UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

LEONARDO MARTINS DE PAULO

AS CORDAS VIBRANTES: UMA SUGESTÃO CONTEXTUALIZADA NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

Sorocaba-SP
2022

LEONARDO MARTINS DE PAULO

AS CORDAS VIBRANTES: UMA SUGESTÃO CONTEXTUALIZADA NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela

Sorocaba-SP
2022

Paulo, Leonardo Martins de

As cordas vibrantes: Uma sugestão contextualizada no ensino de Matemática e Física / Leonardo Martins de Paulo -- 2022.
110f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Antonio Luís Venezuela
Banca Examinadora: Érica Regina Filletti Nascimento, Sadao Massago
Bibliografia

1. Cordas vibrantes. 2. Equação de ondas. 3. Plano de aulas. I. Paulo, Leonardo Martins de. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Leonardo Martins de Paulo, realizada em 13/10/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (UFSCar)

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento (UNESP)

Prof. Dr. Sadao Massago (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Dedicatória

À dona Maria, minha mãe, por sua ternura e amor; ao senhor João (in memoriam) meu pai, por seu caráter e dedicação à família; à Ivone minha esposa, pelo seu carinho e compromisso; Joaquim e Catarina meus filhos, pelo brilho que me transmitem todos os dias.

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar, por ter me concebido a Graça de chegar até aqui.

Aos meus pais João Manoel de Paulo (in memoriam) e Maria Adair Martins de Paulo, fontes de sabedoria e ternura inesgotável.

A minha esposa Ivone, pela paciência e compreensão; e meus filhos Joaquim e Catarina, motivação para todos os dias.

Ao meu orientador e amigo, professor Venezuela; pela paciência, confiança, incentivo e dedicação em transmitir o conhecimento, também pelo suporte no desenvolvimento do tema escolhido para essa dissertação, e pela partilha dos bons momentos de enriquecimento filosófico e político em nossas conversas após as aulas.

Aos professores que aceitaram fazer parte da banca de qualificação, Profª. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento e Prof. Dr. Sadao Massago.

Todos os professores da UFSCar que, com empenho e compromisso, contribuíram de forma excelente na minha formação, ministrando as aulas conduzindo assim o diálogo e transmissão do conhecimento.

À secretária do PPGECE Kelly Schiabelli, que sempre respondeu minhas dúvidas por e-mail, de forma rápida e eficiente.

Ao amigo Ezequiel, pelas discussões contrutivas e partilha do conhecimento.

Todos os professores que fizeram parte da minha jornada estudantil, desde a 1ª série até a conclusão do Ensino Médio, e também Cursos Superiores aos quais já frequentei.

Agradeço também, todos os amigos e irmãos de caminhada que fazem parte da minha formação religiosa e social.

"Confia ao Senhor a tua sorte, espera nele, e ele agirá". - Salmo 36:5

"Educai as crianças e não se rá preciso castigar os homens". - Pitágoras

Resumo

O propósito desse trabalho é a realização de uma pesquisa tanto de conceitos históricos quanto científicos, relacionados às ondas produzidas pelas cordas vibrantes. Durante a elaboração do texto, foi realizado um levantamento bibliográfico e teórico sobre os principais pesquisadores do assunto, e as motivações para as descobertas no campo musical e da ciência, fortalecendo assim o debate e aprofundamento do tema. Nas primeiras páginas, se relata a observação feita por Pitágoras e sua escola, referindo-se a corda esticada quando colocada para vibrar, produzindo sons nas diversas frequências. Desde então, a participação da matemática nesse movimento, ou mesmo nas diversas épocas posteriores e capítulos diferentes da história, envolveu ideias, pensadores, e teorias que se desenvolveram no decorrer dos séculos, tal como a equação de ondas. A seguir, como ênfase na evolução dos conceitos expostos e argumentados, será feita também uma aplicação de cunho teórico-prática, onde, os exemplos apresentados e discutidos através da equação de Fourier, se conectam diretamente nesse escopo. Sugerimos também, de maneira didática, a construção de um plano de aula, composto por questões de vestibulares recentes, onde o objetivo é conduzir o aluno ao pensamento crítico, frente à análise e resolução de exercícios em contextos diversos e complexos, fortalecendo assim o debate e enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: vibração de cordas esticadas; equação de ondas; história; plano de aula; situações-problema.

Abstract

The purpose of this work is to carry out a research of both historical and scientific concepts, related to the waves produced by vibrating strings. During the preparation of the text, a bibliographic and theoretical survey was carried out on the main researchers of the subject, and the motivations for the discoveries in the field of music and science, thus strengthening the debate and deepening of the theme. In the first pages, the observation made by Pythagoras and his school is reported, referring to the stretched string when placed to vibrate, producing sounds in different frequencies. Since then, the participation of mathematics in this movement, or even in the various later times and different chapters of history, involved ideas, thinkers, and theories that developed over the centuries, such as the wave equation. Next, as an emphasis on the evolution of the concepts exposed and argued, a theoretical-practical application will also be made, where the examples presented and discussed through the Fourier equation are directly connected in this scope. We also suggest, in a didactic way, the construction of a lesson plan, composed of questions from recent entrance exams, where the objective is to lead the student to critical thinking, facing the analysis and solving of exercises in diverse and complex contexts, thus strengthening the debate and enrichment of the teaching and learning process.

Keywords: vibration of stretched strings; wave equation; story; class plan; problem situations.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Quadros

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os diferentes ciclos de ensino do nosso país, em especial o Ensino Médio - terceiro ciclo, no decorrer dos anos, vem passando por diversas transformações, e como esperado, o ensino de Matemática e Física, responsáveis pelo desenvolvimento lógico e tecnológico no aluno, caminham paralelamente se adequando aos reflexos dessas mudanças “de forma que os aspectos e conteúdos tecnológicos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal” (BRASIL, 2000b, p. 2).

> Se é necessário pensar em reformas curriculares, levando em conta as mudanças estruturais que alteram a produção e a própria organização da sociedade que identificamos como fator econômico, não é menos importante conhecer e analisar as condições em que se desenvolve o sistema educacional do país (BRASIL, 2000a, p. 6).

Através de observações realizadas em sala de aula, o espaço ideal para exames, e pesquisas de campo referentes às investigações e o aprimoramento do ensino-aprendizagem, é possível detectar alguns aspectos dessa nova visão de ensinar, assim, corrigir as nuances que dificultam a forma de aprender dos alunos, e a tarefa árdua do professor de proporcionar uma melhor pedagogia aos conteúdos que serão trabalhados “[...] além da capacidade didática do professor, seu compromisso e, por que não dizer, cumplicidade com os alunos, que fazem do trabalho cotidiano de ensinar um permanente voto de confiança na capacidade de todos para aprender” (BRASIL, 2000a, p. 71).

De certa forma, a não uniformidade no tratamento curricular - aqui relacionando a ordem de aplicação de conteúdos nas disciplinas de Matemática e Física, conduzem o professor a refletir, como manter em dia, tópicos diferentes do cotidiano escolar, articulando ensino e gestão da sala de aula. Nessas circunstâncias, o plano de aula e o preparo como os conteúdos devem ser ministrados, de forma que atenda à demanda e diversidade de situações de conhecimentos que se encontram na sala de aula, são fundamentais para o êxito no processo de ensino e aprendizagem.

> Tendo em vista que a função precípua da educação, de um modo geral, e do Ensino Médio – última etapa da Educação Básica – em particular, vai além da formação profissional, e atinge a construção da cidadania, é preciso oferecer aos nossos jovens novas perspectivas culturais para que possam expandir seus horizontes e dotá-los de autonomia intelectual, assegurando-lhes o acesso ao conhecimento historicamente acumulado e à produção coletiva de novos conhecimentos, sem perder de vista que a educação também é, em grande medida, uma chave para o exercício dos demais direitos sociais (BRASIL, 2013, p. 145).

Ainda, de acordo com a BNCC - Base Nacional Comum Curricular, o tema apresentado aos alunos, através do plano de aula, deve proporcionar a contextualização de conteúdos referentes aos componentes curriculares, organizando assim as melhores estratégias para a apresentação, comunicação, representação, e através de exemplos formativos, haver condução à aprendizagem, de acordo com a realidade de espaço e cotidiano do educando.

Dessa forma “não se trata, portanto, de elaborar novas listas de tópicos de conteúdo, mas, sobretudo de dar ao ensino de Física novas dimensões. Isso significa promover um conhecimento contextualizado e integrado à vida de cada jovem” (BRASIL, 2000b, p. 23).

> Selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc. (BRASIL, 2018, p. 17).

É importante descrever também que o preparo e condução de uma aula tenham a característica própria, que o professor proceda com domínio frente ao assunto programado, e resposta aos questionamentos referentes aos conteúdos advindos por parte dos alunos - referente ao tema proposto na sala de aula, assim entendemos que, “nos dias atuais, a inquietação das “juventudes” que buscam a escola e o trabalho resulta mais evidente do que no passado. O aprendizado dos conhecimentos escolares tem significados diferentes conforme a realidade do estudante.” (BRASIL, 2013, p. 146).

Ainda, de acordo com a BNCC, é de suma relevância, haver também a consideração e um aprofundamento na forma e criticidade que se há de ter ao ser realizada a atividade docente, portanto, nessa linha de debate e reflexão, deve haver o diálogo sobre os conhecimentos dos componentes requeridos em cada área, e se considerar também a possibilidade de conclusão e articulação na construção do conhecimento e abstração dos estudantes. Analiticamente, essa dimensão se propõe não como fim, mas como meio para que haja a compreensão nos modos de se expressar e de participação no mundo, constituindo modelos e habilidades mais sistematizadas e organizadas de formulação e questionamentos, para a boa análise na apresentação de descobertas e dedução de conclusões.

> A escola, face às exigências da Educação Básica, precisa ser reinventada, ou seja, priorizar processos capazes de gerar sujeitos inventivos, participativos, cooperativos, preparados para diversificadas inserções sociais, políticas, culturais, laborais e, ao mesmo tempo, capazes de intervir e problematizar as formas de produção e de vida. A escola tem, diante de si, o desafio de sua própria recriação, pois tudo que a ela se refere constitui-se como invenção: os rituais escolares são invenções de um determinado contexto sociocultural em movimento (BRASIL, 2013, p. 152).

Ainda, com a finalidade de promover a experiência da aprendizagem, e desafiar a compreensão nos vínculos entre diretrizes educacionais e conteúdos pedagógicos, através da consolidação do objeto de ensino, e uma aplicação prática rotineira na vida de alunos e professores da área de exatas, propomos aqui uma análise sobre o comportamento de uma corda em movimento oscilatório num instrumento musical, termo genericamente definido como o estudo das cordas vibrantes, destacando de forma simétrica a Equação de Ondas.

De acordo com Santos, Molina e Tufaile (2013), muitas questões voltadas para a análise de frequências sonoras nas cordas, são de extrema importância para a aprendizagem e desenvolvimento de Matemática e Física, de forma geral, servem como motivação para alunos do Ensino Médio, e também, para aqueles que desejam seguir na área de exatas no Curso Superior.

No capítulo 2, propomos uma análise referente aos modelos e conceitos históricos apresentados às vibrações de uma corda, as teorias envolvidas a partir das primeiras observações, que se comportaram como estimulo para a investigação do problema das cordas vibrantes, e que ainda servem nos dias atuais como motivação e entendimento, pois tornam a arte da pesquisa o propósito para a busca de soluções, enriquecendo assim a criatividade e cultivando o sentido da observação, ou seja, há um “[...] relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade” (BRASIL, 2000 p. 46), na construção do conhecimento e ensino.

> A matemática dos gregos, por exemplo, que a inventaram nos moldes como a entendemos hoje, deve tanto ao espírito teórico-especulativo de sua cultura quanto a matemática dos babilônios, ao caráter prático de uma cultura talvez mais preocupada com problemas cotidianos que com metafísica (SILVA, 2007, p. 22).

Nesse diálogo, que propõe transcrever o fato histórico e caracterizar o equilíbrio na capacidade de análise e interpretação de um problema, relacionando o ser pesquisador (matemáticos como, por exemplo, Pitágoras e Newton que contribuíram de forma expressiva na formulação de conceitos e aplicações) e a justificativa para o início de um estudo, fortalecem a formação de um bom ensino, logo se subentende que, há “a importância da história das Ciências e da Matemática [...], para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos” (BRASIL, 2000 p. 54).

Referente ainda à equação que descreve a vibração de uma corda, e toda a estrutura de leis e definições matemáticas envolvidas, propomos também contextualizar a Segunda Lei de Newton, onde a partir de um segmento diminuto de corda, apresentamos a dedução da equação de ondas por equação diferencial, relacionando assim as derivadas parciais com as derivadas temporais.

No capítulo 3 expomos a solução geral da equação de onda, observada pelo método de Fourier. Com o propósito de investigar a vibração de um pedaço finito de corda, a partir da análise de algumas grandezas que estão envolvidas nesse meio, apresentamos como sugestão para a prática de ensino e aprendizagem, uma atividade no formato situação-problema, envolvendo a oscilação de um ponto infinitesimal na corda. Propomos também, como auxílio no planejamento docente, uma aplicação de contexto analítico, referente às ondas mecânicas produzidas por essa mesma corda, onde, os resultados obtidos através das equações de Fourier, relacionados com gráficos e tabelas que foram gerados com auxílio do Excel, direcionam a convergência nos valores descobertos, quando aumentamos o número de observações num determinado intervalo de tempo.

No capítulo 4, uma reflexão será feita relacionando o conceito de interdisciplinaridade e as preocupações da Base Nacional Comum Curricular BNCC e Parâmetros Curriculares Nacionais PCNs, com a contextualização do conteúdo apresentado aos alunos. Também em relação à condução do ensino, e o cotidiano de desenvolvimento escolar, apresentamos uma releitura do modelo educacional proposto no ensino básico e a ambientação da sala de aula.

No capítulo 5 expomos através um breve relato o plano de aula, sua constiuição e direcionamento pedagógico, também, articulamos a discussão entre os principais tópicos que compõem esse documento, dessa forma, propomos sequencialmente a construção do mesmo (plano de aula), onde, o tema relacionado, refere-se às ondas mecânicas numa corda, com aplicação contextualizada na resolução de situações-problema.

Capítulo 2

Modelagem da Equação de Onda Unidimensional Finita

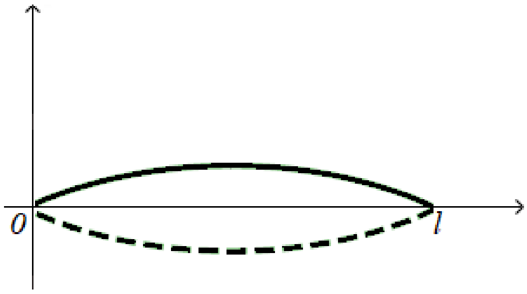
Neste tópico apresentamos a dedução da equação de onda em uma dimensão. Para realizar nosso propósito, utilizaremos como protótipo a corda de um instrumento musical, por exemplo, um violino ou violão, onde a mesma (corda), por possuir propriedades físicas como massa, elasticidade e densidade uniforme, quando está sob tensão, é considerada um meio físico uniforme e elástico. Ao descrever vibrações transversais, quando a corda é deslocada de seu estado de repouso, um ângulo é associado com as extremidades de apoio enquanto a corda está vibrando, relacionando-se de forma direta com a amplitude, velocidade de onda, freqüência e etc. Assim, com a finalidade de contextualizar a solução aqui exposta, também será referido o clássico problema das cordas vibrantes, o qual de início, através de revisitar um pouco da parte histórica, será descrito logo a seguir.

2.1. Abordagem histórica

Estimulados por observações e questionamentos científicos, os matemáticos do passado, pesquisavam e desenvolviam estudos relacionados às situações problemas recorrentes do dia a dia, descrevendo métodos e equações para o desenvolvimento dos cálculos, assim, “a matemática entrou na cultura primeiramente como uma técnica, a de fazer cálculos aritméticos e geométricos elementares, e suas origens perdem-se nos primórdios da história” (SILVA, 2007, p. 31).

O problema das cordas vibrantes, foi objeto de apreciação e pesquisa atravessando várias gerações de pensadores, se tratava portanto, do estudo das vibrações de um ponto infinitésimo de uma corda, sendo a mesma, distendida e presa nas extremidades 0 e l como representado na Figura 1 a seguir.

Figura 1. Representação de uma corda esticada em movimento oscilatório.

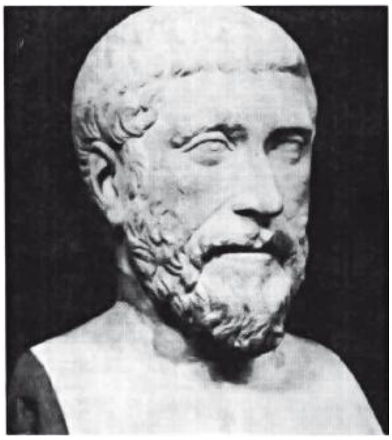


Fonte: Próprio autor.

Quando a corda recebe uma força numa direção não paralela a ela, digamos num ponto qualquer entre *0* e *l*, por ela ser flexível sofre uma deformação, saindo de seu estado de repouso, assim, quando logo em seguida é abandonada, a mesma começa a vibrar. Observando assim sua trajetória, surge o questionamento, como representar na forma de função, a velocidade que a corda passa a descrever num determinado instante *t*?

Através de registros históricos deixados para as civilizações contemporâneas, há relatos reportando à pessoa de "Pitágoras de Samos que viveu por volta do final do século VI a.C" (SILVA, 2007, p. 32),

Figura 2. Pitágoras.



Fonte: EVES (2011, p. 98).

e seus seguidores, o inicio dos estudos na concepção dos fenômenos relativos à música, envolvidos na vibração de uma corda.

> Considerando cordas sujeitas à mesma tensão, eles encontraram que para a oitava os comprimentos devem ter razão 2 para 1, para a quinta 3 para 2 e para a quarta 4 para 3. Esses resultados, os primeiros fatos registrados da física-matemática, levaram os pitagóricos a iniciar o estudo científico das escalas musicais (EVES, 2011, p.103).

Para os Pitagóricos tudo era formado por números “talvez os primeiros grandes matemáticos gregos tenham sido mesmo Pitágoras e seus seguidores os chamados filósofos pitagóricos” (SILVA, 2007, p. 32), sendo assim, utilizavam do conceito de números inteiros e razões entre esses números para explorar as leis que regem o mundo. Um grande avanço para a ciência, nas explorações desse grupo, surgiu através da música e suas percepções.

> A Matemática começa com ele, no sentido de que ele foi o primeiro a concebê-la como um sistema de pensamento mantido coeso por provas dedutivas. [...] A Ciência começa com ele, no sentido de que ele executou deliberadamente o primeiro experimento cientifico e que foi a primeira pessoa a conceber a conjectura sumamente ousada de que o mundo é um todo ordenado e compreensível. Ele foi o primeiro a aplicar a palavra kosmos - que anteriormente significava ordem ou harmonia - a esse todo (SIMMONS, 1987, p. 671).

Abdounur (2003) descreve que, no entendimento histórico da música, a otimização e desenvolvimento de Pitágoras, traduziram a concepção na construção da escala musical, assim, esse experimento de conduzir os números associados com a arte, refletido na forma de música, fortaleceu e tornou relevante os números na forma de fração, que a partir desse ponto tem característica própria, a representação também no sentido musical.

> A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagóricos (EVES, 2011, p.97).

“A teoria da constituição numérica do mundo é também tributária de outra contribuição notável dos pitagóricos: a descoberta que os intervalos musicais correspondem a razões numéricas simples (a oitava a $1/2$, a quarta a $3/4$ e quinta a $2/3$)” (SILVA, 2007, p. 33).

> Sob uma ótica de rede de significados, esse experimento contribui para a construção do conceito de fração, que ganha a partir de então uma roupagem musical. Ao mesmo tempo, a música e suas diferentes áreas, tais como harmonia, tornam-se, na concepção do pensador grego, propriedades numéricas e, à luz das ideias aqui defendidas, os conceitos usualmente tidos como musicais assumem um significado mais amplo (ABDOUNUR, 2003, p. 201).

Nesse sentido, “A lei dos intervalos musicais foi o primeiro fato quantitativo descoberto sobre o mundo natural” (SIMMONS, 1987, p. 674).

> [...] Pitágoras observou que, quando os comprimentos de cordas vibrantes podem ser expressos como razões de números inteiros simples, como dois para três (para a quinta) ou três para quatro (para a quarta), os tons serão harmoniosos. Em outras palavras, se uma corda produz a nota dó quando tocada, então uma corda semelhante com o dobro do comprimento produzirá o dó uma oitava abaixo; e os tons entre essas notas são emitidos por cordas cujos comprimentos são dados por razões intermediárias: 16:9 para o ré, 8:5 para o mi, 3:2 para o fá, 4:3 para o sol, 6:5 para o lá e 16:15 para o si (BOYER; MERZBACH, 2012, p.60).

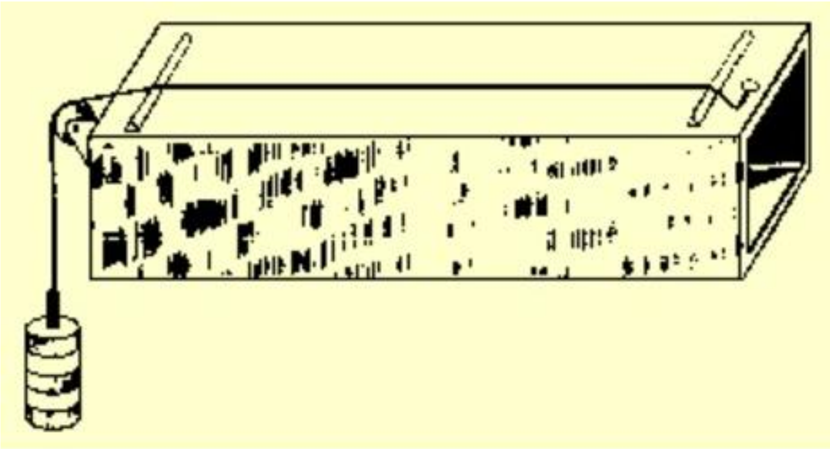
Também, se utilizando da corda esticada, um dos objetos para medição muito utilizado no mundo antigo, e através da abstração matemática, se fez surgir de forma concatenada, espaço para observações e cálculos.

> A tremenda ideia de que a Matemática é a chave para a interpretação correta da natureza surgiu com os pitagóricos, e provavelmente com o próprio Pitágoras. A descoberta que sugeriu essa ideia surgiu de um simples experimento com a música. Pitágoras distendeu uma corda de lira entre duas presilhas numa tabua. [...]. Ele descobriu que se a corda for pressionada em seu ponto médio por um pedaço de madeira colocado entre a tabua e a corda, de modo que a parte vibrante seja reduzida a 1/2 de seu comprimento original, então ela emite uma nota uma oitava acima da primeira; se a parte vibrante for reduzida a 2/3 do comprimento original, ela emite uma nota que é uma quarta acima da nota original (SIMMONS, 1987, p. 671).

Abdounur (2003) também vem indicar que, o início da relação que unifica a matemática com a música, surge a partir do século VI a.C., através de Pitágoras. Por motivação dos sons encontrados no monocórdio, como representado na Figura 3, assim se constrói e consolida uma das maiores descobertas de Pitágoras e seus seguidores, conduzindo para uma nova concepção e interpretação numérica daquele período, dessa forma se fez nascer um novo domínio nas aplicações da matemática, a aclamada música.

> Possivelmente inventado por Pitágoras, o monocórdio é um instrumento composto por uma única corda distendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa possuindo, ainda, um cavalete móvel colocado sob a corda para dividi-la em duas seções. A princípio, seus experimentos evidenciavam relações entre comprimento de uma corda estendida e a altura musical do som emitido quando tocada. Concordando com princípios de sua escola, Pitágoras buscava relações de comprimentos - razões de números inteiros - que produzissem determinados intervalos sonoros (ABDOUNUR, 2003, p. 4).

Figura 3. Monocórdio de Pitágoras.



Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-sala-2/.

Após retornar um pouco mais ao passado, vemos que, "o estirar de cordas é notavelmente reminiscente da origem da geometria egípcia, e sua associação com funções nos templos nos faz lembrar a possível origem ritual da matemática" (BOYER; MERZBACH, 2012, p.151). Também, "há registros de que os agrimensores egípcios antigos, do tempo dos faraós, construíam triângulos de medidas 3, 4, 5 com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos" (EVES, 2011, p.86).

Segundo Stewart (2013) no cânon, instrumento musical utilizado desde a antiguidade, também se encontraram os primeiros experimentos referentes aos sons, derivados da vibração de uma corda. Nesse instrumento, as cordas estão distendidas com tensões diferentes, assim, quando um suporte percorre uma das cordas em sua extensão e nas diversas posições existentes, surgem razões entre números, sejam elas mais simples ou complexas, derivando frequências que ora são harmoniosas ora dissonantes aos ouvidos.

Com o passar do tempo, a Física e suas leis arraigadas no campo das Ciências, em associação aos conceitos e rigor utilizados na Matemática entram em destaque, traduzindo em números, equações e funções, os movimentos dos infinitos pontos de uma corda, quando a mesma se põe a oscilar, portanto, mais uma vez a melodia das notas e o arpejo dos acordes, têm relação direta com a harmonia da natureza na música ocidental, através da teoria pitagórica utilizada.

