UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

TANIA MARIA DOS SANTOS

EXPLORANDO A PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO UM JOGO

SÃO CARLOS - SP

2023

Tania Maria dos Santos

EXPLORANDO A PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO UM JOGO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Matemática, sob orientação da Profª Dra. Grazielle Feliciani Barbosa.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientadora: Profª Dra. Grazielle Feliciani Barbosa

São Carlos - SP

2023

Santos, Tania Maria dos

Explorando a probabilidade no ensino médio: uma sequência didática utilizando um jogo / Tania Maria dos Santos -- 2023.
92f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Grazielle Feliciani Barbosa
Banca Examinadora: Luciene Nogueira Bertoncello, Miriam da Silva Pereira
Bibliografia

1. Probabilidade. 2. Jogos. 3. Avaliação. I. Santos, Tania Maria dos. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Tania Maria dos Santos realizada em 31/10/2023.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Brabosa (UFSCar)

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira (UFPB)

Prof. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Dedico este trabalho a meu pai Antônio (in memorian), a minha mãe Hilda e a todos os meus familiares.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus pela força concedida para superar as dificuldades e pelas oportunidades proporcionadas em minha vida.

À minha mãe, Hilda, expresso minha gratidão pela paciência e compreensão. Às minhas irmãs, Thaís e Andréia, agradeço pelo constante incentivo em prosseguir com os estudos. Aos demais familiares, expresso meus agradecimentos pelo apoio e compreensão.

A minha orientadora e professora Dra. Grazielle Feliciani Barbosa, pela paciência na orientação, por suas correções e pelo incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de sala Silmara, Naraiany, Marcelo e Conrado, por todo incentivo e apoio durante está jornada.

Aos professores do PPGECE, gostaria de expressar minha sincera gratidão pelos valiosos ensinamentos ministrados ao longo do curso. Seus conhecimentos foram fundamentais para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

Aos alunos da Escola Estadual David Campista pela participação fundamental neste trabalho.

A todos que contribuíram para a minha formação, mesmo que tenha esquecido de mencionar aqui, meus sinceros agradecimentos.

O que sabemos não é muito. O que não sabemos é imenso. (Pierre Simon Laplace)

Resumo

A probabilidade é um ramo da matemática que desempenha um papel significativo em nosso cotidiano e é fundamental em diversas áreas do conhecimento. Reconhece-se que uma introdução adequada a esse conteúdo desde os anos iniciais do ensino fundamental é essencial, visto que uma abordagem inadequada pode resultar em dificuldades na trajetória educacional do estudante. Com o objetivo de avaliar a compreensão dos estudantes desde os anos anteriores, optamos por aplicar uma avaliação diagnóstica para orientar nossa abordagem desse conteúdo no ensino médio, identificando as áreas de maior desafio. Posteriormente, adotamos uma estratégia lúdica na qual todos os alunos participam da atividade e utilizamos um jogo para introduzir o conceito de probabilidade no ensino médio. Isso tornou o aprendizado mais envolvente e conferiu significado à experiência de aprendizagem dos alunos. Por último, aplicamos uma avaliação final para medir a eficácia dessa estratégia e verificar seu impacto na compreensão dos alunos. Essa avaliação forneceu dados concretos sobre o progresso dos estudantes, servindo como um indicador valioso para o aprimoramento contínuo de nossa abordagem pedagógica.

Palavras-chave: Probabilidade, Jogos, Avaliação.

Abstract

Probability is a branch of mathematics that plays a significant role in our daily lives and is fundamental in several areas of knowledge. It is recognized that an adequate introduction to this content from the early years of elementary school is essential, as an inadequate approach can result in difficulties in the student's educational trajectory. In order to assess students' understanding from previous years, we chose to apply a diagnostic assessment to guide our approach to this content in high school, identifying the areas of greatest challenge. Subsequently, we adopted a playful strategy in which all students participate in the activity and we use a game to introduce the concept of probability in high school. This made learning more engaging and gave meaning to the students' learning experience. Finally, we apply a final assessment to measure the effectiveness of this strategy and verify its impact on students' understanding. This assessment provided concrete data on student progress, serving as a valuable indicator for the continuous improvement of our pedagogical approach.

Keywords: Probability, Games, Evaluation.

Lista de Figuras

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

A matemática assume uma posição de destaque e relevância inquestionáveis em nossa sociedade contemporânea. Como uma ferramenta, ela estabelece a base para uma variedade de campos do conhecimento, proporcionando estrutura e precisão para a compreensão dos fenômenos naturais, sociais e tecnológicos que moldam nosso mundo. Dessa forma, a matemática não só amplia nossa compreensão, como também incentiva a busca e o avanço em várias áreas do conhecimento. Ela capacita indivíduos curiosos a investigar, analisar e solucionar problemas de forma organizada, contribuindo para o constante enriquecimento do saber humano e a superação dos desafios do nosso tempo.

No entanto, diante deste vasto conhecimento, é importante reconhecer que muitos estudantes enfrentam dificuldades ao aprender matemática, e diversos fatores desempenham um papel fundamental nesse contexto. Além da falta de incentivo por parte da família, ocorrem situações em que o próprio aluno não demonstra interesse ou motivação. O preparo do professor também se mostra indispensável, uma vez que uma abordagem inadequada pode acentuar as dificuldades de aprendizado. Outro aspecto a ser considerado é a ausência de hábito de estudo por parte dos estudantes, o que pode agravar ainda mais as dificuldades, entre outros obstáculos. Por isso, é essencial abordar essas questões de forma abrangente e colaborativa, a fim de criar um ambiente propício ao desenvolvimento bem-sucedido das habilidades matemáticas.

No contexto da probabilidade, é notável que os estudantes enfrentam desafios relacionados a esse conteúdo. Desde os anos iniciais do ensino fundamental, eles são apresentados a esse campo de conhecimento, que continua a se desenvolver ao longo de sua trajetória até o ensino médio. Esse longo percurso permite que os alunos se familiarizem com conceitos e aplicações da probabilidade, construindo uma base consistente que acompanhará ao longo de sua jornada. No entanto, se essa base não for bem trabalhada, pode resultar em dificuldades no ensino médio.

Para garantir que nossos estudantes sejam mais ativos e participativos, é necessário adotar abordagens que os envolvam em atividades cada vez mais dinâmicas. O propósito não é apenas evitar uma aprendizagem passiva, onde os alunos simplesmente absorvem informações, mas sim encorajá-los a se envolverem ativamente na construção do conhecimento.

Nesse cenário, é importante oferecer atividades que os motivem a tomar decisões, resolver problemas e avaliar resultados obtidos. Essa abordagem não apenas aumenta a participação dos estudantes, mas também melhora sua compreensão dos tópicos em estudo, tornando o aprendizado mais eficaz e significativo.

A utilização de materiais diferenciados e adequados desempenha um papel fundamental nesse processo, fornecendo suporte e ambiente para enriquecer as experiências de aprendizado dos estudantes. É essencial que os educadores busquem constantemente maneiras criativas e inovadoras de promover uma aprendizagem ativa e envolvente.

Utilizamos uma sequência didática para explorar o conceito de probabilidade, com o intuito de promover uma aprendizagem mais significativa. Para alcançar esse objetivo, iniciamos com uma avaliação diagnóstica para avaliar o nível de compreensão dos alunos em relação à probabilidade durante o ensino fundamental. Em seguida, prosseguimos o estudo no ensino médio, introduzimos o tema por meio de um jogo e, por fim, aplicamos uma avaliação para verificar a eficácia da aprendizagem. Buscamos não apenas transmitir conhecimentos, mas também estimular os alunos a compreenderem os conceitos probabilísticos de maneira mais profunda e aplicada.

Na introdução que é o primeiro capítulo, abordamos de maneira sucinta os motivos que nos conduziram a escolher o tema da probabilidade, bem como a opção pela utilização de uma sequência didática como meio de aprimorar significativamente o processo de aprendizagem.

No segundo capítulo deste trabalho, apresentamos um breve panorama da evolução histórica da probabilidade, destacando seu desenvolvimento ao longo do tempo. Neste contexto, exploramos a contribuição de alguns matemáticos importantes para o avanço da probabilidade ao longo da história.

No terceiro capítulo, exploramos o uso de jogos para introduzir o ensino da probabilidade. Sendo uma metodologia ativa que proporciona um ambiente de aprendizado mais participativo, os jogos podem favorecer um maior envolvimento dos estudantes no processo de aprendizagem.

No quarto capítulo, exploramos brevemente o uso da avaliação da aprendizagem, examinando sua importância no processo educacional.

No quinto capítulo, abordamos alguns conceitos fundamentais da teoria da probabilidade, tais como experimento aleatório, espaço amostral, evento, probabilidade em um espaço amostral equiprovável e a probabilidade de um evento não ocorrer.

No sexto capítulo, abordamos a sequência didática. Inicialmente, procedemos com uma avaliação diagnóstica para analisar a compreensão do conteúdo de probabilidade no ensino fundamental. Em seguida, empregamos um jogo como uma ferramenta para introduzir o conceito de probabilidade no ensino médio. Por fim, realizamos uma avaliação final para verificar a eficácia do ensino e determinar se os estudantes assimilaram os conteúdos estudados.

No capítulo conclusivo, apresentamos as considerações finais que nortearam a conclusão deste trabalho.

2 Evolução histórica da Teoria da Probabilidade

A Teoria da Probabilidade surgiu na matemática por volta do século XV e está associada aos jogos de azar desde o início da era pré-cristã, tendo sido desenvolvida por Gregos, Babilônios, Egípcios e Romanos. Além disso, também está relacionada à criação dos seguros por comerciantes marítimos na Mesopotâmia. O progresso e crescimento da teoria das probabilidades foram atribuídos a vários matemáticos ao longo da história.

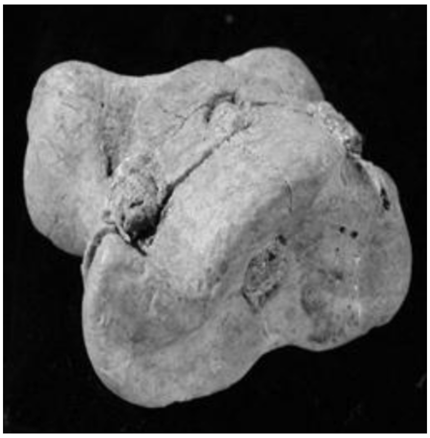
De acordo com Aragão (2009), o cálculo das probabilidades é definido como a matemática da incerteza e do acaso, com o objetivo de formular métodos teóricos abstratos para o tratamento matemático da ocorrência ou não ocorrência de fenômenos aleatórios. Em tempos passados, os povos da Mesopotâmia e do Egito antigo associavam o acaso à vontade dos deuses ou a outros fenômenos naturais.

O acaso desempenha um papel fundamental no estudo da teoria das probabilidades, tendo sido um fator motivador para o desenvolvimento dos seguros e dos jogos de azar. Sendo assim, o acaso é definido como "[...] um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno" (VIALI, 2008, p. 144).

Por exemplo, ao lançar um dado de seis faces, não é possível prever com certeza qual número da face irá aparecer, podendo ser qualquer um dos números de 1 a 6. Segundo Calabria e Cavalari (2013) o acaso está na impossibilidade de prever quais faces serão observadas ao longo de novos lançamentos. Temos outros exemplos relacionados ao acaso como o lançamento de uma moeda, o sorteio de um estado da região norte do país, as previsões meteorológicas, entre outros. Dessa forma, o acaso está associado aos jogos de azar, fenômenos naturais e aos eventos ocorridos no cotidiano.

Os jogos de azar contribuíram para o desenvolvimento do pensamento probabilístico. De de acordo com Viali (2008), as primeiras manifestações probabilísticas ocorreram por meio de jogos de dados, como o Tali (também conhecido como jogo do osso), que era praticado com o astrágalos, um precursor do dado moderno (hexaedro regular). Este objeto era feito a partir de osso de animal, possivelmente de carneiros, e assemelhava-se a um tetraedro irregular, onde as quatro faces não eram idênticas e não apresentavam a mesma frequência de ocorrência.

Figura 1 – O osso astrágalo é um antecessor do dado moderno.



Fonte: Calabria; Cavalari, 2013, p. 5

Calabria e Cavalari (2013) descrevem que esse objeto ancestral do dado possuía quatro lados: côncavo, convexo, plano e sinuoso. Ele atribuía uma pontuação de três ao lado côncavo, quatro para o lado convexo, um e seis aos outros lados, enquanto os números dois e o cinco eram omitidos.

> Há registros de que, por volta do 1200 a.C., um pedaço de osso do calcanhar (astragalus) fosse utilizado formando faces como as de um dado. Mesmo antes disso, por volta de 3500 a.C., no Egito, já havia jogos utilizando ossinhos. Os Romanos também eram apaixonados por jogos de dados e cartas que, durante a Idade Média, foram proibidos pela Igreja Cristã. (LOPES; MEIRELES, 2020, p. 1)

O desenvolvimento do estudo da teoria das probabilidades pode ser atribuído às escolas italianas e francesas. Conforme observado por Viali (2018), nos séculos XV e XVI, matemáticos italianos foram os pioneiros nos cálculos probabilísticos. Eles começaram a formular a ideia de probabilidade, embora ainda não tivessem desenvolvido conceitos e teoremas completamente.

De acordo com Boyer (2012), o italiano Frei Lucca Paccioli (1445-1517) escreveu um livro que abordava problemas de probabilidade, intitulado "Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità" (Resumo da aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade). Esse livro foi responsável por lhe trazer reconhecimento, permitindo que ele se tornasse professor de matemática na corte do duque Ludovico Sforza (1452-1508) em Milão. Um de seus alunos notáveis foi Leonardo da Vinci (1452-1519). Em seu livro, Paccioli estudou um problema que ficou conhecido como "problema dos pontos" (divisão das apostas). Este problema afirmava que se "A e B estão jogando um dado honesto de balla. Eles concordaram em continuar até que um deles vença seis rodadas. O jogo realmente termina quando A venceu cinco e B, três rodadas. Como devem ser divididas as apostas?" (ZINDEL, 2018, p. 7)

Para Paccioli, as apostas deveriam ser divididas na proporção de 5 para 3, ou seja, na proporção exata de partidas vencidas por cada jogador no momento em que o jogo foi interrompido. Como aponta Viali (2018), a solução proposta por Paccioli estava incorreta, mas sua obra exerceu uma influência importante sobre outros estudiosos. O problema que ele estudou assemelhava-se ao que Pascal e Fermat viriam a solucionar posteriormente, sendo considerado o início da teoria da probabilidade. Esse problema chamou a atenção de Niccolò Fontana (1499-1557), mais conhecido como Tartaglia, que publicou sua obra “General Trattato” (Tratado Geral) em 1556, dedicando algumas de suas páginas aos problemas de Pacioli.

O italiano Girolamo Cardano (1501-1576), médico e professor de matemática, deixou um legado significativo por meio de suas obras. Ele escreveu o livro “Liber de Ludo Aleae”, um manual sobre Jogos de Azar, no qual se dedicou a resolver problemas envolvendo jogos de dados e também cita o “problema dos pontos” de Paccioli. Nesse livro segundo Berlinghoff e Gouvêa (2011), Cardano reconheceu um princípio que agora chamamos de Lei dos Grandes Números que é uma simples afirmação de nosso senso comum:

> Se um jogo (ou outra experiência) com n resultados igualmente prováveis for repetido um grande número de vezes, então o número real de vezes que cada resultado efetivamente ocorre tenderá a ser próximo de $\frac{1}{n}$. Quanto mais vezes o jogo for jogado, mais perto o resultado virá a ficar dessa razão. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 212)

Ainda para Berlinghoff e Gouvêa, (2010), se um único dado não viciado for jogado, qualquer uma das seis faces têm igual possibilidade de sair. Por exemplo, temos uma chance em seis de lançar um 5, o que corresponde a uma probabilidade de 1/6. Isso não garante que o 5 vai aparecer uma vez se lançarmos o dado seis vezes, mas a Lei dos Grandes Números estabelece que, ao lançarmos o dado cem, mil ou um milhão de vezes, a frequência com que o número 5 aparece tenderá a se aproximar cada vez mais de 1/6 do total de lançamentos.

Entretanto, conforme apontado por Viali (2008), Cardano foi o pioneiro a introduzir técnicas de combinatória, no cálculo dos casos possíveis de um evento, além de considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. “Durante um período de sua vida, Cardano usou dos jogos de cartas, dados e xadrez para ganhar a vida, o que se tornou um vício” (CALABRIA; CAVALARI, 2013, p.53).

Segundo Boyer (2012), o francês Blaise Pascal (1623-1662), desempenhou um papel significativo na teoria das probabilidades. Era filho de Étiene Pascal (1588-1651), que inicialmente não desejava que seu filho se envolvesse com matemática. No entanto, essa resistência foi em vão, já que o talento de Pascal se manifestou desde muito cedo. Ele teve conhecimento do problema dos pontos por meio de Antoine Gombauld (1610 - 685) mais conhecido como Chevalier de Méré, que era seu amigo e fanático por jogos de dados.

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2011), o Chevalier de Méré, um rico e nobre francês, propôs a Blaise Pascal um problema de jogatina, indagando "como distribuir as apostas em um jogo de azar não terminado". A pergunta de De Méré, conhecida como "Problema dos Pontos" consistia em como dividir as apostas de um jogo não terminado quando os resultados parciais dos jogadores eram conhecidos.

O problema dos pontos motivou a correspondência das sete cartas entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665). Conforme mencionado por Calabria e Cavalari (2013) essas cartas continham reflexões sobre a resolução de problemas associados aos jogos de azar, destacando-se o problema da divisão dos pontos que, "[...] foi resolvido de forma correta, mas diferentemente por cada um deles" (EVES, 2004, p. 365).

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2011), os trabalhos realizados por Pascal e Fermat despertaram o interesse da comunidade científica na Europa, desafiando outros estudiosos a analisar jogos de azar. A ideia central da probabilidade é atribuir uma medida numérica à possibilidade de que algo desconhecido possa ocorrer ou poderia ter ocorrido. A chave para entender tudo isso está na solução de Pascal, que se baseia na ideia de resultados igualmente prováveis.

Pouco tempo depois, conforme mencionado por Eves (2004), o holandês Christiaan Huygens levou uma vida repleta de realizações, desempenhando um papel fundamental na teoria das probabilidades, semelhante a Pascal e Fermat. Em 1657, ele escreveu o primeiro tratado formal sobre a probabilidade, fundamentado na correspondência entre Pascal e Fermat. Abordou diversos problemas instigantes e relevantes, além de introduzir o importante conceito de "esperança matemática".

> Se p indica a probabilidade de que uma pessoa ganhe uma certa soma s, então sp se denomina sua esperança matemática. Huygens mostrou, entre outras coisas, que se p é a probabilidade de uma pessoa ganhar uma soma a e q é a de ganhar uma soma b, então seu ganho esperado é ap + bq. (EVES, 2004, p. 398)

Conforme Eves (2004), Huygens foi o autor do primeiro tratado formal sobre o assunto, que, na época, representou a mais abrangente exposição da teoria das probabilidades até a publicação, em 1713, do livro "Ars Conjectandi" ("A Arte de Conjeturar") de Jakob Bernoulli (1654-1705). Este trabalho, publicado oito anos após a morte de Huygens, apresentava uma reimpressão das suas contribuições.

Nessa obra Bernoulli "[...] percebeu que a hipótese de resultados igualmente prováveis era uma séria limitação quando se discutem duração de vida humana, saúde e coisas análogas, sugerindo em vez disso, uma abordagem baseada em dados estatísticos" (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p.214).

Entretanto, à medida que o tempo passou, a teoria da probabilidade foi se aprimorando ao longo dos anos, graças ao trabalho de matemáticos do século XVIII como Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) e muitos outros.

Não podemos deixar de mencionar o francês Pierre Simon Laplace (1749-1827), renomado matemático e cientista alemão, que desempenhou um papel importante no desenvolvimento da teoria da probabilidade. Laplace é considerado aquele que "[...] encerra um ciclo da história das probabilidades anterior ao séc. XX" (ALMEIDA, 2005, p. 14-15).

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), Laplace deixou um notável legado no campo da probabilidade. Ele não apenas escreveu vários artigos sobre o tema, mas também consolidou seu trabalho e o de outros matemáticos em sua obra intitulada "Teoria Analítica das Probabilidades". Além disso, Laplace produziu um prefácio expositório com 153 páginas, que evitava o uso excessivo de símbolos matemáticos e fórmulas. Este prefácio foi publicado como um livro separado sob o título "Ensaio Filosófico sobre Probabilidades", no qual Laplace defendia a aplicabilidade da probabilidade matemática em diversas áreas.

