UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

STEFHANI EMILIANI VICENTE PEREIRA

SIMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA ARTÍSTICA

SÃO CARLOS
2024

STEFHANI EMILIANI VICENTE PEREIRA

SIMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA ARTÍSTICA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti

SÃO CARLOS
2024

Dedico este trabalho primeiramente a Deus,
aos meus pais, Luciana e José,
ao meu esposo Lucas e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus pela porta de estudos que têm aberto na minha vida, por me ajudar a enfrentar e superar todos os obstáculos que apareceram no meu caminho.

Agradeço a minha família, em especial minhas tias Rosângela, Claudia, Eucely, meu tio Antônio, meus pais, José e Luciana e meu esposo Lucas que sempre me apoiaram e ajudaram nos momentos difíceis, com palavras de incentivo e muito carinho, os quais foram muito importantes para a minha trajetória até aqui.

Agradeço às minhas amigas Jeniffer, Mariana, Livía, Daiani, Giovana, Heloise, Luara e Lilian, por sempre estarem ao meu lado, e contribuíram de alguma forma com o desenvolvimento deste trabalho. As minhas amigas, Maiara e Deborah, por compartilharem comigo diversas situações inusitadas e também pelos momentos de aprendizado.

Agradeço o meu orientador, Dr° Pedro Luiz Aparecido Malagutti, pelas conservas, pela paciência, apoio e as mágicas feitas durante as reuniões, pois tornaram mais prazeroso e estimulante o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho almeja-se proporcionar uma reflexão acerca da simetria na Educação Básica, enfatizando a relevância do diálogo entre a Simetria e a Arte para o processo de ensino e aprendizagem. No intuito de alcançar esse objetivo, será realizado uma análise das mudanças vinculadas às concepções da simetria ao longo do tempo. Logo após, será estruturada uma discussão teórica referente às propriedades e conceitos empregados à simetria, seguida por uma investigação sobre como este tópico acaba sendo abordado no contexto escolar. Dessa forma, a perspectiva adotada para conectar essas temáticas é a análise das obras de arte do artista Maurits Cornelis Escher, cujas composições apresentam muitas transformações geométricas. Adicionalmente, será desenvolvido um plano de aula para abordar esse tema na instituição escolar, analisando na prática as possíveis dificuldades e os aprendizados que os estudantes poderão vivenciar ao explorar os conceitos relacionados à simetria, por meio da interação com os recursos artísticos.

Palavras-chave: Simetria. Matemática. Arte. Educação Básica. Escher.

ABSTRACT

In this work, the aim is to provide a reflection on symmetry in Basic Education, emphasizing the relevance of the dialogue between Symmetry and Art for the teaching and learning process. In order to achieve this goal, an analysis of the changes related to symmetry concepts over time will be carried out. Subsequently, a theoretical discussion regarding the properties and concepts employed in symmetry will be structured, followed by an investigation into how this topic is approached in the school context. Thus, the perspective adopted to connect these themes involves the analysis of the artworks of the artist Maurits Cornelis Escher, whose compositions exhibit numerous geometric transformations. Additionally, a lesson plan will be developed to address this theme in the school setting, analyzing in practice the potential difficulties and learning experiences that students may encounter when exploring symmetry concepts through interaction with artistic resources.

Keywords: Symmetry. Mathematics. Arts. Basic Education. Escher.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplo de Obra Egípcia 16
Figura 1.2 – Exemplo de Obra Suméria na Mesopotâmia 16
Figura 1.3 – Exemplo de Obra Renascentista: Monalisa 17

Figura 2.1 – Ilustração do Exemplo 2.1.1 20
Figura 2.2 – Representação da transformação como função injetiva 21
Figura 2.3 – Representação da Proposição 2.2 22
Figura 2.4 – Exemplo de Translação com vetor na horizontal 24
Figura 2.5 – Exemplo de Translação com vetor na vertical 24
Figura 2.6 – P' é o simétrico de P em relação à reta 25
Figura 2.7 – Ilustração da Proposição 2.6 item (ii) 26
Figura 2.8 – Ilustração da Proposição 2.6 item (iii) 26
Figura 2.9 – Ilustração da Proposição 2.6 item (iv) 27
Figura 2.10 – Exemplo de Reflexão em torno de uma reta vertical 28
Figura 2.11 – Exemplo de Reflexão em torno de uma reta na diagonal 28
Figura 2.12 – Ângulo Orientado 28
Figura 2.13 – Ilustração da Proposição 2.7 29
Figura 2.14 – Rotação para determinado centro escolhido 30
Figura 2.15 – Rotação com ângulo de 180° 30
Figura 2.16 – Exemplo de Reflexão seguida de Translação 31
Figura 2.17 – Parte 1 (Exemplo de Reflexão seguida de Translação) 31
Figura 2.18 – Parte 2 (Exemplo de Reflexão seguida de Translação) 32
Figura 2.19 – Parte 3 (Exemplo de Reflexão seguida de Translação) 32
Figura 2.20 – Ilustração do Teorema 2.1 33
Figura 2.21 – Ilustração Definição 2.9 35
Figura 2.22 – Ilustração Proposição 2.10- Pontos Colineares 36
Figura 2.23 – Ilustração Proposição 2.10- Pontos não Colineares 36
Figura 2.24 – Exemplo de Rosetas 38
Figura 2.25 – Exemplo de Frisos 39
Figura 2.26 – Exemplo de Papéis de Parede 39

Figura 3.1 – Questão 12 do Nível 1 da 1° Fase no ano de 2010 44
Figura 3.2 – Questão 14 do Nível 2 da 1° Fase no ano de 2005 45
Figura 3.3 – Questão 6 do Nível 2 da 1° Fase no ano de 2021 46
Figura 3.4 – Questão 3 do Nível A da 1° Fase no ano de 2019 46
Figura 3.5 – Questão 7 do Mirim 1 da 2° Fase no ano de 2022 47
Figura 3.6 – Questão 4 do Nível 1 da 2° Fase no ano de 2018 47
Figura 3.7 – Questão Canguru 2012 - 3° Ano de Ensino Fundamental 49

Figura 3.8 – Questão Canguru 2015 - 3° Ano de Ensino Fundamental 50
Figura 3.9 – Questão Canguru 2012 - 3° Ano de Ensino Fundamental 51
Figura 3.10 – Questão Canguru 2016 - 4° Ano de Ensino Fundamental 51
Figura 3.11 – Questão Canguru 2014 - 5° e 6° Ano de Ensino Fundamental 51
Figura 3.12 – Questão Canguru 2020 - 7° e 8° Ano de Ensino Fundamental II 52
Figura 3.13 – Questão Canguru 2021 - 9° Ano de Ensino Fundamental II 52
Figura 3.14 – Questão Canguru 2019- 1° e 2° Ano de Ensino Médio 53
Figura 3.15 – Questão Canguru 2019- 1° e 2° Ano de Ensino Médio 53

Figura 5.1 – “Pégaso” de 1959 62
Figura 5.2 – Representação de F_0 na obra “Pégaso” 63
Figura 5.3 – Representação para o vetor $\vec{u}$ na obra “Pégaso” 63
Figura 5.4 – Representação para o vetor $\vec{v}$ na obra “Pégaso” 63
Figura 5.5 – “Bird Fish” de 1938 64
Figura 5.6 – Representação de Vetores no “Bird Fish” 64
Figura 5.7 – “Limite Circular IV” de 1960 65
Figura 5.8 – Recorte do “Limite Circular IV" 65
Figura 5.9 – Representação do Eixo de Simetria no recorte do “Limite Circular IV” 65
Figura 5.10 – Representação da figura inicial F_0 no recorte da obra “Limite Circular IV” 65
Figura 5.11 – Representação da Figura F na obra “Limite Circular IV” 66
Figura 5.12 – Segmento $\overline{PP'}$ na obra “Limite Circular IV” 66
Figura 5.13 – Representação da nova F_0 e F na obra “Limite Circular IV” 67
Figura 5.14 – Representação do segmento PP' em relação a nova F_0 na obra “Limite Circular IV” 67
Figura 5.15 – “Systematic Study” de 1936 67
Figura 5.16 – F_0 na obra “Systematic Study” 68
Figura 5.17 – Recorte da F_0 da obra “Systematic Study” no GeoGebra 68
Figura 5.18 – Segmento AB e recorte da obra “Systematic Study” 68
Figura 5.19 – Recurso para a reflexão em torno de uma reta no GeoGebra 69
Figura 5.20 – Reflexão do recorte da obra “Systematic Study” 69
Figura 5.21 – Comparando a obra “Systematic Study” com o resultado criado no GeoGebra 69
Figura 5.22 – “Shells and Starfish” de 1941 70
Figura 5.23 – Representação da nova F_0 na obra “Shells and Starfish” 70
Figura 5.24 – Representação do centro de rotação O no “Shells and Starfish” 70
Figura 5.25 – Recorte da F_0 da obra “Shells and Starfish” no Geogebra 71
Figura 5.26 – Recurso do GeoGebra para a rotação 71
Figura 5.27 – Ângulo de 90° para a F_0 da obra “Shells and Starfish” 72
Figura 5.28 – Resultado de $S_{O,\theta}$ para $\theta = 90^\circ$ 72
Figura 5.29 – Resultado de $S_{O,\theta}$ para $\theta = 180^\circ$ 72

Figura 5.30 – Resultado de $S_{O,\theta}$ para $\theta = 270^\circ$ 72
Figura 5.31 – Comparando o bloco formado no GeoGebra com a obra “Shells and Starfish” 73
Figura 5.32 – Translação na obra "Shells and Starfish”: vetor na horizontal 73
Figura 5.33 – Translação na obra "Shells and Starfish”: vetor na vertical 73
Figura 5.34 – Translação na obra "Shells and Starfish”: vetor na diagonal 74
Figura 5.35 – “Lagartos n° 56 (Lizard)” de 1942 74
Figura 5.36 – F_0 na obra “Lizard” 74
Figura 5.37 – Recorte da F_0 da obra “Lizard” no GeoGebra 75
Figura 5.38 – Centro de Rotação (ponto C) no recorte da obra “Lizard” 75
Figura 5.39 – Resultado de $S_{C,\theta}$ para $\theta = 180^\circ$ na obra “Lizard” 75
Figura 5.40 – Comparando $S_{C,180^\circ}$ formado no GeoGebra com a obra “Lizard” 75
Figura 5.41 – Centro de Rotação (ponto A) no recorte da obra “Lizard” 76
Figura 5.42 – Resultado de $S_{A,180^\circ}$ 76
Figura 5.43 – Comparando $S_{A,180^\circ}$com a obra “Lizard” 76
Figura 5.44 – “Unicórnio” de 1950 77
Figura 5.45 – F_0 da obra “Unicórnio” 77
Figura 5.46 – Recorte da F_0 da obra “Unicórnio” no GeoGebra 77
Figura 5.47 – Eixo de Simetria AB e o recorte da obra “Unicórnio” 78
Figura 5.48 – Reflexão de F_0 na obra “Unicórnio” 78
Figura 5.49 – Vetor Escolhido ($\vec{u}$) na obra “Unicórnio” 78
Figura 5.50 – Recurso utilizado para a Translação no GeoGebra 78
Figura 5.51 – Translação da figura F_1 79
Figura 5.52 – Análise de F_0 e F_2 na obra “Unicórnio” 79
Figura 5.53 – Diminuição da distância entre F_0 e o eixo de simetria 79
Figura 5.54 – Resultado da Reflexão Deslizante “Unicórnios” com o GeoGebra 79
Figura 5.55 – “Regular Division of The Plane IV” de 1957 80
Figura 5.56 – Recorte da obra “Regular Division of The Plane IV” 80
Figura 5.57 – F_0 da obra “Regular Division of The Plane IV” 80
Figura 5.58 – Recorte da F_0 e segmento AB no GeoGebra 80
Figura 5.59 – Reflexão da F_0 na obra “Regular Division of The Plane IV” 81
Figura 5.60 – Vetor $\vec{u}$ na obra “Regular Division of The Plane IV” 81
Figura 5.61 – Translação de F_1 na obra “Regular Division of The Plane IV” 81
Figura 5.62 – Análise de F_0 e F_2 na obra “Regular Division of The Plane IV” 81
Figura 5.63 – Vetor $\vec{v}$ na obra “Regular Division of The Plane IV” 82
Figura 5.64 – Translação de F_2 a partir do vetor $\vec{v}$ 82
Figura 5.65 – Análise de F_0 e F_3 na obra “Regular Division of The Plane IV” 82
Figura 5.66 – Resultado da Reflexão Deslizante “Regular Division of The Plane IV” com o GeoGebra 82

Figura 5.67 – Comparação entre a Reflexão Deslizante com o recorte da obra “Regular Division of The Plane IV” 83
Figura 5.68 – “Symmetry Drawing” de 1948 83
Figura 5.69 – F_0 na obra “Symmetry Drawing” 84
Figura 5.70 – Recorte da F_0 da obra “Symmetry Drawing” no GeoGebra 84
Figura 5.71 – Vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com o recorte da obra “Symmetry Drawing” no GeoGebra 84
Figura 5.72 – Translação da F_0 considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ 84
Figura 5.73 – Centro de Rotação O, A, e C nas figuras F_0, F_1 e F_2 85
Figura 5.74 – Resultado da Rotação em F_0 com $\theta \approx 120^\circ$ 85
Figura 5.75 – Resultado da Rotação da figura F_1 e F_2 com $\theta \approx 120^\circ$ tanto no sentido horário quanto anti-horário 85
Figura 5.76 – Comparação entre o Resultado da Rotação com a obra “Symmetry Drawing” 85

Figura 6.1 – “Symmetry Watercolor 106 Bird” de 1959 88
Figura 6.2 – Recorte da figura Inicial da obra “Symmetry Watercolor 106 Bird” como Imagem de fundo no Geogebra 89
Figura 6.3 – Caminho Poligonal - Recurso do Geogebra 89
Figura 6.4 – Representação do Caminho Poligonal - $CP1$ 90
Figura 6.5 – Representação do Caminho Poligonal - $CP2$ 90
Figura 6.6 – Caminhos poligonais ($CP1$ e $CP2$) na obra “Symmetry Watercolor 106 Bird” 91
Figura 6.7 – Análise dos caminhos Poligonais criados na obra “Symmetry Watercolor 106 Bird” 91
Figura 6.8 – Pontos C, L e S fixados 91
Figura 6.9 – Análise dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (utilizando o recorte da obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 92
Figura 6.10 – Vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 92
Figura 6.11 – Translação de $CP1$ em relação à $\vec{u}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 92
Figura 6.12 – Translação de $CP2$ em relação à $\vec{v}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 92
Figura 6.13 – Análise da Simetria de Reflexão dos caminhos poligonais na obra “Symmetry Watercolor 106 Bird” 93
Figura 6.14 – Resultado final das translação dos caminhos poligonais em “Symmetry Watercolor 106 Bird” 93
Figura 6.15 – Sequência de translações de $CP1$ em relação ao vetor $\vec{u}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 94
Figura 6.16 – Sequência de translação de $CP2$ em relação ao vetor $\vec{v}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 94
Figura 6.17 – Sequência de translação de $CP1$ em relação ao vetor $\vec{v}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 94

Figura 6.18 – Sequência de translação de $CP2$ em relação ao vetor $\vec{u}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 94
Figura 6.19 – Análise da sequência de translações dos novos caminhos poligonais criados (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”) 95
Figura 6.20 – Resultado final das simetrias de translação na obra “Symmetry Watercolor 106 Bird” 95
Figura 6.21 – Obra “Horseman” de 1946 95
Figura 6.22 – Recorte da obra “Horseman” no Geogebra 96
Figura 6.23 – $CP1$ e $CP2$ na obra“Horseman” 96
Figura 6.24 – Pontos A, M_1 e A_2 fixados 96
Figura 6.25 – Eixo de Simetria (Segmento B_2C_2) 97
Figura 6.26 – Reflexão de $CP2$ em relação ao eixo (obra“Horseman”) 97
Figura 6.27 – Reflexão de $CP1$ em relação ao eixo (obra“Horseman”) 98
Figura 6.28 – Análise dos vetores (utilizando o recorte da obra “Horseman”) 98
Figura 6.29 – Vetores na obra“Horseman” 98
Figura 6.30 – Translação de $CP1'$ em relação ao vetor $\vec{u}$ (obra "Horseman”) 99
Figura 6.31 – Translação de $CP2'$ em relação ao vetor $\vec{v}$ ("obra Horseman”) 99
Figura 6.32 – Análise da Simetria de Reflexão dos caminhos poligonais na obra “Horseman” 100
Figura 6.33 – Resultado Final da Simetria de Reflexão 100
Figura 6.34 – Vetor $\vec{w}$ na obra “Horseman” 101
Figura 6.35 – Translação de $CP1$ em relação ao vetor $\vec{w}$ 101
Figura 6.36 – Translação dos caminhos poligonais em relação ao vetor $\vec{w}$ 102
Figura 6.37 – Vetor $\vec{t}$ na obra “Horseman” 102
Figura 6.38 – Translação dos caminhos poligonais em relação ao vetor $\vec{t}$ 102
Figura 6.39 – Análise dos caminhos Poligonais obra “Horseman” 103
Figura 6.40 – Sequência de Translações dos caminhos poligonais criados em relação aos vetroes $\vec{t}$ e $\vec{w}$ na obra “Horseman” 103
Figura 6.41 – Resultado Final das Sequências de Translação na obra “Horseman” 103
Figura 6.42 – Caminho Poligonal (CP) no recorte da obra “Systematic Study” 104
Figura 6.43 – Caminho Poligonal na obra “Systematic Study” 104
Figura 6.44 – Segmento CE_1 como eixo de Simetria na obra “Systematic Study” 104
Figura 6.45 – Reflexão do caminho Poligonal na obra “Systematic Study” 105
Figura 6.46 – Resultado Final da Simetria de Reflexão na obra “Systematic Study” 105
Figura 6.47 – Ponto K_1 como centro de rotação 106
Figura 6.48 – Rotação do caminho Poligonal CP' (obra “Systematic Study”) 106
Figura 6.49 – Resultado a reflexão do CP'' em relação ao $Eixo_2'$ (obra “Systematic Study”) 107
Figura 6.50 – Reflexão de cada caminho poligonal em relação ao novo eixo de Simetria (Eixo2) 107
Figura 6.51 – Vetores $\vec{w}$ e $\vec{t}$ na obra “Systematic Study” 108

Figura 6.52 – Sequência de Reflexões em relação aos eixos em vermelhos - Início em CP 109
Figura 6.53 – Sequência de Reflexões em relação aos eixos em vermelhos - Início em CP' 109
Figura 6.54 – Sequência de Reflexões em relação aos eixos em vermelhos - Início em CP'' e CP''' 110
Figura 6.55 – Rotação de CP''' com centro de Rotação D_1 (“Systematic Study”) 111
Figura 6.56 – Rotações e Reflexões em relação aos eixos em verde e os centros estabelecidos por translações de K_1 111
Figura 6.57 – Sequência de Reflexões de todos os caminhos poligonais em relação aos eixos em vermelhos 112
Figura 6.58 – Resultado Final das simetrias de reflexões e rotações na obra “Systematic Study” 112
Figura 6.59 – Caminhos Poligonais no recorte da obra obra “Unicórnio” 113
Figura 6.60 – $CP1$ e $CP2$ obra “Unicórnio” 113
Figura 6.61 – Análise do Vetor $\vec{u}$ na obra “Unicórnio” 113
Figura 6.62 – Vetor $\vec{u}$ na obra “Unicórnio” e Translação de $CP1$ 113
Figura 6.63 – Segmento F_3H_3 na obra “Unicórnio” 114
Figura 6.64 – Reflexão de $CP2$ e vetor $\vec{v}$ na obra “Unicórnio” 114
Figura 6.65 – Translação de $CP2''$ em relação a $\vec{v}$ na obra “Unicórnio” 114
Figura 6.66 – Resultado final da simetria de reflexão e translação em $CP1$ e $CP2$ 114
Figura 6.67 – Sequência de Translações de $CP1$ em relação ao vetor $\vec{u}$ na obra “Unicórnio” 115
Figura 6.68 – Sequência de Translações de $CP2$ e $CP2''$ em relação ao vetor $\vec{u}$ na obra “Unicórnio” 115
Figura 6.69 – vetor $\vec{w}$ e Reflexão de CP1 em relação ao segmento S 116
Figura 6.70 – $CP1''$- Resultado Final de reflexão Deslizante de $CP1$ 116
Figura 6.71 – Sequência de Translações de $CP1'''$ em relação a $\vec{u}$ 116
Figura 6.72 – Vetor $\vec{t}$ na obra “Unicórnio” 117
Figura 6.73 – Translação da primeira fileira em relação ao vetor $\vec{t}$ 117
Figura 6.74 – Translação da Segunda fileira em relação a $\vec{t}$ 117
Figura 6.75 – Translações sucessivas dos caminhos poligonais resultantes das interações anteriores 117
Figura 6.76 – Resultado Final das simetrias dos caminhos poligonais na obra “Unicórnio” 117

Figura 7.1 – Exemplo para os alunos se inspirarem 121
Figura 7.2 – Discussão sobre a Simetria na Sala de Aula 123
Figura 7.3 – Apresentação de exemplos envolvendo Simetrias 123
Figura 7.4 – Apresentação sobre Escher 123
Figura 7.5 – Exemplos de Simetrias nas obras de Escher 123
Figura 7.6 – Discussão sobre a Simetria de Translação 123
Figura 7.7 – Discussão sobre a Simetria de Reflexão 123

Figura 7.8 – Estudo das Simetria nas obras de Escher 124
Figura 7.9 – Construindo a Simetria de Reflexão em sala de aula (I) 126
Figura 7.10 – Construindo a Simetria de Reflexão Deslizante em sala de aula 126
Figura 7.11 – Construindo a Simetria de Reflexão em sala de aula (II) 126
Figura 7.12 – Construindo a Imagem no Geogebra (I) 126
Figura 7.13 – Construindo a Simetria de Translação em sala de aula 126
Figura 7.14 – Construindo a Imagem no Geogebra (II) 126
Figura 7.15 – Fotos tiradas da participação dos alunos (I) 127
Figura 7.16 – Fotos tiradas da participação dos alunos (II) 127
Figura 7.17 – Fotos tiradas da participação dos alunos (III) 127
Figura 7.18 – Atividade desenvolvida pelos alunos (I) 127
Figura 7.19 – Atividade desenvolvida pelos alunos (II) 127
Figura 7.20 – Atividade desenvolvida pelos alunos (III) 127
Figura 7.21 – Atividade desenvolvida pelos alunos (IV) 127
Figura 7.22 – Atividade desenvolvida pelos alunos (V) 127
Figura 7.23 – Atividade desenvolvida pelos alunos (VI) 127
Figura 7.24 – Atividade desenvolvida pelos alunos (VII) 128
Figura 7.25 – Atividade desenvolvida pelos alunos (VIII) 128
Figura 7.26 – Atividade desenvolvida pelos alunos (IX) 128
Figura 7.27 – Atividade desenvolvida pelos alunos (X) 128
Figura 7.28 – Atividade desenvolvida pelos alunos (XI) 128
Figura 7.29 – Questionário 129
Figura 7.30 – Questionário - Respostas dos Alunos (I) 129
Figura 7.31 – Questionário - Respostas dos Alunos (II) 129
Figura 7.32 – Questionário - Respostas dos Alunos (III) 130
Figura 7.33 – Questionário - Respostas dos Alunos (IV) 130
Figura 7.34 – Questionário - Respostas dos Alunos (V) 130
Figura 7.35 – Questionário - Respostas dos Alunos (VI) 131
Figura 7.36 – Questionário - Respostas dos Alunos (VII) 131
Figura 7.37 – Questionário - Respostas dos Alunos (VIII) 131

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Composição de Isometria 34

Tabela 3.1 – Habilidades referente ao ensino de Simetria em cada período escolar do Ensino Fundamental 42

Tabela 3.2 – Habilidade referente ao ensino de Simetria no Ensino Médio por Competência 43

Tabela 3.3 – Níveis das provas no Concurso Canguru Brasil 49

SUMÁRIO

1 SIMETRIA SOB UM OLHAR HISTÓRICO 15

2 ANÁLISE TEÓRICA DA SIMETRIA 19

2.1 ISOMETRIA NO PLANO 19

2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS ISOMETRIAS 23

2.2.1 Translação 23

2.2.2 Reflexão em relação à Reta 24

2.2.3 Rotação 28

2.2.4 Reflexão seguida de Translação (Reflexão Deslizante) 30

2.3 COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS 32

2.4 SIMETRIAS 34

2.4.1 Simetria em relação a um Ponto 35

2.4.2 Simetria de uma Figura 37

3 ANÁLISE DA SIMETRIA NO ÂMBITO ESCOLAR 40

3.1 OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP) 44

3.2 CONCURSO CANGURU DE MATEMÁTICA 48

4 DIÁLOGO ENTRE SIMETRIA E ARTE 55

4.1 INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE A MATEMÁTICA E A ARTE 57

4.2 ESCHER 60

5 SIMETRIA A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA ARTÍSTICA 62

6 RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DA SIMETRIA 87

6.1 SIMETRIA E O GEOGEBRA 87

7 PLANO DE AULA - EXPLORANDO A SIMETRIA NA ARTE: UMA JORNADA COM O GEOGEBRA 119

7.1 PLANO DE AULA 119

7.2 REFLEXÃO DA ATIVIDADE APLICADA NO AMBIENTE ESCOLAR 121

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 133

REFERÊNCIAS 134

1 SIMETRIA SOB UM OLHAR HISTÓRICO

Ao longo da história, a palavra "simetria" tem assumido diversas conotações, o que tem influenciado a maneira como esse conceito é abordado em sala de aula. Segundo Pasquini e Bortolossi (2015), isso ocorre porque um mesmo termo pode ser empregado com significados e interpretações distintas, dependendo do contexto em que é utilizado. Essa situação também é elucidada em certos conceitos da Matemática, mesmo que esta seja considerada uma área de conhecimento exata. Dessa forma, “ [...] existem palavras que carecem de estudos ao longo da história para que possamos analisar e conhecer quais as suas formas assumidas nos diferentes contextos” (Pasquini; Bortolossi, 2016 p. 6).

Nessa perspectiva, é imprescindível o entendimento da evolução dos significados vinculados à simetria ao longo das épocas, como forma preliminar de se iniciar o estudo teórico dessa temática. (Pasquini e Bortolossi, 2015)

Lopes, Alves e Ferreira (2013) ao abordarem a simetria a partir de uma perspectiva histórica, apontam que as edificações construídas ao longo do tempo, além de representarem o legado cultural daquele período ou determinado povo, estão repletas de simetrias e padrões. Nesta análise tem-se “[...]que os povos antigos deixaram inúmeras evidências de seus interesses por padrões repetidos e simetria de formas em objetos, decorações e estruturas” (Lopes; Alves; Ferreira, 2013, p. 2).

Sobre o Período Neolítico, Lopes, Alves e Ferreira (2013) utilizam as ideias de Noyes e Merzbach (2012), ao constatarem que os objetivos utilizados naqueles período, tais como potes, cestas e tecidos evidenciam a presença de congruência e simetrias, sendos estas bases para a geometria elementar. “O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria” (Boyer; Merzbach, 2012, p. 26 *apud* Lopes; Alves; Ferreira, 2013, p. 2).

Em relação ao Egito Antigo, os autores relatam que os artistas daquele período utilizavam linhas verticais e horizontais em suas obras para obterem proporções iguais, pois acreditavam que esse recurso iria facilitar os indivíduos a compreenderem as suas criações artísticas. A Mesopotâmia, por sua vez, também tinha preocupação com a proporção, mas diferentemente dos egípcios, as artes eram menos estruturadas.

Figura 1.1 – Exemplo de Obra Egípcia

Fonte: Lopes Alves, Ferreira, 2013, p. 2

Figura 1.2 – Exemplo de Obra Suméria na Mesopotâmia

Fonte: Lopes Alves, Ferreira, 2013,p. 2

Pasquini e Bortolossi (2016) enfatizam que o arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (80-70 a.C. - 15 a.C.) abordou a Simetria por meio de uma analogia com o corpo humano, descrevendo-a como uma proporção adequada, e assim defendia que nenhuma construção poderia ser bem estruturada se não possuísse a devida proporção e consequentemente simetria. Dessa forma, a simetria consistia em uma proporção entre a parte e o todo, diferentemente do conceito utilizado atualmente, pois para Vitruvius a ideia de simetria "[...] é a relação entre os vários elementos do plano e cada um desses elementos com os do corpo humano. Essa correlação ou comparação também pode ser entendida como proporção" (Lopes; Alves; Ferreira, 2013, p. 8).

Ainda referente a Vitruvius, Santos (2007) observa que a visão do arquiteto sob simetria tem como consequência a comensurabilidade entre grandezas, "[...] Vitruvio entende o termo Harmonia em uma construção cujas proporções são desenvolvidas em um módulo. Daí resulta a inevitável comensurável proporção, isto é, razão entre grandezas, com medidas em comum" (Santos, 2007, p.3).

Na idade Média, de acordo com Lopes, Alves e Ferreira (2013), era essencial ter a simetria nas obras, pois além de ser um mecanismo necessário para que a mesma fosse considerada bela, evidenciava o caráter religioso marcante daquela época. Ademais, os autores observam que no Renascimento, não só há a volta da valorização da arte da Antiguidade Clássica, como também há o enaltecimento da beleza humana, ou seja, os artistas usufruiam da proporção e simetria para atingir a beleza de acordo com os padrões propagados pela arte clássica.

Figura 1.3 – Exemplo de Obra Renascentista: Monalisa

Fonte: Lopes Alves, Ferreira, 2013, p. 4

Outrossim, Pasquini e Bortolossi (2016), fundamentados nas concepções de Hon e Goldstein (2008), destacam, como análise histórica do conceito de simetria, a definição estabelecida por Euclides, a qual a associava ao conceito de comensurabilidade. “Com a terminologia matemática atual, dizer que duas magnitudes são comensuráveis significa dizer que a razão entre elas pode ser expressa por um número racional”. (Pasquini; Bortolossi, 2016 p. 8)

Além de Euclides, os autores também apontam o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), o qual, ao reescrever e simplificar as demonstrações do livro “Os Elementos” de Euclides, enfrentou críticas do matemático Robert Simson (1684 - 1768), mais especificamente, referente a duas definições apresentadas por Legendre,

> 9. Figuras sólidas semelhantes são as contidas por planos semelhantes iguais em quantidade.
>
> 10. E figuras sólidas iguais e semelhantes são as contidas por planos semelhantes em quantidade e em magnitude (Bicudo, 2009, p. 481-482, *apud* Pasquini; Bortolossi, 2016, p. 12).