Isaac Newton (1642-1727) foi um dos mais proeminentes matemáticos no século XVIII, sendo o responsável por formulações de leis tanto no campo da Física como da Matemática.

Figura 4. Isaac Newton.

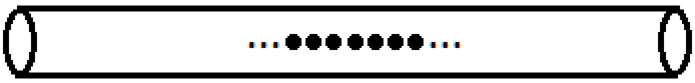
Fonte: (BOYER; MERZBACH, 2012, p.437).

Stewart (2013) aponta que, a formulação da segunda lei de Newton, surgiu como uma luz para o entendimento do problema das cordas vibrantes, pois, de forma direta, a massa de uma corda está relacionada diretamente com a força aplicada sobre ela, e a aceleração sofrida pela mesma. Dessa forma, a solução (para a equação das cordas vibrantes) emerge do fato de que, quando esticamos uma corda, uma força na direção paralela a ela é exercida sobre suas extremidades, fazendo a tensão variar conforme o movimento (da corda), seja contraindo ou esticando de forma acentuada.

Em 1660 Robert Hooke (1635-1703) descobriu o que é hoje chamada de, a Lei de Hooke. Segundo Nussensveig (2013), essa lei demonstra que, a força que age de forma restauradora numa corda elástica, deve ser proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio linear; entretanto, interagindo também, há uma constante de proporcionalidade k que é definida como a constante da mola.

Quando esse pensamento é conduzido para a corda esticada, com infinitos pontos justapostos realizando movimento oscilatório, como mostrado na Figura 5, uma nova forma de pensar se traduz, “assim, os matemáticos da época pensaram na corda como uma grande quantidade de massas pontuais estreitamente espaçadas, unidas através de molas obedecendo à lei de Hooke” (STEWART, 2013, p. 107).

Figura 5. Fragmento de corda constituído por infinitos pontos de massa.



Fonte: Próprio autor.

Fazendo uma alusão à segunda lei de Newton, observamos que, se um sistema é constituído por uma quantidade finita de massa, então é possível calcular a resultante das suas forças, através da resolução de cada equação referente à massa. Entre as mentes brilhantes da matemática daquele período, surgiu então uma dúvida, é possível aplicar esse mesmo raciocínio para uma corda distendida (sistema contínuo formado por infinitos pontos de massa) em um instrumento musical, por exemplo, um violino?

> Anotaram as equações de uma forma ligeiramente simplificada para torná-las possíveis de resolver e as resolveram; por fim deixaram a quantidade de massas ficarem arbitrariamente grande, e verificaram o que acontecia com a solução (STEWART, 2013, p. 107).

Nesse mesmo período, a matemática recebe mais uma contribuição, Daniel Bernoulli (1700-1782) "estudou as cordas vibrantes e foi um pioneiro no campo das equações diferenciais parciais" (EVES, 2011, p.466).

> Daniel Bernoulli afirmou que a posição inicial de uma corda vibrante pode ser representada por uma série infinita de termos trigonométricos, que deve ser considerada tão geral quanto uma série de potências. Isso implica que uma função qualquer possa ser representada por uma série trigonométrica, mas Daniel Bernoulli estava mais interessado no problema físico e não chegou a propor uma nova definição de função com base nessa hipótese (ROQUE, 2012, 302).

Segundo Abdounur (2003), Daniel Bernoulli fez validar a afirmação que, o vibrar de um corpo sonoro, pode ser visto como uma superposição de seus modos simples, porém com amplitudes diversas. Também deve ser lembrado que, naquela época, não havia princípios matemáticos gerais confirmando a veracidade onde, a suposta afirmação mencionada anteriormente, poderia ser verificada. Tal suposição de Bernoulli, se apoiou de maneira teórica nos experimentos de Joseph Fourier (1768-1830), que através de suas pesquisas em áreas que de certa forma estão distantes do espectro musical, serviram de base para a aplicação na música.

> [...] o esclarecimento posterior das ideias de Fourier foi até certo ponto a razão pela qual o século dezenove foi denominado a idade de rigor. A contribuição principal de Fourier e seu clássico à matemática foi a ideia, vislumbrada por Daniel Bernoulli, de qualquer função $y=f(x)$ poder ser representada por uma série da forma $y=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+...+a_n\cos nx+...+b_1\operatorname{sen} x+b_2\operatorname{sen} 2x+...+b_n\operatorname{sen} nx+...$ agora conhecida como série de Fourier (BOYER; MERZBACH, 2012, p.333).

Figura 6. Joseph Fourier.

Fonte: EVES (2011, p. 527).

Após realizar experimentos relativos à condução do calor, nas primeiras décadas do século XIX, Fourier demonstrou como representar uma curva periódica pela superposição de ondas descritas por funções senoidais, que correspondem às frequencias 1, 2, 3,..., *n* vezes a frequencia de uma curva original. Dessa forma o teorema proposto por Fourier, assim como a implicação de sua generalização e analogia, não somente se fez concretizar o ponto de vista de Daniel Bernoulli em acústica, como fez também transformar em fundamentos para análises de harmônicos, dissonância e batimentos, traduzindo assim diferentes conceitos referentes à terminologia musical, que aparentemente estavam dissociados da matemática.

De acordo com Abdounur (2003), quando uma nota musical foi decomposta em séries de Fourier, foi entregue perante a realidade, a chave que abre caminhos frente para a solução de questões referentes à harmonia musical, que de certa forma, estão associadas a inúmeras situações complexas na música, onde somente a partir da experiência e sensibilidade na observação, se é possível explorar tais práticas, com métodos ausentes de argumentos científicos.

> O realmente importante é basear-se em pressupostos que, sem pretenderem ser leis naturais, satisfaçam nossa necessidade formal de sentido e de coerência. Se fosse possível derivar todos os fenômenos a partir da física do som, explicando e resolvendo daí todos os problemas, pouco importaria que nosso conhecimento físico da essência do som fosse exato ou não. Pois é muito possível que partindo de uma observação errada possamos chegar, por dedução ou intuição, a resultados corretos; ao passo que não se pode afirmar que de uma observação melhor ou mais exata resultem, necessariamente, conclusões mais corretas ou melhores (SCHOENBERG, 2001, p. 57).

Portanto, de forma convincente e explicativa, a aplicação da teoria referente às séries criadas por Fourier, relacionou organizadamente conceitos musicais, assim criou-se todo um princípio com estrutura e ordem coerentes, que facilitou a interpretação de diferentes fenômenos musicais, relacionados diretamente à sonoridade, dentre esses, é possível destacar os harmônicos de uma nota musical produzidos na corda de um violão - por exemplo, o motivo da relação direta que existe entre as mínimas frações de números inteiros que compõem um som.

> As vibrações de uma corda se transmitem ao ar produzindo ondas sonoras. Assim, podemos entender o som produzido pela corda vibrante como uma superposição de harmônicos. [...] a altura do som é medida por sua freqüência, dada em hertz (ciclos por segundo). Obviamente, essa é exatamente a frequência do harmônico fundamental. Quanto maior a frequência mais alto é o som (FIGUEIREDO, 2000, 145).

Consequentemente “tanto uma corda como colunas de ar em instrumentos de sopro possuem a característica de vibrar não apenas como um todo, mas ainda simultaneamente como duas metades, três terços, quatro quartos etc” (ABDOUNUR, 2003, p. 91).

> Sob essa nova ótica, as primeiras componentes - as mais audíveis - na Série Harmônica correspondem às frequências associadas aos primeiros termos da série de Fourier que determinam portanto razões de pequenos números inteiros relacionadas às consonâncias pitagórica, respondendo ao problema lançado por aquela escola há 2500 anos (ABDOUNUR, 2003, p. 90).

Abdounur (2003) também narra que, o timbre de som que um instrumento produz, se relaciona justamente com a vibração periódica constituída por cada harmônico, dessa forma

> [...] na sucessão dos harmônicos superiores, que é uma de suas propriedades mais notáveis, surge, depois e alguns sons mais facilmente perceptíveis, um certo número de harmônicos mais débeis. Os primeiros são, sem dúvida, mais familiares ao ouvido, enquanto os últimos, dificilmente audíveis, soam mais inusitados. Com outras palavras: os mais próximos parecem contribuir mais, ou de maneira mais perceptível, ao fenômeno total do som, ao som como uma eufonia, capaz de arte; ao passo que os mais distantes parecem contribuir menos, ou de forma menos perceptível (SCHOENBERG, 2001, p. 58).

Sob esse ponto de vista, se constrói o sentido matemático para a interpretação desse fenômeno sonoro. Portanto, [...] “o timbre do som é uma qualidade que permite distinguir sons de mesma altura e mesma intensidade” (FIGUEIREDO, 2000, 146).

> Cabe lembrar o que os intervalos de 8ª - 1:2 - 5ª - 2:3 - e 4ª - 3:4 - considerados consonâncias perfeitas desde os pitagóricos, "preenchem" tácita e respectivamente as "lacunas" da Série Harmônica correspondentes às relações 2º e 1º, 3º e 2º e 4º e 3º harmônicos. Tais reflexões [...] concernentes ao desenvolvimento da música na Idade Média, bem como o uso posterior dos intervalos de sétima e nona corroboram o fato de que a utilização dos intervalos ao longo da história acompanha aproximadamente a ordem de suas aparições na série de Fourier (ABDOUNUR, 2003, p. 209).

Quando o movimento oscilatório das cordas de um violino é observado, para a representação no desenvolvimento do modelo matemático, é possível descrever que, as vibrações devem ocorrer apenas em um plano, assim, para qualquer instante de tempo t, a forma de vibração da corda irá descrever uma curva de seno unidimensional, conhecida por senoide, entretanto como descrito em Stewart (2013), para Daniel Bernoulli o formato inicial da corda é visto como que aleatório.

> Já era sabido, na época, que os sons musicais, em particular os gerados pelas vibrações de uma corda, são compostos de frequências fundamentais e de harmônicos. Essas vibrações podem ser expressas, portanto, como somas de funções trigonométricas, que são periódicas. [...] Isso implica que uma função qualquer possa ser representada por uma série trigonométrica, mas Daniel Bernoulli estava mais interessado no problema físico e não chegou a propor uma nova definição de função com base nessa hipótese (ROQUE, 2012, 302).

No âmbito das equações diferenciais, finalmente traduziu-se a equação de onda através da segunda lei de Newton, mas interpretada por outro pensador de renome na época. Jean-le-Rond d’Alembert (1717-1790) em seus cálculos, também considerou a corda como que formada por infinitos pontos de massa, mas deixou de considerar as quantidades desses pontos tendendo ao infinito, observando apenas o que acontecia às equações. “Num trabalho de 1747 dedicado às cordas vibrantes, recaiu em equações diferenciais parciais, tornando-se assim um dos pioneiros do estudo dessas equações” (EVES, 2011, p.477).

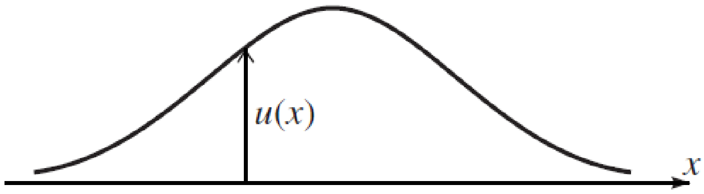
Figura 7. Jean-le-Rond d’Alembert.

Fonte: EVES (2011, p. 478).

> Estudando o comportamento de cordas vibrantes, o matemático e filósofo francês d'Alembert descobriu que o comprimento de uma corda sujeita a uma tensão fixa era inversamente proporcional à frequência do som emitido pela corda referida. D'Alembert foi ainda mais longe ao afirmar que um som natural era puro, mas complexo, sendo obtido pela superposição de diversos harmônicos de uma série. (ABDOUNUR, 2003, p. 35).

De acordo com Stewart (2013), d'Alembert ao elaborar seu modelo de equação para a corda vibrante, notou também que, o formato (curva descrita pela corda) depende diretamente do espaço, assim, deve ser considerado, qual o ponto na extensão da corda está sendo enxergado e em qual instante de tempo, como mostrado a seguir na Figura 8.

Figura 8. Função *u(x)* que determina os pontos da corda.



Fonte: Próprio autor.

Também, a partir da segunda lei de Newton, quando se observa qualquer segmento mínimo (ponto), já se fazia saber que, a aceleração deve ser proporcional à força que está agindo sobre ele (segmento mínimo). Mas, por definição, a aceleração é a razão entre a velocidade e o tempo, e a velocidade é descrita como a razão entre o espaço e o tempo, dessa forma tem-se que, aceleração é uma razão (derivada) de ordem dois em relação ao tempo.

Partindo desse raciocínio, cada segmento adjacente na corda, provoca uma força puxando aquele que está sendo observado, causando dessa forma variações mínimas das massas pontuais vizinhas no espaço, assim "ao calcular essas forças, d'Alembert foi conduzido à equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$" (STEWART, 2013, p. 107).

Diante do contexto, explanado anteriormente, também deve ser considerado que, o símbolo *u(x,t)* referente à posição vertical de um ponto *x* da corda num determinado instante *t*, e a representação da constante relacionada à tensão na corda com seu nível de elasticidade, é descrita pela letra *c*. Essa foi a descrição matemática descoberta por d'Alembert. De forma seguinte, Leonhard Euler (1707-1783) também fez menções sobre o problema das cordas vibrantes, porém, "Euler não chegou a aprofundar o estudo da solução nesse caso, mas essa questão dá origem a uma longa controvérsia sobre a natureza das condições iniciais em problemas desse tipo" (ROQUE, 2012, p. 302).

> No mesmo ano de 1748, Euler escreveu um trabalho no qual concordava com a solução de d'Alembert, observando, porém, que ela permanece válida se a configuração inicial da corda não é dada por uma fórmula única. Segundo d'Alembert, a forma inicial da corda não podia ser dada, por exemplo, por um arco de parábola $y = x - x^2$, já que essa curva não é periódica (ROQUE, 2012, 301).

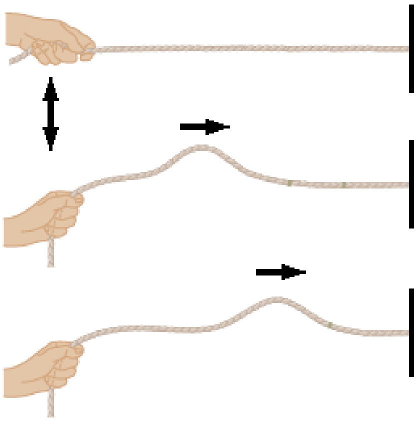
Sobre essa perspectiva, "o problema das cordas vibrantes permaneceu confinado a tratados acadêmicos e não chegou a ser apresentado em livros-texto até o final do século XVIII" (ROQUE, 2012, p. 305).

2.2. ONDAS

Para iniciar a descrição de conceitos referentes às ondas com exposição didática, é imprescindível ilustrar um fenômeno que demonstra o formato e atributos desse tema.

Na Figura 9, vemos uma corda amarrada em uma das extremidades e tensionada horizontalmente por uma pessoa.

Figura 9. Pulso se propagando na extensão de uma corda esticada.

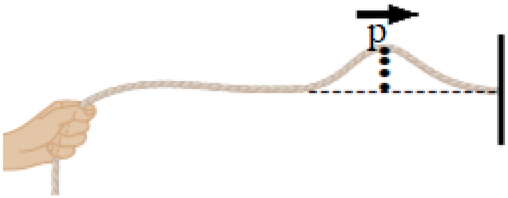


Fonte: Próprio autor.

Se a pessoa, com as mãos na corda, fizer o movimento para cima e para baixo, retornando a seguir à posição inicial, verifica-se um distúrbio ou pulso, que se propaga ao longo da mesma, com uma determinada velocidade, como mostrado na Figura 9.

Quando nossa atenção é fixada num ponto aleatório da corda (digamos um ponto *p* que pode ser destacado com lápis, como na Figura 10, por exemplo), observamos que este ponto efetua o deslocamento para cima e para baixo verticalmente, reproduzindo o movimento da mão, enquanto o pulso estiver atravessando por ele. Assim, é possível entender que, apenas o pulso se desloca ao longo da corda, enquanto os pontos sobem e descem conforme esse distúrbio atravessa por eles.

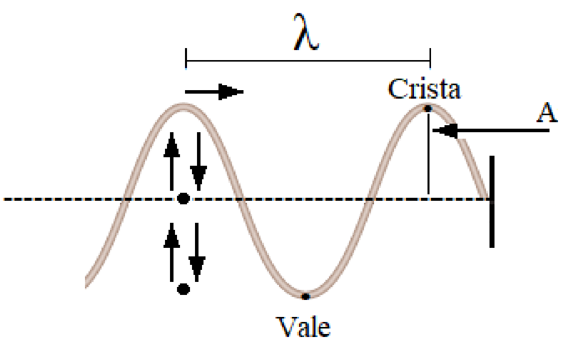
Figura 10. Ponto *p* se deslocando de acordo com o movimento do pulso.



Fonte: Próprio autor.

Para descrever e representar uma onda, devemos imaginar agora uma pessoa que, ao segurar a corda, realize o movimento com sua mão, para cima e para baixo da posição inicial, como na situação descrita anteriormente, porém repetidas vezes. Para essa situação, nós haveremos de ter uma série de pulsos, que constitui ondas que se propagam ao longo de toda a corda. Os pontos que estão na extremidade superior do pulso, e que estão voltados para cima, como descrito na Figura 11, são denominados as cristas da onda e, aqueles que estão na posição inferior do pulso, são os vales da onda. Dessa forma um ponto qualquer da corda, quando é atingido, inicia um movimento vibratório que, oscila enquanto ele é atravessado pela onda. A frequência de vibração desse ponto e sua amplitude *A*, definem a frequência e amplitude da onda. Ainda na Figura 11, é possível descrever outro conceito em relação às ondas, denominado comprimento de onda. Podemos de modo efetivo salientar que, o comprimento de onda, representado pela letra grega λ (lambda) é, a distância percorrida pela onda, durante o intervalo de tempo *t*.

Figura 11. Crista e vale se propagando na extensão da corda formando uma onda.



Fonte: Próprio autor.

Segundo Halliday (2009), as perturbações sobre a superfície de uma poça d'água, o som de um trovão que se propaga de forma esférica no ar, ou as notas musicais e acordes que um instrumento pode emitir, descrevem formas de ondas, seja mais simples ou complexas, ambas relacionadas aos fenômenos ondulatórios.

Figura 12. Onda mecânica sobre a superfície da água.

Fonte: https://pixabay.com/pt/photos/gota-de-%C3%A1gua-derrubar-impacto-578897/.

> Num sentido bastante amplo, uma onda é qualquer sinal que transmite de um ponto a outro de um meio, com velocidade definida. Em geral, fala-se de onda quando a transmissão do sinal entre dois pontos distantes ocorre sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos ao outro (NUSSENSVEIG, 2014, p. 125).

Uma das características mais importantes nas ondas é que, alguns tipos necessitam de um meio para que ocorra a propagação, ou seja, haver o deslocamento de energia sem que haja o transporte da matéria, desse modo, retratam assim as ondas mecânicas.

As ondas mecânicas podem se propagar nos seguintes meios: o ar, a água, a terra e as rochas. Conforme ocorre a propagação de uma onda através do meio, há o deslocamento das partículas à qual o material é constituído, sendo que esses deslocamentos ocorrem de diferentes formas, conforme a natureza da onda.

Outra forma de onda são as eletromagnéticas. A particularidade nesse formato de onda é que, ela tem a origem nas cargas elétricas oscilantes, assim, para que haja a propagação, não é necessário um meio físico. Alguns exemplos podem ser relacionados com esse modelo, tais como, as ondas de rádio e televisão, os raios X, a luz ultravioleta e etc.

Em relação aos tipos de ondas, elas são classificadas em transversais e longitudinais. Quando analisamos o movimento ondulatório, com visto na Figura 11, foi observado que, os pontos da corda realizam o movimento de vai e vem, para cima e para baixo, enquanto há a propagação da onda, para a direita ao longo da corda. Uma onda como esta, em que a vibração dos pontos ocorre na direção perpendicular à direção de propagação, é denominada de onda transversal.

É evidente que, há a possibilidade de fazer propagar uma onda como esta, não somente numa corda, mas também em uma mola esticada ou outro meio material, como uma mangueira de borracha longa conectada a uma torneira de jardim, por exemplo. No entanto, se ocorre a movimentação de uma mola esticada para frente e para trás por uma pessoa, temos um movimento oscilatório que ocorre na direção da própria mola, verificando dessa forma um distúrbio que se constitui por, uma série de "compressões" e "rarefações", propagando-se ao longo da mola, para esse modelo temos uma onda longitudinal.

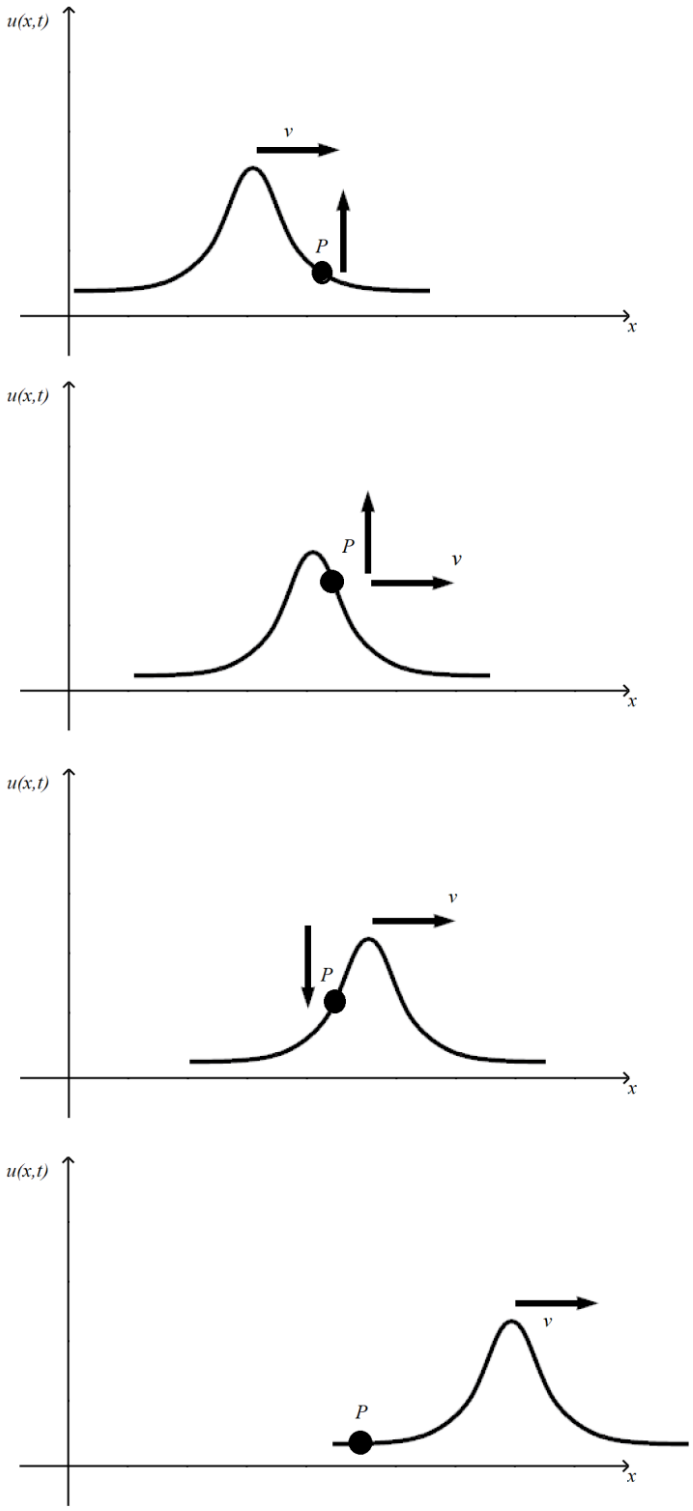
Para nossa verificação (cordas vibrantes), analisaremos especificamente as ondas mecânicas transversais. Como já mencionado, toda e qualquer onda mecânica requer alguma fonte de agitação, também, deve haver um meio para que ocorra essa perturbação, e ainda, algum dispositivo agindo fisicamente, para que as partículas do meio possam ter influência umas sobre as outras.

Outra característica intrínseca é que, assim como as ondas longitudinais, as ondas transversais são chamadas também de ondas progressivas, isto é, quando ocorre a propagação de um lugar para outro, como no caso da onda observada na fração de corda da Figura 11. Devemos observar ainda que, é a onda que se propaga, e não o meio material (corda) no qual a onda se move.

Em relação ao movimento ondulatório configurado pela corda, quando um pulso único é formado, ocorre a propagação do mesmo com uma velocidade v definida, sendo que a corda é o meio através do qual o pulso se propaga. Consideraremos aqui, tão-somente, o cenário de uma corda em situação "ideal", portanto, não há forças de atrito, para que seja reduzida a amplitude de onda enquanto ela se propaga. Outra suposição é a corda ser extremamente extensa, assim, não tem a necessidade de considerar o retorno da onda, após alcançar a outra ponta.

