412e+00  7e+00  5e-01  9e-16
2:  4.2569e-04  -1.5667e+00  2e+00  1e-01  4e-15
3:  4.8773e-04  -2.4853e-01  3e-01  1e-02  3e-14
4:  4.7598e-04  -2.7557e-02  3e-02  7e-04  2e-15
5:  4.6704e-04  -4.5490e-04  9e-04  2e-05  2e-16
6:  3.5225e-04  1.7767e-04  2e-04  2e-16  6e-18
7:  2.9190e-04  2.3268e-04  6e-05  1e-16  3e-18
8:  2.7913e-04  2.7356e-04  6e-06  2e-16  2e-18
9:  2.7684e-04  2.7670e-04  1e-07  1e-16  3e-18
10: 2.7676e-04  2.7676e-04  2e-09  1e-16  2e-18
Optimal solution found.
Risco da carteira:  0.03 %
Tempo de execução:  0.01 s

In [12]: tickers = list(["SAPR11", "CSMG3", "BBSE3", "BPAC11", "TAEE11",
                        "WEGE3", "ABEV3", "VIVT3", "AGRO3", "PETR4",
                        "LREN3", "RADL3", "MGLU3", "GGBR4", "RENT3",
                        "MRFG3", "KLBN11", "MYPK3", "UNIP6", "AZUL4"])

        for i in range (0,20):

```

```
if sol["x"][i]>0.01:  
    print(tickers[i], round(100*sol["x"][i],0),"%"),  
else:  
    print(tickers[i],"0%")
```

```
SAPR11 0%  
CSMG3 0%  
BBSE3 0%  
BPAC11 0%  
TAEE11 18.0 %  
WEGE3 0%  
ABEV3 0%  
VIVT3 18.0 %  
AGRO3 0%  
PETR4 13.0 %  
LREN3 0%  
RADL3 0%  
MGLU3 0%  
GGBR4 18.0 %  
RENT3 0%  
MRFG3 18.0 %  
KLBN11 0%  
MYPK3 0%  
UNIP6 15.0 %  
AZUL4 0%
```