UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

ALEX ROBERTO DA SILVA

TRABALHANDO HABILIDADES DA BNCC ATRAVÉS DE MÉTODOS DE CÁLCULO DE RAÍZES QUADRADAS APROXIMADAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

SOROCABA

SETEMBRO DE 2023

Alex Roberto da Silva

Trabalhando habilidades da BNCC através de métodos de cálculo de raízes quadradas aproximadas no Ensino Fundamental

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação da Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu

Sorocaba
Setembro de 2023

Alex Roberto da Silva

Trabalhando habilidades da BNCC através de métodos de cálculo de raízes quadradas aproximadas no Ensino Fundamental/ Alex Roberto da Silva . – Sorocaba, Setembro de 2023-

53p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas , Setembro de 2023.

1. Raízes quadradas aproximadas. 2. Habilidades BNCC. 2. Números irracionais. I. Orientadora Profa Dra Ana Cristina de Oliveira Mereu. II. Universidade Federal de São Carlos III. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas IV. Trabalhando habilidades da BNCC através de métodos de cálculo de raízes quadradas aproximadas no Ensino Fundamental.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Alex Roberto da Silva, realizada em 05/09/2023.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu (UFSCar)

Profa. Dra. Mayara Duarte de Araujo Caldas (UFF)

Profa. Dra. Graciele Paraguaia Silveira (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Dedico este trabalho à memória do meu irmão Pedro e da minha prima Yasmim, que precocemente partiram deste mundo e aguardo, um dia, um reencontro.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade de realizar este sonho e, pelos momentos de dificuldade, me dar forças para que pudesse concluir esta jornada. Gratidão eterna à Ele.

Aos meus pais, Marcelo e Luciana, por todo o amor, toda a persistência e dedicação máxima para me fazer uma pessoa melhor, em todos os aspectos, além de acreditar que a educação pode mudar vidas.

À minha família e aos meus amigos, pelo total apoio e torcida para que esse mestrado fosse concluído. Em especial, ao meu irmão Guilherme, que foi, é e sempre será meu braço direito para todas a situações que estaremos juntos.

À minha esposa Samira, pela paciência e compreensão em entender que o mestrado é um ciclo importante na minha vida, e por sempre me animar para que pudesse completar mais este ciclo. Eu te amo!

À Prof° Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu, que prontamente se dispôs a me ajudar com a escrita da dissertação, pelas dicas, orientações, materiais de pesquisa e correções, e por sempre me animar, além de ser uma excelente professora, a qual me inspiro muito.

À todos os profissionais da UFSCar – Câmpus Sorocaba, por toda a contribuição e conhecimento, e por sempre me amparar em momentos de dificuldade.

Aos meus colegas da pós graduação, que se mostrou uma turma muito unida para poder vencer os obstáculos (que não são poucos) de realizar esse mestrado.

À todos os profissionais da EMEF Luigi Luvizotto – Cerquilho/SP – que sempre me animaram e me deram total apoio e suporte para que pudesse concluir esta etapa.

E em especial, às minhas filhas, Allana e Beatriz, que sempre serão a minha motivação maior para que seja uma pessoa melhor para elas. Filhas, o seu pai ama muito vocês!

Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e levantarei o mundo (Arquimedes de Siracusa).

Resumo

Neste trabalho, será apresentada uma abordagem para explorar e desenvolver as habilidades da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) por meio do tema das raízes quadradas aproximadas. Apesar de estar presente em vários conceitos e situações-problema do Ensino Fundamental, esse tema é pouco abordado, tanto no ensino quanto nos livros didáticos. Portanto, este estudo destacará a relevância desse tema e irá propor a apresentação de alguns métodos de cálculo das raízes quadradas aproximadas e suas respectivas análises e estimativas de erro. Além disso, será proposta a implementação desses métodos em sala de aula por meio de uma sequência didática. Desta maneira, espera-se que o trabalho possa desenvolver a criatividade e o raciocínio lógico dos alunos, no âmbito do pensamento algébrico e computacional, através da compreensão e a habilidade em trabalhar com fórmulas matemáticas, fornecendo aos alunos uma ferramenta adicional para abordar outros conceitos, como a localização dos números irracionais na reta real e problemas de geometria.

Palavras-chave: Raízes quadradas aproximadas. Habilidades BNCC. Números irracionais.

Abstract

In this study, an approach will be presented to explore and develop the skills outlined in the BNCC through the topic of approximate square roots. Despite being present in various concepts and problem-solving situations in Elementary Education, this theme is scarcely addressed, both in teaching and in textbooks. Therefore, this research will underscore the significance of this topic and propose the introduction of some methods for approximating square roots, along with their respective analyses and error estimates. Furthermore, the implementation of these methods in the classroom will be suggested through a didactic sequence. In this manner, it is anticipated that this work can foster students' creativity and logical reasoning within the realm of algebraic and computational thinking. This will be achieved through comprehension and proficiency in working with mathematical formulas, providing students with an additional tool to approach other concepts, such as the positioning of irrational numbers on the real number line and geometry problems.

Keywords: Approximate square roots. BNCC skills. Irrational numbers.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

No ensino de Matemática do Ensino Fundamental, mais especificamente 6° ao 9° ano, procura-se não mais fazer com que os alunos tenham que aprender algoritmos para realizar as operações básicas, além da própria contagem dos números naturais. Em vez disso, busca-se explorar no aluno o raciocínio lógico e o pensamento crítico, fazendo com que este entenda a real necessidade do uso das operações matemáticas aprendidas até então. Isso implica em afastar a percepção de que a disciplina de Matemática é “mecânica”, como se fosse uma receita de bolo. Para corroborar esta ideia, segue um trecho do documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

> Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico (BRASIL, 2018, p. 263).

O documento da BNCC propõe que os alunos desenvolvam uma série de competências ao longo destes anos denominadas *habilidades*. Conforme os alunos vão adquirindo estas habilidades, é esperado que os alunos entendam e argumentem os processos matemáticos.

Entretanto, vários alunos que chegam à 2° etapa do Ensino Fundamental (6° ao 9° anos) possuem certa dificuldade com as quatro operações básicas, sobretudo a divisão. Um trabalho de campo realizado por Zatti, Agranionih e Enricone (2010) destacou alguns pontos relacionados às dificuldades dos alunos em realizar a divisão pelo algoritmo.

> A maior parte dos erros de divisão inseriu-se nas categorias reprodução errada da operação proposta e não domínio do algoritmo. Um aspecto que chama a atenção é a ausência de respostas em 29,8% dos cálculos propostos. O cálculo 30 (4:5=) e o cálculo 22 (6630:65=) apresentaram um maior percentual de erros. Esses cálculos são trabalhados na 4a série, mas são mais enfatizados na 5a série. O cálculo 30 envolve divisão de números decimais, em que o dividendo é menor que o divisor, o que torna o quociente menor do que 1, ou seja, 0,8. Na maior parte dos erros, nesse cálculo, houve ausência de respostas, e a categoria em que se enquadra a maior parte dos mesmos é a “reprodução errada da operação proposta”. O fato de o dividendo ser menor que o divisor pode ter sido um fator de estranheza aos alunos, ainda não muito familiarizados com operações com números decimais, o que levou grande parte deles a considerar o cálculo impossível ou a invertê-lo, tornando-o mais familiar: 5:4=. Outros consideraram um possível erro na proposta da operação, resolvendo o problema através da soma, subtração ou multiplicação do dividendo e do divisor. Alguns atribuíram zero como resposta, o que

> pode ser considerado um sinal de impossibilidade ou uma aproximação com o conceito de número decimal. Verifica-se que o aluno constrói um procedimento alternativo de resolução, mesmo que não corresponda ao solicitado. (ZATTI; AGRANIONIH; ENRICONE, 2010, p. 126–127).

Para identificar se os alunos enfrentam dificuldades em realizar as operações e cálculos, é possível abordar um tema específico e, com base nesse tema, trabalhar várias habilidades da BNCC. Um exemplo disso é o Teorema de Tales, que possibilita a abordagem das habilidades relacionadas às operações matemáticas (multiplicação e divisão), inclusive com números racionais, e também com noções de proporcionalidade direta (regra de três), paralelismo de três retas, entre outras.

Considerando isso, para este trabalho, seria ideal escolher um tema que, além de abordar diversas habilidades da BNCC, também seja pouco explorado no ensino de Matemática do Ensino Fundamental. Portanto, o tema selecionado para esta dissertação são os métodos de aproximação de raízes quadradas não exatas.

Ainda justificando a escolha desse tema, nos livros didáticos há uma abordagem muito limitada em relação ao cálculo de raízes quadradas não exatas, que são as raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos. Existe o algoritmo tradicional (cujo exemplo pode ser encontrado em Sousa (2013, p. 5)), que não utiliza números primos e é capaz de encontrar uma raiz quadrada exata ou aproximada. Porém, há muito tempo, este tema deixou de ser contemplado nos livros didáticos. Segundo Rampazzo (1985, p. 28), o ensino do algoritmo é de difícil assimilação por parte dos alunos e, até mesmo para muitos matemáticos, por se tratar de um processo mecânico, sendo mais fácil utilizar uma calculadora, recomendando o ensino pelo método das tentativas.