Tal fato se deu em virtude da convicção de Simson de que era preciso demonstrar a igualdade de figuras planas. Diante dessa contestação, Legendre também apresentou contraexemplos para a definição 10, e nesse processo identificou a necessidade de investigar as características e propriedades dos ângulos dos sólidos, o que culminou na introdução da simetria na geometria sólida. (Pasquini e Bortolossi, 2016). Isso se deu pois,

> [...] se os ângulos planos iguais estiverem dispostos em ordem inversa, . . . então, seria impossível fazer coincidir os dois ângulos sólidos um com o outro. Esta sorte de igualdade, que não é absoluta ou de sobreposição, merece ser distinguida por uma denominação particular: nós a chamaremos igualdade por simetria. Assim, os

> dois ângulos sólidos de que se trata que são formados por três ângulos planos iguais, cada um a cada um, mas dispostos em ordem inversa, se chamarão ângulos iguais por simetria ou simplesmente ângulos simétricos (Legendre, 1794, p. 173 -174, *apud* Pasquini; Bortolossi, 2016, p. 13).

Desse modo, como apontado por Pasquini e Bortolossi (2016), para Legendre, o conceito de simetria se refere à interação entre sólidos, sem levar em consideração a posição que ocupam no espaço.

Após uma análise histórica da Simetria, Pasquini e Bortolossi (2015) constatam que atualmente a concepção mais utilizada é a definição moderna de simetria, a qual difere do conceito empregado por Euclides, uma vez que a Simetria moderna é associada ao conceito de invariância, sendo utilizada em outras áreas de conhecimento como Física, Química e Biologia.

Diante do exposto acima, fica claro que a concepção de simetria passou por modificações ao longo da história e em diversos momentos ela e arte estavam conectadas. Assim, neste trabalho será explorado a forma com que a Simetria é desenvolvida na Educação Básica, destacando a abordagem interdisciplinar entre a Matemática e a Arte. Nesse sentido, a metodologia adotada é a abordagem investigativa, em que a partir de pesquisas bibliográficas será realizado estudos referente ao tema.

Em relação ao desenvolvimento, este trabalho engloba os estudos realizados no Trabalho de Conclusão de Curso 1 e no 2 (TCC1 e TCC2). Nesse contexto, nos próximos capítulos será realizado uma breve análise teórica das noções fundamentais, propriedades e características da simetria, assim como uma reflexão da forma com que essa temática é retratada em sala de aula, através de reflexões das questões que envolvem esse tema. Além disso, será explorado as implicações da interação entre simetria e arte para o processo de ensino e aprendizagem, destacando a importância de abordar a simetria a partir de recursos artísticos. Nesse panorama, será enfatizado as diferentes perspectivas de explorar as simetrias nas obras de Escher, o que contribui para que os alunos saibam conectar diferentes campos de conhecimento e por conseguinte irão visualizar na prática a teoria apresentada, fazendo com que a aprendizagem seja significativa. Por fim, o último capítulo consiste na elaboração e na execução de um plano de aula para discutir a Simetria no ambiente escolar, com o objetivo de refletir sobre o desenvolvimento da atividade e da interação dos educandos, incluindo os desafios enfrentados e os aprendizados oriundos da exploração dos conceitos vinculados à simetria, através da conexão com os recursos artísticos.

2 ANÁLISE TEÓRICA DA SIMETRIA

Segundo Pasquini e Bortolossi (2015), a definição moderna de simetria está relacionada ao conceito de invariância.

Definição 2.1. Seja um conjunto $\mathbb{X} \neq \emptyset$ no plano Euclidiano e uma função (transformação) F tal que

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Assim, F será uma simetria do conjunto $\mathbb{X}$, se F satisfazer as propriedade a seguir:
i) F for uma Isometria,
ii) $F(X) = X$, ou seja, X é invariante por F, não sofrendo alterações. Dessa forma, a imagem da função é igual ao próprio conjunto $\mathbb{X}$.

Nesse concepção, para compreender de fato os conceitos utilizados na Simetria, é vital entender a Isometria no Plano e suas características, visto que o enfoque deste trabalho é analisar a simetria e suas propriedades no plano. Diante disso, será realizado uma breve fundamentação teórica referente ao tema, utilizando as ideias de Silva (2016), Sales (2017), Costa (2020), Tinoco (2012), Mir (2014), Florencio (2011), Canella (2021) e Carvalho *et al.* (2016).

2.1 ISOMETRIA NO PLANO

Antes de apresentar a definição de Isometria no Plano é primordial destacar o que é uma transformação no plano e uma função distância.

Definição 2.2. (Transformação no Plano) Uma transformação T em um plano $\prod$ é uma aplicação $T : \prod \longrightarrow \prod$, tal que $\forall\ X \in \prod$ há uma correspondência em $\prod$, isto é, $Y = T(X) \in \prod$.

Definição 2.3. Uma função distância em $\prod$ é uma função $d : \prod \times \prod \longrightarrow \prod$,com $(a, b) \longrightarrow d(A, B)$, satisfazendo os seguintes axiomas:

i) $d(A, B) \geq 0$

ii) $d(A, B) = 0 \iff A = B$

iii) $d(A, B) = d(B, A)$

iv)$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Este item também é conhecido como desigualdade triangular. Além de que, se $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$, então C está no segmento com extremos A e B.

Seja $x = d(A, B)$, tal que $x \in \mathbb{R}$, então x é nomeado como distância entre A e B e é o comprimento do segmento AB.

Definição 2.4. (Isometria no Plano) A Isometria no Plano trata-se de um tipo especial de transformação no plano, que preserva e mantém a distância. Assim para a função distância d em $\prod$ e a transformação $T : \prod \longrightarrow \prod$, tem-se:

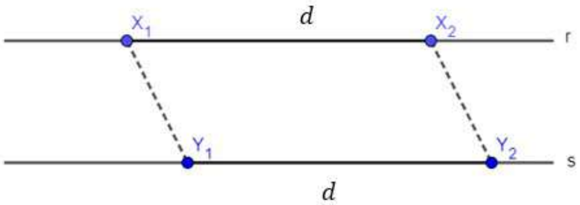
$$d(A, B) = d(T(A), T(B))$$

com $A, B \in \prod$

Dessa forma, a isometria faz com que uma figura seja geometricamente idêntica a original, isto é, as transformações resultam em figuras congruentes, modificando apenas a posição e rotação da mesma, preservando a forma e tamanho, ou seja, " [...] não pode haver efeito de «elasticidade» em parte alguma da figura" (Carvalho *et al.*, 2016, p. 138).

Exemplo 2.1.1: Considere as retas r, s e os pontos X_1e X_2 no plano $\prod$. Seja T uma Isometria, tal que $T(X_1) = Y_1$ e $T(X_2) = Y_2$. Assim, $d(X_1X_2) = d(Y_1Y_2)$, ou seja, os segmentos X_1X_2 e Y_1Y_2 são congrugentes.

Figura 2.1 – Ilustração do Exemplo 2.1.1



Fonte: Adaptada de Canella (2021, p. 30)

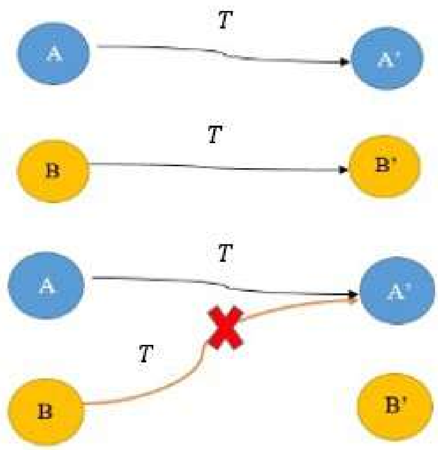
Exemplo 2.1.2: Considere a transformação identidade $Id : \prod \longrightarrow \prod$ com $Id(X) = X \in \prod$. A Id será uma Isometria, pois $d(X, Y) = d(Id(X), Id(Y)), \forall X, Y \in \prod$

Proposição 2.1. *Seja T uma Isometria em $\prod$, então T é injetiva.*

Demonstração. De fato, seja $T : \prod \longrightarrow \prod$ uma isometria. Assim, $d(A, B) = d(T(A), T(B))$ com $A, B \in \prod$. Nesse sentido, considere $A, B \in \prod$, tal que $T(A) = T(B)$, o que implica que $d(A, B) = d(T(A), T(B)) = 0$. Utilizando o item (ii) da Definição 2.3, conclui-se que $A = B$. Logo, T é injetiva.

□

Figura 2.2 – Representação da transformação como função injetiva



Fonte: Elaborada pela autora

Essa proposição garante que a isometria “[...] transforma pontos distintos em pontos distintos” (Silva, 2016, p. 10).

Proposição 2.2. *Seja T uma Isometria em $\prod$ e $Y = T(X)$ e $Y' = T(X')$, com X e X' pontos em $\prod$. Se $A \in XX'$ sendo que XX' é um segmento, então $B = T(A)$ está em YY'*

Demonstração. Considere $A \in XX'$. Pelo item (iv) da Definição 2.3, temos que $d(X, A) + d(A, X') = d(X, X')$. Assim, como $Y = T(X)$, $Y' = T(X')$ e $B = T(A)$, temos que

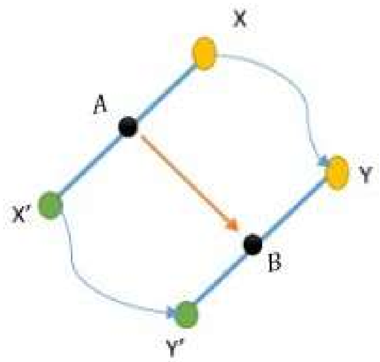
$$\begin{aligned} d(X, A) + d(A, X') &= d(T(X), T(A)) + d(T(A), T(X')) \\ &= d(T(X), T(X')) \end{aligned}$$

Como $Y = T(x)$, $Y' = T(A')$ e $B = T(A)$, temos que

$$\begin{aligned} d(T(X), T(X')) &= d(T(X), T(A)) + d(T(A), T(X')) \\ &= d(Y, B) + d(B, Y') \\ &= d(Y, Y') \end{aligned}$$

Portanto, B está em YY', com YY' um segmento de extremos Y e Y'. $\square$

Figura 2.3 – Representação da Proposição 2.2



Fonte: Elaborada pela autora

Essa proposição assegura que toda isometria transforma pontos colineares em pontos colineares, mantendo a ordem dos mesmos, isto é, todos os pontos do segmentos XX' são transformados em pontos no segmento YY'. Além disso, as isometrias conservam a relação de paralelismo, perpendicularismo e preservam os ângulos entre retas. (Silva, 2016)

Proposição 2.3. *Seja T uma Isometria em $\prod$. Toda isometria T é bijetiva e sua inversa também é uma Isometria.*

Demonstração. A demonstração será dividida em duas parte:

i) Toda Isometria T é bijetiva

Pela proposição 2. 1 tem-se que toda Isometria T é injetiva. Assim, basta mostrar que T também é sobrejetiva. De fato,

Considere A, um ponto, e uma reta r no plano $\prod$, tal que $A \notin r$ e para uma isometria T, $y = T(r)$. Assim, temos que ou $A \in y$ ou $A \notin y$.

– $A \in y$

Como T é uma isometria, então existe Z em r tal que $T(Z) = A$.

– $A \notin y$

Então existe uma única reta y' tal que $A \in y'$ e as retas y e y' são perpendiculares em um determinado ponto, o qual chamamos de S, ou seja, S é a interseção entre y e y'. Nesse sentido, como S está em y, existe $W \in r$, tal que $T(W) = S$.

Além disso, considere uma reta r' que é perpendicular a reta r no ponto W. Assim, pela transformação T, $T(r') = q$ com q uma reta. Temos então, que $T(W) = S \in q$ e consequentemente q é perpendicular a y no ponto S. Logo, $q = y'$, de modo que A está em q.

Portanto, existe $L \in r'$ tal que $A = T(L)$ e assim T é sobrejetiva.

ii) A inversa de T também é uma Isometria

Para todo ponto, A e B, no plano $\prod$, tem-se que $d(A, B) = d(T(T^{-1}(A)), T(T^{-1}(B)) = d(T^{-1}(A), T^{-1}(B))$ Portanto, T^{-1} é uma isometria.

□

Proposição 2.4. *Se T e f são Isometria, então a composição $T \circ f : \prod \longrightarrow \prod$ também será uma Isometria.*

Demonstração. Deseja-se mostrar que $d((T \circ f)(A), (T \circ f)(B)) = d(A, B)$ para A, B no $\prod$.
De fato,

$$d((T \circ f)(A), (T \circ f)(B)) = d(T(f(A)), T(f(B))),$$

como T é uma isometria, então

$$d(T(f(A)), T(f(B))) = d(f(A), f(B)),$$

como f é uma isometria, temos que $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.
Logo, $d((T \circ f)(A), (T \circ f)(B)) = d(A, B)$

□

Em outros termos, a isometria "[...] mantém distâncias; sendo assim, ao efetuar-se duas isometrias consecutivas o resultado é ainda uma isometria, uma vez que nenhuma das duas altera distâncias" (Carvalho *et al.*, 2016, p. 143).

2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS ISOMETRIAS

2.2.1 Translação

Definição 2.5. (Translação) Seja $\vec{u}$ um vetor do plano $\prod$. A Translação é uma transformação T_u, em relação ao vetor $\vec{u}$, que faz uma correspondência entre cada ponto P e P' do plano, de modo que $\vec{PP'} = \vec{u}$. Nesse sentido,$T_u(P) = P + \vec{u}$.
Desta maneira, para $P = (a, b)$ e $\vec{u} = (c, d)$, tem-se que $T_u(P) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = P'$.

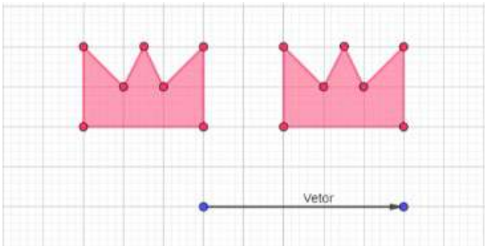
Proposição 2.5. *A Translação é uma Isometria.*

Demonstração. Seja P, P', Q, Q' pontos no plano, tal que $P' = T_v(P)$ e $Q' = T_v(Q)$. Assim, $\vec{QQ'} = \vec{PP'} = \vec{v}$, são vetores equipolentes, fazendo com que os segmentos $\overline{QQ'}$ e $\overline{PP'}$ apresentem o mesmo comprimento. Em virtude disso, $PP'QQ'$ formam um paralelogramo, ou seja, $d(P, Q) = d(P', Q')$. (Sales, 2017)

□

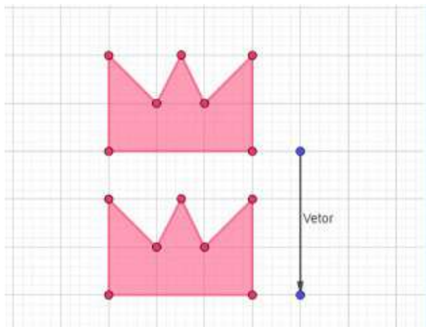
Em resumo “ uma translação consiste num «deslizar» de um objeto, em linha reta, de uma posição para outra” (Carvalho *et al.*, 2016, p. 138). Nesse sentido, a translação é uma isometria em que há o deslocamento da figura a partir de uma determinada direção, sentido e comprimento, mantendo as características originais da figura deslocada, por exemplo se as retas transladadas forem paralelas ou perpendiculares, irão continuar da mesma forma.

Figura 2.4 – Exemplo de Translação com vetor na horizontal



Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 2.5 – Exemplo de Translação com vetor na vertical

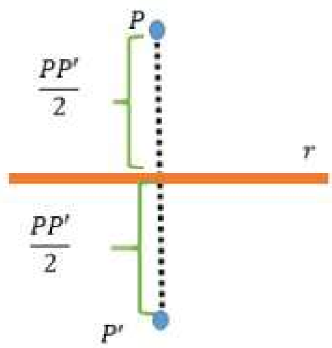


Fonte: Elaborada pela Autora

2.2.2 Reflexão em relação à Reta

Definição 2.6. (reflexão em relação à reta) A reflexão em relação à reta (r) trata-se de uma transformação T_r que associa cada ponto P com um ponto P' do mesmo plano, tal que $P' = T_r(P)$ e r é a mediatriz do segmento PP'. Nesse sentido, tendo em vista a reta r, os pontos P' e P são simétricos.

Figura 2.6 – P' é o simétrico de P em relação à reta



Fonte: Elaborada pela autora

Proposição 2.6. *A Reflexão em relação à reta é uma Isometria.*

Demonstração. Para provar a proposição acima, é suficiente verificar que para quaisquer pontos (A, A', B e B') em $\prod$, com $A' = T_r(A)$ e $B' = T_r(B)$, tem-se $|AB| = |A'B'|$.
Nesse sentido, considerando uma reta r será analisado quatro casos:

i)Os pontos A e $B \in r$

Então $T_r(A) = A' = A$ e $T_r(B) = B' = B$, consequentemente $|AB| = |A'B'|$.

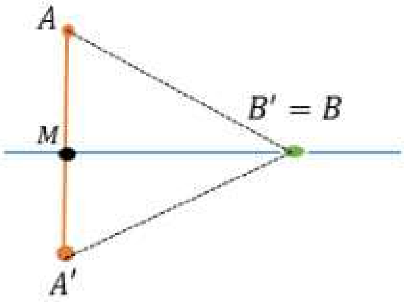
ii) $A \notin r$ e $B \in r$, tal que $B = B'$.

Considere M um ponto em r, com M a projeção ortogonal de A na reta r. Assim, o segmento AA' é perpendicular a r no ponto M.

- Se $B = M$, então $|AM| = |AB| = |AB'|$

- Se $B \neq M$, então será formado os triângulos ABM e $A'BM$, conforme na ilustração abaixo:

Figura 2.7 – Ilustração da Proposição 2.6 item (ii)



Fonte: Adaptada de Sales (2017, p.17)

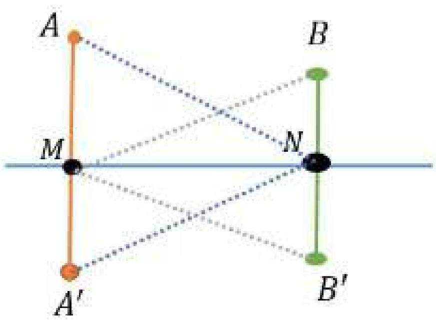
Além de $AM = A'M$, os triângulos ABM e $A'BM$ apresentam o lado BM e ângulo reto em comum, então pelo caso de congruência LAL [1] (lado-ângulo-lado), os triângulos ABM e $A'BM$ serão congruentes. Dessa forma, $|AB| = |A'B'|$.

iii) $A, B \notin r$

Dessa forma, sejam M e N pontos na reta r, tal que são projeções ortogonais de A e B em r respectivamente.

- Se $M = N$, então $|AB| = |A'B'|$, já que $A = B$
- Se $M \neq N$, estão será possível construir os triângulos ANA' e BMB' conforme apresentação abaixo.

Figura 2.8 – Ilustração da Proposição 2.6 item (iii)



Fonte: Adaptada de Sales (2017, p.17)

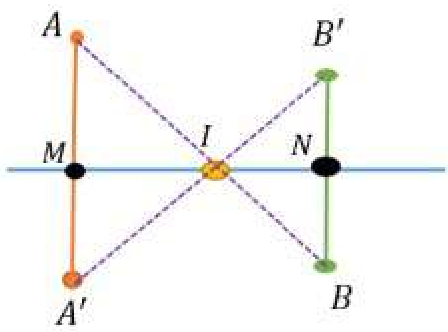
[1] O caso de congruência LAL pode ser visto em Costa (2020)

Utilizando o mesmo raciocínio do item (ii), pela congruência LAL (lado-ângulo-lado), os triângulos ANM e $A'NM$ são congruentes. O mesmo ocorre para os triângulos BMN e $B'MN$. Dessa forma, nota-se que os lados AB e $A'B'$ serão iguais, por conseguinte $|AB| = |A'B'|$.

iv) A e B estão em lados opostos em relação a reta r.

Similar ao item anterior, sejam M e N projeções ortogonais em r dos pontos$A$ e B respectivamente. Considere $I \in r$ o ponto de interseção dos segmentos AB e $A'B'$ com a reta r. Sendo assim, os segmentos AI = A'I e BI = B'I.

Figura 2.9 – Ilustração da Proposição 2.6 item (iv)



Fonte: Adaptada de Sales (2017, p.18)

À vista disso, forma-se dois triângulos isosceles, $AA'I$ e $BB'I$, com os segmentos MI e NI bissetrizes dos triângulos. Logo, $A\angle IM = A'\angle IM$ e $B\angle IN = B'\angle IN$.

Os ângulos $A\angle IM$ e $B\angle IN$ são opostos pelo vértice, então $A\angle IA' = B\angle IB'$. Como $B\angle IB'$ é suplementar do ângulo $A\angle IB'$ tem-se que os pontos A', I, B' são colineares. Consequentemente,

$$\overline{A'B'} = \overline{A'I} + \overline{IB'} = \overline{AI + IB} = \overline{AB}$$

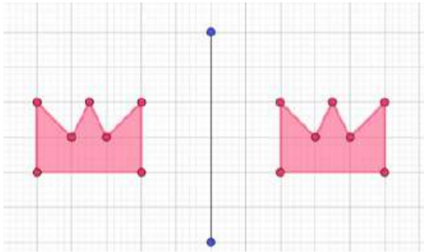
Portanto, a Reflexão em relação à reta é uma isometria.

$\square$

Resumindo, a Reflexão é uma isometria que ocorre quando a figura ou ponto, admite pelo menos um eixo de simetria.

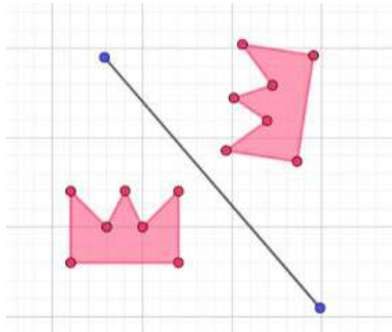
As imagens abaixo mostram a reflexão de acordo com uma reta escolhida.

Figura 2.10 – Exemplo de Reflexão em torno de uma reta vertical



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 2.11 – Exemplo de Reflexão em torno de uma reta na diagonal

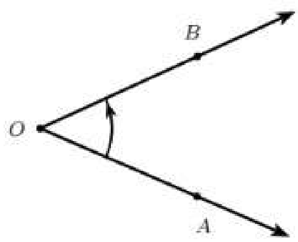


Fonte: Elaborada pela autora

2.2.3 Rotação

Para iniciar a discussão de rotação, faz-se necessário relembrar o conceito de ângulo orientado. Segundo Sales (2017, p. 22) "um ângulo orientado é aquele no qual estão bem determinados o sentido de abertura do ângulo, indicando seu lado inicial, que é chamado origem do ângulo, e seu lado final, a extremidade".

Figura 2.12 – Ângulo Orientado



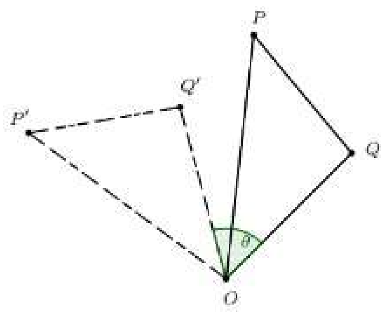
Fonte: Sales, 2017, p. 22

Definição 2.7. (rotação) A rotação de centro O (ponto fixo) e ângulo θ é uma transformação ($T_{O,\theta}$) em que há a associação de todos os pontos P, diferentes de O, com os pontos P', tal que o ângulo $\angle POP' = \theta$ e $|OP| = |OP'|$. Assim, O será o centro da rotação e θ o ângulo de rotação, mas também trata-se do ângulo orientado no sentido positivo, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Proposição 2.7. *A Rotação com centro O e ângulo θ é uma Isometria.*

Demonstração. Considere os pontos não colineares P, O e Q e um ângulo θ , tal que $P' = T_{O,\theta}(P)$ e $Q' = T_{O,\theta}(Q)$. A partir da Definição 2.7, tem-se que $OP = OP'$, $OQ = OQ'$ e $\angle POP' = \angle QOQ'$.

Figura 2.13 – Ilustração da Proposição 2.7



Fonte: Sales, 2017, p. 24

Utilizando a ilustração e os expostos acima, observamos que $\angle QOP = \angle QOQ' - \angle POQ'$. Como $\angle QOQ' = \theta$, então $\angle QOP = \theta - \angle POQ'$.

Além disso, $\angle Q'OP' = \angle POP' - \angle POQ'$, como $\angle POP' = \angle QOQ' = \theta$ então, $\angle Q'OP' = \theta - \angle POQ'$. Assim, $\angle QOP = \angle Q'OP'$.

A partir do caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado), os triângulos POQ e $P'OQ'$ serão congruentes, uma vez que o ângulo $Q\angle OP$ e $Q'\angle OP'$ são iguais bem como os lados $OP = OP'$ e $OQ = OQ'$.

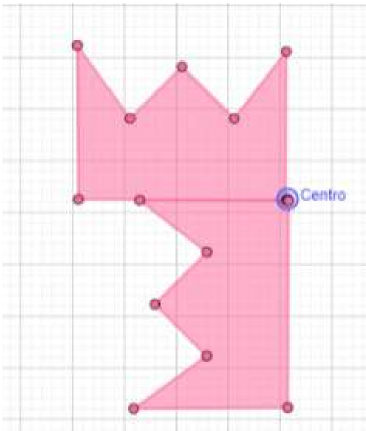
Portanto, $|PQ| = |P'Q'|$, consequentemente a Rotação de centro O e ângulo θ é uma isometria.

$\square$

Em síntese, a Rotação de centro O e ângulo θ ocorre quando a figura se coincide com ela mesma ao ser rotacionada mais de uma vez.

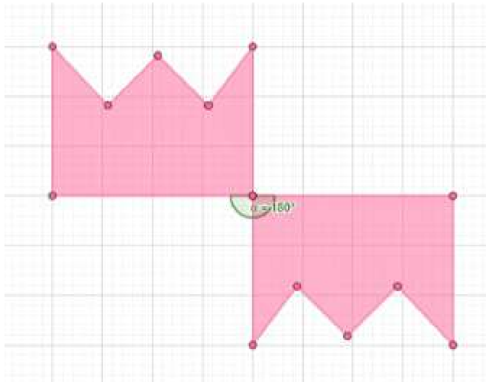
As imagens abaixo mostram a rotação de acordo com o centro e o ângulo escolhido.

Figura 2.14 – Rotação para determinado centro escolhido



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 2.15 – Rotação com ângulo de 180°



Fonte: Elaborada pela autora

2.2.4 Reflexão seguida de Translação (Reflexão Deslizante)

Definição 2.8. (Reflexão seguida de Translação) A Reflexão seguida de Translação ou Reflexão Deslizante é uma transformação $T : \prod \longrightarrow \prod$, em que T associa o ponto P do plano $\prod$ com o ponto $P' \in \prod$, de modo que P' é o resultado de uma reflexão em relação a reta r seguida de uma translação em relação a certo vetor, isto é, trata-se de uma composição entre a reflexão em torno de uma reta com a translação. Além disso, é válido destacar que a reta r e o vetor devem ser paralelos.

Sendo assim, a Reflexão Deslizante ocorre quando uma figura é refletida a partir de um determinado eixo, para depois sofrer uma translação ao longo do mesmo.

Proposição 2.8. *A Reflexão seguida de Translação é uma Isometria.*

Demonstração. De fato, como foi abordado na proposição 2.4, toda composição de isometrias é uma isometria. Assim, como a reflexão deslizante é uma composição entre a reflexão em torno de uma reta com a translação, sendo estas já demonstradas anteriormente como isometrias (proposição 2.5 e 2.6), então a reflexão seguida de translação é uma isometria.

□

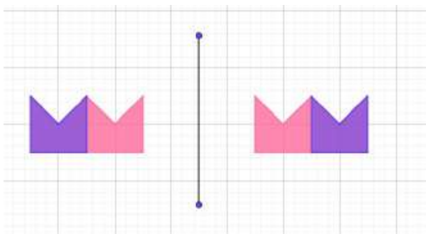
Figura 2.16 – Exemplo de Reflexão seguida de Translação

Fonte: Elaborada pela autora

Para obter a imagem apresentada acima, foi necessário seguir os passos abaixo utilizando o software Geogebra:

– 1°) Definir a reta ou segmento de reta que será utilizado como base para a reflexão; Aqui foi escolhido um segmento vertical.

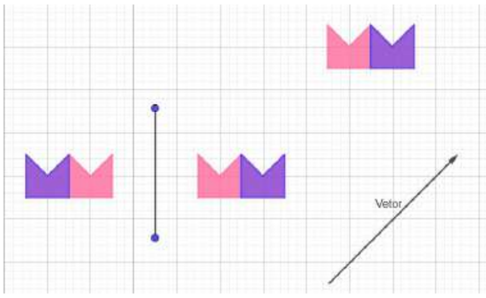
Figura 2.17 – Parte 1 (Exemplo de Reflexão seguida de Translação)



Fonte: Elaborada pela autora

– 2°) Definir qual será o vetor para transladar a figura;

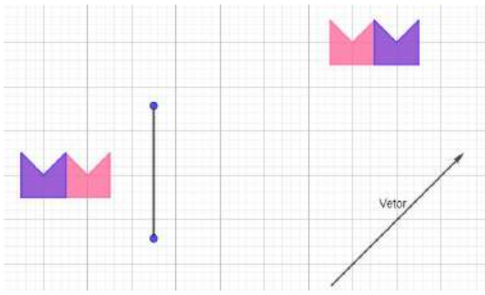
Figura 2.18 – Parte 2 (Exemplo de Reflexão seguida de Translação)



Fonte: Elaborada pela autora

Ao finalizar os passos, obtém-se a imagem abaixo:

Figura 2.19 – Parte 3 (Exemplo de Reflexão seguida de Translação)



Fonte: Elaborada pela autora

Sales (2017) a partir dos estudos referente a composição de isometrias, observa que a reflexão é muito importante para essa temática, uma vez que “[...] qualquer umas das outras três isometrias do plano (translação, rotação e reflexão deslizante), podem ser obtidas por meio da composição de reflexões"(Sales, 2017, p. 37-38). Assim, a partir dessa análise o autor apresenta um teorema primordial para o estudo de isometrias.