> A contribuição é tão forte que alguns aspectos "clássicos" do conceito de probabilidade tendem a ficar associados ao seu nome. É o caso do conceito de equipossibilidade (princípio da indiferença) na medida em que Laplace definiu a probabilidade como sendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos igualmente possíveis. (ALMEIDA, 2005, p. 14-15)

Enfim o desenvolvimento da probabilidade trouxe benefícios significativos para a sociedade e "[...] é algo surpreendente, que os matemáticos tenham sido capazes de desenvolver uma ciência (a teoria matemática das probabilidades) que estabelece leis racionais para reger situações determinadas puramente pelo azar" (EVES, 2004, p. 394).

3 O uso de jogos na sala de aula

A utilização de jogos na sala de aula é uma abordagem metodológica ativa que coloca o estudante como o protagonista do seu próprio processo de aprendizado. Essa estratégia tem demonstrado um impacto significativo na melhoria do ensino da matemática. Além disso, os jogos proporcionam um ambiente seguro no qual os estudantes podem experimentar, cometer erros e aprender com eles, sem o receio de fracassar.

Para Moran (2019, p.7) metodologia ativa são "alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta". Ao enfatizar o papel do estudante como agente central de seu próprio conhecimento, a metodologia ativa pode contribuir significativamente para uma educação mais participativa, contextualizada e centrada no aprendizado do aluno.

Segundo Mill (2021), a metodologia ativa busca inverter a lógica tradicional de ensino-aprendizagem, substituindo a posição passiva do estudante, marcada pela recepção de conhecimento, pela posição de estudante protagonista de seu aprendizado. Isso significa que os estudantes são incentivados a participar ativamente das atividades, explorar conceitos e problemas de maneira autônoma, ao invés de receber informações passivamente.

> [...] a inserção dos jogos no contexto escolar aparece como uma possibilidade altamente significativa no processo de ensino-aprendizagem, por meio da qual, ao mesmo tempo em que se aplica a ideia de aprender brincando, gerando interesse e prazer contribui-se para o desenvolvimento cognitivo, afetivo e social dos alunos. (RIBEIRO, 2009, p. 19)

Os jogos aplicados nas aulas de matemática desafiam os estudantes a pensarem de forma estratégica, a tomarem decisões e resolver problemas matemáticos de maneira ativa e ainda podem favorecer o "[...] desenvolvimento da linguagem, criatividade e raciocínio dedutivo, exigidos na escolha de uma jogada e na argumentação necessária durante a troca de informações" (BORIN, 2004, p. 8), além de auxiliar na aprendizagem de conceitos matemáticos que muitas vezes passam despercebidos pelo estudante em uma aula, em que o professor apresenta o conteúdo através de demonstrações de propriedades, exercícios de fixação e de aplicação.

Ao se inserir um jogo na sala de aula "[...] o aluno constrói seu conhecimento de maneira ativa e dinâmica e os sujeitos envolvidos estão geralmente mais propícios à ajuda mútua e à análise dos erros e dos acertos, proporcionando uma reflexão em profundidade sobre os conceitos que estão sendo discutidos" (APRESENTAÇÃO; TEIXEIRA, 2014, p. 304).

Se bem trabalhados, os jogos podem tornar as aulas mais atrativas, fazendo com que os alunos se tornem participantes da construção do seu conhecimento. Ou seja, a maneira como o conteúdo é abordado com os jogos pode contribuir para uma aprendizagem significativa para o aluno. Cabe ao professor escolher jogos que estejam alinhados aos conteúdos e objetivos curriculares, contribuindo com o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes.

"A atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral" (BORIN, 2004, p. 8). Segundo Borin (2004) quando os jogos são direcionados de maneira adequada, eles proporcionam um valor significativo aos alunos e desempenham um papel fundamental no aprimoramento das habilidades cognitivas essenciais, como raciocínio, atenção e concentração. Essas habilidades são fundamentais para a aprendizagem, o que ressalta a ideia de que os jogos não apenas envolvem os alunos, mas também contribuem para o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais que vão além do simples conhecimento dos conceitos matemáticos.

No entanto, é importante ressaltar que os jogos devem ser utilizados como uma ferramenta complementar ao ensino tradicional de forma equilibrada e estruturada, não como um substituto completo. Nesse sentido o papel do professor é fundamental para orientar e facilitar as atividades de jogo, garantindo que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados.

Além disso, os jogos, podem enriquecer consideravelmente as aulas de matemática, proporcionando uma abordagem prática e envolvente para o aprendizado. Portanto, é de suma importância que os professores desenvolvam um planejamento adequado, incorporando os jogos no currículo, de modo a alinhar essa estratégia aos objetivos educacionais estabelecidos. Dessa forma, os jogos não apenas promovem a participação ativa dos alunos, mas também garantem que o conteúdo seja assimilado de maneira eficaz e duradoura.

4 Um pouco sobre a avaliação escolar

A avaliação desempenha um papel significativo no processo educacional ao verificar se os estudantes assimilaram o conteúdo. Por meio da avaliação, os educadores conseguem medir o nível de conhecimento e compreensão que os alunos adquiriram em relação aos objetivos educacionais estabelecidos. Assim sendo, a avaliação "[...] deverá ser assumida como um instrumento de compreensão do estágio de aprendizagem em que se encontra o aluno, tendo em vista tomar decisões suficientes e satisfatórias para que possa avançar no seu processo de aprendizagem" (LUCKESI, 2002, p.81).

Dessa forma, a avaliação não apenas permite determinar se os estudantes compreenderam o conteúdo, mas também fornece informações valiosas que podem ser usadas para melhorar o ensino. Com base nesses resultados, é possível identificar as áreas onde os estudantes têm mais dificuldades e ajustar a abordagem de ensino para atender às necessidades individuais de cada estudante. Quando os alunos têm ciência de que serão avaliados, isso nem sempre representa um estímulo adicional para se envolverem no processo de aprendizagem ou buscarem uma compreensão mais profunda dos tópicos.

Conforme destacado por Hadji (1994), o objetivo da avaliação escolar é o de contribuir para a aprendizagem, tanto dos estudantes quanto dos professores. A importância da avaliação no contexto escolar, quando realizada com eficácia, torna-se uma ferramenta vital para melhoria tanto do processo de ensino quanto da aquisição do conhecimento.

Dentro do contexto da educação matemática, a avaliação concebida de maneira isolada, sem levar em conta os processos de ensino e aprendizagem desenvolvidos, é considerada insuficiente. Isso ocorre porque a avaliação não deve ser meramente um evento independente, mas sim uma parte essencial e interligada do panorama educacional.

Ao considerarmos o processo de aprendizagem, é fundamental não limitar a avaliação a um único momento em que apenas notas são atribuídas. A avaliação deve ser vista como um processo contínuo que se estende ao longo do tempo.

Frequentemente, a avaliação é associada à realização de provas mensais ou bimestrais, sendo muitas vezes o único instrumento utilizado. Essas avaliações têm como foco quantificar o conhecimento dos alunos, resultando na atribuição de uma nota final. Contudo, é essencial reconhecer que essa abordagem tende a enfatizar aspectos quantitativos no processo avaliativo, caracterizando o que é conhecido como avaliação somativa. Para melhorar o processo de avaliação, é importante considerar abordagens que não apenas quantifiquem, mas também analisem qualitativamente o progresso dos alunos ao longo do tempo, promovendo uma compreensão mais abrangente de seu aprendizado.

A avaliação somativa se revela inadequada quando o interesse do professor não vai além da mera atribuição de notas e classificação dos alunos. No entanto, considerando que a proposta do Ensino Médio esteja relacionada à construção de conhecimentos, desenvolvimento de habilidades, atitudes e valores, de acordo com o conjunto de aprendizagens mínimas estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) é importante que a avaliação esteja integrada ao trabalho pedagógico, em consonância com os objetivos estabelecidos pelo professor.

Durante o percurso de sua formação e conclusão, os alunos enfrentam avaliações de caráter somativo, como exames de ampla abrangência. Essa forma de avaliação será uma constante ao longo da trajetória educacional do estudante e, portanto, deve estar presente nos contextos educacionais. No entanto, essa presença não deve ser isolada, mas sim integrada aos demais tipos de avaliação.

Já a avaliação formativa é uma abordagem que busca fornecer informações ao professor para acompanhar o progresso dos alunos e adaptar suas práticas pedagógicas de acordo com as necessidades individuais, visando a superação de dificuldades e o avanço no aprendizado. Ela vai além da simples atribuição de notas e requer que o professor aprimore sua abordagem pedagógica. A integração entre avaliações formativas e somativas é essencial para contribuir efetivamente para a aprendizagem dos estudantes, e estratégias como a avaliação diagnóstica podem ser empregadas para fortalecer ainda mais o processo de aprendizado.

Conforme Castillo Arredondo (2013), a avaliação diagnóstica busca compreender as características individuais dos alunos, o que se revela fundamental para que o docente possa estruturar suas práticas de ensino em concordância com a realidade da sala de aula. Isso requer começar a partir do conhecimento prévio e das habilidades já adquiridas pelos estudantes, ao invés de se basear em um aluno ideal que nem sempre corresponde à realidade.

Por fim, os instrumentos de avaliação escolhidos pelo professor devem estar perfeitamente alinhados com os objetivos educacionais de forma coerentes e com as estratégias metodológicas adotadas. Isso garante uma abordagem apropriada e eficaz, permitindo que a avaliação não meça somente o progresso do aluno, mas também atue como uma ferramenta integrada ao processo de ensino, enriquecendo a compreensão mútua entre educador e educando.

5 Conceitos básicos de probabilidade

Neste capítulo vamos abordar alguns conceitos básicos importantes para o estudo da probabilidade em sala de aula.

5.1 Experimento aleatório

Segundo Andrade (2020), experimento aleatório depende exclusivamente do acaso, ou seja, é todo experimento (ou fenômeno) que repetido várias vezes sob condições idênticas, apresentam resultados imprevisíveis.

Apresentam as seguintes características:

- Pode ser repetido várias vezes nas mesmas condições.

- O conjunto de todos os resultados possíveis é conhecido.

- Não se pode prever o resultado exato.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado ou uma moeda.

2. Sorteio de um número em uma urna.

3. Resultado de um jogo de loteria.

4. Retirada, sem ver, de uma carta de baralho comum.

5.2 Espaço Amostral

O espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e pode ser indicado, pela letra grega Ω (lê-se: ômega).

Podemos classificar o espaço amostral em discreto e contínuo:

- Discreto: Quando o conjunto é finito ou infinito enumerável, ou seja, quando é possível estabelecer uma ordem e realizar a enumeração dos elementos desse conjunto.

Exemplos:

1. Ao lançarmos um dado de 6 faces, o espaço amostral é o conjunto finito:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Ao lançarmos uma moeda até que a primeira ocorrência seja coroa, o espaço amostral é o conjunto infinito enumerável (cara: C; coroa: K):

$\Omega = \{(K), (C, K), (C, C, K), (C, C, C, K), ...\}$

- Contínuo: quando o conjunto é infinito não enumerável, ou seja, quando não é possível estabelecer enumeração. É o que acontece com intervalos dos números reais.

Exemplo:

Ao sortearmos um número real entre 1 e 2, o espaço amostral é o conjunto infinito não enumerável: $\Omega =]1,\ 2[$.

5.3 Evento

Evento ou acontecimento é subconjunto de um espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Indicamos um evento (ou acontecimento) por uma letra maiúscula do alfabeto.

Exemplos:

Ao lançarmos um dado de 6 faces, o espaço amostral é dado pelo número de pontos da face voltada para cima, ou seja, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Alguns eventos que podemos citar em relação ao espaço amostral são:

- Ocorrência de números de pontos menores do que 4:

A $= \{1, 2, 3\}$.

- Ocorrência de números de pontos ímpares:

B $= \{1, 3, 5\}$.

- Ocorrência de número de pontos maiores do que 1:

C $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$

A ocorrência desse evento é muito provável, o que não quer dizer que ele vai acontecer sempre, mas sim com maior frequência.

- Ocorrência de um número de pontos maior do que 5:

D $= \{6\}$.

É pouco provável a ocorrência desse evento. Quando o evento é um conjunto unitário, dizemos que é simples ou elementar.

- Ocorrência de um número de pontos menor que 7:

E $= \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A ocorrência desse evento é certa, pois qualquer número de pontos do espaço amostral é menor do que 7. Dizemos que um evento é certo quando o espaço amostral é igual a ele. Nesse caso, Ω = E.

- Ocorrência de um número de pontos maior do que 6: $F = \emptyset$.

A ocorrência desse evento é impossível, pois qualquer número de pontos do espaço amostral é menor ou igual a 6. Nesse caso, F é vazio e o evento é impossível.

5.4 Probabilidade em um espaço amostral equiprovável

Seja um evento A de um espaço amostral Ω finito. A probabilidade P(A) de o evento A ocorrer é razão entre o número de elementos de A, indicando por n(A), pelo número de elementos de Ω, indicado por $n(\Omega)$, isto é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

No caso de um evento A ser simples, n(A) = 1, temos:

$$P(A) = \frac{1}{n(\Omega)}$$

A razão $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ só é válida se todos os eventos elementares associados ao espaço amostral Ω tiveram a mesma chance de ocorrer. Nesse caso, chamamos esses eventos de equiprováveis e o espaço amostral Ω de espaço amostral equiprovável. No caso do lançamento de um dado honesto, a possibilidade de uma face qualquer ocorrer é igual para cada uma das outras faces.

Como A é um evento qualquer no espaço amostral Ω, o conjunto vazio está contido em A, que por sua vez está contido em Ω, ou simbolicamente, $\emptyset \subset A \subset \Omega$. Desse modo, $n(\emptyset) \leq n(A) \leq n(\Omega)$.

Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(\Omega)$, com $n(\Omega) > 0$, temos:

$$\frac{n(\emptyset)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer um evento A varia de 0 a 1, isto é, de 0% a 100%.

De modo geral:

Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$ ou $0\% \leq P(A) \leq 100\%$.

Cabe destacar os dois casos extremos, ou seja quando P(A) é igual a 0 ou 1.

- Se um evento A é certo, ou seja, $A = \Omega$ então $P(A) = \dfrac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$.

- Se um evento A é impossível, ou seja, $A = \emptyset$, então $P(A) = \dfrac{n(\emptyset)}{n(\Omega)} = 0$.

5.5 Probabilidade de um evento não ocorrer

Dado um evento A de um espaço amostral equiprovável Ω , finito e não vazio, denominamos eventos complementar de A em relação a Ω, indicado por $\overline{A}$, o evento formado apenas pelos elementos que pertence a Ω e que não pertencem a A, ou seja, $\overline{A} = \Omega - A$.

Se por exemplo, no lançamento simultâneo de dois dados perfeitos distinguíveis, qual é a probabilidade de não sair soma 5?

Neste caso, podemos representar o espaço amostral por:

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,5),(6,6)\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$

Seja A o evento "sair soma 5":

$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \Rightarrow n(A) = 4$

Podemos escrever a probabilidade de sair soma 5 como:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

Assim, a probabilidade de não sair soma 5 é:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} = 88{,}9\%$

6 Metodologia para criação da sequência didática

Vamos descrever aqui as etapas deste trabalho, que vão desde a elaboração até a implementação de uma sequência didática utilizando um jogo para introduzir o estudo da probabilidade nas turmas do 2° ano do ensino médio. Seguimos um processo cuidadoso, que abrange várias etapas, com o objetivo de garantir uma abordagem eficaz e envolvente para o ensino de probabilidade.

6.1 Local e público onde foi desenvolvida a sequência didática

A sequência didática foi desenvolvida na Escola Estadual David Campista, localizada na rua Mato Grosso, número 110, no centro da cidade de Poços de Caldas, situada no sul de Minas Gerais. Fundada em 22 de março de 1922, a escola completou em março de 2022, cem anos de fundação e tradição em educação na cidade.

Figura 2 – A escola em que foi realizada a sequência didática.

Fonte: Elaborada pela autora.

Atualmente, a escola possui 846 alunos matriculados e distribuídos nos períodos da manhã (7:10 às 12:30), tarde (13:30 às 18:20) e noite (19:00 às 22:30). O ensino médio conta com 696 alunos distribuídos nos três períodos, enquanto no ensino fundamental, do 6° ao 9° ano, há 122 alunos matriculados no período da tarde e 28 alunos do 9° ano integral. Além disso, a escola conta com 60 professores e 40 servidores incluindo Assistente Técnico de Educação (ATB) e Auxiliares de Serviços de Educação Básica (ASBs), supervisão e direção.

Devido à sua localização privilegiada no centro da cidade, a escola Estadual David Campista tem como público-alvo não apenas os alunos residentes na região central, mas também de todos os bairros da cidade.

A escola possui uma boa estrutura física, oferecendo aos alunos e professores diversos espaços para atividades educacionais e recreativas. Essas instalações incluem: biblioteca, laboratório de informática, laboratório de ciências, amplo pátio, sala de vídeo, dezessete salas de aula, quadra esportiva, cozinha, refeitório, direção, secretária e sala de professores.

As atividades descritas aqui foram desenvolvidas em duas turmas do 2° ano do ensino médio, no período da manhã. As turmas selecionadas foram a 205, que chamamos de "turma A", com 24 alunos, e a 206, que chamamos de "turma B", também composta por 24 alunos, totalizando 48 alunos com idades entre 16 e 18 anos.

Essas turmas foram selecionadas para participar da sequência didática devido às suas dificuldades em matemática e também por ser uma parte importante do currículo da rede estadual. O objetivo principal dessa iniciativa foi de melhorar o aprendizado das turmas, introduzindo uma abordagem inovadora e motivadora para os estudantes.

6.2 A elaboração da avaliação diagnóstica

Antes de começarmos a explorar o conceito de probabilidade com essas turmas, realizamos uma avaliação diagnóstica para investigar as possíveis dificuldades que os alunos possam enfrentar em relação a esse tópico, com base no que aprenderam no ensino fundamental. A partir dos resultados obtidos nessa avaliação, podemos direcionar o ensino de probabilidade no ensino médio de maneira mais precisa e adequada às necessidades dos estudantes. Isso nos permitirá abordar os pontos específicos em que os alunos demonstram dificuldades, garantido uma aprendizagem mais efetiva.

Dessa forma, a investigação realizada por meio da avaliação diagnóstica nas turmas A e B do 2° ano do ensino médio, teve como objetivo identificar as competências e habilidades matemáticas que não foram alcançadas em anos anteriores do ensino fundamental. Como destaca Haydt (2007), é preciso averiguar o nível de conhecimento adquirido pelos alunos e saber o quanto ele está apto para novas aprendizagens.

Conforme a BNCC (2018), competência é vista como uma forma de estimular o conhecimento. Ela se define como "[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana" (BNCC, 2008, p.8). Essa abordagem abrangente da competência enfatiza a necessidade de ir além do domínio de conteúdo específicos, incorporando também aspectos cognitivos, sociais e emocionais na formação dos alunos. Essa visão da competência destaca a importância de preparar os alunos para enfrentar desafios complexos e diversificados ao longo de suas vidas.

Durante a elaboração desta avaliação diagnóstica, foi realizado um levantamento da unidade temática de probabilidade, levando em consideração as habilidades já trabalhadas nos anos finais do ensino fundamental, com objetivo de "[...] levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos" (BNCC, 2008, p. 298). Essa abordagem permitiu a criação de uma avaliação mais alinhada com o desenvolvimento dos estudantes, considerando seus conhecimentos anteriores em probabilidade, e assim, dar continuidade ao processo de aprendizagem matemática.

A investigação da aprendizagem dos alunos por meio da avaliação diagnóstica nas turmas foi fundamental para identificar a estratégia mais adequada para se iniciar o estudo da probabilidade, contribuindo assim para a melhoria do aprendizado dos estudantes. A partir dos resultados obtidos, foi possível identificar as dificuldades específicas dos alunos, permitindo um planejamento mais direcionado. Essa abordagem individualizada permitiu que cada estudante recebesse a atenção necessária para superar as suas dificuldades e alcançar um progresso significativo em seu aprendizado.

> Assumir a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação implica colocar-se em uma postura de investigação, o que exige, por parte do professor, o reconhecimento da existência de uma multiplicidade de caminhos percorridos pelos estudantes, a admissão de que, tal como eles, está em constante processo de elaboração de conhecimento (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2022, p. 75).