Ao abordar os números irracionais e, consequentemente, as raízes quadradas não exatas, o método mais comum para poder estimar um número racional que mais se aproxima de raiz quadrada dada, é o método das tentativas. Entretanto, apesar de ser funcional, é um método muito rudimentar e exaustivo, desestimulando o aluno. Observe como é o cálculo da raiz quadrada de 18, através do método das tentativas exemplificado na Tabela 1.

Tabela 1 – Cálculo da raiz quadrada de 18, através do método das tentativas.

$1^2 = 1$	$(4,1)^2 = 16,81$	$(4,21)^2 = 17,7241$
$2^2 = 4$	$\mathbf{(4,2)^2 = 17,64}$	$(4,22)^2 = 17,8084$
$3^2 = 9$	$(4,3)^2 = 18,49$	$(4,23)^2 = 17,8929$
$\mathbf{4^2 = 16}$		$\mathbf{(4,24)^2 = 17,9776}$
$5^2 = 25$		$(4,25)^2 = 18,0625$

Fonte: elaboração do autor

Suponha que queremos encontrar $\sqrt{x}$. O primeiro passo do método das tentativas, é encontrar as duas raízes exatas mais próximas, a anterior e posterior. É escolhido para a parte inteira n de $\sqrt{x}$ a maior raiz exata menor que $\sqrt{x}$, ou seja, a raiz exata anterior à $\sqrt{x}$.

Para o exemplo $\sqrt{18}$, o primeiro passo é registrado na primeira coluna da Tabela 1. Como a raiz quadrada de 16 é 4, e a raiz quadrada de 25 é 5, a raiz quadrada de 18 deve ser um número entre 4 e 5. Assim fica decidido qual a parte inteira n do número procurado.

A segunda etapa é encontrar a primeira casa decimal. Para isso, são realizadas as contas $(n,1)^2$, $(n,2)^2$, $(n,3)^2$, assim por diante. Continuamos com as tentativas, decimal por decimal, até obter os valores mais próximos de $\sqrt{x}$, antes e depois.

Para o exemplo $\sqrt{18}$, a segunda etapa é registrada na segunda coluna da Tabela 1. Como $(4,2)^2 = 17,64$ e $(4,3)^2 = 18,49$, a raiz aproximada de 18 é um número entre 4,2 e 4,3.

A terceira etapa é a repetição da segunda etapa agora com os centésimos. Podemos aplicar essa etapa quantas vezes quisermos dependendo do grau de precisão exigido. Quando atingirmos os números de casas decimais que forem desejadas, realizamos a subtração para saber qual é o mais próximo.

No exemplo $\sqrt{18}$, temos na terceira coluna da Tabela 1 que $(4,24)^2 = 17,9776$ e $(4,25)^2 = 18,0625$. Realizando a subtração para ver qual é o mais próximo temos:

$$18 - 17,9776 = 0,0224$$

$$18,0625 - 18 = 0,0625.$$

Como 0,0224 é menor que 0,0625, concluímos que 4,24 é uma melhor aproximação com duas casas decimais para raiz quadrada de 18 usando o método das tentativas.

Ainda que consiga um resultado aproximado, foram necessárias 13 operações para conseguir uma aproximação de duas casas decimais.

O ensino de raiz quadrada, normalmente, se inicia no 6° ano do Ensino Fundamental Gabriela Silva (2016, p. 11). Isso ocorre logo após a apresentação dos conceitos de potenciação (base, expoente e potência) e dos números quadrados perfeitos. A radiciação é a operação inversa da potenciação. Apesar da definição simples, os alunos frequentemente enfrentam dificuldades ao lidar com raízes quadradas exatas. Eles muitas vezes acham desafiador associar a raiz quadrada a um número cujo produto por ele mesmo resulta no radicando, expresso como $\sqrt{n} = x \Leftrightarrow x^2 = n,\ x \in \mathbb{R}^+$. Ainda que os alunos consigam fazer esta associação, quando se depara com números relativamente grandes (com mais de 3 algarismos), fica, de certa maneira, difícil encontrar a raiz quadrada, mesmo que seja pelo “chutômetro”.

Um dos métodos mais utilizados para encontrar uma raiz quadrada exata é a decomposição em fatores primos. Este método é muito funcional, pois é possível encontrar uma raiz quadrada de um número relativamente grande. Exemplificando com $\sqrt{2304}$, temos que

$$\sqrt{2304} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^2} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48.$$

Portanto, concluímos que $\sqrt{2304} = 48$ apenas utilizando números primos pequenos, o 2 e o 3. Porém, dependendo da raiz quadrada exata, pode ser exaustivo procurar um número primo para fazer a decomposição. Veja o exemplo:

$$\sqrt{45369} = \sqrt{3^2 \times 71^2} = 3 \times 71 = 213.$$

Neste caso, o número primo 71 está envolvido na fatoração, algo que os alunos podem ter dificuldade em perceber.

Além disso, para justificar a relevância deste estudo, é importante ressaltar que quando os alunos se deparam com raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos, podem encontrar resultados incorretos. Em muitos casos, obtendo como respostas números inteiros (por exemplo, a raiz quadrada de 20 resultando no número 5). Isso ocorre porque as cinco operações básicas estudadas até o momento fornecem respostas que são números inteiros ou decimais.

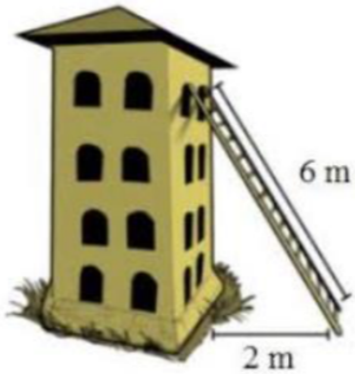
> Apesar da definição simples, o cálculo da raiz quadrada de n pode causar um desconforto nos adolescentes quando x não for um número racional. Ainda mais quando se trata de dar uma solução a um problema prático da vida real do qual se espera como resposta um número natural (ou uma fração dele) (SOUSA, 2013, p. 1).

A aprendizagem do cálculo das raízes quadradas aproximadas é de suma importância, no campo das aplicações, sobretudo em Geometria.

> O entendimento dos métodos de cálculos para encontrar o valor das raízes quadradas possui muita importância, pois vários problemas em linguagem algébrica atual conduzem a soluções onde precisam ser encontrados os valores de raízes, ressaltando, ainda, a sua acuidade na geometria, devido ao efetivo cálculo do lado de um quadrado cujo a área é conhecida (SILVA, A., 2013, p. 11).

Portanto, verifica-se a importância da compreensão dos métodos de cálculos para encontrar o valores das raízes quadradas, visto que muitos problemas envolvendo conteúdos do Ensino Fundamental recaem em encontrar valores de raízes. Dentre esses problemas, podemos citar as equações polinomiais de 2°grau, cálculo da diagonal do quadrado, distância euclidiana, trigonometria e, até mesmo, a localização destes números irracionais na reta real, o que já é previsto em várias habilidades da BNCC. Além disso, a aprendizagem dos métodos de cálculo de raízes quadradas aproximadas dá mais sentido ao aluno nas resoluções. Vejamos um exemplo do cálculo da altura de um prédio. Considere a Figura 1 e calcule a altura do prédio.

Figura 1 – Calculando a altura do prédio usando o Teorema de Pitágoras



Fonte: `http://www.colegionomelini.com.br`

Esse é um exercício clássico que utiliza o Teorema de Pitágoras. Resolvendo-o, temos:

$$2^2 + h^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 32 \Rightarrow h = \sqrt{32}.$$

Desta maneira, $\sqrt{32}$ metros é a resposta correta. No entanto, surge o questionamento sobre como é possível atribuir um significado prático ao cálculo da altura, ao obter $\sqrt{32}$ como resposta. Seria mais interessante ter como resposta um número aproximado de $\sqrt{32}$, que é, aproximadamente, $5,65$.

Além disso, é fundamental o desenvolvimento nos alunos de dois tipos de pensamento: o algébrico e o computacional. Sobre o pensamento algébrico, é importante para os alunos desenvolvê-lo, para melhorar a capacidade de compreensão e o raciocínio lógico, além da "familiarização" com operações matemáticas com as letras (variável e incógnita). O documento da BNCC já prevê a importância de trabalhar o pensamento algébrico.

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e

> simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2018, p. 271).

