UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

CLEBER APARECIDO DE ALMEIDA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM EXPERIMENTO

SÃO CARLOS – SP
2023

CLEBER APARECIDO DE ALMEIDA

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM EXPERIMENTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS – SP
2023

Almeida, Cleber Aparecido de

Uma proposta didática para o estudo da função quadrática no ensino médio por meio da modelagem matemática de um experimento / Cleber Aparecido de Almeida -- 2023.
92f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Wladimir Seixas
Banca Examinadora: Wladimir Seixas, Samuel Rocha de Oliveira, Renato José de Moura
Bibliografia

1. Função quadrática. 2. Modelagem matemática. 3. Experimentação na matemática. I. Almeida, Cleber Aparecido de. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Cleber Aparecido de Almeida, realizada em 10/02/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas (UFSCar)

Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira (UNICAMP)

Prof. Dr. Renato Jose de Moura (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, aos meus pais, esposa e filhas por quem todo esforço é aliviado.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por permitir minha jornada e iluminar meu caminho.

A minha amada esposa Fernanda, pelo companheirismo, dedicação, compreensão e apoio em toda minha trajetória.

As minhas filhas Lara e Lais, por mesmo com sua pouca idade, compreenderem meus momentos de ausência.

Aos meus pais, Rosária e José Ricardo, mesmo em sua simplicidade, minha fonte de sabedoria, exemplo de vida, denotando e primando sempre pelo caráter e boas ações.

Ao orientador deste trabalho, professor Dr. Wladimir Seixas, que com toda sua sabedoria, dedicação e acolhimento norteou e tornou possível a elaboração desse projeto.

Aos queridos professores do Departamento de Matemática da UFSCar pelos ensinamentos desde o curso de especialização até o momento.

Aos meus queridos amigos do curso de mestrado: Daniel, Isabel, Matheus, Luana, Pedrinho e Katia pela troca de experiências, grupos de estudos e o importantíssimo apoio nos momentos críticos do curso.

Aos meus colegas de trabalho, equipe de gestão da unidade Barretos CE185 do SESI-SP, em especial, a Diretora Mirka Costa, coordenadora Tatiane Abrão e professora Alessandra Duarte Peixoto por viabilizar e contribuir para a aplicação da proposta didática.

A equipe gestora do Colégio PLUS de Barretos-SP, em especial a coordenadora pedagógica Érika, pelo carinho e compreensão nos momentos em que precisei de flexibilizações para a dedicação a esse projeto.

Aos estudantes da 1ª série do ensino médio do CE 185 Barretos-SP, pela disposição e dedicação na participação da proposta didática.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para tornar possível essa realização.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta pedagógica embasada no método da Modelagem Matemática para o estudo da função quadrática. A partir de um experimento com a transferência por gravidade de líquidos entre dois reservatórios com forma de prismas, o estudante lançará mão de recursos manuais e eletrônicos para modelar a relação existente entre as alturas dos líquidos dentro dos dois primas. De acordo com as orientações contidas nos documentos oficiais: Base Nacional Comum Curricular, Currículo Paulista e Referencial Curricular do Sistema SESI-SP de Ensino que norteiam o trabalho docente através do encontro das habilidades e competências necessárias para a formação integral do estudante, analisamos a apresentação e o tratamento do ensino de função quadrática no ensino médio, inclusive observando a apresentação no Caderno do Estudante, do livro didático do SESI e também, por amostragem, um livro do Programa Nacional do Livro Didático. Dessa forma, esta proposta didática utiliza o método da Modelagem Matemática através de um experimento, um simulador no GeoGebra, planilha eletrônica e folhas de atividades. A implementação da proposta pedagógica foi realizada com uma turma de 1º ano do ensino médio seguida da análise dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Função quadrática. Modelagem matemática. Experimentação na Matemática. Ensino da Matemática com o uso de tecnologia.

ABSTRACT

This dissertation presents a pedagogical proposal based on the Mathematical Modeling method for the study of the quadratic function. Based on an experiment with the transfer of liquids by gravity between two prism-shaped reservoirs, the student will use manual and electronic resources to model the relationship between the heights of the liquids within the two prisms. According to the guidelines contained in the official documents: National Common Curricular Base, Paulista Curriculum and Curricular Reference of the SESI-SP Teaching System that guide the teaching work through the meeting of the necessary skills and competences for the integral formation of the student, we analyzed the presentation and the treatment of quadratic function teaching in high school, including observing the presentation in the Student's Notebook, of the SESI textbook and also, by sampling, a book from the National Textbook Program. Thus, this didactic proposal uses the method of Mathematical Modeling through an experiment, a simulator in GeoGebra, spreadsheet and activity sheets. The implementation of the pedagogical proposal was carried out with a group of 1st year of high school followed by the analysis of the results obtained.

Keywords: Quadratic function. Mathematical modeling. Experiments in Mathematics. Teaching Mathematics with the use of technology.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No início da carreira no magistério, nos deparamos com um cenário em que os estudantes se apresentam desinteressados ou desmotivados no estudo e aprendizagem da matemática. Incomodado com essa situação, procuramos encontrar ações e intervenções que poderiam contribuir para a melhora dessa realidade. Então, no período de 2017 a 2019, participamos do curso de aperfeiçoamento no ensino de ciências exatas oferecido pela Universidade Federal de São Carlos, o Matem@tica na Pr@tica. Na ocasião, tivemos a oportunidade de conhecer várias metodologias. Como trabalho de conclusão do curso, elaboramos e aplicamos uma aula inédita utilizando a Modelagem Matemática e a investigação com materiais concretos para o estudo da função linear. Percebemos o quão significativo é para o estudante quando proporcionamos atividades práticas e diferenciadas de aprendizagem. A partir daí, procuramos sempre inovações para nossa prática docente. Ao final do curso de especialização, surgiu a oportunidade do ingresso Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos em nível de Mestrado Profissional. Assim, surge a concepção dessa proposta didática, inspirada no trabalho iniciado no curso de aperfeiçoamento (ALMEIDA, 2019) seguida do conhecimento de outras propostas produzidas por colegas da matemática (BATISTA, 2015; RANGEL, 2019). Num contexto geral, pela nossa experiência profissional, identificamos que o estudo de função quadrática no ensino médio não é um tema de fácil compreensão por parte dos estudantes, ou ainda, normalmente é abordado apenas com situações teóricas, tornando-se distante para o estudante. Em pesquisa à procura de questões desafiadoras sobre o tema, encontramos no Banco de Questões da OBMEP 2012[1] uma questão envolvendo a altura do trapézio formado dentro de um triângulo quando traçada uma linha paralela a base desse triângulo e a altura de um retângulo obedecidas algumas condições. Desse modo, vislumbramos a possibilidade de reproduzir e explorar a situação em uma abordagem diferente. Pensamos em transformá-la em um experimento em que o estudante poderia manusear, investigar e validar conceitos matemáticos. A seguir, descrevemos a trajetória percorrida por este trabalho.

No capítulo 2, realizamos um estudo das orientações do ensino de função quadrática de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), Currículo Paulista Etapa Ensino Médio (SÃO PAULO, 2020) e Referencial Curricular do Sistema SESI-SP de Ensino (SESI-SP, 2020b). Fazemos também uma breve análise qualitativa dos materiais didáticos utilizados por essas instituições, incluindo um livro didático do PNLD – Plano Nacional do Livro Didático do Ministério da Educação[2].

No capítulo 3, descrevemos a concepção da proposta didática embasada no método da Modelagem Matemática. Em vista da possibilidade desta proposta vir a ser utilizada por outros colegas professores, procuramos detalhar nossa experiência desde a motivação, passando por todos os passos de construção do experimento, construção do simulador no software de

[1] <http://www.obmep.org.br/banco.htm>. Acesso em: 10 jan. 2023.

[2] <https://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro>. Acesso em: 10 jan. 2023.

geometria dinâmica GeoGebra até a elaboração das folhas de atividades. Na Folha de Atividades 1, trabalhamos a interpretação do experimento fazendo com que o estudante elaborasse uma análise da dinâmica do experimento propondo conjecturas, constatações e medições antes da realização do experimento. O objetivo nessa atividade foi de provocar o estudante sobre existência de uma relação matemática envolvendo a altura do trapézio formado no reservatório e a altura do retângulo no reservatório 2. Na sequência, realizando o experimento o estudante pode construir uma tabela com as informações colhidas no experimento e elaborar um gráfico no papel quadriculado. A cada etapa da atividade provocamos o estudante a uma reflexão sobre a melhor forma de modelar o nosso experimento, isto é, determinar uma equação matemática que represente a relação observada no experimento. Na Folha de Atividades 2 desafiamos os estudantes a analisar as informações colhidas até o momento para tentar encontrar o melhor modelo para o problema, inclusive sugerindo métodos para realizar essa tarefa. Na Folha de Atividades 3 o estudante fez uso da planilha eletrônica para inserir os dados do experimento e validar ou refutar suas descobertas. Na Folha de Atividades 4 realizamos o fechamento da atividade deduzindo a expressão que relaciona as grandezas do experimento com suas medidas reais.

No capítulo 4, apresentamos uma análise qualitativa das observações e percepções no desenvolvimento da atividade e também nos registros produzidos pelos estudantes nas folhas de atividades e planilha eletrônica. Salientamos a importância da atividade na postura dos estudantes e da contribuição para diagnósticos e intervenções no processo de ensino e aprendizagem da turma.

Por fim, no último capítulo deixamos nossas considerações, reflexões sobre o processo do trabalho, evidenciando os pontos positivos da aplicação e também sugestões para o aproveitamento da proposta para uma ampliação e adaptações para a implementação em sala de aula visando contribuir com a melhora da aprendizagem de nossos estudantes.

2 A FUNÇÃO QUADRÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA - ENSINO MÉDIO

Neste capítulo trataremos do ensino de função quadrática na Educação Básica de acordo com as orientações contidas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), Currículo Paulista Etapa Ensino Médio (SÃO PAULO, 2020) e do Referencial Curricular do Sistema Sesi-SP de Ensino (SESI-SP, 2020b). Além disso, apresentaremos uma breve análise qualitativa dos materiais didáticos utilizados pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e pela Rede SESI-SP.

2.1 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES RELACIONADAS AO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS DE ACORDO COM A BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM

De acordo com a Base Nacional Curricular Comum - BNCC (BRASIL, 2018), no ensino médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. Para tanto, organiza-se em competências e habilidades. Na BNCC, define-se competência como:

> Mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8).

Além das competências gerais previstas, o documento propõe competências específicas e habilidades da Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio articuladas às respectivas competências das áreas do Ensino Fundamental. A seguir, enumeramos essas competências específicas:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
>
> (BRASIL, 2018, p. 531)

Para cada uma das competências são mobilizadas habilidades específicas. No caso do ensino de função quadrática, destacamos a competência 3, evocando a habilidade específica (EM13MAT302) descrita como: “Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º e 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 536).

Observa-se que as competências aqui elencadas, em particular a segunda articulada a respectiva habilidade, colocam o estudante num papel ativo dentro do processo de aprendizagem. Ainda, abrem um grande leque de possibilidades para o ensino e aprendizagem do objeto de estudo. Porém, verifica-se em muitos casos que o docente raramente deixa de lado o modelo tradicional lousa-giz, que muitas vezes se faz necessário devido às limitações de recursos e tempo, implicando em uma postura passiva do estudante, decorando métodos como “receita de bolo” sem internalizar verdadeiramente o conhecimento. No entanto, de acordo com Perrenoud (1999, p. 70)

> Os exercícios escolares tradicionais são episódios sem amanhã. Completados ou não, certos ou errados, são abandonados com uma certa rapidez para deixar o lugar a outros. Em um processo de projeto, o prazo do investimento é maior; pede-se aos alunos que não percam de vista o objetivo e que adiem a sua satisfação até a conclusão total, às vezes, para vários dias ou para várias semanas depois.

Dessa forma, se faz necessário a busca por metodologias de ensino aprendizagem que sejam eficientes, preferencialmente de baixo custo, fácil implementação e monitoramento dentro tempo alocado para o tema.

2.2 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES RELACIONADAS AO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS DE ACORDO COM O CURRÍCULO PAULISTA

Assim como a BNCC (BRASIL, 2018), o Currículo Paulista para a área de Matemática do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2020) define as Competências e Habilidades necessárias para o desenvolvimento do conhecimento matemático esperado para o estudante do Ensino Médio. Porém, mais especificamente defende que o aprendizado do componente curricular compreende dotar o estudante de um conjunto de competências e habilidades para, raciocinar, justificar conclusões e expressar ideias de maneira clara, o que se alcança por meio de atividades matemáticas problematizadoras.

> A Matemática permite ao estudante mobilizar conhecimentos para identificar modelos no enfrentamento de situações complexas, fazer observações e análises críticas, coletar e organizar dados identificando evidências, levantar hipóteses, fazer críticas, fazer conjecturas e decidir se são válidas ou devem ser refutadas. Trata-se de capacidades essenciais para a vida pessoal e profissional (SÃO PAULO, 2020, p. 111).

Assim sendo, a abordagem da resolução de problemas e modelagem matemática se torna uma poderosa ferramenta para que o estudante possa abstrair e ressignificar os saberes matemáticos. Ainda, parte-se de que a Matemática, além de componente curricular e área de conhecimento, é primordialmente uma ciência. De forma geral, espera-se que em relação a aprendizagem da Matemática, o estudante tenha competências e habilidades para a leitura, a investigação e a elaboração de julgamentos próprios frente às variadas situações cotidianas.

O ensino de funções é organizado no documento como objeto de conhecimento relacionado à todas as competências específicas da Matemática. A seguir, vamos apontá-las, descrevendo os casos em que é tratado apenas como função e também os casos específicos de função quadrática tecendo alguns comentários.

Na competência 1 do Currículo Paulista, o objeto de conhecimento é apresentado na unidade temática Números e Álgebra, relacionado à habilidade EM13MAT101 e Geometria e Medicas relacionado à habilidade EM13MAT103, conforme a Figura 2.1.

Figura 2.1 – Organizador Curricular da área de Matemática e suas Tecnologias para a competência 1.

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1.Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais	**NÚMEROS E ÁLGEBRA**	Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc. Estatística: gráficos (e infográficos), medidas de tendência central e de dispersão
	(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes	**GEOMETRIA E MEDIDAS**	Funções: representação gráfica e algébrica. Sistema Internacional de Medidas: principais unidades e conversões. Bases de sistemas de contagem (base decimal, base binária, base sexagesimal etc.)

Fonte: Adaptado pelo autor (SÃO PAULO, 2020, p. 120-121).

Convém ressaltar que, nesse contexto, de forma geral a função apresenta-se como um objeto de conhecimento relacionado interpretação de situações que envolvam variação entre grandezas pela análise de gráficos das funções representadas e as taxas de variação, ou seja, atua em outras áreas do conhecimento como Ciências da Natureza e Ciências Humanas, potencializando a formação integral do estudante.

Já na Competência 2, com a unidade temática Geometria e Medidas e relacionado à habilidade EM13MAT201, o objeto de conhecimento aqui tratado de forma geral como função como mostra a Figura 2.2.

Figura 2.2 – Organizador Curricular da área de Matemática e suas Tecnologias para competência 2.

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
2.Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	**(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.	**GEOMETRIA E MEDIDAS**	Conceitos e procedimentos de geometria métrica. Sistema métrico decimal e unidades não convencionais. Funções, fórmulas e expressões algébricas

Fonte: Adaptado pelo autor (SÃO PAULO, 2020, p. 122).

Com efeito, mobiliza o estudante como sujeito ativo no mundo cotidiano, colocando em perspectiva os conhecimentos adquiridos para a interpretação, investigação e tomadas de decisões nas mais diversas situações do mundo contemporâneo.

Na competência 3, o objeto de conhecimento é apresentado na unidade temática Números e Álgebra, relacionado à habilidade EM13MAT302, conforme apresentado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Organizador Curricular da área de Matemática e suas Tecnologias para a competência 3.

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
3.Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais	**NÚMEROS E ÁLGEBRA**	Função polinomial do 1° grau. Função polinomial do 2° grau. Variação entre grandezas (proporcionalidade e não proporcionalidade).

Fonte: Adaptado pelo autor (SÃO PAULO, 2020, p. 123).

Nesse caso, a função quadrática mostra-se relacionada a construção de modelos para resolução de problemas em contextos diversos. Dessa maneira, observa-se possibilidades de estudo dentro da própria matemática, quanto em outras áreas do conhecimento utilizando-se de tecnologias digitais quando possível. Porém, considera-se que o estudante já domine o objeto de conhecimento.

Na competência 4, a função quadrática aparece também na unidade temática Números e Álgebra, relacionada à habilidade EM13MAT402, conforme descrito na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Organizador Curricular da área de Matemática e suas Tecnologias para a competência 4.

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
4.Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados deproblemas.	**(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	**NÚMEROS E ÁLGEBRA**	Funções polinomiais de 2º grau. Gráficos de funções a partir de transformações no plano. Estudo do comportamento da função quadrática (intervalos decrescimento/decrescimento, ponto de máximo/mínimo e variação da função).

Fonte: Adaptado pelo autor (SÃO PAULO, 2020, p. 127-128).

Aqui, fica evidente a intenção de converter representações algébricas para a representação gráfica. Geralmente, esse é caminho mais comum nas sequências didáticas convencionais, ou seja, dada a expressão a algébrica, atribuímos valores arbitrários para a variável independente, aplicamos esses valores na expressão algébrica, encontramos os valores correspondentes e, em seguida, localizamos os pontos no plano cartesiano. Geralmente, a habilidade é cumprida parcialmente, pois não é realizado a análise da relação de proporcionalidade entre as grandezas. Dessa forma, o processo de aprendizagem costuma ser mecânico e repetitivo, privando o estudante da oportunidade de investigar, comparar, formular hipóteses e conferi-las. Tal comportamento pode ser motivado muitas vezes pela falta de tempo em concluir os conteúdos do currículo ou pela comodidade do professor.

Na última das competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, a função quadrática é relacionada ao tema Números e Álgebra e a habilidade EM13MAT503. Ver Figura 2.5.

Figura 2.5 – Organizador Curricular da área de Matemática e suas Tecnologias para a competência 5.

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
5.Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.	**NÚMEROS E ÁLGEBRA**	Funções polinomiais do 2º grau (função quadrática): gráfico, raízes, pontos de máximo/mínimo, crescimento/decrescimento, concavidade. Gráficos de funções.
	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	**NÚMEROS E ÁLGEBRA**	Funções polinomiais do 2º grau (função quadrática). Gráficos de funções. Pontos críticos de uma função quadrática: concavidade, pontos de máximo ou de mínimo

Fonte: Adaptado pelo autor (SÃO PAULO, 2020, p. 130).

Por fim, dentro dessa perspectiva e sendo essa a mais completa das competências, as habilidades relacionadas deixam claro a intenção de investigar, analisar e interpretar dados para, a partir daí, representar as informações no plano cartesiano e reconhecer ou compor a expressão algébrica que representa a função quadrática.

Dado o exposto, observamos que de um modo geral, as habilidades referentes ao objeto de conhecimento função quadrática, existem muitas possibilidades de estudo e aprendizagem, tanto aplicados dentro da própria Matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Além de ser assunto que pode ser muito bem explorado por softwares de geometria dinâmica e também por planilhas eletrônicas de livre acesso.

2.2.1 A função quadrática no Caderno do Estudante - Currículo em ação

Faremos uma breve análise qualitativa da introdução da função quadrática como objeto de conhecimento no material didático da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. O material intitulado Currículo em Ação – Matemática e suas Tecnologias – Projeto de Vida & Tecnologia e Inovação (SÃO PAULO, 2022), a função quadrática é apresentada no volume 2. No momento 1, há uma atividade de retomada que, por meio de uma pesquisa sobre áreas de figuras planas, permite a socialização dessa pesquisa sugerindo as intervenções do professor mediador. Na sequência, solicita ao estudante o preenchimento de uma tabela de duas colunas relacionando a medida do lado com a área desse quadrado. Observamos que a coluna da esquerda (lado do quadrado), já foram dados os valores solicitando ao estudante que preencha a coluna da direita (área do quadrado). Por meio da observação de padrões, generaliza a equação. O momento 2 traz uma atividade sobre taxa de variação em curvas. A atividade propõe uma situação problema envolvendo a função que relaciona o tempo de contrato de serviço e o salário correspondente como mostra a Figura 2.6.

Figura 2.6 – Exemplo de atividade para determinar taxa média de variação.

Considere a função salário S(t) na tabela a seguir, sabendo-se que **t** é o tempo de contrato em anos e **S** é o salário, em números de salários-mínimos.

Quantidade de salários-mínimos em função do tempo

Tempo t (anos)	Salário S (salários-mínimos)
0	2
2	3
4	6
6	11
8	18
10	27

Fonte: Adaptado pelo autor (SÃO PAULO, 2022, p. 10-11).

Em seguida, propõe-se o cálculo da taxa de variação, porém já estabelece quais intervalos o estudante deverá utilizar e também dá o primeiro intervalo resolvido como exemplo. Ver Figura 2.7.

Figura 2.7 – Exemplo de atividade para cálculo da taxa de variação.

Calcule a taxa média de variação em cada intervalo de tempo. Veja o exemplo.

Taxa de variação média em cada intervalo de tempo

Intervalo de tempo (anos)	Taxa média de variação (TMV)
0 a 2	$\frac{(3-2)}{(2-0)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
2 a 4	
4 a 6	
6 a 8	
8 a 10	

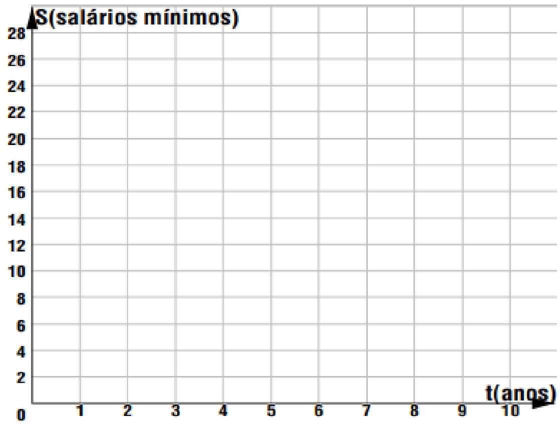
Fonte: Adaptado pelo autor (SÃO PAULO, 2022, p. 11).

Observamos também que, no enunciado, há a descrição de como fazer o cálculo da taxa de variação, isto é, fazendo a razão entre os salários e os respectivos instantes (tempo). Porém, não evidencia para o estudante tratar-se dos intervalos de variação correspondentes nas grandezas salário e tempo. Talvez, isso se deva ao fato de o estudante ter conhecido previamente a taxa de variação quando do estudo da função afim.

Por fim, solicita ao estudante que esboce o gráfico no plano cartesiano e explicite a taxa de variação como podemos ver na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Exemplo de atividade para construção de gráfico.

Esboce o gráfico e represente a taxa média de variação.



Fonte: Adaptado pelo autor (SÃO PAULO, 2022, p. 11).

A partir daí, são apresentadas situações similares e aplicados os mesmos processos.

A sistematização e formalização do conceito de função polinomial de 2º grau do tipo $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, ocorre nos momentos 3 e 4 explorando situações com a construção, análise de gráficos e aprofundamento dos conhecimentos (SÃO PAULO, 2022, p. 12-17).

2.3 REFERENCIAL CURRICULAR DO SISTEMA SESI-SP DE ENSINO - ENSINO MÉDIO

O Sistema SESI-SP de Ensino é uma rede de ensino particular, com escolas localizadas em municípios paulistas, além de manter convênio com prefeituras Estado de São Paulo[1]. Em consonância com a BNCC (BRASIL, 2018), o documento que norteia as ações didáticas nos centros educacionais na etapa do ensino médio é o Referencial Curricular do Sistema SESI-SP (SESI-SP, 2020b). O documento apresenta os objetivos afim de promover a formação integral do estudante. Nesse contexto, os estudantes são estimulados a desenvolver competências para enfrentamento aos desafios sociais, culturais e do mundo do trabalho.