As questões selecionadas para a elaboração desta avaliação diagnóstica foram retiradas de livros didáticos do ensino fundamental, num total de dez questões. Com essa amostra será possível fazer uma análise mais detalhada das turmas estudadas, buscando estratégias para dar continuidade ao estudo na probabilidade no ensino médio. Na (BNCC, 2018), os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exigem maior reflexão e abstração.

Observa-se que, desde os anos iniciais do ensino fundamental, o estudo das noções de probabilidade, conforme estabelecido pela (BNCC, 2018), tem como objetivo promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Inicialmente, o trabalho com probabilidade concentra-se no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, permitindo aos alunos a compreensão de que existem eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis.

Nos anos finais do ensino fundamental, a (BNCC, 2018) prevê que o estudo da probabilidade seja ampliado e aprofundado. Isso ocorre por meio de atividades nas quais os alunos realizam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica.

Dessa forma, a finalidade da avaliação diagnóstica foi verificar o conhecimento adquirido pelos estudantes ao longo de sua jornada no ensino fundamental em relação ao estudo de probabilidade, a fim de estabelecer uma sequência didática que forneça uma base consistente para dar continuidade a esse conteúdo no ensino médio.

6.2.1 A análise dos resultados da avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica aplicada teve o objetivo de investigar o nível de aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo de probabilidade, levando em consideração tanto os conhecimentos adquiridos em anos anteriores quanto a possibilidade de nunca terem estudado esse conteúdo.

Figura 3 – Os estudantes de uma das turmas participaram da avaliação diagnóstica.

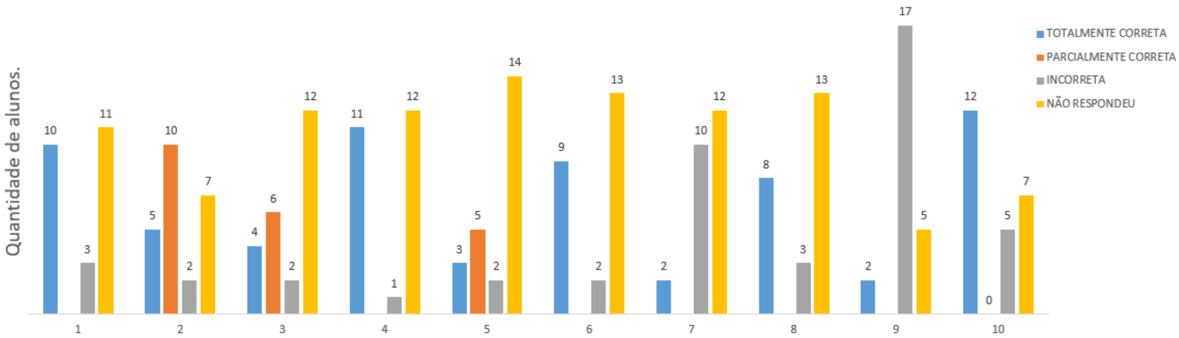
Fonte: Elaborada pela autora.

As questões foram avaliadas de acordo com os seguintes critérios: "totalmente correta" para os estudantes que responderam corretamente toda à questão, "parcialmente correta" para quem acertou uma parte da questão, "incorreta" para os que erraram a questão inteira e "não respondeu" para aqueles que não tentaram responder ou não possuíam conhecimento suficiente para fazê-lo.

Ao realizarmos uma análise mais minuciosa da turma A, constatamos que havia um total de vinte e quatro alunos presentes durante a realização da avaliação diagnóstica. Os resultados revelaram uma variedade de desempenhos entre os alunos. Muitos deixaram várias questões sem resposta, indicando a necessidade de melhorias no aprendizado da probabilidade. Por outro lado, alguns demonstraram um bom conhecimento do conteúdo.

Além disso, houve aqueles que responderam de forma parcial, revelando um entendimento básico, mas com espaço para aprimoramentos. Por fim, observamos que algumas questões apresentaram um grau de dificuldade, levando alguns alunos a cometerem erros em apenas algumas delas. Isso sugere um entendimento geral, mas aponta para áreas específicas que requerem revisão.

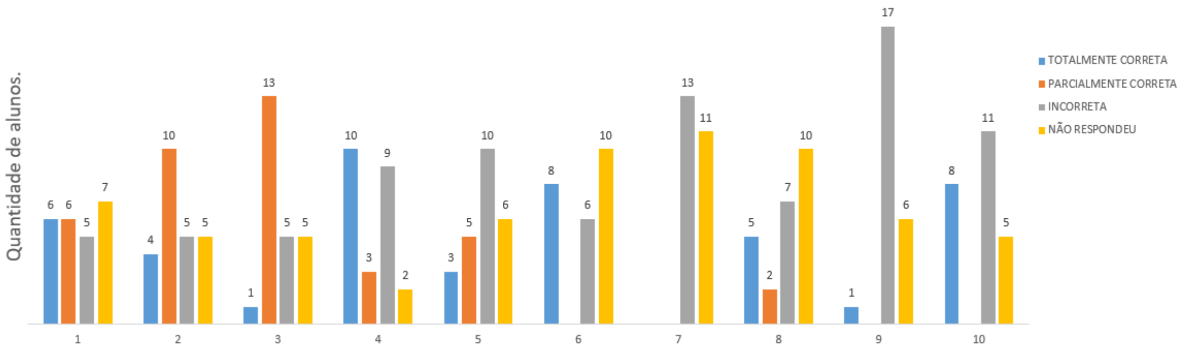
Figura 4 – Resultado da avaliação diagnóstica da turma A.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na turma B, a pesquisa também foi realizada com vinte quatro alunos, e os resultados obtidos foram um pouco diferentes em relação a outra sala. Ao analisarmos mais detalhadamente o desempenho dessa turma, fica evidente que os estudantes encontraram muitas dificuldades na resolução dos problemas. Como consequência, observou-se um número significativo de questões incorretas, além de alunos que optaram por não responder. Outros estudantes conseguiram resolver parcialmente, apoiando-se em vagas lembranças da probabilidade. Alguns estudantes conseguiram resolver as questões de forma correta, enquanto outros o fizeram parcialmente, com base em lembranças vagas do conteúdo de probabilidade.

Figura 5 – Resultado da avaliação diagnóstica da turma B.



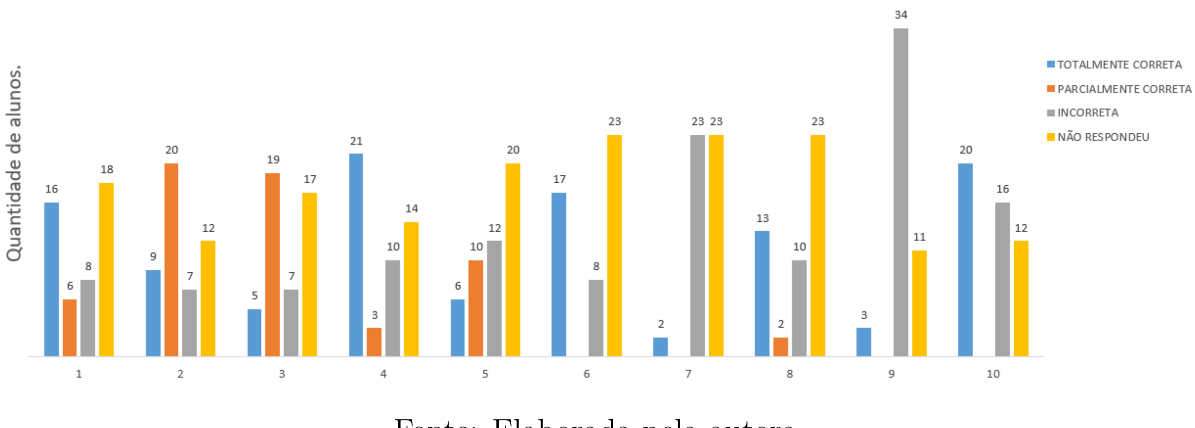
Fonte: Elaborada pela autora.

Ainda, observamos que a pandemia de COVID-19 causou uma defasagem no ensino da matemática, refletindo-se nos resultados das avaliações. A suspensão das aulas presenciais tanto nas escolas públicas quanto privadas, levou à implementação das aulas remotas, através das plataformas digitais, uma alternativa diante do contexto da crise sanitária gerada pela pandemia em todo o mundo.

Neste sentido, as ferramentas digitais revelaram-se ser um importante instrumento que facilitou a efetivação do direito à educação dos alunos durante a pandemia. No entanto, essa nova realidade de aulas online trouxe consequências impactantes para o ensino da matemática, agravando ainda mais a desigualdade no acesso às tecnologias e prejudicando significativamente uma parcela dos estudantes que não tinham condições de acompanhar as aulas. A falta de acesso às aulas e a ausência de uma estrutura organizada para o estudo no ensino remoto foram fatores determinantes nesse cenário.

A ausência de organização nos estudos remotos trouxe consigo consequências graves para o ensino da matemática, refletindo-se tanto nas aulas presenciais quanto em qualquer avaliação realizada. Neste contexto desafiador, é necessário que o professor empreenda esforços no sentido de identificar e implementar estratégias eficazes. Essas estratégias podem contribuir para a resolução da lacuna educacional gerada em decorrência da pandemia de Covid-19. Através dessa atuação proativa e direcionada, poderá ser assegurado que os estudantes recuperem o ritmo adequado de aprendizado e prossigam em sua jornada de forma efetiva.

Figura 6 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B.



Fonte: Elaborada pela autora.

Ao analisarmos as duas turmas em conjunto, compreendendo um total de quarenta e oito alunos, podemos observar que, de maneira geral, os estudantes enfrentaram dificuldades na resolução de questões. Muitos alunos optaram por não tentar resolver algumas questões, o que sugere uma falha em sua compreensão do assunto. Essas dificuldades foram amplamente atribuídas à falta de aprendizado prévio em anos anteriores, destacando a importância de fortalecer os fundamentos conceituais da probabilidade.

Os percentuais de acertos e erros indicam que muitos estudantes enfrentaram dificuldades em compreender e aplicar corretamente os conceitos aprendidos anteriormente sobre a probabilidade. Essa constatação ressalta a importância de reforçar o ensino desses conceitos e fornecer suporte adicional aos alunos para que possam desenvolver suas habilidades nessa área específica.

A seguir, são apresentadas as questões selecionadas para a avaliação diagnóstica, extraídas de livros didáticos do ensino fundamental. Com base nesses dados, realizamos uma análise mais detalhada das turmas A e B, apresentando os resultados em termos percentuais. O objetivo é identificar a melhor estratégia para iniciar o estudo da probabilidade, considerando o desempenho dos alunos nas questões propostas.

6.2.2 As questões analisadas da avaliação diagnóstica

Após a análise minuciosa da avaliação diagnóstica, foi possível observar que os estudantes encontraram questões desafiadoras. É notável que a maioria dos alunos enfrentou dificuldades significativas ao tentar resolvê-las corretamente, o que aponta para a necessidade de um aprofundamento dos conceitos abordados.

Essa observação destaca a importância de uma abordagem eficaz que ofereça explicações claras, juntamente com exemplos práticos, para auxiliar os alunos a compreender melhor as questões. No contexto específico da probabilidade, é fundamental identificar as partes que geram mais dificuldades e fornecer um suporte adicional para os alunos, permitindo que eles desenvolvam suas habilidades e superem os desafios apresentados nas avaliações.

Além disso, é fundamental criar um ambiente propício para incentivar uma aprendizagem mais ativa e participativa, o que implica envolver os estudantes em diversas atividades práticas que estimulem não apenas a absorção de conhecimento, mas também o desenvolvimento do pensamento crítico. Ao adotar uma abordagem mais criteriosa e abrangente no planejamento, é viável não somente elevar a qualidade do aprendizado, mas também melhorar a capacidade dos alunos de compreender, analisar e resolver desafios de maneira eficaz.

Aqui estão as questões que foram abordadas na avaliação diagnóstica respondida pelas duas turmas A e B, oferecendo uma análise abrangente do desempenho dos estudantes. Optamos por comentar algumas questões devido à semelhança entre elas.

1. Uma urna contém 2 bolas amarelas, 4 bolas azuis e 3 bolas vermelhas. Ao retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser azul? E vermelha?

Nesta questão, é fundamental que os estudantes compreendam o conceito de probabilidade e sua fórmula associada, a qual envolve a relação entre o número de resultados favoráveis a um evento e o número total de resultados possíveis dentro do espaço amostral.

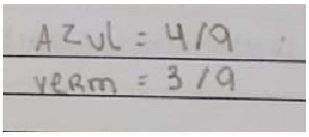
Tabela 1 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 1.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
16	6	8	18
33%	12%	17%	38%

Fonte: Elaborada pela autora.

O objetivo desta atividade é que os alunos agrupem as bolas amarelas, azuis e vermelhas para construir o espaço amostral. Depois, eles devem calcular a probabilidade de eventos específicos, como “obter uma bola azul” e “obter uma bola vermelha”. Esses cálculos são realizados através da aplicação da razão entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados possíveis.

Figura 7 – No exemplo o aluno desenvolveu a questão.



Fonte: Elaborada pela autora.

2. No lançamento de um dado honesto, qual é a probabilidade de:

a) sair a face com número ímpar;

b) não sair a face com número 4;

Nesta atividade, os alunos são desafiados a calcular a probabilidade de ocorrência dos eventos “sair número ímpar” no item a e “não sair o número 4” no lançamento de um dado, no item b. Foi uma questão na qual os estudantes enfrentaram dificuldades em identificar corretamente as faces do dado e em concluir a atividade integralmente.

Tabela 2 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 2.

Totalmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Não respondeu
9	20	7	12
19%	42%	14%	25%

Fonte: Elaborada pela autora.

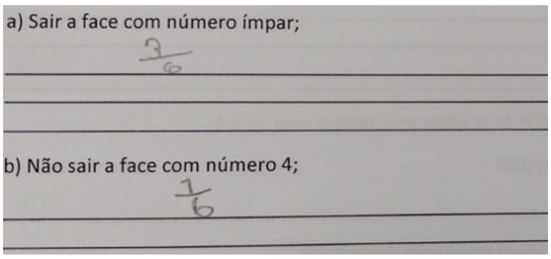
Dos pesquisados, apenas 19% dos estudantes responderam corretamente à questão, o que indica que uma parcela dos estudantes possui um bom entendimento do conceito de probabilidade e conseguiu calcular as probabilidades solicitadas.

Por outro lado, 42% dos estudantes responderam parcialmente à questão, indicando que podem ter acertado uma das probabilidades, mas cometeram erros ao responder a outra questão. Isso mostra que esse grupo possui um conhecimento intermediário em probabilidade, conseguindo acertar parcialmente a questão, mas ainda enfrentando desafios na resolução completa do problema.

Apenas 14% dos estudantes não conseguiram responder corretamente à questão, o que sugere que provavelmente enfrentaram dificuldades com o conceito de probabilidade ou com o cálculo das probabilidades específicas para cada item da questão.

Enquanto isso, 25% dos alunos optaram por não responder à questão. A ausência de respostas pode indicar uma falta de confiança ou interesse na realização de cálculos de probabilidade, ou talvez os estudantes não tenham compreendido completamente a questão.

Figura 8 – No exemplo, o estudante acertou a fração do item “a” e em “b” respondeu incorretamente.



Fonte: Elaborada pela autora.

Ao concluir esta atividade, observa-se que os alunos não desenvolveram plenamente suas habilidades para resolver problemas simples de probabilidade. Isso fica evidente quando um estudante não exclui o número 4 como parte do evento de não sair uma face com esse valor.

3. Num avião viajam 20 brasileiros, 10 japoneses, 8 italianos e 3 espanhóis. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele ser:

a) espanhol

b) norte-americano

Na atividade proposta, nosso objetivo é avaliar a capacidade dos alunos em determinar o espaço amostral, que envolve somar todos os viajantes do avião, e, em seguida, calcular a probabilidade de um passageiro ser espanhol no item "a" e a probabilidade de ser norte-americano no item "b".

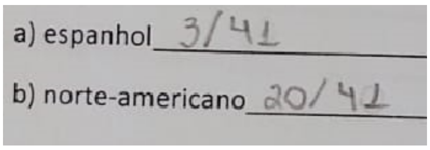
Tabela 3 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 3.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
5	19	7	17
10%	40%	15%	35%

Fonte: Elaborada pela autora.

Nesta questão, vários alunos enfrentaram consideráveis desafios ao realizar a atividade, uma vez que muitos não conseguiram montar adequadamente o espaço amostral. Além disso, alguns alunos eliminaram erroneamente os espanhóis do espaço amostral.

Figura 9 – No exemplo, o estudante acertou a questão "a", mas errou a questão "b".



Fonte: Elaborada pela autora.

4. Em um estojo, há 6 canetas azuis e 4 vermelhas. Qual é a probabilidade de retirarmos desse estojo ao acaso:

a) uma caneta azul

b) uma caneta vermelha

Nesta atividade, os alunos deveriam demonstrar compreensão sobre o cálculo de probabilidade, realizando o cálculo da razão entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável.

Tabela 4 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 4.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
21	3	10	14
44%	6%	21%	29%

Fonte: Elaborada pela autora.

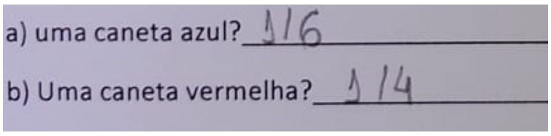
Entre os alunos pesquisados, somente 44% responderam corretamente à questão por completo. Isso sugere que os estudantes compreenderam os conceitos de probabilidade e conseguiram calcular com precisão as probabilidades de retirar cada tipo de caneta.

Um total de 6% dos alunos acertou parcialmente a questão, indicando que provavelmente responderam corretamente a uma das partes (como a letra "a" ou "b"), mas cometeram erros ao responder à outra parte da questão.

Dos 21% que responderam incorretamente, cometeram erros nos cálculos ou entenderam erroneamente os dados fornecidos na questão, resultando em respostas incorretas.

Enquanto 29% dos alunos não responderam, é possível que tenham enfrentado dificuldades na interpretação da questão, na aplicação dos conceitos de probabilidade ou que não souberam como iniciar o cálculo.

Figura 10 – No exemplo, o estudante demonstrou não ter compreendido o que foi solicitado.



Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse contexto, os estudantes enfrentaram consideráveis dificuldades de interpretação e, como resultado, não conseguiram concluí-la completamente. A falta de compreensão do que estava sendo solicitado, devido ao desconhecimento dos conceitos de probabilidade, representou um dos principais obstáculos enfrentados pelos alunos.

5. Imagine que vinte pedaços de papel são numerados de 1 a 20. Se um desses papéis for sorteado, calcule a probabilidade de ser retirado:

a) um número primo

b) um número maior do que 8

Nesse caso, vinte pedaços de papel são numerados de 1 a 20 e um desses papéis é sorteados. Em seguida, estudantes calculam a probabilidade de sair um número primo na letra “a” e, em seguida, um número maior do que 8 na letra “b”.

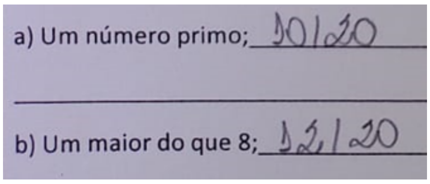
Tabela 5 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 5.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
6	10	12	20
12%	21%	25%	42%

Fonte: Elaborada pela autora.

Uma dificuldade observada entre os estudantes foi que muitos deles não se lembravam do conceito de número primo e tiveram dificuldades em identificar números maiores do que 8, pois alguns não tinham certeza se o 8 deveria ser incluído na contagem.

Figura 11 – Um exemplo é o de um estudante que não conseguiu calcular a probabilidade de retirar um número primo, mas acertou a probabilidade de sair um número maior que 8.



Fonte: Elaborada pela autora.

6. Para obter verbas para a formatura do 9° ano, a equipe de Rose rifou uma bicicleta. A rifa tinha 100 números e Rose comprou 4 deles. Qual a chance de Rose ganhar a bicicleta?

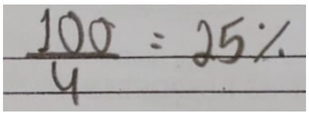
Neste exercício, o estudante deveria calcular a probabilidade de Rose ganhar a bicicleta após comprar 4 números de um total de 100 números em uma rifa, e em seguida, simplificar a fração resultante. Observou-se que uma considerável parte dos pesquisados encontrou dificuldades ao resolver essa questão.