Além disso, esta dissertação tem como intenção perceber a importância de apresentar aos alunos as características do pensamento algébrico, pois, de acordo com o estudo de (ALMEIDA; CÂMARA, 2017):

> ... acreditamos que o pensar algebricamente é revelado por meio de cinco características, a saber: "estabelecer relações"; "generalizar"; "modelar"; "operar com o desconhecido"; e "construir significado". Além disso, sustentamos que no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacentes a ela, porém, não menos importantes, estão as outras. Portanto, defendemos que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais. (ALMEIDA; CÂMARA, 2017, p. 53)

Ensinar aos alunos a importância dos algoritmos e fluxogramas, para que, possam desenvolver a capacidade de interpretar e modelar situações-problemas, através de fórmulas e equações, é uma das definições de pensamento computacional.

> Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. (BRASIL, 2018, p. 271)

Apesar dos avanços tecnológicos que possibilitam o cálculo da raiz quadrada de qualquer número positivo por meio de calculadoras, seria interessante os alunos aprenderem vários métodos de cálculo de raízes quadradas aproximadas, usando as 4 operações básicas. Essa abordagem pode ser útil tanto para superar as dificuldades nas técnicas de cálculo, quanto para a resolução de situações-problema que resultem em uma raiz quadrada. E, por fim, com o auxílio da calculadora, comparar os resultados e a eficiência do método.

O objetivo geral deste trabalho é apresentar algumas propostas de sequências didáticas cujo tema principal é o cálculo de raízes quadradas aproximadas, através de diversos métodos, como uma forma de facilitar o aprendizado do aluno no desenvolvimento do pensamento algébrico e computacional. Estes métodos irão ajudar a resolver problemas que utilizem raízes quadradas não exatas, como equações quadráticas, Teorema de Pitágoras, entre outros, além do intuito de verificar e corrigir algumas dificuldades de técnicas de cálculo que o aluno possa apresentar.

Além disso, esse trabalho tem como objetivo apresentar alguns métodos de cálculo de aproximações de raízes quadradas, analisando cada um no que diz respeito ao processo matemático e suas respectivas estimativas de erro, além das vantagens e desvantagens.

Assim foi realizada uma pesquisa dos métodos existentes de cálculo de raízes quadradas, seguida por uma análise do motivo pelo qual cada método é funcional (no sentido de que, explicar porque o método faz com que o resultado seja tão aproximado da raiz). Os critérios para a escolha dos métodos apresentados serão o esforço matemático necessário para executar o cálculo (os métodos devem ter menos operações possíveis, a fim de evitar exaustão), além de abordar as habilidades da BNCC que, preferencialmente, estejam no Ensino Fundamental.

Após apresentar os métodos escolhidos, será feita uma análise empírica de estimativa de erro para cada um deles. Isto ajudará a observar a eficiência de cada método, considerando a quantidade de operações realizadas para conseguir tal aproximação. Embora essa quantidade de operações não seja contada, é importante observar esses detalhes em cada método.

Finalizado o estudo sobre os métodos de cálculo de raiz quadrada aproximada, será proposta algumas sequências didáticas para apresentar estes métodos aos alunos. Cada método poderá ser trabalhado com grupos diferentes de alunos e, após uma série de exercícios, os alunos poderão observar a eficiência do método comparando o resultado aproximado do resultado real, utilizando uma calculadora.

Com isso, o resultado esperado das sequências didáticas é que, além da contribuição dos métodos apresentados, elas possam, um dia, ser aplicadas em sala de aula. Isso permitirá que os alunos desenvolvam o raciocínio e a criatividade, ao mesmo tempo em que possibilita a promoção das habilidades da BNCC nos alunos.

No capítulo 2 desta dissertação será apresentado alguns métodos de aproximação de raízes quadradas aproximadas cujo o público-alvo são os alunos do 6° ano ao 9° ano do Ensino Fundamental. Os nomes dos métodos são: O método da secante; o método geométrico; o método do quadrado da soma de dois termos; o método das frações contínuas e o método das médias.

No capítulo 3 teremos a sugestão de algumas propostas de ensino destes métodos, onde cada proposta possui seu público-alvo, seu objetivo, sua justificativa (que é trabalhar as habilidades da BNCC com os alunos), os pré-requisitos, a duração de cada proposta, as metodologias e as avaliações.

No capitulo 4 teremos as considerações finais, com a abordagem de uma estimativa de erro empírica de cada método apresentado, além de mostrar as considerações do uso de cada método. Por fim, será comentado se o objetivo desta dissertação foi atingindo, no que diz respeito à intenção de trabalhar estes métodos na sala de aula.

2 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO DE RAIZ QUADRADA

Neste capítulo, serão apresentados alguns métodos de cálculo de aproximações de raízes quadradas. Para cada método, será fornecida a fórmula e uma explicação que justifique a respectiva aproximação. Por fim, serão discutidas as vantagens e desvantagens de cada método.

Para todos os métodos descritos, realizaremos aproximações para raízes quadradas de números com 1, 2, 3 e 4 algarismos. Além disso, para cada método, será apresentada uma tabela comparativa entre o resultado da aproximação e o resultado obtido por uma calculadora científica. Também será calculada a precisão, que será mensurada da seguinte maneira: considerando a diferença, em módulo, entre o resultado aproximado e o resultado da calculadora, a quantidade de zeros à direita após a vírgula determinará o número de casas decimais de precisão. Além disso, denotaremos as seguintes letras que aparecerão nos métodos a seguir, além de algumas definições:

- n é o número natural que desejo calcular uma raiz quadrada aproximada.
- Q é um número quadrado perfeito que pode ser anterior ou posterior à n. Caso seja necessário utilizar os dois, denotaremos Q_1 e Q_2.
- a é a maior raiz quadrada exata que é menor à $\sqrt{n}$ ou a menor raiz quadrada exata que seja maior que $\sqrt{n}$.

Definição 2.1. Chamaremos de **aproximação por excesso** cujo o número a escolhido seja menor do que $\sqrt{n}$.

Definição 2.2. Chamaremos de **aproximação por falta** cujo o número a escolhido seja maior do que $\sqrt{n}$.

2.1 O MÉTODO DA SECANTE

Este método foi descrito pelo professor Fabiano Gomes Lopes, na Lopes (2018). Ele relatou quem em 1995, quando cursava a antiga 8° série do primeiro grau, descobriu uma forma de obter boas aproximações da raiz quadrada de um número n a partir do quadrado perfeito anterior e posterior a n. Um número quadrado perfeito é um número cujo o radical dele também resulte em um número natural. A ideia do cálculo da aproximação é, dado um número natural n, encontrar os dois números quadrados perfeitos Q_1 e Q_2 de tal forma que Q_1 seja o maior quadrado perfeito menor que n e Q_2 o menor quadrado perfeito maior que n. Dessa maneira $\sqrt{n}$ será aproximadamente igual a

$$\sqrt{Q_1} + \frac{n - Q_1}{Q_2 - Q_1}.$$

Esse método é justificado usando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ e semelhança de triângulos. Observe na Figura 2 que o valor de n é aproximadamente igual à ordenada do ponto E, pertencente ao segmento AD. Chamando de ε a medida de EF, como o caso de semelhança dos triângulos ABE e ACD é AA (ângulo-ângulo), temos

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{n} - \varepsilon - \sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_2} - \sqrt{Q_1}} = \frac{n - Q_1}{Q_2 - Q_1}.$$

Como Q_1 e Q_2 são quadrados perfeitos consecutivos, temos que $\sqrt{Q_2} - \sqrt{Q_1} = 1$ e portanto

$$\sqrt{n} - \varepsilon - \sqrt{Q_1} = \frac{n - Q_1}{Q_2 - Q_1}.$$

O que implica que

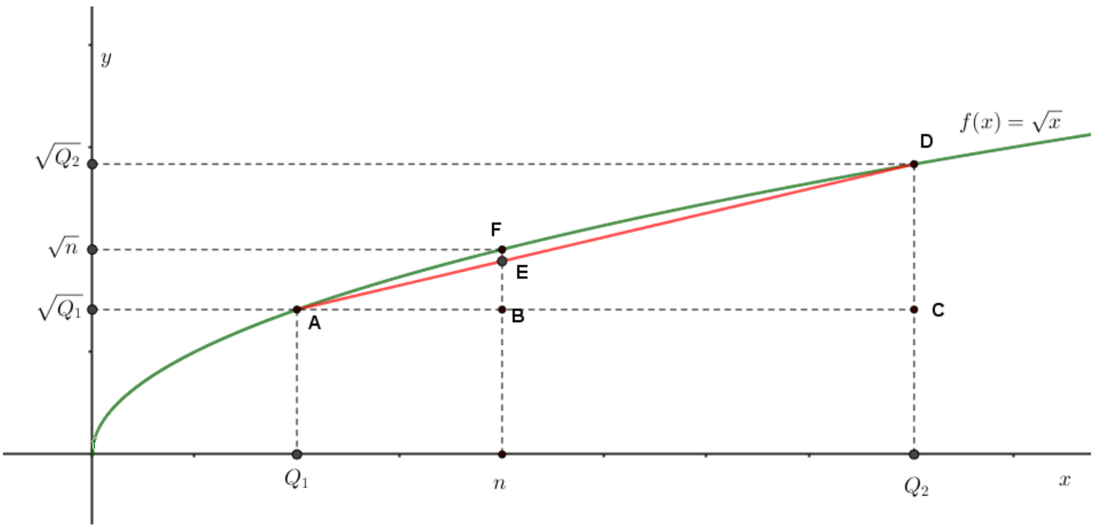
$$\sqrt{n} = \sqrt{Q_1} + \frac{n - Q_1}{Q_2 - Q_1} + \varepsilon.$$

Como ε é pequeno, obtemos a aproximação

$$\sqrt{n} \approx \sqrt{Q_1} + \frac{n - Q_1}{Q_2 - Q_1} \tag{2.1}$$

Observemos que como AD é secante ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, f é uma função crescente côncava para baixo, vem que o valor de ε sempre implicará um erro “por falta” na aproximação da raiz por esse método.