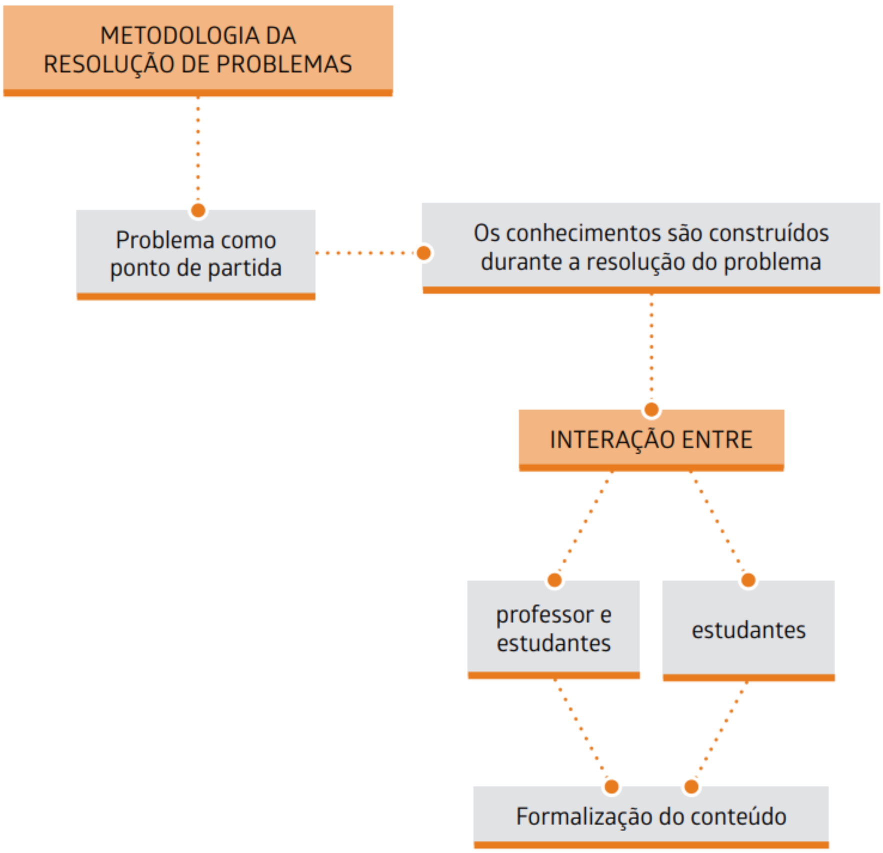
De acordo com os encaminhamentos didáticos constantes no Referencial:

> O componente curricular Matemática não deve ser encarado como aquele em que os estudantes se colocam diante do professor para executar exercícios, responder a perguntas de maneira mecanizada, privilegiando cálculos, procedimentos ou regras vazias que enfatizam técnicas sem reflexão sobre os aspectos que envolvem a solução encontrada (SESI-SP, 2020b, p. 246).

1 <https://www.sesisp.org.br/educacao/sistema-sesi-sp-de-ensino>. Acesso em: 10 jan. 2023.

Sendo assim, adota como principal metodologia para o ensino e aprendizagem de Matemática a Resolução de Problemas. Porém, salienta que "usar como metodologia a Resolução de Problemas é muito mais do que simplesmente resolver problemas em sala de aula, utilizando uma técnica específica" (SESI-SP, 2020b, p. 247). Nesse sentido, a metodologia é descrita como um processo em que o problema é a premissa inicial das atividades de aprendizagem, na qual o estudante constrói a aprendizagem durante a resolução do problema ocorrendo as interações sociais e, por fim, a formalização do conteúdo conforme descrito na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Mapa conceitual que ilustra a metodologia da resolução de problemas.



Fonte: (SESI-SP, 2020b, p. 248).

É importante destacar que, nesse processo, o estudante é colocado como protagonista e o professor na posição de orientador e mediador da aprendizagem.

2.3.1 A função quadrática no material didático do SESI-SP

No material da rede SESI-SP – Orientações didáticas do Movimento Aprender (SESI-SP, 2020a) a função quadrática é apresentada no capítulo 2 do livro da 1ª série do Ensino Médio. Trata-se de cinco situações de aprendizagem seguida de atividades complementares. As expectativas de ensino e aprendizagem relacionadas ao objeto de estudo são:

> [EM.MAT.02] Resolver problemas envolvendo a representação gráfica (incluindo o uso de tecnologias digitais), das funções polinomiais de 1º e 2º graus, analisando suas aplicações nos mais diversos contextos.
>
> [EM.MAT.09] Generalizar situações expressas por problemas envolvendo diferentes representações numéricas (tabelas, gráficas, entre outras), a fim de identificar quando são representações de funções polinomiais do 1o ou de 2o graus, analisando suas aplicações nos mais diversos contextos.
>
> (SESI-SP, 2020a, p. 64)

De acordo com as orientações, essas expectativas de ensino e aprendizagem se relacionam com as seguintes habilidades da BNCC:

> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 536).
>
> (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p. 539).
>
> (EM13MAT501)Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau (BRASIL, 2018, p. 541).
>
> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais (BRASIL, 2018, p. 539).

Na atividade 9 (SESI-SP, 2020a, p. 74) temos uma situação problema sobre o custo do fretamento de um ônibus com capacidade para 44 passageiros para a realização de uma excursão colocando algumas condições com relação ao valor a ser pago pelo frete. A partir daí, são desenvolvidos itens do problema que levam o estudante a compor a expressão algébrica que modela a situação relacionando as grandezas “valor recebido pela empresa” em função da “quantidade de lugares vagos no ônibus”. Em seguida propõe-se a construção do gráfico no plano cartesiano e provoca o estudante a analisar o gráfico construído e determinar a quantidade de passageiros para que a empresa obtenha lucro máximo. Observamos que, mesmo de maneira informal, foram trabalhados em uma situação discreta os conceitos de lei de formação, representação gráfica, vértice da parábola e valor máximo. Agora, na seção Organizando as Ideias (Figura 2.10) (SESI-SP, 2020a, p. 81), temos a definição formal da função quadrática já conceituando concavidade da parábola e os zeros da função.

Figura 2.10 – Formalização da função quadrática.

ORGANIZANDO AS IDEIAS

A **função polinomial do 2º grau** tem como gráfico uma curva chamada parábola, que pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo. A função do **2º** grau é escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, sendo $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ coeficientes reais e $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Quando o valor do coeficiente $\boldsymbol{a}$ for positivo, a parábola do gráfico da função do 2º grau terá **a concavidade para cima**. Quando o valor do coeficiente $\boldsymbol{a}$ for negativo, a parábola da função do 2º grau terá **a concavidade para baixo**.

Os **zeros da função** são os valores de x quando o gráfico da função intercepta o eixo das abscissas (eixo x). Desse modo, temos $\boldsymbol{f(x) = 0}$ ou $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, resultando em uma equação do 2º grau.

$$\text{Uma parábola pode ter: } \begin{cases} \text{dois zeros da função, quando } \Delta > 0. \\ \text{um zero, quando } \Delta = 0. \\ \text{nenhum zero da função, quando } \Delta < 0. \end{cases}$$

Lembre-se de que: $\Delta = b^2 - 4ac$ e $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Fonte: (SESI-SP, 2020a, p. 81).

Seguindo a mesma estratégia, na atividade 11 é apresentada uma situação em que o estudante deve compor o modelo matemático que representa a receita de uma empresa. No desenvolvimento é construído o gráfico e o ponto de atenção é o fato de atividade provocar o estudante a verificar a existência de uma receita nula (zero da função) e encontrar o valor de receita máxima. No último item, propõe uma pesquisa para que o estudante formalize o conceito. Em seguida, define o conceito de vértice da parábola. Ver Figura 2.11.

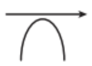
Figura 2.11 – Definição do vértice da parábola e quadro resumo da quantidade de raízes.

ORGANIZANDO AS IDEIAS

O **vértice** é o ponto da parábola que muda a inflexão de crescente para decrescente ou vice-versa. O vértice é o ponto de mínimo da função polinomial do 2º grau, cuja coordenada y possui o menor valor possível (quando ela possui concavidade para cima) ou o ponto de máximo, cuja coordenada y possui o maior valor possível (quando ela possui concavidade para baixo).

Podemos calcular o vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ usando as fórmulas:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Valor do a	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

RJP

Fonte: (SESI-SP, 2020a, p. 87).

2.4 ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS NOS LIVROS DIDÁTICOS

O Ministério da Educação (MEC), por meio do Programa Nacional do Livro Didático[2] (PNLD), realiza a avaliação e a distribuição de livros didáticos, pedagógicos e literários para estudantes da educação básica. De acordo com o programa, a análise pedagógica coordenada pelo Ministério consta com a participação de comissões técnica específicas, integrada por especialistas de diferentes áreas do conhecimento. Sua vigência corresponderá ao ciclo que se referir o processo de avaliação. As resenhas das obras são publicadas no Guia Digital do PNLD, que orienta o corpo docente e corpo diretivo da escola na escolha das coleções para aquela etapa de ensino. De acordo com o PNLD 2021, foram aprovados dez livros didáticos. A seguir, apresentamos uma breve análise da apresentação de função quadrática em uma dessas obras.

2.4.1 Prisma-matemática

A obra “Prisma matemática” da editora FTD (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020), aborda a função quadrática no capítulo 3 iniciando com uma pequena apresentação de abertura justificando a importância do estudo da função quadrática para aplicações no cotidiano.

> O estudo de função quadrática e de outros conceitos relacionados pode nos auxiliar a compreender como o conhecimento matemático é utilizado para modelar situações como essas, além de outras que vivenciamos em nosso dia a dia (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020, p. 110).

Na sequência, são apresentadas algumas situações em que a função quadrática pode ser observada em situações cotidianas, ou melhor, situações reais.

> Situações envolvendo trajetórias parabólicas, como lançamentos de projéteis, podem ser modeladas por meio de funções quadráticas, assim como certos tipos de movimentos estudados pela Física. Além disso, alguns objetos, como antenas parabólicas e faróis de veículos, são construídos utilizando propriedades da parábola, a curva que representa o gráfico de funções quadráticas (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020, p. 112).

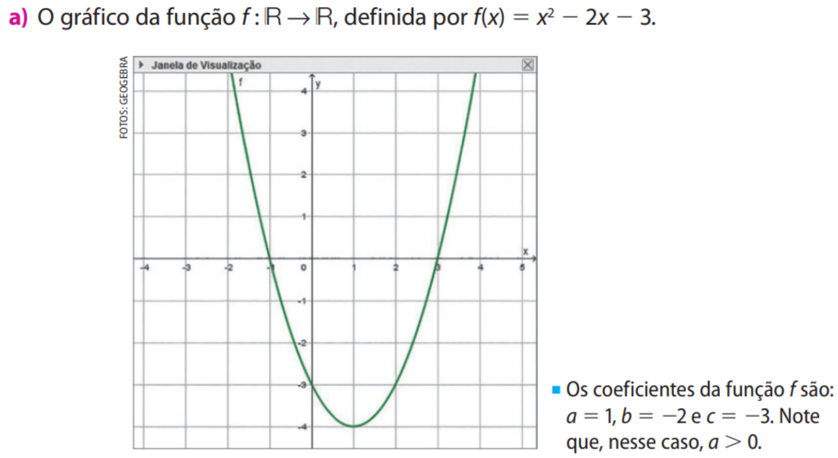
Porém, os autores já iniciam definindo a função quadrática ou função polinomial do 2º grau de maneira formal. Acreditamos que isso decorra do fato do estudo prévio da função afim.

Por fim, é apresentada uma situação resolvida utilizando a lei de formação de uma função quadrática que modela o lucro L, em reais, em relação ao preço unitário x de cada capinha de celular vendida. Na sequência, faz uma provocação sobre a quantidade de capinhas necessária para obter um lucro de R$ 450,00; o que verifica se o estudante identifica corretamente as grandezas envolvidas no problema. Finalmente, exemplifica o lucro obtido supondo um preço médio de R$ 20,00 por capinha.

---
[2] <https://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro>. Acesso em: 10 jan. 2023.

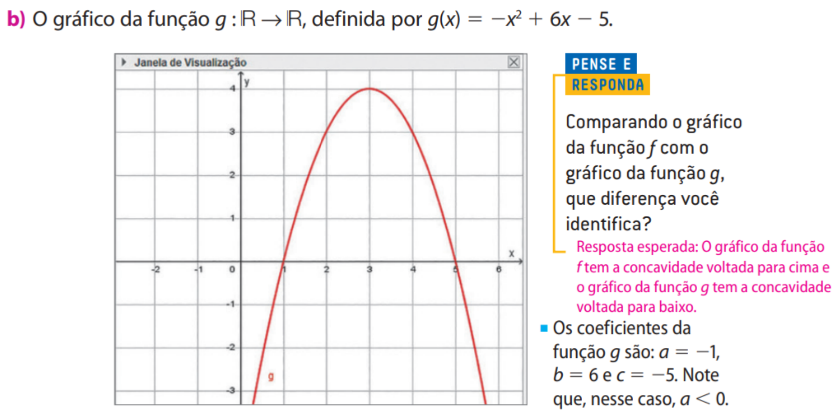
O gráfico da função quadrática é abordado de forma direta, apresentando dois itens com a lei de formação, e a imagem do gráfico construída no GeoGebra como podemos ver nas Figuras 2.12 e 2.13.

Figura 2.12 – Gráfico da função real definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.



Fonte:(BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020, p. 114).

Figura 2.13 – Gráfico da função real definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.



Fonte:(BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020, p. 114).

Observe que, na Figura 2.13 há uma pergunta com o objetivo de provocar o estudante a comparar os dois gráficos chamando a atenção para o coeficiente dominante *a*. Em seguida já faz a formalização desse conceito e também apresenta o par ordenado $(0, c)$ como ponto de intersecção da parábola como eixo das ordenadas.

A construção do gráfico da função quadrática é trabalhado de forma tradicional, ou seja, são dados uma tabela, lei de formação, valores "arbitrários" para x (normalmente esses valores são dados de forma que a parábola apareça com seu vértice). Nesse ponto, para a sistematização dos conceitos os autores apresentam cinco atividades resolvidas e mais quatorze atividades para o estudante. Na página 120 de Bonjorno, Júnior e Sousa (2020), na seção “Explorando a Tecnologia”, os autores apresentam uma sequência didática utilizando o GeoGebra em que são construídos gráficos da função quadráticas. Utilizando o controle deslizante o estudante pode observar o comportamento da parábola à medida que os coeficientes variam. É importante salientar que esta estratégia didática poderia ser utilizada anteriormente para observar a concavidade da parábola. As definições de zeros da função quadrática, vértice da parábola, crescimento e decrescimento, valor máximo e valor mínimo, imagem da função quadrática são colocados na mesma dinâmica, visto que, são dadas as definições, seguidas de atividades resolvidas e atividades para a resolução por parte dos estudantes. No entanto, novamente surge na seção “Explorando a Tecnologia” (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020, p.136), uma sequência didática com o uso do GeoGebra e função controle deslizante para analisar o ponto de máximo e de mínimo da parábola.

De acordo com os materiais didáticos analisados, observamos que, no Currículo em Ação do Estado de São Paulo e no Movimento Aprender do SESI, o conceito de função é introduzido de maneira construtiva, apresentando uma situação contextualizada e realiza a sistematização e formalização durante o processo de desenvolvimento das atividades. Porém, o livro didático do PNLD 2021 analisado, este apresenta o conceito de forma teórica utilizando situações já resolvidas. Todos materiais analisados oferecem a possibilidade da exploração utilizando tecnologia. Porém, nenhum sugere o aprendizado por meio de experimentos.

Nossa pesquisa, a priori, não tem a intenção de um aprofundamento matemático para a função quadrática. Caso o leitor queira um detalhamento maior, o assunto está muito bem tratado, por exemplo em (LIMA, 2013) e (CAETANO; PATERLINI, 2013).

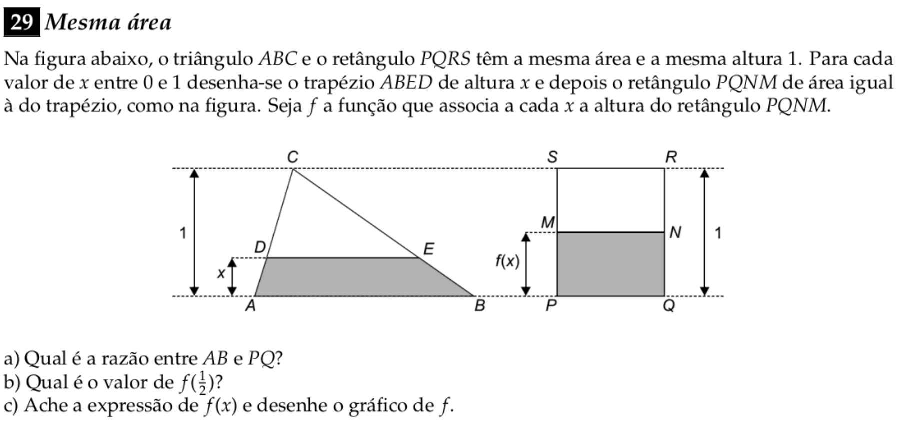
3 CONCEPÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo iremos tratar do caminho percorrido desde a elaboração da proposta didática passando pela construção do experimento até a elaboração das folhas de atividades. Embasado nos conceitos da Modelagem Matemática articulados à prática da investigação matemática, propomos uma sequência de atividades com o objetivo de conduzir os estudantes por um caminho da investigação, coleta de dados, formulação de conjecturas, representação gráfica e algébrica do comportamento de grandezas. Nesse sentido, construímos um experimento em que o estudante realiza a transferência do líquido por gravidade entre recipientes de formato de prismas, analisando o comportamento das alturas dos mesmos.

3.1 MOTIVAÇÃO

Por meio de uma pesquisa sobre questões envolvendo a função quadrática no banco de questões[1] da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas do ano de 2012, encontramos um problema intitulado “Mesma área” como mostra a Figura 3.1.

Figura 3.1 – Questão da OBMEP motivadora para o experimento.


29 ***Mesma área***

Na figura abaixo, o triângulo ABC e o retângulo $PQRS$ têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de x entre 0 e 1 desenha-se o trapézio $ABED$ de altura x e depois o retângulo $PQNM$ de área igual à do trapézio, como na figura. Seja f a função que associa a cada x a altura do retângulo $PQNM$.

a) Qual é a razão entre AB e PQ?
b) Qual é o valor de $f(\frac{1}{2})$?
c) Ache a expressão de $f(x)$ e desenhe o gráfico de f.

Fonte: Banco de Questões OBMEP 2012[2] página 52.

Trata-se de um problema do Nível 3 (Ensino Médio) em que as condições iniciais informam que o triângulo e o retângulo possuem a mesma área e a mesma altura unitária. Ainda, o enunciado informa que para cada valor x entre 0 e 1, constrói-se no triângulo ABC um trapézio $ABED$ com altura x. Ao passo que, no quadrilátero $PQRS$ constrói-se o retângulo $PQNM$ com área igual ao do trapézio de forma que a altura do retângulo $PQNM$ seja uma função f da variável x, ou seja, existe uma função que relaciona a altura x do trapézio com a altura $f(x)$ do retângulo correspondente.

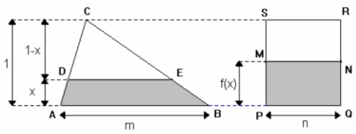
[1] <http://www.obmep.org.br/banco.htm>. Acesso em: 03 out. 2022.
[2] Disponível em <https://drive.google.com/file/d/1VH9zd9A4x8gii5-wsFIGjpHcIRNJMvyn/view>. Acesso em: 03 out. 2022.

A questão está dividida nos itens (a), (b) e (c) conforme mostra a Figura 3.1. Os dois primeiros itens são preparatórios, ou seja, encaminham para a resolução. Porém, o item (c), pede para que o estudante represente a situação em duas linguagens: geométrica e algébrica. A Figura 3.2 apresenta a resolução proposta no Banco de Questões da OBMEP.

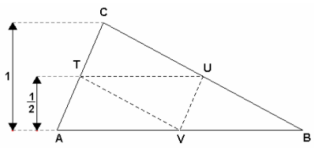
Figura 3.2 – Solução da questão “Mesma área” proposta no Banco de Questões da OBMEP 2012.

29 ***Mesma área*** – *Solução*

a) Sejam m e n, respectivamente, as medidas das bases do triângulo ABC e do retângulo $PQRS$, como na figura abaixo. Como a altura destas figuras é 1, segue que área$(ABC) = \frac{m}{2}$ e área$(PQRS) = n$. Da igualdade destas áreas segue $\frac{m}{2} = n$, donde $\frac{m}{n} = 2$.



b) Quando $x = \frac{1}{2}$ os pontos D e E coincidem com os pontos médios T e U dos lados AC e BC, respectivamente. Se V é o ponto médio do lado AB, podemos decompor o triângulo ABC em quatro triângulos congruentes, como na figura a seguir.



Assim,

$$\text{área}(ABUT) = \frac{3}{4}\,\text{área}(ABC) = \frac{3}{4}\frac{m}{2} = \frac{3m}{8}.$$

Por outro lado, temos que

$$\text{área}(PQNM) = f\left(\frac{1}{2}\right)n$$

assim, para que as áreas sejam iguais devemos ter:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)n = \frac{3m}{8} = \frac{3(2n)}{8} = \frac{3n}{4}$$

donde $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

c) Vamos primeiro calcular a área do trapézio $ABED$ em função de x. Como DE é paralela a AB, os triângulos DEC e ABC são semelhantes; a razão de semelhança é a razão de suas alturas, que é $\frac{1-x}{1} = 1 - x$. Como áreas de figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança, segue que

$$\text{área}(DEC) = (1-x)^2\text{área}(ABC) = \frac{(1-x)^2 m}{2}$$

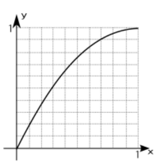
Logo

$$\text{área}(ABED) = \text{área}(ABC) - \text{área}(DEC) = \frac{m}{2} - \frac{(1-x)^2 m}{2} = (2x - x^2)n$$

Da igualdade das áreas de $ABED$ e $PQMN$, segue que

$$(2x - x^2)n = f(x)n$$

e concluímos que $f(x) = 2x - x^2$. A figura a seguir mostra o gráfico de $f(x)$ para $0 \le x \le 1$.



Fonte: Adaptado pelo autor do Banco de Questões OBMEP 2012[3] páginas 132 e 133.

[3] Disponível em <https://drive.google.com/file/d/1VH9zd9A4x8gii5-wsFlGjpHcIRNJMvyn/view>. Acesso em: 03 out. 2022.

Observe que se trata de um problema de geometria plana. A partir daí, pensamos na possibilidade de representá-lo de forma concreta, ou seja, em 3 dimensões. Antes de iniciar a construção, realizamos uma simulação utilizando o software de geometria dinâmica Geogebra.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Em vista do exposto anteriormente, a concepção da nossa proposta didática fará uso da Modelagem Matemática. Acreditamos que dessa forma estaremos viabilizando e potencializando a aprendizagem para o estudo da função quadrática.

Para Bassanezi (2002, p. 16), "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real."

Ainda, nesse sentido, segundo Salvador e Arenales (2012, p. 8),

> A modelagem matemática é uma reprodução idealizada de algumas ou de todas as características físicas de um processo natural em escala adequada representando-o numa linguagem ou forma de fácil acesso e uso, unindo teoria e prática na busca de respostas para diferentes estímulos visando compreender a realidade e, de meios para agir e transformá-la com a tomada de decisões acertadas.

Porém, acreditamos que a metodologia pode ser aplicada dentro da própria matemática como ferramenta de ensino e aprendizagem. Uma vez que, segundo Bassanezi (2002, p. 18).

> O objetivo fundamental do "uso" de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

A seguir iremos tratar dos passos a serem seguidos pela Modelagem Matemática.

3.2.1 Etapas da Modelagem Matemática

Quando utilizamos a Modelagem Matemática, estamos à procura de um modelo matemático que represente parcialmente ou integralmente um fenômeno da realidade, para assim, refletir e agir sobre ela. Desse modo, é importante analisar a concepção desse modelo.

Assim, Bassanezi (2002) apresenta cinco etapas chamadas de atividades intelectuais da Modelagem Matemática, que enumeramos e descrevemos a seguir.

1ª etapa: Experimentação – Obtenção de dados por meio da análise ou simulação do problema real.

2ª etapa: Abstração – É o processo que encaminha à formulação do Modelo Matemático. Neste processo, ocorrem a seleção das variáveis, problematização, formulação de hipóteses ou conjecturas e simplificação.