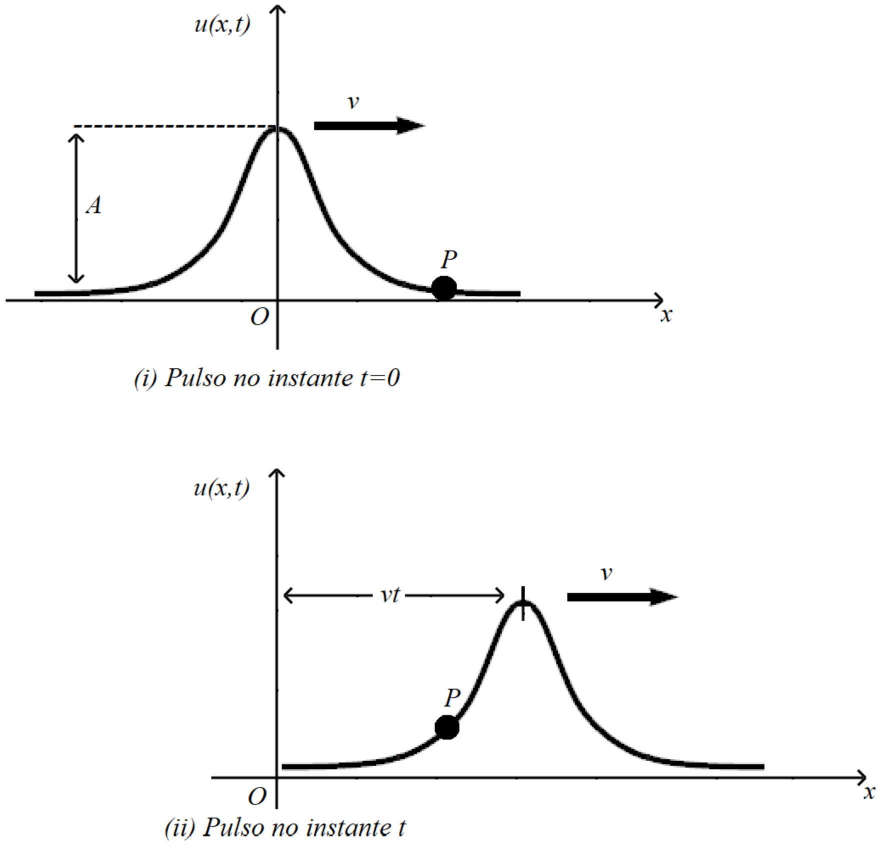
Na Figura 13 a seguir, são representados três instantes de uma partícula, indicadas pelo ponto que se move para cima e para baixo, quando um pulso de onda está se deslocando por uma corda esticada. Ainda, podemos observar que, enquanto o pulso viaja para a direita, o ponto não se desloca no eixo x, portanto, qualquer instante de tempo t no plano, pode ser representado por uma função paramétrica da forma $u(x, t)$.

Figura 13. Vista gráfica do comportamento de um pulso.



Fonte: Próprio autor.

Figura 14. Um pulso de onda unidimensional se movimentando para a direita.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 14 representa o movimento do pulso, assim, para o instante de tempo $t = 0$, é possível ver uma onda unidimensional, com velocidade *v*, distribuída uniformemente no centro do gráfico. Nesse momento, o formato do pulso, seja ele como for, pode ser descrito por uma função matemática, que aqui será representada por $u(x,0) = f(x)$. Essa função descreve a posição vertical *u* do ponto *P* na corda, que está localizado para cada valor de *x* no instante de tempo $t = 0$.

Temos ainda que, como a velocidade do pulso é designada por *v*, então, se observarmos um instante de tempo *t* posterior qualquer, percebemos que houve o deslocamento do pulso para a direita, correspondente à distância vt no intervalo de tempo *t*.

Para que nossa compreensão se torne simples e didática, no modelo que aqui utilizamos, o pulso não muda seu formato com o passar do tempo, mas, em situações reais, o pulso altera sua forma, e de maneira gradual há o achatamento durante o movimento. Dessa forma como vemos na Figura 14, para qualquer instante de tempo *t* maior do que zero, o formato do pulso tem a mesma representação daquele observado no instante de tempo inicial, assim, um elemento da corda no eixo *x* nesse momento, tem a mesma posição *u* que um elemento situado em $x – vt$ teve no instante de tempo $t = 0$:

$$u(x,t) = u(x - vt, 0). \tag{1}$$

De fato, é possível representar o deslocamento *u* de um pulso, com sentido à direita, para qualquer posição *x*, e qualquer instante de tempo *t*, medido em um sistema estacionário com a origem em *O*, como na forma a seguir:

$$u(x,t) = f(x - vt). \tag{2}$$

De maneira análoga, se o pulso estiver se deslocando à esquerda, ou seja, sentido negativo no eixo *x*, o deslocamento da corda será:

$$u(x,t) = f(x + vt). \tag{3}$$

A função *u*, descrita como função de onda, depende das variáveis *x* e *t*, por isso, de maneira frequente também é escrita como *u(x,t)*, que se lê "*u* em função de *x* e de *t*". De forma conclusiva podemos observar que, há a importância na compreensão do significado de *u*.

Consideremos agora um ponto *P* na corda, representado por um valor particular de sua coordenada *x*. Durante o intervalo de tempo que o pulso atravessar ponto *P*, a coordenada *u* desse ponto tende a aumentar, atinge assim um valor máximo e então diminui até zero novamente, dessa forma a função de onda traduzida na forma *u(x,t)*, descreve a coordenada *y* de qualquer ponto *P* que esteja situado na posição *x* e em qualquer instante de tempo *t*. Mais uma vez se observa que, se *t* for considerado fixo (como exemplo, digamos registrando o instantâneo de um pulso), então a função de onda *u* em função de *x*, descrita como forma de onda, define uma curva, que representa o formato geométrico real do pulso nesse tempo.

A seguir, utilizaremos um exemplo instrutivo, reproduzindo assim, alguns conceitos que foram expostos desde o início deste tópico, referente às ondas.

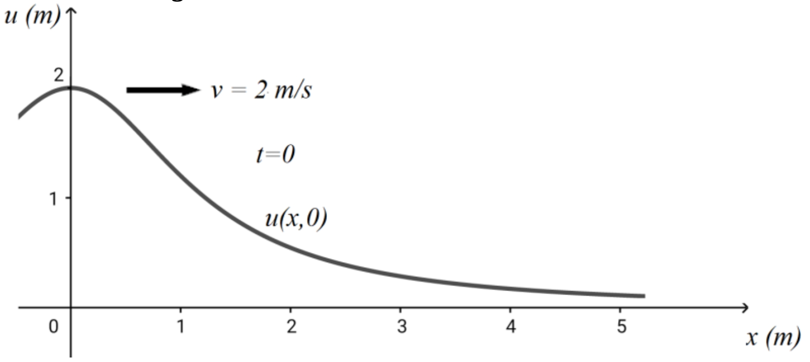
Exemplo 1. Um pulso de onda, que se movimenta para a direita na extensão do eixo *x*, é descrito pela função de onda $u(x,t) = \dfrac{3}{(x - 2t)^2 + 1,5}$, onde *x* é medido em metros e *t* representa o tempo em segundos. Vamos descrever a forma de onda nos instantes $t=0$, $t=1$, $t=2$.

Observando inicialmente a função, vemos que ela é da forma $u(x,t)=f(x-vt)$, assim o comportamento e os parâmetros são idênticos aos descrito na Equação (2). Ainda, após fazer uma análise em relação ao deslocamento da onda, verificamos também que, sua velocidade é $v = 2m/s$, e o pico do pulso, está localizado no valor de x para o qual o denominador é um mínimo, portanto, onde $(x - 2t) = 0$. Dessa forma, os picos ocorrem em $x=0$ para $t=0$, em $x=2m$ para $t=1s$ e em $x=4m$ para $t=2s$.

Nos instantes $t=0s$, $t=1s$ e $t=2s$, as expressões e os gráficos da função de onda são descritos nas seguintes formas:

(i) $u(x,t)=\dfrac{3}{x^2+1,5}$ em $t=0s$.

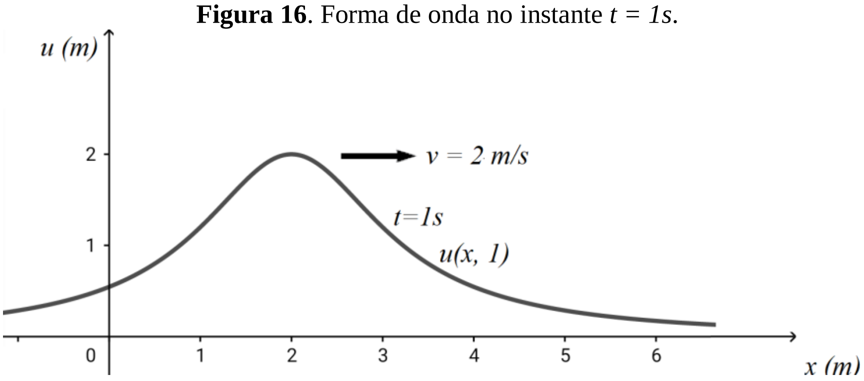
Figura 15. Forma de onda no instante $t = 0s$.



Fonte: Próprio autor.

(ii) $u(x,t)=\dfrac{3}{\left(x-2\right)^2+1,5}$ em $t=1s$.

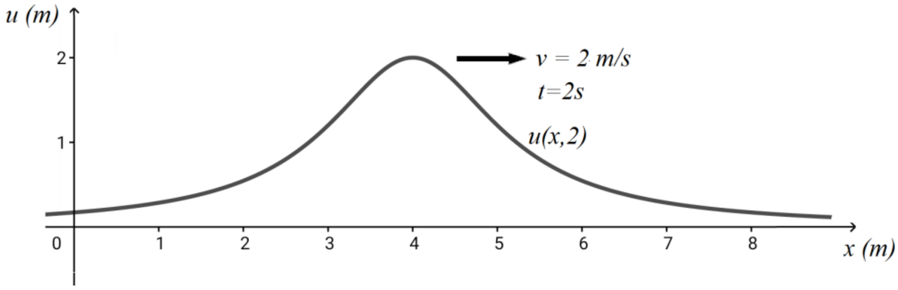
Figura 16. Forma de onda no instante $t = 1s$.



Fonte: Próprio autor.

$(iii)\ u(x,t) = \dfrac{3}{(x-4)^2 + 1{,}5}$ em $t = 2s.$

Figura 17. Forma de onda no instante *t = 2s*.



Fonte: Próprio autor.

2.3. PARÂMETROS DE ONDA

Para os tópicos relacionados a seguir, serão realizadas as seguintes menções; as unidades utilizadas para representar as medidas, obedecem ao Sistema Internacional de Unidades, assim, outras (unidades de grandeza) que deverão aparecer, serão derivadas a partir das medidas fundamentais, inicialmente aqui expostas.

Utilizar-se-ão como unidades básicas de dimensão; o metro (*m*) para descrever a extensão ou comprimento, quilograma (*kg*) para representar a massa, e o segundo (*s*) para medir o tempo.

2.3.1. FREQUÊNCIA

Em um fenômeno periódico, é chamada frequência *f* da onda, o número de repetições ou ciclos completos executados por um ponto vibrante, a cada unidade de tempo. De acordo com o Sistema Internacional de Unidades (*SI*), a unidade de medida para a frequência é o hertz (*Hz*), assim, denotamos aqui nossa primeira unidade derivada no *SI*; 1 hertz = 1 *HZ* que corresponde a uma oscilação completa por segundo.

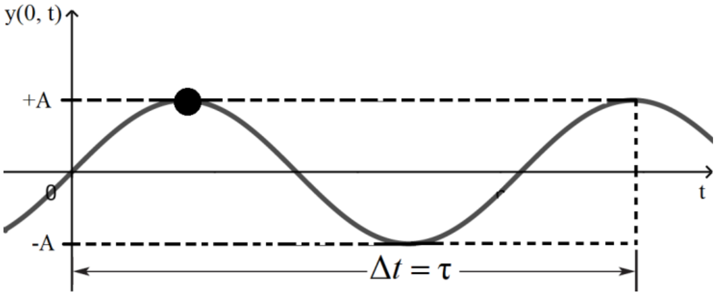
2.3.2. PERÍODO

O período τ descrito na Figura 18, é o intervalo de tempo necessário para que, uma partícula possa realizar o ciclo completo de seu movimento, ou seja, ela se desloca da posição *+A*, passa pela posição de equilíbrio (*ponto 0*) indo até *-A*, e volta novamente para *+A*, no intervalo de tempo $\Delta t = \tau$.

$$\tau = \frac{1}{f}. \tag{4}$$

> O tempo que leva para um objeto deslocado executar um ciclo completo de movimento oscilatório - de um extremo ao outro e de volta ao anterior - é chamado de período *t*. O inverso do período é a frequência *f*, que é o número de ciclos por unidade de tempo (TIPLER, 2000, p. 466).

Figura 18. Período de uma onda.



Fonte: Próprio autor.

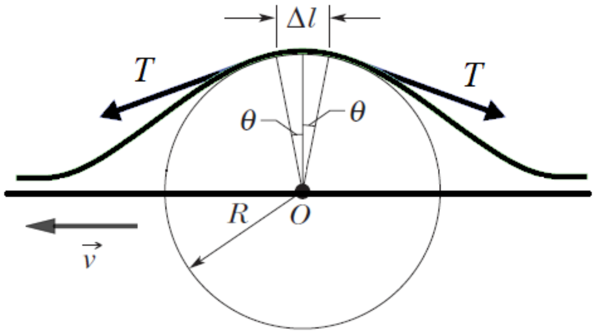
2.3.3. VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DA ONDA NUMA CORDA DISTENDIDA

Quando ocorre a propagação de uma onda num meio, sua velocidade está associada diretamente, ao comprimento, à frequência, e as propriedades do meio relacionado.

Em uma corda esticada, por exemplo, o deslocamento dessa onda, faz com que as partículas do meio (corda) comecem a oscilar, isso nos permite deduzir que, o meio é constituído de massa, para a existência da energia cinética, e elasticidade para que haja energia potencial, assim, a partir dessas propriedades (massa e elasticidade), juntamente com a frequência e o comprimento, se determina a velocidade de propagação da onda, nesse meio considerado.

Utilizando a segunda lei de Newton e considerando um pulso simétrico único, como o da Figura 19 se deslocando com velocidade *v*, e sentido da esquerda para a direita numa corda, se escolhermos um referencial *S*, onde o pulso permanece fixo, ou seja, para qualquer instante de tempo *t* nós deslocamos juntamente com o pulso, mantendo-o em observação, ao adotarmos esse referencial, isso nos permite concluir que, a corda parece estar passando sobre o observador. Assim, a mesma (corda) está se movendo da direita para a esquerda, com velocidade *v*.

Figura 19. Pulso em uma corda.



Fonte: Próprio autor.

Considerando um elemento infinitésimo na corda, de comprimento *Δl* localizado na região do centro do pulso, temos que, um arco de circulo de raio *R* é formado, ficando assim definido um ângulo medindo *2θ*, que se propaga da esquerda para a direita com velocidade *v*, na região central desse circulo.

Podemos observar também que, a tensão *T* na corda, quando considerada em módulo, puxa tangencialmente esse elemento nas duas extremidades, portanto, as componentes horizontais dessas forças se cancelam. Quando as componentes verticais são observadas, percebe-se que, elas se somam para produzir uma força restauradora radial *F*, assim, em módulo, a equação da força *F* pode ser calculada como na Equação (5) a seguir,

$$F = 2\left(Tsen\theta\right). \tag{5}$$

Tabela 1. Ângulos e senos de ângulos.

Ângulos em graus	Ângulos em radianos	Seno do ângulo em radianos	Variação Percentual (%)
0	0	0	0
1	0,01745	0,01745	0
2	0,03491	0,03490	0,001
3	0,05236	0,05234	0,002
4	0,06981	0,06976	0,005
5	0,08727	0,08716	0,011
10	0,17453	0,17365	0,088
15	0,26180	0,25882	0,298
30	0,52360	0,50000	2,360
45	0,78540	0,70711	7,829

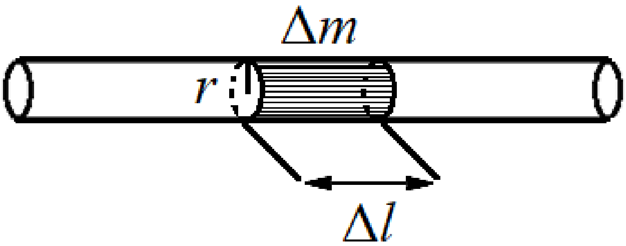
Fonte: Próprio autor.

De acordo com a Tabela 1, observamos que, é possível aproximar *senθ* por *θ*, devido o ângulo ser muito pequeno, daí, retomando a Equação (5) podemos reescrevê-la da seguinte forma,

$$F = T\left(2\theta\right) = T\frac{\Delta l}{R}. \tag{6}$$

Verificamos também que, a corda descrita na Figura 19 tem formato homogêneo, sendo constituída no todo por material com volume constante. Portanto, é possível entender que, a mesma deve apresentar distribuição uniforme, dessa forma, a massa Δm de um segmento qualquer, pode ser calculada como na Equação (7) a seguir, onde ρ corresponde à densidade linear da corda.

Figura 20. Densidade Linear ρ.



Fonte: Próprio autor.

Δm: massa de controle

r: raio

$\Delta v = \pi r^2 \Delta l$: volume

$\Rightarrow \mu = \dfrac{\Delta m}{\Delta v}$: densidade volumétrica

$\Rightarrow \mu = \dfrac{\Delta m}{\pi r^2 \Delta l} \Rightarrow \mu \pi r^2 = \dfrac{\Delta m}{\Delta l}$

$\Rightarrow \rho = \mu \pi r^2$

$\Rightarrow \rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta l}$

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta l \tag{7}$$

Para o instante de tempo t como mostrado na Figura 19, vemos que o elemento está fazendo o deslocamento na forma de um arco de círculo, assim, é possível notar também que, ele possui aceleração centrípeta em direção e sentido ao seu centro, com

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{8}$$

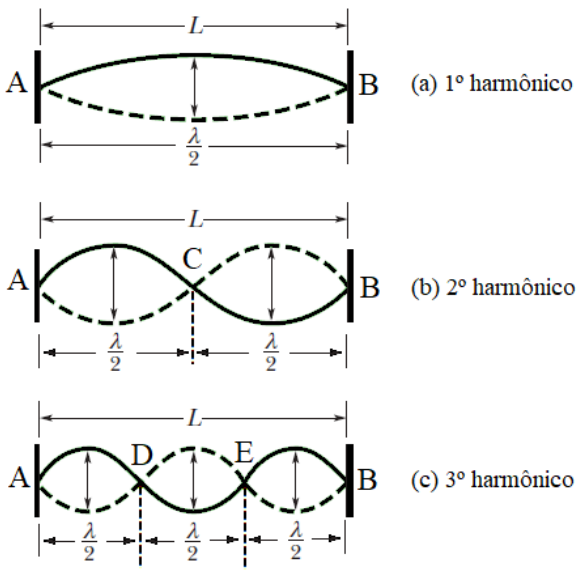
Dessa forma, a partir da segunda lei de Newton e substituindo as Equações (6), (6(7) e (8) obtemos: $F = ma \quad \Rightarrow \quad T\frac{\Delta l}{R} = (\rho\ \Delta l)\frac{v^2}{R}$, e então, fazendo as simplificações devidas, concluímos que:

$$v^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{9}$$

2.4. SOM EMITIDO POR UMA CORDA DEDILHADA

O tratamento a seguir está fundamentado, de acordo com o conteúdo apresentado em, Halliday (2009) e em Alvarenga e Máximo (1993). Cordas esticadas, como as de um violão ou de um violino, emitem sons quando são dedilhadas. Esse fenômeno (som) ocorre porque a corda, quando é colocada para vibrar, como representado na Figura 21 a seguir, inicia um processo de compressões e rarefações no ar, que está envolto sobre ela. Assim, essas compressões e rarefações começam a se propagar através do meio (ar), constituindo dessa forma uma onda longitudinal, que segundo a intensidade da frequência produzida pela corda, pode ou não, ser sensível aos ouvidos.

Figura 21. Representação de uma corda oscilando com ambas as extremidades fixas.



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, a frequência da onda sonora é caracterizada pela frequência de vibração da corda, portanto, a corda é a fonte geradora do som que se produz.

Na Figura 21, como pode ser observado, são gerados diferentes modos de vibração, que ocorrem, devido à superposição das ondas, que incidem e se refletem nos pontos de fixação *A* e *B* da corda. Assim, essa vibração pode ocorrer como descrito em (*a*), (*b*) ou (*c*) e etc. Analisando ainda a Figura 21, também é possível destacar que, alguns pontos da corda não oscilam, estes são denominados nós das ondas, indicados pelas letras *C*, *D* e *E*.

O ponto médio, que se encontra localizado entre dois nós consecutivos, sempre vibra com a máxima amplitude - quando ele é observado em relação à amplitude dos outros pontos da corda, sendo que este ponto é descrito como o ventre ou antinó. Ainda, nos modos de vibração representados na Figura 21, temos na corda, uma onda estacionária, pois, a energia de vibração das ondas, está presa no intervalo entre dois nós, portanto, não há a propagação dessa energia através desses pontos.

2.5. RESSONÂNCIA GERADA A PARTIR DE ONDAS ESTACIONÁRIAS

Quando observamos um violão, para a emissão de uma nota musical, com uma frequência específica nesse instrumento, a mesma (corda), deve estar esticada com a tensão devidamente determinada.

Digamos agora que, um deslocamento é provocado nessa corda, em algum dos pontos entre as bases de apoio da mesma, ou seja, um dedilhar na corda em qualquer ponto de sua extensão de vibração, assim, uma onda no formato senoidal e contínua, como descrita na Figura 21, inicia a propagação, supondo sentido para a direita. Quando essa onda chega à extremidade direita, ela reflete, e inicia o processo de propagação retornando novamente para a esquerda. Se uma onda que está se propagando para a esquerda, defronta com outra que ainda está se propagando para a direita, aquela onda que está a se propagar para a esquerda, quando atinge a extremidade à esquerda, ela é refletida novamente, e a onda recém-criada torna a se propagar para o sentido da direita, deparando com as ondas que estão a se propagar, para a esquerda e para a direita.

De acordo com a observação detalhada anteriormente, temos diversas ondas que se superpõe e que interferem entre si. Portanto, para determinadas frequências, o efeito da interferência, gera uma onda estacionária com nós - lugares de amplitude nula onde as ondas se cancelam mutuamente, e antinós - lugares onde as cristas e vales produzem distúrbios que rapidamente se alternam para cima e para baixo. Assim, uma onda estacionária - ondas refletidas que se somam com ondas incidentes, é criada quando há ressonância, dessa forma, há o ressoar da corda nessas frequências - frequências de ressonância.

De outro modo, temos ainda que, quando a corda é colocada em movimento, numa frequência diferente da frequência de ressonância, não há a formação de uma onda estacionária. Assim, a interferência das ondas que estão em propagação para a esquerda, com as que estão a se propagar para a direita, tem como resultado, pequenas e imperceptíveis oscilações na corda.

2.6. FREQUÊNCIA DA EMISSÃO DOS SONS NA CORDA VIBRANTE

Na Figura 21 (*a*) podemos observar que, a corda está oscilando com a frequência mínima entre os modos de vibração possível, denominada essa de frequência fundamental, e o modo de vibração, é descrito como *1º harmônico*.

Temos ainda que, λ_1 é o comprimento de onda que representa o *1º harmônico*, portanto, a partir da Figura 21 (*a*) obtemos $\frac{\lambda_1}{2} = L \Rightarrow \lambda_1 = 2L$, como $v = \lambda_1 \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{v}{\lambda_1}$, assim $f_1 = \frac{v}{2L}$ com v como descrito na equação (9), dessa forma:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{10}$$

Na Figura 21 (*b*) temos o *2º harmônico*, portanto $\lambda_2 = L$, e como $v = \lambda_2 \cdot f_2 \Rightarrow f_2 = \frac{v}{L}$ $\Rightarrow f_2 = 2f_1$.

De forma análoga temos que, o modo de vibração na Figura 21 (*c*) é o *3º harmônico*, portanto $3\left(\frac{\lambda_3}{2}\right) = L \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2L}{3}$ e $f_3 = \frac{v}{\lambda_3} \Rightarrow f_3 = \left(\frac{3}{2L}\right)v \Rightarrow f_3 = 3f_1$.

A partir do raciocínio exposto anteriormente, podemos concluir que, a corda pode apresentar também outros modos de vibração, descritos por: *4º harmônico*, *5º harmônico*, *6º harmônico,..., n-ésimo harmônico*; com frequências: $f_4 = 4f_1$, $f_5 = 5f_1$, $f_6 = 6f_1$,..., $f_n = nf_1$. Portanto:

$$f_n = nf_1 \Rightarrow f_n = n\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \qquad \text{para } n = 1, 2, 3,... \qquad (11)$$

Quando observamos a expressão que origina a frequência f_j, do som fundamental que uma corda emite, percebemos que, há a dependência de três fatores, sendo eles; a tensão *T*, a densidade linear ρ e a extensão *L*. Dessa forma, é possível compreendermos como um violão - por exemplo, pode emitir sons com frequências diferentes, ou seja, notas musicais diversas.