Tabela 6 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 6.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
17	0	8	23
35%	0%	17%	48%

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 12 – O estudante não conseguiu calcular a probabilidade porque trocou a ordem da fração.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados obtidos revelaram que o exercício apresentou um desafio significativo para a maioria dos participantes, evidenciando a necessidade de um melhor entendimento do tema abordado, especialmente em relação aos conceitos de probabilidade essenciais para a sua resolução.

7. Qual é a probabilidade de sair soma 6 no lançamento de dois dados?

Para solucionar este exercício, os alunos devem considerar o evento de obter uma soma igual a seis ao lançar dois dados. O espaço amostral do lançamento de dois dados é composto por 36 elementos, uma vez que cada dado tem seis faces numeradas de 1 a 6, e as combinações possíveis podem ser representadas aos pares ordenados. O evento de obter soma igual a seis pode ser representado da forma $\mathrm{A} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Há um total de 5 combinações possíveis que satisfazem esse evento e para encontrar a probabilidade os alunos devem calcular a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de elementos do espaço amostral.

Tabela 7 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 7.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
2	0	23	23
4%	0%	48%	48%

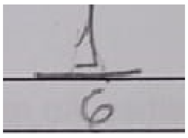
Fonte: Elaborada pela autora.

É interessante observar que apenas 4% dos estudantes acertaram a questão completa, o que sugere que apenas alguns deles compreenderam os conceitos de probabilidade e conseguiram calcular com precisão as probabilidades.

Por outro lado, 48% dos alunos cometeram erros, possivelmente devido a cálculos incorretos, a uma compreensão equivocada do lançamento de dois dados ou a uma falta de entendimento do problema.

É notável que 48% dos estudantes optaram por não realizar a atividade, o que sugere que os alunos podem ter encontrado dificuldades em calcular corretamente a probabilidade de obter uma soma de 6, ou talvez não souberam como proceder para resolver o problema.

Figura 13 – No exemplo, o aluno não conseguiu calcular a probabilidade corretamente.



Fonte: Elaborada pela autora.

8. A professora vai sortear ao acaso, um aluno entre os 30 da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala, qual é a probabilidade de ser sorteada uma menina? E de ser sorteado um menino?

Tabela 8 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 8.

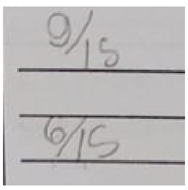
Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
13	2	10	23
27%	4%	21%	48%

Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse exercício o estudante deveria inicialmente determinar a probabilidade de uma menina ser selecionada, o que pode ser calculado dividindo o número de meninas (18) pelo total de alunos na sala (30). Em seguida deve-se repetir o mesmo procedimento para o cálculo do número de meninos.

É evidente que uma parcela significativa dos participantes não tinha conhecimento suficiente para resolver a questão corretamente. Além disso, mesmo entre aqueles que tentaram resolver, muitos não conseguiram concluir a atividade adequadamente, especialmente no que diz respeito à simplificação de frações e ao cálculo de frações e porcentagens.

Figura 14 – O estudante respondeu corretamente à questão de probabilidade.



Fonte: Elaborada pela autora.

9. No lançamento de duas moedas, a probabilidade de se obter pelo menos uma cara é:

a) 50% b) 100% c) 25% d) 75% e) 33%

Nesta questão, era necessário descrever o espaço amostral do lançamento de duas moedas onde chamamos K de coroa e C de cara. O espaço amostral, neste caso, é dado por $\{(C,C),(C,K),(K,K),(K,C)\}$, que representa as possíveis combinações dos resultados dos lançamentos de duas moedas. Em seguida, encontrar o evento de obter pelo menos uma cara. Os eventos que satisfazem essa condição são "obter pelo menos uma cara":

A $= \{(C,C),(C,K),(K,C)\}$

A probabilidade deve ser dada pelo número de casos possíveis sobre o número de casos favoráveis.

Tabela 9 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 9.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
3	0	34	11
6%	0%	71%	23%

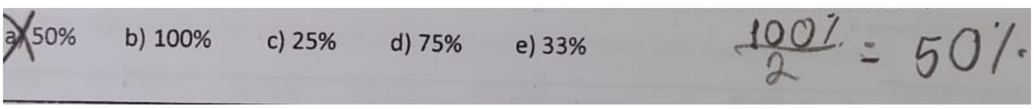
Fonte: Elaborada pela autora.

Apenas 6% dos participantes responderam corretamente à questão, o que sugere que esses estudantes possuem conhecimento dos conceitos de probabilidade e foram capazes de calcular com precisão a probabilidade de obter pelo menos uma cara no lançamento de duas moedas.

Uma grande maioria dos alunos, 71% respondeu incorretamente, podendo ter feito cálculos equivocados ou não ter compreendido corretamente os resultados possíveis no lançamento de duas moedas.

Enquanto que, 23% optaram por não responder à questão. A falta de resposta pode indicar dificuldades na interpretação da questão ou na aplicação dos conceitos de probabilidade.

Figura 15 – O aluno não compreendeu corretamente o conceito de probabilidade, o que o levou ao erro.



Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos observar que muitos alunos encontraram dificuldades para desenvolver a atividade, pois não conseguiram visualizar o lançamento de duas moedas adequadamente. O conceito de espaço amostral e a representação das possíveis combinações podem ter sido desafiadoras para eles.

10. Ao lançar dois dados diferentes, o número total de resultados possíveis é:

a) 6 b) 12 c) 18 d) 36

Descreva esses resultados:

Era necessário descrever o espaço amostral da questão ao lançar dois dados diferentes e, em seguida, determinar as combinações possíveis que poderiam ser obtidas a partir desse lançamento de dois dados.

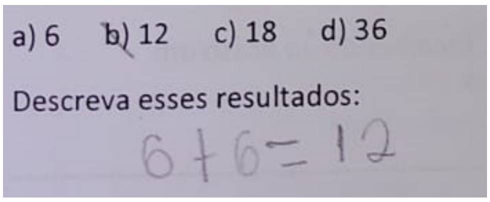
Tabela 10 – Resultado da avaliação diagnóstica das turmas A e B: Questão 10.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
20	0	16	12
42%	0%	33%	25%

Fonte: Elaborada pela autora.

Uma observação relevante nessa questão é que muitos estudantes incorretamente acreditaram que era suficiente somar as faces dos dois dados, obtendo um valor fixo de 12. No entanto, ao lançar dois dados, cada um com seis faces numeradas de 1 a 6, o espaço amostral é composto por todas as possíveis combinações dessas faces, resultando em 36 somas possíveis.

Figura 16 – No exemplo, o aluno cometeu um erro ao somar as faces dos dois dados, o que resultou em uma resposta incorreta.



Fonte: Elaboração do autor.

6.3 A sequência didática proposta

Após uma análise das questões apresentadas na avaliação diagnóstica, tomamos a decisão de oferecer uma aula diferenciada às duas turmas do 2° ano, como um primeiro passo antes de nos aprofundarmos no estudo da probabilidade no ensino médio. Essa decisão demonstra nosso compromisso em abordar as dificuldades identificadas na avaliação diagnóstica e em preparar os alunos para este conteúdo. Com essa abordagem mais cuidadosa, espera-se que os estudantes se sintam mais confiantes e preparados para enfrentar o desafio representado pela probabilidade. Garantir um aprendizado eficaz dos conceitos relacionados à probabilidade torna-se, assim, essencial.

Para introduzir o conceito de probabilidade, criamos um jogo interativo que visa proporcionar uma experiência lúdica e ao mesmo tempo didática, permitindo aos alunos compreenderem os fundamentos da probabilidade de forma concreta. Dessa maneira, garantimos não apenas um aprendizado eficaz dos conceitos relacionados à probabilidade, mas também uma experiência educacional enriquecedora para os estudantes.

Nosso compromisso é garantir que todos os alunos tenham sucesso na compreensão da probabilidade e estejam preparados para os desafios futuros em suas jornadas educacionais. Isso significa que estamos dedicados a ajudar cada aluno a entender bem a probabilidade, de modo que eles se sintam confiantes ao enfrentar situações mais complexas que possam vir a encontrar em suas vidas futuras.

6.4 O jogo desenvolvido

Desenvolvemos um jogo chamado “Desafio do Baú Misterioso” com o objetivo de aprimorar o ensino da probabilidade. Este jogo foi criado para proporcionar aos alunos uma experiência educativa e interativa, onde eles podem aplicar conceitos de probabilidade de forma prática e divertida.

Figura 17 – Caixa de MDF equipada com suporte, cadeado e chaves.

Fonte: Elaborada pela autora.

Para a realização desta atividade, adquirimos duas caixas de MDF e inserimos um suporte especialmente projetado para acomodar o cadeado. Colocamos em cada caixa um cadeado, acompanhado de sua respectiva chave, em cada suporte, juntamente com algumas chaves extras que não têm a capacidade de abrir o baú.

Com marcações cuidadosas, identificamos as caixas como "A" e "B", o que acrescentou uma organização essencial à sequência didática proposta.

Figura 18 – Caixas de MDF equipadas com suporte e identificadas como "A" e "B".

Fonte: Elaborada pela autora.

Um toque adicional que enriqueceu ainda mais essa dinâmica foi a incorporação de balas dentro de cada caixa, destinadas a serem compartilhadas entre os alunos participantes. Essa abordagem não apenas tornou a atividade mais atrativa, mas também incentivou a colaboração e a interação entre os estudantes.

Figura 19 – Nas duas turmas, foram acrescentadas balas nos baús como incentivo para os estudantes.

Fonte: Elaborada pela autora.

A estratégia de rotular as caixas com letras distintas tornou a dinâmica mais clara e organizada para todos os participantes. Ao abrir cada caixa e encontrar as balas, os alunos puderam desfrutar de um momento de confraternização, reforçando ainda mais a experiência positiva proporcionada pelo jogo.

No "Desafio do Baú Misterioso", os alunos são divididos em dois grupos (A e B) e enfrentam uma competição dividida em duas fases. Na 1ª fase, eles começam respondendo a perguntas desafiadoras de probabilidade em uma corrida para testar seus conhecimentos e habilidades práticas.

Em seguida, na 2ª fase, ambos os grupos têm a oportunidade de abrir o "Baú Misterioso" seguindo algumas regras, mas somente um deles conseguirá desvendar o mistério e alcançar a vitória. Este jogo combina aprendizado, estratégia e sorte, oferecendo uma experiência educativa e emocionante para os alunos enquanto trabalham em equipe para alcançar o sucesso.

Agora, com os materiais organizados, vamos detalhar as regras e fases do jogo.

6.4.1 1ª fase do jogo: Desafio de Conhecimentos

Os alunos são divididos em dois grupos o Grupo A e o Grupo B, e devem seguir as seguintes etapas:

1ª etapa: Escolher par ou ímpar e lançamento de dados.

- Os grupos escolhem entre "par" ou "ímpar" para dar início ao jogo.

- Em seguida, os grupos lançam simultaneamente um dado e observam a soma.

- Se a soma dos dados for par, o grupo que escolheu "par" inicia o jogo. Caso contrário, se a soma dos dados for ímpar, o grupo que optou por "ímpar" começa o jogo.

2ª etapa: Respostas às Perguntas.

- Na segunda etapa, cada integrante dos grupos receberá um número para o sorteio de quem irá responder às questões, e aqueles que acertarem não serão chamados novamente para responder.

- Os alunos sorteados de cada grupo terão a oportunidade de responder a uma pergunta formulada pelo professor.

- Todas as perguntas devem ser feitas a todos os integrantes dos grupos.

- As perguntas abordam conhecimentos de probabilidade, o que proporcionou uma ampla variedade de desafios aos participantes, testando sua compreensão e habilidades nessa área.

- Quando um aluno sorteado responde corretamente à pergunta, a vez passa para o segundo grupo, que terá a chance de responder. O estudante que respondeu corretamente deve aguardar até que todos os membros de seu grupo tenham tido a oportunidade de responder.

- Se um aluno não conseguir responder corretamente à pergunta ou não souber a resposta, o professor irá explicar como resolvê-la no quadro. Nesse momento, o estudante será movido para a última posição ao lado de seu grupo. Após isso, o outro grupo receberá uma nova questão, e o ciclo de perguntas e respostas continuará.

- A conquista da vitória pelo grupo se concretiza quando todos os seus membros respondem corretamente às perguntas da rodada. Caso contrário, aqueles que não responderam ou não sabiam terão a oportunidade de responder novamente até que um dos grupos tenha todos os participantes respondido corretamente.

3ª etapa: Objetivo e Competição.

- O objetivo é que, ao final desta fase do jogo, o grupo em que todos os membros tenham respondido corretamente à questão seja declarado vencedor.

- O grupo que não vencer deve observar atentamente a quantidade de estudantes que não conseguiram responder.

6.4.2 2ª fase do jogo: Abertura do baú

A 2ª fase é a parte emocionante do jogo, na qual os grupos têm a oportunidade de desvendar o segredo do "Baú Misterioso". Os alunos que compreenderam a probabilidade neste momento sabem quais são suas chances de ganhar.

O grupo vencedor da 1ª fase é premiado com duas chaves para tentar abrir o cadeado do baú. Uma dessas chaves abrirá o baú, enquanto a outra não terá efeito.

Para o grupo que não saiu vitorioso na 1ª fase, não há desânimo. Eles receberão um número de chaves equivalente a "n + 2", onde "n" representa a quantidade de pessoas que não conseguiram acertar ou responder às perguntas. Uma dessas chaves abre o baú, enquanto as demais não possuem essa capacidade.

Cada grupo escolhe um representante para abrir o baú. Ele irá escolher uma das chaves que vai abrir o baú.

O grupo vencedor da 1ª fase terá a oportunidade de testar uma chave para abrir o cadeado. Se eles não conseguirem abrir, a vez passará para o outro grupo.

Para o grupo que não obteve sucesso na 1ª fase e recebeu as chaves com base no número de participantes que não conseguiram responder às perguntas, haverá a chance de tentar abrir o baú. Caso não tenham êxito, a vez será repassada para o outro grupo, que terá sua oportunidade de abrir o baú e o jogo acaba aqui.

Por fim, o grupo que conseguir abrir o baú terá a oportunidade de encontrar balas para compartilhar com os demais integrantes da equipe.

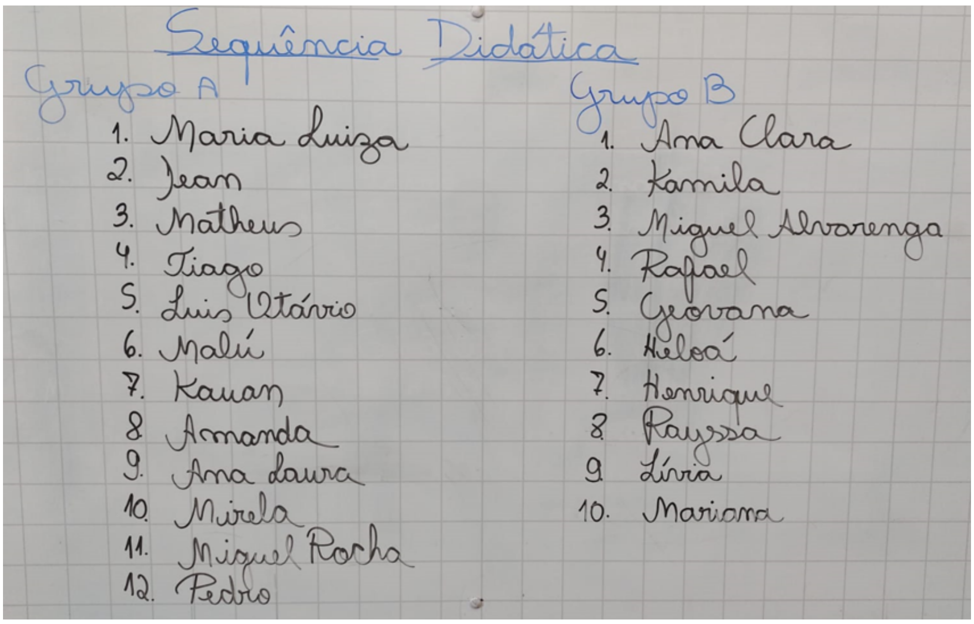
O "Desafio do Baú Misterioso" é uma experiência divertida e educativa, onde os alunos podem aplicar seus conhecimentos, aprender sobre probabilidade e trabalhar em equipe para alcançar a vitória.

6.4.3 O desenvolvimento do jogo nas turmas

Apresentamos a proposta do jogo e as respectivas regras aos estudantes. Dividimos as turmas em dois grupos, denominados "grupo A" e "grupo B". Ambas as turmas eram compostas por 24 alunos, e, consequentemente, ambos os grupos ficaram com 12 alunos. Cada aluno de cada grupo respondia a uma questão por sorteio.

Ao longo do jogo, à medida que respondiam corretamente às perguntas, o nome do estudante era anotado no quadro, enquanto os outros aguardavam suas respostas. A conquista da vitória pelo grupo se concretizava quando todos os seus membros respondiam corretamente às perguntas da rodada na 1ª fase.

Figura 20 – À medida que os alunos acertavam as perguntas da 1ª fase, o nome de quem respondia corretamente era registrado no quadro.



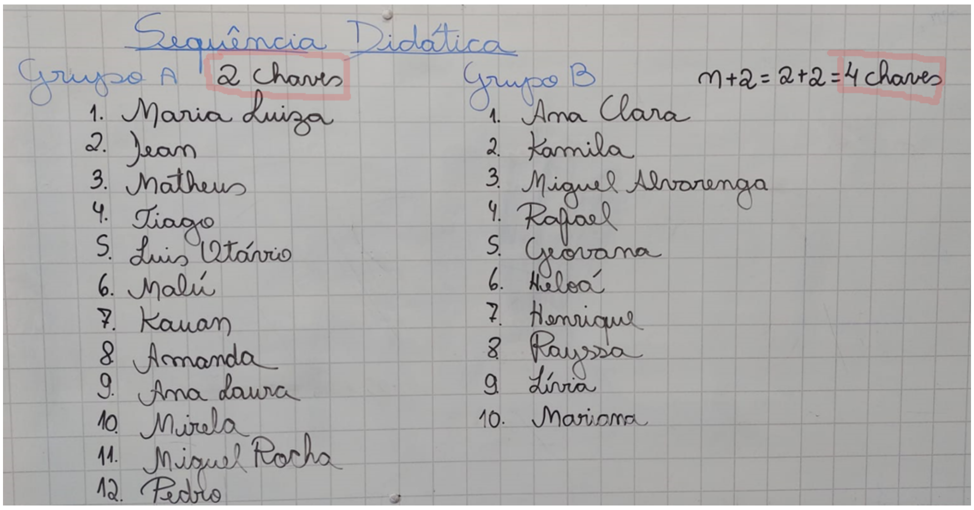
Fonte: Elaborada pela autora.

Nessa etapa do jogo, os estudantes se sentiram motivados e envolvidos, ansiosos para descobrir o vencedor. O clima de competição e a determinação em acertar as perguntas mostraram o engajamento dos estudantes. Foi interessante observar como o jogo estimulou o espírito de equipe e a cooperação dentro de cada grupo. Os alunos que já haviam respondido corretamente às perguntas se mostraram solidários com os colegas que ainda não responderam, torcendo por eles e oferecendo incentivo para que todos tivessem a chance de participar ativamente.

Além disso, a disputa pelas caixas com cadeados despertou a curiosidade e empolgação, impulsionando a motivação dos estudantes a se envolverem ativamente e se esforçarem para responder corretamente às perguntas. O desejo de descobrir o que estava dentro das caixas criou uma atmosfera de entusiasmo, incentivando os alunos a demonstrarem um comprometimento ainda maior com o jogo e a exibirem seu conhecimento ao participarem ativamente e se esforçarem para responder corretamente às perguntas.

Após o término do jogo de perguntas e respostas, apresentamos às turmas o próximo desafio: uma nova fase com duas caixas fechadas por cadeados. Nessa etapa, tanto o grupo A quanto o grupo B receberam chaves para tentar abrir os cadeados. O grupo vencedor ganharia duas chaves para abrir o cadeado, enquanto o grupo que não venceu receberia "n + 2" chaves, onde "n" representa a quantidade de participantes que não responderam às perguntas.

Figura 21 – Na 1ª fase, o grupo A foi o vencedor da turma A e conquistou duas chaves, enquanto o grupo B, por não vencer e ter dois alunos que não responderam, recebeu 4 chaves.