Figura 2 – Interpretação gráfica do método da secante



Fonte: Próprio Autor

Analisemos alguns exemplos:

Exemplo 2.3. Calcule as raízes quadradas aproximadas de 5, 20, 200 e 2022, pelo método da secante.

Para $n = 5$ temos que o maior número quadrado perfeito menor que 5 é $Q_1 = 4$ e o menor número quadrado perfeito maior que 5 é $Q_2 = 9$. Assim, pela aproximação (2.1) do método da secante temos

$$\sqrt{5} \approx \sqrt{4} + \frac{5-4}{9-4} = 2,2.$$

Para $n = 20$ temos que o maior número quadrado perfeito menor que 20 é $Q_1 = 16$ e o menor número quadrado perfeito maior que 20 é $Q_2 = 25$. Assim, pela aproximação (2.1) do método da secante temos

$$\sqrt{20} \approx \sqrt{16} + \frac{20-16}{25-16} = 4,444....$$

Para $n = 200$ temos que o maior número quadrado perfeito menor que 200 é $Q_1 = 196$ e o menor número quadrado perfeito maior que 200 é $Q_2 = 225$. Assim, pela aproximação (2.1) do método da secante temos

$$\sqrt{200} \approx \sqrt{196} + \frac{200-196}{225-196} = 14,13793103.$$

Finalmente, para $n = 2022$ temos que o maior número quadrado perfeito menor que 2022 é $Q_1 = 1936$ e o menor número quadrado perfeito maior que 2022 é $Q_2 = 2025$. Assim, pela aproximação (2.1) do método da secante temos

$$\sqrt{2022} \approx \sqrt{1936} + \frac{2022-1936}{2025-1936} = 44,96629213.$$

A Tabela 2 compara as aproximações das raízes quadradas de 5, 20, 200 e 2022 obtidas com o método da secante com o resultado obtido por uma calculadora.

Tabela 2 – Comparando os resultados do método da secante com os resultados da calculadora.

Número natural n	**Resultado pelo método da secante**	$\sqrt{\mathbf{n}}$	**Diferença**	**Precisão**
5	2,2	2,236067977	0,036067977	1 casa decimal
20	4,4444...	4,472135955	0,027735955	1 casa decimal
200	14,13793103	14,14213562	0,004204594	2 casas decimais
2022	44,96629213	44,96665431	0,000362182	3 casas decimais

Fonte: Próprio autor.

Podemos perceber que a precisão máxima que conseguimos através dos exemplos foi de 3 casas decimais quando calculamos a raiz de 2022, um número de 4 algarismos.

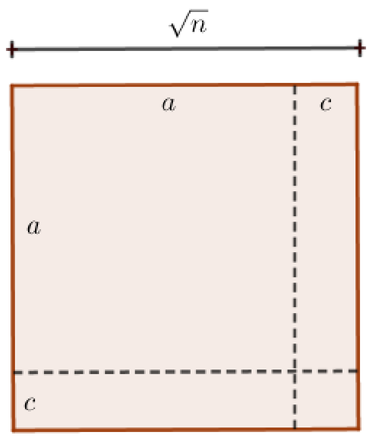
Vantagens: Esse é um método com pouco custo operacional, somente utilizando operações básicas e raízes quadradas exatas, não sendo necessário saber qualquer outro conceito matemático, como potenciação.

Desvantagens: Conforme foi mostrado na Tabela 2, comparando os resultados do método com o resultado real, este método não tem uma precisão muito grande, sobretudo com números relativamente “pequenos”, muitas vezes conseguindo aproximações de apenas 1 casa decimal.

2.2 O MÉTODO GEOMÉTRICO

Segundo Katz (2009, p. 18–19) os mesopotâmios utilizavam o método geométrico para estimar a raiz quadrada de um número n. A ideia geométrica do método é relacionar o cálculo $\sqrt{n}$ à encontrar o lado de um quadrado de área a. Dessa forma pode-se tentar colocar no interior deste quadrado o maior quadrado possível cujo lado seja um valor conhecido a. Veja Figura 3:

Figura 3 – Interpretação geométrica do algoritmo mesopotâmio para encontrar $\sqrt{n}$.



Fonte: Próprio Autor

Seja c o comprimento que é necessário adicionar a a com o objetivo de obter $\sqrt{n}$. Assim

$$\sqrt{n} = a + c, \tag{2.2}$$

e portanto

$$(\sqrt{n})^2 = (a + c)^2 \Rightarrow n = a^2 + 2ac + c^2.$$

Para que a seja uma boa aproximação de $\sqrt{n}$ devemos ter c pequeno. Assim, considerando c pequeno, vamos desconsiderar c^2 e obtemos a seguinte aproximação:

$$n \approx a^2 + 2ac.$$

Logo $c \approx \dfrac{n-a^2}{2a}$. Substituindo em (2.2) temos

$$\sqrt{n} \approx a + \frac{n-a^2}{2a}. \tag{2.3}$$

Como o objetivo é "preencher" o quadrado de lado a até que este tenha o lado $\sqrt{n}$. Consideremos b a diferença entre os quadrados área n e área a^2. Assim

$$b = n - a^2 \Rightarrow n = a^2 + b.$$

Substituindo $b = n - a^2$ em (2.3), temos

$$\sqrt{a^2+b} = \sqrt{n} \approx a + \frac{b}{2a}, \tag{2.4}$$

Portanto, o método geométrico para calcular raízes quadradas é dado pela fórmula (2.4). Analisemos alguns exemplos:

Exemplo 2.4. Calcule as raízes quadradas aproximadas de 5, 20, 200 e 2022 pelo método do geométrico.

Para $n = 5$ podemos escrever $5 = 4 + 1 = 2^2 + 1$. Assim consideremos $a = 2$ e $b = 1$ e usando o método do geométrico temos a aproximação

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} = 2,25.$$

Para $n = 20$ podemos escrever $20 = 16 + 4 = 4^2 + 4$. Assim consideremos $a = 4$ e $b = 4$ e usando o método do geométrico temos a aproximação

$$\sqrt{20} \approx 4 + \frac{4}{2 \cdot 4} = 4,5.$$

Para $n = 200$ podemos escrever $200 = 196 + 4 = 14^2 + 4$. Assim consideremos $a = 14$ e $b = 4$ e usando o método do geométrico temos a aproximação

$$\sqrt{200} \approx 14 + \frac{4}{2 \cdot 14} = 14,1428571428.$$

Para $n = 2022$ podemos escrever $2022 = 1936 + 86 = 44^2 + 86$. Assim consideremos $a = 44$ e $b = 86$ e usando o método do geométrico temos a aproximação

$$\sqrt{2022} \approx 44 + \frac{86}{2 \cdot 44} = 44,9772727272....$$

A Tabela 3 compara os resultados das aproximações encontradas pelo método geométrico com seus respectivos resultados, usando uma calculadora.

Tabela 3 – Comparando os resultados do método geométrico com os resultados da calculadora.

Número natural n	**Resultado pelo método geométrico**	$\sqrt{\mathbf{n}}$	**Diferença**	**Precisão**
5	2,25	2,236067977	0,013932023	1 casa decimal
20	4,5	4,472135955	0,027864045	1 casa decimal
200	14,1428571428	14,14213562	0,000721523	3 casas decimais
2022	44,9772727272...	44,96665431	0,01061841	1 casa decimal

Fonte: Próprio autor.

Vantagens: Assim como o método da secante, este método permite com que sejam necessários poucos cálculos para chegar ao resultado. Outra vantagem é o uso da geometria podendo também ser explorado áreas de quadrado.

Desvantagens: Como vimos nos exemplos, somente a aproximação para $\sqrt{200}$ foi de três casas decimais. Nas demais, a precisão foi de apenas uma casa decimal.

2.3 O MÉTODO DO QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS: UMA VARIAÇÃO DO MÉTODO GEOMÉTRICO

Esse método consiste em utilizar a equação (2.3). A diferença desse método para o método geométrico é que a pode ser escolhido por falta ou excesso. Isto é, a pode ser escolhido de tal forma que a^2 seja o maior quadrado perfeito menor que n, como no método geométrico, mas também de tal forma que a^2 seja o menor quadrado perfeito maior que n.