2.3 COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS

Teorema 2.1. ***(Teorema fundamental das isometrias)****: Toda Isometria é o resultado de uma composição de no máximo três reflexões.*

Antes de demonstrar o teorema acima, Sales (2017) apresenta um resultado muito importante que será utilizado na prova do mesmo.

Proposição 2.9. *Considere T e T' Isometrias. Se existirem pontos não colineares A, B e C, em um determinado plano, tais que $T(A) = T'(A)$, $T(B) = T'(B)$ e $T(C) = T'(C)$, então $T = T'$, ou seja, $T(X) = T'(X), \forall X$ no plano.*

Demonstração. De fato, é notável que $T^{-1}T(A) = A$. Como $T(A) = T'(A)$, temos que $T^{-1}T'(A) = A$. Isso significa que $T^{-1}T'$ mantém os pontos A, B, e C inalterados. Logo, $T^{-1}T' = Id$, e portanto $T = T'$.

□

Dessa forma, com os conceitos discutidos até então, será possível demonstrar o teorema 2.1.

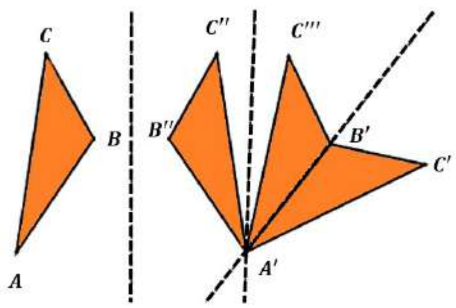
Demonstração. **(Teorema fundamental das isometrias)**

Considere T uma isometria e os pontos A, B e C, os quais por não serem colineares no plano formam um triângulo, tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(C) = C'$.

Seja T' também uma isometria, de modo que se $A = A'$, então $T' = Id$ e para $A \neq A'$, T' será uma reflexão em relação a mediatriz $\overline{AA'}$, e assim $T'(ABC) = A'B''C''$.

Nesse mesmo raciocínio, considere T'', também um isometria, com $T'' = Id$ se $B' = B''$, e para $B' \neq B''$, T'' será uma reflexão em relação a mediatriz $\overline{B'B''}$, com $T''(A'B''C'') = A'B'C'''$. O mesmo ocorre para a isometria T''', ou seja, se $C' = C'''$ então $T''' = Id$, caso contrário T''' será uma reflexão em relação a mediatriz $\overline{C'C'''}$. Diante disso, $T'''(A'B'C''') = A'B'C'$.

Figura 2.20 – Ilustração do Teorema 2.1



Fonte: Adaptada de Sales (2017, p.38)

À vista disso, temos

$$
\begin{aligned}
T''' \circ T'' \circ T'(ABC) &= T'''(T''(T'(ABC))) \\
&= T'''(T''(A'B''C'')) \\
&= T'''(A'B'C''') \\
&= A'B'C' \\
T''' \circ T'' \circ T'(ABC) &= T(ABC)
\end{aligned}
$$

Utilizando a proposição 2.9, tem-se que $T''' \circ T'' \circ T' = T$. □

Carvalho *et al.* (2016) constatam que a composição de quaisquer duas das transformações translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante, resulta em umas dessas quatros isometrias. “Na realidade, todas as composições foram analisadas geometricamente e demonstra-se que as únicas isometrias planas que são autônomas, no sentido em que não se reduzem, são as translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes [...]” (Carvalho *et al.*, 2016 p.144).

Essa composição está elucidada na tabela abaixo, com Translação (T), Rotação (Rot), Reflexão (Ref) e Reflexão Deslizante (RD).

Tabela 2.1 – Composição de Isometria

Composição	**Reflexão**	**Translação**	**Rotação**	**Reflexão Deslizante**
Reflexão	T ou Rot	Ref ou RD	Ref ou RD	Ref ou RD
Translação	Ref ou RD	T	Rot	Ref ou RD
Rotação	Ref ou RD	Rot	T ou Rot	Ref ou RD
Reflexão Deslizante	T ou Rot	Ref ou RD	Ref ou RD	T ou Rot

Fonte: Carvalho *et al.*, 2016 p.144

2.4 SIMETRIAS

Sempre que é abordado sobre simetria, o primeiro pensamento é o reflexo de uma determinada imagem, principalmente na Educação Básica, mas

> [...] no plano há quatro tipos de transformações que preservam distâncias, isto é, há quatro tipos de isometrias: reflexão, translação, rotação e reflexão seguida de translação. Cada uma dessas isometrias gera figuras simétricas a outras figuras e

também figuras simétricas a si mesmo (Fonseca, p. 3, 2010, *apud* Pinatti; Lorin, 2014, p. 2).

Em face disso, Carvalho *et al.* (2016) evidencia que a Simetria, em comparação ao termo isometria, não está formalmente bem definida, sendo assim, interpretada como uma temática de natureza ampla e subjetiva. À vista disso, nessa seção será estudado os conceitos relacionados a simetria, uma vez que toda temática discutida até o presente momento dará bagagem teórica para a compreensão conceitual da mesma, principalmente levando em conta a apresentação da simetria moderna, a partir da concepção de invariância (Definição 2.1).

2.4.1 Simetria em relação a um Ponto

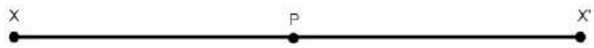
Definição 2.9. Considere um ponto P no plano $\prod$. A Simetria em relação ao ponto P é uma transformação $S : \prod \longrightarrow \prod$, tal que para $X \in \prod$

$$S(X) = \begin{cases} P, & \text{se } P = X; \\ X', & \text{se } X \neq P, \end{cases}$$

X' será o Simétrico de X em relação a P, ou seja, P é o ponto médio do segmento XX'.

Conforme ilustrado na figura abaixo.

Figura 2.21 – Ilustração Definição 2.9



Fonte: Elaborada pela autora

Proposição 2.10. *A Simetria S é uma Isometria.*

Demonstração. De fato, considere os ponto A, B no plano $\prod$ e P o ponto de simetria.

i) Se $A = B$, então para S, uma simetria em relação ao ponto $P \in \prod$, temos $S(A) = S(B)$, implicando que $d(S(A), S(B)) = d(A, B) = 0$.

ii) Se $A \neq B$, há dois casos possíveis:

- **Caso 1: A, B, P pontos colineares**

  Considere que A está no segmento BP. Dessa forma, para $S(A) = A'$ e $S(B) = B'$, temos que $A' \in B'P$, sendo que $B'P$ também é um segmento.

Então,

$$\begin{aligned} d(A', B') &= d(P, B') - d(P, A') \\ &= d(B, P) - d(A, P) \\ &= d(B, P) - d(P, A) \\ &= d(B, A) \end{aligned}$$

Isso decorre da Definição 2.3, itens (iii) e (iv), em que $d(A, P) = d(P, A)$.

Portanto, $d(S(A), S(B)) = d(A', B') = d(A, B)$.

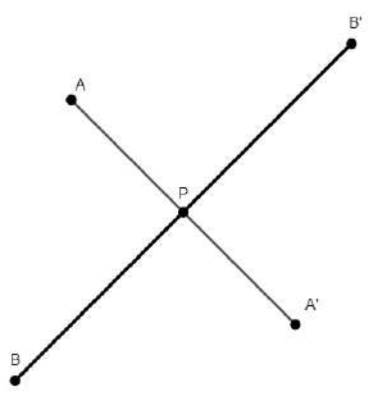
Figura 2.22 – Ilustração Proposição 2.10- Pontos Colineares

Fonte: Elaborada pela autora

– **Caso 2: A, B, P pontos não colineares**

Como A, B, P são pontos não colineares, consequentemente são pontos distintos. Nesse contexto, considere que P é o ponto de interseção entre os segmentos AA' e BB', além de também ser ponto médio dos mesmos.

Figura 2.23 – Ilustração Proposição 2.10- Pontos não Colineares



Fonte: Elaborada pela autora

Assim, nota-se que os ângulos $\angle BPA = \angle A'PB'$, já que são opostos pelo vértice em P. Então os triângulos BPA e $B'PA'$ são congruentes pelo caso LAL. Logo, $d(A', B') = d(A, B)$.

Portanto, concluímos que S é uma isometria.

□

2.4.2 Simetria de uma Figura

Sales (2017), ao definir Isometria no Plano, apresenta a definição de figuras isométricas, a qual irá auxiliar na compreensão dos conceitos relacionados a Simetria das figuras.

Definição 2.10. (Figuras Isométricas) Considere as figuras F_1 e F_2 em plano $\prod$ e uma transformação $T : \prod \longrightarrow \prod$. As figuras serão isométricas ou congruentes, se $F_2 = T(F_1)$, isto é, T transforma F_1 e F_2. (Sales, 2017).

Definição 2.11. (Simetria de uma Figura) Considere uma figura $F \subset \prod$. A Simetria desta figura é uma isometria $S : \prod \longrightarrow \prod$, tal que $S(F) = F$. Isso significa que S é uma transformação que deixa a figura invariante, ou seja, a mesma não se altera ao sofrer um conjunto de transformações.

Tendo como base a definição 2.11, apresentada por Sales (2017), nota-se que ela é análoga à definição 2.1 de Pasquini e Bortolossi (2015) exposta no início do capítulo 2, evidenciando que a definição moderna de simetria é a mais empregada. Como resultado, uma “[...] figura é dita simétrica, em relação a uma dada isometria, se é globalmente invariante quando a isometria é aplicada sobre essa figura” (Santos; Tales, 2012, p. 295).

Ainda para Sales (2017), as figuras simétricas não só apresentam a simetria identidade, a qual “ é a simetria trivial de qualquer figura e a única que preserva todas as figuras” (Sales, 2017, p.43), como também outras simetrias. Nesse sentido, o autor aponta que todas as simetrias possíveis em uma determinada figura compõem um grupo com a operação composição, sendo denominado como grupo de simetrias da figura, que auxilia na classificação das figuras, já que a partir dele é possível identificar em que categoria as mesmas se encaixam. Entretanto, “somente os grupos de simetrias discretos são classificados” (Sales, 2017, p.47).

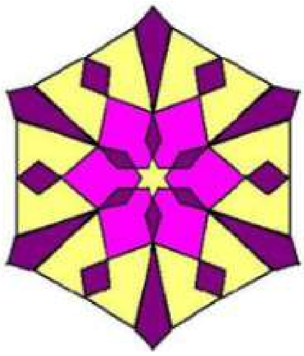
Dessa forma, o autor aponta que há três classificações possíveis para as simetrias das figuras, sendo elas rosetas ou rosáceas, frisos e papéis de parede. Entretanto, antes das definições da cada categoria, o autor destaca a definição de figuras simétricas finitas.

Definição 2.12. Uma figura simétrica será finita se não apresentar nenhuma simetria de translação não trivial.

Definição 2.13. (Rosetas ou Rosáceas) Rosetas ou Rosáceas tratam-se de figuras que apresentam uma quantidade finita de simetrias de reflexão e rotação.

Nesse ínterim, as rosáceas “[....] são configurações planas limitadas, normalmente apresentadas numa disposição circular, que podem manter-se inalteradas quando sujeitas a rotações ou, eventualmente, a reflexões” (Carvalho *et al.*, 2016 p.145).

Figura 2.24 – Exemplo de Rosetas



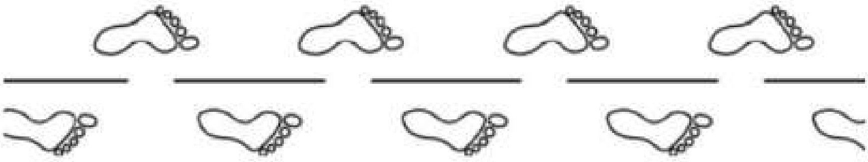
Fonte: Sales, 2017 p. 48

Diante disso, para classificar uma rosácea “apenas é necessário identificar o motivo que se repete em torno do centro de rotação e contar o número de repetições *n*. Depois, resta verificar se só há simetrias de rotação (rosáceas ciclícas) ou se também há simetrias de reflexão (rosáceas diedrais)” (Carvalho *et al.*, 2016 p.146). Vale ressaltar que para Sales (2017) tal motivo é a repetição de determinada forma básica, que por meio de reflexões, rotações e translações, compõem a figura.

Definição 2.14. (Frisos) Os Frisos são compostos por simetrias que apresentam muitas translações, porém em uma única direção. Isto é, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, todas as transações ocorrem considerando esse vetor.

Em relação aos Frisos, os mesmos são unidimensionais e parte deles podem ser encontrados em diversos recursos artísticos. Para elucidar a ideia Carvalho *et al.* (2016) utiliza como exemplos as varandas de metal antigas, por apresentarem simetrias que se associam com frisos.

Figura 2.25 – Exemplo de Frisos



Fonte: Sales, 2017 p. 48

Definição 2.15. (Papéis de Parede) Os Papéis de Parede contém grupos de simetria que possuem translações relacionadas a dois vetores linearmente independentes.

Figura 2.26 – Exemplo de Papéis de Parede

Fonte: Sales, 2017 p. 49

O que Sales (2017) define como Papéis de Parede, Carvalho *et al.* (2016) aponta ser um padrão, o qual trata-se de figuras ilimitadas que sofrem translação a partir da combinação linear de dois vetores não nulos, com direções diferentes. Ademais, Sales (2017) observa que os papéis de parede podem ser invariantes pelas demais isometrias (reflexão, rotação e reflexões deslizantes), não só pela translação.

3 ANÁLISE DA SIMETRIA NO ÂMBITO ESCOLAR

Neste capítulo será discutido como a simetria é abordada na Educação Básica, apontando as dificuldades apresentadas pelos alunos e as habilidades presente na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) referente a essa temática, as quais devem ser desenvolvidas ao decorrer dos anos escolares.

A princípio é importante reforçar que a Simetria é observada em diversas situações do cotidiano, por exemplo nas construções arquitetônicas, obras de arte e na natureza, de modo que fica evidente o quanto ela é importante para outras áreas de conhecimento, tais como a Biologia, Arte, Física e Química. Nesse panorama, Cavalheiro e Alencar (2022) enfatizam que a simetria contribui para a conexão entre a Matemática e outros campos, sendo primordial abordar essa temática na Educação Básica. Entretanto, a partir de Ribeiro, Gibin e Alves (2021), as autoras observam que não basta apenas focalizar no aprendizagem intuitiva da simetria, também é importante compreendê-la por um viés mais matemático, "É fácil reconhecer simetrias intuitivamente, mas é essencial que sejamos detentores de um conhecimento que nos permita defini-la matematicamente" (Ribeiro; Gibin; Alves, 2021, p. 122 *apud* Cavalheiro; Alencar, 2022, p. 7).

Segundo Silva (2014), muitas vezes a abordagem da simetria se restringe ao estudo do eixo de simetria das figuras, e assim é vital ampliar esse repertório. No entanto, para o autor não basta apenas priorizar o estudo de conceitos, definições e propriedades, é importante contextualizar, relacionar com outras disciplinas, e principalmente com as vivências do dia-a-dia dos estudantes.

Santos e Tales (2012) observam que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam o estudo da simetria dentre os conteúdos vinculados a geometria, de modo que acaba sendo um tópico muito recomendado nos guias dos livros didáticos, já que o mesmo apresenta grande relevância tanto para as esferas científicas como para as condutas dos indivíduos na sociedade. Assim, as autoras relatam que a PCN sugere que o estudo da simetria inicia-se nos primeiros anos do Ensino Fundamental, porém usufruindo das ideias de Jaime e Guitérrez (1996), expõem que os alunos apresentam dificuldades em trabalhar com os conceitos relacionados a Isometria na escola e consequentemente dar continuidade aos estudos dessa temática.

Decorre que, como apontado por Sabba e Cavalcante (2015), a forma com que a simetria é abordada no âmbito escolar, acaba sendo desestimulante, por conseguinte os educandos não conseguem compreender os conceitos e as particularidades relacionadas a esse tema, dificultando assim relacioná-la, não só com outros tópicos da própria matemática, como também vizualiza-la dentro da realidade que estão inseridos. "Muitos alunos ao resolverem um exercício de função, esboçam gráficos e nem mesmo se dão conta do aspecto da simetria, que está inserida no contexto." (Sabba; Cavalcante, 2015, p. 3)

Maciel (2015), a partir da pesquisa de Paiva e Rêgo (2006), observa que, embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfatizem o estudo da Simetria em âmbito escolar, há certas dificuldades enfrentadas pelo corpo docente quanto a exploração dessa temática. Uma destas dificuldades consiste na forma com que as atividades, referentes a esse conceito, aparecem nos livros didáticos, uma vez que acabam sendo “[...] muito repetidas, não estando presentes indicações de como tratar esse tema de maneira diversificada, seja com auxílio de jogos, materiais concretos, ou o uso de novas tecnologias, dentre outras possibilidades” (Maciel, 2015, p. 117).

A Base Nacional Curricular Comum (2018), no que se refere aos anos iniciais do Ensino Fundamental (1° ao 5° ano), afirma que a discussão de simetria deve ser inicialmente abordada a partir das representações e manipulações de figuras geométricas planas, usufruindo de softwares, e outros recursos, como o plano cartesiano. Já os anos finais do Ensino Fundamental (6° a 9° ano), é um período que devem ser analisados as transformações, ampliações e reduções das figuras planas, destacando os componentes invariantes e variantes nas mesmas, os quais contribuem para a compreensão dos conceitos relacionados com congruência e semelhança.

Convém destacar que os PCN[1] são documentos que incentivam a reflexão do papel da escola, principalmente referente aos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula, abrangendo tanto os pais, como a comunidade, o governo e o corpo social. Já a BNCC, trata-se de um documento que apresenta as habilidades e aprendizagens essenciais para a formação integral do estudante, ou seja, habilidades que irão auxiliá-los a exercer a cidadania e prepará-los para o mercado de trabalho. (Brasil, 2018)

Abaixo segue um quadro estruturado a partir das habilidades, referente ao estudo de simetria, presentes na BNCC que deve ser desenvolvido em certas etapas do Ensino Fundamental.

[1] Os Parâmetros Curriculares Nacionais podem ser vistos em: Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, 1998.

Tabela 3.1 – Habilidades referente ao ensino de Simetria em cada período escolar do Ensino Fundamental

Ano (Ensino Fundamental)	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidade**
4°	Simetria de reflexão	**(EF04MA19)** Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.
7°	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
7°	Simetrias de translação, rotação e reflexão	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
8°	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Fonte: Elaborada pela autora a partir das habilidades e objetos de conhecimento descritos na BNCC (2018)

Quanto ao Ensino Médio, há uma temática que envolve o pensamento geométrico, e um dos tópicos que os estudantes precisam desenvolver diz respeito às transformações isométricas e ampliação das figuras. Além disso, usufruir dos conceitos de congruência e semelhança para solucionar diversas situações-problemas em diferentes contextos, a fim de que os mesmos possam construir uma perspectiva integrada dos conceitos matemáticos com as circunstâncias que vivenciam no cotidiano.

Tabela 3.2 – Habilidade referente ao ensino de Simetria no Ensino Médio por Competência

Habilidade	**Competência**
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral

Fonte: Elaborada pela autora a partir das habilidades e objetos de conhecimento descritos na BNCC (2018)

Cabe ressaltar que na BNCC a competência é vista como a mobilização de conhecimentos, os quais englobam os conteúdos e procedimentos, enquanto os objetivos de conhecimento, são os conteúdos essenciais que devem ser abordados nos anos escolares, e por fim, as habilidades referem-se às práticas socioemocionais e cognitivas que contribuem para os alunos solucionarem demandas das vivências em sociedade (Brasil, 2018).

Pasquini e Bortolossi (2015) concluem, a partir das ideias de Mendes (2014) e da análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que o conceito moderno de simetria, amplamente utilizado em diversas áreas do conhecimento, é quase inexistente na Educação Básica. Embora a ideia de invariância apareça no PCN, ela está associada às transformações e não aos objetos em si, ou seja, “o foco da PCN está nas transformações isométricas que preservam distâncias e não em objetos simétricos que são invariantes por tais transformações"(Pasquini; Bortolossi, 2015, p. 89).

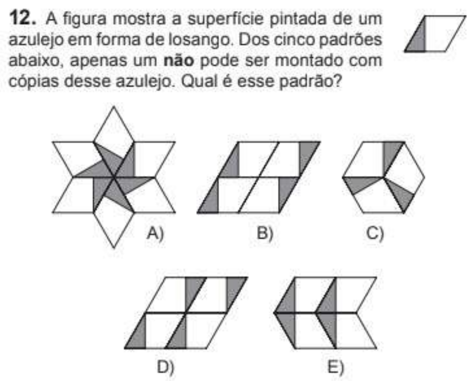
Diante disso, ao realizarem uma investigação das grades curriculares de outras disciplinas, os autores supracitados constataram a presença da palavra simetria, especialmente na Arte. Além disso, observaram uma significativa confusão por parte dos materiais didáticos acerca da definição de simetria que está sendo utilizada e esta é refletida na forma com que o tema é abordado em sala de aula. Outro equívoco identificado pelos autores, refere-se à forma como os livros didáticos trabalham a simetria em figuras bidimensionais e tridimensionais, pois utilizam as imagens bidimensionais para exemplificar e analisar as figuras tridimensionais, “eles, por exemplos, falam de “eixo de simetria” de uma borboleta, enquanto que, sendo a borboleta um objeto tridimensional, o correto seria considerar ‘plano de simetria’ ”(Pasquini; Bortolossi, 2015, p. 93).

Perante o exposto acima, será apresentado algumas situações–problemas referente aos estudos de simetria abordados na Educação Básica. Entre todos os materiais, recursos didáticos utilizados em sala de aula e as provas aplicadas aos alunos, optamos em analisar as questões presentes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e no Concurso Canguru de Matemática.

3.1 OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP)

Segundo o regulamento da OBMEP[2] , esta prova envolve os educandos do Ensino Fundamental e Médio, tanto nas escolas privadas como públicas em caráter municipal, estadual e federal, abrangendo conteúdos referentes a cada período escolar, sendo dividida em fases e níveis. Um dos objetivos da OBMEP é incentivar a aprendizagem de matemática e auxiliar na melhoria da qualidade do ensino da Educação Básica. Vale frisar que o site da OBMEP disponibiliza tanto as provas dos anos anteriores como as soluções.

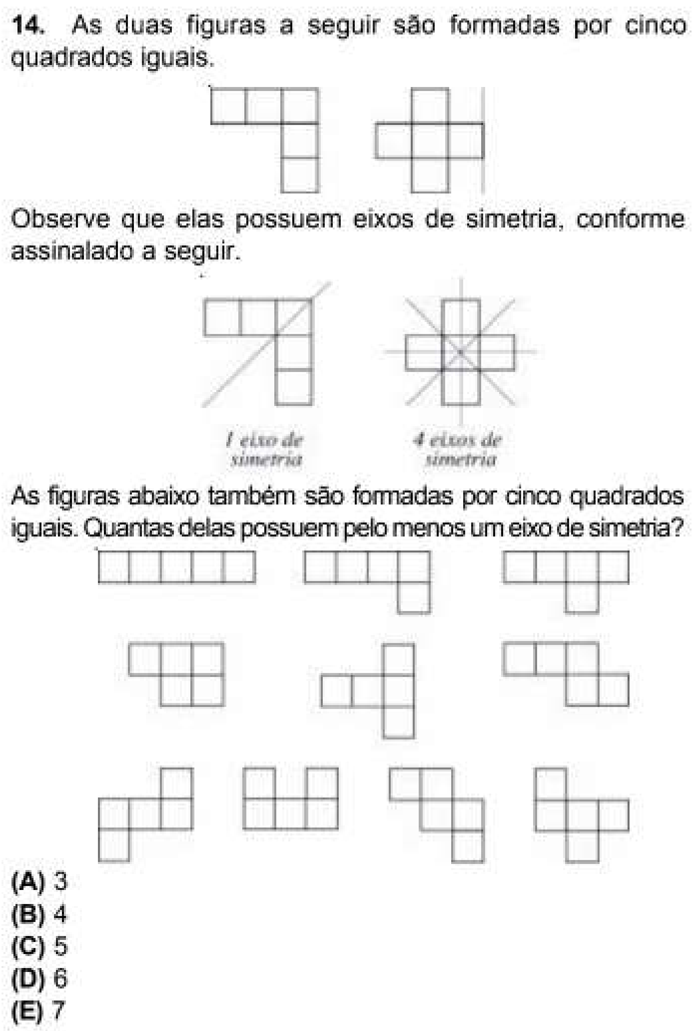
Figura 3.1 – Questão 12 do Nível 1 da 1° Fase no ano de 2010



Fonte: Página da OBMEP (Provas e Soluções)

[2] Os regulamentos da OBMEP podem ser vistos em :OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP). Regulamento. In:IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Disponível em: <https://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Acesso em: 12 jul. 2023.

Figura 3.2 – Questão 14 do Nível 2 da 1° Fase no ano de 2005



14. As duas figuras a seguir são formadas por cinco quadrados iguais.

Observe que elas possuem eixos de simetria, conforme assinalado a seguir.

1 eixo de simetria *4 eixos de simetria*

As figuras abaixo também são formadas por cinco quadrados iguais. Quantas delas possuem pelo menos um eixo de simetria?

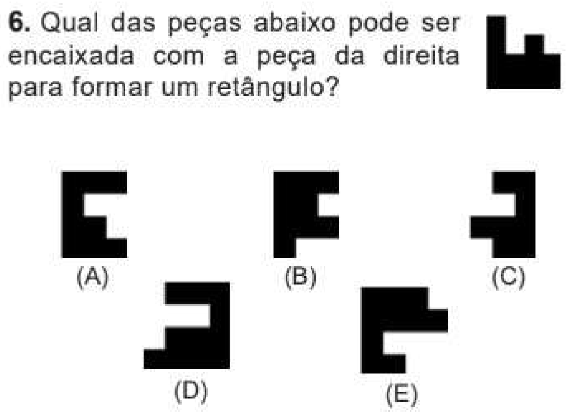
(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

Fonte: Página da OBMEP (Provas e Soluções)

Na questão 12 (para 6° e 7° ano), os alunos precisam utilizar as transformações isométricas, especificamente a simetria de rotação e translação para identificar quais padrões são possíveis de construir de tal forma que mantém o azulejo, tomado como base, invariante. Essas transformações não são mencionadas no enunciado, mas os educandos irão precisar delas para resolver a atividade. A resposta é a alternativa E, pois mesmo que há uma reflexão entre os azulejos que compõe o padrão estruturado nela, a mesma não está dentro do escopo do exercício, pois espera-se identificar padrões que utilizam azulejos idênticos ao original, apresentando as mesmas características, ou seja, a superfície pintada na mesma posição.

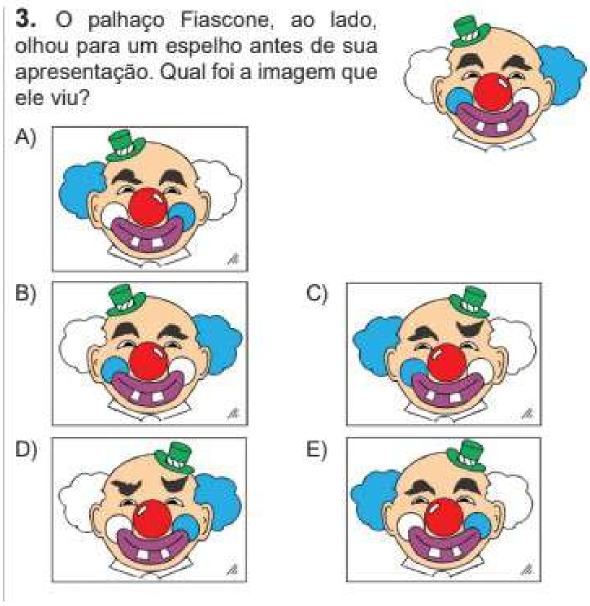
Já a questão 14, destinada aos estudantes da 7ª e 8ª série, equivalente aos 8° e 9° ano, observamos que foi abordado diretamente os eixos de simetria, um dos tópicos relevantes para essa temática. Entretanto, não é mencionado o uso da simetria de reflexão e nem outras propriedades específicas, como a equidistância em relação aos eixos, a qual é empregada intuitivamente pelo educando para resolver o problema. A resposta é a alternativa B, pois dentre as figuras apresentadas, apenas quatro contém pelo menos um eixo de simetria.