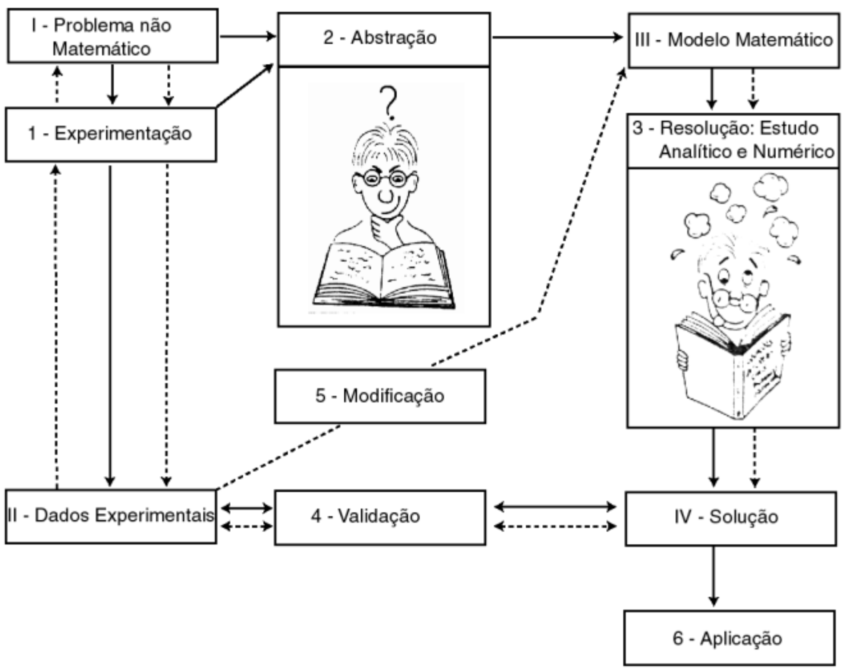
3ª etapa: Resolução – Efetivamente a obtenção do modelo, ou seja, etapa na qual ocorre a troca da linguagem natural do problema por uma linguagem matemática coerente que pode responder o problema.

4ª etapa – Validação – Processo em que ocorre a aceitação ou rejeição do modelo matemático. Nessa etapa, o modelo dever ser testado em confronto aos dados obtidos na primeira etapa. Segundo Bassanezi (2002, p. 30), de forma simplificada, "Um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram. Um bom modelo é aquele que tem capacidade de previsão de novos fatos ou relações insuspeitas."

5ª etapa – Modificação – No caso de não validação do modelo por algum fator, retoma-se os dados iniciais e reinicia-se o processo. Ou ainda, consiste na melhoria ou criação de novos modelos a partir de dados mais precisos ou da complexidade do problema real.

A Figura 3.3, segundo Bassanezi (2002), apresenta um esquema das atividades intelectuais do processo de Modelagem Matemática.

Figura 3.3 – Esquema simplificado das atividades intelectuais.



Fonte: (BASSANEZI, 2002, p. 27)

Segundo Bassanezi (2002), na Figura 3.3 as setas contínuas representam uma primeira aproximação. Já as setas pontilhadas indicam a busca de um modelo que melhor represente o problema estudado. A partir disso, conclui que a busca por um modelo que melhor descreva o problema estudado é um processo dinâmico, permitindo novas interações ou seleção novas variáveis envolvidas no problema.

> O aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre pode ser melhorado, e agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos. A reformulação de modelos é uma das partes fundamentais do processo de modelagem (BASSANEZI, 2002, p. 31).

3.2.2 Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem

No cenário atual um dos grandes desafios enfrentados pela educação básica é engajar o estudante no processo de aprendizagem de forma significativa. Nesse sentido, procurar novas estratégias e metodologias são inerentes à prática docente. Além disso, existem críticas em relação ao método de ensino dito tradicional. De acordo com Silva (2016, p. 71) "É por este descontentamento, em nossa compreensão, que a Modelagem Matemática representa uma ruptura com modelos preestabelecidos e uma possibilidade de melhorias no ensino de Matemática, pois é, em essência, uma proposta dialógica, investigativa e interdisciplinar."

A Modelagem Matemática por sua vez, se apresenta como uma importante estratégia de ensino aprendizagem por fazer com que o estudante perceba a matemática à sua volta, em problemas do cotidiano ou dentro da própria matemática. Segundo Barbosa (2009, p. 2), a Modelagem Matemática está

> (...) além dos argumentos da motivação e aprendizagem de conceitos/algoritmos matemáticos. Parece-me que, do ponto de vista da cidadania, há um argumento mais crucial: a necessidade de os alunos perceberem a natureza enviesada dos modelos matemáticos e o papel que eles podem ter na sociedade e nas ciências. Isso não significa o esquecimento do conteúdo matemático, mas seu posicionamento como um "meio" para convidar os alunos a enxergarem seu uso para além dos limites da disciplina escolar.

Ainda, segundo Bassanezi (2002, p. 38)

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.

Assim sendo, consideramos a Modelagem Matemática como um potente instrumento de ensino e aprendizagem, vindo ao encontro das habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) e dos anseios de muitos colegas, sobre a forma tradicional de ensino.

3.3 SIMULAÇÃO NO GEOGEBRA

Nesta seção, faremos uma descrição detalhada dos passos para a construção do simulador do experimento a ser modelado. Para isso, utilizamos o software de geometria dinâmica GeoGebra por ser de livre acesso e por sua popularidade. Seguem os passos da construção.

3.3.1 Construção do triângulo (Reservatório 1 no experimento)

a) Em uma página em branco (ocultar eixos e malha da janela de visualização), construa a reta *f* (por uma questão didática, aconselha-se construí-la na posição horizontal).

b) Trace a reta *g* paralela (não coincidente) à reta *f*;

c) Sobre a reta *f*, marque os pontos *A* e *B* e, sobre a reta *g* marcar o ponto *C* (Provavelmente, esses pontos já foram criados por padrão do software quando traçadas as retas *f* e *g*);

d) Construa o triângulo t_1 com vértices em *A*, *B* e *C* utilizando a ferramenta polígono (clique com o botão direito do mouse sobre o triângulo t_1, vá em propriedades, cor e, deslize o cursor para Transparência 0);

e) Trace a reta *i* perpendicular a reta *g* passando por *C*;

f) Marque o ponto *H*, intersecção entre as retas *f* e *i*;

g) Sobre a reta *i*, construa o segmento *HC*;

h) Sobre o segmento *HC* marque o ponto *I* (Ferramenta: ponto em Objeto);

i) Trace a reta *h* paralela (não coincidente) à reta *f* passando por *I*.

j) Marque os pontos *E* e *F*, intersecções com os lados *AC* e *BC*, respectivamente.

k) Construa o triângulo t_2 com vértices em *C*, *E* e *F* (Para uma melhor ilustração do experimento, coloque a cor azul para o polígono t_2).

l) Construa o trapézio q_1 com vértices em *A*, *B*, *E* e *F* (Como no triângulo t_1, deixar a transparência 0).

m) Construa o segmento *HI* (Observe que a medida do segmento *HI* corresponde à altura do trapézio q_1).

3.3.2 Construção do retângulo (Reservatório 2 no experimento)

Nas condições do nosso experimento, as alturas do triângulo e do retângulo devem ser iguais e a razão entre suas bases deve ser $\frac{1}{2}$. Assim, o retângulo terá como reta suporte da base e o lado oposto, as retas *g* e *f* da construção anterior, respectivamente.

a) Sobre a reta *g*, marque o ponto *J* (Ferramenta: ponto em Objeto);

Para garantir a razão entre as bases do triângulo *ABC* e do retângulo a ser definido, faça o seguinte:

b) Marque o ponto médio K do segmento AB (Ferramenta: Ponto Médio ou Centro);

c) Construa o segmento $KB = l$;

d) Construa o círculo d, com centro em J e raio l (comprimento do segmento KB);

e) Marque o ponto M, intersecção entre o círculo d e a reta g.

f) Construa a reta m perpendicular a reta g passando por J;

g) Construa a reta n perpendicular a reta g passando por M;

h) Marque os pontos N e O, intersecções da reta f com as retas n e m, respectivamente;

i) Construa o quadrilátero q_2 com vértices em J, M, N e O (Transparência 0);

Agora, precisamos construir o ponto P, tal que a medida do segmento JP represente a altura do retângulo. Seja S_{q_1} a medida da área q_1 e o produto $\overline{JM}.\overline{JP}$ a área do retângulo a ser construído. Nas condições do problema, sabemos que a área do trapézio q_1 é igual a área do retângulo de base JM e altura JP. Assim,

$$S_{q_1} = \overline{JM}.\overline{JP} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{JP} = \frac{S_{q_1}}{\overline{JM}}.$$

j) Construa o círculo p com centro em J e raio de medida $\dfrac{q_1}{\overline{JM}}$;

k) Marque o ponto Q na intersecção do círculo p e a reta m;

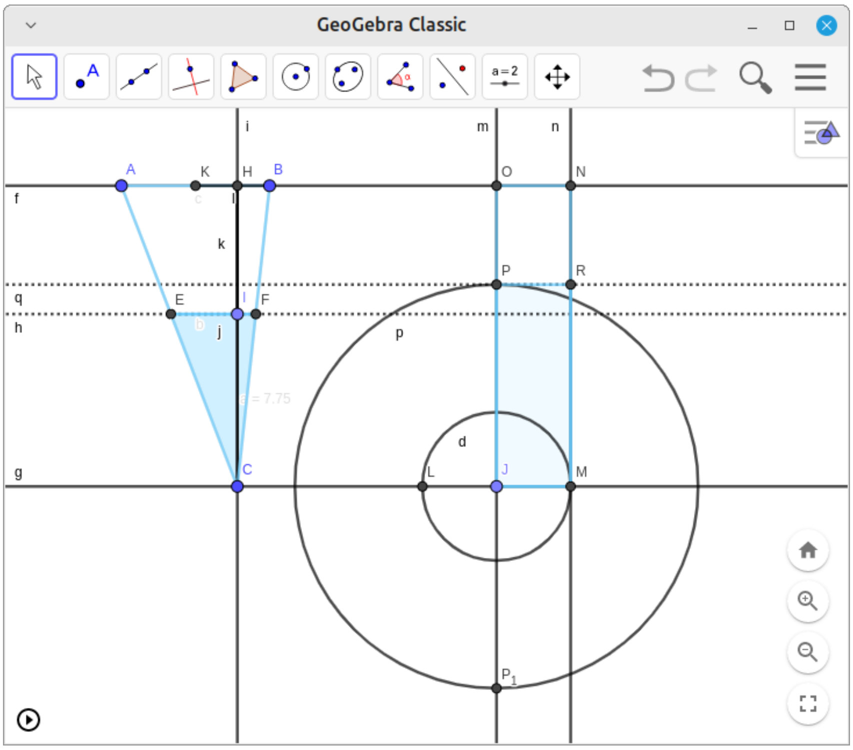
l) Trace a reta q paralela à reta f passando por Q;

m) Marque o ponto R na intersecção das retas q e n;

n) Construa o quadrilátero $JMRQ$ (Coloque o preenchimento na cor azul);

A Figura 3.4 mostra a construção no Geogebra obtida.

Figura 3.4 – Construção da simulação do experimento com todas as construções visíveis

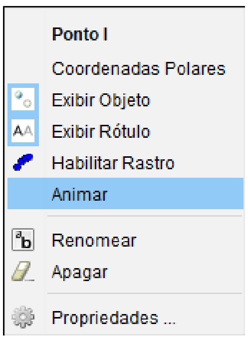


Fonte: Elaborada pela autor.

De acordo com o problema, devemos variar a altura *HI* do trapézio e observar o que ocorre com a altura *JP* do retângulo. Desse modo, podemos movimentar manualmente o ponto sobre o segmento ou utilizar a ferramenta “Animar”.

o) Clique com o botão da direita sobre o ponto *I*, depois selecione a opção “Animar”. Ver Figura 3.5.

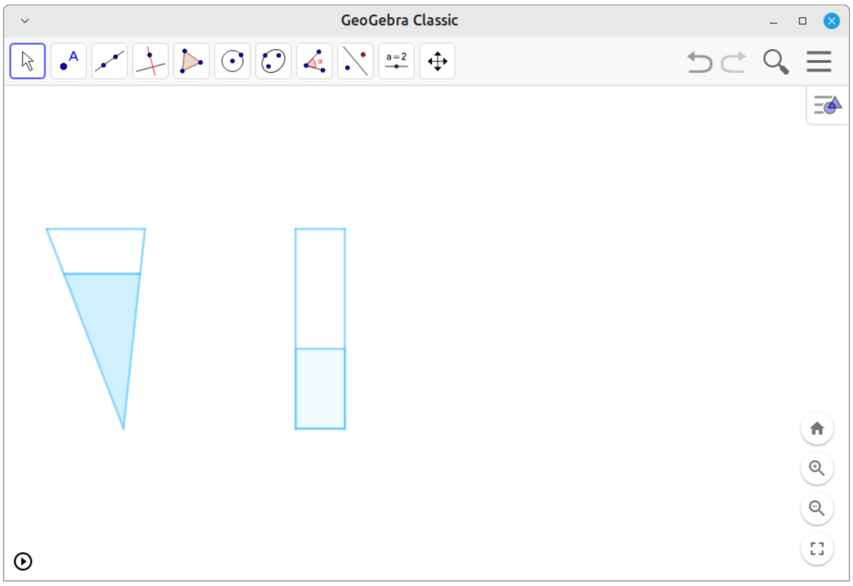
Figura 3.5 – Funçao “Animar” do Geogebra.



Fonte: Elaborada pela autor.

Para visualização, convém ocultar os rótulos e os elementos, deixando aparente somente os elementos relevantes para a simulação conforme mostra a Figura 3.6.

Figura 3.6 – Simulação com elementos e rótulos ocultos.



Fonte: Elaborada pela autor.

Para iniciar a simulação, basta clicar na tecla *play* localizada no canto inferior esquerdo da janela de visualização.

De acordo com a adaptação problema “Mesma área” do Banco de Questões da OBMEP 2012 para a construção do experimento, sendo x a altura do trapézio (parte vazia do reservatório 1), a altura do retângulo formado pelo líquido no reservatório 2 será $f(x)$. Como visto anteriormente na resolução apresentada, f será uma função quadrática. Para ilustrar essa afirmação, vamos analisar o comportamento dos pontos de coordenadas $(x, f(x))$. Para isso,

a) Para criar um ponto S, no campo de entrada digite $S = (HI, JP)$;

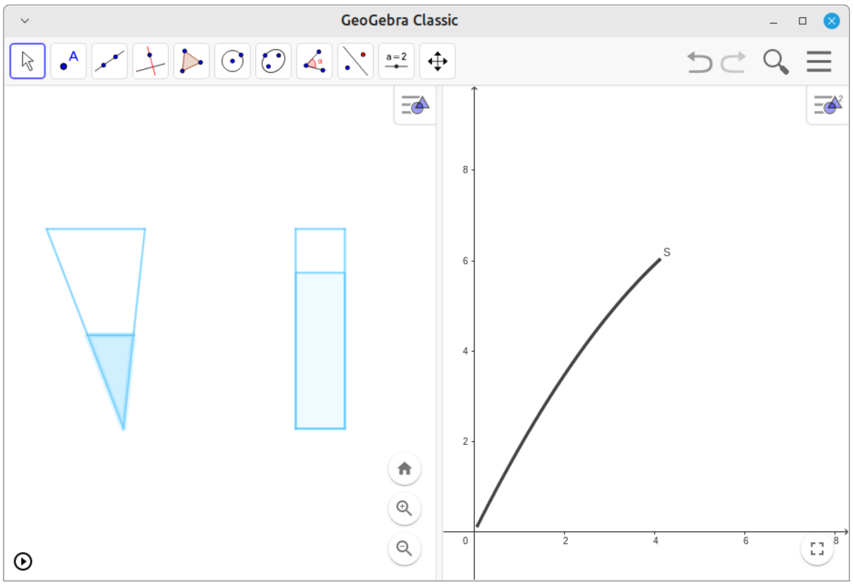
b) Com o botão da direita, clique sobre o ponto S. Depois em configurações em avançado. Desmarque a opção “Janela de Visualização” e marque a opção “Janela de Visualização 2”;

c) Agora clique em “Exibir” e selecione a opção “Janela de Visualização 2”;

d) Na “Janela de Visualização 2”, clique com o botão direito sobre o ponto S e selecione a opção “Habilitar Rastro”.

A Figura 3.7 mostra o resultado do procedimento descrito anteriormente.

Figura 3.7 – Simulação com o ponto *S* na “Janela de Visualização 2”.



Fonte: Elaborada pela autor.

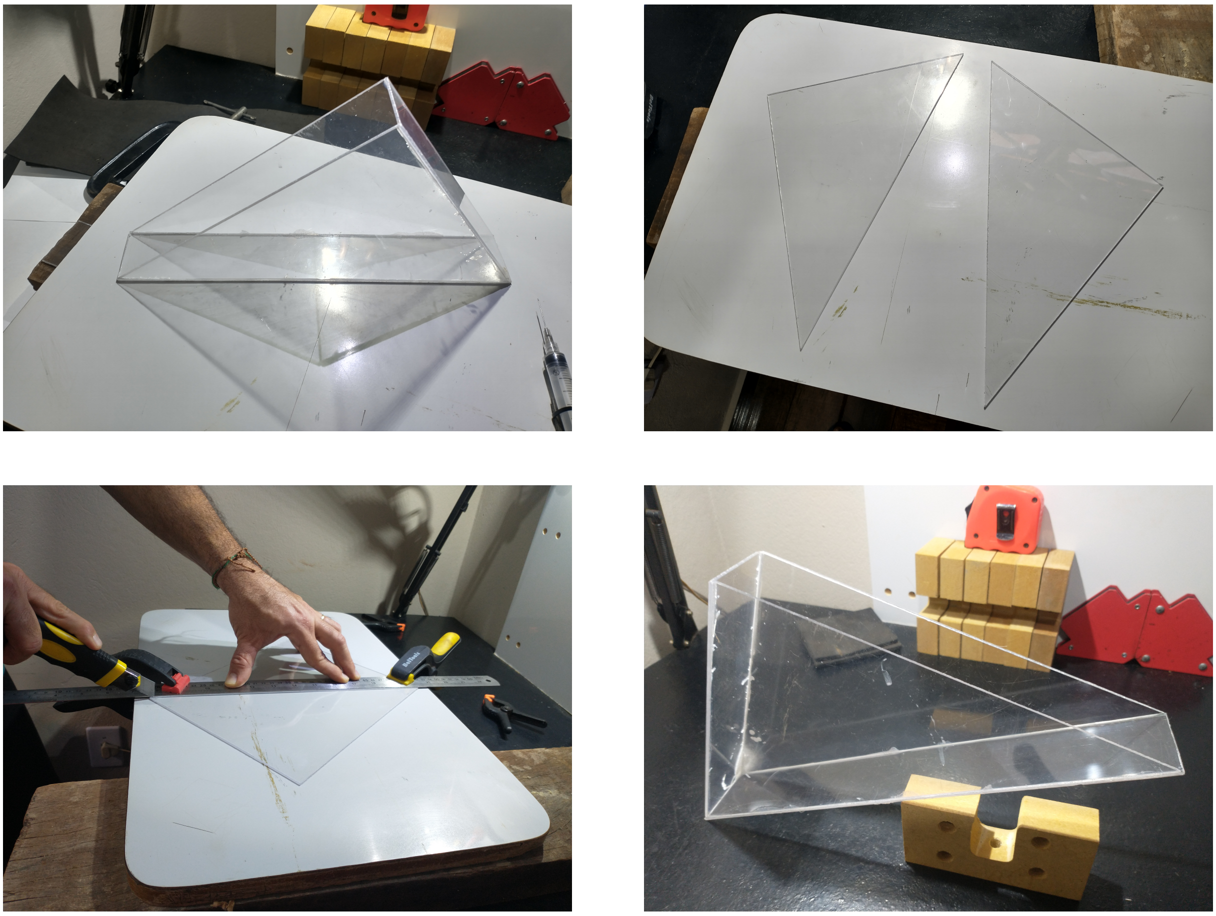
3.4 ETAPAS DA CONSTRUÇÃO DO EXPERIMENTO

Para transformar a nossa simulação em um experimento concreto, procuramos utilizar materiais de fácil acesso, de baixo custo e também ferramentas simples. Assim, utilizamos alguns materiais que estavam para descarte: duas folhas de um material plástico transparente que será utilizado para a construção dos reservatórios e as madeiras de MDF para a construção do suporte.

3.4.1 Construção dos reservatórios

As dimensões do prisma de base triangular foram escolhidas procurando aproveitar ao máximo o material disponível considerando uma certa margem para eventuais erros. Por uma questão de facilidade no corte do material, optamos por construir triângulos retângulos para as bases do prisma. Dessa forma, os triângulos foram confeccionados com medidas de 20 cm de base e altura 25 cm. As faces retangulares foram construídas todas com 5 cm de largura. Essa etapa da confecção pode ser vista na Figura 3.8.

Figura 3.8 – Processo de construção do experimento – Reservatório 1



Fonte: Acervo do autor.

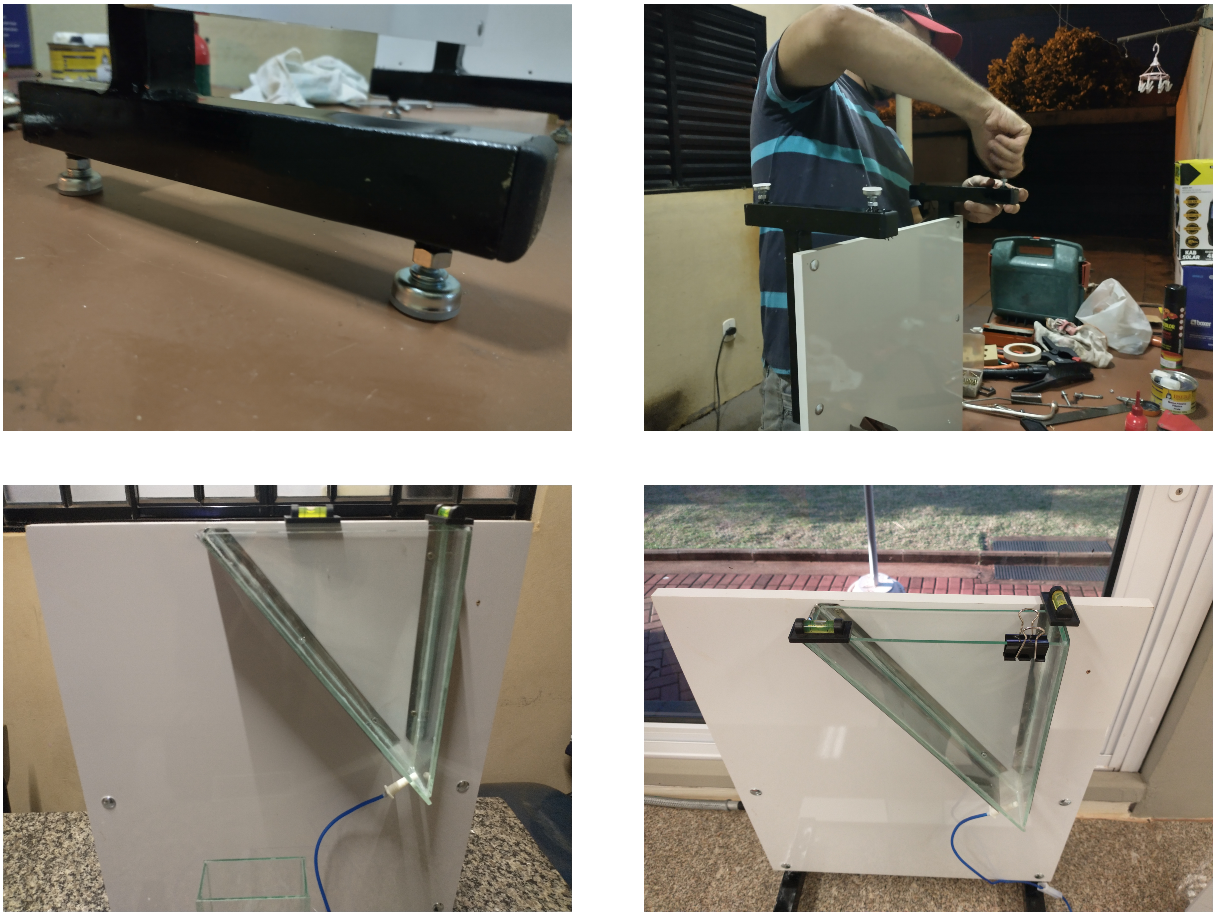
Para a união das faces, foi utilizada a princípio uma cola específica para poliestireno. Porém, observamos que o reservatório apresentava vazamentos e a estrutura ficava fraca. Dessa maneira, inspirado na construção de aquários domésticos para peixes, optamos por utilizar cola de silicone transparente o que resolveu temporariamente o problema.