Exemplo 2.5. Calcule as raízes quadradas aproximadas de 5, 20, 200 e 2022, pela variação do método geométrico.

Vamos utilizar a variação do método geométrico por falta pois por excesso calculamos no exemplo 2.4.

Para $n = 5 = 9 - 4 = 3^2 - 4$ temos $a = 3$ e usando a variação do método do geométrico temos a aproximação

$$\sqrt{5} \approx 3 + \frac{5 - 3^2}{2 \cdot 3} = 2,3333....$$

Para $n = 20 = 25 - 5 = 5^2 - 5$ temos $a = 5$ e usando a variação do método do geométrico temos a aproximação

$$\sqrt{20} \approx 5 + \frac{20 - 5^2}{2 \cdot 5} = 4,5.$$

Para $n = 200 = 225 - 25 = 15^2 - 25$ temos $a = 15$ e usando a variação do método do geométrico temos a aproximação

$$\sqrt{200} \approx 15 + \frac{200 - 15^2}{2 \cdot 15} = 14,1666....$$

Para $n = 2022 = 2025 - 3 = 45^2 - 3$ temos $a = 45$ e usando a variação do método do geométrico temos a aproximação

$$\sqrt{2022} \approx 45 + \frac{2022 - 45^2}{2 \cdot 45} = 44,96666....$$

A Tabela 4 compara os resultados das aproximações encontradas pela variação do método geométrico por falta com seus respectivos resultados reais.

Tabela 4 – Comparando os resultados da variação do método geométrico com os reais.

Número natural n	**Resultado pela variação do método geométrico**	$\sqrt{\mathbf{n}}$	**Diferença**	**Precisão**
5	2,3333...	2,236067977	0,097265355	1 casa decimal
20	4,5	4,472135955	0,027864045	1 casa decimal
200	14,1666	14,14213562	0,024531036	1 casa decimal
2022	44,96666...	44,96665431	0,000012356	4 casas decimais

Fonte: Próprio autor.

2.4 O MÉTODO DAS FRAÇÕES CONTÍNUAS

O método das frações contínuas utiliza noções de produtos notáveis e frações contínuas. Novamente, podemos escrever a raiz quadrada não exata $\sqrt{n}$ como soma de dois números a e k (onde k é a parte decimal da raiz quadrada de n):

$$\sqrt{n} = a + k. \tag{2.5}$$

O que implica que $n = (a + k)^2 = a^2 + 2ak + k^2$.

Neste método, não será eliminado o termo k^2 da Equação (2.5). Colocando k em evidência em (2.5), temos

$$n = a^2 + k(2a + k).$$

O que nos fornece

$$k = \frac{n - a^2}{2a + k}. \tag{2.6}$$

Substituindo o valor de k da Equação (2.6) na própria Equação (2.6), temos:

$$k = \cfrac{n-a^2}{2x + \cfrac{n-a^2}{2a+k}}. \tag{2.7}$$

E assim, podemos continuar sucessivamente, transformando o lado direito da Equação (2.7) em uma fração contínua. Para este método, limitaremos em apenas uma substituição, ignorando a partir daí o valor do k. Substituindo o valor de k obtido em (2.7) em (2.5) temos

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a+k}}. \tag{2.8}$$

Vamos considerar $k = 0$ em (2.8) e obter a aproximação:

$$\sqrt{n} \approx a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a}}. \tag{2.9}$$

Segundo Neri (2017, p. 13), este método foi utilizado pelo matemático italiano Rafael Bombelli (1526 - 1572), realizando a aproximação para $\sqrt{13}$.

Considerando $n = 13 = 9 + 4 = 3^2 + 4$ tomou $a = 3$ em (2.9), temos que:

$$\sqrt{13} \approx 3 + \cfrac{13-3^2}{2.3 + \cfrac{13-3^2}{2.3}} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = 3,6$$

que, comparando ao resultado real, $\sqrt{13} = 3,6055...$, é uma aproximação de duas casas decimais.

Exemplo 2.6. Calcule as raízes quadradas aproximadas de 5, 20, 200 e 2022, pelo método das frações contínuas.

Para $n = 5$ vamos considerar $a = 2$, ou seja, uma aproximação por excesso. Substituindo $n = 5$ e $a = 2$ em (2.9) temos a aproximação

$$\sqrt{5} \approx 2 + \cfrac{5-2^2}{2\cdot 2 + \cfrac{5-2^2}{2\cdot 2}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}} = 2,235294118.$$

Para $n = 20$ vamos considerar $a = 4$, ou seja, uma aproximação por excesso. Substituindo $n = 20$ e $a = 4$ em (2.9) temos a aproximação

$$\sqrt{20} \approx 4 + \cfrac{20-4^2}{2\cdot 4 + \cfrac{20-4^2}{2\cdot 4}} = 4 + \cfrac{4}{8 + \cfrac{4}{8}} = 4,470588235.$$

Para $n = 200$ vamos considerar $a = 14$, ou seja, uma aproximação por excesso. Substituindo $n = 200$ e $a = 14$ em (2.9) temos a aproximação

$$\sqrt{200} \approx 14 + \cfrac{200 - 14^2}{2 \cdot 14 + \cfrac{200 - 14^2}{2 \cdot 14}} = 14 + \cfrac{4}{28 + \cfrac{4}{28}} = 14,14213198.$$

Para $n = 2022$ vamos considerar $a = 45$, ou seja, uma aproximação por falta. Substituindo $n = 2022$ e $a = 45$ em (2.9) temos a aproximação

$$\sqrt{2022} \approx 45 + \cfrac{2022 - 45^2}{2 \cdot 45 + \cfrac{2022 - 45^2}{2 \cdot 45}} = 45 + \cfrac{(-3)}{90 + \cfrac{(-3)}{90}} = 44,96665432.$$

A Tabela 5 compara os resultados das aproximações encontradas no Exemplo 2.6 com seus respectivos resultados obtidos por uma calculadora.

Tabela 5 – Comparando os resultados das frações contínuas com os resultados de uma calculadora.

Número natural n	**Resultado pelo método das frações contínuas**	$\sqrt{\mathbf{n}}$	**Diferença**	**Precisão**
5	2,235294118	2,236067977	0,000773859	3 casas decimais
20	4,470588235	4,472135955	0,001547720	2 casas decimais
200	14,14213198	14,14213562	0,000003644	5 casas decimais
2022	44,96665432	44,96665431	0,00000001	7 casas decimais

Fonte: Próprio autor.

Vantagens: Nos cálculos realizados no Exemplo 2.6, é possível observar que o método consegue aproximações com mais de 2 casas decimais. Veja também Tabela 5.

Desvantagens: Além das operações básicas com números inteiros, este método requer conhecimento de divisões com frações.

2.5 MÉTODOS DAS MÉDIAS

O método das médias utiliza as médias geométrica e aritmética para aproximação de raízes quadradas. Esse método já era conhecido pelo matemático grego Herão de Alexandria (100 d.C.), e é atribuído por alguns a Arquita de Taranto (228-365 a.C.). Entretanto, na primeira metade do século XX descobriu-se que ele já havia sido usado pelos Mesopotâmios há uns 3500 anos. Veja Boyer (1974) para mais detalhes.

Definição 2.7. A média aritmética (MA) de m números $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}$, é definida por:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m}.$$

Definição 2.8. A média geométrica (MG) de m números positivos $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}$, é definida por:

$$MG = \sqrt[m]{x_1 x_2 ... x_m} = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} x_i}.$$

A desigualdade das médias afirma que a média aritmética de m números positivos é maior que ou igual a sua média geométrica e só é igual se os números forem todos iguais. Isto é, se $x_1, x_2, ..., x_m$ são números positivos, então

$$\sqrt[m]{x_1 x_2 ... x_m} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m}.$$

Além disso,

$$\sqrt[m]{x_1 x_2 ... x_m} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m},$$

se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_m$.

Provaremos a desigualdade para o caso $m = 2$. Os demais casos são encontrados em Lima (2012). Sejam x_1 e x_2 números reais positivos, A a média aritmética e G a média geométrica de x_1 e x_2. Temos

$$\begin{aligned} A - G &= \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Assim $A \geq G$ e a igualdade só é válida se $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$, isto é, $x_1 = x_2$, o que prova a desigualdade no caso $m = 2$.

Para o método das médias para cálculo da raiz quadrada aproximada vamos considerar dois números positivos, n e Q, onde o primeiro é o número que estamos procurando a aproximação de sua raiz quadrada e Q o quadrado perfeito mais próximo de n. Pela desigualdade das médias geométrica e aritmética, temos que

$$\sqrt{Qn} \leq \frac{n + Q}{2}.$$

O método das médias para cálculo da raiz quadrada aproximada é portanto

$$\sqrt{n} \approx \frac{n + Q}{2\sqrt{Q}}. \tag{2.10}$$

Exemplo 2.9. Calcule as raízes quadradas aproximadas de 5, 20, 200 e 2022, pelo método da desigualdade das médias.