Fonte: Elaborada pela autora.

Cada grupo terá direito a um representante escolhido por eles. O representante do grupo vencedor selecionará uma das duas chaves para tentar abrir o cadeado. Caso não consiga abrir, a vez passará para o outro grupo, que tentará encontrar a chave correta entre as "n+2" chaves que receberam, onde "n" representa os participantes que ficaram sem responder. Se, mesmo assim, não conseguirem abrir a caixa, a vez retornará para o grupo inicial e a vitória está garantida.

Figura 22 – Após a 1ª fase e a distribuição das chaves, os estudantes da turma A se preparam para abrir o baú.

Fonte: Elaborada pela autora.

Na turma A, o grupo vencedor da 1ª fase do jogo de perguntas e respostas foi o grupo A, enquanto que no grupo B sobraram dois alunos sem responder. Em seguida, foi explicado aos estudantes que, para abrir o baú, o grupo A receberia duas chaves, enquanto que o grupo B receberia n+2 chaves, levando em conta os dois alunos que não responderam. Portanto, somando as chaves do grupo B (2+2), teríamos um total de 4 chaves.

Figura 23 – Na turma B, o estudante do grupo A, que possui duas chaves, escolhe uma delas para tentar abrir o baú.

Fonte: Elaborada pela autora.

Na turma B, o grupo vencedor também foi o grupo A, enquanto o grupo B teve três alunos que não responderam. Posteriormente, explicamos para ambos os grupos que o grupo A receberia duas chaves. Já o grupo B receberia n+2 chaves, onde n representaria os três alunos que não responderam, o que equivale a adicionar 3+2, totalizando um conjunto de 5 chaves para esse grupo.

Figura 24 – Na turma B, o estudante do grupo B, que possui cinco chaves, escolhe uma delas para tentar abrir o baú.

Fonte: Elaborada pela autora.

Durante o desenvolvimento desta etapa do jogo, o interesse pelo desfecho e a curiosidade gerada pelas caixas tornaram a atividade significativa para os participantes. Observamos que as caixas com cadeados conseguiram instigar a curiosidade e o interesse dos alunos.

Por fim, ao abrirem o baú, os alunos encontram as balas, gerando um momento de empolgação e surpresa. Eles prontamente dividiram as balas de maneira equitativa entre os integrantes de seus respectivos grupos, fortalecendo o espírito de colaboração que tinha sido cultivado durante a atividade.

Essa atividade certamente proporcionou uma experiência de aprendizagem única e interativa para os alunos, promovendo tanto a colaboração quanto a competição saudável. A combinação de perguntas e respostas com o elemento das caixas trancadas tornou o jogo estimulante e divertido, ao mesmo tempo que reforçou o conhecimento dos alunos de maneira lúdica.

6.5 Atividades propostas após o jogo

6.5.1 Execução da atividade: Parte 1

Após a realização do jogo, proporcionamos aos alunos a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos sobre conceitos relacionados à probabilidade, dentro de seus respectivos grupos na sala de aula. Para garantir uma experiência equilibrada, organizamos a turma em pequenos grupos, cada um composto por quatro alunos, a fim de realizar as atividades concebidas para explorar esses conceitos.

Vamos criar um cenário onde supomos que o grupo A tenha conquistado a vitória, com todos os seus membros respondendo corretamente às perguntas apresentadas. Enquanto isso, o grupo B enfrentou desafios, uma vez que três de seus alunos não conseguiram responder corretamente às questões propostas. Nesse contexto, o grupo A receberá duas chaves e o grupo B receberá “n+2” chaves, onde “n” representa a quantidade de alunos que não responderam. Foram fornecidos os dados acima e questões para que os grupos discutissem e respondessem em conjunto.

Nas questões apresentadas aos estudantes, exploramos tópicos que tinham como objetivo não apenas avaliar o conhecimento adquirido, mas também compreender o que eles aprenderam ao longo do processo do jogo.

1) Qual foi o grupo ganhador da primeira etapa do jogo de perguntas e respostas?

2) Quantos participantes ficaram sem responder corretamente no grupo perdedor?

3) Quantas chaves recebeu o grupo A? E o grupo B?

4) Quem tem mais chances de abrir o baú, o grupo A ou o grupo B? Por que?

5) O grupo A só ganhará se escolher a chave correta na primeira tentativa? Justifique sua resposta.

6) Você acha que o grupo que tem mais chaves, terá alguma chance de abrir o baú? Explique.

7) Calcular a probabilidade do grupo A vencer, e a probabilidade de B vencer, caso receba três chaves. Escreva a fração que representa a chance da equipe A ganhar em porcentagem e a chance da equipe B ganhar também em porcentagem.

8) Calcular a probabilidade do grupo A vencer, e a probabilidade de B vencer, caso receba cinco chaves. Escreva a fração que representa a chance da equipe A ganhar em porcentagem e a chance da equipe B ganhar também em porcentagem.

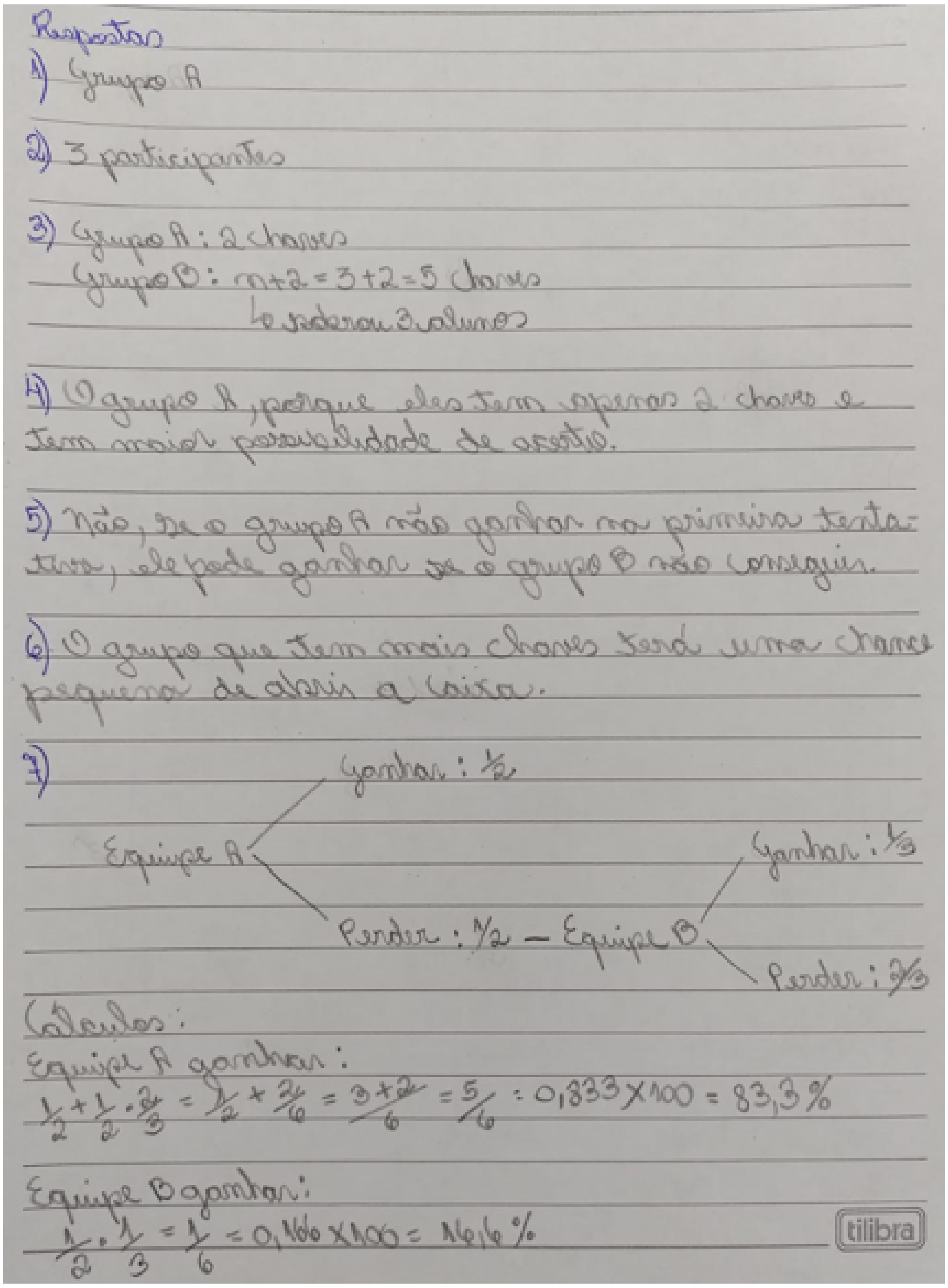
9) Para receber 6 chaves o grupo B deverá ter quantos integrantes que não acertaram as perguntas? E se receber 4 chaves, quantos integrantes deixaram de responder corretamente?

10) Por que o grupo que recebe menos chaves tem mais chance de abrir o baú?

Ao explorarmos as perguntas acima, constatamos que a maioria delas foi resolvida facilmente, graças às discussões em grupo que possibilitaram encontrar as respostas de forma eficaz. Por outro lado, as questões 7 e 8 revelaram-se mais desafiadoras, exigindo a aplicação de conceitos de probabilidade. Os alunos foram incentivados a calcular probabilidades, compreender conceitos de eventos e tomar decisões embasadas em cálculos probabilísticos, entre outras abordagens.

Após realizar essas atividades, prosseguimos com as correções e avançamos no estudo da probabilidade. Essa abordagem demonstrou ser benéfica, permitindo uma compreensão dos conceitos abordados. Durante a execução das atividades, notamos que os alunos, ao trabalharem em grupos, se sentiram motivados em relação às questões.

Figura 25 – No exemplo, podemos observar as questões desenvolvidas por um grupo de alunos.


Respostas

1) Grupo A

2) 3 participantes

3) Grupo A: 2 chaves
Grupo B: $n+2=3+2=5$ chaves
↳ sobrou 3 alunos

4) O grupo A, porque eles tem apenas 2 chaves e tem maior possibilidade de acerto.

5) Não, se o grupo A não ganhar na primeira tentativa, ele pode ganhar se o grupo B não conseguir.

6) O grupo que tem mais chaves terá uma chance pequena de abrir a caixa.

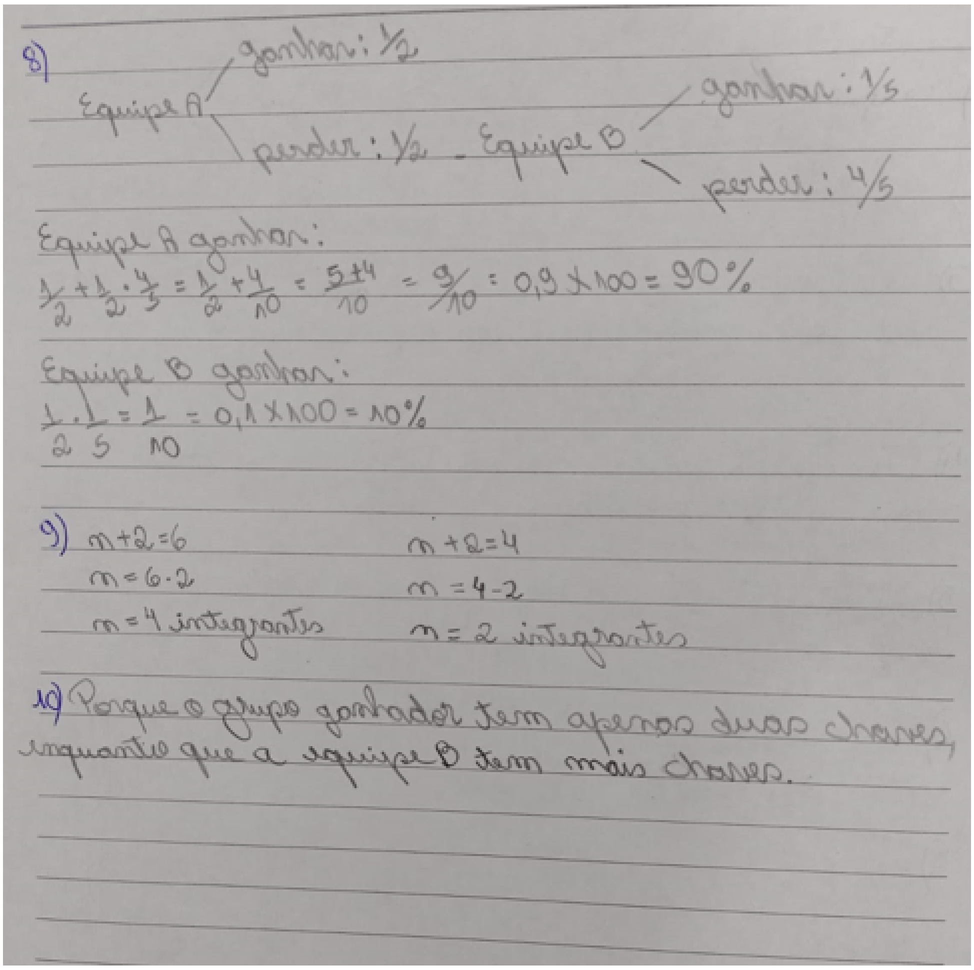
7)
Equipe A
Ganhar: 1/2
Perder: 1/2 — Equipe B
Ganhar: 1/3
Perder: 2/3

Cálculos:
Equipe A ganhar:
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}=0{,}833\times 100=83{,}3\%$

Equipe B ganhar:
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=0{,}166\times 100=16{,}6\%$

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 26 – No exemplo, podemos observar as questões desenvolvidas por um grupo de alunos.



Fonte: Elaboração do autor.

6.5.2 Execução da atividade: Parte 2

Pela análise da avaliação diagnóstica anterior, observamos que muitos alunos tiveram dificuldades ao calcular a probabilidade com dados. Por esse motivo, decidimos inicialmente trabalhar em questões mais simples, preparando assim o ambiente para a exploração de situações com dois dados posteriormente. Essa abordagem é fundamental para que os alunos compreendam melhor os conceitos básicos de probabilidade, desenvolvam habilidades de raciocínio lógico e matemático e estejam preparados para enfrentar desafios.

Figura 27 – Alunos em grupos desenvolvendo as atividades com dados.

Fonte: Elaborada pela autora.

Iniciamos a atividade com uma dinâmica, na qual os estudantes foram organizados em grupos de quatro, cada um recebendo um dado e uma folha com diversas atividades relacionadas ao seu uso. A tarefa consistia em lançar o dado e registrar os resultados obtidos em suas respectivas folhas. Para tornar a atividade ainda mais curiosa, incentivamos os alunos a tocarem o dado antes de lançá-lo, despertando a sensação tátil e estimulando a curiosidade em relação aos possíveis resultados.

Figura 28 – Os estudantes participaram das atividades que envolveram o uso de dados.

Fonte: Elaborado pela autora.

Na primeira questão, os estudantes foram convidados a lançar o dado 15 vezes e registrar a quantidade de ocorrências de cada face: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Em seguida, prosseguir com as demais perguntas:

1. Pegue um dado e jogue 15 vezes, marque com um X o resultado de cada jogada no tabuleiro.

Responda às seguintes perguntas:

- Qual número saiu mais vezes?

- Qual número saiu menos vezes?

- Acha mais fácil sair algum dos resultados possíveis?

- Acha que, se voltar a jogar 15 vezes o dado, obterá os mesmos resultados? Por quê?

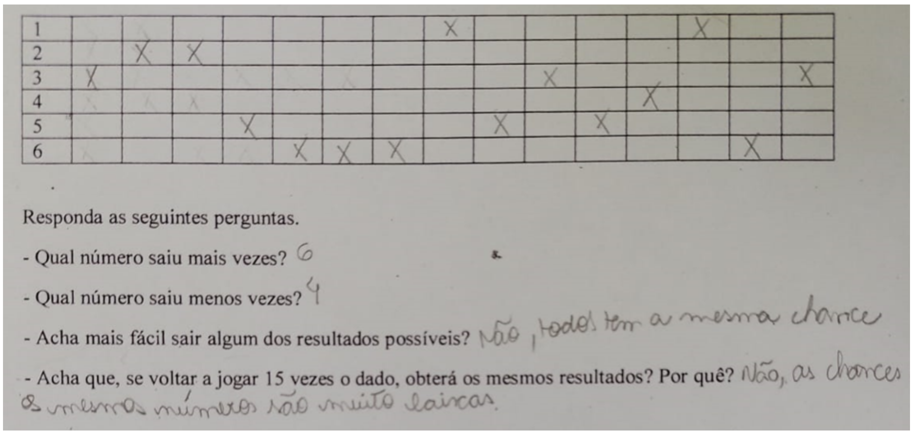
Figura 29 – Questão 1

1															
2															
3															
4															
5															
6															

Fonte: PASTELLS, À, A, 2009.

Essas atividades proporcionaram aos alunos uma exploração prática e divertida do conceito de probabilidade. Ao observarem os resultados dos lançamentos, os estudantes puderam vivenciar na prática a igual probabilidade de cada face do dado aparecer. Esse entendimento é fundamental para compreender os princípios básicos da probabilidade.

Figura 30 – Após lançarem um dado por 15 vezes, um grupo de estudantes registrou a quantidade de vezes que cada face do dado apareceu.



1								X					X		
2		X	X												
3	X									X					X
4												X			
5				X					X		X				
6					X	X	X							X	

Responda as seguintes perguntas.

- Qual número saiu mais vezes? 6

- Qual número saiu menos vezes? 4

- Acha mais fácil sair algum dos resultados possíveis? Não, todos tem a mesma chance

- Acha que, se voltar a jogar 15 vezes o dado, obterá os mesmos resultados? Por quê? Não, as chances os mesmos números são muito baixas.

Fonte: Elaborada pela autora.

2. Com um dado convencional, imagine quais das seguintes situações são garantidas, possíveis ou impossíveis. Marque com um X seguindo o exemplo:

Figura 31 – Questão 2

SITUAÇÃO	GARANTIDO	POSSÍVEL	IMPOSSÍVEL
Que saia o 6			
Que saia um número maior do que 6			
Que saia um número entre 1 e/ou 6			
Que saia o 10			
Que saia o 2 ou o 3			
Que saia um número par			

Fonte: PASTELLS, À, A, 2009.

Com um dado convencional, os alunos vão explorar as seguintes situações para determinar, no lançamento de um dado, quais situações são garantidas, possíveis ou impossíveis. Ao realizar essa análise, eles estarão aprimorando sua compreensão sobre o resultado aleatório do dado, o que fortalecerá o entendimento sobre a probabilidade e a incerteza.

Figura 32 – Registro da atividade por um grupo de alunos.

SITUAÇÃO	GARANTIDO	POSSÍVEL	IMPOSSÍVEL
Que saia o 6		X	
Que saia um número maior do que 6			X
Que saia um número entre 1 e/ou 6	X		
Que saia o 10			X
Que saia o 2 ou o 3		X	
Que saia um número par		X	

Fonte: Elaborado pela autora.

3. Jogue um dado 30 vezes e anote na primeira tabela cada número que saiu. Depois jogue o dado 50 vezes e volte anotar o resultados.

Responda às seguintes perguntas:

- Obteve todos os resultados possíveis o mesmo número de vezes?

- Qual foi o resultado mais provável e o menos provável ao jogar o dado 30 vezes?

- E ao jogar o dado 50 vezes?

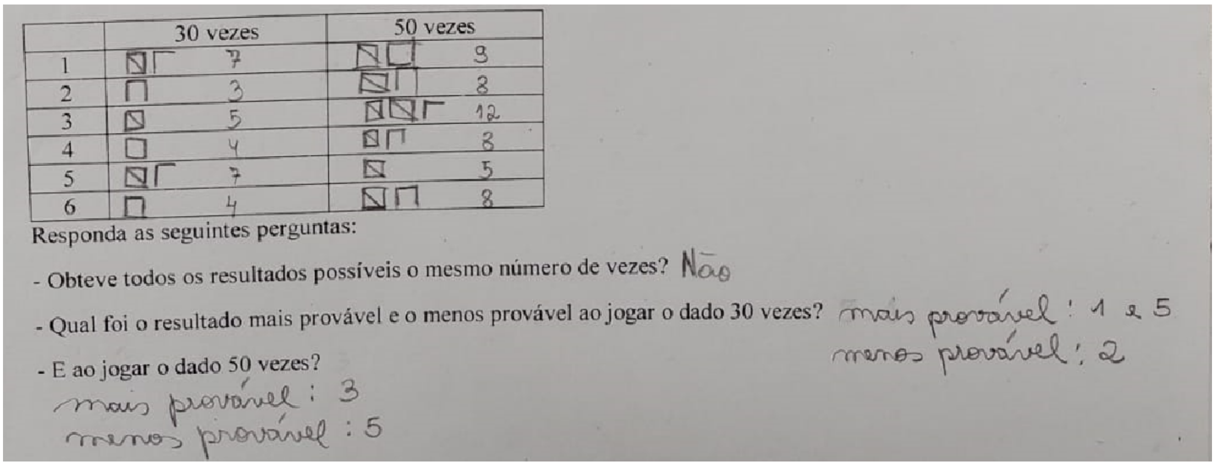
Figura 33 – Questão 3

	30 vezes	50 vezes
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Fonte: Fonte: PASTELLS, À, A, 2009.