No violão, quando a cravelha é girada, há uma variação na tensão da corda, de forma que, na emissão do som – corda dedilhada, a mesma pode soar em determinada altura.

Observando fisicamente as cordas de um violão, percebemos também que, cada uma delas tem um diâmetro diferente, assim, elas apresentam cada qual um valor de ρ, dessa forma, mesmo que o comprimento entre cada uma delas seja igual, e a mesma tensão esteja aplicada sobre todas, notas diferentes serão obtidas, com frequências diferentes. Quanto menor for o diâmetro da corda, mais agudo o som será, pois, de fato, a densidade terá um valor menor. Isso acontece, devido a frequência e a raiz quadrada da densidade serem inversamente proporcionais, conforme observado na Equação (11). É possível verificar ainda que, numa mesma corda, um músico consegue produzir notas diferentes, apertando- a em regiões diferentes da sua extensão, de modo que ela – a corda, possa oscilar com valores de *L* diferentes.

> Os comprimentos de cordas vibrantes no violão ou no violino são diminuídos com a pressão dos dedos em certos pontos. De modo análogo, a altura aumenta segundo a raiz quadrada da tensão. Daí, a necessidade de afinar um violão ou um violino, pois com o tempo a tensão na corda varia e ela passa a produzir sons de alturas diferentes. Finalmente, a espessura da corda também afeta a altura do som, na razão inversa da raiz quadrada de ρ (FIGUEIREDO, 2000, p. 146).

De forma genérica, quando uma corda é colocada para vibrar, há o resultado da superposição de diferentes harmônicos, que são possíveis emitir. Outra qualidade observada é que, o formato de onda é uma particularidade do timbre do som que se emite. Dessa forma, o timbre do som se caracteriza pela presença dos harmônicos na vibração.

> [...] o timbre do som é uma qualidade que permite distinguir sons de mesma altura e mesma intensidade. Ele depende da forma de *u(x, t)*, e, portanto, da distribuição de todas as supertônicas. Assim, sons de mesmas altura e intensidade podem ser produzidos por cordas, cujas vibrações são ocasionadas por dedilhamento, ou por percussão, como no caso do piano, ou ainda, pelo atrito com um arco, como no caso do violino. O que distingue esses sons é o timbre, pois a forma de *u(x, t)* é diferente em cada caso (FIGUEIREDO, 2000, p. 146).

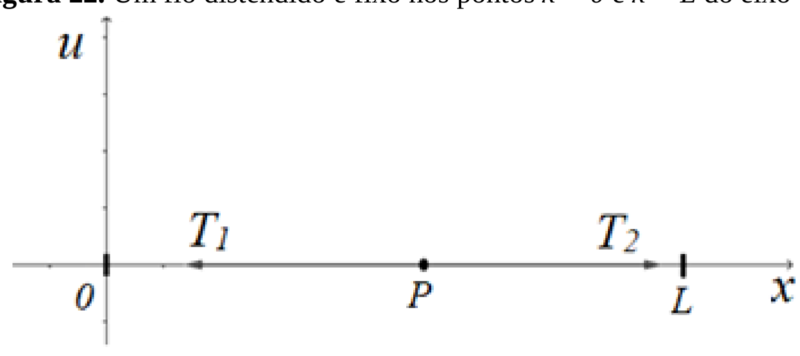
2.7. A EQUAÇÃO DAS CORDAS VIBRANTES

Neste tópico, utilizamos como referência bibliográfica o trabalho de Butkov (1998), de forma conceitual. Para entender a equação das cordas vibrantes, segundo o modelo de d'Alembert, faz-se necessário observar que, condicionamos as oscilações em apenas uma dimensão. Dessa forma, o meio o qual deve ser considerado, oscila somente no formato transversal (perpendicular).

É preciso também admitir que, o material (meio) deve ser perfeitamente elástico e flexível, não apresentando resistência às dobras quando está tensionado, além disso, para qualquer instante de tempo t, o fio não está sujeito a nenhuma outra força horizontal, exceto a própria tensão T, assim, não haverá, nem deslocamento nem velocidade horizontal inicial de seus pontos, portanto, a força tangencial é constante em todos os instantes e em todos os elementos infinitésimos (com alto grau de precisão) e igual a T. Dessa forma, com o objetivo de referir-se a um exemplo conciso, para o melhor entendimento e contextualização, será utilizado um fio esticado, cujo comportamento é o mesmo de uma corda tracionada por uma cravelha num instrumento musical, no caso um violão ou violino.

Na Figura 22, consideramos a posição de equilíbrio horizontal como direção Ox. Nesse sistema, está representado um fio com a medida L de extensão, e suas extremidades fixas nos pontos $x = 0$ e $x = L$. Assim, se escolhermos arbitrariamente um ponto P qualquer no referido segmento, temos que, a parte esquerda do fio em P, exerce sobre a porção direita uma força T_1, com sentido da força à esquerda sendo equilibrada pela força T_2, cuja porção da direita atua sobre a da esquerda. Desta forma é definida a tensão T de equilíbrio, constante e supostamente uniforme ao longo de toda a corda, assim temos $T_1 = T_2 = T$.

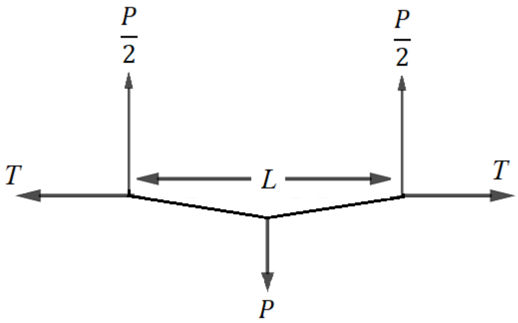
Figura 22. Um fio distendido e fixo nos pontos $x = 0$ e $x = L$ do eixo Ox.



Fonte: Próprio autor.

"Não podemos fazer uma onda se propagar em uma corda a menos que a corda esteja sob tensão, o que significa que foi alongada e mantida alongada por forças aplicadas a suas duas extremidades. A tensão T da corda é igual ao módulo comum dessas duas forças" (HALLIDAY, 2009, p. 124). Na Figura 22, verificamos ainda que, além das forças tensoras T_1 e T_2, o sistema pode também estar submetido à ação de forças externas como, resistência ao movimento oposta pelo meio onde está o fio, a gravidade, ou forças tendentes a restabelecer a posição de equilíbrio no fio.

Figura 23. Atuação das forças num fio esticado.



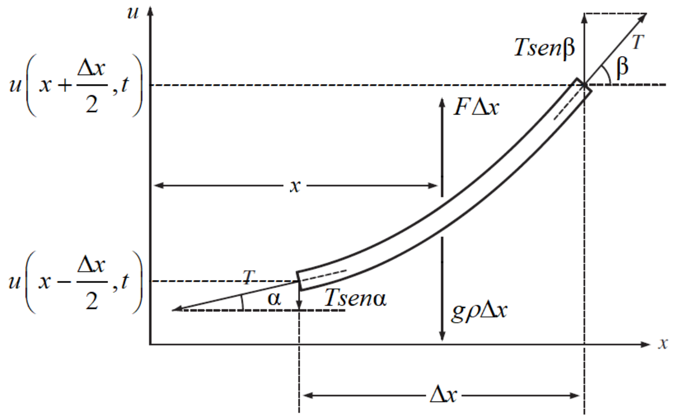
Fonte: Próprio autor.

No desenvolvimento a seguir, a força será indicada por T (tensão) e não por F, para facilitar o entendimento. Quando esse fio é tracionado por uma força peso P, no ponto médio entre $x = 0$ e $x = L$, a resultante das forças, age como descrito na Figura 23. Antes de sofrer a ação da força P, o fio distendido e em repouso, pode ser considerado um corpo extenso que está em equilíbrio, sob a ação de um sistema de forças coplanares.

Segundo Butkov (1998), se admitirmos que o fio possa ser deformado, como observado na Figura 23, a partir da sua posição de repouso (quase uma reta), por meio de forças moderadas (intensidade das forças pequenas em relação à tração T), que agirão de forma contínua para promover um deslocamento inicial, ou seja, um movimento transversal inicial em seus pontos, é pertinente supor que, a inclinação no fio deformado deverá ser pequena durante todo o movimento, assim, por exemplo, a inclinação máxima – coeficiente angular, não deve ser superior a 0,05.

> Os problemas físicos que conduzem à equação de onda de dimensão um não se tornam triviais com o conhecimento da solução geral. Os problemas físicos impõem certas restrições sobre a solução $u(x,t)$. Por exemplo, como um problema típico de fio distendido geralmente implica que o fio, de um comprimento L dado, esteja *fixo* em suas extremidades $x = 0$ e $x = L$, segue-se que a solução deverá satisfazer as condições $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$ para todos os valores da variável t. Tais condições são apropriadamente chamadas de *condições de fronteira* ou *condições de contorno* (BUTKOV, 1998 , p. 294).

Figura 24. Decomposição vetorial das tensões.



Fonte: Próprio autor.

Para um trecho arbitrário do fio distendido na Figura 24, a segunda lei de Newton aplicada ao elemento Δx, nos indica que, a interação da força externa total, devido à força de tensão nas extremidades desse elemento Δx, deve ser igual ao valor do produto da massa, pela aceleração do centro de massa do fio. Como não há aceleração na direção horizontal, as componentes horizontais para qualquer instante de tempo t, satisfazem a seguinte condição,

$$T\cos\alpha = T\cos\beta. \tag{12}$$

Tabela 2. Ângulos, cossenos e tangentes de ângulos.

Ângulos em graus	*Ângulos em radianos*	*Cosseno do ângulo em radianos*	*Tangente do ângulo*	$1-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\alpha$
0	0	1	0	0
0,5000	0,00873	0,99996	0,00873	0,99996
1,0000	0,01745	0,99985	0,01746	0,99985
2,2906	0,03998	0,99920	0,04000	0,99920
2,8400	0,04956	0,99877	0,04996	0,99875
2,8600	0,04996	0,99875	0,05000	0,99875
5,0000	0,08277	0,99619	0,08749	0,99617
5,7106	0,09967	0,99504	0,10000	0,99497
10	0,17453	0,98481	0,17633	0,98445
30	0,52360	0,86603	0,57735	0,83333

Fonte: Próprio autor.

Observando a Tabela 2, vemos que, para o valor de α pequeno, têm-se que tg α é pequeno, assim para tg $\alpha < 0{,}05$, implica cos α aproximadamente 1, validando a Equação (13),

$$\cos\alpha \cong 1-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\alpha \cong 1, \tag{13}$$

com raciocínio idêntico verificado para o cos *β*.

Para a dedução da equação que deverá ser satisfeita pela deflexão *u* do fio, em todo ponto *x* e em qualquer instante *t*, é necessário considerar um elemento *Δx*, como mostrado na Figura 24, assim, com as aproximações descritas na Equação (13) temos que $\Delta x \cong \Delta s$, daí,

$$T(\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha) + F\Delta x - \rho g \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Ainda, a partir da Figura 24, deduzimos a Equação (14) onde, *ρ* é a densidade do fio e *ρΔx* corresponde à massa do elemento, *F* é a força externa por unidade de comprimento no ponto *x*, e $\partial^2 u / \partial t^2$ é a aceleração do elemento na direção transversal. Desta forma, e com as devidas aproximações, devido *α* ser pequeno, temos a seguinte expressão:

$$\text{sen}\alpha \cong \text{tg}\,\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right). \tag{15}$$

Como nossa aproximação de deslocamentos ínfimos implica (*senα<<1*), assim *senα* é aproximadamente igual à *tgα*, que é o coeficiente angular do perfil da corda, dado por $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$.

Ainda, na Figura 24 é possível observar que, todas as grandezas são calculadas no intervalo *Δx* da corda. No ponto *x*, temos forças idênticas, mas de sinal contrário, devido à porção da corda que está à esquerda de *x*. Logo, a distribuição das forças resultantes, sobre esse elemento *Δx* da corda, é deduzida como a seguir, a partir da Equação (14), e Equação (15):

$$T\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right)}{\Delta x} + F\frac{\Delta x}{\Delta x} - \rho g \frac{\Delta x}{\Delta x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{16}$$

A partir da Figura 24, podemos considerar: $\tilde{x} = x + \frac{\Delta x}{2}$ e $\tilde{x}_0 = x - \frac{\Delta x}{2}$ e fazemos: $\tilde{x} - \tilde{x}_0 = \Delta x$. Deste modo, quando $\tilde{x}$ tender a $\tilde{x}_0$, *Δx* tende a zero e, na Equação (16), aplicamos o limite em ambos os lados, daí temos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(T\,\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\right)}{\Delta x}+F-\rho g\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.$$

Como T e ρ são constantes, e, pela decomposição das forças como na Figura 24, temos que $F=\rho g$, logo:

$$T\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\right)}{\Delta x}\right)=\rho\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.$$

Pela definição da segunda derivada de u relativo a x, advindo da teoria do cálculo diferencial, obtemos:

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{17}$$

Acima, na Equação (17), encontramos a equação das cordas vibrantes, que foi obtida por Euler e d'Alembert. Ainda, em relação à Equação (9), e após reorganizar os termos, é obtida a seguinte equação:

$$v^2=\frac{T}{\rho}\quad\Rightarrow\quad\frac{\rho}{T}=\frac{1}{v^2}, \tag{18}$$

assim, a partir da combinação das Equações (17) e (18), encontramos:

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{19}$$

sendo $x\in[0,L]$, $u\in\mathbb{R}^+$, $t\in[0,n)$ e $v\in\mathbb{R}$.

A seguir, verificamos que a função de onda apresentada no Exemplo 1, corresponde a uma solução para a equação de onda linear. Assim, consideremos o caso de:

$$u(x,t)=\frac{3}{\left(x-2t\right)^{2}+1,5}.$$

Calculando as segundas derivadas de u relativas à x e t, obtemos para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a seguinte equação;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{72(8t^2-8tx+2x^2-1)}{(8t^2-8tx+2x^2+3)^3} \text{ e}$$

cancelando os termos idênticos, temos a nova equação, como a seguir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{72}{1}.$$

Para $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{288(8t^2-8tx+2x^2-1)}{(8t^2-8tx+2x^2+3)^3} \text{ e}$$

cancelando os termos idênticos, temos a nova equação para $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, como a seguir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{288}{1}.$$

Igualando as equações encontradas para $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, obtemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Quando comparamos o resultado encontrado no exemplo descrito anteriormente, com os dados apresentados na Equação (19), observamos que a função de onda é solução para a equação de onda linear, se a velocidade de deslocamento do pulso for $v = 2m/s$.

Capítulo 3

Solução Geral da Equação de Onda

Neste capítulo, utilizando o método de Fourier, verificamos aplicações contextualizadas da equação de ondas. Trataremos assim de realizar uma análise da teoria das séries trigonométricas e a seguir, o levantamento de alguns dados, com a finalidade de, extrair informações disponíveis numa corda, tais como (massa, diâmetro, tensão, densidade, etc.), para que nesse dispositivo físico (corda) haja um fenômeno, como por exemplo: vibração, pulso de onda, amplitude, velocidade de deslocamento etc.

3.1. Conceitos introdutórios sobre as séries de Fourier

Neste tópico discorremos sobre as séries trigonométricas, que também são chamadas de séries de Fourier. Realizaremos inicialmente uma breve análise, correspondente à forma de expressar uma função dada, através de uma série infinita de senos e cossenos.

Para análise das séries de Fourier, é necessário descrever inicialmente alguns conceitos, que se associam às funções trigonométricas. Assim, nossa primeira definição a ser discutida, é a de funções periódicas.

Segundo Figueiredo (2000), uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é periódica, e pode ser definida como, aquelas para as quais

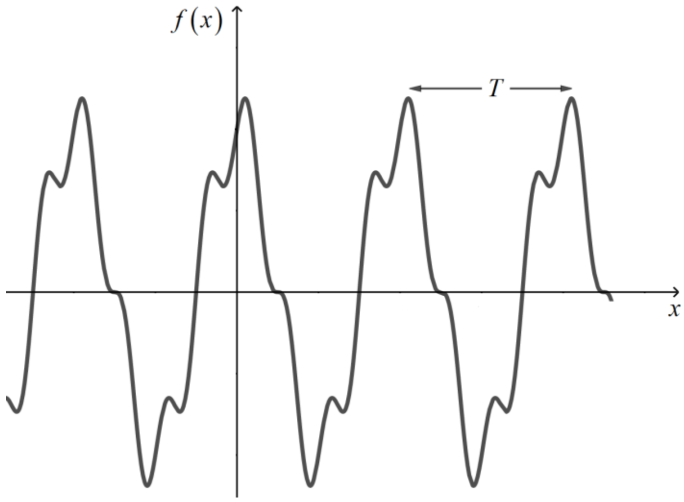
$$f\left(x\right)=f\left(x+T\right) \tag{20}$$

para qualquer *x*. O menor valor da constante *T*, que satisfaz a Equação (20), chama-se período da função, portanto:

$$f\left(x\right)=f\left(x+kT\right),\quad k=0\quad k=\pm 1,\quad k=\pm 2,\cdots. \tag{21}$$

Na Figura 25 temos um exemplo de função periódica.

Figura 25. Função periódica.



Fonte: Próprio autor.

> Em geral, *kT* é um período, onde *k* é um inteiro positivo, negativo ou nulo. Bom, $k = 0$, implicaria em dizer que 0 é um período da *f*. Mas isso não tem interesse pois 0 é um período de qualquer função. Por esse motivo, sempre que falamos em período *T*, consideramos $T \neq 0$. O menor período positivo é chamado o *período fundamental*. Entretanto é praxe usar apenas a expressão *período* para designar período fundamental. Assim, quando dizemos que 2π é o período da função sen *x*, estamos nos referindo ao período fundamental. É claro que 4π, -4π, 6π, etc., são também períodos do sen *x* (FIGUEIREDO, 2000, 13).

Outra definição importante é a de convergência. Uma série numérica converge se, a sucessão das somas parciais também converge. A sucessão dessas somas parciais é aquela para a qual o termo geral é representado como:

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} a_n. \tag{22}$$

As funções também podem ser classificadas em pares ou ímpares. Desta forma, uma função *f(x)* é *impar* se *f(-x)* = *-f(x)*, por exemplo *f(x)* = sen *x*; *f(x)* é *par* se *f(-x)* = *f(x)*, por exemplo *f(x)* = cos *x*.

Consideremos agora os conceitos vistos em (20), (21) e (22); e uma função *f(t)* periódica com período *T*, como aquela descrita na Figura 25. Esta função, representada graficamente na Figura 25, pode ser escrita através de infinitas somas parciais, conforme a série trigonométrica $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + ... + b_1 \text{sen}\omega_0 t + b_2 \text{sen}2\omega_0 t + \cdots$.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen} n\omega_0 t\right) \tag{23}$$

com $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

As séries como as descritas na Equação (23), são chamadas *séries trigonométricas de Fourier*.

3.2. INTERPRETAÇÃO EXPERIMENTAL E ANALÍTICA

Segundo o trabalho de Nascimento (2021), a equação geral de ondas é representada da seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}(\lambda_n x)\left[c_1 \cos(c\lambda_n t) + c_2 \text{sen}(c\lambda_n t)\right] + u_0. \tag{24}$$

Na Equação (24) temos que, c corresponde à velocidade de perturbação da onda na corda, sendo:

$$\tilde{\psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}(\lambda_n x), \tag{25}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \tag{26}$$

$$c_1 = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x)(f(x) - u_0)dx \ \text{ e} \tag{27}$$

$$c_2 = \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^L \tilde{\psi}_n(x)g(x)dx. \tag{28}$$

Substituindo as Equações (25) e (26) na Equação (27), obtemos:

$$c_1 = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x)(f(x) - u_0)dx \quad \Rightarrow \quad c_1 = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x)dx \text{, daí:}$$

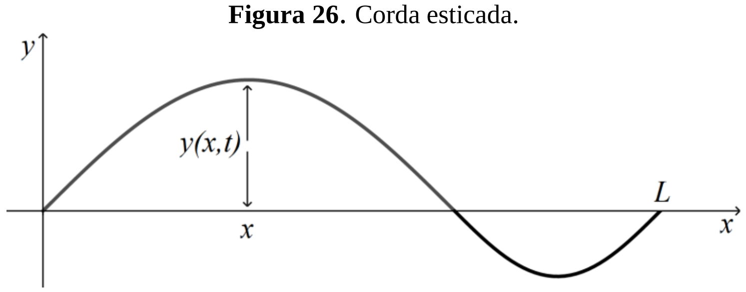
$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{L}} f(x) \int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right) dx. \tag{29}$$

Nas Equações (25) e (26), respectivamente, $\tilde{\psi}_n$ e λ_n representam as autofunções e os autovalores. Raciocínio idêntico pode ser utilizado para encontrar c_2.

3.2.1. UMA APLICAÇÃO NA CORDA VIBRANTE

Uma corda de comprimento *L* é esticada entre os pontos (*0*, *0*) e (*L*, *0*) do eixo *x*, como mostra a Figura 26. No instante $t = 0$, ela apresenta a forma por *f(x)*, com $0 < x < L$, quando é abandonada de sua posição de repouso. Encontre o deslocamento dessa corda em um instante posterior qualquer.

Figura 26. Corda esticada.



Fonte: Próprio autor.

De acordo com a Equação (19) e observando a figura, podemos escrever a equação das cordas vibrantes como

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

onde *y(x, t)* corresponde ao deslocamento a partir do eixo *x* no instante *t*, conforme se observa na Figura 26.

Como as extremidades da corda estão afixadas em $x = 0$ e $x = L$,

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

Como a forma inicial da corda é dada por *f*(*x*),

$$y(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

Como a velocidade inicial da corda é zero,

$$y_t(x,0) = 0 \qquad 0 < x < L$$

Para a resolução deste problema de valor de contorno, consideramos $y = XT$.

Assim, $XT'' = v^2 X''T$ ou $\dfrac{T''}{v^2 T} = \dfrac{X''}{X}$.

Chamando $-\lambda^2$, a constante de separação, temos

$$T'' + \lambda^2 v^2 T = 0 \qquad\qquad X'' + \lambda^2 X = 0$$

e

$$T = A_1 \operatorname{sen} \lambda vt + B_1 \cos \lambda vt \qquad X = A_2 \operatorname{sen} \lambda x + B_2 \cos \lambda x$$

Uma solução é, assim, apresentada como

$$y(x,t) = XT = \left(A_2 \operatorname{sen} \lambda x + B_2 \cos \lambda x\right)\left(A_1 \operatorname{sen} \lambda vt + B_1 \cos \lambda vt\right)$$

De $y(0,t) = 0, A_2 = 0.$ Então

$$y(x,t) = B_2 \operatorname{sen} \lambda x \left(A_1 \operatorname{sen} \lambda vt + B_1 \cos \lambda vt\right) = \operatorname{sen} \lambda x \left(A \operatorname{sen} \lambda vt + B \cos \lambda vt\right)$$

De $y(L,t) = 0$, temos $\operatorname{sen} \lambda L \left(A \operatorname{sen} \lambda vt + B \cos \lambda vt\right) = 0$, de modo que $\operatorname{sen} \lambda L = 0$, $\lambda L = n\pi$ ou $\lambda = \dfrac{n\pi}{L}$, pois o segundo fator não deve anular-se. Ora,

$$y_t(x,t) = \operatorname{sen} \lambda x \left(A\lambda v \cos \lambda vt - B\lambda v \operatorname{sen} \lambda vt\right)$$

$y_t(x,0) = (\operatorname{sen} \lambda x)(A\lambda v) = 0$, donde $A = 0$. Portanto

$$y(x,t) = B \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi vt}{L}$$

Com a finalidade de satisfazer à condição $y(x,0)=f(x)$, será necessário superpor soluções. Isto nos dá

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi vt}{L}$$

Desta forma temos que

$$y(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

e da Teoria das séries de Fourier,

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx$$

Obtendo como resultado final

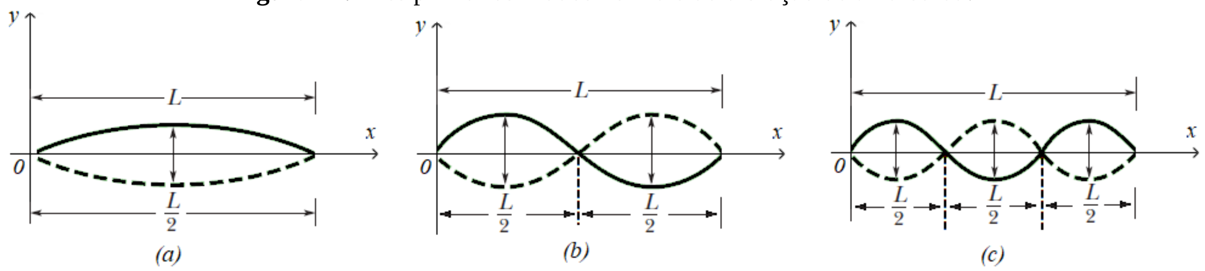
$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi vt}{L}$$

que podemos verificar ser a solução.