De acordo com as condições do problema, a razão entre a base do retângulo e do triângulo deve ser de $\frac{1}{2}$. Logo, as dimensões das faces do prisma quadrangular foram 10 cm de base e 25 cm de altura, fixando as faces laterais com 5 cm de largura. Pensando em replicar o experimento para aplicação com os estudantes, resolvemos realizar a construção utilizando, dessa vez, vidro comum. O acabamento e a estrutura ficaram muito melhores do que o material utilizado anteriormente. Para a transferência do líquido de um reservatório para outro, utilizamos uma mangueira com regulador utilizadas em sondas de alimentação adquiridas em lojas de materiais cirúrgicos.

3.4.2 Construção do suporte

O suporte para o reservatório foi construído utilizando a placa de madeira MDF com dimensões 45 cm por 50 cm. Para melhorar a precisão do experimento foram construídos pés com quatro pontos de apoio de forma que a base pudesse ser ajustada. Para a sustentação do reservatório, foram utilizadas cantoneiras de metal. Essa etapa da confecção pode ser vista na Figura 3.9.

Figura 3.9 – Processo de construção do experimento – Base do suporte



Fonte: Acervo do autor.

Terminada a construção, iniciamos os testes do experimento. Para uma melhor visualização do nível do líquido, utilizamos água com corante azul para a produção de um bom contraste, uma vez que, o fundo é de cor branca. Para a medição da altura do líquido, optamos por utilizar réguas de 30 cm de plástico transparente para facilitar, assim podemos posicionar a régua da melhor maneira. Além disso, disponibilizamos pequenos ímãs de neodímio caso o estudante queira fixar a régua.

3.5 FOLHAS DE ATIVIDADES

As folhas de atividades foram divididas em quatro momentos. Cada um desses momentos foi pensado para realização em uma janela de tempo de acordo com a disponibilidade dos ambientes e grade horária da escola. A seguir, detalhamos cada uma das folhas de atividades, descrevendo a metodologia, recursos e tempo necessário para a realização.

3.5.1 Folha de atividades 1 - Descrição do experimento e construção do gráfico

A primeira parte da aplicação foi realizada em uma sala com disponibilidade de bancadas (no caso, Laboratório de Ciências Físicas) e foi prevista uma duração de duas horas/aula (100 minutos). A Folha de Atividades 1 foi dividida em duas etapas. Na primeira etapa apresentamos aos estudantes a dinâmica do experimento dando as instruções de manipulação do material para a transferência do líquido do reservatório 1 para o reservatório 2 e fizemos algumas provocações. Iniciamos com a explicação da dinâmica do experimento utilizando uma ilustração do experimento conforme mostra a Figura 3.10.

Figura 3.10 – Ilustração apresentando a dinâmica do experimento.

Observe a sequência de figuras a seguir.

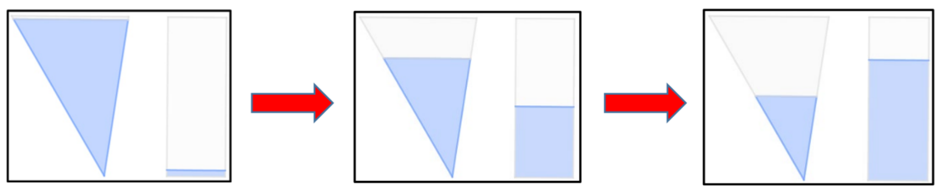


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Quando acionamos o dispositivo da mangueira que conecta o reservatório 1 ao reservatório 2, liberamos a transferência do líquido de um para o outro por gravidade.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No primeiro item (Figura 3.11) levamos aos estudantes a observar, de acordo com a dinâmica do experimento, as figuras planas formadas na face frontal do reservatório.

Figura 3.11 – Questão 1 da Folha de Atividades 1.

1) Quando deixamos o líquido do reservatório 1 escoar para o reservatório 2, a face frontal do reservatório 1 é decomposta em duas figuras planas (Parte vazia e parte com líquido). Quais são essas figuras?

Fonte: Elaborada pelo autor.

Espera-se que o estudante identifique as figuras geométricas produzidas: o trapézio retângulo formado pela parte vazia e o triângulo formado pela parte preenchida.

Nas questões 2 e 3 (Figura 3.12) propomos aos estudantes que realizem as medições das dimensões dos dois reservatórios utilizando a régua graduada. Em seguida questionamos sobre a acomodação do líquido quando transferido totalmente do reservatório 1 para o reservatório 2.

Figura 3.12 – Questões 2 e 3 da Folha de Atividades 1.

2) Utilizando a régua graduada, compare as medidas das alturas, das bases e das larguras dos dois reservatórios.

____

____

3) Antes de realizar o experimento, responda justificando sua resposta:

Ao transferir todo o líquido do reservatório R_1 para o reservatório R_2: o líquido irá:

a) se acomodar no reservatório R_2 abaixo da borda

b) se acomodar exatamente na borda.

c) transbordar.

Justificativa

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

O objetivo dessas questões é provocar o estudante a refletir sobre o volume de líquido. Após realizar as medições, espera-se que observe o fato de os reservatórios possuírem a mesma largura, mesma altura e que a medida da base do retângulo da face do reservatório 2 é metade da medida da base do triângulo formado na face do reservatório 1 quando este está cheio. Sendo assim, a medida das áreas do triângulo do reservatório 1 e do retângulo do reservatório 2 são iguais e, como as outras dimensões são iguais, conclui-se que os volumes dos dois prismas também são iguais. Logo, o líquido transferido deve acomodar-se preenchendo o reservatório 2 sem transbordar.

Nas questões 4 e 5 (Figura 3.13) solicitamos ao estudante que utilize a régua graduada para medir a altura do trapézio do reservatório 1 (parte vazia) e a altura do retângulo do reservatório 2 (parte com líquido). Em seguida, questionamos sobre o motivo de se considerar a altura da parte vazia no reservatório 1 e a parte com líquido no reservatório 2.

Figura 3.13 – Questões 4 e 5 da Folha de Atividades 1.

4) Posicione a régua graduada de maneira que possa medir a altura da figura formada pela parte vazia no reservatório 1. Com a outra régua graduada, faça o mesmo para o reservatório 2, porém medindo a altura da parte com líquido.

5) Por que estamos medindo a altura da parte vazia e não da parte cheia no reservatório 1?

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste ponto, esperamos que o estudante reconheça que a parte vazia do reservatório 1 é exatamente a quantidade de líquido transferida para o reservatório 2.

Para finalizar a primeira etapa, propomos as questões 6 e 7 (Figura 3.14). Na primeira delas, relacionando as alturas do nível do líquido nos dois reservatórias, questionamos a possibilidade de, fixando a altura no reservatório 1, conseguirmos alturas diferentes no reservatório 2. Nosso objetivo é que o estudante estabeleça a definição de função. Já na questão 7, utilizamos um pouco de formalismo, procurando discutir a noção de domínio e contradomínio da função que o estudante possui.

Figura 3.14 – Questões 6 e 7 da Folha de Atividades 1.

6) De acordo com a dinâmica do experimento, é possível termos alturas iguais no reservatório R_2 para alturas diferentes no reservatório R_1?

____

____

7) Denotando as alturas do reservatório R_1 por x e as alturas o reservatório R_2 por y, responda os itens a seguir justificando sua resposta.

a) Podemos afirmar que y é função de x?

____

____

b) Qual seria o domínio da função?

____

____

c) Qual seria o contradomínio da função?

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na segunda etapa da Folha de Atividades 1 (Figura 3.15), iniciamos efetivamente a execução do experimento. O estudante é orientado liberar o líquido do reservatório 1 para o reservatório 2 utilizando o dispositivo que controla o fluxo, abrindo e fechando conforme a necessidade. Por uma questão didática, sugerimos ao grupo a escolha de um espaçamento constante (por exemplo: 0,5 cm ou 1 cm) para a tomada das medidas das alturas no reservatório 1.

Figura 3.15 – Coleta de registro das alturas no reservatório 1 e reservatório 2.

Agora, um integrante do grupo deverá liberar o dispositivo de controle de escoamento enquanto os outros integrantes farão as anotações. Na primeira coluna deverão ser anotadas as alturas relativas a figura R_1 e, na segunda coluna, as alturas correspondentes na figura R_2. (Dica: tente escolher um padrão para as alturas, como por exemplo, 0,5 cm em 0,5 cm, 1 cm em 1 cm, etc.)

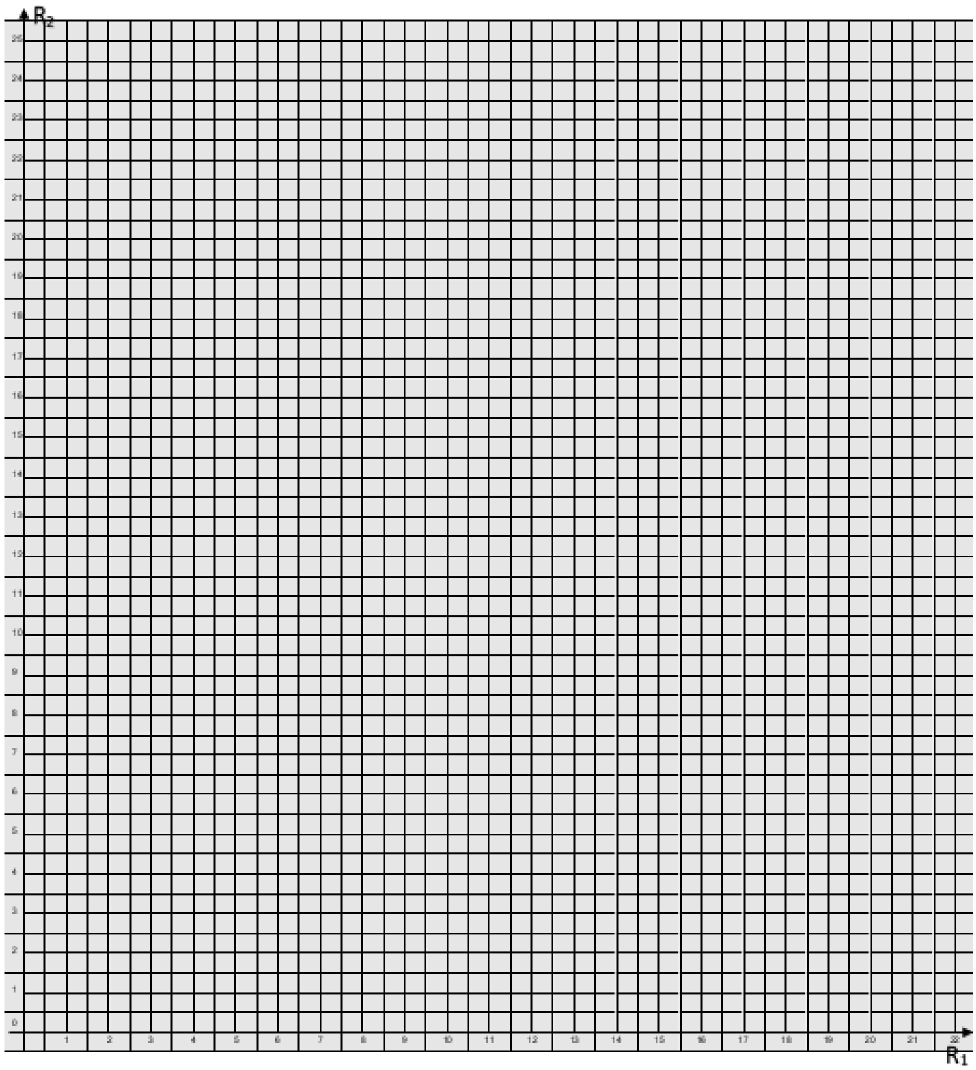
Altura do R_1 (cm)	Altura do R_2 (cm)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalizando a Folha de Atividades 1 (Figura 3.16) é construída a representação gráfica das alturas do retângulo (reservatório 2) em função das alturas do trapézio (reservatório 1) no papel quadriculado fornecido. Foi recomendado ao estudante que fosse cauteloso e preciso na confecção do gráfico.

Figura 3.16 – Plano cartesiano no papel quadriculado para construção do gráfico.

8) De acordo com as informações coletadas, marque os pares ordenados (R_1, R_2) no plano cartesiano. (Capriche na precisão)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste momento é importante observar a construção do estudante em relação ao traçado do gráfico ou apenas a marcação dos pontos.

Ao final de cada uma das folhas de atividades disponibilizamos um espaço para que os estudantes, caso queiram, registrem suas dificuldades ou percepções acerca da atividade.

3.5.2 Folha de atividades 2 - Analisando os dados

Na Folha de Atividades 2, temos um conjunto de quatro itens que tem por objetivo realizar uma análise das informações colhidas durante o experimento. Para esse momento, em sala de aula, utilizamos as produções da Folha de Atividades 1 e o tempo previsto foi de uma hora/aula

(50 minutos).

Na questão 1 (Figura 3.17) solicitou-se ao estudante que observasse o gráfico construído na Folha de Atividades 1 e verificasse se existe algum padrão de comportamento na posição dos pontos.

Figura 3.17 – Questão 1 da Folha de Atividades 2.

1) Observe o gráfico construído pelo grupo na folha de atividades 1. Você nota algum padrão de comportamento em relação a posição dos pontos? Em caso afirmativo, qual é padrão encontrado? Justifique sua resposta.

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aqui temos um importante ponto de atenção. Podemos verificar se os estudantes dominam a construção do gráfico no plano cartesiano. Espera-se que observem o fato de que, provavelmente, os prontos descrevem uma curva. Assim, vamos estimular os estudantes a procurar um modelo matemático que represente tal comportamento.

Pensando na possibilidade de uma imprecisão na construção do gráfico dando a "impressão" de que os pontos estejam alinhados, propomos na questão 2 (Figura 3.18) uma atividade para cálculo da taxa de variação para alguns intervalos do gráfico. Sabemos que o estudante já estudou anteriormente o comportamento da função afim. Sugerimos a escolha de pelo menos quatro intervalos para o cálculo.

Figura 3.18 – Questão 2 da Folha de Atividades 2.

2) Uma das maneiras de verificar se esses pontos estão alinhados é verificando se a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ é constante em intervalos diferentes. Escolha alguns intervalos distintos e verifique se os pontos realmente estão alinhados. Nesse caso, a taxa média de variação é constante, crescente ou decrescente?

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse momento, esperamos que o estudante verifique que a taxa de variação é decrescente para o intervalo escolhido concluindo assim que os pontos não estão alinhados.

Na questão 3 (Figura 3.19) questionamos o estudante sobre seu conhecimento sobre os gráficos característicos de funções conhecidas, ou seja, estimulamos para que formule conjecturas que, posteriormente, possam ser validadas ou não.

Figura 3.19 – Questão 3 da Folha de Atividades 2.

3) De acordo com a conclusão obtida no item anterior, a posição dos pontos sugere que as alturas se relacionem de acordo com alguma função conhecida? Explique.

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, na questão 4 (Figura 3.20) questionamos os estudantes sobre qual seria o melhor modelo matemático para representar a relação estabelecida entre as grandezas altura do trapézio e altura do retângulo de acordo com as observações do experimento e informações levantadas.

Figura 3.20 – Questão 4 da Folha de Atividades 2.

4) Como você poderia confirmar se o modelo de função sugerida realmente é adequado para o problema?

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

Todos os questionamentos e orientações durante a realização da atividade tiveram por objetivo fazer com que os estudantes tracem estratégias diversificadas. Por exemplo, a utilização de recursos digitais como softwares de Geometria dinâmica ou planilhas eletrônicas.

3.5.3 Folha de atividades 3 - Utilizando a planilha eletrônica

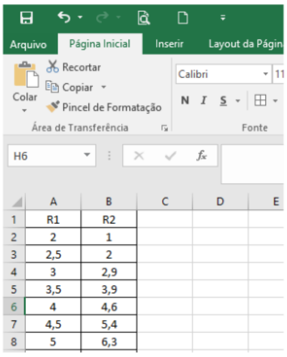
Na folha de Atividades 3, o estudante utilizará a planilha eletrônica para construção do gráfico de dispersão para verificar as conjecturas formuladas nas atividades anteriores. Para isso, utilizaremos o uma planilha eletrônica disponibilizada no Laboratórios de Informática Educacional. Essa atividade pode ser realizada utilizando qualquer aplicativo de planilha eletrônica (pago ou de domínio público). Serão utilizadas as Folhas de Atividades 1 e 2, projetor multimídia e o tempo de 2 horas/aula (100 minutos) para a execução dessa etapa.

Na Folha de Atividade 3 (Figura 3.21) solicitamos ao estudante que registre na planilha eletrônica os dados colhidos no experimento e registrados na tabela da 2ª etapa da Folha de Atividades 1.

Figura 3.21 – Itens 1 e 2 da Folha de Atividades 3.

1. Abra a planilha eletrônica.
2. Na coluna A, digite as alturas do trapézio R_1 registradas na tabela da folha de atividades 1 e, na coluna B, as alturas do retângulo R_2.

Exemplo:

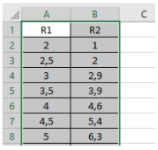


Fonte: Elaborada pelo autor.

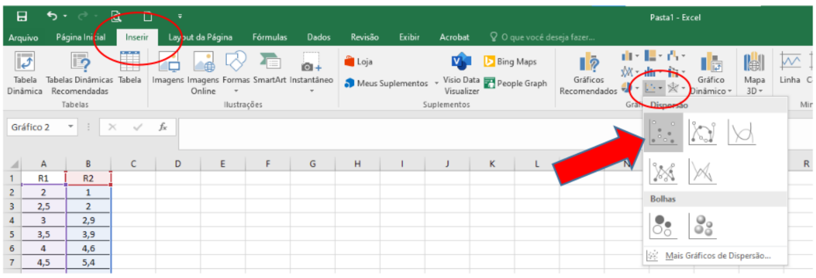
Em seguida, utilizando as ilustrações na folha de atividades e também o projetor, daremos instruções para a construção do gráfico de dispersão. Ver Figura 3.22.

Figura 3.22 – Itens 3 e 4 da Folha de Atividades 3.

3. Selecione as células da tabela.



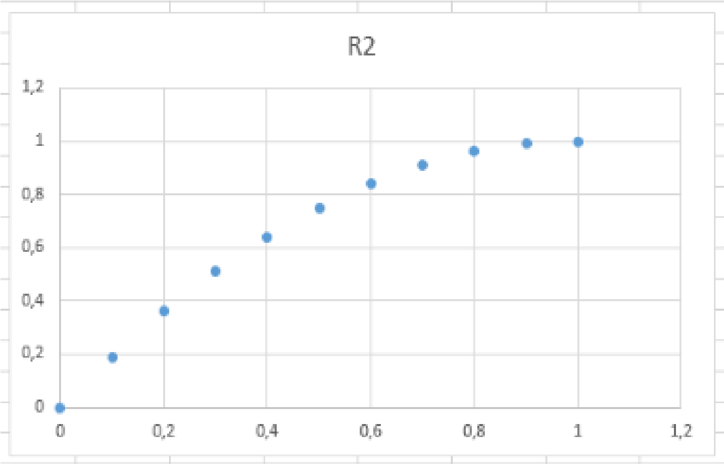
4. Clique em “Inserir” e depois escolha “gráfico de dispersão”



Fonte: Elaborada pelo autor.

Espera-se que o estudante não tenha dificuldade na construção do gráfico, pois é uma tarefa de fácil execução. Caso necessário o professor fará intervenções. Na Figura 3.23 apresentamos uma possível resposta para o item 4.

Figura 3.23 – Exemplo de resultado esperado no item 4 da Folha de Atividades 3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos itens 5 e 6, o estudante fará a comparação do gráfico construído manualmente na Folha de Atividades 1 com o gráfico construído na planilha eletrônica analisando a posição dos pontos.

Figura 3.24 – Itens 5 e 6 da Folha de Atividades 3.

5. Compare o gráfico construído pelo grupo na Folha de Atividades 1 com o gráfico construído na planilha eletrônica. As representações coincidem? Anote suas considerações.

   ____

   ____

6. Analisando o gráfico construído na planilha eletrônica, o que você observa em relação a posição dos pontos? Descrevem algum comportamento conhecido?

   ____

   ____

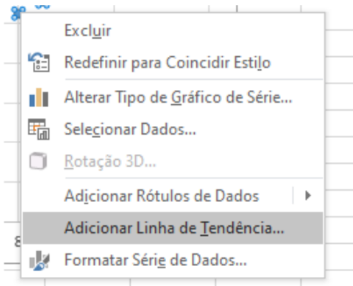
Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste momento, o estudante tem a possibilidade de realizar uma autoavaliação, podendo verificar se o gráfico produzido com o uso de papel e lápis foi construído corretamente. No item 6, novamente provocamos o estudante a analisar a posição dos pontos para reconhecer o gráfico obtido com o de funções conhecidas. Nesse sentido, espera-se que considere a curva como parte de uma parábola.

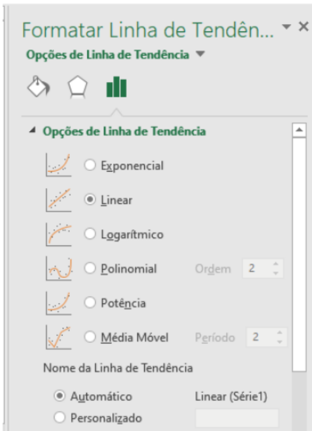
A seguir, utilizamos os recursos da planilha eletrônica para encontrar um modelo de equação que melhor representa o experimento. No item 7 (Figura 3.25) utilizamos a ferramenta “Adicionar Linha de Tendência”. É importante deixar claro ao estudante de que o software está fazendo um ajuste da linha que representa a tendência da trajetória dos pontos no plano no intervalo considerado.

Figura 3.25 – Item 7 da Folha de Atividades 3.

7. Agora, vamos encontrar a melhor representação gráfica para o nosso experimento. Clique com o botão direito do mouse sobre um dos pontos do gráfico para selecioná-lo. Em seguida, selecione a opção "Adicionar Linha de Tendência...



Ao abrir o menu lateral, escolha a opção que melhor se adapta aos pontos do gráfico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que a planilha eletrônica apresenta várias opções para o ajuste de linhas de tendência. Diante disso, o estudante pode realizar simulações e verificar qual a linha que melhor representa a tendência dos pontos do gráfico e verificar as conjecturas feitas anteriormente. Isso é questionado no item 8 (Figura 3.26).

Figura 3.26 – Item 8 da Folha de Atividades 3.

8. Qual o tipo de linha de tendência que melhor representa a função?

____

____

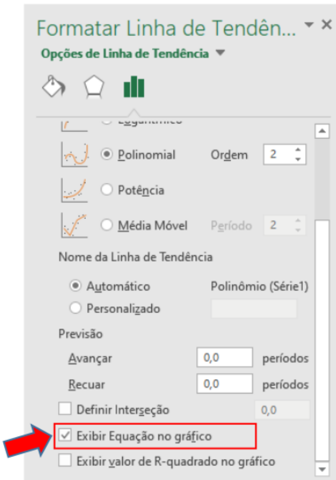
Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, no item 9 (Figura 3.27) determinamos o modelo matemático para o experimento.

A partir do momento que o estudante encontrou a melhor linha de tendência, solicitamos que marque a opção “Exibir Equação no gráfico”.

Figura 3.27 – Item 9 da Folha de Atividades 3.

9. Encontrada a linha de tendência role o menu para baixo e selecione a opção “Exibir Equação no gráfico”. Anote a equação.

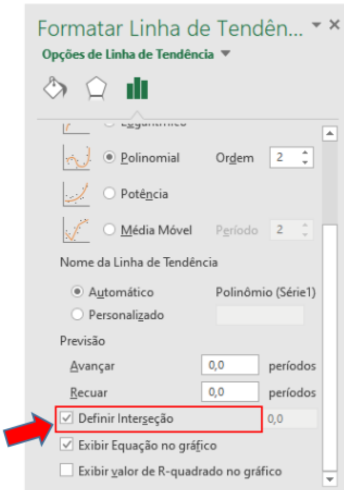


Fonte: Elaborada pelo autor.

Aqui o estudante deve encontrar uma equação quadrática que modela os dados inseridos na planilha eletrônica confirmando ou não suas conjecturas formuladas anteriormente. Para refinar ainda mais o modelo, chamamos a atenção para o fato de que, nas condições iniciais do experimento, quando a altura no reservatório 1 é zero, a altura no reservatório 2 também é zero (Figura 3.28). Logo, o par ordenado $(0, 0)$ pertence ao gráfico da função. Conclui-se daí que, a intersecção do gráfico com os eixos coordenados se dará no ponto de coordenadas $(0, 0)$, ou seja, o gráfico passa pela origem do sistema. Desse modo, orientamos o estudante a marcar a opção “Definir Interseção” inserindo o valor “0,0”, obrigando assim o gráfico a atender as condições iniciais do experimento. Solicitamos então que estudante observe e registre o que ocorre na equação após essa ação.