Lançar um dado várias vezes e registrar os resultados é, sem dúvida, uma excelente maneira de tornar o aprendizado mais dinâmico e interessante. Essa abordagem não apenas envolve os alunos de forma lúdica, mas também promove a interação e a colaboração entre eles ao trabalharem em grupos. Através das discussões para responder às perguntas propostas, os alunos são incentivados a compartilhar ideias e desenvolver habilidades de resolução de problemas, tornando o processo educativo mais rico e significativo.

Figura 34 – Atividades desenvolvidas por um grupo de estudantes.



	30 vezes	50 vezes
1	7	9
2	3	8
3	5	12
4	4	8
5	7	5
6	4	8

Responda as seguintes perguntas:

- Obteve todos os resultados possíveis o mesmo número de vezes? Não

- Qual foi o resultado mais provável e o menos provável ao jogar o dado 30 vezes? mais provável: 1 e 5
menos provável: 2

- E ao jogar o dado 50 vezes?
mais provável: 3
menos provável: 5

Fonte: Elaboração do autor.

A pergunta sobre qual número saiu mais e qual saiu menos é importante para os alunos perceberem que, em experimentos de probabilidade, os resultados podem variar, conforme o número de jogadas. À medida que aumentamos o número de lançamentos, as frequências dos resultados tendem a se aproximar das probabilidades teóricas de cada número no dado. Isso vem do dado de que, em eventos aleatórios, a tendência é que a probabilidade se manifeste ao longo de um grande número de tentativas.

6.5.3 Execução da atividade: Parte 3

Devido às dificuldades que os alunos apresentaram na avaliação diagnóstica em questões que envolviam o uso de dois dados, decidimos aplicar atividades relacionadas a este tópico. No início do jogo, um representante de cada grupo lançaria um dado e escolheria se o resultado seria par ou ímpar. Se a soma dos dois dados fosse par, as perguntas seriam iniciadas pelo representante que escolheu par. Caso contrário, o outro grupo teria a oportunidade de começar, já que escolheu ímpar. Dessa forma, incorporamos uma parte do jogo para elaborar a atividade.

Diante dessas questões, foi possível proporcionar aos alunos a oportunidade de manipular os dados, o que contribuiu para uma compreensão mais clara. Isso se mostrou importante, uma vez que atividades que envolvem o lançamento de dois dados costumam gerar dúvidas em muitos estudantes. A forma como fizemos as atividades práticas ajudou os alunos a verem e testarem as ideias na prática, o que tornou mais fácil entender as chances e a probabilidade nesse cenário.

Ao trabalharmos com grupos de quatro alunos e dois dados, os estudantes se envolveram na resolução das seguintes perguntas:

Ao manipular ambos os dados, descreva:

a) O espaço amostral observando as faces dos dois dados.

b) Qual seria a probabilidade de se obter uma soma par no lançamento de dois dados no caso do grupo ter escolhido par?

c) Qual seria a probabilidade de se obter uma soma ímpar no lançamento de dois dados no caso do grupo ter escolhido ímpar?

d) Qual seria a probabilidade de se obter um produto ímpar no lançamento de dois dados no caso do grupo ter escolhido ímpar?

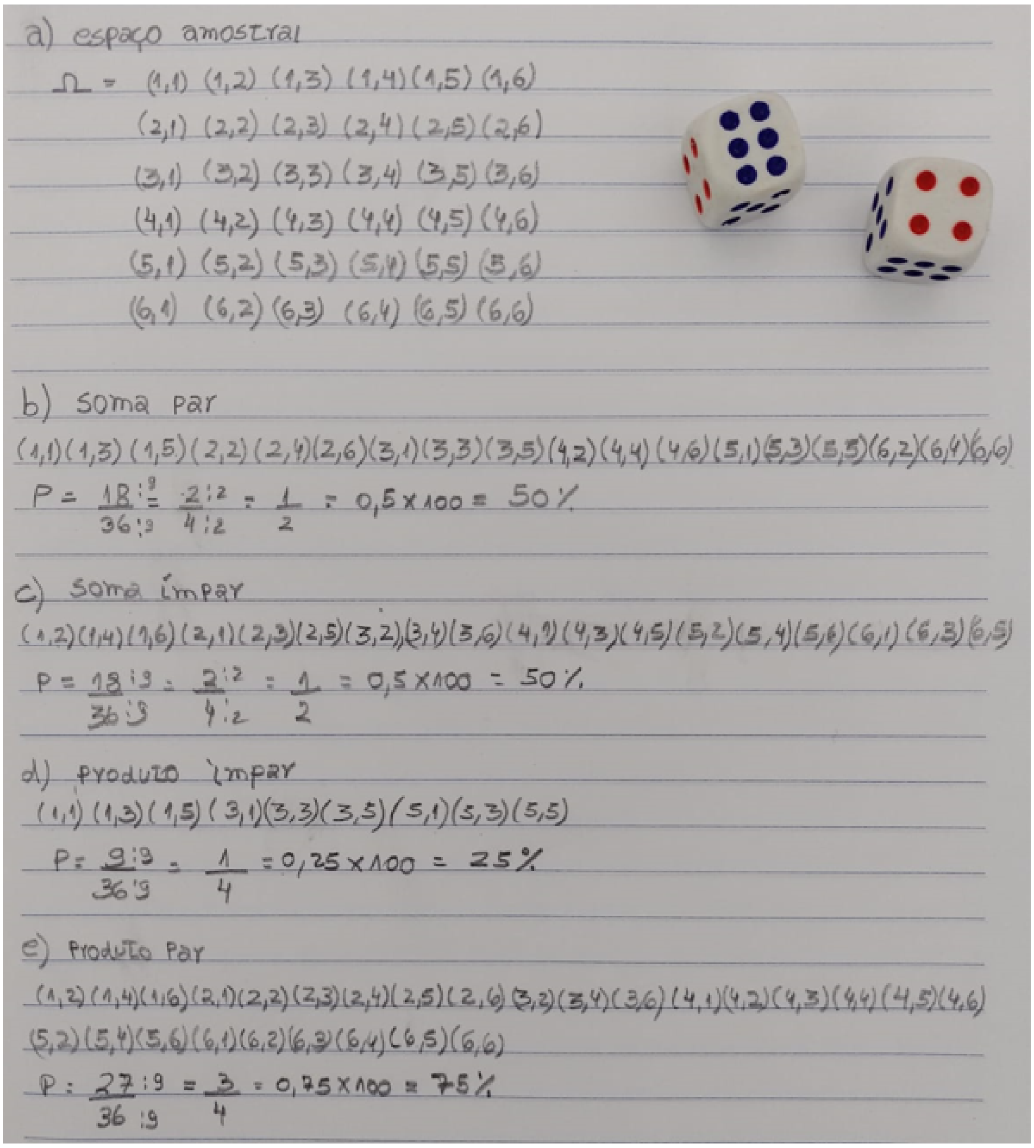
e) Qual seria a probabilidade de se obter um produto par no lançamento de dois dados no caso do grupo ter escolhido par?

Figura 35 – Estudantes participando das atividades em grupo.

Fonte: Elaboração do autor.

As questões propostas foram abordadas de forma dinâmica, em grupos, permitindo que os alunos interagissem com os colegas enquanto jogavam os dados. Essa abordagem tornou a atividade mais atrativa para os estudantes, criando um ambiente de aprendizado interativo e divertido. Em grupos, os alunos tiveram a oportunidade de discutir entre si trocar ideias e contribuir para a resolução de questões.

Figura 36 – Atividade desenvolvida por um grupo de alunos utilizando dois dados.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na letra “a”, os alunos foram solicitados a descrever o espaço amostral, que representa todas as combinações possíveis ao se lançar dois dados. O espaço amostral é fundamental para o cálculo de probabilidades, pois é a base para determinar todas as combinações possíveis. Manipulando os dados, fica mais fácil visualizar as possibilidades para descrever.

Já na letra "b", o objetivo era calcular a probabilidade de se obter uma soma par ao lançar dois dados, considerando que o grupo tenha escolhido par previamente. Para isso, é necessário identificar todas as combinações que resultam em soma par e, posteriormente, calcular a probabilidade, utilizando a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis.

Enquanto que na letra "c", para encontrar a soma ímpar no lançamento de dois dados, o estudante deverá analisar as faces de ambos os dados após cada lançamento. Isso envolve identificar todas as possíveis combinações de números que resultarão em uma soma ímpar, considerando as diferentes faces dos dados. A partir dessa análise, ele poderá calcular a probabilidade de se obter uma soma ímpar e compreender como as diferentes combinações de números influenciam esse resultado.

Na letra "d", o desafio era calcular a probabilidade de se obter um produto ímpar ao lançar dois dados, considerando que o grupo tenha escolhido ímpar previamente. Para resolver o problema, o aluno deve identificar as combinações possíveis que resultam em produto ímpar e, em seguida, calcular a probabilidade utilizando a mesma abordagem do item anterior.

Por fim, na letra "e", o estudante precisa considerar o grupo que escolheu "produto par" para calcular a probabilidade. Ele deve encontrar todas as combinações possíveis de produtos pares a fim de realizar o cálculo probabilístico de maneira precisa. Isso envolve analisar cada resultado possível dos dois dados e identificar quais deles resultam em um produto par, o que, por sua vez, permitirá determinar a probabilidade de ocorrência desse evento específico.

Essas questões abordam conceitos importantes de probabilidade e envolvem uma análise cuidadosa das combinações possíveis em um lançamento de dois dados. Além disso, as questões "b", "c", "d" e "e" também requerem análise das faces dos dados. A resolução dessas questões é valiosa para aprimorar a compreensão dos estudantes sobre a probabilidade e seu uso em contextos práticos, como no jogo anterior.

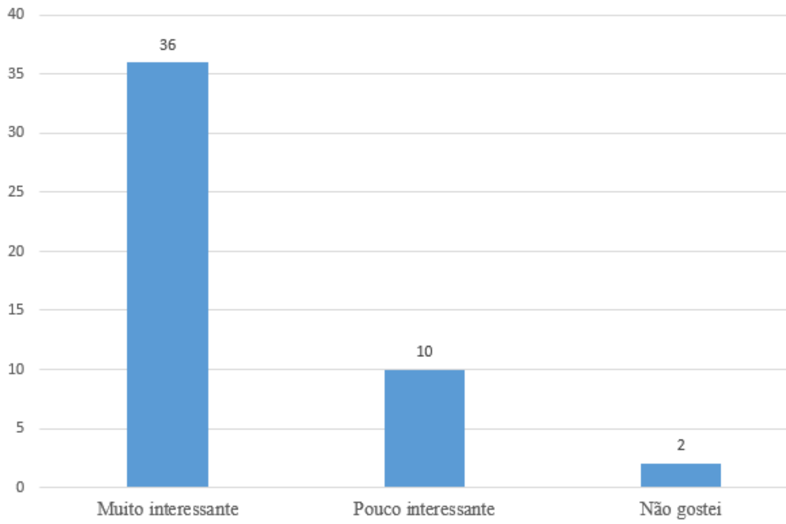
6.5.4 Execução da atividade: Parte 4

Após a implementação da sequência de atividades, conduzimos um questionário final com o propósito de avaliar a percepção dos estudantes em relação a essas atividades. Os estudantes foram convidados a compartilhar suas opiniões sobre a relevância das atividades em relação aos objetivos de aprendizado predefinidos. As perguntas do questionário foram elaboradas da seguinte maneira:

1. Como você classifica o trabalho desenvolvido sobre a probabilidade?

( ) Muito interessante ( ) Pouco interessante ( ) Não gostei

Figura 37 – Pesquisa realizada com os quarenta e oito alunos presentes nas duas turmas do 2° ano do ensino médio.



Fonte: Elaborado pela autora.

A avaliação do trabalho sobre a probabilidade pode depender de vários fatores, como a clareza das explicações, a profundidade da análise, a relevância para o público-alvo e a aplicabilidade prática das ideias apresentadas.

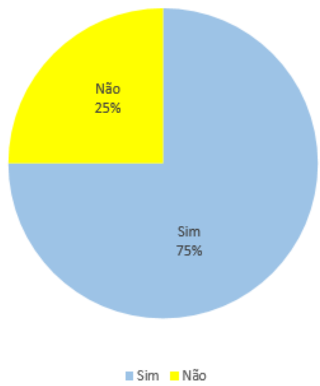
Assim, se o trabalho for abordado de maneira acessível, esclarecendo conceitos complexos e oferecendo exemplos práticos que ilustrem a aplicação das probabilidades em diferentes áreas, muitos alunos o considerarão muito interessante. No entanto, se o trabalho for confuso, superficial ou não estiver bem explicado, alguns estudantes podem considerá-lo pouco interessante.

2. Você acredita que aulas diferenciadas podem facilitar a compreensão de conteúdos matemático?

( ) Sim ( ) Não

O objetivo desta questão é averiguar se o estudante reconhece que aulas diferenciadas podem facilitar o processo de aprendizagem. As aulas diferenciadas podem contribuir significativamente para a compreensão de conteúdos matemáticos. A abordagem tradicional de ensino nem sempre é a mais eficaz para todos os alunos, uma vez que cada um possui estilos de aprendizagens diferentes e pode encontrar dificuldades em entender conceitos matemáticos mais complexos através dos métodos tradicionais de ensino.

Figura 38 – Pesquisa realizadada com os estudantes das turma A e B.

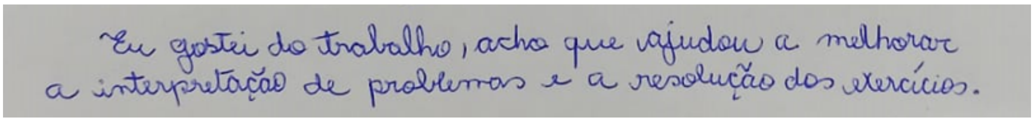


Fonte: Elaborado pela autora.

3. Dê sua opinião sobre o trabalho desenvolvido ao longo desta sequência de atividades.

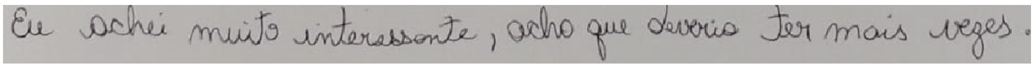
Nesta atividade, os alunos tiveram a oportunidade de expressar suas opiniões livremente, compartilhando o que pensaram sobre a sequência didática apresentada. Isso permitiu expressar seus pontos de vista de maneira aberta e construtiva. Essa abordagem não apenas promove uma maior interação entre os alunos, mas também proporciona aos educadores observações valiosas sobre o que está funcionando bem e onde podem ser feitas melhorias. Apresentamos a seguir alguns comentários de estudantes em relação a sequência desenvolvidas.

Figura 39 – Resposta apresentada por um estudante da turma A.


Eu gostei do trabalho, acho que ajudou a melhorar a interpretação de problemas e a resolução dos exercícios.

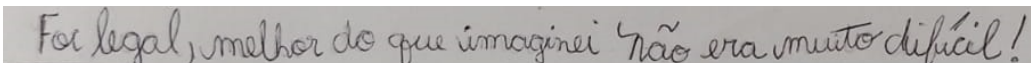
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 40 – Resposta apresentada por um estudante da turma B.


Eu achei muito interessante, acho que deveria ter mais vezes.

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 41 – Opinião apresentada por um estudante.


Foi legal, melhor do que imaginei não era muito difícil!

Fonte: Elaborado pela autora.

Através dessas questões, procuramos obter uma visão abrangente das opiniões dos estudantes sobre a eficácia das atividades de aprendizado realizadas. As respostas coletadas nos permitirão avaliar não apenas o nível de interesse despertado pelas atividades, mas também a percepção dos alunos sobre a utilidade das abordagens diferenciadas para a compreensão de conceitos matemáticos. Além disso, o espaço fornecido para comentários abertos permitirá que os estudantes expressem suas opiniões de maneira mais detalhada, oferecendo perspectivas valiosas que podem orientar melhorias futuras.

6.6 Verificação dos resultados

Com o intuito de verificar se os objetivos propostos foram alcançados nas duas turmas após a implementação da sequência didática, realizamos uma avaliação final visando avaliar o progresso na compreensão dos conceitos de probabilidade por parte dos estudantes. Essa abordagem nos permitiu analisar se a estratégia adotada contribuiu para o aprimoramento de seus conhecimentos nessa área específica.

As questões foram selecionadas a partir de livros didáticos do ensino médio, totalizando doze questões. Essa seleção permitiu realizar uma análise da aprendizagem focada no conteúdo de probabilidade. Os participantes da pesquisa foram os 24 alunos da turma A e os 24 alunos da turma B, totalizando 48 alunos envolvidos na avaliação final. As respostas da avaliação foram unificadas em um único levantamento, consolidando os resultados de toda amostra.

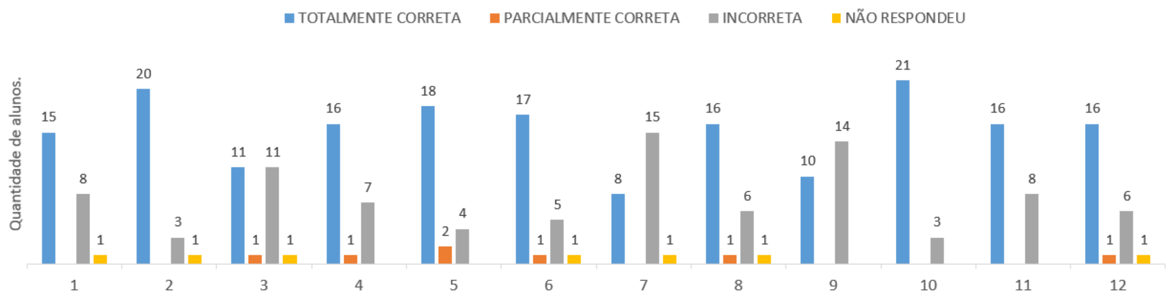
Os resultados da análise da pesquisa por sala revelaram um progresso notável entre os estudantes investigados. Esse avanço pode ser diretamente atribuído à abordagem de ensino empregada, que se concentrou na implementação da sequência didática.

Ao aprofundarmos nossa análise nos dados coletados por sala, uma transformação notável ocorreu na compreensão dos alunos pesquisados. A eficácia dessa evolução pode ser claramente atribuída à abordagem pedagógica que priorizou a integração de jogos e a exploração de conceitos por meio de atividades em grupo.

Através dessa metodologia, os alunos foram incentivados a se envolverem ativamente no processo de aprendizagem, trabalhando de maneira colaborativa e interativa. O ambiente lúdico e participativo desempenhou um papel fundamental em aumentar o interesse dos estudantes pelo assunto, o que, por sua vez, favoreceu a assimilação mais eficaz dos conceitos relacionados à probabilidade.

A turma A apresentou uma significativa melhora em relação à primeira avaliação, destacando de forma positiva a eficácia da abordagem inovadora aplicada na explicação do conteúdo de probabilidade durante a sequência didática. Esse avanço demonstra não apenas a capacidade dos alunos de assimilar o material, mas também o impacto positivo de métodos pedagógicos que despertam o interesse e a compreensão do assunto. O envolvimento ativo dos alunos nesse processo, certamente contribuiu para a criação de um ambiente de aprendizagem estimulante e eficaz.