Os termos desta série representam os *modos normais* ou *normais de vibração.* A frequência do modo normal de ordem *n*, f_n se obtém a partir do termo contendo $\cos\frac{n\pi vt}{L}$ e é dada por $2\pi f_n=\frac{n\pi v}{L}$ ou $f_n=\frac{nv}{2L}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ como visto também na Equação (11).

Todas as frequências são múltiplos inteiros da menor frequência f_1, portanto as vibrações da corda irão produzir um tom musical, do mesmo modo que uma corda de violão ou violino. Na Figura 27 são ilustrados os três primeiros modos normais de vibração de uma corda. Com o passar do tempo, os formatos desses modos variam, das curvas com traço cheio da figura, para as curvas tracejadas, e vice-versa; o tempo de um ciclo completo é o período, e a recíproca desse período é a frequência.

Figura 27. Três primeiros modos normais de vibração de uma corda.



Fonte: Próprio autor.

O modo (*a*) é o *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*; (*b*) e (*c*) equivalem ao *segundo harmônico* e o *terceiro harmônico* (ou *primeiro sobretom* e *segundo sobretom*), respectivamente.

3.3. PROPOSTA AO PROFESSOR: UMA ATIVIDADE RELATIVA ÀS ONDAS MECÂNICAS

Neste capítulo vamos considerar um problema específico, considerando uma corda de aço, cujos parâmetros são dados na Tabela 3. Apresentaremos resultados para solução analítica da equação de onda, fixando o tempo e variando a posição *x*, bem como os respectivos gráficos. Com isso, propomos uma aplicação física relacionada às ondas, para que o professor possa utilizá-la em sala de aula.

No trabalho de Nascimento (2021), temos a solução analítica do problema de valor de fronteira relacionado à equação de onda, a qual foi modelada no Capítulo 2 desse trabalho. A partir das condições dadas, desde a Equação (24) até a Equação (29), vamos considerar uma corda de aço, cujas características estão na Tabela 3.

Tabela 3. Características de posição e físicas de uma corda de aço.

Características de posição	
$L = 0,635m$	comprimento
$t_i = 0s$	tempo inicial
$t_f = 10s$	tempo máximo
$u_0 = 0m$	amplitude inicial
$f(x) = 5\ 10^{-3}m$	deslocamento inicial
$g(x) = 0m$	velocidade de deslocamento inicial
Características físicas	
$\rho = 7.900kgm^{-3}$	densidade
$d = 0,254\ 10^{-3}m$	diâmetro
$T = 78,5N$	tensão

Fonte: Próprio autor.

O coeficiente específico é dado por: $c = \mu/T$, sendo $\mu = \pi \rho d^2/4$ e considerando a Tabela 3, temos: $c = 5,09\ 10^{-6} m^{-2} s^{-2}$ e $\mu = 4,00\ 10^{-4}\ kgm^{-1}$.

Com essas características, a solução específica da equação de onda é dada por:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10^{-4}\left(1-\cos(n\pi)\right)}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \tag{30}$$

A expressão dada pela Equação (30) é uma série numérica, sendo n o valor tendendo ao infinito. Por isso, devemos truncá-la, considerando a soma parcial para n = 1, 2, 3,..., N, sendo N o número, natural, de parcelas da soma parcial.

Fixando o tempo em $t_0 = 5s$, por exemplo, podemos escrever as somas parciais como:

$$u_N(x)=u(x,t_0)=\sum_{k=1}^{N}a_k(x) \tag{31}$$

sendo os termos gerais dados por:

$$a_k(x)=\frac{10^{-4}\left(1-\cos(k\pi)\right)}{k\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{5ck\pi}{L}\right) \tag{32}$$

para k = 1, 2, 3, ..., N. Logo, considerando que $\cos\left(n\pi\right)=1$, se n é par e $\cos\left(n\pi\right)=-1$, se n é ímpar, temos que:

$$a_k(x)=\begin{cases}0, \text{ se } k \text{ é par,}\\ \dfrac{2\,10^{-4}}{k\pi}\operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi}{L}x\right)\cos\left(\dfrac{5ck\pi}{L}\right), \text{ se } k \text{ é ímpar.}\end{cases} \tag{33}$$

A partir das Equações (31) e (33), podemos escrever:

- caso N = 1, $u_1(x)=\sum_{k=1}^{1}a_k(x)=a_1(x)$,
- se N = 2, $u_2(x)=\sum_{k=1}^{2}a_k(x)=a_1(x)+a_2(x)=a_1(x)$
- se N = 3, $u_3(x)=\sum_{k=1}^{3}a_k(x)=a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)=a_1(x)+a_3(x)$

e assim por diante. Assim a solução truncada da equação de onda, é dada por:

$$u_N(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} a_k(x), \text{ se } N \text{ é par,} \\ \sum_{k=1}^{N} a_k(x), \text{ se } N \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{34}$$

Considerando a expressão dada pela Equação (34), vamos construir os resultados da equação de onda truncada, para N = 1, 3, 5 e 11, os quais estão representados a partir da Tabela 4 até a Tabela 7.

Para construção das tabelas, vamos dividir o comprimento da corda L em 20 partes, assim, teremos $x_0 = 0$, $x_1 = L/20$, $x_2 = 2L/20$, $x_3 = 3L/20$,..., $x_{20} = L$, daí, $x_j = jL/20$, j = 1, 2,...,20. A escolha do número de partes, que a corda deve ser dividida, fica a critério do professor. Na sequência, também mostramos os gráficos das respectivas tabelas.

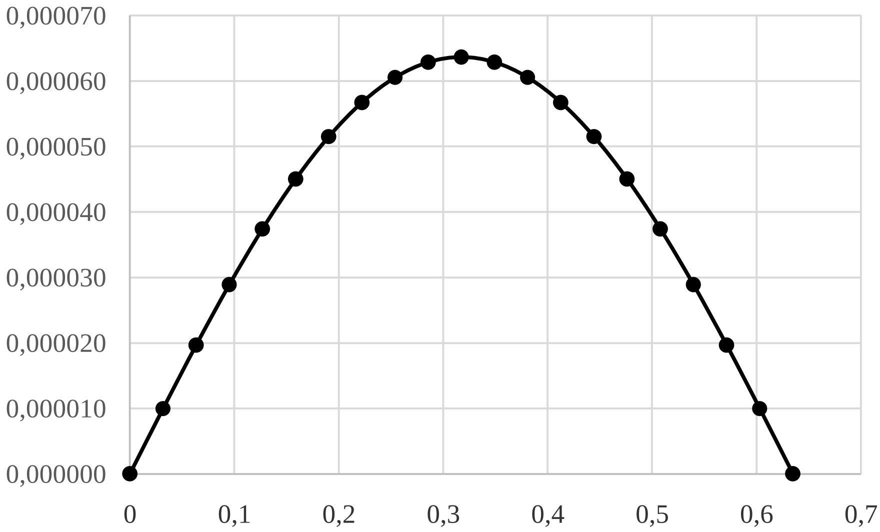
Na Tabela 4 temos os resultados da amplitude de onda, fixando o tempo em 5s e variando na posição x, $x \in [0; 0,635]$, N = 1, e na Figura 28 vemos a representação gráfica desses pontos. A partir da Equação (34) temos que $u_1(x) = u_2(x)$, para todo $x \in [0; 0,635]$.

Tabela 4. Amplitude de onda para 1 termo da soma parcial.

j	x(m)	$a_1(x)$	$u_1(x)$(m)
0	0	0	0
1	0,03175	9,96 10^{-6}	9,96 10^{-6}
2	0,06350	1,97 10^{-5}	1,97 10^{-5}
3	0,09525	2,89 10^{-5}	2,89 10^{-5}
4	0,12700	3,74 10^{-5}	3,74 10^{-5}
5	0,15875	4,50 10^{-5}	4,50 10^{-5}
6	0,19050	5,15 10^{-5}	5,15 10^{-5}
7	0,22225	5,67 10^{-5}	5,67 10^{-5}
8	0,25400	6,05 10^{-5}	6,05 10^{-5}
9	0,28575	6,29 10^{-5}	6,29 10^{-5}
10	0,31750	6,37 10^{-5}	6,37 10^{-5}
11	0,34925	6,29 10^{-5}	6,29 10^{-5}
12	0,38100	6,05 10^{-5}	6,05 10^{-5}
13	0,41275	5,67 10^{-5}	5,67 10^{-5}
14	0,44450	5,15 10^{-5}	5,15 10^{-5}
15	0,47625	4,50 10^{-5}	4,50 10^{-5}
16	0,50800	3,74 10^{-5}	3,74 10^{-5}
17	0,53975	2,89 10^{-5}	2,89 10^{-5}
18	0,57150	1,97 10^{-5}	1,97 10^{-5}
19	0,60325	9,96 10^{-6}	9,96 10^{-6}
20	0,63500	0	0

Fonte: Próprio autor.

Figura 28. Representação gráfica dos pontos dados na Tabela 4.



Fonte: Próprio autor.

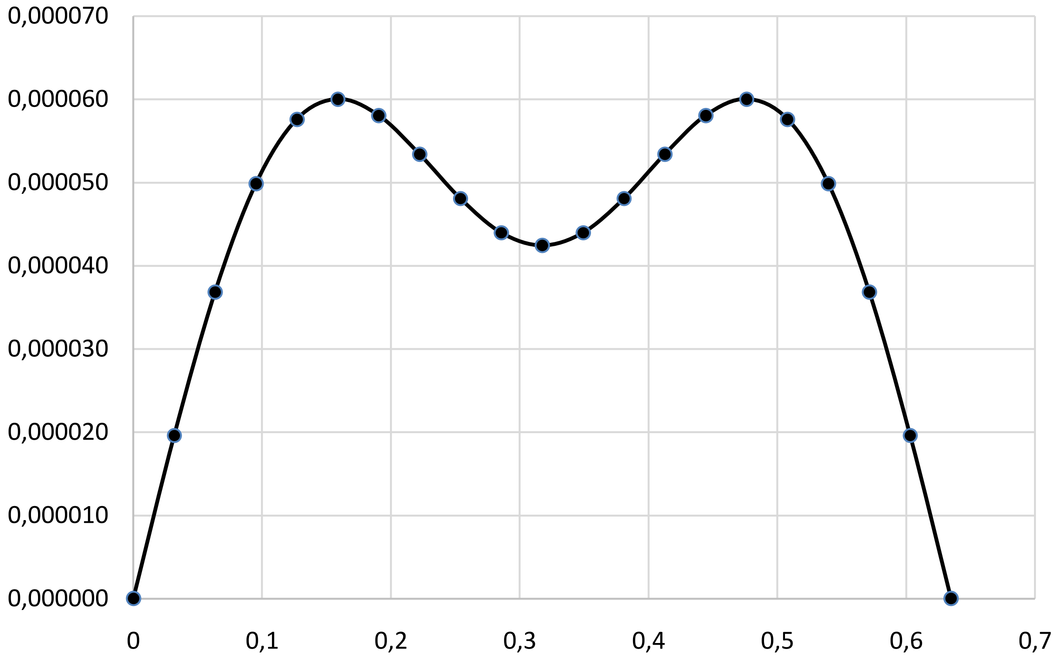
Na Tabela 5, temos os resultados da amplitude de onda fixando o tempo em 5*s* e variando na posição *x*, $x \in [0; 0,635]$, $N = 3$, e na Figura 29 vemos a representação gráfica desses pontos. A partir da Equação (34) temos que $u_3(x) = u_4(x)$, para todo $x \in [0; 0,635]$.

Tabela 5. Amplitude de onda para 3 termos da soma parcial.

j	x(m)	$a_1(x)$	$a_3(x)$	$u_3(x)$(m)
0	0	0	0	0
1	0,03175	9,96 10^{-6}	9,63 10^{-6}	1,96$10^{-5}$
2	0,06350	1,97 10^{-5}	1,72$10^{-5}$	3,68$10^{-5}$
3	0,09525	2,89$10^{-5}$	2,10$10^{-5}$	4,99$10^{-5}$
4	0,12700	3,74$10^{-5}$	2,02$10^{-5}$	5,76$10^{-5}$
5	0,15875	4,50$10^{-5}$	1,50$10^{-5}$	6,00$10^{-5}$
6	0,19050	5,15$10^{-5}$	6,56 10^{-6}	5,81$10^{-5}$
7	0,22225	5,67$10^{-5}$	-3,32 10^{-6}	5,34$10^{-5}$
8	0,25400	6,05$10^{-5}$	-1,25$10^{-5}$	4,81$10^{-5}$
9	0,28575	6,29$10^{-5}$	-1,89$10^{-5}$	4,40$10^{-5}$
10	0,31750	6,37$10^{-5}$	-2,12$10^{-5}$	4,24$10^{-5}$
11	0,34925	6,29$10^{-5}$	-1,89$10^{-5}$	4,40$10^{-5}$
12	0,38100	6,05$10^{-5}$	-1,25$10^{-5}$	4,81$10^{-5}$
13	0,41275	5,67$10^{-5}$	-3,32 10^{-6}	5,34$10^{-5}$
14	0,44450	5,15$10^{-5}$	6,56$10^{-5}$	5,81$10^{-5}$
15	0,47625	4,50$10^{-5}$	1,50$10^{-5}$	6,00$10^{-5}$
16	0,50800	3,74$10^{-5}$	2,02$10^{-5}$	5,76$10^{-5}$
17	0,53975	2,89$10^{-5}$	2,10$10^{-5}$	4,99$10^{-5}$
18	0,57150	1,97$10^{-5}$	1,72$10^{-5}$	3,68$10^{-5}$
19	0,60325	9,96 10^{-6}	9,63 10^{-6}	1,96$10^{-5}$
20	0,63500	0	0	0

Fonte: Próprio autor.

Figura 29. Representação gráfica dos pontos dados na Tabela 5.



Fonte: Próprio autor.

Na Tabela 6 temos os resultados da amplitude da onda fixando o tempo em 5*s* e variando na posição *x*, $x \in [0; 0,635]$, N = 5, e na Figura 30 vemos a representação gráfica desses pontos. A partir da Equação (34) temos que $u_5(x) = u_6(x)$, para todo $x \in [0; 0,635]$.

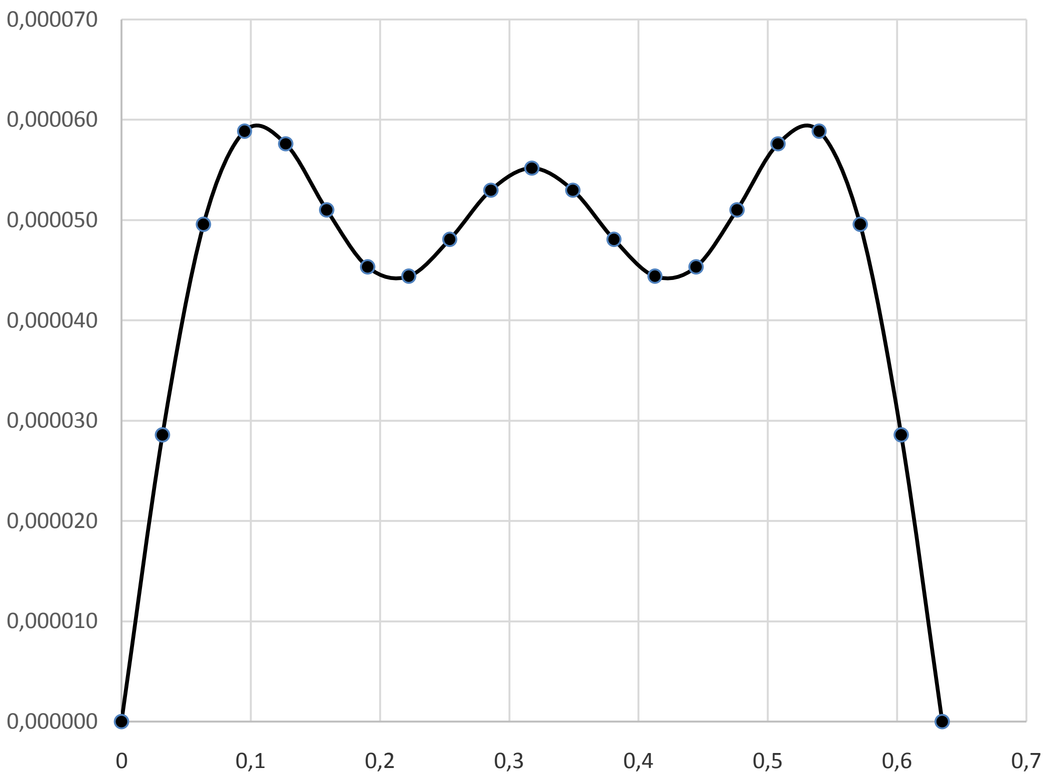
Tabela 6. Amplitude de onda para 5 termos da soma parcial.

j	x(m)	$a_1(x)$	$a_3(x)$	$a_5(x)$	$u_3(x)$(m)
0	0	0	0	0	0
1	0,03175	$9,96\ 10^{-6}$	$9,63\ 10^{-6}$	$9,0010^{-6}$	$2,8610^{-5}$
2	0,06350	$1,97\ 10^{-5}$	$1,7210^{-5}$	$1,2710^{-5}$	$4,9610^{-5}$
3	0,09525	$2,8910^{-5}$	$2,1010^{-5}$	$9,0010^{-6}$	$5,8910^{-5}$
4	0,12700	$3,7410^{-5}$	$2,0210^{-5}$	$1,5610^{-21}$	$5,7610^{-5}$
5	0,15875	$4,5010^{-5}$	$1,5010^{-5}$	$-9,0010^{-6}$	$5,1010^{-5}$
6	0,19050	$5,1510^{-5}$	$6,56\ 10^{-6}$	$-1,2710^{-5}$	$4,5310^{-5}$
7	0,22225	$5,6710^{-5}$	$-3,32\ 10^{-6}$	$-9,0010^{-6}$	$4,4410^{-5}$
8	0,25400	$6,0510^{-5}$	$-1,2510^{-5}$	$-3,1210^{-21}$	$4,8110^{-5}$
9	0,28575	$6,2910^{-5}$	$-1,8910^{-5}$	$9,0010^{-6}$	$5,3010^{-5}$
10	0,31750	$6,3710^{-5}$	$-2,1210^{-5}$	$1,2710^{-5}$	$5,5210^{-5}$
11	0,34925	$6,2910^{-5}$	$-1,8910^{-5}$	$9,0010^{-6}$	$5,3010^{-5}$
12	0,38100	$6,0510^{-5}$	$-1,2510^{-5}$	$4,6810^{-21}$	$4,8110^{-5}$
13	0,41275	$5,6710^{-5}$	$-3,32\ 10^{-6}$	$-9,0010^{-6}$	$4,4410^{-5}$
14	0,44450	$5,1510^{-5}$	$6,5610^{-6}$	$-1,2710^{-5}$	$4,5310^{-5}$
15	0,47625	$4,5010^{-5}$	$1,5010^{-5}$	$-9,0010^{-6}$	$5,1010^{-5}$
16	0,50800	$3,7410^{-5}$	$2,0210^{-5}$	$-6,2410^{-21}$	$5,7610^{-5}$
17	0,53975	$2,8910^{-5}$	$2,1010^{-5}$	$9,0010^{-6}$	$5,8910^{-5}$

18	0,57150	$1{,}9710^{-5}$	$1{,}7210^{-5}$	$1{,}2710^{-5}$	$4{,}9610^{-5}$
19	0,60325	$9{,}96\ 10^{-6}$	$9{,}63\ 10^{-6}$	$9{,}0010^{-6}$	$2{,}8610^{-5}$
20	0,63500	0	0	0	0

Fonte: Próprio autor.

Figura 30. Representação gráfica dos pontos dados na Tabela 6**.**



Fonte: Próprio autor.

Na Tabela 7 temos os resultados da amplitude da onda fixando o tempo em 5*s* e variando na posição *x*, $x \in [0; 0,635]$, N = 11, e na Figura 31 vemos a representação gráfica desses pontos. A partir da Equação (34) temos que $u_{11}(x) = u_{12}(x)$, para todo $x \in [0; 0,635]$.

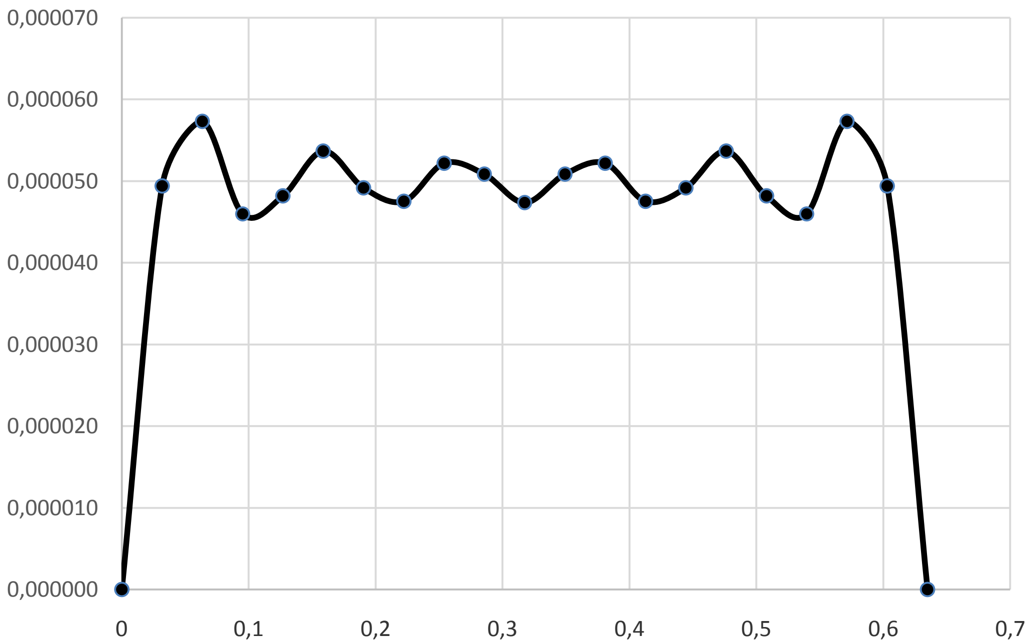
Tabela 7. Amplitude de onda para 11 termos da soma parcial.

j	x(m)	$a_1(x)$	$a_3(x)$	$a_5(x)$	$u_3(x)$(m)
0	0	0	0	0	0
1	0,03175	$9{,}96\ 10^{-6}$	$9{,}63\ 10^{-6}$	$9{,}00\ 10^{-6}$	$2{,}86\ 10^{-5}$
2	0,06350	$1{,}97\ 10^{-5}$	$1{,}72\ 10^{-5}$	$1{,}27\ 10^{-5}$	$4{,}96\ 10^{-5}$
3	0,09525	$2{,}89\ 10^{-5}$	$2{,}10\ 10^{-5}$	$9{,}00\ 10^{-6}$	$5{,}89\ 10^{-5}$
4	0,12700	$3{,}74\ 10^{-5}$	$2{,}02\ 10^{-5}$	$1{,}56\ 10^{-21}$	$5{,}76\ 10^{-5}$
5	0,15875	$4{,}50\ 10^{-5}$	$1{,}50\ 10^{-5}$	$-9{,}00\ 10^{-6}$	$5{,}10\ 10^{-5}$
6	0,19050	$5{,}15\ 10^{-5}$	$6{,}56\ 10^{-6}$	$-1{,}27\ 10^{-5}$	$4{,}53\ 10^{-5}$
7	0,22225	$5{,}67\ 10^{-5}$	$-3{,}32\ 10^{-6}$	$-9{,}00\ 10^{-6}$	$4{,}44\ 10^{-5}$

8	0,25400	$6,05\ 10^{-5}$	$-1,25\ 10^{-5}$	$-3,12\ 10^{-21}$	$4,81\ 10^{-5}$
9	0,28575	$6,29\ 10^{-5}$	$-1,89\ 10^{-5}$	$9,00\ 10^{-6}$	$5,30\ 10^{-5}$
10	0,31750	$6,37\ 10^{-5}$	$-2,12\ 10^{-5}$	$1,27\ 10^{-5}$	$5,52\ 10^{-5}$
11	0,34925	$6,29\ 10^{-5}$	$-1,89\ 10^{-5}$	$9,00\ 10^{-6}$	$5,30\ 10^{-5}$
12	0,38100	$6,05\ 10^{-5}$	$-1,25\ 10^{-5}$	$4,68\ 10^{-21}$	$4,81\ 10^{-5}$
13	0,41275	$5,67\ 10^{-5}$	$-3,32\ 10^{-6}$	$-9,00\ 10^{-6}$	$4,44\ 10^{-5}$
14	0,44450	$5,15\ 10^{-5}$	$6,56\ 10^{-6}$	$-1,27\ 10^{-5}$	$4,53\ 10^{-5}$
15	0,47625	$4,50\ 10^{-5}$	$1,50\ 10^{-5}$	$-9,00\ 10^{-6}$	$5,10\ 10^{-5}$
16	0,50800	$3,74\ 10^{-5}$	$2,02\ 10^{-5}$	$-6,24\ 10^{-21}$	$5,76\ 10^{-5}$
17	0,53975	$2,89\ 10^{-5}$	$2,10\ 10^{-5}$	$9,00\ 10^{-6}$	$5,89\ 10^{-5}$
18	0,57150	$1,97\ 10^{-5}$	$1,72\ 10^{-5}$	$1,27\ 10^{-5}$	$4,96\ 10^{-5}$
19	0,60325	$9,96\ 10^{-6}$	$9,63\ 10^{-6}$	$9,00\ 10^{-6}$	$2,86\ 10^{-5}$
20	0,63500	0	0	0	0

Fonte: Próprio autor.