Figura 3.28 – Continuação do item 9 da Folha de Atividades 3.

Em nosso experimento, quando a altura da parte vazia em R_1 é zero, a altura no reservatório R_2 também é zero. Assim, temos o par ordenado (0, 0) pertencente a função. Para melhorar ainda mais o modelo fornecido pelo software, marque a opção "Definir Inserção". O que mudou na equação do gráfico? Anote a nova equação para utilizarmos na próxima atividade.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Espera-se que o estudante perceba que, para o caso em que a equação apresenta todos os seus coeficientes não nulos, após a alteração teremos o coeficiente *c* da equação quadrática nulo. Isso permite uma reflexão acerca dos pontos notáveis do gráfico da função quadrática.

Finalmente, no item 10 (Figura 3.29) propomos a socialização das equações encontradas pelos grupos.

Figura 3.29 – Item 10 da Folha de Atividades 3.

10. Compare a sua equação com a encontrada pelos outros grupos. O que você observa?

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

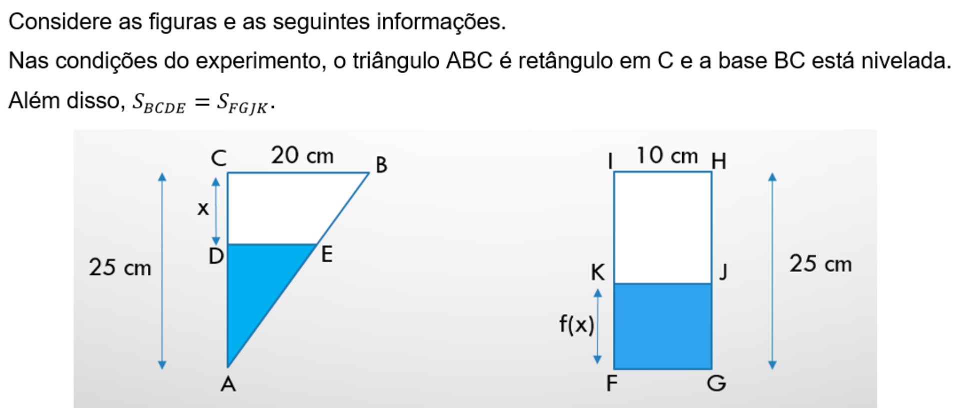
Espera-se que o estudante verifique que as equações obtidas pelos outros colegas são muito "próximas", ou seja, todas são quadráticas, com coeficiente *a* negativo, coeficiente *b* positivo, coeficiente *c* nulo e, provavelmente com valores diferindo por décimos.

3.5.4 Folha de atividades 4 - Encontrando o modelo de equação para o experimento

Para finalizar a aplicação da proposta didática, vamos determinar a equação matemática que representa a relação entre as alturas. Nesse sentido, utilizaremos do formalismo matemático e das dimensões físicas do experimento realizado pelos estudantes. Para a resolução, foram necessários alguns conhecimentos prévios como: razão entre áreas e perímetros de figuras planas e simplificação de expressões algébricas. Do ponto de vista pedagógico é importante a retomada desses conceitos antes da aplicação desta atividade. Fizemos o desenvolvimento de maneira expositiva com o acompanhamento dos estudantes com o tempo de uma hora/aula no ambiente de sala de aula com o uso de projetor multimídia e lousa.

Nas condições do experimento (Figura 3.30) temos que o triângulo ABC é retângulo em C e a base BC nivelada com o plano horizontal.

Figura 3.30 – Ilustração do experimento com as dimensões reais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideramos a medida $x = \overline{CD}$ da altura do trapézio $BDCE$ e $f(x) = \overline{KF}$ a medida da altura do retângulo $FGJK$. Ambas figuras possuem mesma área, isto é, $S_{BCDE} = S_{FGJK}$. Segue que,

$$S_{BCDE} = S_{ABC} - S_{ADE}. \tag{3.1}$$

Sabemos que os segmentos DE e CB são paralelos. Os pares de ângulos $D\widehat{A}E$ e $B\widehat{A}C$ são côngruos, como também os pares $A\widehat{D}E$ e $A\widehat{C}B$. Conclui-se assim, que os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{25}{25 - x}. \tag{3.2}$$

A razão entre as áreas é dada por:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\overline{CB}.\overline{AC}\right)}{\frac{1}{2}\left(\overline{DE}.\overline{AD}\right)} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DE}}.\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.$$

Substituindo a relação obtida em (3.2) temos que

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{25}{25-x}\right)\left(\frac{25}{25-x}\right) = \left(\frac{25}{25-x}\right)^2.$$

Assim,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{625}{(25-x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 625.S_{ADE} = S_{ABC}.(25-x)^2.$$

Ou seja,

$$S_{ADE} = \frac{S_{ABC}(25-x)^2}{625}. \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) em (3.1) obtemos

$$S_{BCDE} = S_{ABC} - \left(\frac{S_{ABC}(25-x)^2}{625}\right).$$

Como $S_{ABC} = \dfrac{25.20}{2} = 250$, temos

$$S_{BCDE} = 250 - \frac{S_{ABC}(25-x)^2}{625} = 20x - \frac{2}{5}x^2.$$

Observamos que

$$S_{FGJK} = S_{BCDE} = 10f(x).$$

Logo,

$$20x - \frac{2}{5}x^2 = 10f(x).$$

Portanto,

$$f(x) = 2x - \frac{1}{25}x^2. \tag{3.4}$$

Em seguida, solicitamos aos estudantes que comparem a equação encontrada na planilha eletrônica com a equação (3.4) (Figura 3.31).

Figura 3.31 – Folha de Atividades 4 - Comparação das equações encontradas.

Compare a equação encontrada pelo grupo na planilha eletrônica com a equação do problema. São iguais?

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esperamos que o estudante observe que a equação algébrica determinada é muito "próxima" da equação obtida pela planilha eletrônica. Procuramos, desta maneira, estimular o estudante à reflexão sobre os métodos utilizados para encontrar tal equação.

Finalmente, fizemos um questionamento sobre a percepção do estudante frente aos métodos e equações encontradas (Figura 3.32).

Figura 3.32 – Questão para conclusão da atividade – Folha de Atividades 4.

Podemos afirmar que as equações encontradas são bons modelos para o problema?

____

____

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com essa questão, esperamos que os estudantes reflitam sobre o caminho percorrido no desenvolvimento das atividades, validando os processos para assim, chegar a uma conclusão.

Assim como em todas as Folhas de Atividades anteriores, deixamos um espaço para que o estudante registre suas dificuldades ou observações. No caso dessa atividade de fechamento, colocamos também a possibilidade do estudante analisar tanto a Atividades 4 como também o desenvolvimento de todo o trabalho.

4 APLICAÇÃO E ANÁLISE DA PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo, faremos a identificação da escola, caracterização da turma e a descrição da aplicação da proposta didática seguida da análise dos resultados obtidos com as folhas de atividades.

4.1 A ESCOLA

O Serviço Social da Indústria de São Paulo (SESI-SP) tem uma das maiores redes de ensino particular, composta por 142 escolas, presentes em 112 municípios do Estado. Oferece as modalidades: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação Profissional Técnica de Nível Médio e Educação de Jovens e Adultos. A unidade de Barretos-SP, está denominada Centro Educacional 185 – Maria Aparecida Junqueira Pamplona de Menezes está situada à Rua Dr. Roberto Cardoso Alves, 800 no Bairro Los Angeles. A escola funciona desde 1962. Até o ano de 2017, funcionava em um prédio no centro da cidade. A partir de 2018, recebeu o atual prédio incluindo um centro de atividades, ofertando além dos serviços educacionais, atividades de esporte, lazer, cultura, responsabilidade social e qualidade de vida. A escola possui um prédio moderno com mobiliário novo e ambientes muito bem cuidados. Atualmente, na parte educacional a unidade possui 20 salas de aula, dois Laboratórios de Informática Educacional, uma sala multidisciplinar, um Laboratório de Química e Ciências Biológicas, um Laboratório de Ciências Físicas, uma Sala Maker, duas quadras poliesportivas e uma biblioteca. No período da manhã existem 16 turmas, sendo dez do ensino fundamental séries iniciais (1º ao 5º - Período Integral), duas do ensino fundamental séries finais (9º anos) e quatro turmas de ensino médio com uma turma de 1º ano, uma turma de 2º ano e duas turmas de 3º ano. No período da tarde, funcionam seis turmas de ensino fundamental séries finais, sendo duas turmas de 6º ano, duas turmas de 7º ano e duas turmas de 8º ano. De acordo com a Proposta Pedagógica para o Ensino Médio da Rede Escolar SESI-SP, a proposta pedagógica

> (...) está voltada para uma concepção de educação que engloba o ensino, a aprendizagem e a pesquisa, por meio de uma abordagem sociointeracionista que entende a relação do meio social com o sujeito como determinantes para o indivíduo aprender e construir conhecimentos sobre si e a sua realidade, priorizando a interdisciplinaridade, o diálogo e a contextualização, proporcionando uma atitude de permanente de aprendizado (SESI-SP, 2022).

Assim, a escola determina suas ações objetivando à formação integral do estudante, visando uma formação crítica e atuante na sociedade e mundo do trabalho.

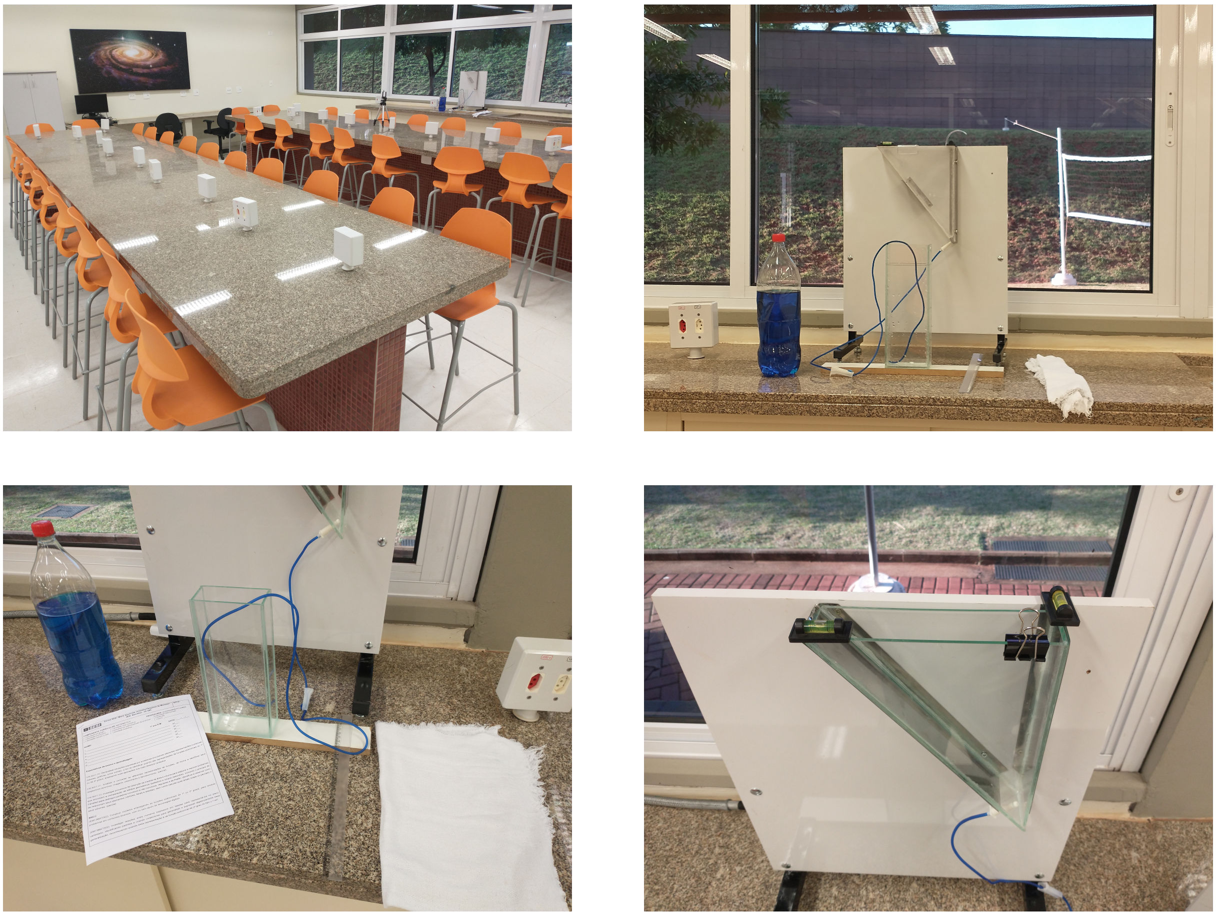
4.2 A TURMA

De acordo com as normativas do SESI-SP, os estudantes matriculados têm vagas garantidas até o término do ensino fundamental séries finais. Sendo assim, na transição do ensino fundamental para o ensino médio, ocorre uma classificação dos estudantes para o 1º ano do Ensino Médio. Salvo as particularidades, o critério de classificação é o desempenho geral do estudante no 9º ano. Assim, teoricamente a turma selecionada apresentaria um bom rendimento escolar. Porém, é preciso ressaltar que, no momento desta pesquisa, estivemos em um período pós pandemia de COVID-19 e a referida turma ficou praticamente dois anos realizando estudos de maneira remota. Por mais que tenha sido adotada estratégias de ensino aprendizagem utilizando os meios disponíveis e metodologias ativas, sabemos que o impacto causado levará um certo tempo para ser reparado. Em geral, a turma é heterogênea e tem em sua maioria estudantes engajados que conseguem bons resultados realizando atividades em grupos. Apesar de já ter lecionado o componente curricular de Matemática para essa turma em anos anteriores, atualmente leciono outro componente (Mundo do Trabalho e Empreendedorismo). Desse modo, contamos com a colaboração da professora titular para os levantamentos de conhecimentos prévios e disponibilização de tempo e espaço para a realização da pesquisa.

4.3 ORGANIZAÇÃO E MONTAGEM DO EXPERIMENTO

A implementação da proposta pedagógica foi realizada com uma turma de 1º ano do ensino médio da escola da Rede SESI-SP de Ensino Centro Educacional 185 – Maria Aparecida Junqueira Pamplona de Menezes na cidade de Barretos-SP. Para a aplicação, foram utilizados três ambientes da escola: Laboratório de Ciências Físicas, Laboratório de Informática Educacional e sala da aula em um tempo de 6 horas/aula entre os dias 07 e 28 de novembro de 2022. Previamente, foram preparadas duas estações do experimento no Laboratório de Física. Este possui duas bancadas com cadeiras que acomodam até 36 alunos, além de um balcão com pia, onde foram montadas as estações.

Figura 4.1 – Montagem do experimento na bancada.



Fonte: Acervo do autor.

Iniciamos a aplicação com uma roda de conversa em sala de aula apresentando um panorama geral da atividade que seria realizada, as expectativas de ensino e aprendizagem e explicando o funcionamento do experimento. Ainda em sala de aula, formamos os grupos com os 30 alunos que estavam presentes no dia. Por orientação da professora titular da turma, utilizamos os agrupamentos produtivos que já é uma prática comum da turma nas aulas de Matemática. Assim, dentro de cada grupo foram divididas as funções de realizar o controle do escoamento do líquido, medições e anotações além de um integrante para controlar o tempo de atividade atento à possíveis distrações do grupo.

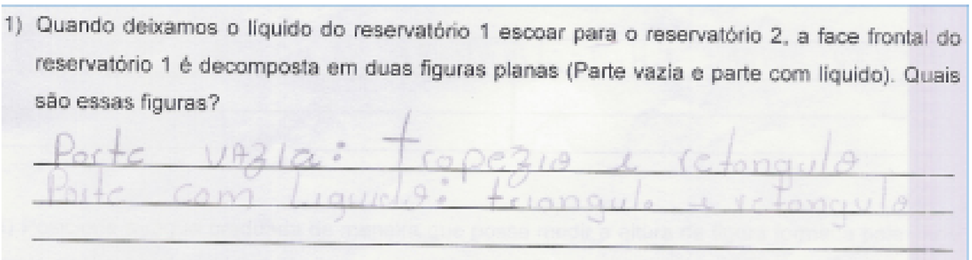
A professora titular foi convidada a acompanhar a realização da atividade. Sugerimos que, caso necessário, poderia fazer intervenções ou sugestões para um melhor aproveitamento da atividade. O que julgamos ser enriquecedor para nossa pesquisa.

Seguimos para o Laboratório de Ciências Físicas sendo fornecidas a folha de identificação e Folha de Atividades 1 para cada um dos grupos.

4.3.1 Aplicação da Folha de Atividade 1 - O experimento

Para o início da atividade dois dos grupos foram para as estações enquanto os outros observavam das bancadas. É importante destacar como uma atividade diferenciada altera a postura e o comportamento dos estudantes. Observamos que, mesmo os que não estavam realizando o experimento, observavam atentamente e já faziam algumas conjecturas a respeito da atividade. Na questão 1, com a intenção de que o estudante entenda, mesmo antes do início da manipulação do experimento, fizemos questionamentos sobre a forma e posição dos reservatórios. Mais ainda, questionamos sobre as figuras planas das que utilizaremos e suas propriedades. Alguns dos grupos responderam de forma direta, “um trapézio e um retângulo”. Porém, dois dos grupos foram um pouco mais detalhistas, respondendo “a parte vazia: um trapézio retângulo e a parte cheia um triângulo retângulo” (Figura 4.2. Acreditamos que essa afirmação tenha sido baseada na discussão anterior, durante a explicação do experimento, onde foram ditas as condições de nivelamento.

Figura 4.2 – Resposta detalhada do grupo – Folha de Atividades 1.


1) Quando deixamos o líquido do reservatório 1 escoar para o reservatório 2, a face frontal do reservatório 1 é decomposta em duas figuras planas (Parte vazia e parte com liquido). Quais são essas figuras?

Parte vazia: trapezio e retangulo
Parte com Liquido: triangulo e retangulo

Fonte: Acervo do autor.

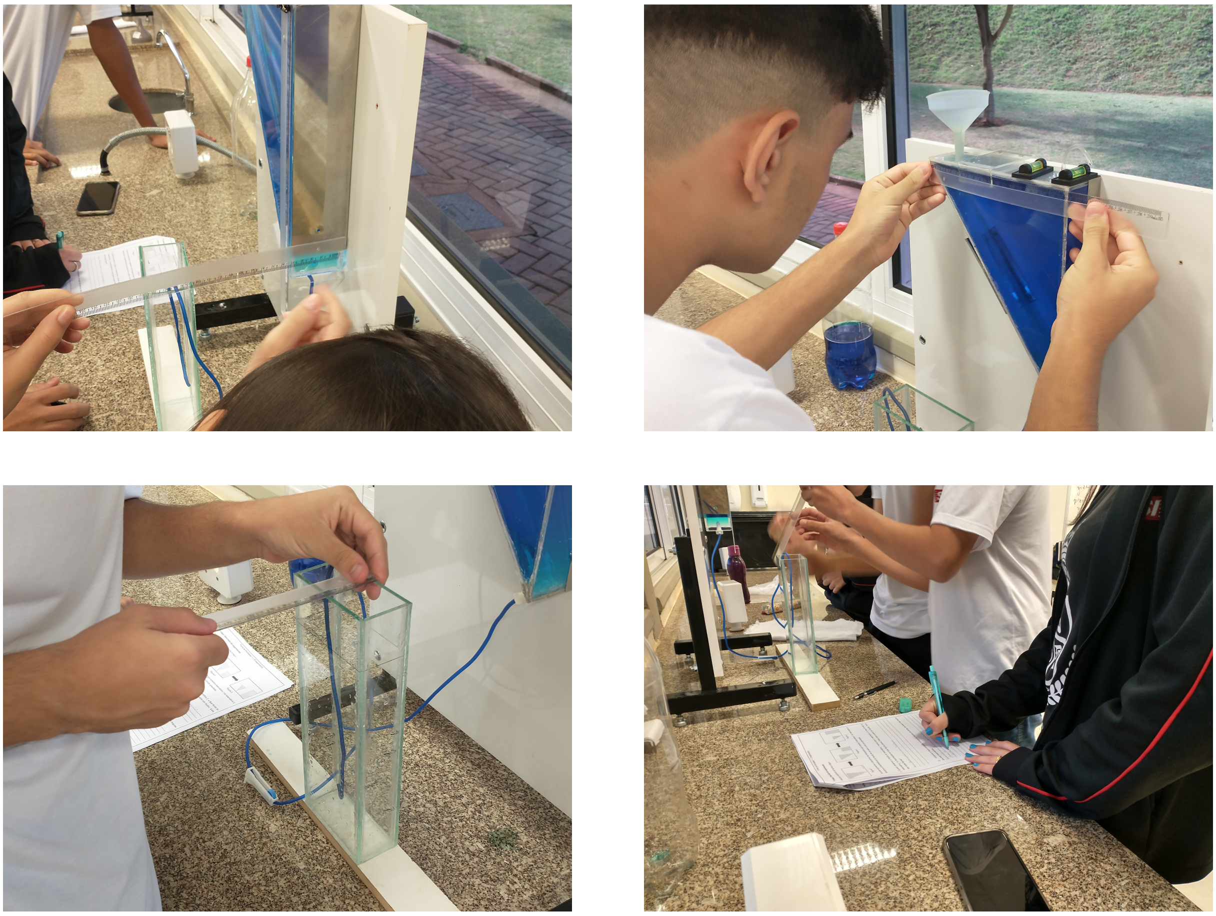
Vale ressaltar que, no desenvolvimento da proposta, o professor pesquisador assumiu um papel de observador mediador, registrando as percepções acerca do comportamento, dúvidas, afirmações dos estudantes. Além disso, mesmo que de forma breve, a participação da professora titular da turma contribuiu para estimular as discussões entre os integrantes dos grupos (Figura 4.3).

Figura 4.3 – Intervenções da professora titular com os estudantes.

Fonte: Acervo do autor.

Nos itens 2 e 3 da Folha de Atividade 1, solicitamos aos estudantes para que, utilizando a régua graduada fornecida, registrassem as medidas das dimensões dos reservatórios (Figura 4.4). De forma intencional e com o objetivo de propor a reflexão, não deixamos claro quais dimensões deveriam considerar, internas ou externas. Os primeiros grupos já começaram a discussão logo que iniciaram as medições. Um aluno fez o seguinte questionamento: “Devo desconsiderar a espessura das bordas?”. Neste momento, aproveitamos para realizar uma intervenção e fazer provocações para discussão da diferença entre as medidas de volume e a capacidade, confusão muito comum entre os estudantes.

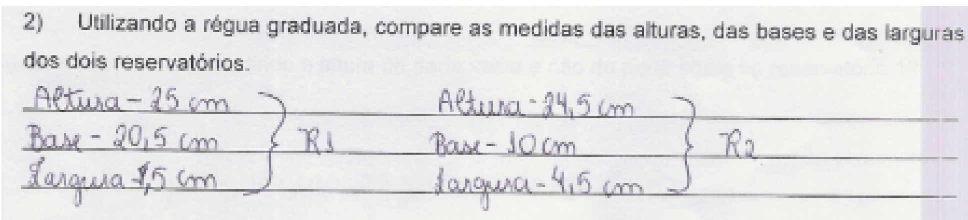
Figura 4.4 – Estudantes realizando as medições e registro na Folha de Atividades 1.



Fonte: Acervo do autor.

No item 3, provocamos sobre o que ocorreria com líquido quando transferido completamente para o reservatório 2. Este era um ponto de atenção em relação às estratégias adotadas pelos estudantes. Unanimemente, de posse das medidas, a estratégia escolhida foi calcular os volumes dos dois reservatórios e fazer a comparação. Em uma das resoluções, além de pequenos erros, o grupo percebeu e comentou que realizaram as medições sem um critério bem definido, uma vezes que, hora consideram as bordas externas, hora apenas o vão interno.

Figura 4.5 – Resposta do item 2 da Folha de Atividades 1 – Erro nas medições.



2) Utilizando a régua graduada, compare as medidas das alturas, das bases e das larguras dos dois reservatórios.