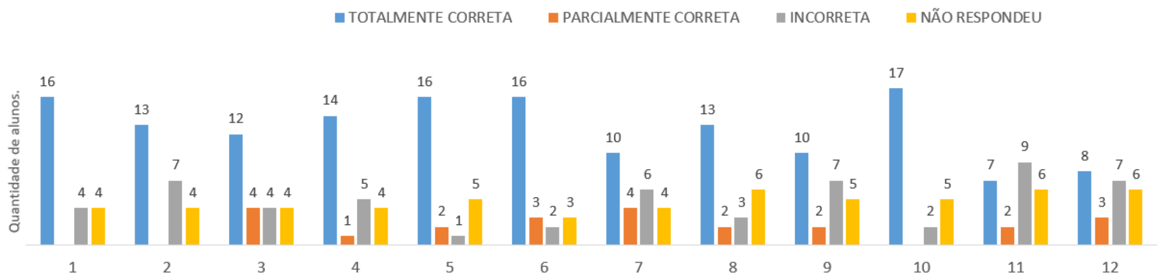
Figura 42 – Resultado da avaliação final da turma A.



Fonte: Elaborado pela autora.

A turma B, também apresentou uma melhora significativa ao longo da sequência didática. Esse resultado destaca o poder do método de ensino aplicado e o impacto positivo que uma abordagem inovadora pode ter no processo de aprendizagem dos alunos. A superação das dificuldades de aprendizagem por parte da turma B serve como evidência concreta de como estratégias pedagógicas diferenciadas podem desempenhar um papel crucial na aprendizagem dos alunos.

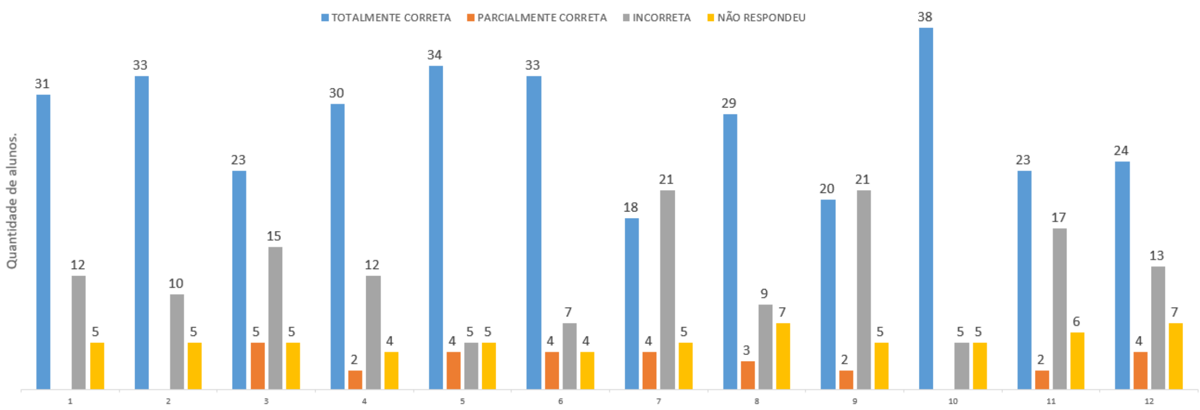
Figura 43 – Resultado da avaliação final da turma B.



Fonte: Elaborado pela autora.

A utilização de jogos e atividades em grupos certamente desempenhou um papel fundamental na motivação dos alunos e no aumento do interesse pelo tema. Ao proporcionar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e participativo, os estudantes foram estimulados a explorar o conteúdo de forma mais significativa e autônoma, contribuindo para uma compreensão mais sólida e uma maior conexão com os conceitos abordados.

Figura 44 – Resultado da avaliação final das turmas A e B.



Fonte: Elaborado pela autora.

Ao unirmos os resultados obtidos das duas turmas, torna-se evidente que a introdução da sequência teve um impacto positivo. Isso se refletiu em melhorias significativas no processo de aprendizagem dos alunos. As melhorias constatadas não apenas validam a abordagem adotada, mas também ressaltam a importância de continuar a explorar metodologias inovadoras para aprimorar o ensino e maximizar o potencial educacional dos alunos.

Na presente situação, a análise das questões foi facilitada pela combinação dos resultados de ambas as turmas, o que permitiu uma identificação mais precisa dos pontos de maior frequência de acertos e erros. A seguir, apresentamos as questões que foram integradas à avaliação final e fornecemos comentários sobre algumas delas, com o objetivo de avaliar o progresso no aprendizado.

1. No lançamento de duas moedas, qual é probabilidade de se obter uma cara e uma coroa?

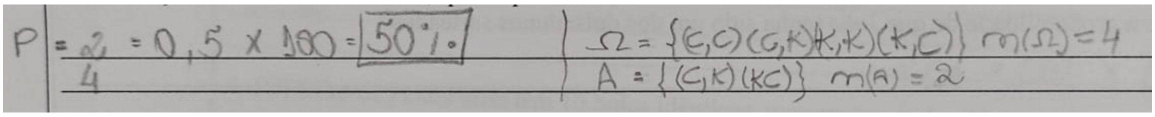
Tabela 11 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 1.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
31	0	12	5
65%	0%	25%	10%

Fonte: Elaborada pela autora.

A questão proposta tem como objetivo verificar se os estudantes são capazes de determinar a probabilidade de obter uma cara e uma coroa no lançamento de duas moedas.

Figura 45 – No exemplo, o estudante respondeu corretamente à questão.



Fonte: Elaborado pela autora.

2. Testada em 1000 crianças, uma vacina imunizou 800 delas. Considerando ao acaso uma das crianças que receberam a vacina, qual a probabilidade de ela estar imunizada?

Para resolver este problema, o aluno deve identificar o espaço amostral, composto por 1000 crianças, e o evento de 800 delas terem sido imunizadas, a fim de calcular a probabilidade de uma criança ser imunizada.

Tabela 12 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 2.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
33	0	10	5
69%	0%	21%	10%

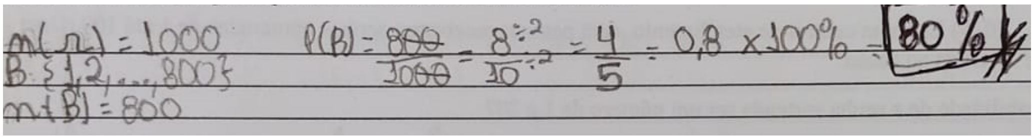
Fonte: Elaborada pela autora.

Observa-se que a maioria dos alunos, ou seja, 69% deles, respondeu corretamente à questão, demonstrando uma compreensão do conceito básico de probabilidade e sua aplicação adequada no problema apresentado.

Quanto aos 21% que responderam incorretamente, é possível que tenham cometido algum erro de cálculo ou confundido o número de crianças imunizadas com o total de crianças testadas.

Por fim, os 10% que não fizeram a questão podem ter se deparado com dificuldades ou optado por não responder, o que pode indicar uma falta de confiança ou conhecimento no conteúdo.

Figura 46 – No exemplo, o estudante forneceu uma resposta correta.



Fonte: Elaborado pela autora.

3. Em um avião viajam 40 brasileiros, 20 japoneses, 8 italianos e 3 árabes. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele não ser árabe.

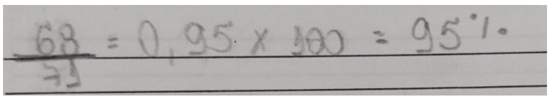
Tabela 13 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 3.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
23	5	15	5
48%	10%	32%	10%

Fonte: Elaborada pela autora.

Na atividade proposta, o estudante devem encontrar o espaço amostral dos viajantes que totalizam 71 pessoas, e depois encontrar a probabilidade de ele não ser árabe.

Figura 47 – No exemplo, o estudante respondeu de forma correta.



Fonte: Elaborado pela autora.

4. (UFSCar-SP) Uma urna tem 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. Se retirarmos uma bola da urna, qual a probabilidade de não obtermos a bola de número 7?

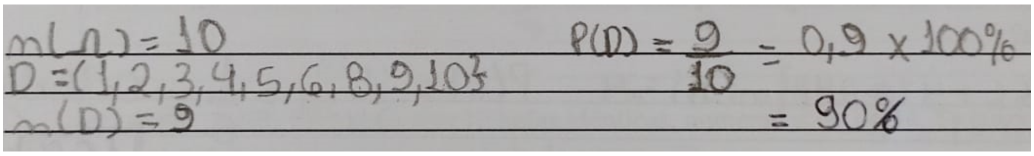
Tabela 14 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 4.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
30	2	12	4
63%	4%	25%	8%

Fonte: Elaborada pela autora.

A questão apresenta um problema clássico de probabilidade envolvendo uma urna contendo 10 bolas numeradas de 1 a 10. Queremos calcular a probabilidade de não retirarmos a bola de número 7 ao escolher uma bola da urna.

Figura 48 – O estudante descreve a sua abordagem para resolver a questão.



Fonte: Elaborado pela autora.

5. (UCS –RS) Dois dados são jogados simultaneamente uma única vez. Qual deve ser a probabilidade de que a soma dos números mostrados nas faces que ficam voltadas para cima seja igual a 6?

A questão trata de um problema de probabilidade relacionado ao lançamento simultâneo de dois dados, no qual a condição é que a soma dos números nas faces superiores seja igual a 6. O conjunto de resultados favoráveis é representado por $A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$, escolhidos a partir do espaço amostral de 36 possíveis resultados.

Tabela 15 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 5.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
34	4	5	5
71%	9%	10%	10%

Fonte: Elaborada pela autora.

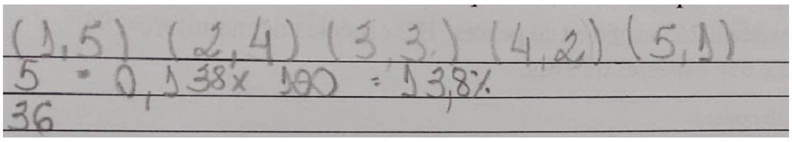
Cerca de 71% dos estudantes conseguiram desenvolver corretamente o problema, o que indica uma boa compreensão do conceito de probabilidade e capacidade de aplicá-lo corretamente nesse contexto.

Por outro lado, 9% conseguiram resolver parte da questão, mas não responderam corretamente por completo, o que indica que alguns alunos têm um entendimento razoável do conceito, mas podem ter enfrentado desafios em sua aplicação.

Enquanto isso, 10% resolveram incorretamente, podendo ter cometido erros nos cálculos ou nas análises dos casos favoráveis.

Quanto aos 10% que não responderam, é possível que tenham enfrentado dificuldades que os impediram de chegar a uma resposta.

Figura 49 – No exemplo, o estudante apresentou a questão de forma correta.



Fonte: Elaborado pela autora.

6. Rafael tem 6 cupons de uma promoção, cujo prêmio é um almoço em uma churrascaria. Qual a probabilidade de Rafael ganhar o prêmio, sabendo que foram distribuídos 320 cupons no total?

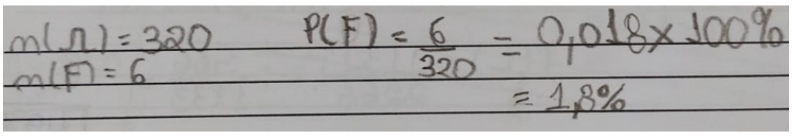
Tabela 16 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 6.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
33	4	7	4
69%	8%	15%	8%

Fonte: Elaborada pela autora.

Para resolver este problema, o estudante deve identificar o espaço amostral, que consiste nos 320 cupons da promoção cujo prêmio é um almoço em uma churrascaria. Dentre esses cupons, 6 pertencem a Rafael. Em seguida, calcular a probabilidade de ele ganhar o prêmio.

Figura 50 – Neste exemplo, o estudante demonstrou sua abordagem para resolver a questão.



Fonte: Elaborado pela autora.

7. Um casal planeja ter 3 filhos. Qual a probabilidade de os 3 serem do mesmo sexo?

Tabela 17 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 7.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
18	4	21	5
38%	8%	44%	10%

Fonte: Elaborada pela autora.

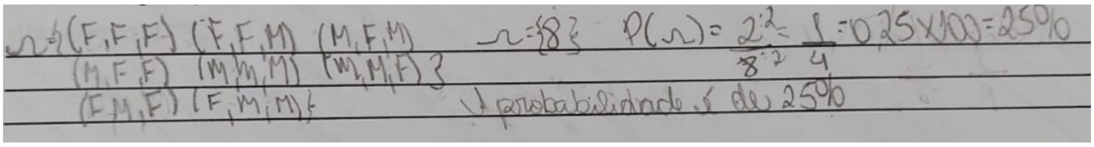
Nesta questão, o aluno deve determinar o espaço amostral, representando "F" para feminino e "M" para masculino, ao combinar as possibilidades dos filhos: $\Omega = \{(M, F, F), (M, F, M), (M, M, F), (M, M, M), (F, M, M), (F, FM), (F, M, F), (F, F, F)\}$.

A partir deste espaço amostral, devemos identificar o nascimento de filhos do mesmo sexo, que é representado por: A $= \{(M, M, M), (F, F, F)\}$.

Finalmente, procedemos para o cálculo da probabilidade.

Os dados apresentados indicam que a questão sobre a probabilidade de um casal ter três filhos do mesmo sexo foi considerada relativamente difícil para a maioria dos estudantes.

Figura 51 – Neste exemplo, o aluno escreveu corretamente o espaço amostral e calculou a probabilidade.



Fonte: Elaborado pela autora.

8. Foram preparadas noventa empadinhas de camarão, das quais, a pedido, sessenta deveriam ser bem mais apimentadas. Por pressa e confusão de última hora, foram todas colocadas ao acaso, numa mesma travessa para serem servidas. Qual é a probabilidade de alguém retirar uma empadinha mais apimentada?

No problema proposto, o aluno deverá calcular a probabilidade de alguém retirar uma das 60 empadinhas mais apimentadas de um total de 90 empadinhas de camarão.

Tabela 18 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 8.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
29	3	9	7
60%	6%	19%	15%

Fonte: Elaborada pela autora.

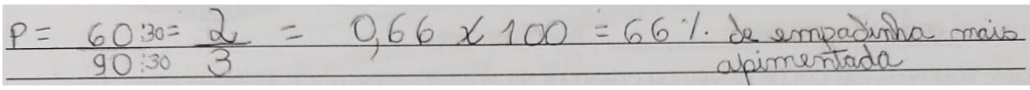
Nessa questão, 60% dos estudantes acertaram e compreenderam corretamente como calcular a probabilidade neste contexto específico. Isso demonstra um bom entendimento por parte da maioria dos alunos em relação a esse conceito.

Enquanto 6% acertaram parcialmente, é possível que esses estudantes tenham feito algum progresso na resolução do problema, mas não tenham alcançado a resposta correta ou não tenham compreendido completamente o conceito de probabilidade em eventos como este.

Por outro lado, 19% responderam incorretamente, sugerindo que esse grupo de estudantes pode ter cometido erros ao calcular a probabilidade ou não ter compreendido bem o problema.

Além disso, temos 15% que não responderam, o que pode indicar que esses estudantes não se sentiram confiantes o suficiente para resolver o problema ou não estavam familiarizados com o conceito de probabilidade nesse contexto.

Figura 52 – No exemplo, o estudante desenvolveu corretamente a questão.



Fonte: Elaborado pela autora.

9. (OBMEP-2016) A professora decidiu premiar, por sorteio, dois dentre os 20 alunos da turma de João. Para o sorteio, 20 bolas com os números dos alunos foram colocadas em uma caixa. A primeira bola sorteada pela professora caiu no chão e se perdeu, sem que ninguém visse seu número. Ela decidiu fazer o sorteio das bolas restantes. Qual é a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados?

Ao ler a questão, o estudante deve interpretar que, durante o sorteio, a professora acidentalmente deixou cair uma bolinha no chão, a qual se perdeu, tornando impossível determinar se pertence a João ou não. Portanto, não é viável fazer qualquer afirmação sobre a origem da bolinha, ou seja, se ela é de João ou não. Após compreender esse cenário, o estudante deve proceder para calcular a probabilidade de João ter sido um dos dois sorteados, levando em consideração essa incerteza em relação à bolinha perdida.

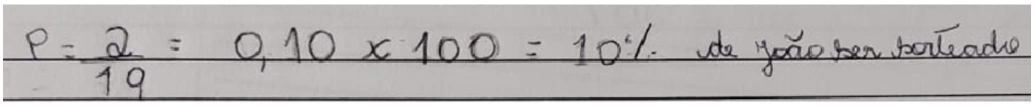
Tabela 19 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 9.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
20	2	21	5
42%	4%	44%	10%

Fonte: Elaborada pela autora.

Além disso, um grupo de 10% dos alunos não respondeu à questão, pois podem não ter se sentido confortáveis em lidar com esse problema ou podem não ter tido tempo para respondê-la.

Figura 53 – Nesse exemplo, o estudante excluiu João do espaço amostral, o que levou a uma resposta incorreta.



Fonte: Elaborado pela autora.

10. (ENEM - 2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

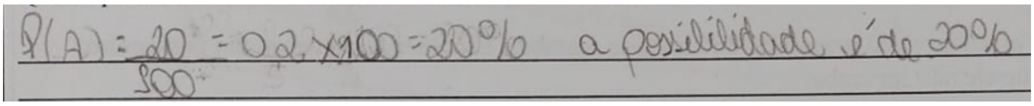
Tabela 20 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 10.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
38	0	5	5
80%	0%	10%	10%

Fonte: Elaborada pela autora.

Para a solução deste item, o estudante deve calcular a probabilidade de a senha sorteada ser um número entre 1 e 20, considerando que foram distribuídas senhas numeradas de 1 a 100 para um grupo de 100 pessoas.

Figura 54 – No exemplo, o estudante demonstrou compreensão dos conceitos de probabilidade.



Fonte: Elaborado pela autora.

11. Sandra comprou uma caixa de balas sortidas. Na caixa, havia 8 balas de sabor menta, 6 balas de sabor morango, 6 balas de sabor caramelo e 4 balas de sabor tangerina. Qual a probabilidade de Sandra escolher na caixa, ao acaso, uma bala de sabor tangerina?

O aluno deve encontrar o espaço amostral ao juntar as 8 balas de sabor menta, 6 balas de sabor morango, 6 balas de sabor caramelo e 4 balas de sabor tangerina, totalizando 24 balas no conjunto. Em seguida, ele deve calcular a probabilidade de que, ao retirar aleatoriamente uma bala, esta seja de sabor tangerina. Isso requer a aplicação dos princípios de probabilidade para determinar a chance de escolher uma bala específica dentro desse conjunto diversificado de sabores.

Tabela 21 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 11.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
23	2	17	6
48%	4%	35%	13%

Fonte: Elaborada pela autora.

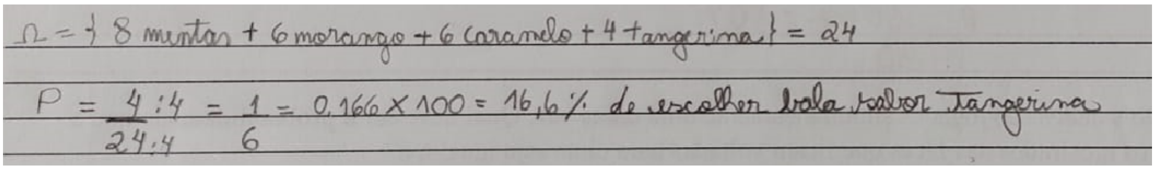
Dos participantes, apenas 48% responderam corretamente à questão, demonstrando que adquiriram uma boa compreensão dos conceitos de probabilidade. Esse grupo revela um domínio satisfatório desses princípios, o que indica a eficácia do ensino e aprendizado desses conceitos.

Além disso, 4% acertaram parcialmente a questão, o que pode indicar que alguns alunos conseguiram calcular a probabilidade parcialmente ou compreender parte do conceito.

Outros 35% responderam de forma incorreta, indicando que podem ter cometido erros em todo o processo de cálculo ou interpretaram erroneamente a pergunta.

Por fim, 13% dos participantes não conseguiram resolver a questão, o que pode refletir que a probabilidade é um conceito matemático não familiar para esse grupo ou que a pergunta foi mal compreendida.

Figura 55 – No exemplo, o aluno compreendeu bem o que estava sendo pedido, demonstrando entendimento das instruções do problema apresentado.



Fonte: Elaborado pela autora.

12. (ENEM – 2010) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

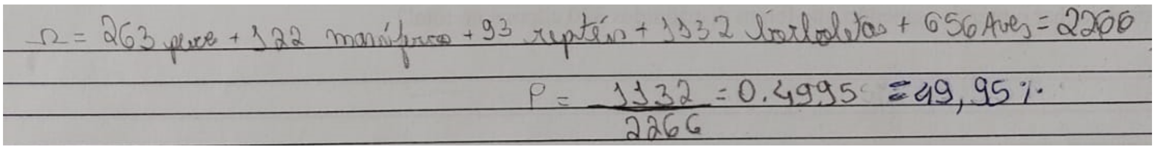
Tabela 22 – Resultado da avaliação das turmas A e B: Questão 12.

Totalmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não respondeu**
24	4	13	7
50%	8%	27%	15%

Fonte: Elaborada pela autora.

É uma questão do ENEM, na qual o estudante deve determinar o espaço amostral, que é a soma das espécies de animais, incluindo 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves. Após encontrar o espaço amostral, o próximo passo é calcular a probabilidade de que uma das espécies seja uma borboleta. Isso requer a aplicação dos princípios de probabilidade para determinar a chance de selecionar uma borboleta entre essa diversidade de espécies.

Figura 56 – No exemplo, o aluno desenvolveu a questão de forma correta.



Fonte: Elaborado pela autora.

Após a aplicação da avaliação final, notamos uma significativa melhora no nível de compreensão dos estudantes em relação ao conceito de probabilidade. Esse progresso é atribuído à abordagem pedagógica adotada ao longo das aulas. Além disso, é importante destacar que os alunos demonstraram um maior engajamento e interesse na probabilidade, o que contribuiu para esse resultado positivo.

7 Considerações Finais

Como podemos observar, a utilização de aulas diferenciadas desempenha um papel importante na compreensão do conteúdo pelo estudante, tornando o processo de aprendizagem mais eficaz. Além disso, é notável o entusiasmo e o envolvimento dos alunos quando introduzimos algo novo, como atividades interativas ou abordagens criativas, o que não apenas os torna mais interessados pela matéria, mas também promove a participação ativa e a assimilação do conhecimento.

O desenvolvimento de nossa sequência didática nas duas turmas selecionadas teve início com uma avaliação diagnóstica. O objetivo era investigar o nível de compreensão dos conceitos de probabilidade adquiridos pelos estudantes nos anos anteriores do ensino fundamental. Essa avaliação serviu como um ponto de partida para compreender o estado atual da aprendizagem e, assim, direcionar o estudo da probabilidade.

No entanto, ao analisar os resultados da avaliação diagnóstica, notamos que alguns estudantes apresentaram dificuldades em resolver problemas simples de probabilidade do ensino fundamental. Isso pode ser devido ao fato de que, nos anos anteriores, o conteúdo de probabilidade foi ensinado de forma tradicional, sem despertar o interesse dos alunos, ou até mesmo não ter sido apresentado corretamente.

Após a aplicação da avaliação diagnóstica e a análise dos resultados, optamos por utilizar um jogo como estratégia para introduzir o conceito de probabilidade no ensino médio. Durante o jogo, observamos uma melhoria significativa na participação e no envolvimento dos estudantes com o estudo da probabilidade no ensino médio.

Trabalhando em grupos, o jogo promoveu a participação ativa de todos os estudantes, o que não apenas facilitou a compreensão das atividades propostas, mas também despertou um maior interesse pelo assunto. Essa abordagem contribuiu significativamente para o aprendizado eficaz da probabilidade. Conforme destacado por Davis e Oliveira (1994, p. 91), "é preciso que os alunos participem ativamente da aprendizagem, fazendo perguntas e propondo soluções. Não se recomenda que a aprendizagem se restrinja a fórmulas e memorização, seja de definições, seja de textos". Portanto, a importância de uma abordagem mais interativa e participativa, que vai além de uma simples memorização, promovendo uma aprendizagem mais profunda e duradoura do conteúdo.

> É importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não literal e não arbitrária. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. (MOREIRA, 2012, p. 2)

Entretanto, proporcionar meios para que a aprendizagem do aluno seja significativa é essencial para que os novos conhecimentos adquiram sentido. Nesse contexto, a aprendizagem significativa envolve uma conexão profunda entre o conhecimento prévio e o conteúdo, tornando o processo de aprendizagem mais relevante e duradouro.

Ao propor atividades investigativas aos alunos, não se espera que todas as dificuldades em matemática sejam resolvidas imediatamente, mas, de fato torna as aulas mais atraentes e acessíveis. Isso resulta em alunos mais motivados e interessados pela disciplina, o que, por sua vez, contribui para a melhoria no aprendizado. De acordo com a (BNCC, 2018, p. 529) "novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos".

Por fim, aplicamos uma avaliação final para verificar se ocorreu a aprendizagem dos conceitos trabalhados ao longo da sequência didática. Foi possível observar que houve uma notável melhora em relação às atividades desenvolvidas e ao aprendizado após o desenvolvimento das atividades.

É fundamental que todos os educadores busquem estratégias motivadoras que proporcionem uma aprendizagem significativa para os estudantes. O uso de jogos se revelou uma ferramenta eficaz nesse contexto, pois vai além da abstração, introduzindo elementos lúdicos que tornam as aulas mais dinâmicas e desafiadoras. Essa abordagem não apenas facilita a assimilação de conceitos, mas também estimula um ambiente de aprendizagem enriquecedor, no qual os estudantes se transformam em participantes ativos do seu próprio processo educacional.

Bibliografia

[1] *ALMEIDA, A, B.* O Problema Epistemológico da Probabilidade e a contribuição de Karl Popper para o respectivo debate. Universidade Nova Lisboa, 2005.

[2] *ANDRADE, T. M.* Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

[3] *APRESENTAÇÃO, K. R. S.; TEIXEIRA, R. R. P.* Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática. *Revista Linhas*, Florianópolis, v. 15, n. 28, p. 302-323, 2014.

[4] *ARAGÃO, M. J.* História da Matemática. Rio de Janeiro: Interciência, 2009. Pág. 85.

[5] *BARROSO, J. M.* Conexões com a matemática. São Paulo: Moderna, 2010.

[6] *BERLINGHOFF, W. Q.; GOUVÊA, F. Q.* A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010. p. 211.

[7] *BIANCHINI, E.* Matemática Bianchini, 9° ano. 8ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

[8] *BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J.R.G.; SOUSA, P.R.C.* Prisma matemática: Estatística, combinatória e probabilidade. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

[9] *BORIN, J.* Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 2004.

[10] *BOYER, C.B; MERZBABACH, U. C.* História da Matemática. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012, p. 197, 198.

[11] *BRASIL.* Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

[12] *BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B.* Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 33, 2009, p. 69-96.

[13] *CALABRIA, A.R.; CAVALARI, M.F.* Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. In: *X Seminário Nacional de História da Matemática.* Campinas, 2013.

[14] *CASTILLO ARREDONDO, S.* Avaliação educacional e promoção escolar. Curitiba: InterSabere, 2013.

[15] *CENTURIÓN, M., JAKUBOVIC, J.* Matemática: teoria e contexto, 8° ano. 1ª ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

[16] *COUTINHO, C.Q.S.* Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *REVEMAT, UFSC*, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007.

[17] *DANTE, L. R.* Tudo é matemática, 9° ano. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009.

[18] *DANTE, L. R.; VIANA, F.* Matemática em contexto: Análise combinatória, probabilidade e computação. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

[19] *DAVIS, C.,OLIVEIRA, Z.* Psicologia da educação. São Paulo: Cortez, 1994.

[20] *EVES, H.* Introdução à história da matemática. Tradução: Higyno H. Domingos. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[21] *HADJI, C.* A avaliação, regras do jogo: das intenções aos instrumentos. 4ª ed. Porto: Porto Editora, 1994.

[22] *HAYDT, R. C. C.* Avaliação do processo ensino-aprendizagem. 6ª ed. São Paulo: Ática, 2007.

[23] *LOPES, C. E.; MEIRELLES, E.* Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística. In: XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática – LEM/IMECC/UNICAMP, 2005.

[24] *LUCKESI, C.C.* Avaliação da aprendizagem escolar. 14ª ed. São Paulo: Cortez, 2002.

[25] *MILL, D.* Reflexões sobre aprendizagem ativa e significativa na cultura digital. Documento eletrônico. São Carlos: SEaD-UFSCar, 2021.

[26] *MORAN, J.M.* A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá. 5ª ed. Campinas: Papirus, 2005.

[27] *MOREIRA, M. A.* O que é afinal aprendizagem significativa? *Revista Qurriculum*, v. 25, 2012.

[28] *MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.* Matemática Discreta. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[29] *PASTELLS, À, A.* Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos: para crianças de 6 a 12 anos. 3ª ed. Curitiba: Base Editorial, 2009.

[30] *RIBEIRO, F. D.* Jogos e Modelagem na Educação Matemática. 1ª ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2009.

[31] *SILVA, Fabrício Menezes Netto.* Jogos no processo de ensino-aprendizagem em probabilidade. São Carlos, 2013. 71 p. Dissertação Mestrado Profissional - UFSCAR.

[32] *SOUZA, J.R.* Multiversos Matemática: Estatística e probabilidade. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

[33] *VIALI, L.* Algumas considerações sobre a origem da teoria das probabilidades. *Revista Brasileira de História da Matemática*, n. 16, v. 8, p. 143-153, Out. 2008.

[34] *ZINDEL, M.L.* Tomada De Decisão E Risco: A Contribuição Dos Matemáticos E Estatísticos. *Estadística y Sociedad*, México, p. 05-30, n. 5, 2018.

8 Anexos

Anexo A

Questões utilizadas na Avaliação diagnóstica:

1. Uma urna contém 2 bolas amarelas, 4 bolas azuis e 3 bolas vermelhas. Ao retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser azul? E vermelha?

2. No lançamento de um dado honesto, qual é a probabilidade de:

a) sair a face com número ímpar;

b) não sair a face com número 4;

3. Num avião viajam 20 brasileiros, 10 japoneses, 8 italianos e 3 espanhóis. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele ser:

a) espanhol

b) norte-americano

4. Em um estojo, há 6 canetas azuis e 4 vermelhas. Qual é a probabilidade de retirarmos desse estojo ao acaso:

a) uma caneta azul

b) uma caneta vermelha

5. Imagine que vinte pedaços de papel são numerados de 1 a 20. Se um desses papéis for sorteado, calcule a probabilidade de ser retirado:

a) um número primo

b) um número maior do que 8

6. Para obter verbas para a formatura do 9° ano, a equipe de Rose rifou uma bicicleta. A rifa tinha 100 números e Rose comprou 4 deles. Qual a chance de Rose ganhar a bicicleta?

7. Qual é a probabilidade de sair soma 6 no lançamento de dois dados?

8. A professora vai sortear ao acaso, um aluno entre os 30 da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala, qual é a probabilidade de ser sorteada uma menina? E de ser sorteado um menino?

9. No lançamento de duas moedas, a probabilidade de se obter pelo menos uma cara é:

a) 50% b) 100% c) 25% d) 75% e) 33%

10. Ao lançar dois dados diferentes, o número total de resultados possíveis é:

a) 6 b) 12 c) 18 d) 36

Descreva esses resultados:

Anexo B

Questões de probabilidade utilizadas no jogo de perguntas e respostas:

1. Se lançarmos um dado, qual a probabilidade de obtermos um número maior que 4? Resposta: 1/3

2. Numa urna há bolinhas numeradas de 1 a 40. Qual é a probabilidade de sair um número ímpar? Resposta: 1/2

3. Se lançarmos uma moeda, qual a probabilidade do lado "cara" ficar voltado para cima? Resposta: 1/2

4. Um restaurante está com 13 pessoas: 9 clientes e 4 garçons. Se escolhermos uma pessoa do local aleatoriamente, qual a probabilidade de ser um cliente? Resposta:9/13

5. Numa urna há bolinhas numeradas de 1 a 50. Qual é a probabilidade de sair um número par? Resposta: 1/2

6. Um presente foi sorteado entre 4 meninas e 3 meninos. Qual é a probabilidade de uma menina ganhar o presente? Resposta: 4/7

7. Da palavra MATEMÁTICA, qual é a letra com maior probabilidade de sair? Resposta: A

8. Uma urna contém 6 bolas brancas e 24 vermelhas. Qual é a probabilidade de sortearmos uma bola branca? Resposta: 1/5

9. Jogando-se um dado comum, qual é a probabilidade de ocorrer um número menor do que 5? Resposta: 2/3

10. No lançamento de dois dados perfeitos, qual a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos nas faces seja igual a 12? Resposta: 1/36

11. Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde? Resposta: 5/12

12. Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face para cima? Resposta: 1/4

13. Ao lançar um dado não viciado, qual a probabilidade de sair um número maior que 4? Resposta: 1/3

14. Quantas cartas diferentes tem um baralho? Resposta: 52

15. Qual é a chance de sortear um rei de paus? Resposta: 1/13

16. Se você escolher aleatoriamente uma letra no alfabeto, qual a probabilidade de selecionar uma vogal? Resposta: 5/26

17. Se uma turma é formada por 8 alunas do sexo feminino e 7 alunos do sexo masculino e a professora escolher aleatoriamente um estudante para ir ao quadro resolver um exercício, qual a probabilidade de ser selecionada uma aluna? Resposta: 8/15

18. Ao jogar um dado, qual a probabilidade de obtermos um número ímpar voltado para cima? Resposta: 1/2

19. Se lançarmos dois dados ao mesmo tempo, qual a probabilidade de dois números iguais ficarem voltados para cima? Resposta: 1/6

20. O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de? Resposta: Espaço amostral

21. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de? Resposta: Evento

22. Um saco contém 8 bolas idênticas, mas com cores diferentes: três bolas azuis, quatro vermelhas e uma amarela. Retira-se ao acaso uma bola. Qual a probabilidade da bola retirada ser azul? Resposta: 3/8

23. Qual a probabilidade de tirar um ás ao retirar ao acaso uma carta de um baralho com 52 cartas, que possui quatro naipes (copas, paus, ouros e espadas) sendo 1 ás em cada naipe? Resposta: 1/13

24. Sorteando-se um número de 1 a 20, qual a probabilidade de que esse número seja múltiplo de 2? Resposta: 1/2

25. Um cartão é retirado aleatoriamente de um conjunto de 10 cartões numerados de 1 a 10. Determine a probabilidade do cartão retirado ser de um número primo. Resposta: 2/5

26. Quatro moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa em uma só moeda? Resposta: 1/4

27. Um cartão é retirado aleatoriamente de um conjunto de 15 cartões numerados de 1 a 15. Determine a probabilidade do cartão retirado ser de um número primo. Resposta: 2/5

28. Se uma turma é formada por 8 alunos do sexo feminino e 7 do sexo masculino e a professora escolher aleatoriamente um estudante para ir ao quadro resolver um exercício, qual a probabilidade de ser selecionada um aluno? Resposta: 7/15

29. Se você escolher aleatoriamente uma letra no alfabeto, qual a probabilidade de selecionar uma consoante? Resposta: 21/26

30. Ao jogar um dado, qual a probabilidade de obtermos um número 7 voltado para cima? Resposta: 0

Anexo C

Após o jogo, utilizamos as seguintes atividades complementares:

1) Qual foi o grupo ganhador da primeira etapa do jogo de perguntas e respostas?

2) Quantos participantes ficaram sem responder corretamente no grupo perdedor?

3) Quantas chaves recebeu o grupo A? E o grupo B?

4) Quem tem mais chances de abrir o baú, o grupo A ou o grupo B? Por que?

5) O grupo A só ganhará se escolher a chave correta na primeira tentativa? Justifique sua resposta.

6) Você acha que o grupo que tem mais chaves, terá alguma chance de abrir o baú? Explique.

7) Calcular a probabilidade do grupo A vencer, e a probabilidade de B vencer, caso receba três chaves. Escreva a fração que representa a chance da equipe A ganhar em porcentagem e a chance da equipe B ganhar também em porcentagem.

8) Calcular a probabilidade do grupo A vencer, e a probabilidade de B vencer, caso receba cinco chaves. Escreva a fração que representa a chance da equipe A ganhar em porcentagem e a chance da equipe B ganhar também em porcentagem.

9) Para receber 6 chaves o grupo B deverá ter quantos integrantes que não acertaram as perguntas? E se receber 4 chaves, quantos integrantes deixaram de responder corretamente?

10) Por que o grupo que recebe menos chaves tem mais chance de abrir o baú?

Anexo D

Questões utilizadas nas atividades com dados:

1. Pegue um dado e jogue 15 vezes, marque com um x o resultado de cada jogada no tabuleiro.

Figura 57 – Turmas A e B - Questão 1

1															
2															
3															
4															
5															
6															

Fonte: PASTELLS, À, A, 2009.

Responda as seguintes perguntas.

- Qual número saiu mais vezes?

- Qual número saiu menos vezes?

- Acha mais fácil sair algum dos resultados possíveis?

- Acha que, se voltar a jogar 15 vezes o dado, obterá os mesmos resultados? Por quê?

2. Com um dado convencional, imagine quais das seguintes situações são garantidas, possíveis ou impossíveis. Marque com um X seguindo o exemplo:

Figura 58 – Turmas A e B - Questão 1

SITUAÇÃO	GARANTIDO	POSSÍVEL	IMPOSSÍVEL
Que saia o 6			
Que saia um número maior do que 6			
Que saia um número entre 1 e/ou 6			
Que saia o 10			
Que saia o 2 ou o 3			
Que saia um número par			

Fonte: PASTELLS, À, A, 2009.

3. Jogue um dado 30 vezes e anote na primeira tabela cada número que saiu. Depois jogue o dado 50 vezes e volte anotar o resultados.

Figura 59 – Questão 3

	30 vezes	50 vezes
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Fonte: Fonte: PASTELLS, À, A, 2009.

Responda as seguintes perguntas:

- Obteve todos os resultados possíveis o mesmo número de vezes?

- Qual foi o resultado mais provável e o menos provável ao jogar o dado 30 vezes?

- E ao jogar o dado 50 vezes?

Anexo E

Atividades trabalhadas com dois dados:

Ao trabalhar com os dados em grupos, os alunos se envolveram na resolução das seguintes perguntas:

Ao manipular ambos os dados, descreva:

a) O espaço amostral observando as faces dos dois dados.

b) Qual seria a probabilidade de se obter uma soma par no lançamento de dois dados no caso do grupo ter escolhido par?

c) Qual seria a probabilidadde de se obter uma soma ímpar no lançamento de dois dados no caso do grupo ter escolhido ímpar?

d) Qual seria a probabilidade de se obter uma produto ímpar no lançamento de dois dados no caso do grupo ter escolhido ímpar?

e) Qual seria a probabilidade de se obter uma produto par no lançamento de dois dados no caso do grupo ter escolhido par?

Anexo F

Questões utilizadas na avaliação final:

1. No lançamento de duas moedas, qual é probabilidade de se obter uma cara e uma coroa?

2. Testada em 1000 crianças, uma vacina imunizou 800 delas. Considerando ao acaso uma das crianças que receberam a vacina, qual a probabilidade de ela estar imunizada?

3. Em um avião viajam 40 brasileiros, 20 japoneses, 8 italianos e 3 árabes. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele não ser árabe.

4. (UFSCar SP) Uma urna tem 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. Se retirarmos uma bola da urna, qual a probabilidade de não obtermos a bola de número 7?

5. (UCS –RS) Dois dados são jogados simultaneamente uma única vez. Qual deve ser a probabilidade de que a soma dos números mostrados nas faces que ficam voltadas para cima seja igual a 6?

6. Rafael tem 6 cupons de uma promoção, cujo prêmio é um almoço em uma churrascaria. Qual a probabilidade de Rafael ganhar o prêmio, sabendo que foram distribuídos 320 cupons no total?

7. Um casal planeja ter 3 filhos. Qual a probabilidade de os 3 serem do mesmo sexo?

8. Foram preparadas noventa empadinhas de camarão, das quais, a pedido, sessenta deveriam ser bem mais apimentadas. Por pressa e confusão de última hora, foram todas colocadas ao acaso, numa mesma travessa para serem servidas. Qual é a probabilidade de alguém retirar uma empadinha mais apimentada?

9. A professora decidiu premiar, por sorteio, dois dentre os 20 alunos da turma de João. Para o sorteio, 20 bolas com os números dos alunos foram colocadas em uma caixa. A primeira bola sorteada pela professora caiu no chão e se perdeu, sem que ninguém visse seu número. Ela decidiu fazer o sorteio das bolas restantes. Qual é a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados?

10. (ENEM - 2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

11. Sandra comprou uma caixa de balas sortidas. Na caixa, havia 8 balas de sabor menta, 6 balas de sabor morango, 6 balas de sabor caramelo e 4 balas de sabor tangerina. Qual a probabilidade de Sandra escolher na caixa, ao acaso, uma bala de sabor tangerina?

12. (ENEM – 2010 - adaptado) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves. Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?