Para $n = 5$ vamos considerar $Q = 4$. Usando a aproximação (2.10) temos

$$\sqrt{5} \approx \frac{5+4}{2\sqrt{4}} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Para $n = 20$ vamos considerar $Q = 16$. Usando a aproximação (2.10) temos

$$\sqrt{20} \approx \frac{20+16}{2\sqrt{16}} = \frac{36}{8} = 4,5.$$

Para $n = 200$ vamos considerar $Q = 196$. Usando a aproximação (2.10) temos

$$\sqrt{200} \approx \frac{200+196}{2\sqrt{196}} = \frac{396}{28} = 14,14285714.$$

Para $n = 2022$ vamos considerar $Q = 2025$. Usando a aproximação (2.10) temos

$$\sqrt{2022} \approx \frac{2022+2025}{2\sqrt{2025}} = \frac{4047}{90} = 44,9666666....$$

A Tabela 6 compara os resultados das aproximações encontradas no Exemplo 2.9 com seus respectivos resultados obtidos pela calculadora.

Tabela 6 – Comparando os resultados do método da desigualdade das médias com os resultados de uma calculadora.

Número natural n	**Resultado pelo método das médias**	$\sqrt{\mathbf{n}}$	**Diferença**	**Precisão**
5	2,25	2,236067977	0,013932023	1 casa decimal
20	4,5	4,472135955	0,027864045	1 casa decimal
200	14,14285714	14,14213562	0,000721523	3 casas decimais
2022	44,96666667	44,96665431	0,000012357	4 casas decimais

Fonte: Próprio autor.

Vantagens: Nos cálculos realizados no Exemplo 2.9, é possível observar que o método das médias forneceu aproximações com 3 e 4 casas decimais para as raízes aproximadas de 200 e 2022, respectivamente. Veja também Tabela 6.

Desvantagens: Além de conhecimento das operações básicas e de números quadrados perfeitos, o aluno deve estar familiarizado com o cálculo das médias aritmética e geométrica para compreender a validade do método das médias.

Uma vez descrito os métodos de aproximação de raízes quadradas, no capítulo seguinte, iremos apresentar algumas propostas de ensino destes métodos, que serão voltados aos alunos do Ensino Fundamental de 6° ao 9° ano.

3 APROXIMAÇÃO DA RAIZ QUADRADA: ALGUMAS PROPOSTAS DE ENSINO

Após apresentados alguns métodos de cálculo de raízes quadradas aproximadas, vamos propor uma sequência didática que possa abordar várias habilidades da BNCC e também do currículo municipal de Cerquilho, SP (cidade onde o autor deste trabalho leciona), das quais cito:

- **(EF05MA08)** Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

- **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

- **(EFC06MA03C)** Reconhecer números quadrados perfeitos.

- **(EFC06MA03D)** Construir o conceito de radiciação para os números quadrados perfeitos.

- **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

- **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

- **(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

Com base nessas habilidades, propomos alguns planos de aula nos quais cada um utilizará um dos métodos apresentados nesta dissertação.

3.1 PLANO DE AULA 1: ENCONTRANDO RAÍZES QUADRADAS APROXIMADAS UTILIZANDO O MÉTODO DA SECANTE

Público-alvo: Alunos do 6°,7° e 8° ano do Ensino Fundamental.

Objetivo: Espera-se que, ao final das aulas, o aluno seja capaz de localizar os quadrados perfeitos mais próximos do número dado, bem como realizar a divisão de dois números naturais, resultando em um número racional na forma decimal.

Justificativa: Trabalhar as habilidades EFC06MA03C, EF05MA08, EF06MA03 e EF06MA08.

Pré-requisitos: Conhecimento sobre os quadrados perfeitos dos números de 1 até 20, as quatro operações básicas, número decimal resultante da divisão de dois números naturais.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

Metodologia: As aulas serão divididas em 3 etapas: Na 1° etapa, o professor deverá apresentar o método da secante descrito na Seção 2.1 para encontrar raízes quadradas aproximadas usando alguns exemplos. Vamos escolher $\sqrt{80}$ como exemplo a ser trabalhado com os alunos. Neste momento, o professor deve questioná-los quais são os números quadrados perfeitos que estão mais próximos de 80. Nesse momento o professor pode recordar quais são os quadrados perfeitos até 196. Uma vez observado que 80 está entre os quadrados perfeitos 64 e 81, assumimos $Q_1 = 64$ e $Q_2 = 81$ para aplicar o método da secante. Usando a aproximação (2.1) temos

$$\sqrt{80} \approx \sqrt{84} + \frac{80-64}{81-64} \approx 8,941.$$

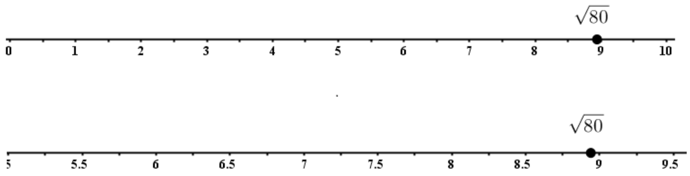
Além disso, para mostrar a funcionalidade do método, o professor pode pedir que os alunos realizem a prova real, elevando o número encontrado ao quadrado, utilizando uma calculadora digital.

Na 2° etapa, o professor pedirá aos alunos que realizem alguns exercícios, para acompanhar e poder sanar algumas dúvidas, principalmente as dificuldades da realização das operações básicas (como a divisão com números de dois algarismos no divisor).

Na 3° etapa, o professor poderá pedir aos alunos que localizem estes números na reta numérica, como uma forma de mostrar que as raízes quadradas pertencem à reta numérica (e não apenas os números inteiros e/ou decimais).

Avaliação: Será avaliado se o aluno será capaz de localizar os quadrados perfeitos mais próximos da raiz quadrada desejada, bem como realizar operações matemáticas que resultem em números decimais, verificando se os alunos conseguem utilizar a vírgula no

Figura 4 – Reta númerica.



Fonte: Próprio autor.

lugar correto. Além disso, é de suma importância que os alunos compreendam que as raízes quadradas pertencem à reta numérica, realizando a localização correta delas.

3.2 PLANO DE AULA 2: PRODUTOS NOTÁVEIS E APROXIMAÇÃO DA RAIZ QUADRADA USANDO O MÉTODO DO QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Público-alvo: 8° e 9° anos do Ensino Fundamental.

Objetivos: Espera-se que, ao final das aulas, o aluno compreenda o conceito do quadrado da soma de dois termos, do ponto de vista algébrico, bem como observar que é possível eliminar o termo quadrático, uma vez que este termo quadrático é um número muito "pequeno", conseguindo tal aproximação, além de revisar as propriedades de uma equação polinomial de 1°grau.

Justificativa: Trabalhar as habilidades EF06MA08, EF05MA08 e EF06MA03.

Pré-requisitos: Equação polinomial de 1° grau, as quatros operações básicas e a potenciação.

Duração: 4 aulas de 50 minutos cada.

Metodologia: As aulas serão divididas em 3 etapas: Na 1° etapa, o professor irá investigar junto com os alunos sobre o que acontece quando eleva ao quadrado um número que está entre 0 e 1, mostrando a eles que este número irá diminuir, com alguns exemplos:

- $(0,2)^2 = 0,04 < 0,2$
- $(0,14)^2 = 0,0196 < 0,14$
- $(0,01)^2 = 0,0001 < 0,01$

Partindo deste princípio, o professor explicará que a raiz quadrada não exata de um número é composto da parte inteira e da parte decimal, a qual pode ser decomposto. Para melhor exemplificar, vamos estimar uma aproximação da $\sqrt{50}$ utilizando o método do quadrado da soma de dois termos. Os alunos devem saber que o número inteiro mais próximo de $\sqrt{50}$ é 7. Logo, temos a seguinte equação:

$$7 + x = \sqrt{50} \quad (x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1)$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(7 + x)^2 = (\sqrt{50})^2 \Rightarrow 49 + 14x + x^2 = 50.$$

Descartando o termo quadrático e solucionando a equação, temos a seguinte aproximação:

$$49 + 14x = 50 \Rightarrow x = \frac{1}{14} \Rightarrow \sqrt{50} \approx 7 + \frac{1}{14} = 7,0714.$$

Além disso, para mostrar a funcionalidade do método, o professor pode pedir que os alunos realizem a prova real, elevando o número encontrado ao quadrado.

Na 2° etapa, o professor pedirá aos alunos que realizem outros exemplos, calculando aproximações de raízes quadradas utilizando o método explicado. Nessa etapa o professor pode sanar dúvidas.

Na 3° etapa, o professor poderá pedir aos alunos que localizem estes números na reta numérica.