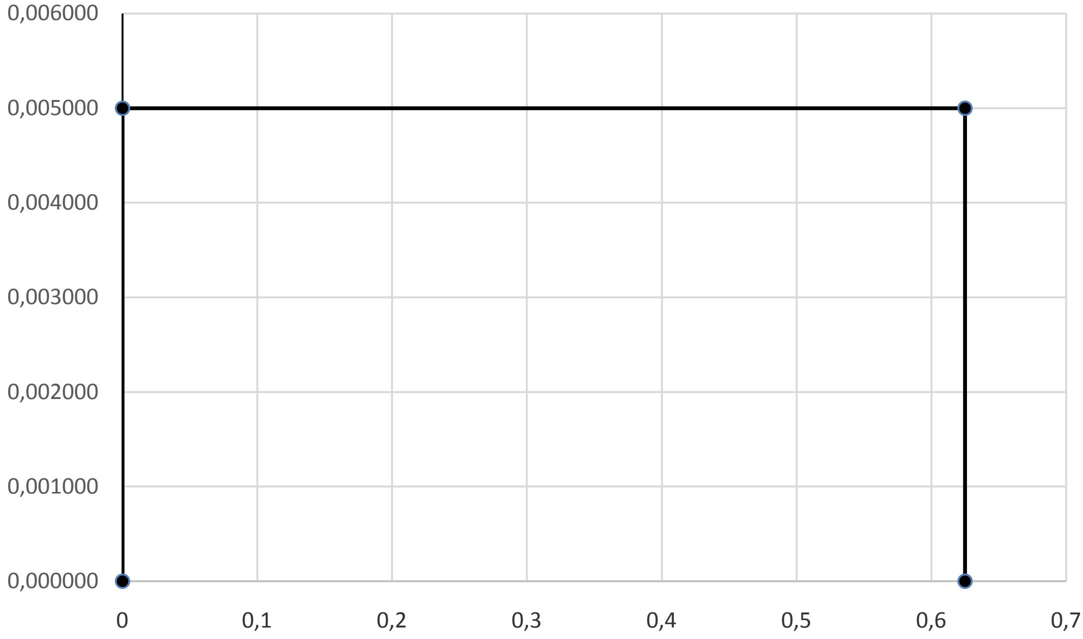
Figura 31. Representação gráfica dos pontos dados na Tabela 7.



Fonte: Próprio autor.

Considerando a Equação (30), os parâmetros dados na Tabela 3, e fixando o tempo, para todo $t \in [0;10]$, temos a solução exata da equação de onda, a qual é mostrada na Figura 32. Assim, temos que quando *n* tende ao infinito, a amplitude tende ao deslocamento inicial da corda, isto é: $u(x,t_0) = f(x) = 5\ 10^{-3} m$, para todo $t_0 \in [0;10]$.

Figura 32. Representação gráfica da solução exata da equação de onda.



Fonte: Próprio autor.

Capítulo 4

Matemática, Interdisciplinaridade, Contextualização e Ensino

Neste capítulo, apresentamos uma reflexão sobre a prática interdisciplinar no ensino de Matemática, indicando a interpretação e resolução de situações-problema, através da contextualização nas disciplinas relacionadas à educação básica, como mais uma ferramenta associada aos recursos de aperfeiçoamento no conhecimento e ensino, ainda, faremos uma análise geral sobre a BNCC vinculada à rotina escolar.

4.1. MATEMÁTICA E INTERDISCIPLINARIDADE

A Matemática está presente no cenário de desenvolvimento humano desde os primórdios, “em sua origem, a Matemática constituiu-se a partir de uma coleção de regras isoladas, decorrentes da experiência e diretamente conectadas com a vida diária. Não se tratava, portanto, de um sistema logicamente unificado” (BRASIL, 1997, p. 24). Conforme também descreve Silva (2007), tudo indica que apareceu de forma inicial como um processo de fazer contagem através de algoritmos aritméticos ou geométricos elementares, onde a princípio, o rigor e o formalismo nas demonstrações observadas em civilizações primitivas, eram vistos e aplicados de forma rudimentar.

> A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (BRASIL, 1997, p. 32).

Com o passar dos anos, a essa ciência fez associar-se o rigor, com critérios e definições que a enriquecem e lhe garantem valor no dia a dia, seja em aplicações nos diversos campos que, ora estão relacionados à tecnologia ora à moral e filosofia.

> Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 2000b, p. 9).

Quando se faz referência ao ensino de Matemática, e a construção de seus diferentes tópicos na aprendizagem, a mesma pode ser vista e utilizada de forma interdisciplinar, pois permite "contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas" (BNCC, 2020, p. 16). Assim, a abstração no sentido de aplicar conceitos já visitados, tem um valor amplo, se busca não somente a interpretação e conhecimento imediato de uma fórmula ou pensamento. Portanto, essa ciência serve como base, para abrir caminhos diante da compreensão nas diferentes disciplinas e conteúdos, que envolvem situações de aprendizagem na vida real.

> A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2018 p. 265).

Ainda, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a formação curricular - aqui se entende os conhecimentos de matemática em conjunto com ciências e tecnologia, deve ser estimulada e proposta, com princípios que envolvem a contextualização e o desenvolvimento interdisciplinar. De fato, a Matemática em conjunto com as Tecnologias, pelo formato e precisão que presumem, e até mesmo "pelo tipo de correspondência entre suas formulações e os fatos observáveis ou pelo tipo de sentido prático que frequentemente ostentam, que é também comum parte significativa das didáticas utilizadas em seu ensino" (BRASIL, 2000b, p. 51), do mesmo modo, a BNCC contempla a proposta de contextualização, relacionando tais disciplinas, pois "propõe-se também discutir o papel do conhecimento científico e tecnológico na organização social, nas questões ambientais, na saúde humana e na formação cultural, ou seja, analisar as relações entre ciência, tecnologia, sociedade e ambiente" (BNCC, 2020, p. 549).

Numa visão ampla, a atitude de contextualizar propõe ao docente planejar ações "conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens" (BNCC, 2020, p. 17), deslocando o discente da função de mero espectador passivo, criando portanto, relação entre o conhecimento que ele desenvolve na escola e o seu viver (atitudes em relação à vida política, práticas culturais e de comunicação com a sociedade a qual está inserido, cotidiano, etc.).

> [...] o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo (BRASIL, 2000, p.6).

Num sentido abrangente, esse ensaio de construir o conhecimento interdisciplinar, é o mesmo que proporcionar o entendimento e uma leitura, visando a compreensão de fatores num espectro global, ou seja, uma releitura entre mais de uma disciplina, possibilitando assim que haja um inter-relacionamento, entre o conhecimento adquirido ao longo dos anos de pesquisas e estudos, e aquele que é produzido e aplicado de forma eficiente no dia a dia, enxergando conotações diferentes dos fatos fortificando a análise, algo que é possível alcançar somente através da interpretação e estudos intensos multidisciplinares.

Quando as propostas interdisciplinares estão envolvidas, o alvo são as disciplinas, e a maneira como os alunos podem aprendê-las melhor, ou seja, a forma como desenvolver a criatividade e traduzir os conceitos em aplicações e conhecimentos, portanto "a interdisciplinaridade do aprendizado científico e matemático não dissolve nem cancela a indiscutível disciplinaridade do conhecimento" (BRASIL, 2000b, p. 6). Alarcão (2003) expõe seu pensamento indicando que, há um estimular na reflexão, através do relacionamento entre o pensamento e a compreensão, como os grandes fatores de desenvolvimento pessoal, social, institucional, nacional, internacional. Em consonância com esse pensamento, a BNCC apresenta "a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções" (BRASIL, 2018, p. 9), como incentivo no processo de construção do ensino-aprendizagem.

Sendo assim, neste novo tempo em que o planeta passa por um momento de mudanças e transformações, seguindo de forma paralela a outros movimentos em épocas históricas diferentes, cujo progresso e evolução científica têm contribuído para o avanço social, sobressai através das aplicações e efeitos para a sociedade, a revolução industrial, envolvendo novas teorias, de caráter científico e matemático, e soluções de automação para a humanidade.

> Para tanto, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1997, p. 26).

Uma das características intrínsecas nessa nova forma de pensar é que, a valorização não é enxergada no ser que apenas segue instruções para o funcionamento de uma máquina, mas sim na compreensão e autonomia de transformar dados em informação, e informação em conhecimento, o qual, através das máquinas nos é oferecido o acesso para tal descoberta. Claramente o engendrar das máquinas, com circuitos, engrenagens e sistemas extremamente complexos, nos configura um prolongamento do cérebro, assim uma nova interface surge para a construção do processo de ensino-aprendizagem e tradução dos processos complexos que envolvem o ser humano no dia a dia.

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente (BRASIL, 2000 p.40).

Portanto, esse novo caminho, permite oferecer ao educando a capacidade de refletir sobre os conceitos que estão sendo aprendidos, traduzindo assim a importância de aprender um determinado assunto e seus reflexos na construção do aprendizado, e ao professor sugerir ações de ensino durante a aprendizagem e planejamento de aula, pois, "o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações" (BRASIL, 1997, p. 32), de modo que, possa haver a expansão do pensamento para a leitura e resolução de uma situação-problema, manipulação algébrica ou interpretação geométrica correlacionada às outras disciplinas, ainda, é somente através dos conhecimentos construídos durante as diferentes séries e etapas do ensino básico, que se torna possível organizar as idéias, criando um link com o que já foi estudado e aprendido, construindo assim o conhecimento num formato mais eficiente e prático.

Com esse objetivo, de nortear e diversificar ações em determinado conteúdo de ensino, a partir de outros já vistos, tanto em matemática como nas outras disciplinas, há a possibilidade de aplicar recortes relacionados às diferentes áreas, desenvolver a investigação criativa e olhar crítico na construção do ensino, portanto, "a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação" (BRASIL, 1997, p. 26).

> O desenvolvimento do conhecimento matemático envolve a utilização da metodologia da resolução de problemas, especialmente no que tange às contextualizações, à busca de instrumentação crítica para o mundo do trabalho e à aproximação dos conteúdos escolares. Nesse sentido, o ato de abstrair e ressignificar os saberes matemáticos pode favorecer a elaboração de novas situações-problema. Nessa perspectiva, pretende-se que o estudante também formule problemas em outros contextos e áreas do conhecimento (SÃO PAULO, 2020, p. 112).

Assim, a partir desse contexto, de motivar a investigação e aplicar as habilidades, competências, conteúdos e conhecimentos, relacionados às diferentes áreas do ensino, torna-se interessante desenvolver a aprendizagem através da análise e interpretação de situações-problema,

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (BNCC, 2020, p. 266).

pois, "a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas" (BRASIL, 1997, p. 33). Assim, é sugerido mais um olhar, sobretudo, por outro viés à aprendizagem, ou seja, consolidar o formato investigativo, não apenas com números, fórmulas e signos – sinais, mas a curiosidade pela descoberta e incentivo à pesquisa e ao estudo.

> Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 50).

O aprendizado de conteúdos e conceitos matemáticos, através da resolução de situações-problema desafia os atores participantes a conhecer "formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental" (BRASIL, 2020, p. 266), seja de um lado a oferecer para o discente a capacidade de desenvolver o raciocínio, criar argumentos, deduzir hipótese, formular soluções etc., e para o outro (docente) criar a possibilidade de um trabalho com características diversificadas e conteúdos diferenciados, conectados a outros tópicos, "desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações (BRASIL, 1997, p. 32).

> Sem dúvida, ensinar matemática através da resolução de problemas é uma abordagem consistente [...], pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da resolução dos problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de nível superior será promovido através dessas experiências e o trabalho de ensino de matemática acontecerá num ambiente de investigação orientada em resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 9).

Entretanto, a resolução de situações-problema "não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas" (BRASIL, 1997, p. 33).

> Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio (BRASIL, 2000b, p. 52).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam que, "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado" (BRASIL, 1997, p. 33). De acordo com Smole (2007), quando há a resolução de uma situação-problema, é gerada uma organização em relação aos conteúdos que foram aprendidos. Assim, nessa estrutura metodológica e cognitiva formada, a junção do aprender, suas concepções, e relações na construção do conhecimento, contemplam "não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada" (BRASIL, 2020, 277). Portanto, esse processo de interpretação da informação traduzido em conhecimento, só faz sentido se, for adaptado para outros contextos adversos daqueles que o motivaram, "para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem contextualizados novamente em outras situações" (BRASIL, 1997, p. 30).

> Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem (BRASIL, 2020, p. 277).

Na Base Nacional Comum Curricular também encontramos a terminologia letramento matemático, apontando que tal conceito é definido como, a capacidade particular que cada pessoa demonstra ao formular, empregar e realizar a interpretação de conceitos matemáticos em diversos contextos. Assim, a partir dessa nomenclatura, entende-se que, está incluso o raciocinar com formato e sentido investigativo nas diferentes áreas da Matemática, onde somente através do conhecimento construído e acumulado, e a utilização de conceitos aprendidos, ou mesmo o proceder e a verificação dos fatos através de ferramentas de caráter analítico, para a interpretação e descrição, é possível explicar um tema e indicar os fenômenos que estão relacionados.

> Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias têm a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (BNCC, 2020, p. 529).

Durante as diferentes etapas de construção do pensamento matemático, todo arcabouço de conhecimento e informação, construído ao longo do tempo, serve como auxilio para os indivíduos, no importante reconhecimento da função sublime que a matemática exerce no mundo,

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018 p. 267).

e para que os cidadãos construtivos, engajados e, que agem reflexivamente, possam fazer julgamentos bem fundamentados, e tomar as decisões necessárias frente ao aprendizado.

Assim, “o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais” (BRASIL, 2018 p. 265).

> É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (BRASIL, 2018 p. 266).

Objetos norteadores como, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Currículo Paulista e outros documentos educacionais como LDB e Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, servem como base para alunos e professores, na construção do plano de aula, na edificação do aprendizado e na unificação do currículo no favorecimentodo ensino.

4.2. ANÁLISE GERAL BNCC, CONTEXTUALIZAÇÃO E DESEMPENHO ESCOLAR

Ao discorrer sobre a BNCC, faz jus descrever o que corresponde esse documento e seu padrão formador, sendo assim, temos a seguinte definição.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2018, p. 7).

Em linhas gerais, é possível entender que, a BNCC é um documento norteador, onde, são definidas aplicações efetivas que devem ser utilizadas exclusivamente no formato escolar, assim, ela (BNCC) atua como um roteiro para a aplicação de conteúdos educacionais, sendo que os diversos tópicos estão vinculados à formação ética, política e social, na construção da cidadania; dessa forma, é possível entender que tal compromisso com o ensino,

> [...] contribui para o seu ordenamento e equilíbrio permanentes. A educação, nesse sentido, tem por significado e finalidade a adaptação do indivíduo à sociedade. Deve “reforçar os laços sociais, promover a coesão social e garantir a integração de todos os indivíduos no corpo social” (LUCKESI, 2011, p. 38).

Como proposta no protagonismo educacional, esses princípios se encontram pautados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, portanto, a BNCC vem agregar desígnios que direcionam a educação brasileira para o desenvolvimento humano integral, e para a edificação de uma sociedade com condutas justas, inclusivas e democráticas. De fato,

> [...] a educação como instância social que está voltada para a formação da personalidade dos indivíduos, para o desenvolvimento de suas habilidades e para a veiculação dos valores éticos necessários à convivência social, nada mais tem que fazer do que se estabelecer como redentora da sociedade, integrando harmonicamente os indivíduos no todo social já existente (LUCKESI, 2011, p. 38).

Nessa mesma perspectiva, de formação de juízos, virtudes, e construção de valores, a BNCC também nos contempla com a definição de competência, como sendo "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018, p. 8).

De forma clara, a definição exposta anteriormente vem nos demonstrar que, a educação não deve ser vista apenas para a transmissão de conteúdos, onde, os alunos absorvem as aulas sem participação, num estado inerte. Esse novo enfoque de aprendizagem nos apresenta, e conduz, para um modelo que caminha de acordo com a inserção dos conteúdos, com o objetivo de "garantir a contextualização dos conhecimentos, articulando as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura" (BNCC, 2020, p. 466), que além de estarem presentes no dia a dia, também façam parte do contexto histórico. Assim, as competências tornam o aluno protagonista no processo do saber junto à linha do tempo na cultura e na ciência, fazendo com que o mesmo (aluno) deixe de ser passivo frente aos conhecimentos e desafios, sem algum tipo de participação. Dessa forma, o "ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 6).

Nesse processo de ensino-aprendizagem, a BNCC vem ainda articular as competências, habilidades e conhecimentos, onde, se espera o desenvolvimento de todos os alunos ao longo da escolaridade básica. Ela também, vem servir como referência nacional para a formulação dos currículos em diferentes sistemas, sejam eles; redes escolares dos Estados, municípios e, das propostas pedagógicas das instituições escolares. Efetivamente, esse documento se integra à Política Nacional da Educação Básica, e contribui para o alinhamento de diversas ações em âmbito federal e estadual, sendo também, referência na formação de professores, avaliação e elaboração de propostas educacionais.

Nessa concepção de ensino, podemos identificar nos dizeres da BNCC que, há a distinção direta entre saber e saber fazer. Assim, no primeiro item (saber), se considera a organização dos conhecimentos, a interpretação das habilidades ordenadas junto às atitudes e valores, e no segundo, se contempla a associação desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, para que ocorra a resolução de solicitações que envolvem situações complexas no decorrer do dia a dia escolar, assim,

> [...] a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) (BRASIL, 2018 p. 13).

Alarcão (2003) conduz à reflexão, e pensamento analítico, indicando que, as escolas, como ambientes de formação sociocultural, são lugares onde, as descobertas e as práticas aprimoradas através das novas competências desenvolvidas, corroboram a sociedade da informação, gerando assim um corpo social mais democrático e aberto ao diálogo, pois as exigências das competências de acesso, avaliação e gestão da informação disponibilizada, são oferecidas para todos os participantes desse projeto de ensino,

> [...] por isso tudo, o aprendizado deve ser planejado desde uma perspectiva a um só tempo multidisciplinar e interdisciplinar, ou seja, os assuntos devem ser propostos e tratados desde uma compreensão global, articulando as competências que serão desenvolvidas em cada disciplina e no conjunto de disciplinas, em cada área e no conjunto das áreas (BRASIL, 2000b, p. 9).

Assim, a partir desse ensaio, onde o aluno é o ser participativo no processo de ensino, e a responsabilidade do professor consiste em agir como mediador, a prática da aprendizagem por competências e multidisciplinar, torna a experiência de ensinar e aprender, objeto de estudo, onde, o modelo produzido, serve como ferramenta para diagnósticos presentes, e ações futuras. Desta forma, “o aprendizado que tem seu ponto de partida no universo vivencial comum entre os alunos e os professores [...], desenvolve com vantagem o aprendizado significativo, criando condições para um diálogo efetivo, de caráter interdisciplinar” (BRASIL, 2000b, p. 52).

> Novas competências demandam novos conhecimentos: o mundo do trabalho requer pessoas preparadas para utilizar diferentes tecnologias e linguagens (que vão além da comunicação oral e escrita), instalando novos ritmos de produção, de assimilação rápida de informações, resolvendo e propondo problemas em equipe (BRASIL, 1997, p. 26).

Segundo Alarcão (2003), para termos pessoas comprometidas com a formação da sociedade, e que atuem com senso questionador e crítico, além das competências desenvolvidas nas atividades escolares, é preciso haver o estímulo ao desenvolvimento atribuído na competência da compreensão, sendo essa, conectada diretamente ao atributo da escuta, da observância, da forma de conduzir e habilitar o pensamento, e também na autonomia de fazer o uso de diversas linguagens, que concernem faculdades ao homem para entender a dependência de uns para com os outros, no formato de mecanismos de convivência e compreensão recíproca. Sem dúvida,

> [...] educar exige cuidado; cuidar é educar, envolvendo acolher, ouvir, encorajar, apoiar, no sentido de desenvolver o aprendizado de pensar e agir, cuidar de si, do outro, da escola, da natureza, da água, do Planeta. Educar é, enfim, enfrentar o desafio de lidar com gente, isto é, com criaturas tão imprevisíveis e diferentes quanto semelhantes, ao longo de uma existência inscrita na teia das relações humanas, neste mundo complexo (BRASIL, 2013, p. 18).

Ainda, de acordo com os PCN’s, “o mundo atual exige mais do que a interpretação das informações. Exige também competências e habilidades ligadas ao uso dessas interpretações nos processos investigativos de situações problemáticas, objetivando resolver ou minimizar tais problemas” (BRASIL, 2000b, p. 34), bem como sobre essa mesma perspectiva de observação “o indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos” (BRASIL, 2000b, p. 41). Quando a BNCC é contemplada no Ensino Fundamental e Médio percebe-se ainda que “o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral, atende às finalidades dessa etapa e contribui para que os estudantes possam construir e realizar seu projeto de vida, em consonância com os princípios da justiça, da ética e da cidadania” (BRASIL, 2018, p. 471).

Na orientação desse ideal de concepção, entre os diversos objetivos que se buscam ser perseguidos, e alcançados pela escola, deve haver dedicação excepcional, através da compreensão e desenvolvimento das competências e habilidades, o Ensino Fundamental. Essa etapa do ensino, quando contemplada como o contexto inicial da formação política e social do aluno, tem dentre outros focos, o compromisso com o desenvolvimento da interpretação e raciocínio matemático, constituindo assim, o "representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas" (BRASIL, 2018, p. 266). Dessa forma, há um estabelecimento da leitura universal da realidade, vinculando autonomia e aprendizado para toda a vida, assim, é lícito destacar que, "a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares (BRASIL, 1998, p. 20).

É possível observar também que, na descrição do processo de ensino-aprendizagem das ciências exatas, ou mais especificamente Matemática e Física, ao longo do tempo, sempre houve a união com as diferentes áreas do conhecimento, atendendo às diversas questões, seja no campo tecnológico ou das ciências humanas, contribuindo com todos os tipos de atribuições e desenvolvimento.

Novos arquétipos de ensino, construídos e embasados nos documentos oficiais, buscam o relacionamento entre os conteúdos educacionais, de forma a desenvolver a perspectiva dos educandos, apontando concomitantemente aplicações e contextualização da Matemática em várias disciplinas. Assim, nesse enlace onde se ressalta a importância da Matemática para a construção da civilização, o jovem deve sentir prazer em descobrir e aprofundar nos estudos, concebendo uma melhor relação entre as teorias e aplicações matemáticas. De fato, novas propostas, envolvendo a percepção e o trabalho pedagógico, vão de encontro ao desenvolvimento educativo, onde a participação efetiva do aluno no processo e no contexto educacional, são assertivas para um conhecimento de cunho significativo, relacionando o cotidiano, bem como o uso de recursos específicos e sequências metodológicas, na motivação para a construção do conhecimento.

Capítulo 5

O Plano de aula – Uma abordagem dinâmica

O propósito deste capítulo, com enfoque direcionado para o professor de Matemática e Física, é articular uma apreciação e discussão sobre a importância de se elaborar o plano de aula, e como esse instrumento pedagógico serve de apoio no cotidiano escolar, a seguir, faremos a construção do mesmo (plano de aula), onde o conteúdo indicado, se refere às ondas mecânicas produzidas por oscilações em uma corda.

5.1. SÍNTESE DOS PRINCIPAIS TÓPICOS QUE COMPÕEM UM PLANO DE AULA

Os atributos qualidade e sucesso, no processo de ensino-aprendizagem, relacionam-se diretamente com a organização do conteúdo que vai ser ministrado em sala de aula. Portanto, "o planejamento é um processo de racionalização, organização e coordenação da ação docente, articulando a atividade escolar e a problemática do contexto social" (LIBÂNEO, 1994, p. 222), estruturando de fato como haverão de ser realizados esses processos e sua aplicação. Assim, o bom desempenho de uma aula, relacionado com o vínculo de comprometimento do agente da prática docente, e as relações sociais de desenvolvimento no ensino, conduzem o aprendizado e a eficácia vinculados à educação.

> O trabalho educativo que ocorre na escola é sempre marcado por concepções, valores e atitudes, mesmo que não-explicitados e, muitas vezes, contraditórios. Desse modo, é fundamental que os professores planejem não apenas como as questões sociais vão ser abordadas em diferentes contextos de aprendizagem das varias áreas, mas também como elas serão tratadas no convívio escolar (BRASIL, 1998, p. 28).

Nesse sentido, é importante salientar que, não há uma aprendizagem eficiente se não se ensina com eficiência. Assim, todo labor docente, está conectado diretamente com a formação de juízos, valores, e construção lógica nas pessoas, ou seja, a formação social e humana. Desta forma, “a escola, os professores e os alunos são integrantes da dinâmica das relações sociais; tudo o que acontece no meio escolar está atravessado por influências econômicas, políticas e culturais” (LIBÂNEO, 1994, p. 222), daí a necessidade do professor dirigir-se à classe com um plano de aula, proporcionando fundamento à discussão e a boa apresentação ao tópico que vai ser lecionado. Com efeito, “o planejamento deve ser concretamente o instrumento pedagógico imprescindível na atuação profissional, que tendo objetivos bem definidos, guarda particularidades e especificidades de acordo com os usuários e as condições de sua utilização” (PACCA, 1992, p. 42).