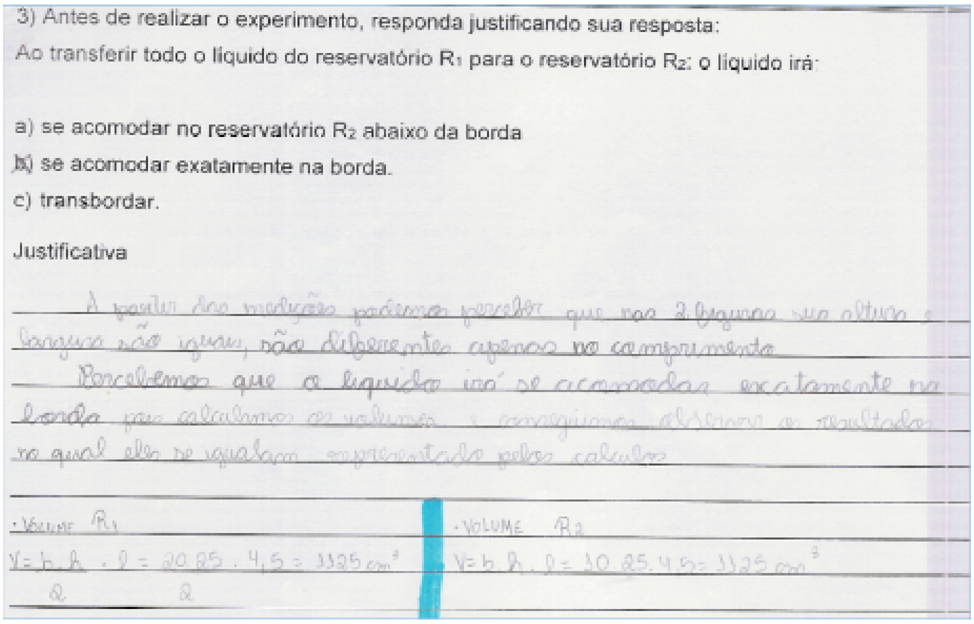
Altura – 25 cm
Base – 20,5 cm
Largura 4,5 cm
R1

Altura - 24,5 cm
Base - 10 cm
Largura - 4,5 cm
R2

Fonte: Acervo do autor.

É importante ressaltar que, dos seis grupos participantes da primeira etapa, três chegaram ao volume correto dos reservatórios, inclusive explicando a estratégia, explicitando os cálculos e evidenciando as observações com relação as medidas comuns dos dois reservatórios (Figura 4.6).

Figura 4.6 – Resolução de questão 3 – Folha de Atividades 1.



3) Antes de realizar o experimento, responda justificando sua resposta:

Ao transferir todo o liquido do reservatório R_1 para o reservatório R_2: o liquido irá:

a) se acomodar no reservatório R_2 abaixo da borda

b) se acomodar exatamente na borda.

c) transbordar.

Justificativa

A partir das medições podemos perceber que nas 2 figuras sua altura e largura são iguais, são diferentes apenas no comprimento

Percebemos que o liquido irá se acomodar exatamente na borda pois calculamos os volumes e conseguimos obter os resultados no qual eles se igualam apresentado pelos calculos

· Volume R_1

$V = \frac{b.h}{2} . l = \frac{20.25 . 4,5}{2} = 1125\ cm^3$

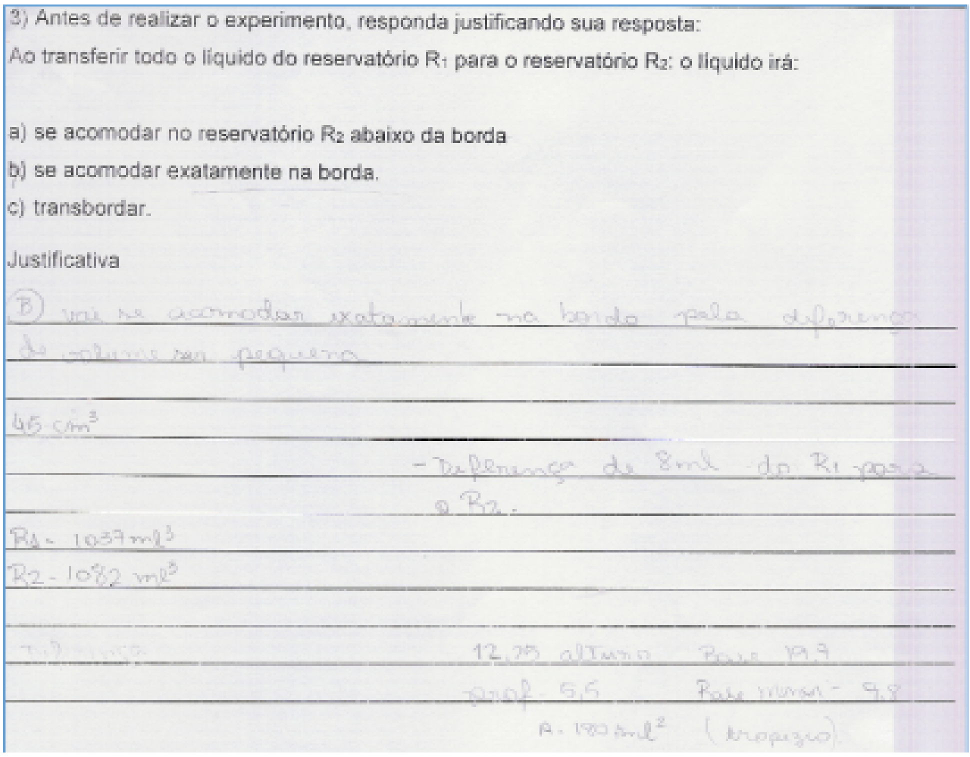
· VOLUME R_2

$V = b.h.l = 10.25.4,5 = 1125\ cm^3$

Fonte: Acervo do autor.

Como são respostas muito parecidas, pensamos na possibilidade da comunicação e compartilhamento entre os grupos. Em contrapartida, os outros três grupos adotaram a estratégia correta, mas utilizaram valores equivocados ou aproximações indevidas. Uma observação relevante para esse item, em que fica explicita a natureza pedagógica de um experimento associado a Modelagem Matemática e é evidenciada na resposta de um dos grupos. O grupo afirma que o líquido irá se acomodar na borda justificando que a diferença entre os volumes é muita pequena, portanto desprezível. Ainda, conforme apresentado na Figura 4.7, observamos que o grupo comete erros na resolução, na identificação das grandezas volume e capacidade e também na unidade de medida dessas grandezas.

Figura 4.7 – Erros na resolução, grandezas e unidade de medida cometidos no item 3 da Folha de Atividade 1.



3) Antes de realizar o experimento, responda justificando sua resposta:
Ao transferir todo o líquido do reservatório R_1 para o reservatório R_2: o líquido irá:

a) se acomodar no reservatório R_2 abaixo da borda
b) se acomodar exatamente na borda.
c) transbordar.

Justificativa

(B) vai se acomodar exatamente na borda pela diferença do volume ser pequena

45 cm³

- Diferença de 8ml do R1 para o R2.

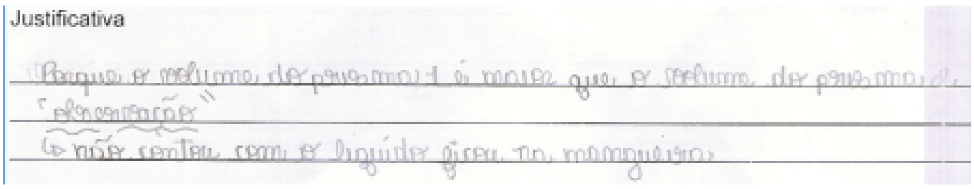
R1 - 1037 ml³
R2 - 1082 ml³

12,25 altura Base 19,9
prof. 5,5 Base menor - 9,8
A. 180 ml² (trapézio)

Fonte: Acervo do autor.

Outro fato que chama a atenção é que um dos grupos, mesmo não apresentando a resposta esperada nem registrando os cálculos de volumes, afirmou que o volume do primeiro reservatório seria maior o do segundo, fazendo menção a quantidade de líquido contido na mangueira de transferência.

Figura 4.8 – Justificativa apresentada por um grupo no item 3 da Folha de Atividades 1.



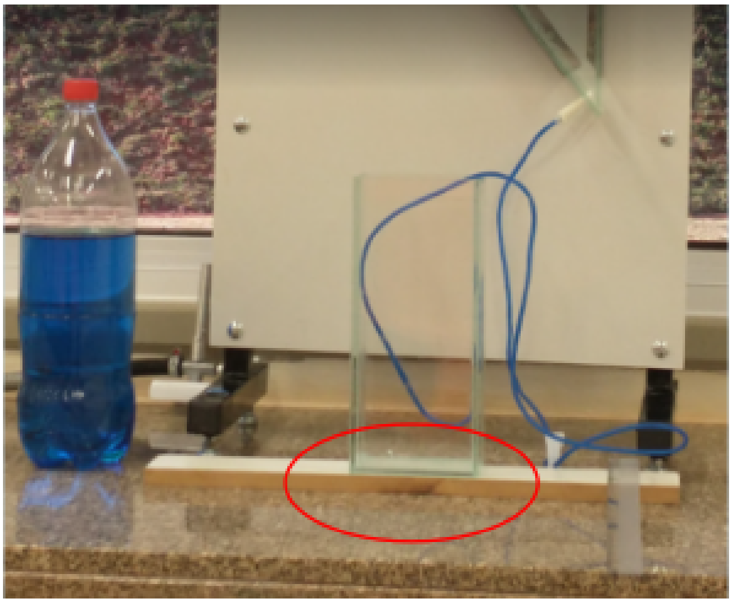
Justificativa

Porque o volume do primeiro 1 é maior que o volume do primeiro 2.
"observação"
não contou com o liquido que ficou na mangueira.

Fonte: Acervo do autor.

Nos itens 4, 5 e 6, na fase final da 1ª etapa da Folha de Atividades 1, solicitamos aos estudantes que efetivamente posicionassem as réguas graduadas fornecidas de forma a medir a altura do trapézio formado pela parte vazia na face do reservatório 1 e da altura do quadrilátero retângulo formado pela parte cheia na face do reservatório 2. Na observação da realização, vimos que a maioria dos estudantes se preocuparam em posicionar a régua da forma mais precisa possível. Já prevendo essa dificuldade, deixamos disponíveis bases de madeira MDF para apoiar o reservatório 2 conforme destaque na Figura 4.9 e também ímãs de neodímio para facilitar a fixação.

Figura 4.9 – Destaque da base de madeira MDF do reservatório 2.

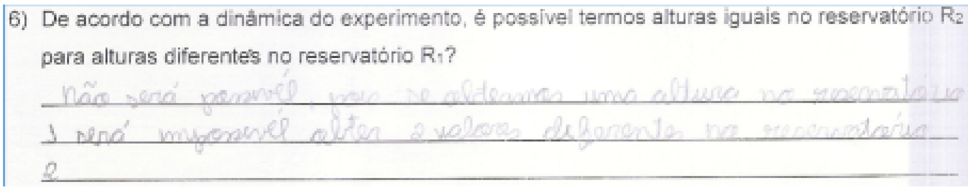


Fonte: Acervo do autor.

Antes de finalizar a 1ª etapa, fizemos uma sequência de questionamentos com o objetivo mobilizar os estudantes para algumas reflexões a respeito do experimento direcionando para a função quadrática.

Primeiro questionamos sobre o motivo da medida da altura ser realizada na parte vazia no reservatório 1 e da parte cheia no reservatório 2. Todos os grupos identificaram que a parte vazia no reservatório 1 corresponde a parte cheia no reservatório 2, pois trata-se do líquido transferido. Entretanto, nenhum dos grupos afirmou a congruência das áreas. No item 6, buscamos estabelecer uma relação biunívoca entre as medidas das alturas. Porém, verificamos que a pergunta não ficou muito clara para todos os estudantes (Figura 4.10). Tivemos então que fazer muitas intervenções para explicar a questão. Assim, elencamos uma possível alteração para próximas aplicações. Após as explicações, os estudantes responderam a questão de acordo com a resposta esperada.

Figura 4.10 – Resposta do item 6 da Folha de Atividades 1.



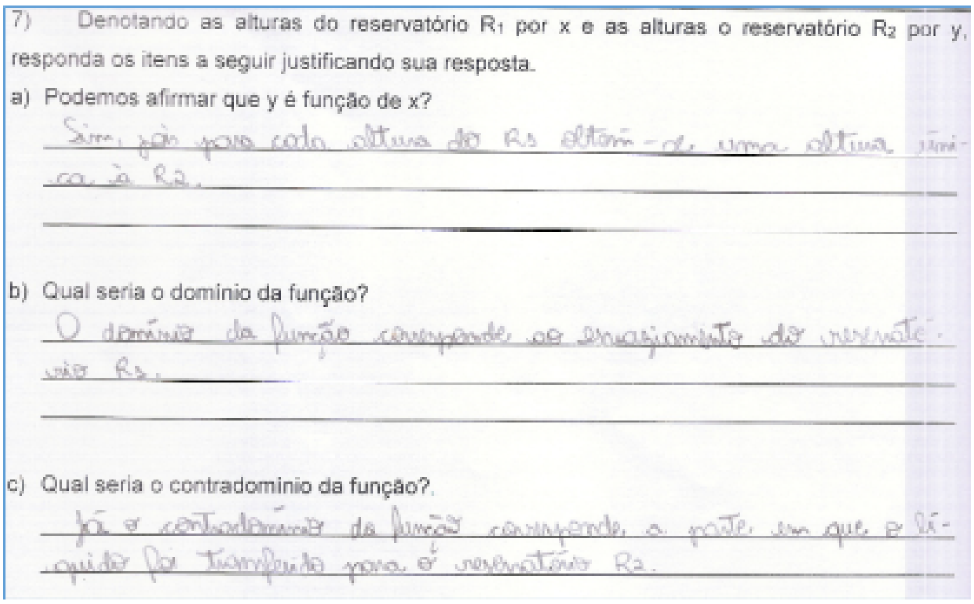
6) De acordo com a dinâmica do experimento, é possível termos alturas iguais no reservatório R_2 para alturas diferentes no reservatório R_1?

Não será possível, pois se alteramos uma altura no reservatório 1 será impossível alter 2 valores diferentes no reservatório 2

Fonte: Acervo do autor.

Finalizando a 1ª etapa, fizemos uma abordagem acerca do conhecimento um pouco mais formal dos estudantes sobre funções. Denotamos por *x* a medida da altura do trapézio do reservatório 1 e por *y*, a medida da altura do retângulo no reservatório 2. Procuramos verificar se o estudante reconhece a relação de dependência entre as grandezas, o conjunto de partida e o conjunto de chegada na dinâmica do experimento. Segundo Caetano e Paterlini (2013, p.41), "Dada uma relação, é importante saber observar suas características matemáticas, como a regra que a define e os conjuntos de partida e de chegada." Neste momento, foi necessária uma intervenção. Fizemos a socialização com toda a turma a respeito da tríade: domínio, contradomínio e lei de formação. Uma observação importante é que mesmo já tendo estudado as funções polinomiais, como por exemplo, a função afim, isso não estava muito claro para os estudantes. Alguns relataram que até entendiam a função de cada um desses elementos, mas não reconheciam pelo nome. Percebemos que, após a explicação todos os grupos responderam de forma satisfatória, alguns de maneira qualitativa e outros de forma quantitativa como pode ser visto nas Figuras 4.11 e 4.12.

Figura 4.11 – Resposta 1 qualitativa do item 7 da Folha de Atividades 1.



7) Denotando as alturas do reservatório R_1 por x e as alturas o reservatório R_2 por y, responda os itens a seguir justificando sua resposta.

a) Podemos afirmar que y é função de x?

Sim, pois para cada altura do R_1 obtém-se uma altura única à R_2.

b) Qual seria o domínio da função?

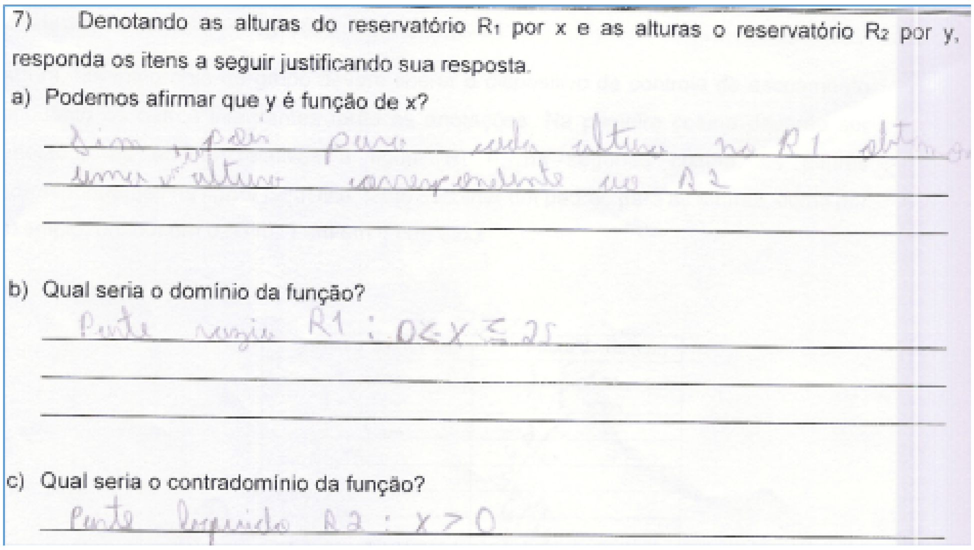
O domínio da função corresponde ao esvaziamento do reservatório R_1.

c) Qual seria o contradomínio da função?

Já o contradomínio da função corresponde a parte em que o líquido foi transferido para o reservatório R_2.

Fonte: Acervo do autor.

Figura 4.12 – Resposta 2 qualitativa do item 7 da Folha de Atividades 1.



7) Denotando as alturas do reservatório R_1 por x e as alturas o reservatório R_2 por y, responda os itens a seguir justificando sua resposta.

a) Podemos afirmar que y é função de x?

Sim, pois para cada altura no R1 alt... uma altura correspondente ao R2

b) Qual seria o domínio da função?

Parte vazia R1 : $0 < x \leq 25$

c) Qual seria o contradomínio da função?

Parte preenchida R2 : $x > 0$

Fonte:Fonte: Acervo do autor.

Encerramos a 1ª etapa com a roda de conversa. Discutimos a possibilidade de, uma vez que definimos a existência de uma função que relaciona cada altura do trapézio com uma altura distinta no retângulo, podemos determinar a lei de formação dessa função. Procuramos deixar claro para o estudante que as atividades seguintes seriam um caminho a ser percorrido para responder a essa questão.

4.3.1.1 Aplicação da segunda etapa da Folha de Atividades 1 - Tabela e construção do gráfico

Nessa etapa, os estudantes realizam o experimento. Assim como acordado anteriormente, se organizaram para que enquanto um controle o fluxo do líquido na transferência e outro anote as medidas coletadas. Aconselhamos no escopo da atividade a escolha de um espaçamento constante no controle das alturas no reservatório 1, por exemplo: 0,5 cm ou 1 cm. Observamos que todos os grupos seguiram a orientação, em um dos casos, iniciaram com um espaçamento de 0,5 cm depois alternaram para 1 cm e por fim para 2 cm (Figura 4.13).

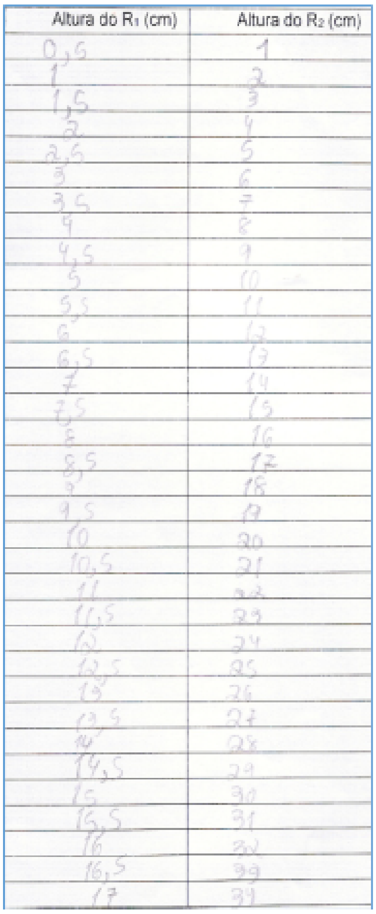
Figura 4.13 – Coleta das medidas do estudante na 2ª etapa da Folha de Atividades 1.

Altura do R_1 (cm)	Altura do R_2 (cm)
0.5	1
1	2,5
1,5	3,5
2	4,5
2,5	5,5
3	6,5
3,5	7,5
4	8,2
4,5	9
5	10
6	11,5
7	13
8	14,5
9	16
10	17
11	18,2
12	19,5
13	20,5
14	21,3
15	22
17	23,5
19	24,7

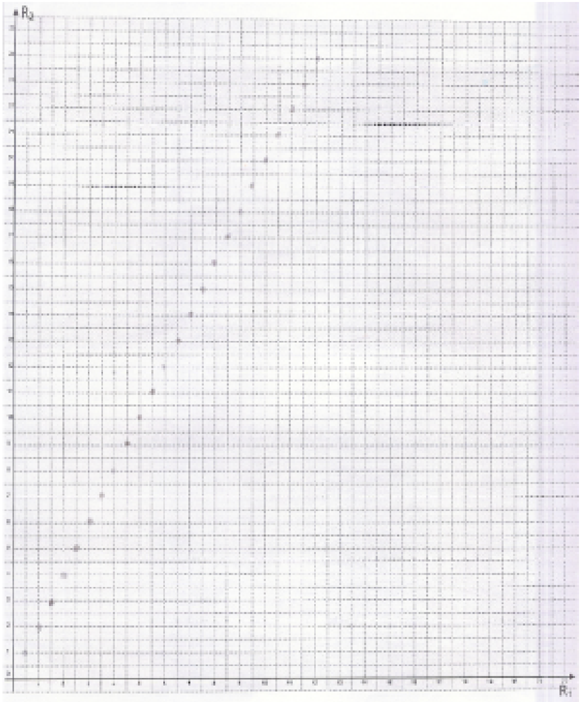
Fonte: Acervo do autor.

Na realização da atividade, observamos a tendência do estudante em procurar padrões lineares na relação entre grandezas. Em um dos grupos, disseram o seguinte: “Observamos que a cada 0,5 no reservatório 1, sobe 1 cm no reservatório 2”. A intervenção do professor foi: “Continue para mais alguns valores e observe se continua constante”. Em seguida, perceberam o comportamento não linear fazendo ainda uma reflexão sobre a velocidade de alteração do nível por conta do formato dos reservatórios. Em um outro grupo, um dos estudantes fez a afirmação de que a altura no reservatório 2 é sempre o dobro da medida da altura no reservatório 1. Porém, não questionaram ou discutiram, simplesmente preencheram a tabela sem utilizar o experimento. Consequentemente, construíram um gráfico linear conforme mostra a Figura 4.14).

Figura 4.14 – Resolução do estudante apenas com as medições iniciais do experimento.



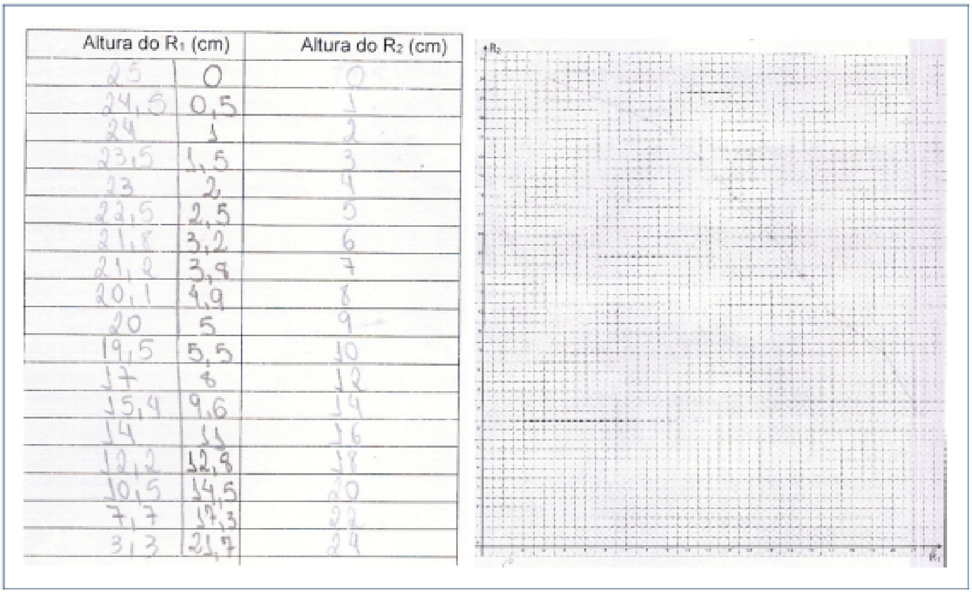
Altura do R_1 (cm)	Altura do R_2 (cm)
0,5	1
1	2
1,5	3
2	4
2,5	5
3	6
3,5	7
4	8
4,5	9
5	10
5,5	11
6	12
6,5	13
7	14
7,5	15
8	16
8,5	17
9	18
9,5	19
10	20
10,5	21
11	22
11,5	23
12	24
12,5	25
13	26
13,5	27
14	28
14,5	29
15	30
15,5	31
16	32
16,5	33
17	34



Fonte: Acervo do autor.