Figura 3.3 – Questão 6 do Nível 2 da 1° Fase no ano de 2021



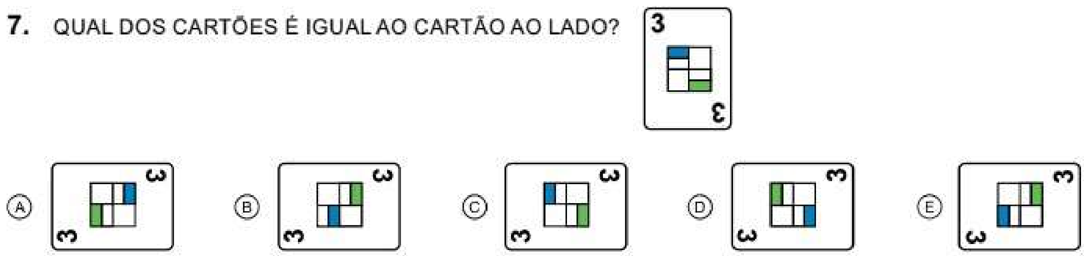
Fonte: Página da OBMEP (Provas e Soluções)

Figura 3.4 – Questão 3 do Nível A da 1° Fase no ano de 2019



Fonte: Página da OBMEP (Provas e Soluções)

Figura 3.5 – Questão 7 do Mirim 1 da 2° Fase no ano de 2022

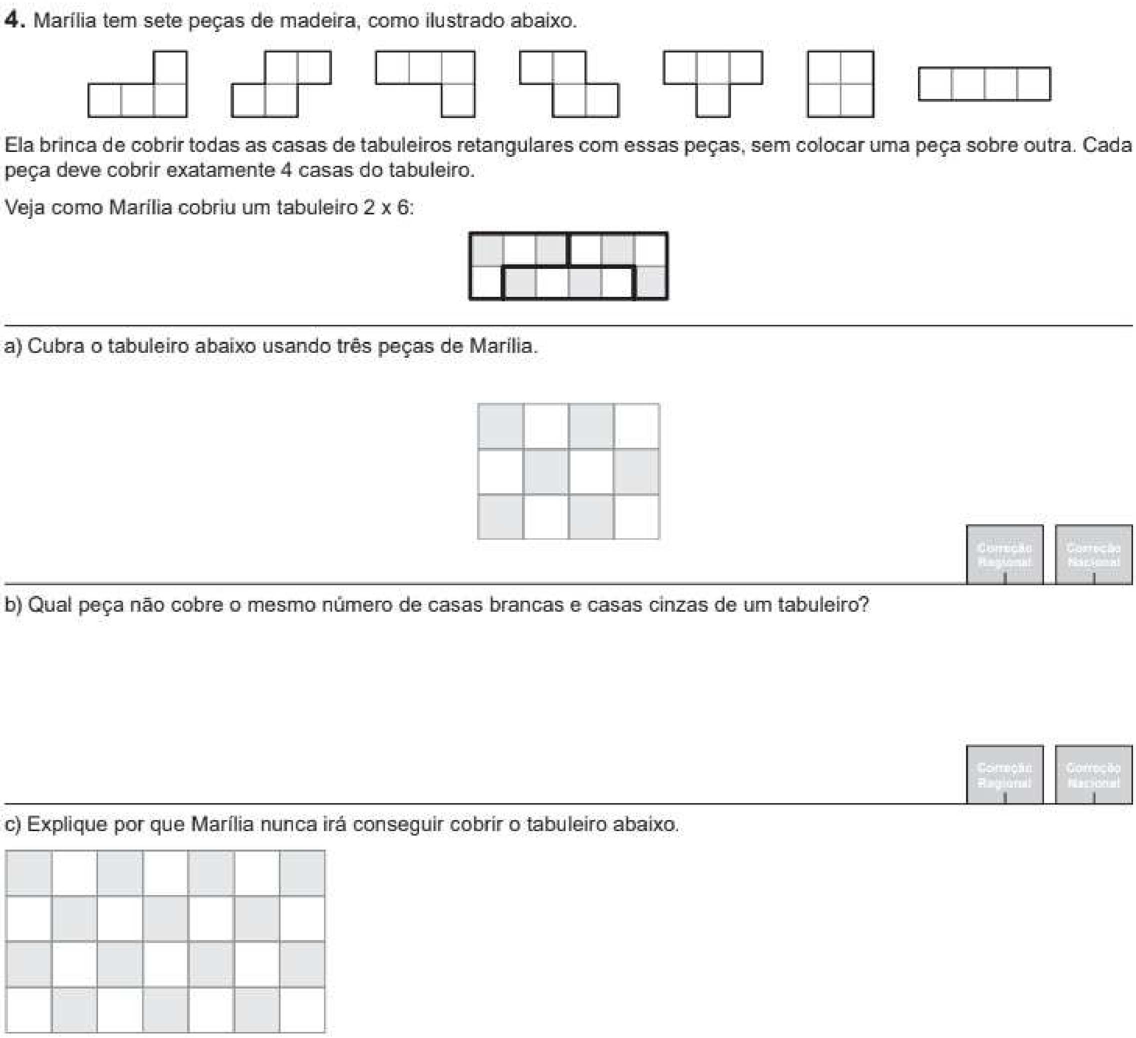


7. QUAL DOS CARTÕES É IGUAL AO CARTÃO AO LADO?

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

Fonte: Página da OBMEP (Provas e Soluções)

Figura 3.6 – Questão 4 do Nível 1 da 2° Fase no ano de 2018



4. Marília tem sete peças de madeira, como ilustrado abaixo.

Ela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros retangulares com essas peças, sem colocar uma peça sobre outra. Cada peça deve cobrir exatamente 4 casas do tabuleiro.

Veja como Marília cobriu um tabuleiro 2 x 6:

a) Cubra o tabuleiro abaixo usando três peças de Marília.

b) Qual peça não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas de um tabuleiro?

c) Explique por que Marília nunca irá conseguir cobrir o tabuleiro abaixo.

Fonte: Página da OBMEP (Provas e Soluções)

No que diz respeito às questões 4, 6 e 7 para os 6° e 7° anos, 4° e 5° ano e 2° e 3° anos, respectivamente, também é preciso aplicar as transformações (rotação, reflexão, translação) para solucionar a atividade, utilizando assim uma abordagem intuitiva dos conceitos simétricos, uma vez que eles também não são mencionados nos exercícios. Para a questão 4, é necessário usufruir das transformações em cada uma das peças de madeira apresentada, a fim de identificar quais delas irão cobrir completamente o tabuleiro. Para preencher o tabuleiro 34, o aluno irá notar que há várias formas, porém a peça em formato de "T" não irá cobrir a mesma quantidade de casas brancas e cinzas, visto que dependendo da posição em que for colocada acaba ocupando mais as casas brancas do que as cinzas, ou vice versa.

Em relação ao tabuleiro 47 , há 28 casas, fazendo com que seja necessário utilizar todas as peças, pois a soma das casas disponíveis em cada uma delas resulta em 28 casas. Entretanto, se utilizamos primeiramente a peça em "T" restará 24 casas, sendo 11 brancas e 13 cinzas, ou ao contrário, ficando impossível cobri-las com as demais peças, uma vez que cada uma preenche a mesma quantidade de casas brancas e cinzas.

Na questão 6 só é possível identificar a peça que irá formar um retângulo com a outra, ao aplicar as transformações em todas as peças apresentadas no exercício, de modo que a única peça possível é a disposta na alternativa B. Já na questão 7 a carta sofre simetrias de rotação, de modo que intuitivamente o aluno utiliza esses conceitos para encontrar a carta que é o resultado dessa transformação e é invariante ao compará-la com a original (Alternativa A). Por fim, a questão 3 usa-se a simetria de reflexão para encontrar qual é o reflexo do palhaço original (alternativa E), mas assim como as questões discutidas anteriormente, esse conceito, somado com a invariância, também é trabalhado de forma intuitiva.

3.2 CONCURSO CANGURU DE MATEMÁTICA

O Concurso Canguru de Matemática[3], trata-se de uma olimpíada de matemática internacional, realizada no Brasil desde 2009, em que todos os alunos da escola pública e privada do Ensino Fundamental e Médio podem participar. O propósito é auxiliar a melhorar o ensino de matemática na Educação Básica, ao mesmo tempo em que incentiva os alunos a se interessarem em desenvolver o conhecimento matemático, promovendo o engajamento dos mesmos, além de aproximar e contextualizar a matemática com a realidade vivenciada pelos educandos. Por se tratar de uma prova em nível internacional, é possível identificar quais os conteúdos matemáticos mais frequentes nas avaliações, mas também trata-se de um indicativo da forma com que este conteúdo é abordado na escola.

Atualmente, as provas estão divididas em níveis:

[3] Mais informações estão disponíveis no site da Canguru Brasil em: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/. Acesso em: 23 out. 2023

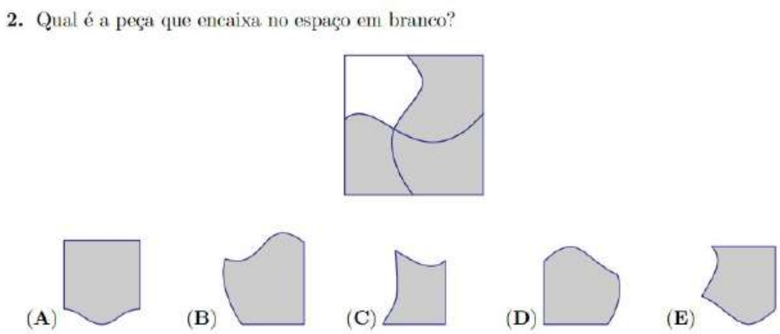
Tabela 3.3 – Níveis das provas no Concurso Canguru Brasil

Nível	Turma
Nível P (Pré-escolar)	Alunos 3° e 4° ano do Ensino Fundamental I
Nível E (Escolar)	Alunos do 5º e 6º anos do Ensino Fundamental I e do Ensino Fundamental II
Nível B	Alunos do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental II
Nível C	Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II
Nível J	Alunos da 1ª e 2ª séries do Ensino Médio
Nível S	Alunos da 3ª séries do Ensino Médio

Fonte: Elaborada pela autora a partir das informações disponíveis no site da Canguru Brasil

As questões da prova Canguru, que serão analisadas a seguir, foram rertiradas da página Matemática.pt[4]

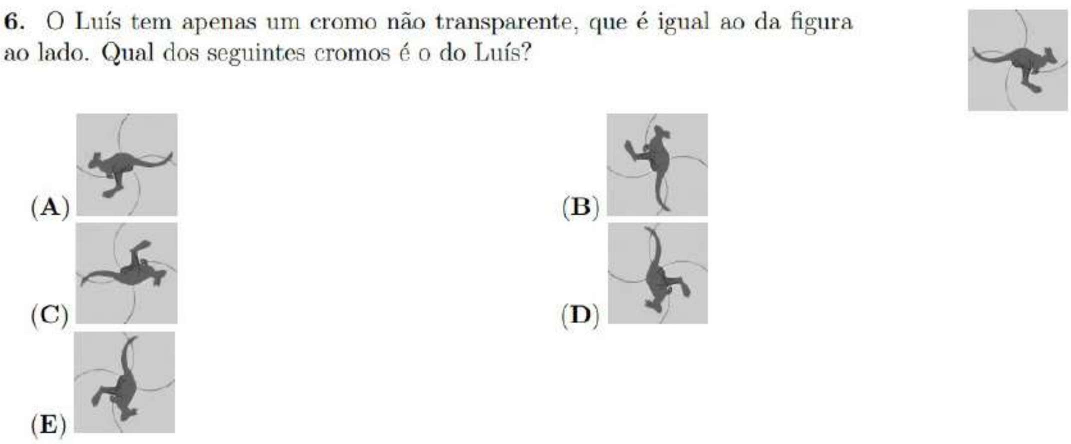
Figura 3.7 – Questão Canguru 2012 - 3° Ano de Ensino Fundamental



Fonte: Página Matemática.pt

4 Disponível em<https://www.matematica.pt/canguru/provas-canguru.php>. Acesso em: 19 jun. 2023.

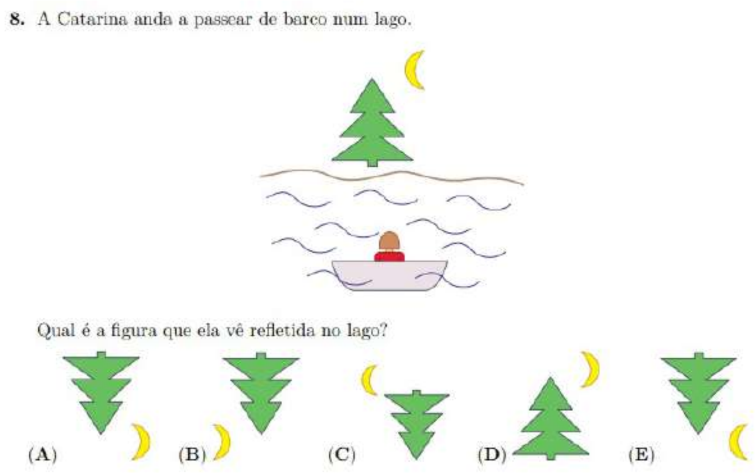
Figura 3.8 – Questão Canguru 2015 - 3° Ano de Ensino Fundamental



Fonte: Página Matemática.pt

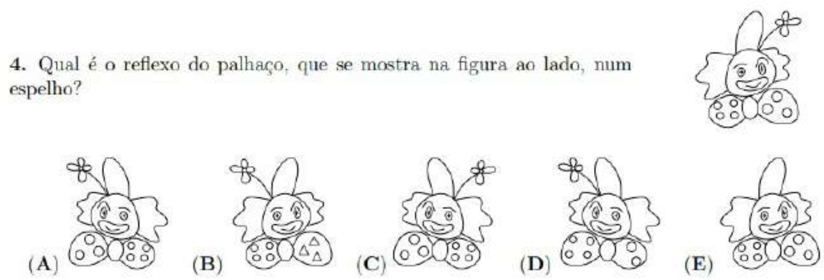
As questões apresentadas acima utilizam implicitamente as propriedades de simetria, já que estas não são mencionadas no enunciado, mas são necessárias para resolver os exercícios. Na primeira é preciso que o aluno rotacione as peças a fim de identificar aquela que se encaixe perfeitamente no espaço em branco, além de que ao ser rotacionada a peça permaneça invariante, desse modo ele deverá perceber que a resposta B é a solução da questão. Já na segunda, o estudante utiliza, intuitivamente, as concepções de figuras invariantes, pois uma das possíveis estratégias para solucionar a atividade, seria rotacionar o cromo apresentado como base, e assim identificar aquele que corresponde o resultado da rotação, no caso será a alternativa (E). Vale destacar que os cromos, resultado da reflexão, não podem ser considerados como respostas para o exercício, visto que espera-se encontrar um cromo em que a imagem esteja em uma outra orientação, mas metendo a posição original, isto é, não pode estar refletida.

Figura 3.9 – Questão Canguru 2012 - 3° Ano de Ensino Fundamental



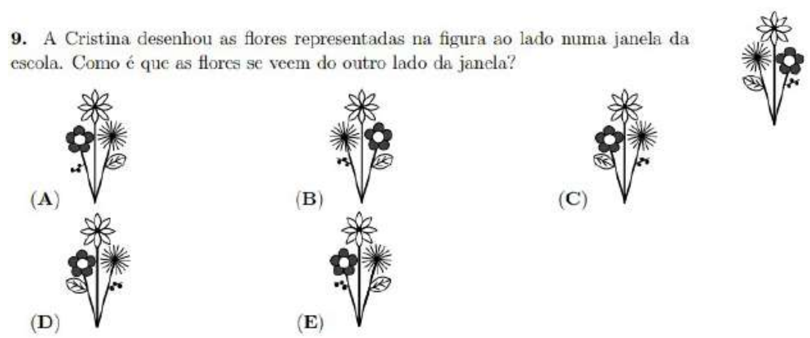
Fonte: Página Matemática.pt

Figura 3.10 – Questão Canguru 2016 - 4° Ano de Ensino Fundamental



Fonte: Página Matemática.pt

Figura 3.11 – Questão Canguru 2014 - 5° e 6° Ano de Ensino Fundamental



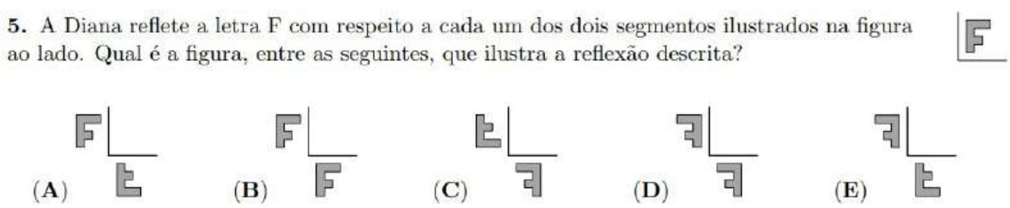
Fonte: Página Matemática.pt

Diferente das questões 2 e 6 (do 3° ano do Ensino Fundamental (EF)), nos exercícios 8

(3° ano do EF) e 4 (4° ano do EF), é diretamente abordado, a reflexão de uma imagem, embora não esteja mencionada a simetria, os alunos utilizam das propriedades associadas a esse tópico da matemática para solucionar a atividade, como eixo de simetria e invariância de figura após ser refletida. A questão 9 (5° e 6° ano do EF) também utiliza a simetria de reflexão, porém de maneira intuitiva, isso ocorre pois o enunciado usufrui-se de outros recursos para que a partir da interpretação o estudante consiga compreender que na resolução do exercício é necessário usufruir das propriedades de reflexão de uma imagem. Assim, a resposta das questões 8,4 e 9 são respectivamente as alternativas E, A e E.

Essas questões são exemplos de atividades resolvidas em sala de aula, para os alunos do Ensino Fundamental 1 e início do Ensino Fundamental 2, em que observa-se que desde os primeiros anos escolares é abordado a simetria, a princípio incentivando o caráter intuitivo, e com o decorrer dos anos é aprofundado o estudo dessa temática.

Figura 3.12 – Questão Canguru 2020 - 7° e 8° Ano de Ensino Fundamental II


5. A Diana reflete a letra F com respeito a cada um dos dois segmentos ilustrados na figura ao lado. Qual é a figura, entre as seguintes, que ilustra a reflexão descrita?

(A) (B) (C) (D) (E)

Fonte: Página Matemática.pt

Figura 3.13 – Questão Canguru 2021 - 9° Ano de Ensino Fundamental II


1. Qual dos símbolos do Zodíaco abaixo indicados é que tem um eixo de simetria?

(A) Sagitário (B) Escorpião (C) Leão
(D) Caranguejo (E) Capricórnio

Fonte: Página Matemática.pt

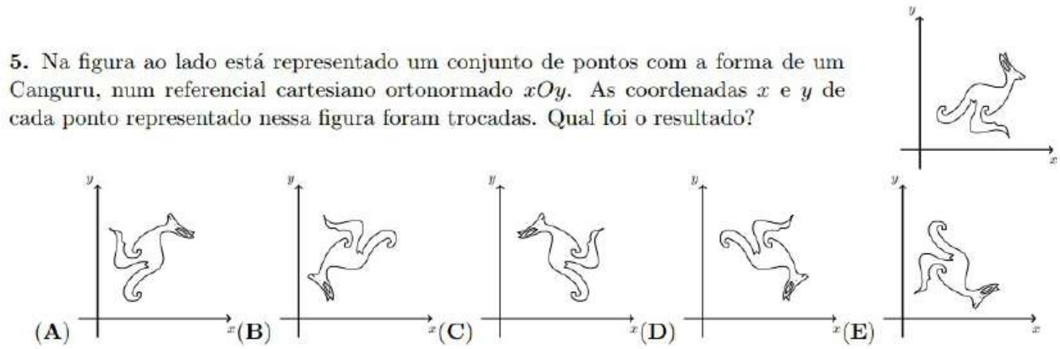
Tanto na questão 5, destinada aos alunos 7° e 8° ano do EF II, como na 1, voltada para o 9° ano EF II, são abordados de forma direta a simetria de reflexão e os eixos de simetria. Entretanto, enquanto no exercício 5 não menciona os eixos, apenas a reflexão, na questão 9 pergunta explicitamente sobre os eixos de simetria, mas não aborda no enunciado a simetria de reflexão, de modo que em ambos os casos, os estudantes precisam compreender o conceito de eixo de simetria. Na primeira questão, os alunos precisam utilizar esse conhecimento e refletir a imagem a partir de eixos diferentes, tal que a figura permaneça invariante, não se alterando ao sofrer um conjunto de transformações de reflexão. Por outro lado, na segunda, a reflexão ocorre em função de um único eixo de simetria.

Figura 3.14 – Questão Canguru 2019- 1° e 2° Ano de Ensino Médio


3. Um barbeiro quer escrever a palavra CORTE num quadro de tal modo que, quando um cliente olhar para o espelho, possa ler a palavra corretamente. Como deve o barbeiro escrever a palavra no quadro?

Fonte: Página Matemática.pt

Figura 3.15 – Questão Canguru 2019- 1° e 2° Ano de Ensino Médio


5. Na figura ao lado está representado um conjunto de pontos com a forma de um Canguru, num referencial cartesiano ortonormado xOy. As coordenadas x e y de cada ponto representado nessa figura foram trocadas. Qual foi o resultado?

Fonte: Página Matemática.pt

Na questão 3 para o 1° e 2° ano do Ensino Médio, os alunos também utilizam os conceitos de simetria de reflexão, mesmo que estes não sejam mencionados, e diferente dos outros exercícios apresentados até então, em que trabalhava-se com figuras, aqui utiliza-se palavras, aumentado o grau de dificuldade, pois todas as letras sofrem uma reflexão a partir do mesmo eixo de simetria, assim utiliza-se a invariâncias de figuras e implicitamente outras propriedades vinculadas a simetria, como equidistância em relação aos eixos.

A questão 5, voltada para os alunos do 3° ano do Ensino Médio, não só aborda indiretamente a simetria de reflexão, como também figuras e pontos simétricos, visto que almeja-se alterar as coordenadas x e y que formam uma figura no plano cartesiano. Dessa forma, está sendo realizado uma reflexão considerando a reta x = y como eixo de simetria, assim as coordenadas serão invertidas e consequentemente a imagem original será refletida, e assim os estudantes irão concluir que a resposta é a alternativa A. Nesse ínterim, o exercício conecta outros tópicos da matemática, como simetria e pontos no plano cartesiano, contemplando diversos assuntos, e isso mostra para o aluno que os conteúdos matemáticos estão interligados, não só nas atividades desenvolvidas em sala de aula, como também em situações cotidianas.

Por intermédio das questões apresentadas, nota-se que há a presença de outras simetrias, como a de rotação, e intuitivamente a concepção de invariância de figuras. No entanto, as mesmas quase não são mencionadas nos enunciados, cabe ao estudante ter a percepção de que estão utilizando esse conceitos ao resolver os problemas apresentados. Dentre todos os tópicos vinculados à simetria, o mais recorrente é a simetria de reflexão, em específico a análise de uma imagem através de um espelho ou janela, e os eixos de simetria.

Essa situação é elucidada por Santos e Tales (2012), pois ao analisarem os materiais didáticos utilizados na Educação Básica, observam que as propriedades das simetrias não são muito abordadas nas situações-problemas, de modo que a resolução destes exercícios, em sua maioria, apresenta o predomínio do caráter intuitivo. Em virtude disso, as autoras, ainda utilizando as ideias de Jaime e Guitérrez (1996), contemplam que os educandos possuem conhecimentos insuficientes e muitas vezes inadequados sobre os conceitos atrelados à simetria.

Com respeito a Simetria de Reflexão, na maioria das vezes, os alunos não conseguem conectar as imagens das figuras com propriedades que envolvem a “equidistância e perpendicularidade em relação ao eixo”(Santos; Tales, 2012, p.296). Nesse sentido, para muitos estudantes as figuras formadas são sempre paralelas à original, ainda que o eixo de simetria não seja. Essa situação ocorre, pois como discutido por elas, muitos dos exemplos utilizados pelos docentes são eixos de simetrias apenas na vertical, sem apresentar outras perspectivas. Referente a Simetria de Translação, os educandos possuem dificuldade em entender os vetores e suas particularidades. Já na Simetria de Rotação, os mesmos veem como desafio identificar as equivalências entre os ângulos e a congruência entre os objetivos, bem como utilizar as propriedades de equidistância para analisar a posição do centro de rotação e os pontos presentes na figura. (Santos; Tales, 2012)

Á visto do exposto acima, tem-se que a simetria é um assunto recorrente no ambiente escolar, as resoluções das atividades são predominantemente de caráter intuitivo e na maioria das vezes envolve o estudo da simetria de reflexão. Convém salientar que é importante incentivar a intuição dos alunos, mas também promover discussões e atividades em sala de aula que auxiliam no enriquecimento da bagagem intelectual dos mesmos e no desenvolvimento do conhecimento.

Para modificar esse cenário, Santos e Tales (2012) apontam como alternativa a conexão entre a Arte e a Matemática, especificamente a Arte com a Geometria, já que como “nunca estiveram em campos antagônicos, pois sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade” (Fainguelernt; Nunes, 2006, p. 18, *apud* Santos; Tales, 2012, p. 296), contribuem para a construção do sentido, tornando a aprendizagem significativa.

4 DIÁLOGO ENTRE SIMETRIA E ARTE

Neste capítulo iremos abordar a importância do diálogo entre a matemática e a arte na Educação Básica, não apenas para a aprendizagem dos conceitos vinculados a Simetria, mas também visando o desenvolvimento integral do aluno e incentivando a construção do conhecimento.

Matos (2011), a partir das ideias de Ponte e Serrazina (2007), enfatiza alguns objetivos para o ensino da simetria, como ampliar o raciocínio geométrico, entender as relações entre objetos, compreender as propriedades e características das isometrias, além de saber solucionar e refletir sobre situações-problemas que adotam essa temática como tema central.

No entanto, para a autora, antes de iniciar a abordagem da simetria, é fundamental que os docentes levem em consideração o desenvolvimento cognitivo de cada estudante, analisando se eles compreenderam os conteúdos abordados anteriormente nos anos escolares, se sabem refletir sobre os próprios pensamentos e elaborar teorias. Isso porque tais conhecimentos prévios, fornecem bagagens necessárias para a introdução e aprofundamento de novos tópicos relacionados ao tema, sendo um deles a representação espacial. Assim, "o aluno poderá então desenvolver o seu conceito de simetria, percebendo que este não se restringe apenas à igualdade das formas, mas também se relaciona com alguns tipos de transformações, espaciais ou temporais" (Matos, 2011, p. 21).

Nesse sentido, Matos (2011) afirma que um dos impactos significativos, que o estudo da simetria contribui para a formação do aluno, é o desenvolvimento da capacidade espacial, a qual faz-se presente em diversas circunstâncias na vivência dos indivíduos, entres elas a leitura de mapas. Segundo a autora, essa situação é consequência de atividades, que não só incentivam a comparação entre figuras e objetos em diferentes posições e orientação, como também a reconhecer a simetria entre eles e o eixo de simetria.

Santos e Tales (2012) discorrem que há diversos meios para abordar a simetria na Educação Básica, mas a discussão dessa temática por meio do diálogo entre ela e a arte acarreta incontáveis oportunidades de ensino, as quais contribuem para o desenvolvimento de novos significados e a construção do conhecimentos, além de estimular a participação ativa dos educandos, já que pode instigar o interesse dos mesmos para as discussões propostas no âmbito escolar.

Enquanto na matemática a simetria é identificada como transformações geométricas, as quais mantém as figuras inalteradas, na arte, é analisada como um dos elementos organizadores do campo visual, sendo uma ferramenta que auxilia a reconhecer as representações gráficas do movimento em objetos e imagens, por meio de padrões como alternância, repetição, translações e entre outros. Diante disso, a partir das ideias de Bastos (2006), Matos (2011) enfatiza que a observação de recursos artísticos por um viés simétrico, indica as conexões entre a geometria com outras áreas de conhecimento. Dessa forma,

> Perceber que ideias tão importantes como as de ordem e de simetria desempenham

> um papel central no processo de construção do conhecimento humano, por si só, já justifica o seu ensino e a importância que lhe é atribuída nos programas ao longo do ensino básico, nas áreas da matemática e das artes visuais. (Matos, 2011, p. 21)

À vista disso, Santos e Tales (2012) ao analisarem a interdisciplinaridade entre a Arte e a Matemática nos livros didáticos, mais especificamente, a interlocução entre as Artes Visuais e os conteúdos que englobam a Geometria, constatam que a conexão entre essas esferas do conhecimento, é muito mais que uma união entre duas disciplinas, já que acaba sendo uma atitude política, cujo objetivo é romper com a metodologia tradicional no ensino de matemática.

Em relação ao processo de ensino e aprendizagem de matemática, convém ressaltar que o mesmo vem passando por mudanças em virtude da necessidade de romper com o ensino pautado na tendência tradicional, em que o professor assume a posição central em sala de aula, e é considerado o único detentor do conhecimento, cabendo aos alunos o papel passivo e o dever de memorizar, reproduzir nas listas de exercícios e nas provas os assuntos estudados. Destarte,

> [...] é possível fugir da velha forma baseada na repetição que parece ser cheia de conhecimentos que não mudam, e que se deve decorar e saber reproduzir aquilo que o professor diz, muito freqüente na sala de aula de matemática, deixando pouco espaço para a criatividade e desenvolvimento do raciocínio lógico. (Chaves, 2008, p. 12)

Nesse mesmo contexto, Sabba e Cavalcante (2015) observam que o intuito dessas transformações é propor um processo de ensino que incentive a participação ativa dos educandos, desenvolvendo os conceitos matemáticos a partir de situações que fazem parte das vivências dos mesmos, contribuindo para que a construção do conhecimentos seja mais significativa, por conseguinte a aprendizagem de matemática ocorrerá de fato. “Essa tendência permite tornar o conhecimento matemático, algo com mais sentido, ampliando o olhar dos alunos em outras direções além de representar apenas operações com números e letras sem apresentar, para alguns, um sentido lógico e aplicado” (Sabba; Cavalcante, 2015, p. 2). Assim, deixa-se de focar apenas no ensino de conceitos, almejando também promover circunstâncias que contribuam com o desenvolvimento do raciocínio, da criatividade e do pensamento crítico dos estudantes.

Dessa forma, Zago e Flores (2010) enfatizam o consenso entre os educadores matemáticos de discutir a matemática na Educação Básica de forma contextualizada, uma vez que as relações entre os conteúdos discutidos com as situações cotidianas torna o processo mais significativo. Para enfatizar essa ideia, as autoras utilizam os conceitos geométricos como exemplos, uma vez que segundo elas, se estes forem trabalhados no ambiente escolar a partir de um enfoque muito distante das suas aplicações, ou seja, por uma perspectiva muito teórica sem reflexões sobre as suas utilidades na prática, podem acarretar em limitações na sua aprendizagem, por conseguinte os alunos podem manifestar dificuldades ao relacionar as temáticas. Isso porque, “a aprendizagem não significa, meramente, acumulação de conhecimentos, implica uma compreensão, de forma harmônica, de como esses conhecimentos podem ser utilizados de modo a fazer a diferença no cotidiano e nas experiências vividas pelos alunos” (Gusmão, 2013, p.131).