Avaliação: Será avaliado se o aluno compreende que uma das utilidades dos produtos notáveis é calcular aproximações de raízes quadradas, utilizando o fato que poderá descartar o termo quadrático por ser um número pequeno. Para isso, o professor poderá pedir alguns exercícios aos alunos, que visa saber se o aluno sabe qual é o quadrado perfeito mais próximo de n, além de verificar se o aluno sabe realizar a propriedade distributiva dos polinômios. Além disso, o professor observará se os alunos saberão realizar as operações matemáticas que resultem em um número decimal, verificando se os alunos saberão utilizar a vírgula no momento correto.

3.3 PLANO DE AULA 3: MÉTODO DAS FRAÇÕES CONTÍNUAS PARA CALCULAR RAÍZES QUADRADAS APROXIMADAS

Público-alvo: 9° ano do Ensino Fundamental.

Objetivos: Espera-se que, ao final das aulas, o aluno seja capaz de resolver expressões nas quais as frações estão "dentro" de outras frações, além das operações básicas.

Justificativa: Trabalhar as habilidades EF06MA08, EF05MA08, EF06MA03, EF07MA11 e EF09MA01.

Pré-requisitos: Os números quadrados perfeitos de 1 a 400, as quatro operações básicas, noções de frações cujo denominadores também sejam frações e o Teorema de Pitágoras.

Duração: 4 aulas de 50 minutos cada.

Metodologia: O professor irá explicar, em detalhes, como utilizar o método de Bombelli exibido na Seção 2.4, para conseguir aproximações de raízes quadradas. Para isso realizará com os alunos vários exemplos de cálculo de raízes quadradas usando o método. Após isso, o professor poderá passar exercícios de fixação para que os alunos pratiquem o uso do método. Nesta hora, o professor deverá acompanhar se os alunos serão capazes de realizar as operações de frações cujo denominador também é uma fração, que é um dos objetivos deste plano de aula.

Como atividade, o professor pode passar aos alunos um exercício de aplicação do Teorema de Pitágoras, (cálculo da altura da árvore, por exemplo) cujo resultado seja uma raiz quadrada não exata, e que o aluno utilize o método para conseguir uma boa aproximação para a resolução do exercício.

Avaliação: Será avaliado se o aluno é capaz de resolver expressões com frações cujo denominador esteja dentro de uma fração, ou seja, verificar se o aluno sabe "inverter"a fração do denominador, transformando-a em uma operação de multiplicação. Além disso, é possível verificar se o aluno consegue resolver uma situação-problema usando o Teorema de Pitágoras com o auxílio do método, inclusive para mostrar ao aluno que o resultado da aproximação, usando o método das frações contínuas, faz sentido na resolução de uma situação-problema.

3.4 PLANO DE AULA 4: ENCONTRAR APROXIMAÇÕES DE RAÍZES QUADRADAS PELO MÉTODO DA DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Público-alvo: 8° e 9° anos do Ensino Fundamental.

Objetivos: Espera-se que, ao final das aulas, o aluno compreenda que existem diferentes tipos de cálculos de médias e que, é possível utilizar esse fato para solucionar vários problemas, sobretudo, o cálculo das aproximações das raízes quadradas.

Justificativa: Trabalhar as habilidades EF06MA08, EF05MA08, EF06MA03 e EF09MA01.

Pré-requisitos: Noções de cálculo das médias aritmética e geométrica, as quatro operações básicas e a potenciação, conhecimento dos números quadrados perfeitos.

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada.

Metodologia: Neste plano de aula, o professor explicará que não existe apenas uma maneira de calcular as médias (pois os alunos, em sua grande maioria, apenas conhecem e utilizam a média aritmética). Diante disso, o professor poderá apresentar ou revisar com os alunos o que é uma média geométrica. Além disso, o professor poderá exemplificar uma aplicação do uso da média geométrica. Em seguida, o professor poderá pedir aos alunos que resolvam alguns exercícios de fixação de cálculo das médias aritmética e geométrica de dois números naturais, com o intuito de mostrar a eles que os resultados das duas médias são próximos, além de mostrar empiricamente que a média geométrica sempre terá um valor menor ou igual que a média aritmética.

Como o plano de aula é voltado para alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, é comum depararmo-nos com problemas cuja resolução envolva raízes quadradas, e um exemplo claro disso são problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras em suas resoluções.

Exemplo 3.1. Uma escada de 6 metros foi colocada em um prédio, cujo distância do prédio até o pé da escada é de 2 metros, conforme Figura 1. Utilizando o teorema de Pitágoras, calcule aproximadamente a altura do prédio.

Resolução: Observando a Figura 1. Pelo Teorema de Pitágoras temos

$$6^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow h = \sqrt{32}$$

Ao encontrar a resposta, $h = \sqrt{32}$, o professor pode questionar os alunos sobre a quantidade que esse número representa. O professor pode fazer perguntas do tipo: Então a medida do prédio é maior que 6? O prédio pode medir menos que 6?. A medida do prédio é maior que 2? Enfim, quanto é $h = \sqrt{32}$ em termos de números decimais? O professor então estimulará os estudantes a utilizar o método de aproximações de raízes quadradas pela desigualdade das médias, para elucidar o problema.

Neste momento, pergunte ao aluno qual é o número quadrado perfeito que mais se aproxima de 32. Em seguida, aplique a fórmula (2.10). Tomando $n = 32$ e $x = 36$, temos:

$$\sqrt{32} \approx \frac{32 + 36}{2\sqrt{36}} = 5,66.$$

Resposta: A altura do prédio é de, aproximadamente, 5,66 metros.

Considerando que $\sqrt{32} \approx 5,656$, podemos concluir que o resultado obtido na aproximação teve um erro menor que 1 centésimo. O que equivale a um erro de 1 centímetro na resolução do problema.

Avaliação: Será avaliado se o aluno consegue identificar os quadrados perfeitos mais próximos da raiz quadrada desejada, bem como realizar as operações matemáticas que resultam em números decimais, verificando se os alunos sabem utilizar a vírgula no lugar adequado. Além disso, é possível promover um debate entre o professor e os alunos sobre as respostas das situações-problema que envolvem raízes quadradas aproximadas, tanto antes quanto depois da aplicação do método.

3.5 PLANO DE AULA 5: ESTIMANDO APROXIMAÇÕES PARA $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ E $\sqrt{5}$ UTILIZANDO O MÉTODO DA SECANTE E NOÇÕES DE RAÍZES QUADRADAS DE FRAÇÕES

Público-alvo: 8° e 9° anos do Ensino Fundamental

Objetivos: Espera-se que, ao final das aulas, o aluno possa utilizar o método da secante para conseguir boas aproximações usando noções das propriedades de radiciação de frações.

Justificativa: Trabalhar as habilidades EF06MA08, EF05MA08 e EF06MA03.

Pré-requisitos: Propriedade das frações, as quatro operações básicas e a potenciação, conhecimento dos números quadrados perfeitos.

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada.

Metodologia: Em um primeiro momento, o professor poderá apresentar aos alunos o método da secante exibido na Seção 2.1, com o objetivo de conseguir boas aproximações para raízes quadradas não exatas. Neste momento, o professor poderá dar uma revisão sobre os números quadrados perfeitos, e ressaltar que estes números serão de grande importância. Tomando como exemplo $\sqrt{2}$, verifica-se que o número 2 está entre os quadrados perfeitos $Q_1 = 1$ e $Q_2 = 4$, logo usando a aproximação 2.1:

$$\sqrt{2} \approx \sqrt{1} + \frac{2-1}{4-1} \approx 1,333.$$

Convenhamos que não é uma boa aproximação para $\sqrt{2}$ (e o professor poderá ressaltar isso). Porém, neste momento, o professor poderá lembrar das propriedades dos radicais de frações para melhorar essa aproximação. Vejamos:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{200}{100}} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{200}}{10}.$$

Logo, o próximo desafio é encontrar uma aproximação para a $\sqrt{200}$ e, depois dividir por 10. Como os quadrados perfeitos mais próximos de 200 são $Q_1 = 196$ e $Q_2 = 225$, temos pela aproximação 2.1:

$$\sqrt{200} \approx \sqrt{196} + \frac{200-196}{225-196} \approx 14,137.$$

Assim:

$$\sqrt{2} \approx \frac{14,137}{10} = 1,4137$$

melhorando a aproximação para uma precisão de 2 casas decimais. Uma vez exemplificado, o professor pode sugerir que os alunos apliquem o método da Seção 2.1 e as operações para estimar aproximações para $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ e, após isso, comparar o resultado encontrado com os resultados obtidos por uma calculadora, a fim de verificar a funcionalidade do método.

Avaliação: Será avaliado se o aluno sabe localizar os quadrados perfeitos mais próximos da raiz quadrada desejada, bem como as operações matemáticas que resultam em um número decimal, verificando se os alunos sabem utilizar a vírgula no local correto.