> [...] planejar significa antever uma forma possível e desejável. Se não há planejamento, corre-se o risco de se desperdiçarem oportunidades muito interessantes. Não dá para dar aula improvisando, em off e se não ficar boa, 'regravar' (como nos programas de televisão). Não planejar pode implicar perder possibilidades de melhores caminhos, perder pontos de entrada significativos (VASCONCELLOS, 2014, p. 148).

Como recurso e base para uma aplicação com eficiência na prática docente, o plano de aula serve como um direcionamento, “um guia de orientação, pois nele são estabelecidas as diretrizes e os meios de realização do trabalho docente” (LIBÂNEO, 1994, p. 222), ou ainda, uma referência na aplicação e explanação dos conteúdos que serão apresentados e expostos durante as aulas. Portanto, o “plano de aula é a proposta de trabalho do professor para uma determinada aula ou conjunto de aulas (por isto chamado também de Plano de Unidade). Corresponde ao nível de maior detalhamento e objetividade do processo de planejamento didático. É a orientação para o que fazer cotidiano” (VASCONCELLOS, 2014, p. 148).

No contexto de Matemática e Física, o qual este trabalho é direcionado, desde a interpretação de um modelo matemático por diferentes pontos relacionados ao mesmo conteúdo, como as diferentes demonstrações do mesmo teorema - por exemplo, o ato de planejar, seja ele empregado através de atividades interdisciplinares ou de contextualização, serve como auxílio e apoio para ilustrar tópicos diferentes, permitindo a estimativa de melhores resultados e a elaboração de planos de ação, no caso de situações adversas, ou seja, aquelas que se apresentam distintas ou em dissonância em relação ao aprendizado “por essa razão, o planejamento é uma atividade de reflexão acerca das nossas opções e ações” (LIBÂNEO, 1994, p. 222). Ainda, objetivando a área de exatas, “ao planejar suas atividades, o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes blocos, visando possibilitar a compreensão mais fundamental que o aluno possa atingir a respeito dos princípios/métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos” (BRASIL, 1997, p. 40).

Como parte na construção dessa parcela que se soma ao ensino, “o planejamento escolar é uma atividade que orienta a tomada de decisões da escola e dos professores em relação às situações docentes de ensino e aprendizagem, tendo em vista alcançar os melhores resultados possíveis” (LIBÂNEO, 1994, p. 226), de fato “ao construir o planejamento, é preciso estabelecer os objetivos que se deseja alcançar, selecionar os conteúdos a serem trabalhados, planejar as articulações entre os conteúdos, propor as situações-problema que irão desencadeá-los” (BRASIL, 1998, p. 138).

> Formular objetivos é uma tarefa que consiste, basicamente, em descrever os conhecimentos a serem assimilados, as habilidades, hábitos e atitudes a serem desenvolvidos, ao término do estudo de certos conteúdos de ensino. Objetivos refletem, pois, a estrutura do conteúdo da matéria. [...] Devem ser realistas, isto é, expressar resultados de aprendizagem realmente possíveis de serem alcançados no tempo que dispõe e nas condições em que se realiza o ensino (LIBÂNEO, 1994, p. 236).

Em relação aos conteúdos que serão ministrados em sala de aula, Libâneo (1994) descreve que, eles (conteúdos) devem significar para os alunos como meios redigidos para a compreensão aprofundada dos conhecimentos, unindo a relação prática de desenvolvimento das habilidades junto aos atos que norteiam o ensino, fazendo o discente tornar-se cada vez mais o sujeito inserido na aprendizagem.

> Podemos dizer que os conteúdos retratam a experiência social da humanidade no que se refere a conhecimentos e modos de ação, transformando-se em instrumentos pelos quais os alunos assimilam, compreendem e enfrentam as exigências teóricas e práticas da vida social. Constituem objeto de mediação escolar no processo de ensino, no sentido de que a assimilação e compreensão dos conhecimentos e modos de ação se convertem em ideias sobre as propriedades e relações fundamentais da natureza e da sociedade, formando convicções e critérios de orientação das opções dos alunos frente as atividades teóricas e práticas postas pela vida social (LIBÂNEO, 1994, p. 129).

Como conclusão de tópico, apresentado à classe no decorrer da aplicação do plano de aula, convém mencionar também que, o procedimento da avaliação “é uma tarefa didática necessária e permanente do trabalho docente, que deve acompanhar passo a passo o processo de ensino e aprendizagem” (LIBÂNEO, 1994, p. 195),

> É fundamental que os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, registros das atitudes dos alunos, forneçam ao professor informações sobre as competências de cada aluno em resolver problemas, em utilizar a linguagem matemática adequadamente para comunicar suas idéias, em desenvolver raciocínios e análises e em integrar todos esses aspectos no seu conhecimento matemático (BRASIL, 1998, p. 54).

pois, durante todo o progresso de organização da ementa e execução do conteúdo, o como aplicar a avaliação e qual o sentido de se avaliar, deve conduzir a ação do trabalho docente e aprendizado do aluno, “[...] como este trabalho estará sendo avaliado (que necessidades - como vai indo): que estratégias o professor pode estar utilizando em sala para acompanhar o processo de desenvolvimento e de construção do conhecimento do aluno” (VASCONCELLOS, 2014, pg. 148).

> A própria avaliação deve ser também tratada como estratégia de ensino, de promoção do aprendizado das Ciências e da Matemática. A avaliação pode assumir um caráter eminentemente formativo, favorecedor do progresso pessoal e da autonomia do aluno, integrada ao processo ensino-aprendizagem, para permitir ao aluno consciência de seu próprio caminhar em relação ao conhecimento e permitir ao professor controlar e melhorar a sua prática pedagógica. (BRASIL, 2000b, p. 53).

5.2. PLANO DE AULA: FENÔMENOS ONDULATÓRIOS OBSERVADOS A PARTIR DA CORDA VIBRANTE

Para a elaboração do plano de aula a seguir, fundamentado a partir da BNCC, a temática escolhida são as Ondas Mecânicas, com ênfase na formação de ondas estacionárias a partir da corda vibrante. Na música, por exemplo, a aplicação desse fenômeno se encontra na vibração das cordas de um violão ou violino, já no contexto escolar, contemplando aqui o Ensino Médio, há a possibilidade através de situações-problema com aplicações interdisciplinares, se investigar distintas habilidades para o ensino e aprendizagem desse conteúdo, assim como, explicar teoremas da Matemática e leis da Física.

A pretensão aqui também é elaborar um plano de aula que, no transcorrer de sua aplicação, acompanhe e realize a avaliação frente ao desenvolvimento dos alunos, com atividades interdisciplinares contemplando a contextualização, e que ajudem no aprendizado do tema. Como forma de avaliação, escolhemos três instrumentos: uma atividade realizada em sala de aula que avalia o comprometimento do aluno com a aprendizagem cotidiana, uma atividade para casa, e a realização de uma avaliação diagnóstica.

> De comum acordo com o ensino desenvolvido, a avaliação deve dar informação sobre o conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos; a capacidade para aplicar conhecimentos na resolução de problemas do cotidiano; a capacidade para utilizar as linguagens das Ciências, da Matemática e suas Tecnologias para comunicar idéias; e as habilidades de pensamento como analisar, generalizar, inferir (BRASIL, 2000b, p. 54).

Abordamos a seguir, o plano de aulas, composto de questões encontradas em provas de vestibulares nacionais ou ENEM, onde, as situações-problema apresentadas têm relação direta com a pesquisa realizada nesse trabalho.

Quadro 1. Modelo do plano de aula.

Componente Curricular	Física
Público-alvo	2ª Série do Ensino Médio
Unidade Temática	Ondas Mecânicas
Tema	Onda estacionária em uma corda
Conteúdo	Classificação das ondas: transversais e longitudinais; frequência; período; comprimento de onda; amplitude; propagação de um pulso; velocidade de propagação de uma onda na corda; ondas estacionárias em cordas; modos de vibração: corda com as duas extremidades fixas, corda com uma extremidade livre; ressonância.
Competência da BNCC	3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
Habilidades da BNCC	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
Objetivos	Identificar ondas mecânicas; reconhecer e distinguir os conceitos de: período, frequência, amplitude, comprimento e velocidade de ondas; Interpretar umtexto discursivo e, através da leitura e análise, escrever a equação matemática atribuída a situações-problema contextualizadas; formular as hipóteses e validar os resultados obtidos; desenvolver a capacidade de investigação científica.
Metodologia	Aula expositiva de conteúdos e dialogada, com tarefas para resolução em sala de aula e domiciliar; uso de conceitos históricos da Física e Matemática para articular a contextualização do tópico proposto, ver o capítulo 2 desse trabalho.
Recursos Didáticos	Lousa, giz, apagador, Projetor Multimídia, instrumento musical de cordas.
Quantidade de aulas	10 horas/aula de 45 min.
Avaliação	Atividade avaliativa - aplicação de prova individual e sem consulta, no formato de situações-problema e exercícios, com grau de dificuldade semelhante aos desenvolvidos em sala de aula ou aqueles propostos como tarefas para casa.
Referências Bibliográficas	**Básica** JÚNIOR, Francisco Ramalho; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. Os Fundamentos da Física Volume 2: Termologia,óptica e ondas. 10. ed. São Paulo: Ed. MODERNA, 2009. **Complementar** ALVARENGA, Beatriz; MÁXIMO, Antonio. Curso de Física Volume 2. 3. ed. São Paulo: Ed. HARBRA, 1993. HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de Física, Vol.2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 8. ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2009. NUSSENSVEIG, Hearch Moysés. Curso de Física Básica, Vol. 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. 5. ed. revista e ampliada, São Paulo: Ed. Blucher, 2014.

Fonte: Próprio autor

Quadro 2. Progressão

1º **Momento**: Introdução aos conteúdos que serão ministrados.	Os conceitos elementares de ondas devem ser apresentados para a classe, com exemplos físicos através do violão ou outro instrumento de corda; inserção de motivações históricas e culturais, favorecendo a discussão dos temas e o diálogo interativo; Participação coletiva.
2º **Momento**: Desenvolvimento do conteúdo.	Aula no formato expositiva, onde serão apresentadas as definições de: frequência, período, amplitude, comprimento de onda e velocidade; resolução de exercícios na forma de situações-problema em sala de aula; Participação coletiva.
3º **Momento**: Sistematização do conteúdo.	Sugestão de atividades para casa com resolução individual, a fim de fixar os conteúdos estudados em sala de aula;haverá também, de forma coletiva, a correção e a apresentação das resoluções;investigação sobre a aprendizagem individual e possíveis orientações pedagógicas.
4º **Momento**: Retomada dos conteúdos.	Interpretar e analisar o conteúdo do capítulo 3 desse trabalho; efetuar demonstrações; resolução em sala de aula de exercícios e situações-problema com grau de complexidade maior; participação coletiva.
5º **Momento**: Atividade avaliativa.	Em equipeos alunos resolverão atividade avaliativa, onde os conceitos e conteúdos exigidos estão relacionados às aulas anteriores, também irão elaborar sínteses ou esquemas estruturados dos temas físicos trabalhados.

Fonte: Próprio autor

1º Momento: Introdução aos conteúdos que serão ministrados

Duração: 2 aulas de 45 minutos.

Requisitos: Dominar as operações básicas da Matemática, noções de regra de três, reconhecer equações e funções, interpretação de gráficos, reconhecer o sistema internacional de unidades (SI) e compreender o conceito de medidas, interpretar ordem de grandeza, reconhecer a representação simbólica da linguagem Matemática e Física.

Recursos utilizados: Lousa, giz, caderno, caneta, lápis, livro didático e projetor multimídia.

Organização da classe: Coletivo, ou seja, atender todos os alunos da turma.

Objetivos: Fazer a apresentação de algumas situações do dia a dia nas quais se fazem o uso do conceito de ondas; fazer o aluno pensar de forma crítica; reconhecer que há a propagação de uma onda sem que haja o transporte de matéria; reconhecer que a onda é uma sucessão de pulsos gerados por uma fonte; reconheceros diferentes tipos de ondas; diferenciar a definição de frequência e período e compreender as aplicações de tais conceitos; construir e investigar situações-problema; identificar fenômenos ondulatórios como reflexão, refração, difração, ressonância e interferência; entender como uma corda vibrante provoca um som; compreender que o conceito de altura está relacionado diretamente à tonalidade (grave ou agudo).

Metodologia: Aula expositiva e dialogada.

Desenvolvimento: Iniciar a aula recordando de forma rápida, e através de uma figura, modelos de onda; indicar também os fatos históricos que contribuíram com as descobertas –

como visto no Item 2.1 desse trabalho; associar as ondas aos modelos periódicos; exemplificar movimentos oscilatórios; descrever que o meio está relacionado à rapidez de deslocamento da onda; direcionar algumas perguntas aos alunos, tais como:

- Qual a representação de onda mais simples que existe? Existem outras diferentes?
- O que eles entendem por ondas?
- Através de um gráfico ou figura, como representar a vibração da corda de um violão ou outro instrumento de corda?
- Onde encontramos ondas na natureza?
- Em quais dispositivos tecnológicos, encontramos as aplicações de ondas no dia a dia?

A partir do questionamento exposto acima, escrever na lousa as respostas e suposições dos alunos, como forma de revisão de conteúdos que já foram supostamente estudados. Também, após a conclusão dos passos anteriores, com objetivo de tornar a aula mais interessante e motivadora, propor aos alunos exercícios de vestibulares no formato de situações-problema com múltipla escolha, para caracterizar o tratamento e compreensão dinâmica no processo de ensino-aprendizagem.

1. (OBF) O som, assim como a luz, ajuda os humanos e os animais a perceberem o ambiente circundante. Com relação ao som podemos dizer:
a) a velocidade de propagação do som no vácuo é maior que no ar.
b) no ar, a velocidade de propagação do som aumenta com a temperatura.
c) o som não sofre refração.
d) a água transmite melhor o som do que o bronze.
e) o som produz um fenômeno chamado eco. O eco é devido a ressonância do som.

A velocidade do som também é influenciada pela temperatura, assim, quanto mais alta a temperatura estiver, mais rápido o som irá se propagar.

Resposta: b

2. (VUNESP) A figura mostra um diapasão, instrumento metálico que, ao ser golpeado, emite ondas sonoras com frequência correspondente a determinada nota musical.

Figura 33. Diapasão.

Fonte: www.ciencias.seed.pr.gov.br

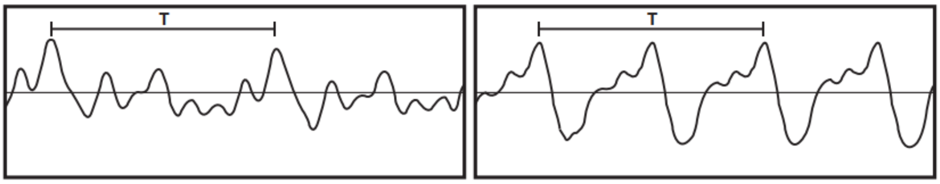
Quando se aproxima um diapasão vibrando das cordas de um instrumento afinado, a corda correspondente à nota emitida pelo diapasão passa a vibrar com a mesma frequência. Esse fato é explicado pelo fenômeno de

a) ressonância.
b) difração.
c) interferência.
d) dispersão.
e) reverberação.

Quando o diapasão é colocado para vibrar, ele produz som com uma frequência própria, fazendo com que as moléculas de ar também passem a vibrar nessa mesma frequência. Assim que as moléculas de ar atingem a corda do violão, que está afinada na mesma frequência do diapasão, as mesmas (cordas) começam a vibrar com igual frequência, tal fenômeno é assim denominado ressonância.

Resposta: a

3. (ENEM) Em um piano, o Dó central e a próxima nota Dó (Dó maior) apresentam sons parecidos, mas não idênticos. É possível utilizar programas computacionais para expressar o formato dessas ondas sonoras em cada uma das situações como apresentado nas figuras, em que estão indicados intervalos de tempo idênticos (T).



Dó central   Dó maior

A razão entre as frequências do Dó central e do Dó maior é de:

a) 1/2
b) 2
c) 1
d) 1/4
e) 4

Pela figura observamos que a frequência de Dó central é 1/2 da frequência de Dó maior.
Resposta: a

4. (UFRGS) Quais as características das ondas sonoras que determinam, respectivamente, as sensações de altura e intensidade do som?

a) Frequência e amplitude.
b) Frequência e comprimento de onda.
c) Comprimento de onda e frequência.
d) Amplitude e comprimento de onda.
e) Amplitude e frequência.

A frequência é a característica que permite determinar se o som é mais grave ou agudo, e a intensidade sonora está relacionada com a amplitude.

Resposta: a

2º Momento: Desenvolvimento do conteúdo

Duração: 2 aulas de 45 minutos.

Requisitos: Leitura e interpretação de texto discursivo, noções de função, interpretação de gráficos, reconhecer o sistema internacional de unidades (SI) e compreender o conceito de medidas, interpretar ordens de grandeza, conhecer a representação simbólica da linguagem matemática e física, obter conhecimentos elementares de trigonometria e funções trigonométricas, velocidade, aceleração, distância e tempo.

Recursos utilizados: Lousa, giz, caderno, caneta, livro didático, projetor multimídia.

Organização da classe: Coletivo, ou seja, atender todos os alunos da turma.

Objetivos: Reconhecer os elementos que representam uma onda periódica: período, frequência, comprimento de onda, amplitude; determinar a velocidade de propagação de uma onda transversal na corda; reconhecer os padrões oscilatórios de uma corda vibrante; identificar os ventres e nós e dimensionar as grandezas físicas que estão associadas a esse fenômeno; relacionar a rapidez de uma onda com a frequência e tração.

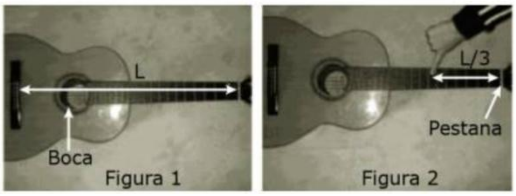
Metodologia: Aula expositiva e dialogada.

Desenvolvimento: Iniciar recordando o que foi visto sobre ondas nas 2 primeiras aulas; fazer também uma breve revisão sobre conceitos elementares da trigonometria como: seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis. A seguir, expor na lousa as seguintes definições:

- Período;
- Frequência;
- Amplitude;
- Comprimento de onda;
- Velocidade de propagação da onda numa corda;
- Frequência do som emitido por uma corda vibrante.

Após a conclusão dos passos preliminares dessa aula, propor aos alunos exercícios de vestibulares no formato de situações-problema com múltipla escolha, para caracterizar o tratamento e compreensão dinâmica no processo de ensino-aprendizagem.

5. (UFU) Uma corda de um violão emite uma frequência fundamental de 440,0 Hz ao vibrar livremente, quando tocada na região da boca, como mostra a figura 1. Pressiona-se então a corda, a *L/3* de distância da pestana, como mostra a figura 2.



A frequência fundamental emitida pela corda pressionada, quando tocada na região da boca, será de:

a) 660,0 Hz.
b) 146,6 Hz.
c) 880,0 Hz.
d) 293,3 Hz.

$$f_1 = 440\text{Hz}$$

$$f_n = \frac{n}{2L}v$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}v \Rightarrow 440 = \frac{1}{2L}v \Rightarrow v = 880L$$

$$f = \frac{1}{\frac{4}{3}L}880L \Rightarrow f = \frac{3}{4\cancel{L}}880\cancel{L} \Rightarrow f = 660\text{Hz}$$

Resposta: a

6. (IFBA) Fisicamente, um violão é um conjunto de cordas vibrantes que, quando afinadas e tensionadas pela força correta, emitem um som cuja frequência corresponde ao primeiro harmônico da corda, também conhecido como som fundamental. Considere uma dessas cordas com densidade linear de 10^{-2} kg/m cuja parte vibrante é de 55 cm de comprimento, tensionada por uma força de 144 N. Observando os valores das frequências na tabela abaixo, qual nota, aproximadamente, essa corda emitirá?

Corda	Nota	Frequência
1	Mi (E)	329,65 Hz
2	Si (B)	246,95 Hz
3	Sol (G)	196. 00 Hz
4	Ré (D)	146,85 Hz
5	Lá (A)	110,00 Hz
6	Mi (E)	82,40 Hz

a) Mi
b) Si
c) Sol
d) Ré
e) Lá

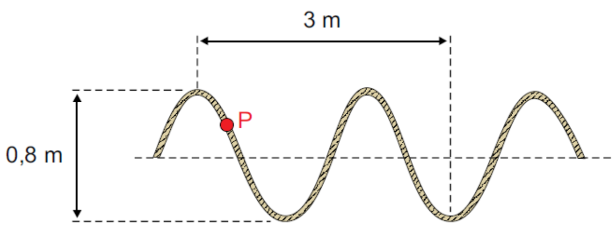
$\mu = 10^{-2}\,\text{kg/m}$
$L = 0,55\text{m}$
$T = 144\text{N}$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow v^2 = \frac{144}{10^{-2}} \Rightarrow v^2 = 14400 \Rightarrow v = \sqrt{14400} \Rightarrow v = 120\text{m/s}$$

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2\cdot 0,55}\cdot 120 \Rightarrow f_1 = \frac{120}{1,1} \Rightarrow f_1 = 109,09\text{Hz}$$

Resposta: e

7. (UNESP) Uma corda elástica está inicialmente esticada e em repouso, com uma de suas extremidades fixa em uma parede e a outra presa a um oscilador capaz de gerar ondas transversais nessa corda. A figura representa o perfil de um trecho da corda em determinado instante posterior ao acionamento do oscilador e um ponto P que descreve um movimento harmônico vertical, indo desde um ponto mais baixo (vale da onda) até um mais alto (crista da onda).



Sabendo que as ondas se propagam nessa corda com velocidade constante de 10 m/s e que a frequência do oscilador também é constante, a velocidade escalar média do ponto P, em m/s, quando ele vai de um vale até uma crista da onda no menor intervalo de tempo possível é igual a

a) 4. b) 8. c) 6. d) 10. e)12.

$$1,5\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 2m$$
$$v = \lambda f \Rightarrow v = \lambda \frac{1}{T} \Rightarrow 10 = 2 \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{2}{10} \Rightarrow T = 0,2$$
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{1,6}{0,2} \Rightarrow v = 8m/s$$

Resposta: b

8. (OBF) Um som de frequência 640 Hz e comprimento de onda 0,500 m se propaga em um meio com uma velocidade de:

a) 160 m/s b) 320 m/s c) 640 m/s d) 1.280 m/s e) 2.560 m/s

$$f = 640\text{Hz}$$
$$\lambda = 0,5\text{m}$$
$$v = ?$$
$$v = \lambda f \Rightarrow v = 0,5 \cdot 640 \Rightarrow v = 320\text{m/s}$$

Resposta: b

3º Momento: Sistematização do conteúdo

Duração: 2 aulas de 45 minutos.

Requisitos: Leitura e interpretação de texto discursivo, noções de função, interpretação de gráficos, reconhecer o sistema internacional de unidades (SI) e compreender o conceito de medidas, interpretar ordens de grandeza, conhecer a representação simbólica da linguagem matemática e física, obter conhecimentos elementares de trigonometria e funções trigonométricas, velocidade, aceleração, distância e tempo.

Recursos utilizados: Lousa, giz, caderno, caneta, livro didático, projetor multimídia.

Organização da classe: Individual para a realização da tarefa proposta para casa, e no coletivo - atender todos os alunos da turma, para exposição dos conteúdos e correção da tarefa.

Objetivos: Reconhecer os elementos que representam uma onda periódica: período, frequência, comprimento de onda, amplitude; determinar a velocidade de propagação de uma onda transversal na corda; reconhecer os padrões oscilatórios de uma corda vibrante; identificar os ventres e nós e dimensionar as grandezas físicas que estão associadas a esse fenômeno; relacionar a rapidez de uma onda com a frequência e tração.

Metodologia: Aula expositiva e dialogada.

Desenvolvimento: Iniciar a aula com uma revisão no coletivo, sobre os conteúdos já vistos em sala de aula, e tirar as possíveis dúvidas dos alunos. As atividades que serão propostas servirão como apoio ao professor, no sentido que os alunos poderão sistematizar muitos dos conceitos já vistos como mais uma visualização de aplicações de situações-problema. As atividades têm como foco principal os seguintes itens: interpretação de texto discursivo, frequência, velocidade, cálculos aritméticos e funções.

Propor atividade para resolução em casa, comexercícios de vestibulares no formato de situações-problema e múltipla escolha, com o objetivo de caracterizar o tratamento e compreensão dinâmica no processo de ensino-aprendizagem.

Obs.: Nesse momento, comentar com os alunos sobre a importância de se realizara atividade extraclasse, para desenvolver os conteúdos que foram estudados anteriormente em sala de aula.