Chaves (2008) exalta a importância em trabalhar a matemática em comitante com outras áreas de conhecimento, pois ao usufruir das ideias de D'Ambrósio (2005), observa que a matemática foi um mecanismo utilizado pelos indivíduos, no decorrer dos anos, para compreender, sobreviver e coexistirem na sociedade, considerando o contexto social e cultural que vivenciam. Por este ângulo,

> O ensino de matemática, centrado em si mesmo, limitando-se à exploração de conteúdos meramente acadêmicos, de forma isolada, sem qualquer conexão entre seus próprios campos ou com outras áreas de conhecimento, pouco tem contribuído para formação integral do aluno, com vistas à conquista da cidadania. (Brasil, 1997, p. 26, *apud* Chaves, 2008, p. 11)

Sabba e Cavalcante (2015), baseadas nas ideias de Sabba (2004), ressaltam que uma forma de atrair os estudantes para os conteúdos discutidos em sala é por meio da beleza dos objetos, ou seja, através de arte, pois " a arte é algo que está inserido em tudo que se olha, e certamente é percebida pelos alunos, sem que haja nessa percepção a rigidez de alguns conceitos ou conteúdos da matemática" (Sabba; Cavalcante, 2015, p.2). Nesse sentido, é fundamental estimular os estudantes a criarem relações entre ambas as disciplinas e discuti-las em sala.

Chaves (2008), em sua pesquisa, tinha o propósito de estudar como a arte poderia contribuir e motivar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de matemática, assim apontou que como as artes apresentava muita geometria em sua composição, é uma ótima oportunidade abordá-las em sala de aula de forma conectadas. Sendo que, como mostrado por ele, essa conexão está sustentada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ao destacar a importância em utilizar os recursos artísticos, tais como obras de arte, pinturas e desenhos, para auxiliar os alunos a criarem relações entre a matemática e outras esferas do conhecimento.

Assim, segundo Flores (2016) a arte acaba sendo uma ferramenta que contribui para trazer significado e sentido à matemática. Por meio das ideias de Franco (2013) e Mendes (2008), a autora destaca que a interdisciplinaridade entre essas duas disciplinas, corrobora na construção do conhecimento, o qual torna a aprendizagem mais agradável e atrativa, além de colaborar no desenvolvimento da imaginação e criatividade do estudante.

4.1 INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE A MATEMÁTICA E A ARTE

Santos e Tales (2012), ao discutirem sobre a interdisciplinaridade, a qual passou a ser estudada com mais afinco no final da década de 60, observam que é fundamental compreendê-la a fim de evitar problemas em sua prática. Para elas, a interdisciplinaridade é "a inter-relação entre duas ou mais disciplinas, sem que nenhuma se sobressaia sobre as outras, mas que se estabeleça uma relação de reciprocidade e colaboração, com o desaparecimento de fronteiras entre as áreas do conhecimento" (Richeter, 2008, p. 85, *apud* Santos; Tales, 2012, p. 294).

Flores (2016) atenta que há uma visão utilitarista da arte, a qual acaba sendo considerada apenas como uma ferramenta para dar sentido à matemática. Em contrapartida, a autora apresenta uma outra perspectiva sobre o papel da arte no processo de ensino e aprendizagem de matemática, o qual está ancorado na arte como meio de praticar diferentes pensamentos, sendo assim estimular o raciocínio e a reflexão, já que a imagem leva o indivíduo a questionar e problematizar as situações. Dessa forma, “[...] pensar não é somente ‘raciocinar’ ou ‘calcular’ ou ‘argumentar’, como nos têm sido ensinado algumas vezes, mas é sobretudo dar sentido ao que somos e ao que se nos acontece” (Larrosa, 2014, p. 16, *apud* Flores, 2016, p. 507).

A arte é um meio em que as pessoas conseguem expressar sentimentos, pensamentos, formas de agir e de se relacionarem na sociedade, isto é, não representa apenas ideias, mas também trata-se de uma manifestação filosófica, cultural e social, contribuindo para a significação de objetos essencial no desenvolvimento do conhecimento, evidenciando assim o quanto ela é indispensável na educação. (Zago e Flores, 2010)

Posto isto,

> [...] essa relação deve não somente aparar o ensino com métodos e técnicas, tampouco, proporcionar um ambiente de significação, de recriação, e de ensino de conceitos matemáticos e geométricos, mas, valorizar a criatividade e a visualização donde a geometria é apenas uma sugestão para olhar e pensar a arte. (Zago; Flores, 2010, p. 353)

Em relação ao exposto acima, Flores e Kerscher (2021) evidenciam duas perspectivas na interação entre Arte e Matemática: uma em que se aprende matemática pela arte e a outra em que se aprende com a arte. A primeira está relacionada com uma abordagem interdisciplinar em que a arte é um mecanismo de contextualização, visualização e identificação de saberes matemáticos, ou seja, a arte passa a ser uma ferramenta para tornar a aprendizagem matemática mais significativa. Sendo assim,

> [...] aprender Matemática pela Arte tem sido baseado, normalmente, pelo reconhecimento de formas geométricas, pela materialização de conceitos abstratos e identificação de conhecimentos diversos da geometria e da Matemática, em que a atividade cognitiva e mental desenvolvem um papel primordial. (Flores; Kerscher, 2021, p.25)

Segundo as autoras, essa situação decorre de uma herança cultural em que o enfoque do pensamento educacional está vinculado com a concepção de que a aprendizagem ocorre a partir da assimilação do conhecimento, como se este fosse adquirido. Assim, para elas a ideia de aprendizagem acaba tendo como base a repetição de ordens e regras, cujo objetivo é a representação e apropriação, sendo evidenciada até na origem da palavra “aprender”. Quanto a aprender Matemática com a Arte, Flores e Kerscher (2021) utilizam as ideias de Deleuze (2006), ao evidenciar a diferença entre aprender como alguém, voltada para a repetição e imitação, ou seja, aprender de forma semelhante a outro indivíduo, para aprender com, isto é, a partir da ajuda ou orientação de alguém, por exemplo, um professor ou colega de sala, pois “aprendemos que qualquer relação, com pessoas, com coisas, possui o potencial de mobilizar em nós um aprendizado” (Flores; Kerscher, 2021, p. 27).

Em relação a busca por uma aprendizagem mais significativa, Gusmão (2013) observa que utilizar a experiências e o contexto social que os alunos vivenciam é fundamental para atingir tal intento, uma vez que “é atribuindo significações às suas experiências que o aluno pode aprender sentidos e adquirir conhecimentos que possam auxiliá-lo a compreender-se” (Gusmão, 2013, p. 87). Nesse cenário, a autora evidencia a importância em trabalhar a Arte e a Matemática interligadas, pois além de fazer parte do cotidiano dos indivíduos, elas sempre se conectaram na histórica da sociedade, de modo que a interlocução entre elas na sala de aula irá contribuir para a formação integral dos educandos,

> A educação matemática pela arte, ou a arte na educação matemática, pode desenvolver estas capacidades: pensamentos, ideias, imaginação, emoção, concepções, sensibilidade, e cooperar no trabalho para unir, de forma harmônica, agradável e saudável a teoria e a prática, tornando a matemática mais humanizada. (Gusmão, 2013, p. 77)

Entretanto, para a autora, na instituição escolar a matemática apresenta posição de destaque em relação às outras disciplinas, especificamente sobre a arte, pois a segunda “ainda é tratada e desenvolvida, em muitas salas de aula, como um mero lazer, uma distração entre as atividades ‘sérias’ das demais disciplinas” (Gusmão, 2013, p. 128). Dessa forma, é indispensável refletir sobre a forma com que a conexão entre essas áreas de conhecimento será desenvolvida no ambiente educacional, já que, segundo a autora, a interdisciplinaridade entre elas pode contribuir para que o aluno tenha um outro olhar para a matemática. Sendo assim, é vital que haja uma compreensão e questionamento sobre qual perspectiva deseja-se desenvolver em sala de aula, visto que

> Sob a máscara da interdisciplinaridade, por exemplo, muitas delas acabam reforçando categorias disciplinares, dicotomias entre conhecimento e realidade que, muitas vezes, levam a um ensino que, querendo ser significativo e contextualizado, acabam sendo desprovidos de sentido, de vida. (Flores, 2016, p.510-511).

Para Barros (2017) a arte auxilia na investigação dos conceitos relacionados a Geometria, contribuindo assim para a construção de um olhar crítico, reflexivo do aluno referente à temática, e consequentemente ajuda no processo formativo dos mesmos. Mesmo que ambas as disciplinas apresentam divergências em suas representações elas se conectam, “proporcionando ao observador/aluno a construção do pensamento visual do concreto ou/e do abstrato”(Barros, 2017 p.42). Nessa mesma análise, Rossi (2014) exalta a importância em utilizar a arte e relacioná-la com a matemática, pois além de conseguir contextualizar os conceitos matemáticos, permite o estudante compreender que estes estão presentes em situações do dia-a-dia.

A partir de Broitman e Itzcovich (2006), Santos e Tales (2012) expõem que o ensino de Geometria contribui para a formação cultural dos indivíduos, já que trata-se de um modelo de pensamento racional e dedutivo. Para a perspectiva cognitiva, “a Geometria é o campo da Matemática que favorece aos aprendizes o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento” (Santos; Tales, 2012, p.295). Rossi (2014) afirma que a Geometria é uma área que permite o docente abordá-la de forma concreta ao usufruir de diversos recursos didáticos, cabendo assim, ao professor ter a vontade de utilizá-los. Além disso, a Geometria colabora para o estudante dar significados e representações para as vivências em sociedade.

Ainda, Barros (2017) aponta que o estudo da Geometria deve contribuir para que os educandos consigam desenvolver o conhecimento referente a formas e figuras geométricas, bem como a consciência de espaço tridimensional e bidimensional, conceitos muito utilizados na arte. Em consideração a isso, a matemática proporciona ferramentas para a arte, os quais muitas vezes acabam sendo parâmetros para designar as obras considerando o período em que foram desenvolvidas. “Por exemplo, um elemento importante que difere a arte renascentista da arte no período medieval foi a utilização da perspectiva na representação plana de objetos do espaço tridimensional” (Barros, 2017 p.44).

Em vista disso, segundo a autora, a análise das obras de arte, e outro recursos artísticos no processo de ensino e aprendizagem, ampliam a visão que os alunos apresentam do mundo, já que por meio dos significados escondidos nas obras e das percepções que os alunos adquirem, a partir de novos conhecimentos e das experiências vivenciadas no cotidiano, conseguem ampliar o repertório individual e assim tecer conjunto de valores. Uma vez que “o estudo da arte de outros povos e de outras culturas pode desenvolver o respeito pelos valores que governam os diferentes tipos de relações entre os indivíduos de cada sociedade e em diferentes épocas”(Finguelernt; Nunes, 2006, *apud* Matos, 2011, p. 30).

Nesse cenário, Santos e Tales (2012), a partir de Fazenda (1995), enfatizam que essa abordagem interdisciplinar busca conectar horizontalmente diferentes campos do conhecimento, o que contribui para a construção de novos saberes, resultando em aprendizados mais amplos e diversificados. Dessa maneira, a aprendizagem será mais significativa para os educandos, pois os mesmos irão conseguir aplicar na prática todos os conceitos discutidos.

Dessarte, a interlocução entre a arte e a simetria desempenha um papel importante no âmbito da educação, corroborando para a formação integral dos alunos, desenvolvendo o pensamento crítico, criativo, refletindo sobre a realidade na qual estão inseridos. Essa situação transcorre, pois como discutido pelas autoras supracitadas, por intermédio dos recursos artísticos, os estudantes podem refletir sobre os conceitos que englobam a simetria de uma maneira mais significativa, visto que essas temáticas serão exploradas por um caráter mais diversificado e criando interconexões entre diversas áreas, em vez de estruturar aulas cujo foco é memorizar e repetir as informações passadas em sala, metodologia essa, que torna a aprendizagem limitada.

4.2 ESCHER

Nesta seção, será esclarecido o motivo de escolhermos desenvolver a análise da Simetria na Educação Básica utilizando as obras de Escher como uma perspectiva artística.

Maurits Cornelis Escher nasceu na cidade de Leeuwarden na Holanda no ano de 1898 e faleceu em 1972, tendo dedicado intensamente a sua vida para as artes gráficas. Mesmo apresentando dificuldade com a matemática, o artista utilizava intuitivamente os conceitos geométricos em suas obras, sem conhecer formalmente as teorias em que os mesmos estavam ancorados. (Alves, 2014)

Nessa perepctiva,

> As obras de Escher são um exemplo concreto de como as imagens podem facilitar o entendimento de alguns conceitos geométricos, através de seus desenhos, numa mistura de simetria e pavimentação do plano (tesselação), ele faz com que o aluno consiga melhor visualizar e destacar os tipos de transformações existentes, tornando-as assim mais simples aos seus olhos. (Alves, 2014, p.11)

Alves (2014) observa que Escher se inspirava nos ornamentos do Palácio Mourisco de Alhambra na Espanha, construído no século XIII pelos árabes, para desenvolver suas obras, porém optou em usar figuras reais como peixes, aves, répteis entre outras, pois eram mais fáceis de reconhecer em comparação aos polígonos regulares utilizado pelos árabes.

Para Pinatti e Lorin (2014), por meio das ideias de Berro (2008), é cabível utilizar as obras de Escher para abordar diversos conteúdos matemáticos, “as obras de Escher traziam conceitos matemáticos que podem ser trabalhados em sala de aula pelo professor, [...], de modo que fazer essa relação da Arte com a Matemática possa contribuir para uma aula menos cansativa e tradicional” (Pinatti; Lorin, 2014, p. 7).

Dentro os conceitos matemáticos que podem ser trabalhados nas obras de Escher, a Simetria está bem presente, já que o artista utilizava da mesma para gerar equilíbrio em suas obras. De acorco com Pinatti e Lorin (2014), a simetria era vista como meio para fazer com que uma mesma figura seja composta em duas partes iguais.

Como mencionado anteriormente, a forma com que simetria é ensinada acaba não criando relações com outras áreas de conhecimento, “[...] focamos nas partes e perdemos a noção do todo, aprendemos apenas a separar, isolar e não se ensina a religar e conectar os saberes” (Isidro, 2022, p. 21). Nesta perspectiva, ao estudar as obras de Escher os estudantes conseguem criar conexões entre os assuntos discutidos, pois trata-se de cenários em que a matemática está presente, mas não é o foco principal. Desse modo, “os alunos percebem a presença da Matemática em um contexto que até então não teria ligação nenhuma com ela, e que não é só os matemáticos que utilizam a Matemática. Proporcionando assim, um novo olhar para a Matemática” (Isidro, 2022, p. 26).

À vista disso, os educandos irão perceber que da mesma forma que Escher utilizava intuitivamente a matemática em suas obras, eles também usufruem dos conceitos matemáticos em diversas circunstâncias no cotidiano, como ao fazer compras, cozinhar e nos jogos, o que irá contribuir para que os mesmos consigam relacionar e conectar a prática com a teoria desenvolvida em sala de aula, ampliando assim o pensamento crítico, o raciocínio lógico e a criatividade, tornando a aprendizagem mais significativa.

5 SIMETRIA A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA ARTÍSTICA

Neste capítulo iremos fazer uma análise de algumas obras de Escher para identificar os tipos de Simetria presente em sua composição.

Figura 5.1 – “Pégaso” de 1959

Fonte: Rosa *et.al*, 2021, p.8

Nesta obra, está sendo trabalhado a simetria por translação. Como foi discutido no capítulo 2, a translação consiste no deslizar do objeto, por conseguinte “na simetria por translação todos os pontos de uma figura se ‘deslocam’ na mesma direção, no mesmo sentido e a mesma distância, sempre associadas a um vetor”. (Alves, 2014, p. 28)

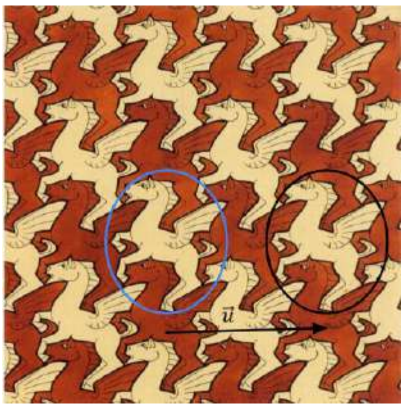
O primeiro ponto a ser observado é que há dois tipos de cavalos, os beges e os vermelhos, e estes são iguais do mesmo tamanho e formato, porém em posições diferentes. Vale reforçar que “[...] não se pode falar de «o» motivo. O mesmo desenho pode ser pensado considerando motivos diferentes” (Carvalho *et.al*, 2016 p.148). Diante disso, considere o cavalo bege circulado em azul representando o motivo, isto é, a figura básica, inicial F_0, que a partir das repetições de simetrias irá compor a obra. Assim, temos que os demais cavalos bege configuram uma função $S : \prod \longrightarrow \prod$, tal que $S(F) = F$.

Figura 5.2 – Representação de F_0 na obra “Pégaso”

Fonte: Adaptada de Rosa *et.al*, 2021, p.8

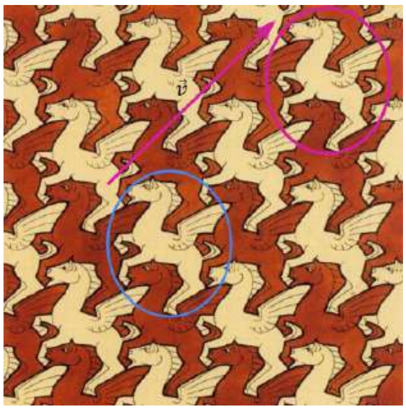
Para o vetor $\vec{u}$ demarcado em preto na figura abaixo, tem-se que $S_u(F) = F + \vec{u}$, em que S_u representa a transformação em relação ao vetor $\vec{u}$. Diante disso, para $S_u(F)$ o resultado será todos os cavalos beges que seguem a direção desse vetor. O mesmo ocorre para o vetor diagonal $\vec{v}$ demarcado em rosa, ou seja, temos $S_v(F) = F + \vec{v}$, com S_v a tranformação para ao vetor $\vec{v}$. Nesse caso, o resultado para $S_v(F)$ também serão os cavalos em bege, porém na direção de $\vec{v}$.

Figura 5.3 – Representação para o vetor $\vec{u}$ na obra “Pégaso”



Fonte: Adaptada de Rosa *et.al*, 2021, p.8

Figura 5.4 – Representação para o vetor $\vec{v}$ na obra “Pégaso”



Fonte: Adaptada de Rosa *et.al*, 2021, p.8

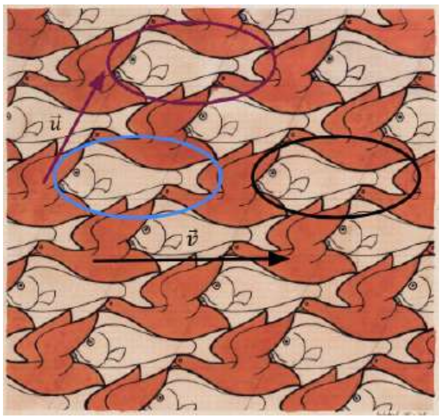
A mesma análise pode ser construída para os cavalos em vermelho, desde que seja determinada a figura inicial e os vetores que serão observados.

Na obra “Bird Fish” também é possível observar simetria por translação, basta considerar uma figura inicial (motivo), a qual representamos em azul, e vetores pré-determinados, que na obra a seguir estão em preto ($\vec{v}$) e em roxo ($\vec{u}$).

Figura 5.5 – “Bird Fish” de 1938

Fonte: Página Arte e Artistas[1]

Figura 5.6 – Representação de Vetores no “Bird Fish”



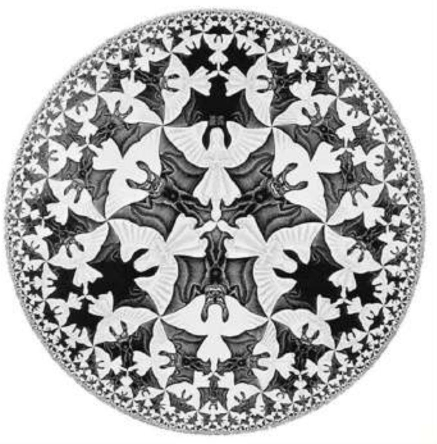
Fonte:Adaptada de Página Arte e Artistas

A partir das análises feitas, temos que as obras “Pégasos” e “Bird Fish” são o resultado de várias composições de simetrias de translação com vetores em direções divergentes, por isso não podem ser consideradas como um Friso, já que, como visto anteriormente, os frisos são resultados de várias translações em uma única direção. No entanto, as obras podem ser encaradas com um Papel de Parede ou Padrão. Não só isso, como também é importante reforçar que a composição de translações continuará sendo uma isometria, e mais especificamente uma simetria, já que como foi discutido no capítulo 2, a composição de isometrias é uma isometria.

No recorte da obra "Limite Circular IV", ilustrado na imagem abaixo, é possível notar a simetria de reflexão, a qual ocorre quando um objeto é refletido por meio de um eixo linear, isto é, o eixo de simetria, e assim “ é possível fazer se corresponder ponto a ponto com a imagem original”(Alves, 2014, p. 28).

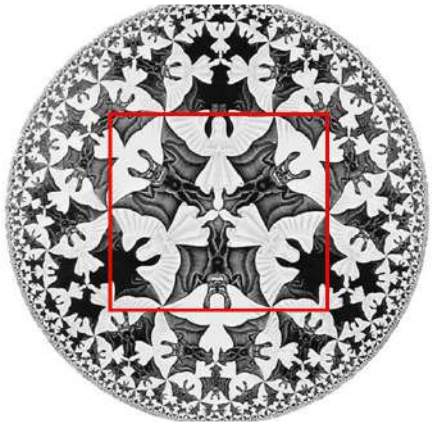
1 Disponível em<https://arteeartistas.com.br/biografia-de-maurits-cornelis-escher/>. Acesso em: 19 jun. 2023.

Figura 5.7 – “Limite Circular IV” de 1960



Fonte: Página Arte e Artistas[2]

Figura 5.8 – Recorte do “Limite Circular IV"



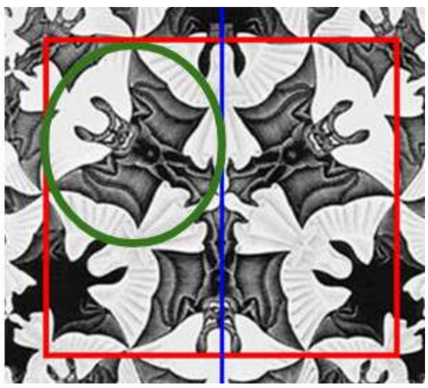
Fonte: Adaptada de Página Arte e Artistas

Para o eixo de simetria criado em azul daremos o nome de segmento AB. A partir dele podemos notar que dependendo da perspectiva analisada e da figura F_0, ou seja, o motivo, há diferentes simetrias de reflexão em uma mesma obra. Assim, inicialmente iremos considerar a figura destacada em verde como F_0.

Figura 5.9 – Representação do Eixo de Simetria no recorte do “Limite Circular IV”

Fonte: Adaptada de Página Arte e Artistas

Figura 5.10 – Representação da figura inicial F_0 no recorte da obra “Limite Circular IV”



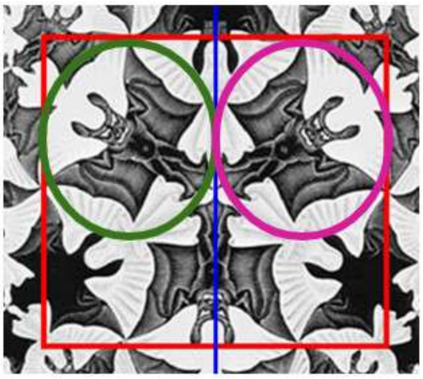
Fonte: Adaptada de Página Arte e Artistas

A figura demarcada em rosa, denotaremos de F, assim é possível observar que podemos construir segmentos de reta ($\overline{PP'}$) em que um dos extremos está em F_0 e o outro em F, tal que

2 Disponível em<https://arteeartistas.com.br/biografia-de-maurits-cornelis-escher/>. Acesso em: 19 jun. 2023.

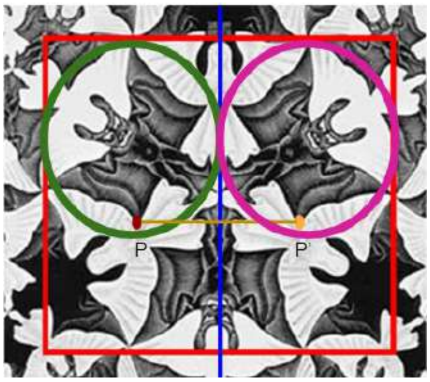
ao intercederem o segmento AB, em um determinado ponto, este será o ponto médio de $\overline{PP'}$.

Figura 5.11 – Representação da Figura F na obra “Limite Circular IV”



Fonte: Adaptada de Página Arte e Artistas

Figura 5.12 – Segmento $\overline{PP'}$ na obra “Limite Circular IV”



Fonte: Adaptada de Página Arte e Artistas

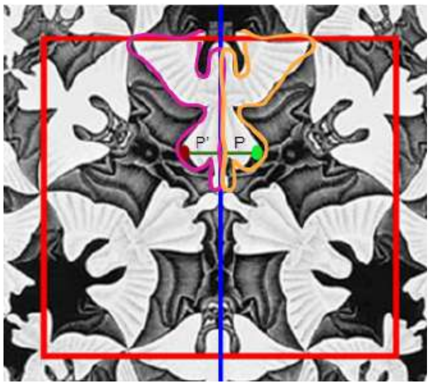
Dessa forma, concluímos que na obra analisada há simetria de reflexão, pois conseguimos estruturar uma transformação $S_{AB} : \prod \longrightarrow \prod$, em relação ao segmento AB, tal que cada ponto da figura F se corresponde com os pontos de F_0, ou seja, $S_{AB}(F) = F$.

Agora a nova F_0, é a figura demarcada em rosa e F a imagem em laranja. Similar ao caso anterior, também podemos construir segmentos de reta em que um dos extremos está em F_0 e o outro em F, de modo que a intercessão deles com AB é o ponto médio do próprio segmento criado ($\overline{PP'}$). Nesse sentido, como há diversos segmentos que usufruem dessa mesma características, temos que para uma determinada transformação cada ponto da figura F se corresponde com os pontos de F_0, fazendo com que $S_{AB}(F) = F$ e assim concluímos que existem várias simetrias de reflexão na composição da obra.

Figura 5.13 – Representação da nova F_0 e F na obra “Limite Circular IV”

Fonte: Adaptada de Página Arte e Artistas

Figura 5.14 – Representação do segmento PP' em relação a nova F_0 na obra “Limite Circular IV”



Fonte: Adaptada de Página Arte e Artistas

Carvalho *et.al* (2016) destaca que a obra “Limite Circular IV” pode ser classificada com uma Rosetas ou Rosáceas por apresentar uma quantidade limitada de simetrias de reflexão e rotação, e está organizada em um formato circular.

Uma abordagem alternativa para analisar a simetria de reflexão é por meio dos recursos disponibilizados no GeoGebra, o qual será a ferramenta utilizada para estudar a obra de arte a seguir. Nesse contexto, seguindo os procedimentos anteriores, vamos identificar a figura inicial (circulada em vermelho) e o segmento de reta ($\overline{AB}$) que servirá como eixo de simetria.

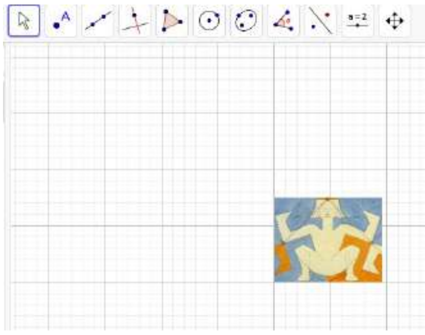
Figura 5.15 – “Systematic Study” de 1936

Fonte: Página WikiArt[3]

Figura 5.16 – F_0 na obra “Systematic Study”

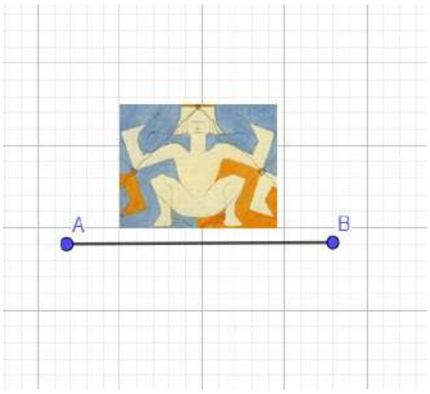
Fonte: Adaptada de Página WikiArt

Figura 5.17 – Recorte da F_0 da obra “Systematic Study” no GeoGebra



Fonte: Elaborada pela Autora

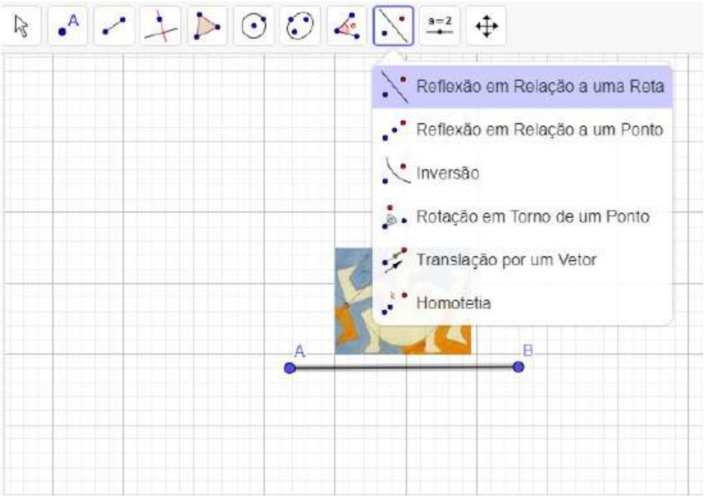
Figura 5.18 – Segmento AB e recorte da obra “Systematic Study”



Fonte: Elaborada pela Autora

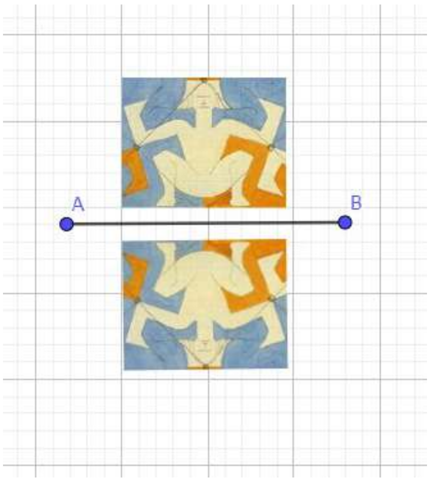
[3] Disponível em: <https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher/systematic-study>. Acesso em: 23 jun. 2023.