Um outro grupo realizou a atividade considerando como conjunto de partida as alturas no reservatório 2. Inicialmente fizeram as medições da parte cheia do reservatório 1. Ao perceberem o erro, criaram uma nova coluna e preencheram utilizando a estratégia de considerar a diferença entre a altura total do reservatório 1 e as alturas registradas. Apesar de realizarem a correção na tabela, construíram o gráfico considerando os valores anteriores. Ver Figura 4.15.

Figura 4.15 – Tabela e gráfico produzido pelo estudante – 2ª etapa da Folha de Atividades 1.



Altura do R_1 (cm)		Altura do R_2 (cm)
25	0	0
24,5	0,5	1
24	1	2
23,5	1,5	3
23	2	4
22,5	2,5	5
21,8	3,2	6
21,2	3,8	7
20,1	4,9	8
20	5	9
19,5	5,5	10
17	8	12
15,4	9,6	14
14	11	16
12,2	12,8	18
10,5	14,5	20
7,7	17,3	22
3,3	21,7	24

Fonte: Acervo do autor.

Excetuando os dois casos apresentados anteriormente, os demais grupos realizaram a atividade de acordo com a resposta esperada.

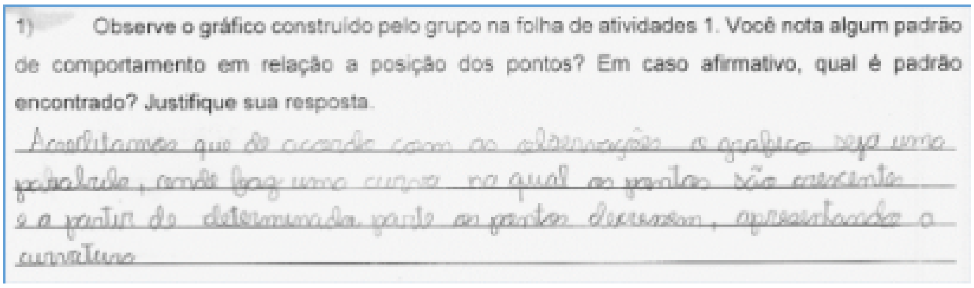
Ao final da Folha de Atividades 1, deixamos um espaço para que o estudante relatasse suas percepções ou dificuldades em relação a atividade. Observamos que em geral, as dificuldades foram aquelas já relatadas como: identificação do domínio, contradomínio e também na construção do gráfico. Com o intuito de contribuir para intervenções futuras, tanto as informações por nós diagnosticadas, quanto as relatadas pelos estudantes, foram compartilhadas com a professora titular da turma.

4.3.2 Aplicação da Folha de Atividade 2 - Analisando os dados

A Folha de Atividades 2 foi trabalhada em sala de aula utilizando o tempo previsto de 1 hora/aula (50 minutos). Com os estudantes organizados em grupos e de posse de suas produções na Folha de Atividades 1, iniciamos o momento da aula com a retomada da etapa anterior refletindo sobre as informações colhidas até o momento e lembrando que o produto final do trabalho será o de determinar o modelo matemático que melhor representa a relação existente ente a altura do trapézio formado no reservatório 1 e a altura do retângulo formado no reservatório 2.

Assim, no item 1 solicitamos que os estudantes analisassem o gráfico construído anteriormente observando a existência de algum padrão na posição dos pontos. A resposta esperada era de que a trajetória dos pontos parecia descrever uma curva. Todos os grupos reconheceram algum tipo de padrão e ainda fizeram conjecturas sobre gráfico de funções conhecidas como: a parábola da função quadrática (Figura 4.16), a função logarítmica e a função exponencial.

Figura 4.16 – Resposta do grupo no item 1 da Folha de Atividades 2: estudantes conjecturam ser uma parábola.


1) Observe o gráfico construído pelo grupo na folha de atividades 1. Você nota algum padrão de comportamento em relação a posição dos pontos? Em caso afirmativo, qual é padrão encontrado? Justifique sua resposta.

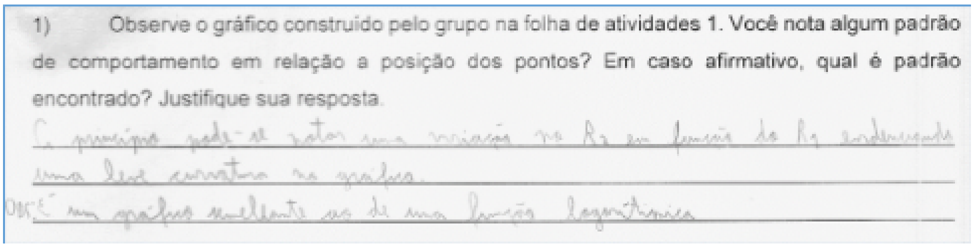
Acreditamos que de acordo com as observações o gráfico seja uma parábola, onde faz uma curva na qual os pontos são crescentes e a partir de determinada parte os pontos decrescem, apresentando a curvatura

Fonte: Acervo do autor.

Neste momento, sobre a afirmação dos estudantes sobre o fato de que os pontos decrescem a partir de determinado intervalo, fizemos uma intervenção propondo as seguintes reflexões: Em relação ao eixo *y*, os pontos decrescem ou crescem "mais devagar"? Será que existe uma maneira matemática de mostrar isso? Dessa forma os estudantes retomaram a discussão e concluíram que ainda existe o crescimento. Deixamos aí um questionamento para a discussão do item 2.

No caso da afirmação de uma função logarítmica (Figura 4.17), a reflexão proposta foi a respeito do par ordenado (0, 0) ser um ponto pertencente a nossa função, pois quando a altura do trapézio é 0, a altura do retângulo também é 0, trata-se da condição inicial do experimento. Dessa forma, pela condição de existência de logaritmo, isso não seria possível. Vale salientar que essa discussão surge de conhecimentos que esses estudantes pesquisaram de forma autônoma após o início da nossa atividade, pois ainda estavam iniciando os estudos sobre logaritmo nas aulas regulares.

Figura 4.17 – Resposta no item 1 da Folha de Atividades 2: estudantes conjecturam ser a função logarítmica.


1) Observe o gráfico construído pelo grupo na folha de atividades 1. Você nota algum padrão de comportamento em relação a posição dos pontos? Em caso afirmativo, qual é padrão encontrado? Justifique sua resposta.

A princípio pode-se notar uma variação no [illegible] em função do [illegible] ocasionando uma leve curvatura no gráfico.
Obs: É um gráfico semelhante ao de uma função logarítmica

Fonte: Acervo do autor.

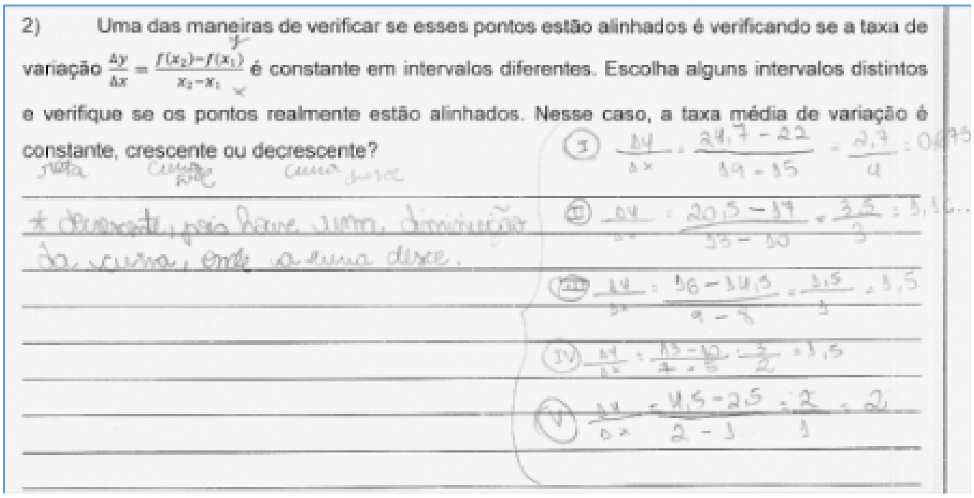
Na atividade 2, utilizamos a taxa média de variação como ferramenta para verificar a condição de alinhamento dos pontos. A partir das afirmações dos estudantes no item anterior, isso se tornou bastante pertinente e uma ótima oportunidade para realizarmos uma discussão.

Os estudantes tiveram um pouco de dificuldade na interpretação da expressão matemática, porém após uma breve explicação o problema foi resolvido. Contudo, fizemos de forma coletiva a reflexão sobre o significado da taxa média de variação apresentada no gráfico. No enunciado do item, sugerimos ao estudante verificar se a taxa é constante, crescente ou decrescente, dessa forma teríamos uma boa noção do comportamento dos pontos. Após todos os grupos terminarem os cálculos, socializamos as resoluções e fizemos uma sistematização desse conhecimento observando que, funções lineares possuem taxa de variação constante. Logo, nosso gráfico não será representado por uma reta. Além disso, mesmo não sendo o objetivo do trabalho, fizemos uma abordagem sobre a concavidade da curva de acordo com a taxa de variação, como apresentado por Hughes-Hallett, Gleason e Connally (2009, p. 78):

> – Se f for uma função cuja taxa de variação cresce (torna-se menos negativa ou mais positiva à medida que nos movemos da esquerda para a direita), então o gráfico de f é **côncavo para cima**. Isto é, o gráfico curva-se para cima.
>
> – Se f for uma função cuja taxa de variação decresce (torna-se menos positiva ou mais negativa à medida que nos movemos da esquerda para a direita), então o gráfico de f é **côncavo para baixo**. Isto é, o gráfico curva-se para baixo.

No item 3, o estudante já sabe que o comportamento dos pontos descreve uma curva. Então, questionamos mais uma vez sobre a possibilidade da curva ser a representação gráfica de alguma função conhecida. Desse modo, o estudante tem a possibilidade de fazer uma autoavaliação e retornar a qualquer momento para ajustes ou modificações. O que ficou evidenciado no registro de um dos grupos como mostra a Figura 4.18.

Figura 4.18 – Cálculo da taxa de variação – Produção do estudante – Folha de Atividade 2.



2) Uma das maneiras de verificar se esses pontos estão alinhados é verificando se a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ é constante em intervalos diferentes. Escolha alguns intervalos distintos e verifique se os pontos realmente estão alinhados. Nesse caso, a taxa média de variação é constante, crescente ou decrescente?

* decrescente, pois houve uma diminuição da curva, onde a curva desce.

I $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{24,7-22}{19-15} = \frac{2,7}{4} = 0,675$

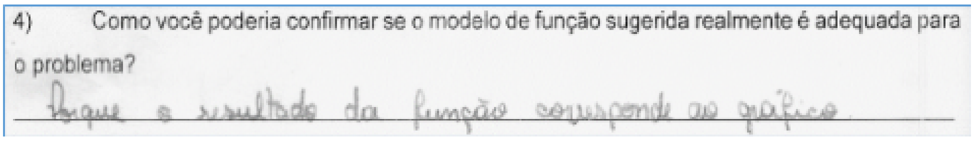
II $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20,5-17}{33-30} = \frac{3,5}{3} = 1,16...$

V $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,5-2,5}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$

Fonte: Acervo do autor.

No item 4, fizemos uma provocação para motivar a atividade seguinte. Questionamos sobre quais recursos poderiam ser utilizados para que pudéssemos confirmar ou refutar o modelo de função sugerido. O ponto de atenção aqui é que alguns dos estudantes, digamos mais conformados, já estavam convictos de que o tipo de equação sugerida pelo grupo seria a ideal (Figura 4.19).

Figura 4.19 – Registro do estudante – Satisfeito com a solução proposta – Folha de Atividades 2.

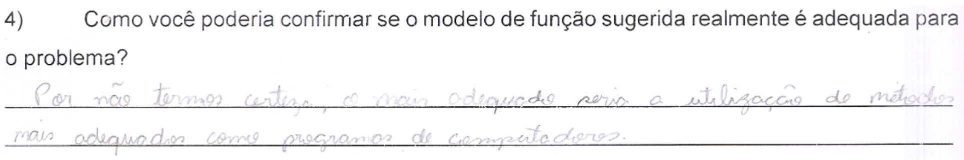

4) Como você poderia confirmar se o modelo de função sugerida realmente é adequada para o problema?

Porque o resultado da função corresponde ao gráfico

Fonte: Acervo do autor.

Enquanto outros, um pouco mais céticos, sugeriram a utilização de recursos computacionais (Figura 4.20).

Figura 4.20 – Registro do estudante sugerindo utilização de recursos computacionais – Folha de Atividade 2.


4) Como você poderia confirmar se o modelo de função sugerida realmente é adequada para o problema?

Por não termos certeza, o mais adequado seria a utilização de métodos mais adequados como programas de computadores.

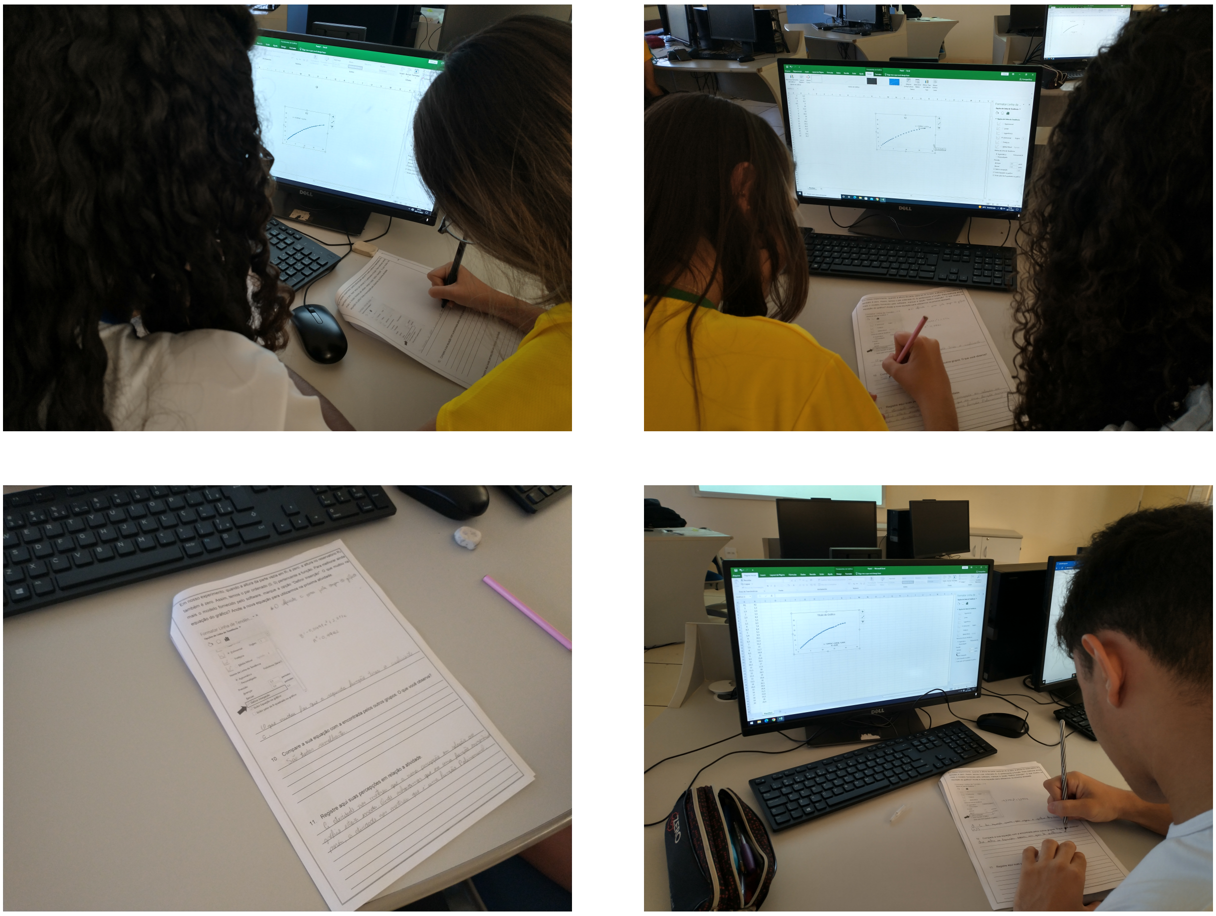
Fonte: Acervo do autor.

Concluída a atividade, por meio do relato dos estudantes no último item, disponibilizado para registro das dificuldades e/ou percepções, identificamos como a autoavaliação contribui para a aprendizagem, permitindo ao estudante uma reflexão positiva sobre suas produções e ações.

4.3.3 Aplicação da Folha de Atividade 3 - Utilizando a planilha eletrônica

Na Folha de Atividades 2, utilizamos a planilha eletrônica como ferramenta para validar as conjecturas realizadas na atividade anterior. Para isso, fizemos uso de um projetor multimídia e computadores no Laboratório de Informática Educacional com o tempo de 2 horas/aula (100 minutos). Entregamos aos estudantes as folhas de atividades realizadas anteriormente junto a Lista de Atividades 3. Iniciamos novamente relembrando os objetivos da atividade. Em seguida realizamos a reprodução da tabela construída na Folha de Atividades 1 digitando os dados na planilha eletrônica (Figura 4.21). Para o desenvolvimento das atividades, além da descrição dos passos indicados na Folha de Atividades, também utilizamos o projetor multimídia para auxiliar na localização dos comandos.

Figura 4.21 – Estudantes utilizando a planilha eletrônica.

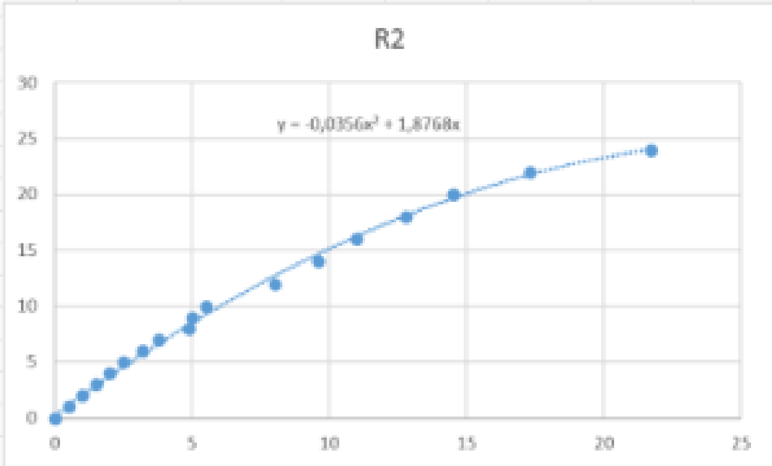


Fonte: Acervo do autor.

Digitadas as informações, iniciamos a confecção do gráfico na planilha para comparar com gráfico construído anteriormente no papel quadriculado. Assim, os estudantes puderam verificar a sua construção inicial, validando ou retomando para verificar erros. Isso foi observado na atividade do grupo que havia refeito a tabela na atividade 2, porém construído o gráfico com as informações erradas. Agora, digitaram a planilha com todos os valores inclusive os errados. No entanto, confeccionaram o gráfico corretamente.

Figura 4.22 – Gráfico obtido pelos estudantes com as informações da tabela.

	A	B	C
1	R1	R1	R2
2	25	0	0
3	24,5	0,5	1
4	24	1	2
5	23,5	1,5	3
6	23	2	4
7	22,5	2,5	5
8	21,8	3,2	6
9	21,2	3,8	7
10	20,1	4,9	8
11	20	5	9
12	19,5	5,5	10
13	17	8	12
14	15,4	9,6	14
15	14	11	16
16	12,2	12,8	18
17	10,5	14,5	20
18	7,7	17,3	22
19	3,3	21,7	24
20			

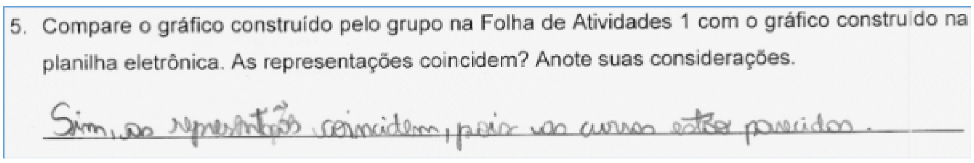


Fonte: Acervo do autor.

Uma observação é que o grupo construí a segunda coluna da tabela (Figura 4.22) utilizando as fórmulas da planilha, ou seja, utilizaram a fórmula “=25-A1” arrastando até o final da tabela.

Em seguida, mobilizamos os estudantes para realizarem a comparação no padrão de comportamento dos pontos (Figura 4.23).

Figura 4.23 – Resposta do estudante – Folha de Atividades 3.

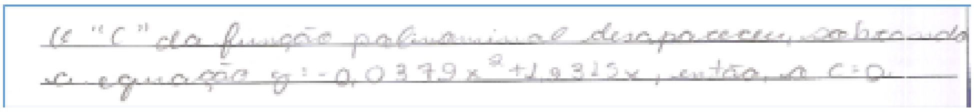

5. Compare o gráfico construído pelo grupo na Folha de Atividades 1 com o gráfico construído na planilha eletrônica. As representações coincidem? Anote suas considerações.

Sim, as representações coincidem, pois as curvas estão parecidas.

Fonte: Acervo do autor.

Na sequência, solicitamos aos estudantes utilizarem a ferramenta de linha de tendência da planilha. Instruímos a variar o cursor dentre as opções: Exponencial, Linear, Logarítmico, Polinomial, Potência e Média Móvel. A resposta esperada era “Polinomial” e, por padrão do software, esta já aparece de grau 2. Neste momento, fizemos uma breve discussão sobre a constatação de que o melhor ajuste para os pontos seria o gráfico de uma função polinomial de grau 2, ou seja, a função quadrática. A partir daí, demos instruções para que encontrassem a expressão matemática utilizando a ferramenta “Exibir Equação no gráfico” e escrevendo a equação matemática encontrada. Para refinar ainda mais essa equação, discutimos sobre o ponto de coordenadas (0, 0) pertencer ao gráfico a partir das condições iniciais do experimento. Dessa forma, utilizamos a ferramenta “Definir interseção” atribuindo o valor 0, 0. Dessa forma, forçamos a passagem da parábola pela origem. Após essa ação os estudantes compararam as equações, percebendo a ausência do coeficiente c (Figura 4.24).

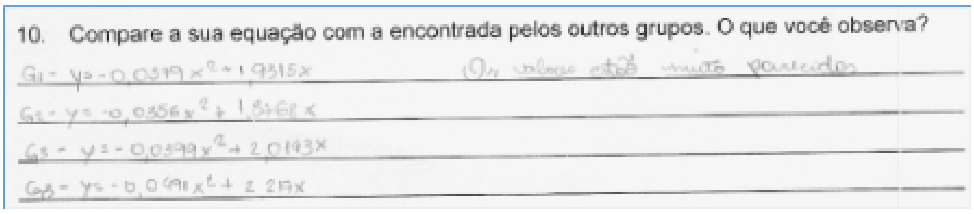
Figura 4.24 – Resposta do estudante – Folha de Atividade 3


O "C" da função polinomial desapareceu, sobrando a equação $y=-0,0379x^2+1,9315x$, então o $C=0$.

Fonte: Acervo do autor.

Por fim, cada um dos grupos apresentou a equação encontrada. Realizamos a comparação e constataram que os valores dos coeficientes eram muito próximos, mostrando que as equações são bons modelos para o experimento (Figura 4.25).

Figura 4.25 – Resposta do estudante no item 10 – Folha de Atividades 3.


10. Compare a sua equação com a encontrada pelos outros grupos. O que você observa?

G_1 - $y=-0,0379x^2+1,9315x$ Os valores estão muito parecidos

G_2 - $y=-0,0356x^2+1,8468x$

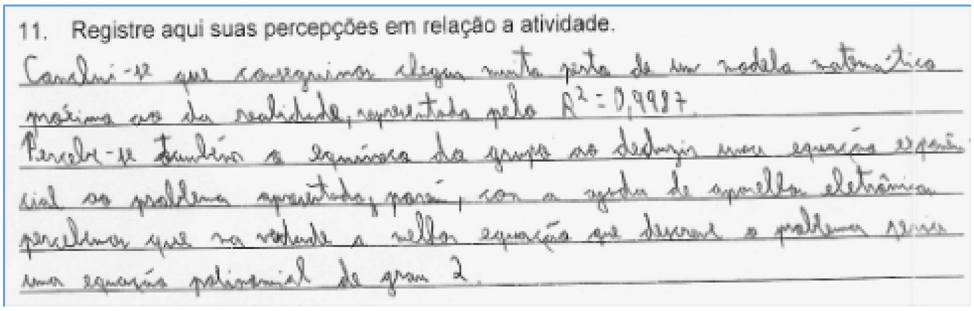
G_3 - $y=-0,0399x^2+2,0193x$

G_4 - $y=-0,0491x^2+2,217x$

Fonte: Acervo do autor.