9. (ENEM) Em um violão afinado, quando se toca a corda Lá com seu comprimento efetivo (harmônico fundamental), o som produzido tem frequência de 440 Hz. Se a mesma corda do violão é comprimida na metade do seu comprimento, a frequência do novo harmônico

a) se reduz à metade, porque o comprimento de onda dobrou.
b) dobra, porque o comprimento de onda foi reduzido à metade.
c) quadruplica, porque o comprimento de onda foi reduzido à metade.
d) quadruplica, porque o comprimento de onda foi reduzido à quarta parte.
e) não se modifica, porque é uma característica independente do comprimento da corda que vibra.

$$v = \lambda f$$

$$L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2L$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = L$$

$$v_1 = \lambda_1 f_1$$

$$v_2 = \lambda_2 f_2$$

$$v_1 = v_2$$

$$\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2$$

$$2\cancel{L} f_1 = \cancel{L} f_2$$

$$f_2 = 2 f_1$$

$$f_2 = 2 \cdot 440$$

$$f_2 = 880\text{Hz}$$

Resposta: b

10. (ENEM) Ao ouvir uma flauta e um piano emitindo a mesma nota musical, consegue-se diferenciar esses instrumentos um do outro. Essa diferenciação se deve principalmente ao (à)

a) intensidade sonora do som de cada instrumento musical.
b) potência sonora do som emitido pelos diferentes instrumentos musicais.
c) diferente velocidade de propagação do som emitido por cada instrumento musical.
d) timbre do som, que faz com que os formatos das ondas de cada instrumento sejam diferentes.
e) altura do som, que possui diferentes frequências para diferentes instrumentos musicais.

O timbre é a característica do som que, permite diferenciar sons com a mesma frequência mesma intensidade.

Resposta: d

11. (UFPR) Uma onda sonora se propaga num meio em que sua velocidade, em módulo, vale 500 m/s. Sabe-se que o período dessa onda é de 20 μs. Considerando os dados apresentados, a onda nesse meio apresenta o seguinte comprimento de onda (λ):

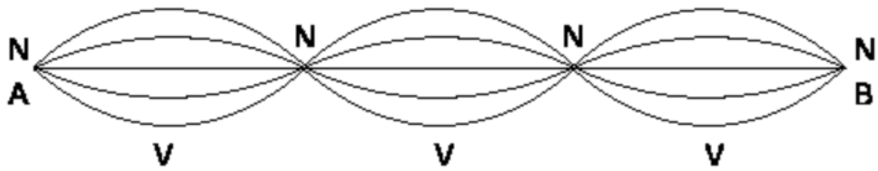
a) λ=250 mm. b) λ=100 mm. c) λ=25 mm. d) λ=10 mm. e) λ=1 mm.

$$v = 500\text{m/s} \Rightarrow v = 5 \cdot 10^2\,\text{m/s}$$
$$t = 20\mu\text{s} \Rightarrow t = 20 \cdot 10^{-6}\text{s} \Rightarrow t = 2 \cdot 10^{-5}\text{s}$$

$$f = \frac{1}{t} \Rightarrow f = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}}$$
$$\Rightarrow f = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{5} \Rightarrow f = 5 \cdot 10^{4}\,\text{Hz}$$
$$v = \lambda f \Rightarrow 5 \cdot 10^2 = \lambda \cdot 5 \cdot 10^4 \Rightarrow \lambda = \frac{\cancel{5} \cdot 10^2}{\cancel{5} \cdot 10^4}$$
$$\Rightarrow \lambda = 0{,}01\text{m ou } \lambda = 10\text{mm}$$

Resposta: d

12. (UFSCar) A figura representa uma configuração de ondas estacionárias numa corda.



A extremidade A está presa a um oscilador que vibra com pequena amplitude. A extremidade B é fixa e a tração na corda é constante. Na situação da figura, onde aparecem três ventres (V) e quatro nós (N), a freqüência do oscilador é 360 Hz. Aumentando-se gradativamente a freqüência do oscilador, observa-se que essa configuração se desfaz até aparecer, em seguida, uma nova configuração de ondas estacionárias, formada por

a) quatro nós e quatro ventres, quando a freqüência atingir 400Hz.
b) quatro nós e cinco ventres, quando a freqüência atingir 440Hz.
c) cinco nós e quatro ventres, quando a freqüência atingir 480Hz.
d) cinco nós e cinco ventres, quando a freqüência atingir 540Hz.
e) seis nós e oito ventres, quando a freqüência atingir 720Hz.

$$L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L \Rightarrow \lambda = 2\frac{L}{3}$$
$$v_3 = \lambda f_3$$
$$v_3 = 2\frac{L}{3} \cdot 360$$
$$v_3 = 240L$$
$$L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L \Rightarrow \lambda = 2\frac{L}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{L}{2}$$
$$v_4 = \lambda f_4$$
$$v_4 = \frac{L}{2} \cdot f_4$$
$$v_3 = v_4$$
$$240\cancel{L} = \frac{\cancel{L}}{2} \cdot f_4$$
$$f_4 = 2 \cdot 240 \Rightarrow f_4 = 480Hz$$

Resposta: c

4º Momento: Retomada dos conteúdos

Duração: 3 aulas de 45 minutos.

Requisitos: Dominar o conteúdo exposto nas aulas anteriores, ter domínio nos cálculos envolvendo notação científica, conhecimento e interpretação de algarismos significativos e aproximações, dedução de conceitos relacionados às disciplinas de Matemática e Física.

Recursos utilizados: Lousa, giz, caderno, caneta, livro didático, projetor multimídia.

Organização da classe: Coletivo, ou seja, atender todos os alunos da turma.

Objetivos: Interpretar e analisar a atividade descrita no Item 3.2 desse trabalho, “Proposta ao Professor: Uma atividade relativa às Ondas Mecânicas”, a qual conduz o aluno à organização analítica do pensamento matemático diante de situações-problemas; orientar o aluno ao pensamento crítico diante de situações-problema mais complexas.

Metodologia: Aula expositiva e dialogada.

Desenvolvimento: Na 1ª e 2ª aula explanar os tópicos do Capítulo 3 desse trabalho, a seguir desenvolver passo a passo todo o conteúdo relacionado, e após a conclusão, durante a 3ª aula, propor aos alunos exercícios de vestibulares no formato de situações-problema com múltipla escolha, para caracterizar o tratamento e compreensão dinâmica no processo de ensino-aprendizagem.

13. (VUNESP) Uma corda de violão, de comprimento *L* e massa por unidade de comprimento igual a μ, tensionada pela força *F*, quando excitada, pode produzir frequências de vibração dadas por $f_n = \left(\frac{n}{2L}\right)\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ com *n*=1, 2, 3, 4,... A velocidade de propagação da onda na corda é $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

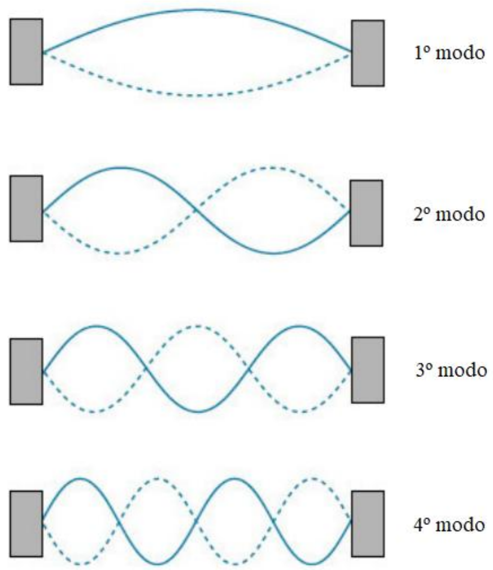
a) Obtenha uma expressão que relacione os possíveis comprimentos de onda com o número *n*.
b) Desenhe os 4 primeiros modos de vibração para a corda.

a)

$$v = \lambda f \Rightarrow \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \lambda \cdot \left(\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right) \Rightarrow 1 = \lambda \cdot \frac{n}{2L}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

b)



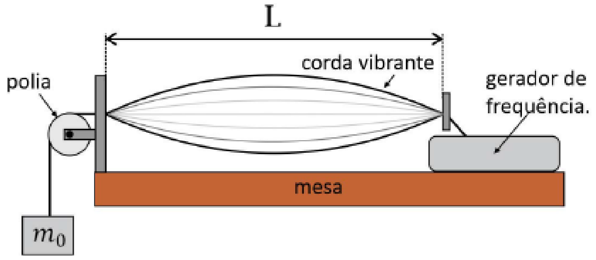
14. (ITA) Quando afinadas, a frequência fundamental da corda Lá de um violino é de 440 Hz e a frequência fundamental da corda Mi deste mesmo instrumento é de 660 Hz. A que distância da extremidade da corda lá se deve colocar o dedo para se obter o som correspondente ao da corda mi O comprimento toda da corda lá é igual a L e a distância pedida deve corresponder ao comprimento vibratório da corda.

a) 4L/9
b) L/2
c) 3L/5
d) 2L/3
e) Não é possível a experiência.

$$\textit{frequência do violino } 1: 440\text{Hz}$$
$$\textit{frequência do violino } 2: 660\text{Hz}$$
$$f = \frac{n}{2L}v$$
$$\Rightarrow f_1 = \frac{n}{2L_1}v_1 \Rightarrow 440 = \frac{1}{2L_1}v_1 \Rightarrow v_1 = 880L_1$$
$$\Rightarrow f_2 = \frac{n}{2L_2}v_2 \Rightarrow 660 = \frac{1}{2L_2}v_2 \Rightarrow v_2 = 1320L_2$$
$$v_1 = v_2$$
$$880L_1 = 1320L_2$$
$$\Rightarrow L_2 = \frac{880L_1}{1320} \Rightarrow L_2 = \frac{2}{3}L_1$$

Resposta: d

15. (FUVEST) Ondas estacionárias podem ser produzidas de diferentes formas, dentre elas esticando-se uma corda homogênea, fixa em dois pontos separados por uma distância L, e pondo-a a vibrar. A extremidade à direita é acoplada a um gerador de frequências, enquanto a outra extremidade está sujeita a uma força tensional produzida ao se pendurar à corda um objeto de massa m_0 mantido em repouso. O arranjo experimental é ilustrado na figura. Ajustando a frequência do gerador para f_1, obtém-se na corda uma onda estacionária que vibra em seu primeiro harmônico.



Ao trocarmos o objeto pendurado por outro de massa M, observa-se que a frequência do gerador para que a corda continue a vibrar no primeiro harmônico deve ser ajustada para $2f_1$. Com isso, é correto concluir que a razão M/m_0 deve ser:

a) 1/4
b) 1/2
c) 1
d) 2
e) 4

> Note e adote:
>
> A velocidade da onda propagando-se em uma corda é diretamente proporcional à raiz quadrada da tensão sob a qual a corda está submetida.

$$f_n = \frac{n}{2L}v$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$T = ma$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}}$$

$$\Rightarrow 2f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}} \Rightarrow 2.\left(\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}}\right) = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{T_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{T_2}{\mu}} \Rightarrow \frac{4T_1}{\cancel{\mu}} = \frac{T_2}{\cancel{\mu}}$$

$$\Rightarrow 4T_1 = T_2 \Rightarrow 4m_0\cancel{a} = M\cancel{a}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m_0} = 4$$

Resposta: e

16. (UFV) A corda ré de um violão tem a densidade linear de 0,60 g/m e está fixada entre o cavalete e o extremo do braço, separados por uma distância de 85 cm. Sendo 294 Hz a frequência da vibração fundamental da corda, calcule:

a) a velocidade de propagação da onda transversal na corda;

b) a tração na corda.

$$\mu = 0{,}6\,\text{g/m} \Rightarrow \mu = 6\cdot 10^{-4}\,\text{kg/m}$$
$$L = 85\,\text{cm} \Rightarrow L = 0{,}85\,\text{m}$$
$$f = 294\,\text{Hz}$$

a)

$$L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L \Rightarrow \lambda = 2\cdot 0{,}85 \Rightarrow \lambda = 1{,}7\,\text{m}$$
$$v = \lambda \text{f} \Rightarrow v = 1{,}7\cdot 294 \Rightarrow v = 499{,}8 \Rightarrow v \approx 500\,\text{m/s}$$

b)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow 500 = \sqrt{\frac{T}{6\cdot 10^{-4}}} \Rightarrow 500^2 = \frac{T}{6\cdot 10^{-4}}$$
$$\Rightarrow T = (5\cdot 10^2)^2\cdot(6\cdot 10^{-4}) \Rightarrow T = 5^2\cdot 10^4\cdot 6\cdot 10^{-4}$$
$$\Rightarrow T = 25\cdot 6 \Rightarrow T = 150\,\text{N}$$

5º Momento: Atividade avaliativa

Duração: 1 aula de 45 minutos.

Requisitos: Dominar o conteúdo exposto nas aulas anteriores, ter domínio nos cálculos envolvendo notação científica, conhecimento e interpretação de algarismos significativos e aproximações, dedução de conceitos matemáticos e físicos.

Recursos utilizados: Lousa, giz, caderno, caneta.

Organização da classe: A avaliação será realizada coletivamente – por todos os alunos da classe, porém cada aluno desenvolverá sua atividade avaliativa individual.

Objetivos: Desenvolver as habilidades e competências propostas nesse plano de aula.

Metodologia: Aplicação de avaliação individual; observação na aprendizagem e desenvolvimento da classe, frente ao aos conteúdos apresentados; propor atividade avaliativa de recuperação, caso o aluno não atinja a menção satisfatória.

Desenvolvimento: A avaliação será aplicada numa folha impressa contendo exercícios de vestibulares no formato de situações-problema com múltipla escolha, e questões dissertativas, para formalizar compreensão dinâmica no processo de ensino-aprendizagem.

Obs.: Os alunos não podem se comunicar entre si durante a avaliação, pois ela será realizada sem consulta; O tempo disponível para a realização da avaliação é até o término da aula.

17. (UFU) Uma corda de comprimento L = 2,0m tem as duas extremidades fixas. Procura-se estabelecer um sistema de ondas estacionárias com frequência igual a 120 Hz, obtendo-se o terceiro harmônico. Determine:

a) o comprimento de onda;
b) a velocidade de propagação;
c) a distância entre um nó e um ventre consecutivo.

$L = 2\text{m} \quad f = 120\text{Hz}$

a)

$$\lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot 2}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow \lambda \approx 1{,}33\text{m}$$

b)

$$v = \lambda \text{f} \Rightarrow v = \frac{4}{3} \cdot 120 \Rightarrow v = 160\text{m/s}$$

c)

$$d = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow d = \frac{\left(4/3\right)}{4} \Rightarrow d = \frac{4}{12} \Rightarrow d \approx 0{,}33\text{m}$$

18. (FURG) A propriedade que uma onda possui de contornar um obstáculo ao ser parcialmente interrompida por ele é conhecida por:

a) reflexão
b) refração
c) difração
d) polarização
e) interferência

Difração é a propriedade que a onda possui de contornar obstáculos.

Resposta: c

19. (FUVEST) Considere uma corda de violão com 50 cm de comprimento que está afinada para vibrar com uma frequência fundamental de 500 Hz.

a) Qual é a velocidade de propagação da onda nessa corda?
b) Se o comprimento da corda for reduzido à metade, qual será a nova frequência do som emitido?

$$L = 50\text{cm} \Rightarrow L = 0,5\text{m}$$
$$f = 500\text{Hz}$$

a)

$$L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L$$
$$\Rightarrow \lambda = 2 \cdot 0,50 \Rightarrow \lambda = 1\text{m}$$

$$v = \lambda \text{f} \Rightarrow v = 1 \cdot 500$$
$$\Rightarrow v = 500\text{m/s}$$

b)

$$L = 0,25\text{m}$$
$$L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L$$
$$\Rightarrow \lambda = 2 \cdot 0,25 \Rightarrow \lambda = 0,5\text{m}$$

$$v = \lambda \text{f} \Rightarrow 500 = 0,5f$$
$$\Rightarrow f = \frac{500}{0,5}$$
$$\Rightarrow f = 1000\text{Hz}$$

20. (FUVEST) A frequência fundamental do som emitido por uma corda vibrante é dada pela expressão:

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

em que *T* é a tração, μ é a densidade linear e *L* o comprimento da corda. Uma corda de 0,50 m com densidade linear 10^{-2} kg/m está submetida a uma tração de 100 N.

a) Calcule a frequência fundamental do som emitido pela corda.

b) O que se deve fazer com essa corda para dobrar a frequência do som fundamental?

$$L = 0,5\text{m}$$
$$\mu = 10^{-2}\text{kg/m}$$
$$F = 100\text{N}$$

a) $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\cdot 0,5}\sqrt{\frac{100}{10^{-2}}} \Rightarrow f = \sqrt{10^4} \Rightarrow f = 100\text{Hz}$

b)

$$f = 100\text{Hz} \Rightarrow 2f = 200\text{Hz}$$
$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 200 = \frac{2}{2L}\sqrt{\frac{100}{10^{-2}}} \Rightarrow 200 = \frac{1}{L}\sqrt{10^4}$$
$$\Rightarrow 200 = \frac{1}{L}\cdot 100 \Rightarrow L = \frac{100}{200} \Rightarrow L = \frac{1}{2}\text{m ou } L = 0,5\text{m}$$

Portanto, a medida do comprimento inicial da corda, deve ser reduzida para a metade.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho procuramos apresentar um estudo conceitual e teórico, visualizando os detalhes físicos ou mesmo abstratos, da equação de onda unidimensional e suas soluções numa corda vibrante. Esforçamos também por relacionar definições históricas e científicas, com o objetivo de agregar conteúdo, gerando assim, motivação e enriquecimento ao tema estudado.

Também, alguns resultados que foram obtidos e expostos no decorrer e desenvolvimento do texto, tem relação direta com a teoria das séries de Fourier e o método da separação de variáveis para a resolução do problema da corda vibrante com as extremidades fixas, onde, conceitos elaborados por esse último autor mencionado, se tornam adequadamente próprios para as situações onde há mais complexidade, devido às forças resistivas ou elásticas encontradas numa corda, quando posta para vibrar.

Evidenciamos também que, a construção do plano de aula e sua aplicação, são fundamentais para o bom desempenho das habilidades e competências desenvolvidas no cotidiano escolar, assim, buscou-se fortalecer o vínculo entre o ensino e a aprendizagem, de forma contextualizada e interdisciplinar, embasada a partir de situações-problema, colocando o aluno como protagonista no processo de evolução escolar.

Por fim, apesar das limitações intrínsecas, relacionadas a qualquer investigação de natureza teórica, esse estudo também teve como pretensão, ser mais um complemento, no que alude à organização entre os conteúdos de Matemática e Física, observados nas cordas de um instrumento musical e, as ondas produzidas a partir das mesmas (cordas).

Como sugestão para pesquisas futuras, propomos a continuidade dessa investigação, estendendo-a para outros níveis do ensino, tais como, segundo ciclo do Ensino Básico ou mesmo para o Ensino Superior, incentivando a busca por conteúdos voltados para o vestibular, como aqueles com complexidade mais elevada e que podem ser trabalhados no dia a dia, onde, os diversos conceitos matemáticos inter-relacionados, fomentam a descoberta e fundamentam a formação qualitativa. Outra proposta compreende despertar os professores, para as vantagens resultantes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, Física e Ciências da Natureza, através de aulas integradas com conceitos musicais, onde, a ligação e a estrutura entre os conteúdos de matemática e música produzidos pelas cordas, sejam aplicados.

Bibliografia

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras Editora, 2003. 333 p.

ALARCÃO, Isabel. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva**. São Paulo: Ed. Cortez, 2003.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, ano 33, n. 55, p. 1- 19, jul./dez. 2009.

ALVARENGA, Beatriz; MÁXIMO, Antonio. **Curso de Física Volume 2**. 3. ed. São Paulo: Ed. HARBRA, 1993.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 17 jan. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013. 562 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 10 jan. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais 1ª a 4ª série**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 10 jan. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 10 jan. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**: Parte I Bases Legais. Brasília: MEC/SEF, 2000a. 109 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em: 10 jan. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000b. 58 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 10 jan. 2022.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2006.

BOYER, Carl Benjamim; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da Matemática**. [tradução de Helena Castro]. 3. ed. São Paulo: Ed. Blucher, 2012. 504 p.

BUTKOV, Eugene. **Física Matemática.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 1998.

CATELLI, F.; MUSSATO, G. A. **As frequências naturais de uma corda de instrumento musical a partir de seus parâmetros geométricos e físicos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 36, n. 2, jun. 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1806-11172014000200004. Acesso em: 18 abr. 2022.

CATELLI, F.; MUSSATO, G. A. **Tensão, calibre e frequência das cordas de instrumentos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 36, n. 1, mar. 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1806-11172014000100006. Acesso em: 20 abr. 2022.

CAVALCANTE, M. A.; PEÇANHA, R.; TEIXEIRA, A. de C. **Ondas estacionárias em cordas e determinação da densidade linear de um fio. Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n. 2, 3502 (2013). Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1806-11172013000300021. Acesso em: 26 jul. 2022.

D'AMBROSIO, U. **A interface entre história e matemática uma visão histórico-pedagógica**. Revista História da Matemática para Professores, [S. l.], v. 7, n. 2, p. 41–64, 2021. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/67. Acesso em: 26 jul. 2022.

DONOSO, J. P. et al. **A física do violino**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 2, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1806-11172008000200006. Acesso em: 18 abr. 2022.

Equipe COM – OBMEP. **Clubes de Matemática da OBMEP** - Aplicando a matemática básica - Sala 2. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-sala-2/. Acesso em: 14 mar. 2022.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Ed. UNICAMP, 2011.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. 274 p.

GOTO, M. **Física e música em consonância**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2307 (2009). Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1806-11172009000200008. Acesso em: 26 jul. 2022.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física**, Vol.2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 8. ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2009. 295 p.

JAIME, P.J.G; PONCZEK, R.L. **Música e ruido: uma discussão sobre estes fenômenos no ensino médio de física**. Caderno de Física da UEFS 13 (02): 2603.1-11 2015. Disponível em: http://dfisweb.uefs.br/caderno/vol13n2/s6Artigo3PedroPonczek_Musica.pdf. Acesso em: 26 jul. 2022.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Ed. Cortez, 1994 (Coleção magistério. Série formação do professor).

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Filosofia da educação**. 3.ed. São Paulo: Cortez Editora, 2011.

MORS, P. M. **Música como ruído**. Cad.Cat.Ens.Fis.,v.11,n2: p.123-131, ago.1994.

NASCIMENTO, Luciana Marsola do. **Equação da Onda Unidimensional e Bidimensional**: um estudo das soluções analíticas. 2021. 64f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/14099. Acesso em: 09 de fev. 2022.

NUSSENSVEIG, Hearch Moysés. **Curso de Física Básica**, Vol. 1: Mecânica. 5. ed. revista e atualizada, São Paulo: Ed. Blucher, 2013. 394 p.

NUSSENSVEIG, Hearch Moysés. **Curso de Física Básica**, Vol. 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. 5. ed. revista e ampliada, São Paulo: Ed. Blucher, 2014. 375 p.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema – Mathematics Education Bulletin, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/72994. Acesso em: 26 jul. 2022.

PACCA, J. L. A. **O profissional de Educação e o Significado do Planejamento Escolar: Problemas dos Programas de Atualização**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 14, n. 1, 1992.

PEDROZO, F.F.; FREITAS, T. C. DE. **Modelo analítico para instrumentos musicais de cordas dedilhadas**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 44, e20210399 (2022). Disponível em: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0399. Acesso em: 26 jul. 2022.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2012.

SANTOS, E. M.; MOLINA, C; TUFAILE, A.P.B. **Violão e guitarra como ferramentas para o ensino de física**. Revista Brasileira de Ensino de Fisica, v. 35, n. 2, 2507 (2013). Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1806-11172013000200027. Acesso em: 26 jul. 2022.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista Etapa Ensino Médio**. São Paulo, 2020. 300 p.
Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2020/08/CURR%C3%8DCULO%20PAULISTA%20etapa%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf. Acesso em: 02 fev. 2022.

SCHOENBERG, Arnold. **Harmonia**. Tradução e notas de Marden Maluf. São Paulo: Ed. UNESP, 2001.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Ed. UNESP, 2007.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica.** [Tradução Seiji Hariki]. Vol. 1.

São Paulo: Ed. McGraw-Hill Ltda, 1987. 829 p.

SMOLE , K. S. ; DINNIZ, M. I. Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2007. 203p.

STEWART, Ian. **17 Equações que mudaram o mundo.** [tradução de George Schlesinger]. 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2013.

TEIXEIRA, B. R.; SANTOS, E. R. dos. **Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas: alguns aspectos orientadores para a prática docente**. Revista BOEM, Florianópolis, v. 5, n. 8, p. 51-71, 2017. DOI: 10.5965/2357724X05082017051. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/8895. Acesso em: 26 jul. 2022.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica. 6. ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2009.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Planejamento: Projeto de Ensino-Aprendizagem e Projeto Político-Pedagógico**. 24. ed. São Paulo: Editora Libertad, 2014.

VENEZUELA, A. L. **ANÁLISE COMBINATÓRIA: METODOLOGIA DE APOIO AO PROFESSOR**. REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, [S. l.], v. 9, n. 1, p. e21015, 2021. DOI: 10.26571/reamec.v9i1.10440. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/10440. Acesso em: 26 jul. 2022.