Figura 5.19 – Recurso para a reflexão em torno de uma reta no GeoGebra



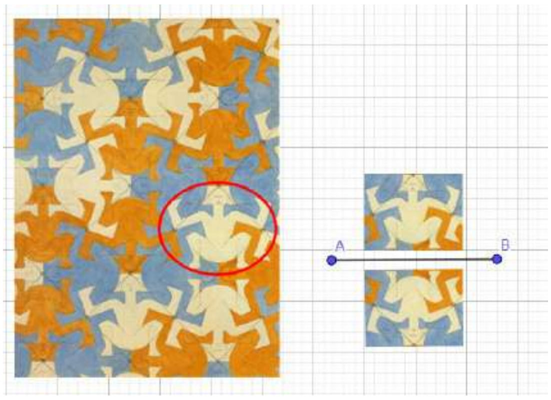
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.20 – Reflexão do recorte da obra "Systematic Study"



Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.21 – Comparando a obra "Systematic Study" com o resultado criado no GeoGebra



Fonte: Elaborada pela Autora

Assim, por intermédio do Geogebra, concluímos que há simetria de reflexão na obra, e para isso bastou analisarmos o resultado da transformação aplicada no motivo (figura inicial) e compará-lo com a arte de Escher.

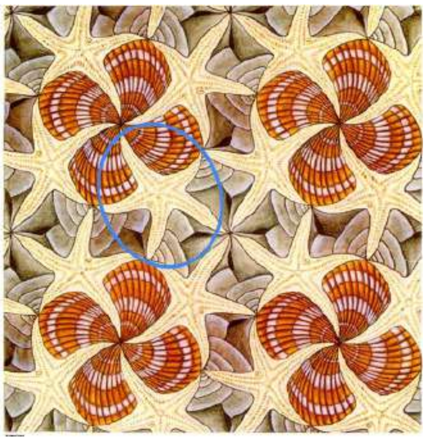
Segundo Alves (2014) a simetria de rotação acontece a partir do giro de um determinado objeto, de modo que independente da posição observada a imagem continua a mesma. Esta transformação podemos estudar na obra "Shells and Starfish".

Figura 5.22 – "Shells and Starfish" de 1941

Fonte: Página WikiArt[4]

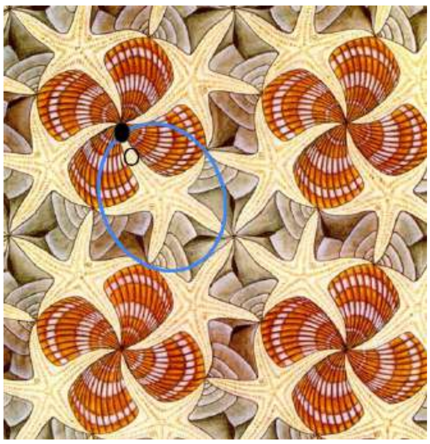
Para desenvolver a análise da obra, além de determinar a figura F_0 (motivo), que está representada em azul, é necessário estabelecer o centro de rotação, o qual chamamos de O, conforme ilustrado nas imagens.

Figura 5.23 – Representação da nova F_0 na obra "Shells and Starfish"



Fonte: Adpatda de Página WikiArt

Figura 5.24 – Representação do centro de rotação O no "Shells and Starfish"



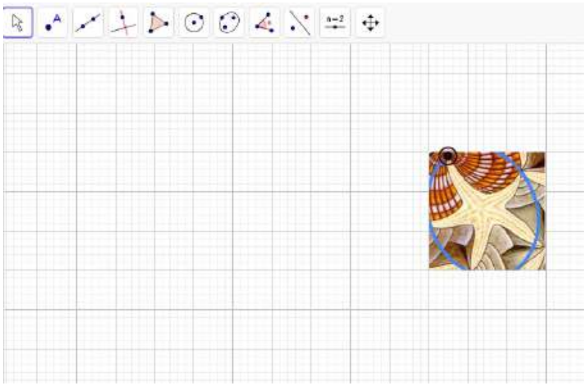
Fonte: Adpatda de Página WikiArt

Seja um ângulo, tal que para a transformação $S_{O,\theta} : \prod \longrightarrow \prod$, $S_{O,\theta}(F) = F$. No intuito de auxiliar na visualização da simetria de rotação, será utilizado o recurso do GeoGebra.

[4] Disponível em: <https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/shells-and-starfish>. Acesso em: 23 jun. 2023.

Dessa forma, fizemos um recorte da figura inicial para analisarmos as mudanças que ocorreram considerando o ângulo escolhido, além de apresentar os recursos utilizados.

Figura 5.25 – Recorte da F_0 da obra “Shells and Starfish” no Geogebra



Fonte: Elaborada pela Autora

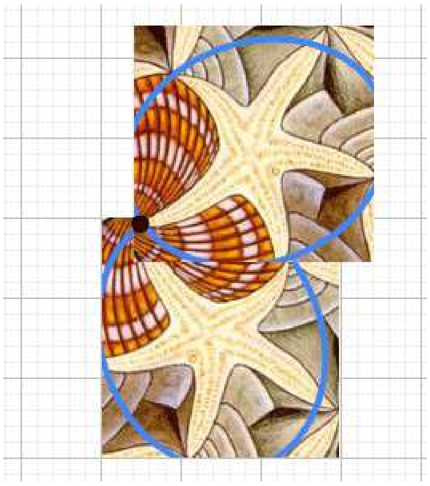
Figura 5.26 – Recurso do GeoGebra para a rotação

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.27 – Ângulo de 90° para a F_0 da obra “Shells and Starfish”

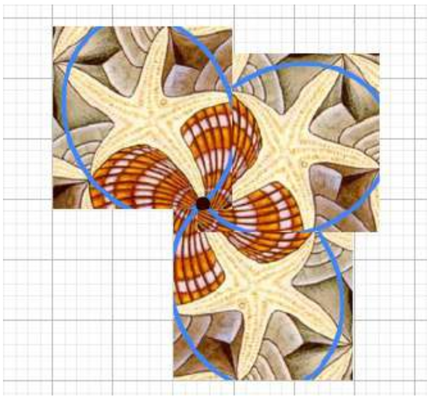
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.28 – Resultado de $S_{O,\theta}$ para θ = 90°



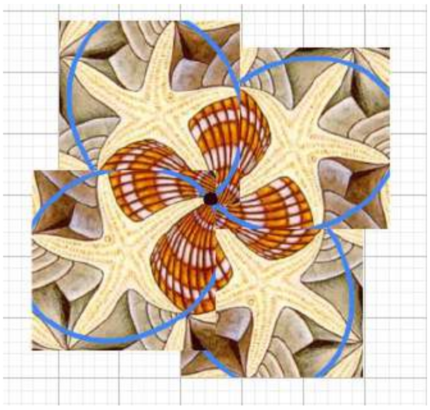
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.29 – Resultado de $S_{O,\theta}$ para θ = 180°



Fonte: Elaborada pela Autora

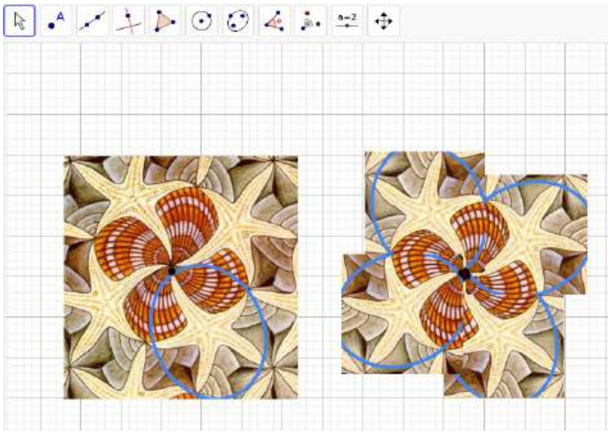
Figura 5.30 – Resultado de $S_{O,\theta}$ para θ = 270°



Fonte: Elaborada pela Autora

Diante das imagens expostas, para cada ângulo escolhido, a F_0 resulta em uma determinada figura, de modo que a composição dessas simetrias de rotação culminam em blocos composto por quatro estrelas e quatro conchas.

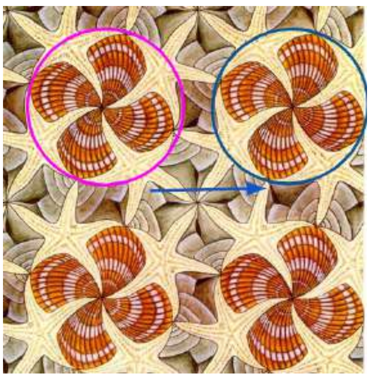
Figura 5.31 – Comparando o bloco formado no GeoGebra com a obra “Shells and Starfish”



Fonte: Elaborada pela Autora

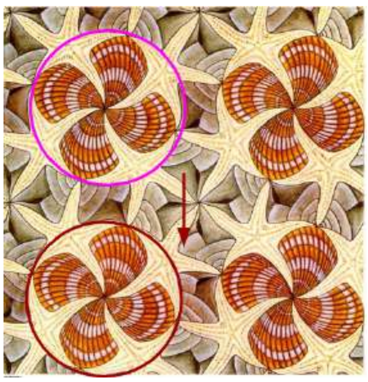
Um outro ponto interessante que pode-se notar é que dependendo do motivo escolhido (F_0) há uma translação, evidenciando que algumas obras de Escher apresentam vários tipos de simetrias, dependendo da perspectiva do telespectador ou do aluno. Dessa forma, para a figura inicial demarcada em rosa, conseguimos identificar três tipos de translação, uma para o vetor em azul (na horizontal), uma para o vetor em vinho (na vertical) e por fim uma para o vetor em verde (na diagonal).

Figura 5.32 – Translação na obra "Shells and Starfish": vetor na horizontal



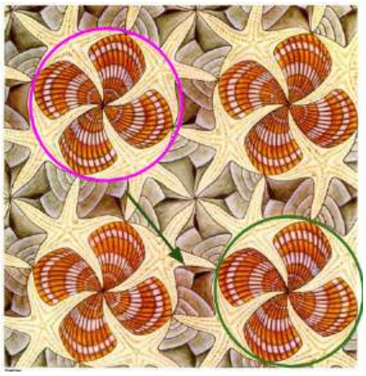
Fonte: Adpatda de Página WikiArt

Figura 5.33 – Translação na obra "Shells and Starfish": vetor na vertical



Fonte: Adpatda de Página WikiArt

Figura 5.34 – Translação na obra "Shells and Starfish": vetor na diagonal



Fonte: Adpatda de Página WikiArt

Na obra "Lizard" também conseguimos identificar simetrias de rotação. Diante disso, iremos seguir a mesma linha de raciocínio utilizado na obra "Shells and Starfish", isto é, será determinado a figura inicial (F_0) e analisado o seu recorte no GeoGebra.

Figura 5.35 – "Lagartos n° 56 (Lizard)" de 1942

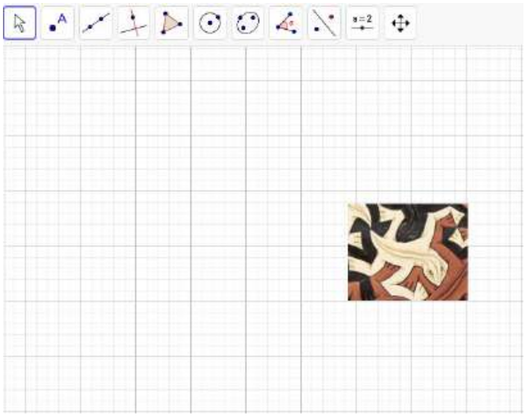
Fonte: Alves, 2014 p. 46

Figura 5.36 – F_0 na obra "Lizard"

Fonte: Adaptado de Alves, 2014 p. 46

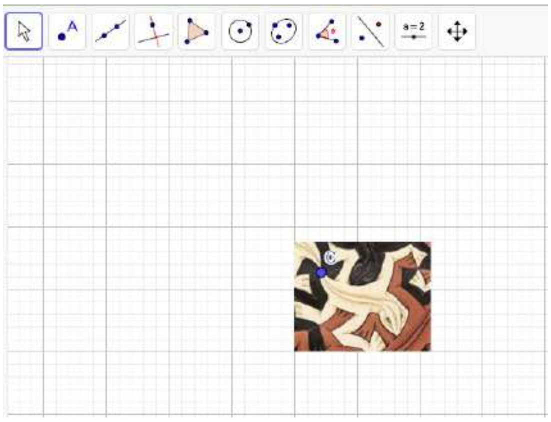
Para prosseguir com o nosso estudo, é necessário determinar o centro de rotação. À vista disso, primeiramente iremos considerar o ponto C, como o centro, e $\theta = 180^\circ$, tal que para $S_{C,180^\circ} : \prod \longrightarrow \prod$, tal que $S_{C,180^\circ}(F) = F$.

Figura 5.37 – Recorte da F_0 da obra "Lizard" no GeoGebra



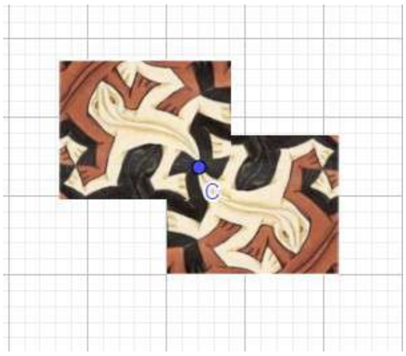
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.38 – Centro de Rotação (ponto C) no recorte da obra "Lizard"



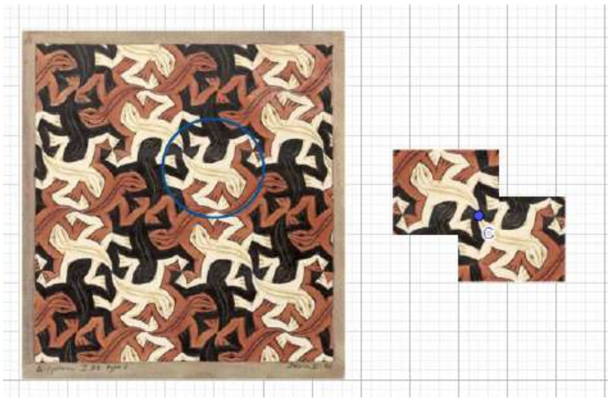
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.39 – Resultado de $S_{C,\theta}$ para $\theta = 180^{\circ}$ na obra "Lizard"



Fonte: Elaborada pela Autora

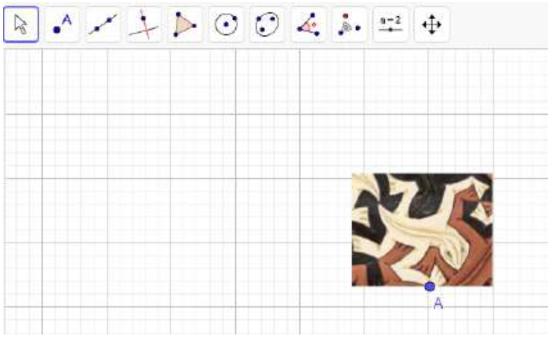
Figura 5.40 – Comparando $S_{C,180^{\circ}}$ formado no GeoGebra com a obra "Lizard"



Fonte: Elaborada pela Autora

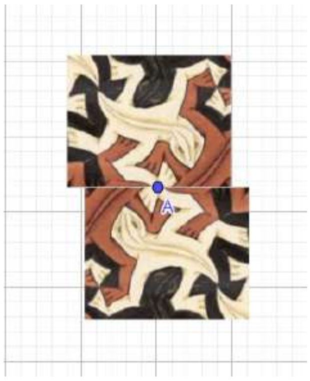
Entretanto, se alterarmos o centro de rotação para o ponto A, mas mantendo a mesmo F_0, atentamos que haverá outra simetria de rotação, com $S_{A,180^{\circ}} : \prod \longrightarrow \prod$, tal que $S_{a,180^{\circ}}(F) = F$. Isso significa, que a obra "Lizard" é composta por um agrupamento de simetria de rotação, contendo diferentes centros e figuras iniciais. Em relação às diferentes F_0, decorre que há colorações distintas de lagartos na obra, a nossa análise foi voltada para os lagartos beges, porém a mesma ideia ocorre para os lagartos laranjas e pretos.

Figura 5.41 – Centro de Rotação (ponto *A*) no recorte da obra “Lizard”



Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.42 – Resultado de $S_{A,180^\circ}$



Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.43 – Comparando $S_{A,180^\circ}$ com a obra “Lizard”

Fonte: Elaborada pela Autora

Por intermédio da obra “Unicórnio” é possível analisar a simetria de reflexão deslizante, a qual consiste na combinação da reflexão e da translação, isto é, um determinado objeto após ser refletido em relação a um determinado eixo, é deslocado para uma determinada direção. Nesse sentido, considere o recorte da figura básica (F_0) demarcada em azul.

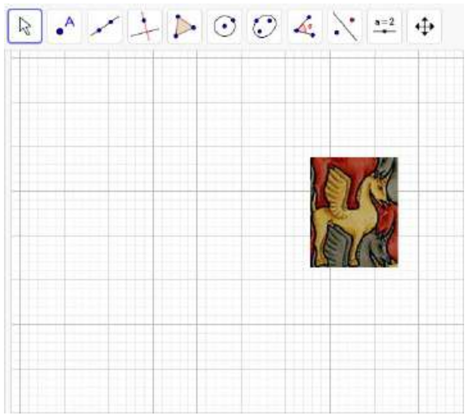
Figura 5.44 – “Unicórnio” de 1950

Fonte: Alves, 2014, p.46

Figura 5.45 – F_0 da obra “Unicórnio”

Fonte: Adaptada de Alves, 2014 p. 46

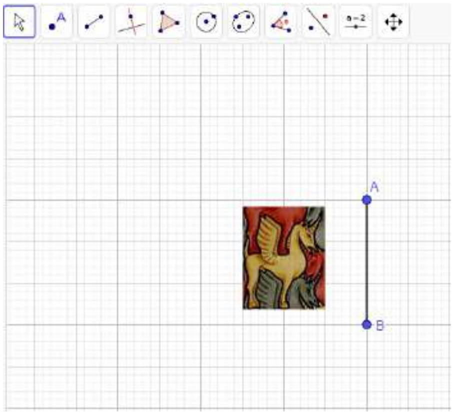
Figura 5.46 – Recorte da F_0 da obra “Unicórnio” no GeoGebra



Fonte: Elaborada pela Autora

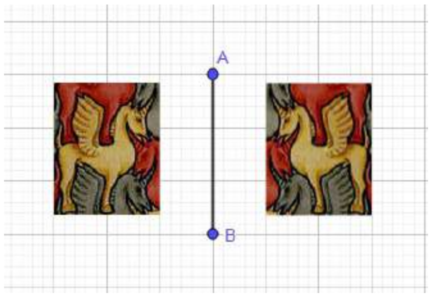
Agora imagine um eixo de simetria estruturado a partir do segmento de reta AB, tal que a transformação S, em relação a esse eixo, resulte em uma reflexão de F_0. Este novo objeto chamaremos de F_1. Em seguida, é preciso determinar um vetor e sua direção, para então transladar F_1, esta nova figura denominaremos de F_2.

Figura 5.47 – Eixo de Simetria *AB* e o recorte da obra “Unicórnio”



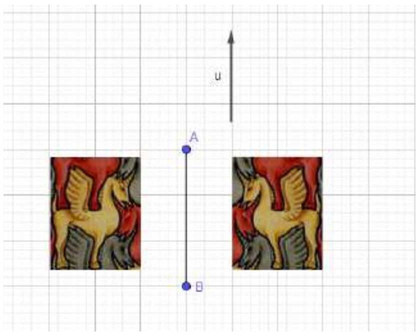
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.48 – Reflexão de F_0 na obra “Unicórnio”



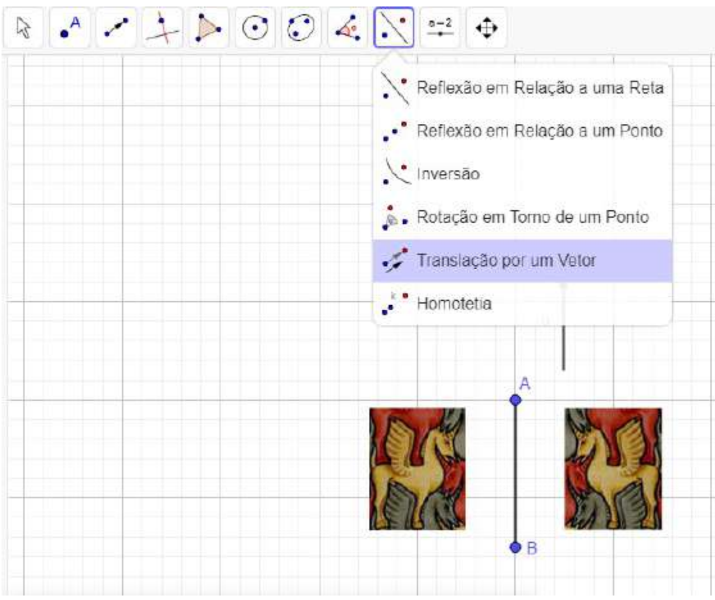
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.49 – Vetor Escolhido ($\vec{u}$) na obra “Unicórnio”



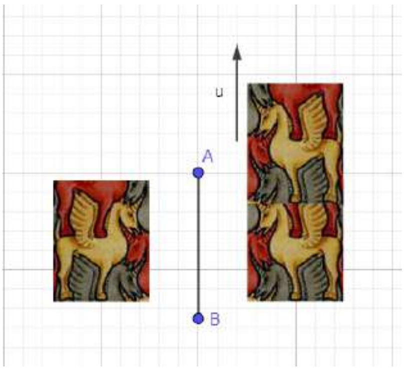
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.50 – Recurso utilizado para a Translação no GeoGebra



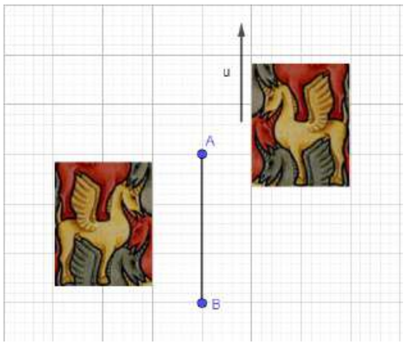
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.51 – Translação da figura F_1



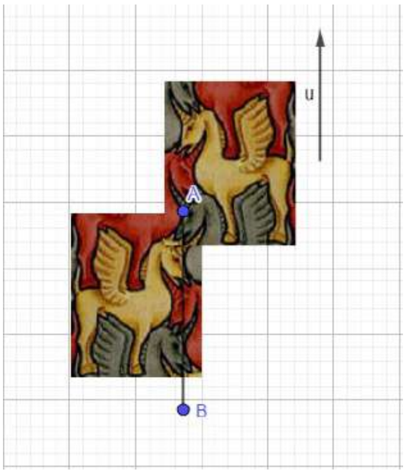
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.52 – Análise de F_0 e F_2 na obra "Unicórnio"



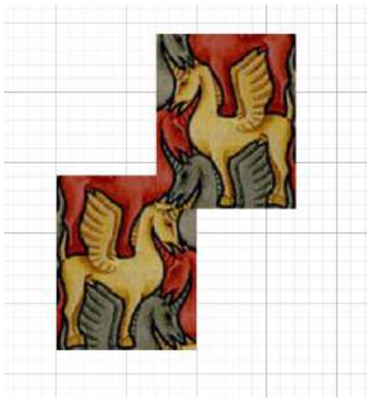
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.53 – Diminuição da distância entre F_0 e o eixo de simetria



Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.54 – Resultado da Reflexão Deslizante "Unicórnios" com o GeoGebra

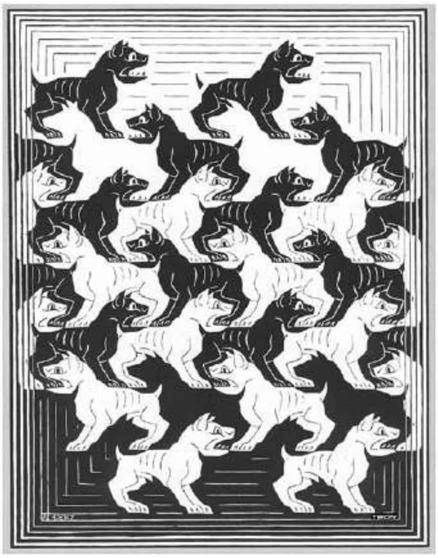


Fonte: Elaborada pela Autora

Em síntese, a análise feita para um motivo gera uma parte dos unicórnios que compõem a obra, isto significa que para termos a composição inteira é preciso desenvolver o mesmo estudo considerando outras figuras iniciais, isso ocorre pois há simetrias de reflexões deslizantes com vetores e eixos de simetrias diferentes.

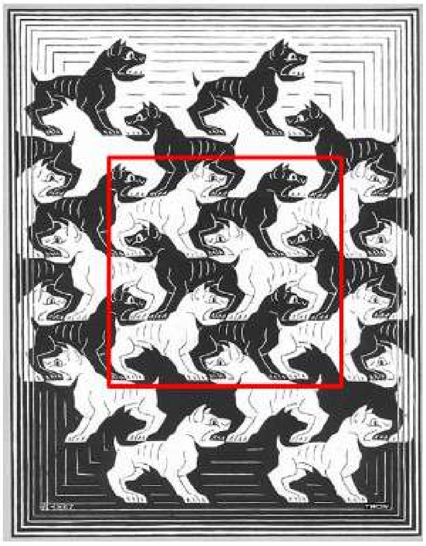
A obra a seguir também apresenta simetria de reflexão deslizante, de modo que, análogo ao caso anterior, iremos destacar, a partir de um recorte, a figura inicial (circulada em vermelho), o segmento de reta (eixo de simetria) e o vetor que determinará a translação.

Figura 5.55 – “Regular Division of The Plane IV” de 1957



Fonte: Pagina WikiArt[5]

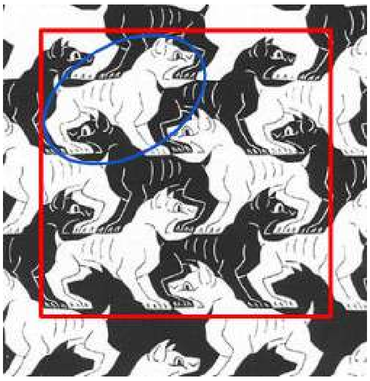
Figura 5.56 – Recorte da obra “Regular Division of The Plane IV”



Fonte: Adaptada de Pagina WikiArt

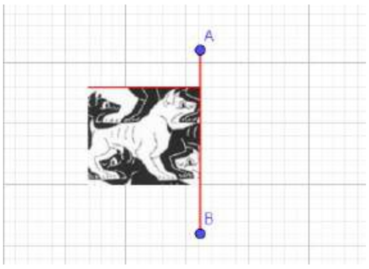
No GeoGebra iremos dispor o recorte da figura F_0 (destacada em azul), o segmento de reta (AB), que representará o eixo de simetria, e o vetor ($\vec{u}$). Nesse cenário, F_1 será a figura refletida e F_2 a transladada.

Figura 5.57 – F_0 da obra “Regular Division of The Plane IV”



Fonte: Adaptada de Pagina WikiArt

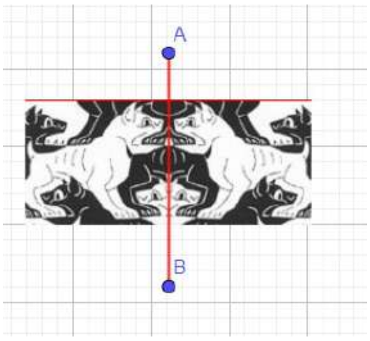
Figura 5.58 – Recorte da F_0 e segmento AB no GeoGebra



Fonte: Elaborada pela autora

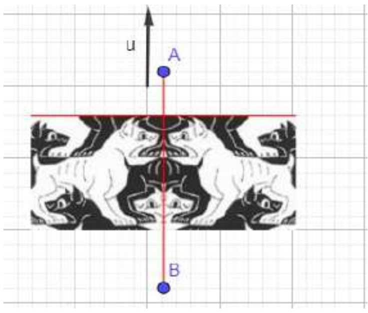
5 Disponível em: <https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher/regular-division-of-the-plane-iv>. Acesso em: 27 jun. 2023.

Figura 5.59 – Reflexão da F_0 na obra "Regular Division of The Plane IV"



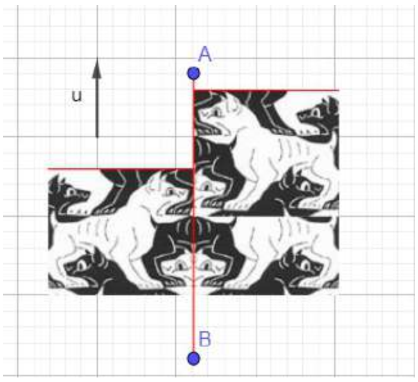
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 5.60 – Vetor $\vec{u}$ na obra "Regular Division of The Plane IV"



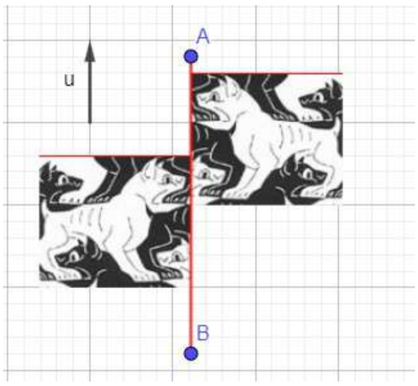
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 5.61 – Translação de F_1 na obra "Regular Division of The Plane IV"



Fonte:Elaborada pela autora

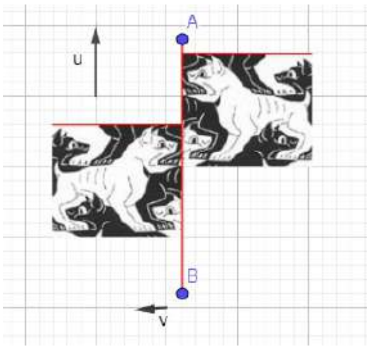
Figura 5.62 – Análise de F_0 e F_2 na obra "Regular Division of The Plane IV"



Fonte: Elaborada pela autora

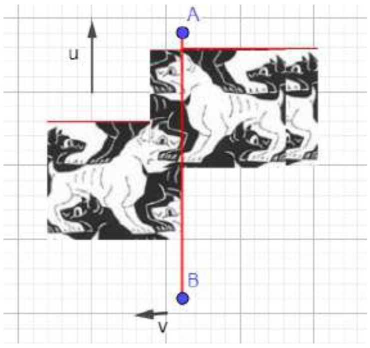
Um ponto muito importante a ser destacado é que há outra translação na imagem além da realizada pelo vetor $\vec{u}$. Assim, iremos adotar outro vetor ($\vec{v}$) é a nova figura formada chamaremos de F_3.