Como fechamento da Folha de Atividades 3, assim como nas outras, deixamos um espaço para que o estudante registrasse suas percepções em relação à atividade. Nesse registro, percebemos que os estudantes aprovaram a proposta, percebendo a evolução do seu trabalho, reconhecendo erros e agindo sobre eles (Figura 4.26).

Figura 4.26 – Registro do estudante na Folha de Atividades 3.



11. Registre aqui suas percepções em relação a atividade.

Conclui-se que conseguimos chegar muito perto de um modelo matemático próximo ao da realidade, representado pelo $R^2 = 0,9987$.
Percebe-se também o equívoco do grupo ao deduzir uma equação exponencial ao problema apresentado, porém, com a ajuda de aparelho eletrônico percebemos que na verdade a melhor equação que descreve o problema seria uma equação polinomial de grau 2.

Fonte: Acervo do autor.

4.3.4 Aplicação da Folha de Atividades 4 - Encontrando o modelo de equação para o experimento

Para o fechamento de nossa proposta, aplicamos a Folha de Atividades 4. Em sala de aula, com o tempo de 1 hora/aula, fizemos a dedução da equação utilizando as medidas exatas do experimento. Vale salientar que, devido ao pouco tempo disponível para aplicação, escolhemos realizar a atividade de forma expositiva. Nossa preocupação foi de fazer a resolução de maneira organizada, comentando e justificando cada passo. Tivemos como ponto de atenção os conteúdos em que os estudantes não dominavam muito bem, mas foram trabalhados previamente, mesmo que superficialmente, com a professora titular da turma. O principal desses pontos foi a razão entre áreas. Mais ainda, os estudantes tiveram a oportunidade de comparar a equação encontrada por eles no desenvolvimento das atividades anteriores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PROPOSTAS FUTURAS

Nosso trabalho foi desenvolvido com o objetivo de proporcionar aos estudantes uma abordagem diferente do método dito tradicional com apenas lousa e giz, engajando os estudantes e contribuindo para uma aprendizagem significativa. Inspirados em uma questão do Banco de Questões da OBMEP 2012, norteados pelos preceitos da Base Nacional Comum Curricular e Currículo Paulista, confeccionamos um experimento que possibilita diversas aplicações didáticas. Dentre elas, a função quadrática. Escolhemos este tema por se tratar de um conceito muito importante, porém geralmente tratado nos livros didáticos com exemplos de pouca aplicação prática. Em consequência disso, os estudantes apresentam dificuldades ou simplesmente o descaso com o tema. Pensando nisso, adotamos a metodologia da Modelagem Matemática utilizando como instrumentos: o experimento, a planilha eletrônica e folhas de atividades onde o estudante pode formular hipóteses, testá-las e validá-las.

Conceitualmente, a pesquisa não teve a intenção de um aprofundamento do conceito de função quadrática, concentrando-se em elementos básicos do estudo como: tabela, gráfico e lei de formação. Procuramos realizar uma análise qualitativa da observação do desenvolvimento e registros feitos pelos estudantes nas folhas de atividades e planilha eletrônica.

Em uma análise geral da proposta, consideramos que os objetivos iniciais foram alcançados, produzindo um rico material de utilidade diagnóstica, colocando o estudante como protagonista de sua aprendizagem e evidenciando como a matemática modela o mundo. É reconfortante ver o envolvimento e as interações sociais que esse tipo de atividade proporciona. Percebemos que os estudantes que já haviam realizado o experimento, se preocupavam em auxiliar os demais colegas. Observamos também que estudantes que normalmente ficam apáticos nas aulas convencionais se mostram ativos e participativos nos grupos durante o desenvolvimento das atividade. Isso tudo leva a um aprendizado significativo para a nossa prática docente.

Consideramos que nossa proposta didática é dinâmica, podendo ser melhorada, modificada e aproveitada por colegas interessados em agir sobre o fazer pedagógico, mudando o paradigma das aulas tradicionais, muitas vezes, resultando em estudantes passivos e desinteressados. Em particular, acreditamos que nosso experimento pode ser adaptado para outras práticas e metodologias. Deixamos como sugestões:

- o aprofundamento do estudo de função quadrática;
- a alteração do formato dos reservatórios;
- investigação da aplicação de outros tipos de funções;
- volume de sólidos.

Por fim, temos a esperança de que nosso trabalho possa despertar em nossos colegas o perfil de professor investigador, inspirando novas propostas, modelando a realidade de nossos estudantes, contribuindo para progresso da educação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. A. de. **Introdução à função afim por meio da experimentação e investigação na planilha eletrônica**. 66 p. Monografia (Curso de Especialização em Ensino da Matemática no Ensino Médio) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Citado na página 12.

BARBOSA, J. C. Integrando modelagem matemática. **Educação Matemática em Revista**, n. 26, p. 17–25, Março 2009. Citado na página 32.

BASSANEZI, R. C. **Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática**. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 32.

BATISTA, V. N. **Uma Proposta Metodológica para o Ensino de Funções Trigonométricas**. 189 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2015. Citado na página 12.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma matemática - Conjuntos e funções**. São Paulo: Editora FTD, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 27.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base**. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 12, 14, 15, 21, 23 e 32.

CAETANO, P. S.; PATERLINI, R. R. **Funções elementares: Módulo II**. Cuiabá: Central de Textos, 2013. (Matem@tica na Pr@tica. Curso de especialização em ensino de Matemática para o ensino médio). Citado 2 vezes nas páginas 27 e 64.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M.; CONNALLY, E. **Funções para modelar variações: uma preparação para o Cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. Citado na página 70.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção PROFMAT). Citado na página 27.

PERRENOUD, P. **Construir as Competências desde a Escola**. Porto Alegre: Artmed Editora, 1999. Citado na página 15.

RANGEL, W. O. **Aplicação de uma atividade experimental sobre vazão de líquidos para ao estudo de funções no Ensino Médio**. 184 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Citado na página 12.

SÃO PAULO. **Currículo Paulista - Etapa Ensino Médio**. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2020. Citado 7 vezes nas páginas 12, 14, 15, 16, 17, 18 e 19.

SÃO PAULO. **Currículo em Ação - Matemática e suas Tecnologias. Projeto de vida & Tecnologia e inovação**. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2022. v. 2. (Primeira série do Ensino Médio - Caderno do Professor, v. 2). Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2022/10/1serie-2sem-Prof-MAT-PV-TEC.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2023. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 21.

SALVADOR, J. A.; ARENALES, S. H. de V. **Modelagem matemática de problemas ambientais**. São Carlos: EdUFSCar, 2012. (Coleção UAB-UFSCar). Citado na página 30.

SESI-SP. **Orientações didáticas do movimento do aprender - Matemática e suas Tecnologias: 1º do Ensino Médio**. São Paulo: SESI-SP Editora, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.

SESI-SP. **Referencial curricular do sistema SESI-SP de ensino - Ensino Médio**. 1. ed. São Paulo: SESI-SP Editora, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 12, 14, 21 e 22.

SESI-SP. **Proposta Pedagógica para o Ensino Médio**. [S.l.], 2022. Disponível em: <https://barretos.sesisp.org.br/proposta-pedagogica-para-o-ensino-medio>. Acesso em: 02 out. 2022. Citado na página 55.

SILVA, V. da S. Modelagem matemática como metodologia para o ensino de matemática nos anos iniciais: alguns apontamentos sobre a abordagem dos conteúdos matemáticos a partir de relatos de experiências. In: ____. **Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações**. 2. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. cap. 3, p. 59–74. Citado na página 32.

APÊNDICE A – FOLHA DE ATIVIDADES 1

Folha de Atividades 1 – O experimento

1ª etapa: Descrição do experimento

Observe a sequência de figuras a seguir.

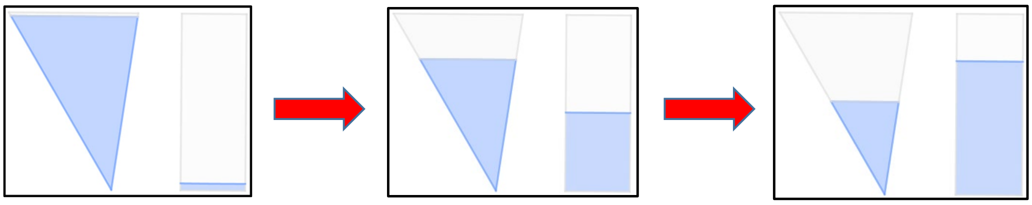


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Quando acionamos o dispositivo da mangueira que conecta o reservatório 1 ao reservatório 2, liberamos a transferência do líquido de um para o outro por gravidade.

1) Quando deixamos o líquido do reservatório 1 escoar para o reservatório 2, a face frontal do reservatório 1 é decomposta em duas figuras planas (Parte vazia e parte com líquido). Quais são essas figuras?

____
____
____
____

2) Utilizando a régua graduada, compare as medidas das alturas, das bases e das larguras dos dois reservatórios.

____
____
____
____
____
____
____
____

3) Antes de realizar o experimento, responda justificando sua resposta:
Ao transferir todo o líquido do reservatório R_1 para o reservatório R_2: o líquido irá:

a) se acomodar no reservatório R_2 abaixo da borda
b) se acomodar exatamente na borda.
c) transbordar.

Justificativa

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

4) Posicione a régua graduada de maneira que possa medir a altura da figura formada pela parte vazia no reservatório 1. Com a outra régua graduada, faça o mesmo para o reservatório 2, porém medindo a altura da parte com líquido.

5) Por que estamos medindo a altura da parte vazia e não da parte cheia no reservatório 1?
____
____
____

6) De acordo com a dinâmica do experimento, é possível termos alturas iguais no reservatório R_2 para alturas diferentes no reservatório R_1?
____
____
____
____
____

7) Denotando as alturas do reservatório R_1 por x e as alturas o reservatório R_2 por y, responda os itens a seguir justificando sua resposta.

a) Podemos afirmar que y é função de x?

b) Qual seria o domínio da função?

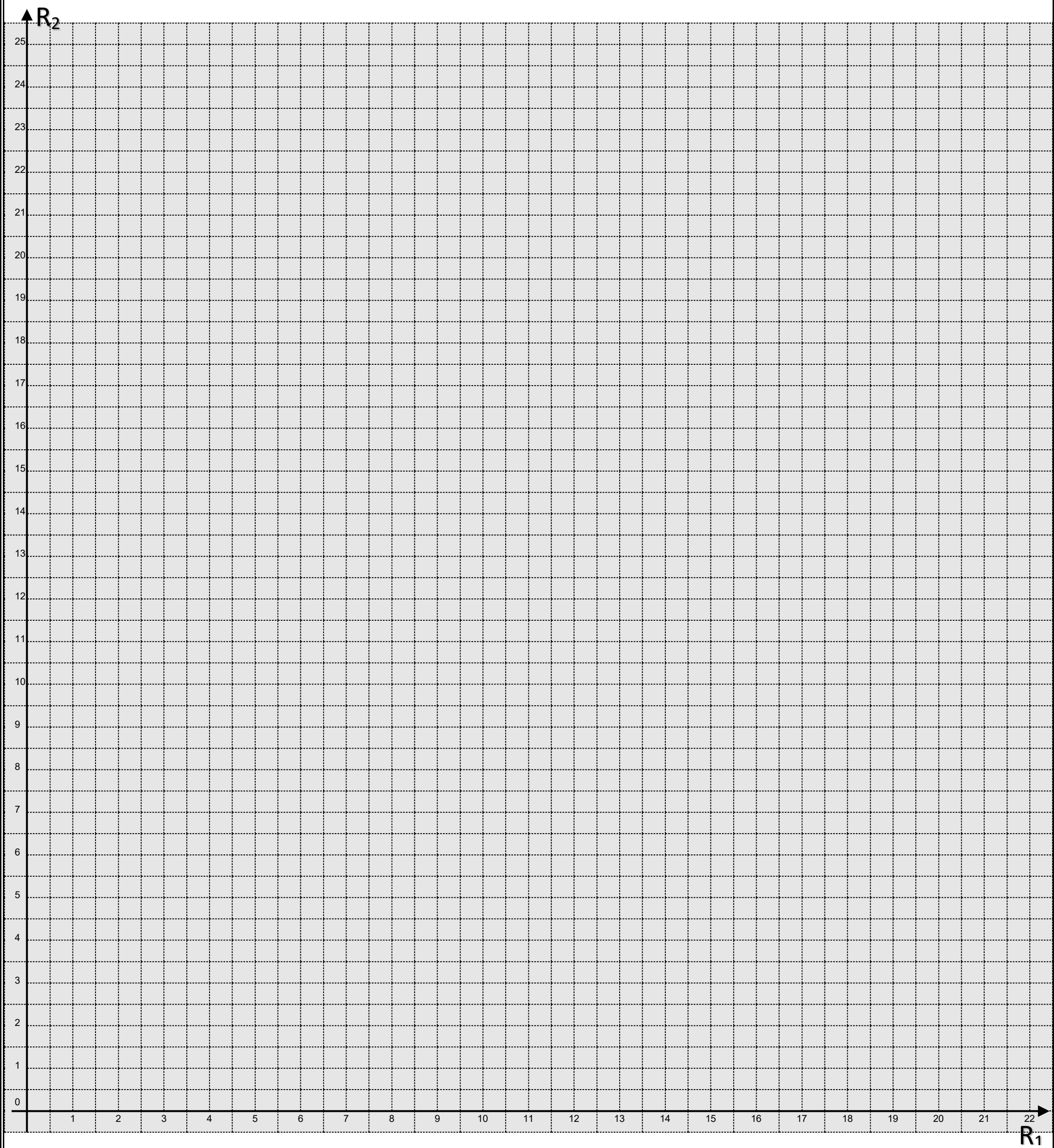
c) Qual seria o contradomínio da função?

2ª etapa: Construção do gráfico

Agora, um integrante do grupo deverá liberar o dispositivo de controle de escoamento enquanto os outros integrantes farão as anotações. Na primeira coluna deverão ser anotadas as alturas relativas a figura R_1 e, na segunda coluna, as alturas correspondentes na figura R_2. (Dica: tente escolher um padrão para as alturas, como por exemplo, 0,5 cm em 0,5 cm, 1 cm em 1 cm, etc.)

Altura do R_1 (cm)	Altura do R_2 (cm)

8) De acordo com as informações coletadas, marque os pares ordenados (R_1, R_2) no plano cartesiano. (Capriche na precisão)



9) Relate as dificuldades encontradas pelo grupo até o momento.

APÊNDICE B – FOLHA DE ATIVIDADES 2

Folha de Atividades 2 – **Analisando as informações**

1) Observe o gráfico construído pelo grupo na folha de atividades 1. Você nota algum padrão de comportamento em relação a posição dos pontos? Em caso afirmativo, qual é padrão encontrado? Justifique sua resposta.

____

____

____

____

____

2) Uma das maneiras de verificar se esses pontos estão alinhados é verificando se a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ é constante em intervalos diferentes. Escolha alguns intervalos distintos e verifique se os pontos realmente estão alinhados. Nesse caso, a taxa média de variação é constante, crescente ou decrescente?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

3) De acordo com a conclusão obtida no item anterior, a posição dos pontos sugere que as alturas se relacionem de acordo com alguma função conhecida? Explique.

____

____

____

____

____

____

4) Como você poderia confirmar se o modelo de função sugerida realmente é adequado para o problema?

____

____

____

____

____

____

5) Escreva as dificuldades encontradas pelo grupo até o momento.

____

____

____

____

____

____

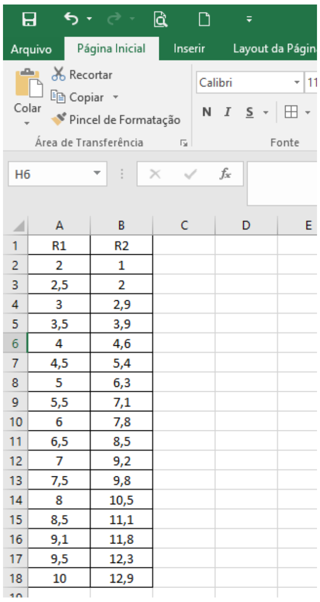
APÊNDICE C – FOLHA DE ATIVIDADES 3

Folha de Atividades 3 – Utilizando a planilha eletrônica

Vamos verificar as informações colhidas anteriormente utilizando uma planilha eletrônica.

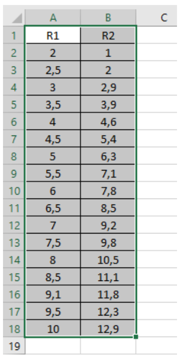
1. Abra a planilha eletrônica.
2. Na coluna A, digite as alturas do trapézio R_1 registradas na tabela da folha de atividades 1 e, na coluna B, as alturas do retângulo R_2.

Exemplo:



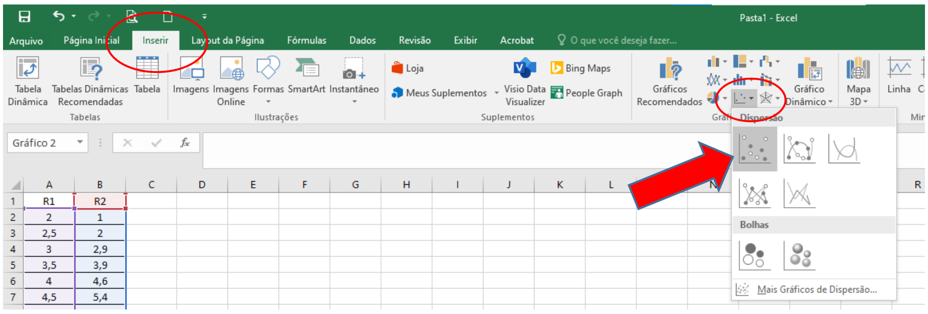
	A	B	C	D	E
1	R1	R2			
2	2	1			
3	2,5	2			
4	3	2,9			
5	3,5	3,9			
6	4	4,6			
7	4,5	5,4			
8	5	6,3			
9	5,5	7,1			
10	6	7,8			
11	6,5	8,5			
12	7	9,2			
13	7,5	9,8			
14	8	10,5			
15	8,5	11,1			
16	9,1	11,8			
17	9,5	12,3			
18	10	12,9			

3. Selecione as células da tabela.



	A	B	C
1	R1	R2	
2	2	1	
3	2,5	2	
4	3	2,9	
5	3,5	3,9	
6	4	4,6	
7	4,5	5,4	
8	5	6,3	
9	5,5	7,1	
10	6	7,8	
11	6,5	8,5	
12	7	9,2	
13	7,5	9,8	
14	8	10,5	
15	8,5	11,1	
16	9,1	11,8	
17	9,5	12,3	
18	10	12,9	
19			

4. Clique em “Inserir” e depois escolha “gráfico de dispersão”



5. Compare o gráfico construído pelo grupo na Folha de Atividades 1 com o gráfico construído na planilha eletrônica. As representações coincidem? Anote suas considerações.

____

____

____

____

____

6. Analisando o gráfico construído na planilha eletrônica, o que você observa em relação a posição dos pontos? Descrevem algum comportamento conhecido?

____

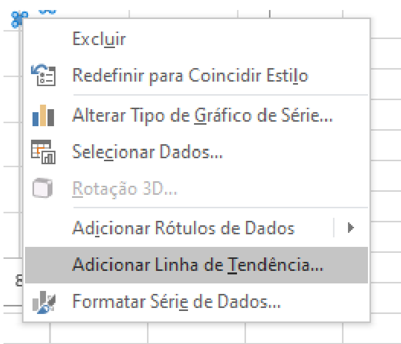
____

____

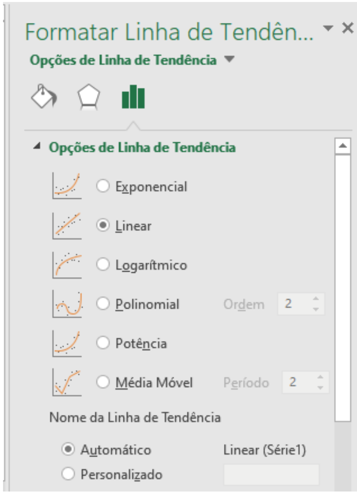
____

____

7. Agora, vamos encontrar a melhor representação gráfica para o nosso experimento. Clique com o botão direito do mouse sobre um dos pontos do gráfico para selecioná-lo. Em seguida, selecione a opção “Adicionar Linha de Tendência...



Ao abrir o menu lateral, escolha a opção que melhor se adapta aos pontos do gráfico.



8. Qual o tipo de linha de tendência que melhor representa a função?

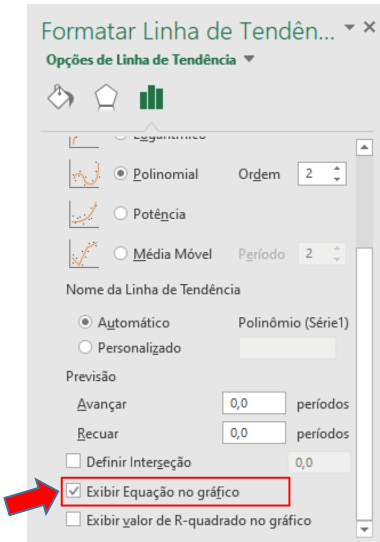
____

____

____

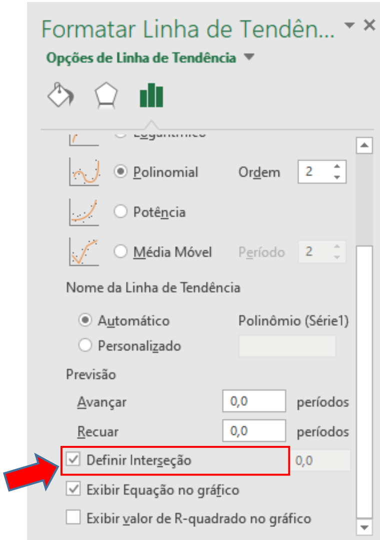
____

9. Encontrada a linha de tendência role o menu para baixo e selecione a opção "Exibir Equação no gráfico". Anote a equação.



____

Em nosso experimento, quando a altura da parte vazia em R_1 é zero, a altura no reservatório R_2 também é zero. Assim, temos o par ordenado (0, 0) pertencente a função. Para melhorar ainda mais o modelo fornecido pelo software, marque a opção “Definir Inserção”. O que mudou na equação do gráfico? Anote a nova equação para utilizarmos na próxima atividade.



____

____

10. Compare a sua equação com a encontrada pelos outros grupos. O que você observa?

____

____

____

____

____

11. Registre aqui suas percepções em relação a atividade.

____

____

____

____

____

____

____

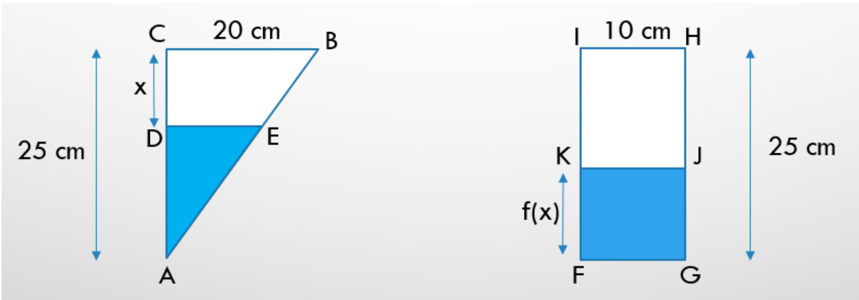
APÊNDICE D – FOLHA DE ATIVIDADES 4

Folha de Atividades 4 – Encontrando o Modelo de Equação para o experimento

Considere as figuras e as seguintes informações.

Nas condições do experimento, o triângulo ABC é retângulo em C e a base BC está nivelada.

Além disso, $S_{BCDE} = S_{FGJK}$.



Compare a equação encontrada pelo grupo na planilha eletrônica com a equação do problema. São iguais?

Podemos afirmar que as equações encontradas são bons modelos para o problema?

Utilize o espaço abaixo para escrever sua opinião em relação ao trabalho desenvolvido.