3.6 PLANO DE AULA 6: CALCULANDO O LADO DO QUADRADO USANDO O MÉTODO GEOMÉTRICO

Público-alvo: 7° ano do Ensino Fundamental

Objetivos: Espera-se que, ao final das aulas, o aluno seja capaz de utilizar o método geométrico 2.2 para estimar a medida dos lados de um quadrado de área conhecida, bem como calcular o seu perímetro.

Justificativa: Trabalhar as habilidades EF06MA08, EF05MA08 e EF06MA03.

Pré-requisitos: As quatro operações básicas e a potenciação, conhecimento dos números quadrados perfeitos, divisão com dividendo menor que divisor.

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada.

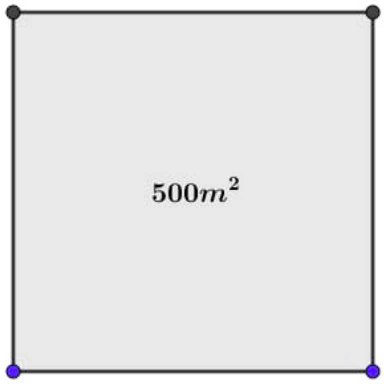
Metodologia: A priori, o professor relembrar quais são os primeiros números quadrados perfeitos, além de lembrar o conceito básico da radiciação:

$$\sqrt{n} = x \Leftrightarrow x^2 = n.$$

Após isso, o professor poderá exemplificar uma situação-problema de cálculo de lado de um quadrado, sabendo da sua área:

Exemplo 3.2. Manoel deseja cercar o seu lote com arame farpado. O lote está em forma de um quadrado, com área de $500m^2$. Quantos metros de cerca o Manoel terá que usar, aproximadamente?

Figura 5 – Área de $500m^2$



Fonte: Próprio autor

Resolução: Observe a Figura 5. Para calcular o lado do quadrado, temos:

$$l^2 = 500 \Rightarrow l = \sqrt{500}.$$

Neste momento, o professor poderá apresentar o método geométrico 2.2 para solucionar o problema dado, explicando que é um método que consegue boas aproximações de raízes quadradas, além de abordar junto com alunos as noções de lado e área de um quadrado. Poderá também perguntar aos alunos se eles sabem qual é o quadrado perfeito que mais se aproxima de 500. É esperado que alguns alunos não saibam imediatamente essa questão. Diante disso, o professor pedirá aos alunos que calcule 20^2; 21^2; 22^2 e 23^2 para que os alunos verifiquem que o quadrado perfeito que mais se aproxima é $22^2 = 484$

Assim, sabendo que $500 = 22^2 + 16$, podemos tomar $a = 22$ e $b = 16$ e aplicar a fórmula 2.4 do método geométrico:

$$\sqrt{500} = \sqrt{22^2 + 16} \approx 22 + \frac{16}{2 \times 22} = 22,36.$$

Na situação-problema, pede-se o perímetro. Logo, a resposta é $4 \times 22,36 = 89,45m$. A resposta real, considerando $\sqrt{500}$ é de $89,44m$, ou seja, considerando que as dimensões do perímetro são em metros, conseguir um erro de 1 centésimo, é uma boa aproximação.

Avaliação: Será avaliado se o aluno sabe localizar os quadrados perfeitos mais próximos da raiz quadrada desejada, bem como as operações matemáticas que resultem em um número decimal, verificando se os alunos sabem utilizar a vírgula no local correto. Além disso, o método permite mostrar aos alunos uma definição do que é um lado de um quadrado e a área de um quadrado, e usaremos esta abordagem para avaliar se os alunos compreenderam esta ideia.

4 Considerações Finais

No presente trabalho escrito, foram apresentados cinco métodos para o cálculo de raízes quadradas aproximadas, a saber: o método da secante, o método geométrico, o método do quadrado da soma de dois termos, o método das frações contínuas e o método da desigualdade das médias. Apesar de não ser o objetivo do trabalho, cada um desses métodos foi submetido a uma análise empírica de sua eficiência. Para isso, utilizamos exemplos práticos a fim de comparar as aproximações obtidas com esses métodos em relação ao valor real da raiz quadrada desejada. Com isso, temos a tabela 7, com os resultados das precisões:

Tabela 7 – Comparando as precisões de cada método com os números utilizados no cálculo da raiz quadrada aproximada.

Número natural	**Método da secante**	**Método geométrico**	**Método do quadrado da soma de dois termos**	**Método das frações contínuas**	**Método das médias**
5	1 casa decimal	1 casa decimal	1 casa decimal	3 casas decimais	1 casa decimal
20	1 casa decimal	1 casa decimal	1 casa decimal	2 casas decimais	1 casa decimal
200	2 casas decimais	3 casas decimais	3 casas decimais	5 casas decimais	3 casas decimais
2022	3 casas decimais	1 casa decimal	4 casas decimais	7 casas decimais	4 casas decimais

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Os resultados mostraram que:

- O método da secante é um procedimento que não exige muitos conceitos matemáticos, e que as operações matemáticas são mais simples, ideal para ser ensinado no 6° e 7° anos. Através desse método, também pode ser explorado o conceito de semelhança de triângulos, visto que o método é justificado pelo gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ e semelhanças de triângulos. Além disso, ao aplicar o método a um número com mais de três algarismos, conseguimos uma aproximação com precisão de três casas decimais. No entanto, para números com apenas um ou dois algarismos, a precisão foi limitada a apenas uma casa decimal.
- O método geométrico também não exige que o aluno tenha um conhecimento aprofundado de conceitos matemáticos, sendo apenas necessário o entendimento

dos números quadrados perfeitos. Isso o torna ideal para ser ensinado a alunos do 7º ano. Entre as diversas aplicações desse método, destacam-se atividades relacionadas ao cálculo de áreas de quadrados. Nos exemplos estudados neste trabalho, a precisão foi de uma casa decimal em três exemplos e de três casas decimais em apenas um exemplo.

- Os métodos do quadrado da soma de dois termos e da desigualdade das médias são métodos que exigem um pouco mais de conhecimento matemático além das operações básicas. No entanto, não são métodos exaustivos.

- O método das frações contínuas é o método que nos exemplos estudados se mostrou com melhor precisão. Porém, é um método que exige muitas operações matemáticas, podendo ser um pouco exaustivo para realizá-las.

Todos os métodos citados oferecem oportunidades para explorar as habilidades estabelecidas na BNCC, o que constitui um dos principais objetivos deste trabalho. Isso permite que eventuais dificuldades dos alunos sejam abordadas e, de certa forma, superadas por meio da resolução de aproximações de raízes quadradas.

Além disso, o trabalho apresenta propostas de sequências didáticas relacionadas a essa temática, proporcionando aos educadores a oportunidade de ensinar o cálculo de raízes quadradas, incluindo a resolução de situações-problema, como as relacionadas ao Teorema de Pitágoras, cálculo de áreas, trigonometria e outros tópicos que resultam em números irracionais.

Por fim, é importante ressaltar que este trabalho é predominantemente teórico, explicando como as habilidades da BNCC podem ser abordadas por meio da aproximação de raízes quadradas e apresentando propostas de ensino. Para futuros trabalhos, planejamos implementar essas propostas em sala de aula, a fim de avaliar as dificuldades dos alunos, a assimilação do conteúdo e o desenvolvimento de habilidades como criatividade, raciocínio lógico e pensamento algébrico e computacional. Isso contribuirá ainda mais para o aprimoramento do ensino e da aprendizagem em Matemática.

Referências

ALMEIDA, Jadilson Ramos de; CÂMARA, Marcelo. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**, v. 6, p. 34–60, 2017.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular BNCC**. BRASIL: [s.n.], 2018.

KATZ, Victor. **A history of mathematics: an introduction**. [S.l.]: Addison Wesley, 2009.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LOPES, Fabiano Gomes. Um método de aproximação para raiz quadrada. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 96, p. 23–23, 2018.

NERI, Albimar Silva. Frações contínuas, equação de Pell e aplicações. Dissertação (Mestrado em Matemática). **Universidade Estadual do Ceará – UECE**, 2017.

RAMPAZZO, Luciano. A raiz quadrada sem tabus. **Revista de Ensino de Ciência**, v. 14, p. 28–32, 1985.

SILVA, Andreilson. O cálculo da raiz quadrada através dos séculos. Dissertação (Mestrado em Matemática). **Universidade Federal da Paraíba – UFPB**, 2013.

SILVA, Gabriela. Algoritmo da raiz quadrada: uma contribuição a somar no seu aprendizado. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Matemática). **Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN**, 2016.

SOUSA, Rubens Oliveira de. Alguns métodos interessantes de extração e aproximação de raiz quadrada. Dissertação (Mestrado em Matemática). **Universidade Federal do Piauí UFPI**, 2013.

ZATTI, Fernanda; AGRANIONIH, Neila Tonin; ENRICONE, Jaqueline Raquel Bianchi. Aprendizagem matemática: Desvendando dificuldade do cálculo dos alunos. **Revista Perspectiva Erechim**, v. 34, p. 115–132, 2010.