Figura 5.63 – Vetor $\vec{v}$ na obra “Regular Division of The Plane IV”



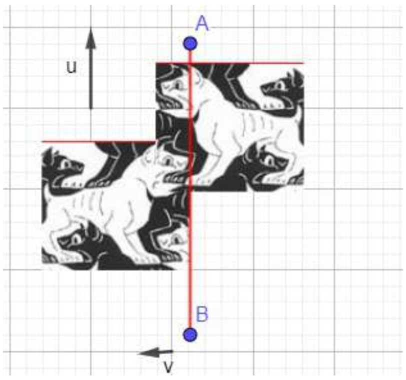
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 5.64 – Translação de F_2 a partir do vetor $\vec{v}$



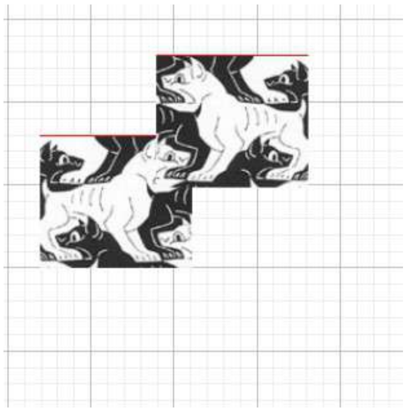
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.65 – Análise de F_0 e F_3 na obra “Regular Division of The Plane IV”



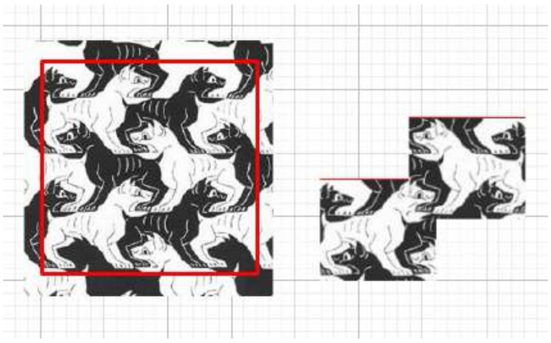
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.66 – Resultado da Reflexão Deslizante “Regular Division of The Plane IV” com o GeoGebra



Fonte: Elaborada pela Autora

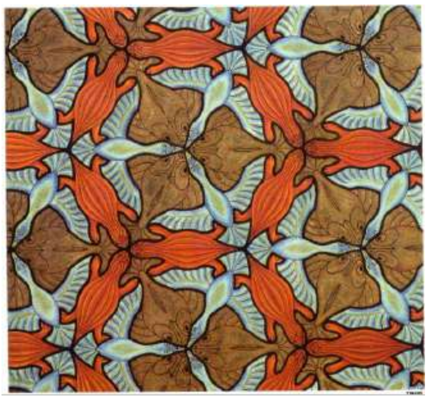
Figura 5.67 – Comparação entre a Reflexão Deslizante com o recorte da obra “Regular Division of The Plane IV”



Fonte: Elaborada pela Autora

A obra “Symmetry Drawing” exibe tanto a simetria de rotação quanto a de translação. Para conduzir nosso estudo, iremos considerar a tartaruga destacada em preto como a figura inicial.

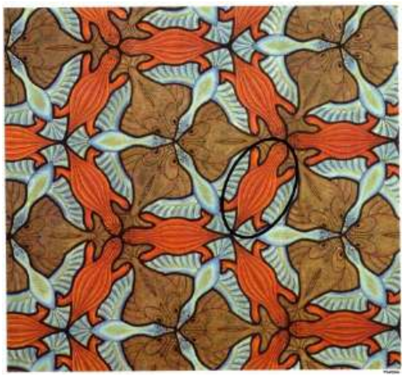
Figura 5.68 – “Symmetry Drawing” de 1948



Fonte: Página WikiArt[6]

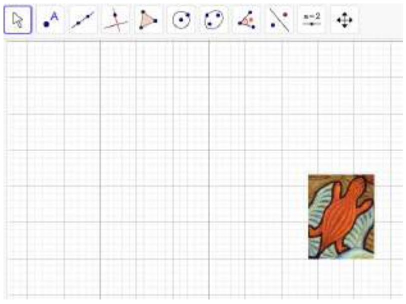
[6] Disponível em: <https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher/symmetry-drawing>. Acesso em: 27 jun. 2023.

Figura 5.69 – F_0 na obra “Symmetry Drawing”



Fonte: Adaptada de Página WikiArt

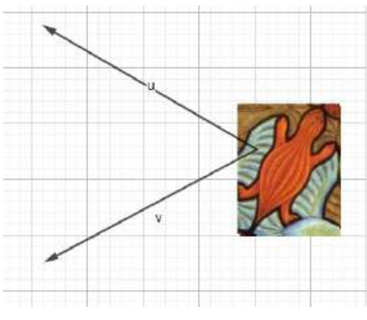
Figura 5.70 – Recorte da F_0 da obra “Symmetry Drawing” no GeoGebra



Fonte: Elaborada pela Autora

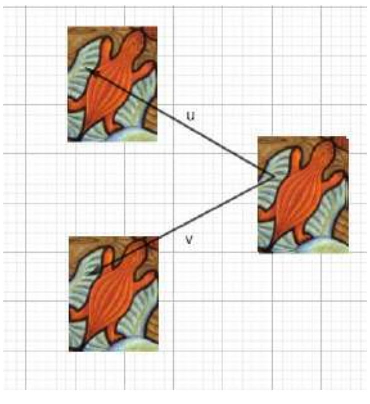
Observa-se que na obra há diversas translações, as quais são determinadas por vetores que seguem direções diferentes. Nesse ínterim, vamos considerar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tal que $S_u(F) = F + \vec{u}$ e $S_v(F) = F + \vec{v}$. Isso significa que as figuras irão se manter iguais a figura inicial (F_0), mas deslocadas em outras direções, conforme exemplificado abaixo com o auxílio do GeoGebra.

Figura 5.71 – Vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com o recorte da obra “Symmetry Drawing” no GeoGebra



Fonte: Elaborada pela Autora

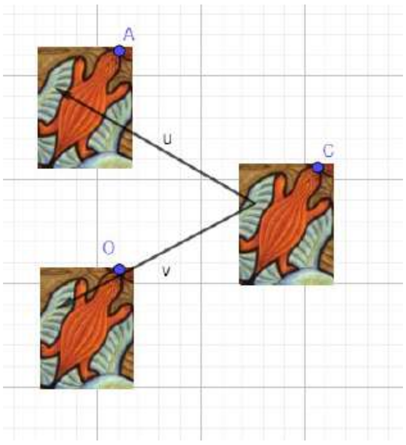
Figura 5.72 – Translação da F_0 considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$



Fonte: Elaborada pela Autora

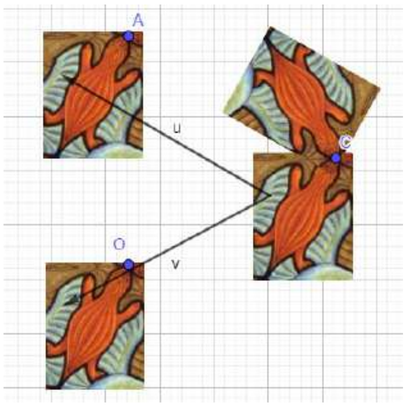
Quanto à simetria de rotação, a obra também contém diversas, com centros de rotação diferentes, dependendo do motivo analisado. Diante disso, vamos considerar o centro de rotação C na figura F_0, os centros A e O em $F_1 = S_u(F_0)$ e $F_2 = S_v(F_0)$ respectivamente, e $\theta \approx 120°$.

Figura 5.73 – Centro de Rotação O, A, e C nas figuras F_0, F_1 e F_2



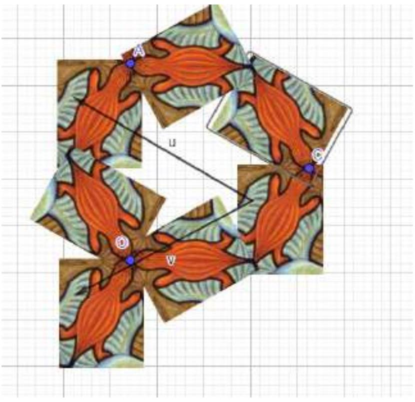
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.74 – Resultado da Rotação em F_0 com $\theta \approx 120^\circ$



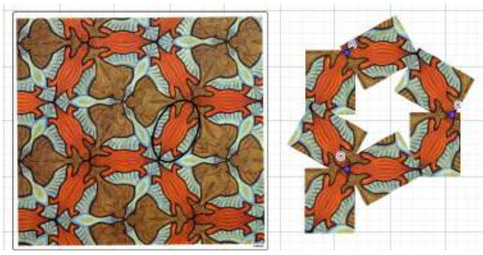
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.75 – Resultado da Rotação da figura F_1 e F_2 com $\theta \approx 120^\circ$ tanto no sentido horário quanto anti-horário



Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 5.76 – Comparação entre o Resultado da Rotação com a obra “Symmetry Drawing”



Fonte: Elaborada pela Autora

Após a análise das obras de Escher, fica evidente a importância de promover situações na Educação Básica que conectem a arte e a matemática, uma vez que a interdisciplinaridade entre essas áreas, além de ampliar a aprendizagem dos conceitos vinculados a simetria, auxilia no desenvolvimento da criatividade e imaginação, além de estimular o pensamento crítico e investigativo, já que como as obras podem ser analisadas por diferentes perspectivas é uma ótima oportunidade para os educandos exercitarem a criticidade ao questionarem as perpecções que possuem da realidade. Isso ocorre, pois Escher utilizava em suas obras: ilusões de óticas, construções impossíveis, padrões e tendências compostas por simetrias e transformações geométricas.

Além disso, na tentativa de identificar esses padrões, os educandos desenvolvem habilidades de reconhecimento, as quais são vitais para a resolução de problemas em diversas esferas do conhecimento, mas também compreende os momentos em que estas se conectam. Um outro ponto a destacar, é que a utilização desses recursos artísticos incentiva a participação ativa e a troca de experiências em sala, pois como as obras podem ser analisadas por diferentes panoramas, dependendo da bagagem cultural e individualidade de cada aluno, torna um ambiente propício para a troca de informações, visto que os mesmos podem compartilhar com os colegas as conclusões e percepções que tiveram por meio da análise das obras, não só em relação aos conteúdos matemáticos, como também os sentimentos que tiveram a partir dessa experiência, incentivando assim, o desenvolvimento integral do estudante.

Ademais, como visto nas questões que envolvem a simetria, há muita resolução intuitiva das atividades, e consequentemente muito alunos não compreendem de fato a matemática envolvida. Assim não esperamos abordar formalmente a definição de simetria moderna e das transformações geométricas (reflexão, translação, rotação), pois por estarem na Educação Básica, e dependendo do ano escolar que se encontram, os educandos não terão bagagem teórica suficiente para compreender essas definições.

Entretanto, cabe ao professor ter esse conhecimento teórico quanto aos conceitos vinculados a simetria, para evitar discutir a mesma de forma limitada, e partir de uma linguagem clara, abordar esses tópicos na Educação Básica, estimulando a percepção intuitiva, mas a medida que for possível, ir ampliando as discussões referente a essa temática. Nesse sentido, refletir sobre a invariância de figuras e objetos, e as diferentes classificações de simetria, além de relacionar com outros conceitos da própria matemática, tais como função, ângulo, segmentos de reta, aumentando o repertório que os alunos possuem. Para que isso ocorra, é fundamental vincular essas questões com situações do cotidiano e com outras áreas de conhecimento, como a arte, para que os estudantes consigam criar relações e a aprendizagem seja significativa.

6 RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DA SIMETRIA

No capítulo anterior foram explorados os tipos de simetria presentes nas obras de Escher, e para isso empregou-se algumas ferramentas disponibilizadas no Geogebra. Após a apresentação da primeira parte deste trabalho, em específico do capítulo 5, foi observado pelos professores da banca o quanto é importante utilizar o Geogebra para o processo de ensino e aprendizagem, além de auxiliar na análise das obras sob outras perspectivas. Nesse cenário, o presente capítulo consiste em um estudo deste software, destacando outros recursos da plataforma que colaboram para os alunos observarem as obras por outros ângulos, o que desenvolve habilidades fundamentais na resolução de problemas no cotidiano. Assim, o intuito é analisar o Geogebra como um recurso didático, isto é, um instrumento que colabore no processo de ensino e aprendizagem.

Com relação a diferentes recursos didáticos em sala de aula, Araújo e Gitirana (2000) destacam que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresenta a importância de utilizar as tecnologias como ferramenta pedagógica, por "auxiliar no processo de construção do conhecimento e servir como meio para desenvolver a autonomia do aluno, possibilitando pensar, refletir e criar soluções para os problemas enfrentados" (Araújo; Gitirana, 2000, p. 2).

Neste mesmo cenário, Silva (2019) evidencia que os documentos oficiais, como a Base Curricular Nacional Comum (BNCC), propõe que o estudo da simetria ocorra por meio de software de geometria dinâmica e outros materiais, tais como papel quadriculado. O autor enfatiza que as tecnologias podem ser aliadas no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que

> [...] o professor deixa de ser o detentor do conhecimento passando a ser o mediador deste conhecimento, estando presente para fazer o intercâmbio entre as informações e o conhecimento com o estudante, levando o professor a ensinar os alunos a pesquisar, observar e discutir os resultados, auxiliando o educando a construir o conhecimento de forma autônoma e objetiva (Silva, 2019, p. 33).

À vista disso, dentre os software disponíveis, o Geogebra mais se destaca no ensino de Matemática.

6.1 SIMETRIA E O GEOGEBRA

Segundo Nascimento (2012) o Geogebra é um software de matemática dinâmica, desenvolvido por Markus Hohenwarter. Além de ser gratuito, contribui para a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos em todos os níveis de ensino, ou seja, tanto na Educação Básica, como no Ensino Superior. Isso ocorre, pois o software possui diversos recursos de geometria, de álgebra e da estatística, possibilitando a construção de tabelas, gráficos, planificações de sólidos, sólidos em 3D e entre outros. Dessa forma, "o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si" (Nascimento, 2012, p.113). Assim, quanto ao estudo da Simetria, o Geogebra contribuiu para enriquecer as percepções dos alunos, ampliando seu repertório e prevenindo que a abordagem desta temática seja limitada.

Como vimos no capítulo anterior, para identificar a simetria presente em uma obra de arte, é preciso determinar o motivo, isto é, a figura inicial que será estudada, para assim reconhecer o padrão na composição. Uma outra forma de explorar as simetrias nas obras do artista Escher é analisar os segmentos, que ao sofrer um conjunto de transformações, compõem o motivo da obra. Para tal estudo, as ferramentas do Geogebra são fundamentais, uma vez que contribuem para a construção de figuras e objetos compostos por simetrias.

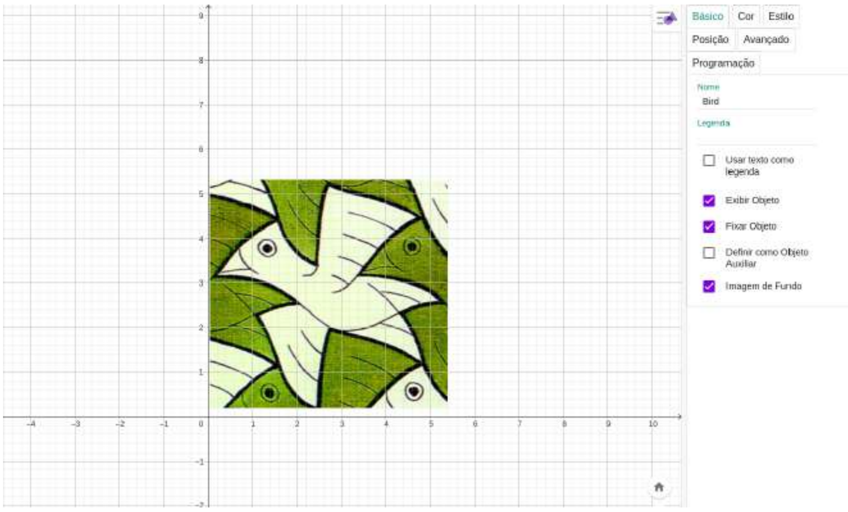
Na obra "Symmetry Watercolor 106 Bird", do artista Escher, constatamos que, além de apresentar simetria de translação em sua composição, ao adotarmos um dos pássaros como motivo, notamos que o mesmo pode ser criado a partir da translação de dois segmentos. Dessa forma, no intuito de realizar essa análise, ou seja, auxiliar na visualização e na identificação dos segmentos que serão observados, optamos em utilizar um recorte da figura inicial da obra. Para desenhar os segmentos utilizamos uma ferramenta do Geogebra denominada Caminho Poligonal, o qual representa um conjunto de segmentos sucessivos. Identificamos na obra dois caminhos poligonais, o caminho $CP1$ e o $CP2$.

Figura 6.1 – "Symmetry Watercolor 106 Bird" de 1959

Fonte: Página WikiArt[1]

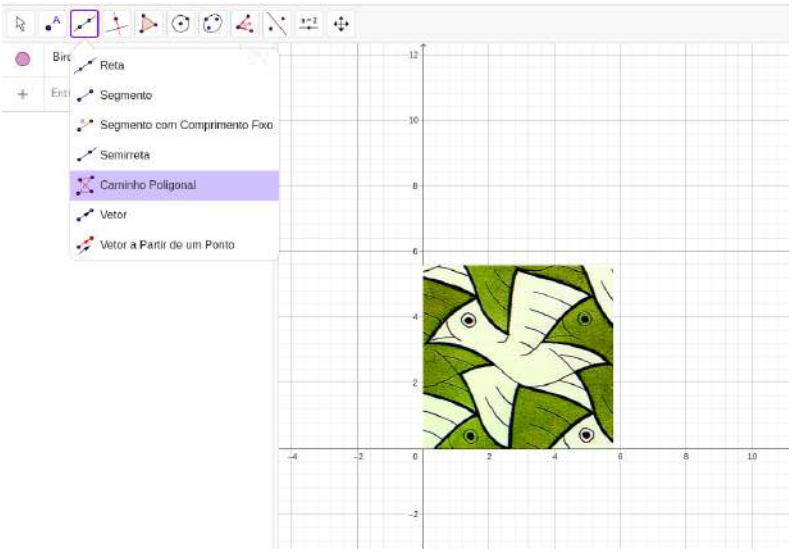
[1] Disponível em: <https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher/symmetry-watercolor-106-bird>. Acesso em: 7 jan. 2024

Figura 6.2 – Recorte da figura Inicial da obra “Symmetry Watercolor 106 Bird” como Imagem de fundo no Geogebra



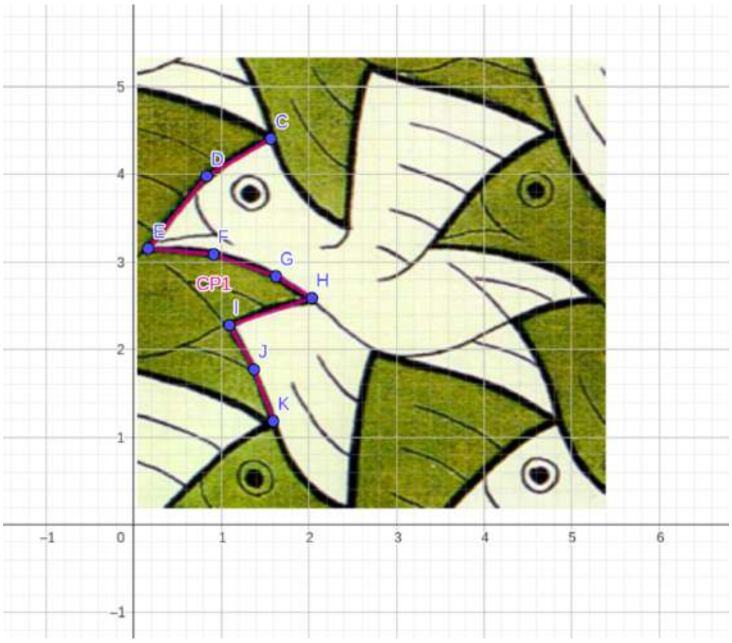
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.3 – Caminho Poligonal - Recurso do Geogebra



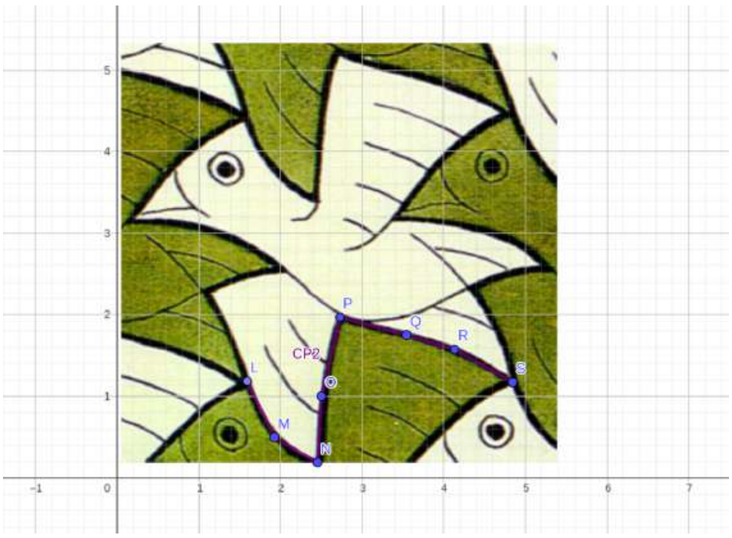
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.4 – Representação do Caminho Poligonal - *CP*1



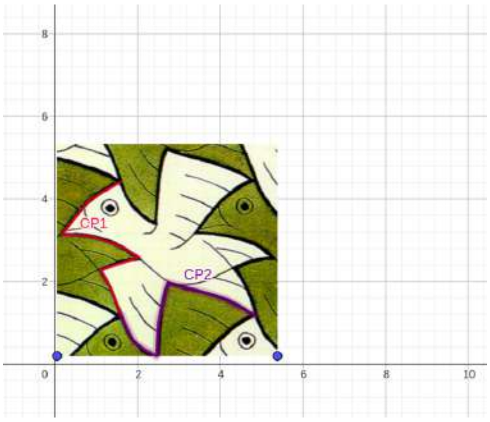
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.5 – Representação do Caminho Poligonal - *CP*2



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.6 – Caminhos poligonais (*CP*1 e *CP*2) na obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”



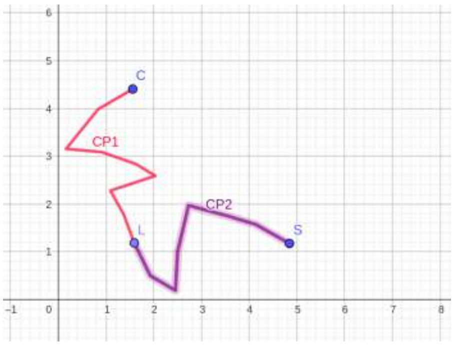
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.7 – Análise dos caminhos Poligonais criados na obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”

Fonte: Elaborada pela autora

Após a fixação dos pontos *C*, *L* e *S* dos caminhos poligonais e da remoção da imagem de fundo, visto que os segmentos a serem estudados foram determinados, estabelecemos os vetores.

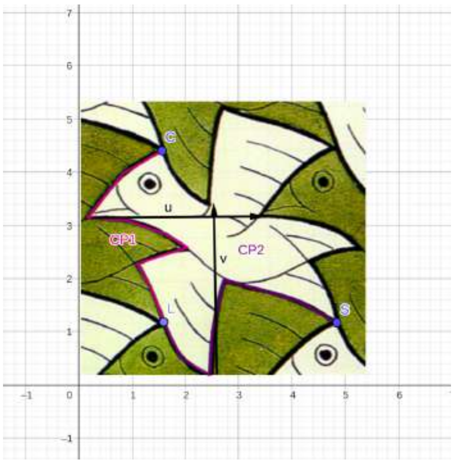
Figura 6.8 – Pontos *C*, *L* e *S* fixados



Fonte: Elaborada pela autora

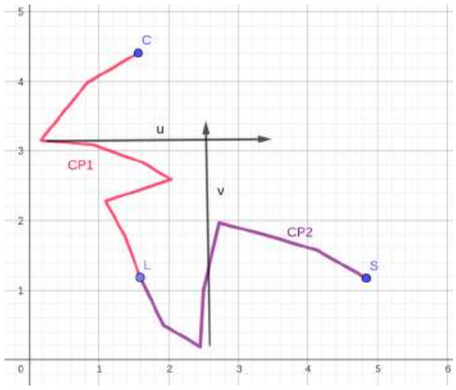
Para contribuir com a determinação dos vetores, utilizou-se o recorte da obra como referência, ou seja, estudamos a distância que os caminhos poligonais precisavam transladar, a fim de determinar o tamanho e a direção dos vetores. Dessa forma, cabe destacar, que as demais obras que serão analisadas neste capítulo, os vetores foram obtidos seguindo essa mesma perspectiva.

Figura 6.9 – Análise dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (utilizando o recorte da obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”)



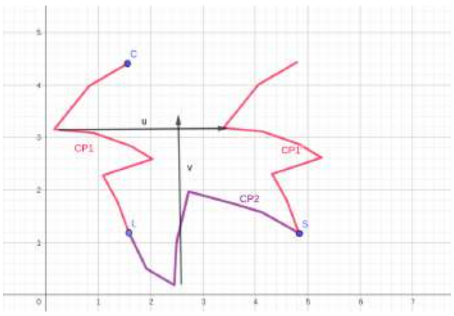
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.10 – Vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”)



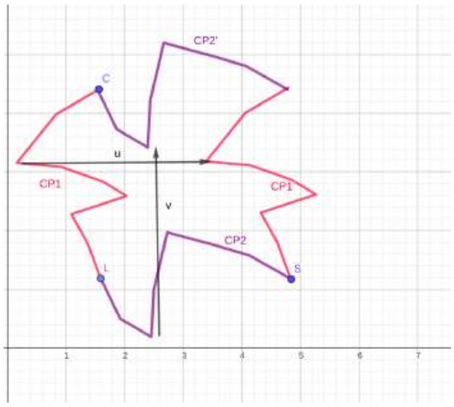
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.11 – Translação de $CP1$ em relação à $\vec{u}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”)



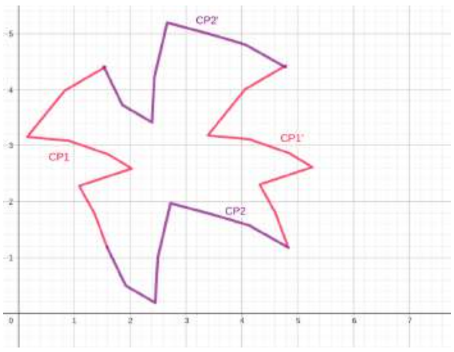
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.12 – Translação de $CP2$ em relação à $\vec{v}$ (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”)



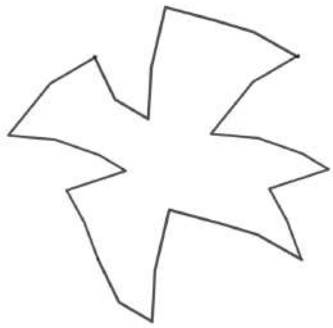
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.13 – Análise da Simetria de Reflexão dos caminhos poligonais na obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.14 – Resultado final das translação dos caminhos poligonais em “Symmetry Watercolor 106 Bird”

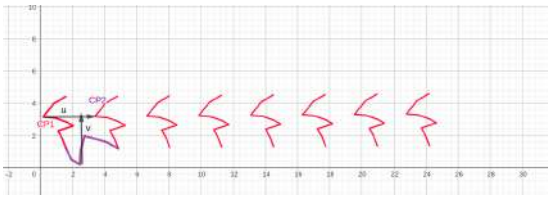


Fonte: Elaborada pela autora

Diante do exposto acima, concluímos que de fato é possível construir uma figura inicial da obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”, por meio de simetrias de translação de dois conjuntos de segmentos. Além disso, notamos que se realizarmos uma sequência de translações iremos compor uma representação inteira da obra. Nesse âmbito, podemos utilizar o comando “Sequência” do Geogebra, que fará uma sucessão de simetria de translação.

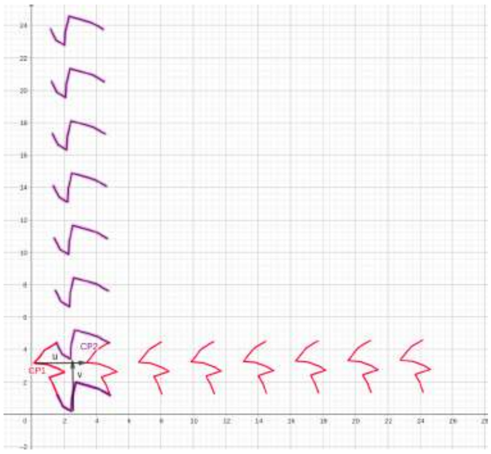
Para utilizar esse recurso, precisamos determinar o objeto que será transladado, um vetor, e a quantidade de vezes que o comando deverá ser executado. Dessa forma, para transladar $CP1$ em relação ao vetor $\vec{u}$, empregamos o comando “Sequência(Transladar($CP1$, $s * \vec{u}$), s, 0, n, 1)", com s representado uma variável, a qual indica que estamos trabalhando com múltiplos do vetor escolhido. Já (0, n), determina o valor mínimo e máximo, apontando quantas vezes o objeto será transladado, no caso acima, seria n vezes, e por fim, o número 1, que é o incremento, sinalizando que a sequência de translação de $CP1$ só irá dar continuidade quando a anterior estiver completa, ou seja, uma translação de cada vez. Vale destacar que além do comando sequência, os resultados obtidos foram colocados na cor do caminho poligonal inicial, a fim de facilitar a visualização.

Figura 6.15 – Sequência de translações de $CP1$ em relação ao vetor $\vec{u}$ (obra "Symmetry Watercolor 106 Bird")



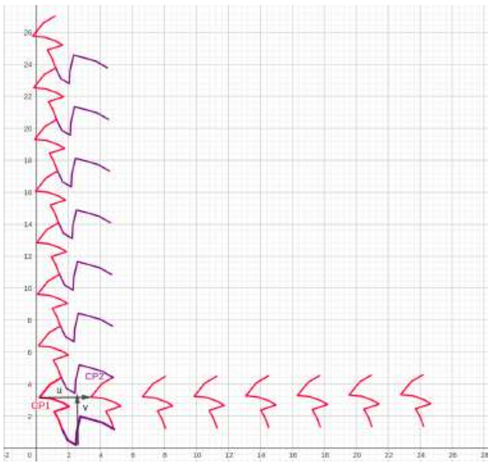
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.16 – Sequência de translação de $CP2$ em relação ao vetor $\vec{v}$ (obra "Symmetry Watercolor 106 Bird")



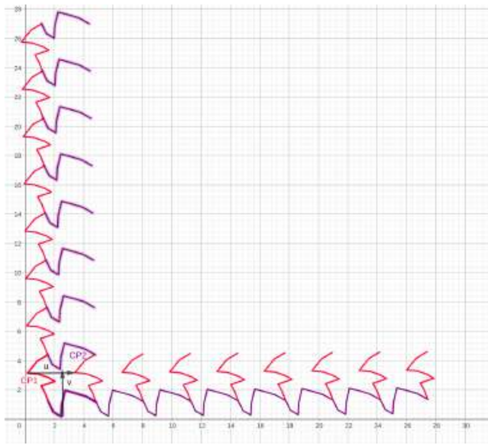
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.17 – Sequência de translação de $CP1$ em relação ao vetor $\vec{v}$ (obra "Symmetry Watercolor 106 Bird")



Fonte: Elaborada pela autora

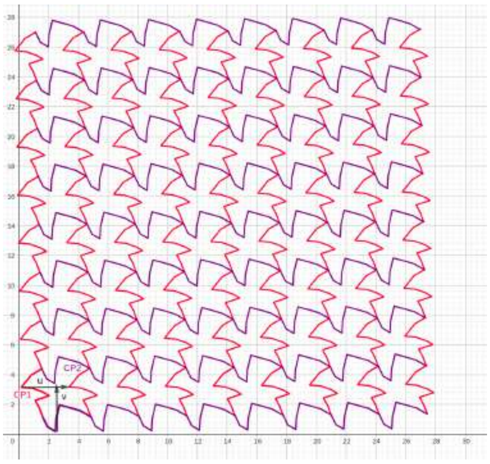
Figura 6.18 – Sequência de translação de $CP2$ em relação ao vetor $\vec{u}$ (obra "Symmetry Watercolor 106 Bird")



Fonte: Elaborada pela autora

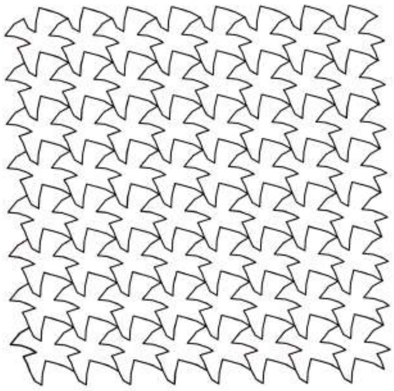
Concluindo a série de translações de $CP1$ e $CP2$, em relação ao vetor $\vec{u}$, e $\vec{v}$, efetuamos a translação sucessiva dos caminhos poligonais criados por meio desses vetores.

Figura 6.19 – Análise da sequência de translações dos novos caminhos poligonais criados (obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”)



Fonte: Elaborada pela autora

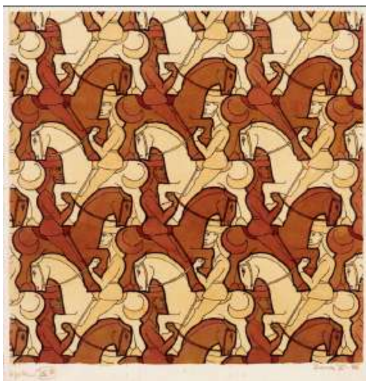
Figura 6.20 – Resultado final das simetrias de translação na obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”



Fonte: Elaborada pela autora

Na obra “Horseman”, observa-se que a figura inicial é composta por simetrias de reflexões deslizantes. Utilizando um recorte da obra como base, estruturamos dois caminhos poligonais ($CP1$) e ($CP2$).

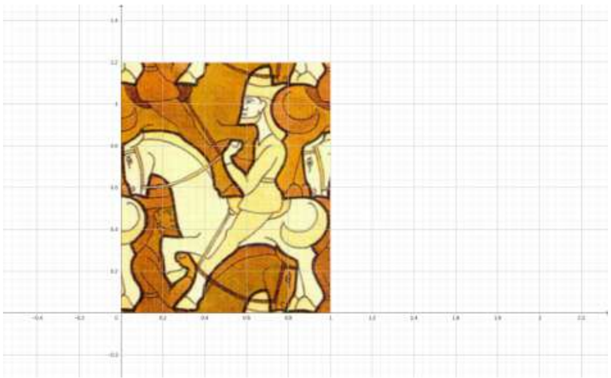
Figura 6.21 – Obra “Horseman” de 1946



Fonte: Página WikiArt[2]

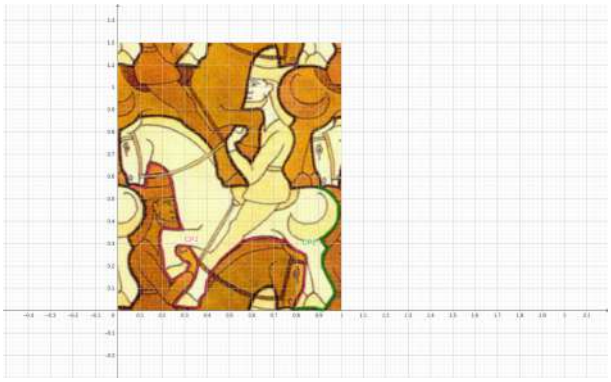
[2] A obra “Horseman” está disponível em: <https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher/horseman-1>. Acesso em: 19 dez. 2023

Figura 6.22 – Recorte da obra “Horseman” no Geogebra



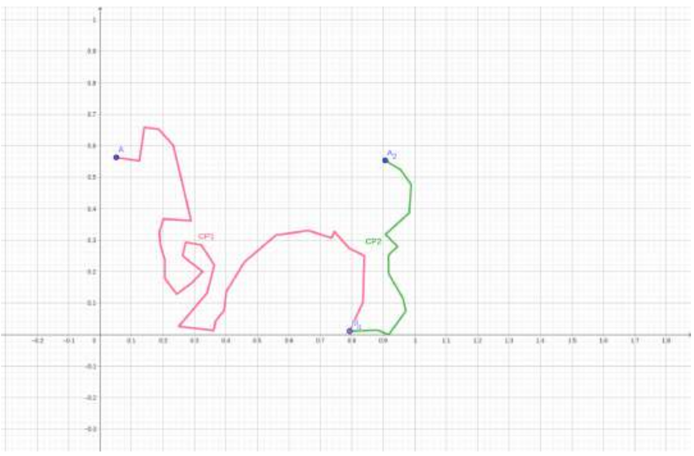
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.23 – *CP*1 e *CP*2 na obra“Horseman”



Fonte: Elaborada pela autora

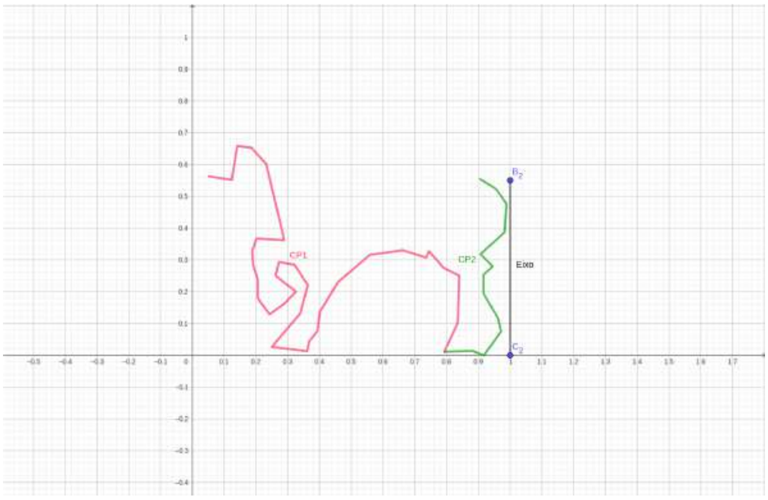
Figura 6.24 – Pontos A, M_1 e A_2 fixados



Fonte: Elaborada pela autora

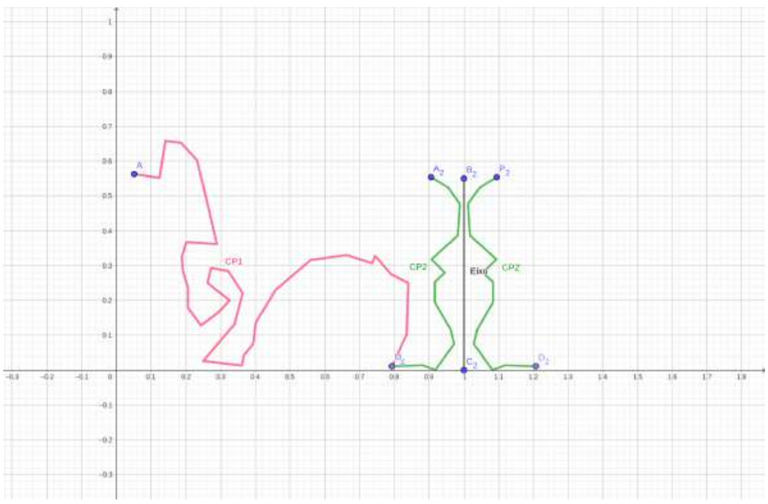
Como queremos mostrar que de fato há uma simetria de reflexão deslizantes, é preciso estabelecer o eixo de simetria, e após as reflexões, determinar os vetores, os quais serão essenciais para realizar a translação. Para deduzir os vetores, analisamos os caminhos poligonais gerados, a distância e o sentido que estes precisavam percorrer para construir a figura. Assim, mediante uma avaliação do recorte da figura, tal como dos caminhos poligonais, e após algumas tentativas, determinamos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Figura 6.25 – Eixo de Simetria (Segmento B_2C_2)



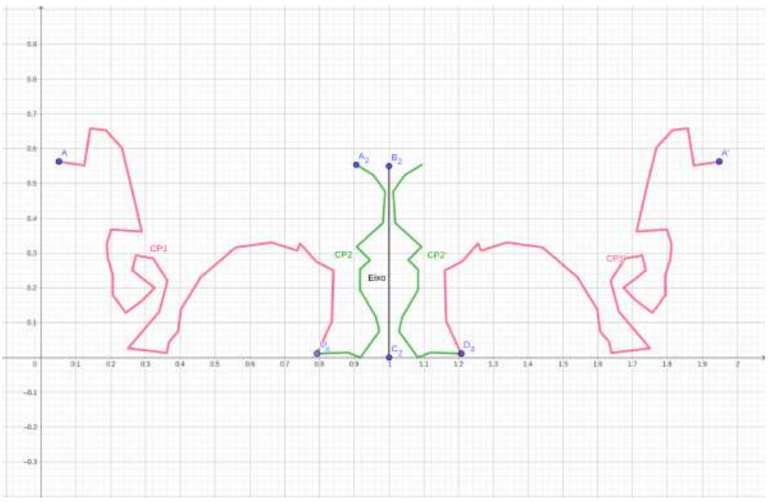
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.26 – Reflexão de $CP2$ em relação ao eixo (obra“Horseman”)



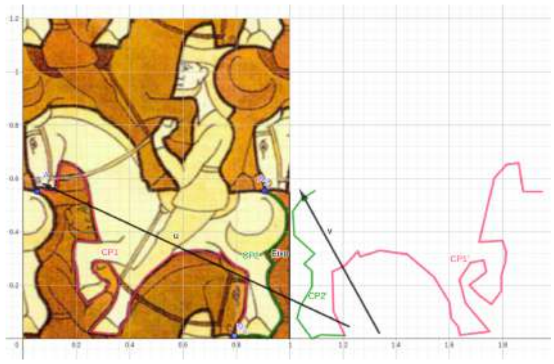
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.27 – Reflexão de $CP1$ em relação ao eixo (obra“Horseman”)



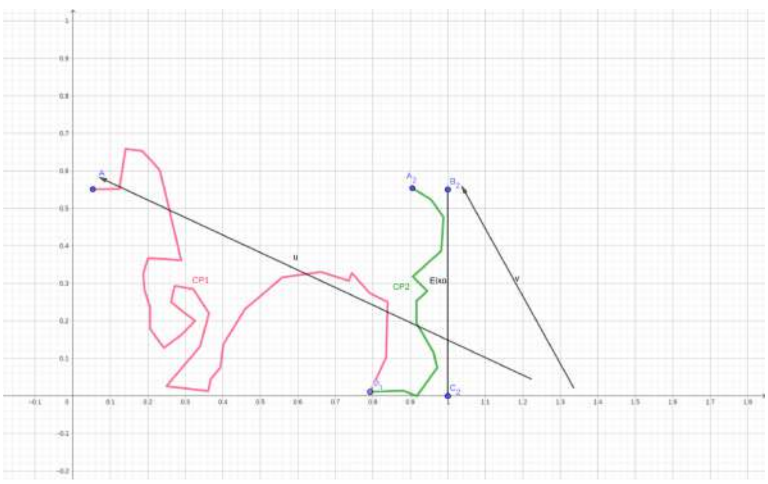
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.28 – Análise dos vetores (utilizando o recorte da obra “Horseman”)



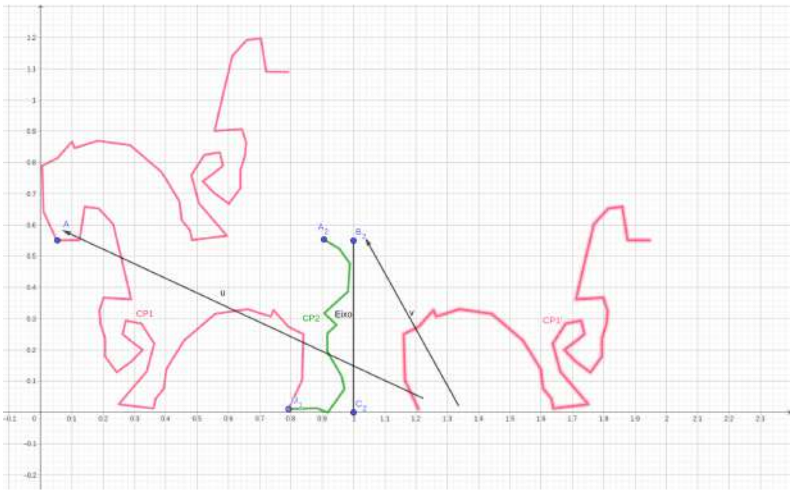
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.29 – Vetores na obra“Horseman”



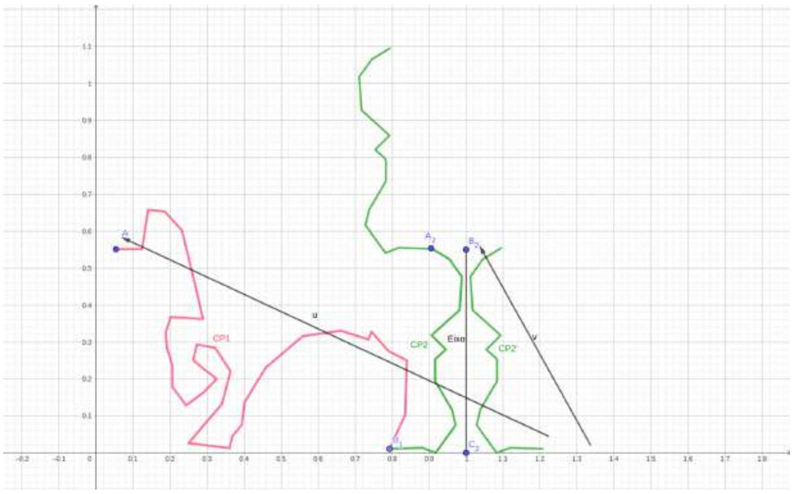
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.30 – Translação de $CP1'$ em relação ao vetor $\vec{u}$ (obra "Horseman")



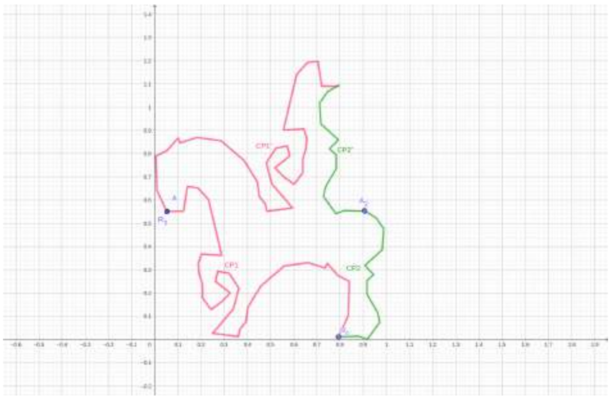
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.31 – Translação de $CP2'$ em relação ao vetor $\vec{v}$ ("obra Horseman")



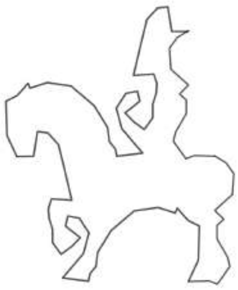
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.32 – Análise da Simetria de Reflexão dos caminhos poligonais na obra “Horseman”



Fonte: Elaborada pela autora

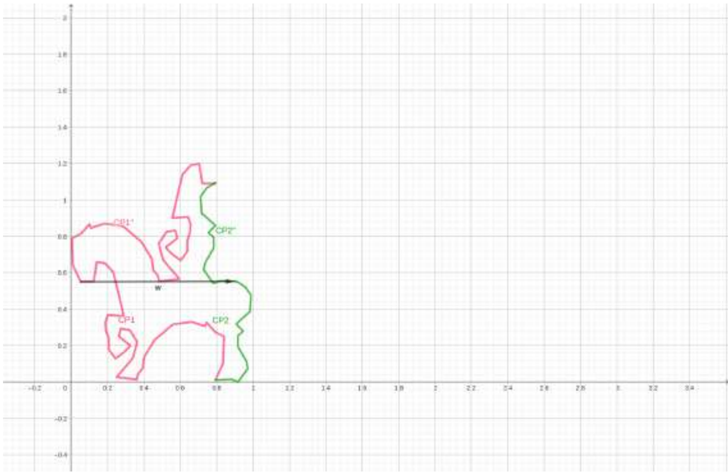
Figura 6.33 – Resultado Final da Simetria de Reflexão



Fonte: Elaborada pela autora

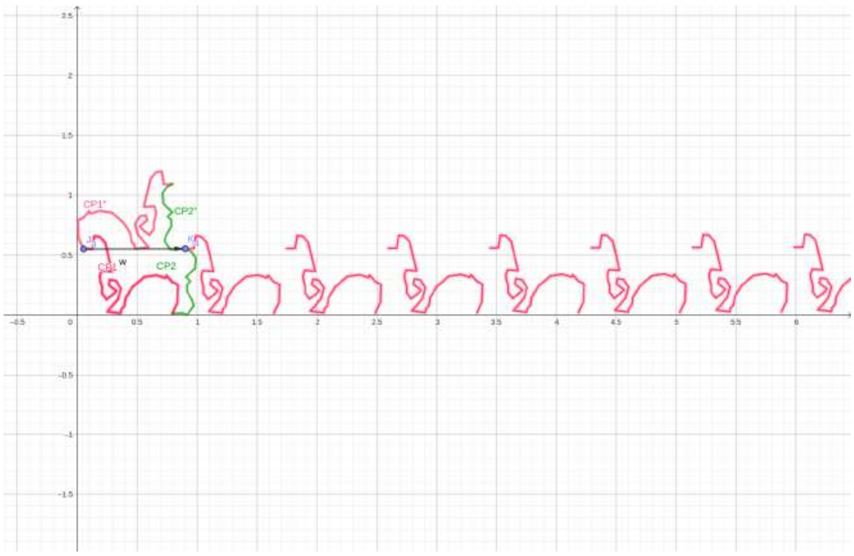
Utilizando os comandos Sequências do Geogebra em conjunto com a ferramenta destinada a translação podemos compor a obra como um todo, ou seja, se efetuarmos a translações dos caminhos poligonais ($CP1$ e $CP2$), bem como dos caminhos ($CP1''$) e ($CP2''$), resultados das simetrias de reflexão deslizantes. Para isso, será necessário estabelecer outros vetores, o qual denominaremos de $\vec{w}$ e $\vec{t}$.

Figura 6.34 – Vetor $\vec{w}$ na obra “Horseman”



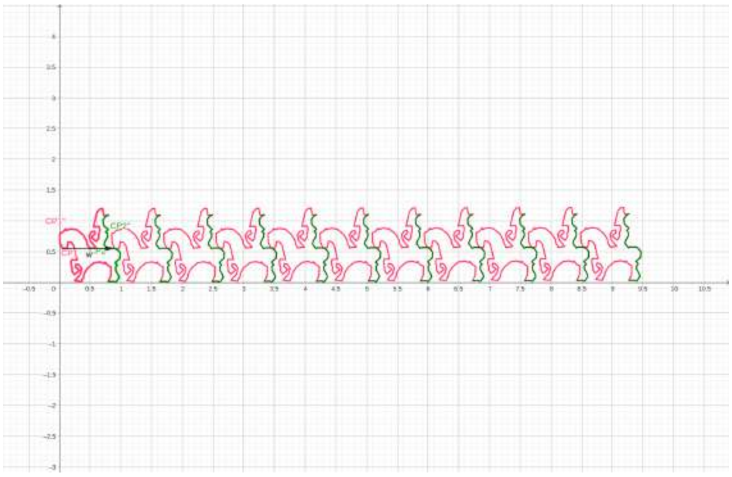
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.35 – Translação de $CP1$ em relação ao vetor $\vec{w}$



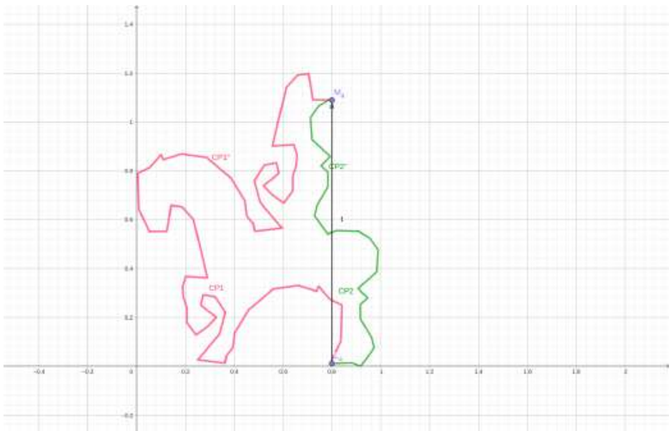
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.36 – Translação dos caminhos poligonais em relação ao vetor $\vec{w}$



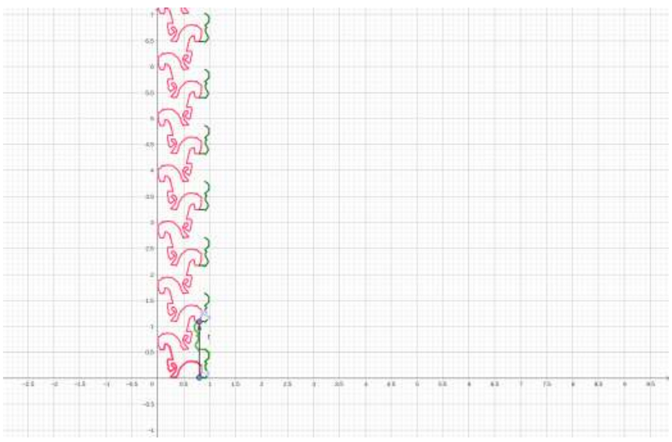
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.37 – Vetor $\vec{t}$ na obra “Horseman”



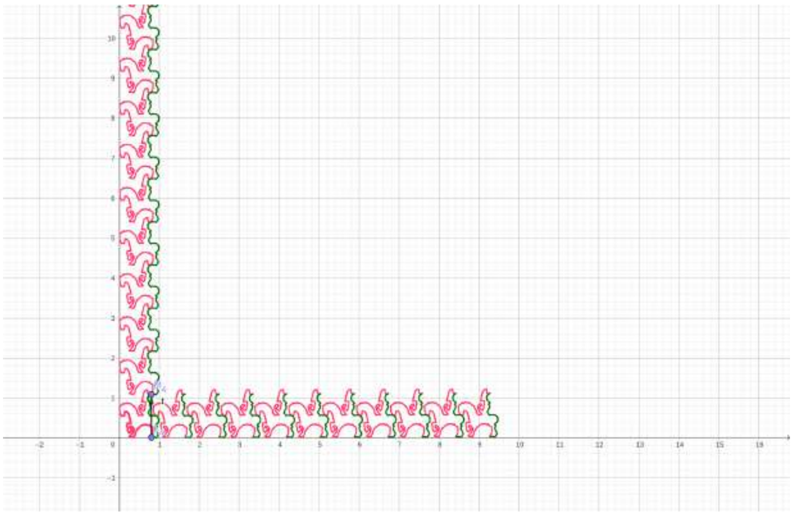
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.38 – Translação dos caminhos poligonais em relação ao vetor $\vec{t}$



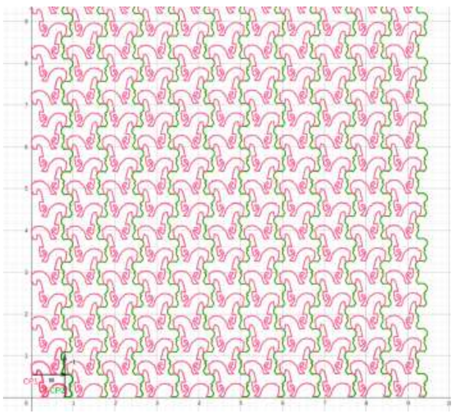
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.39 – Análise dos caminhos Poligonais obra “Horseman”



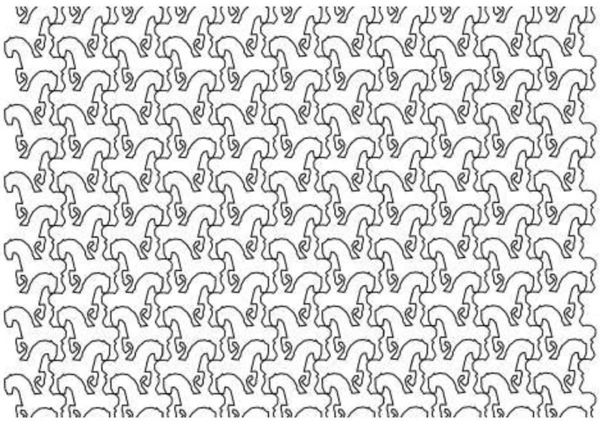
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.40 – Sequência de Translações dos caminhos poligonais criados em relação aos vetroes $\vec{t}$ e $\vec{w}$ na obra “Horseman”



Fonte: Elaborada pela autora

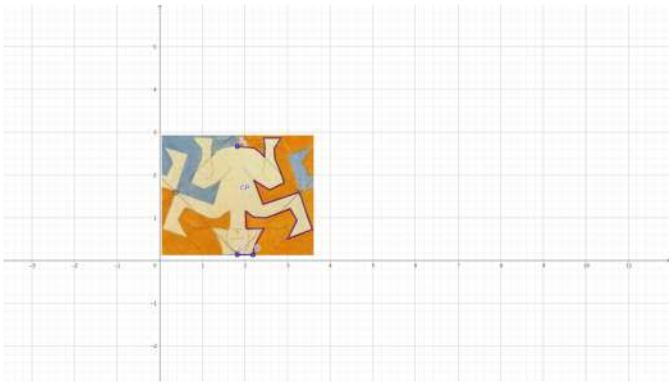
Figura 6.41 – Resultado Final das Sequências de Translação na obra “Horseman”



Fonte: Elaborada pela autora

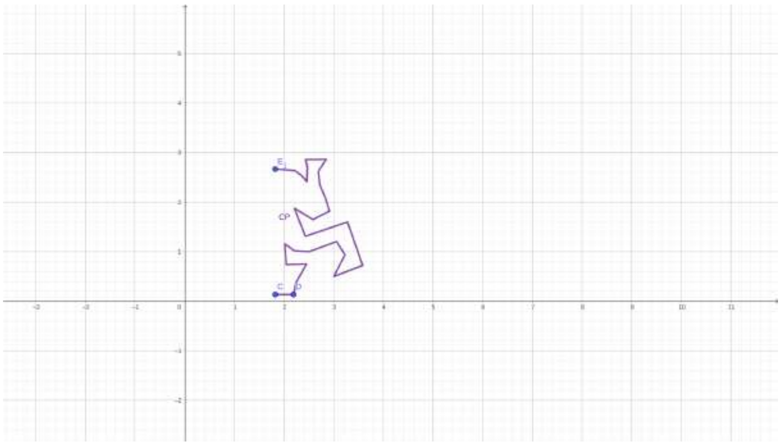
Conforme apresentado anteriormente, a obra “Systematic Study” contém simetria de reflexão. Além disso, é possível enfatizar que a simetrias de reflexão está presente na construção do motivo da obra, bem como a simetria de rotação, de modo que para continuarmos essa análise, basta criar um caminho poligonal, a partir de um recorte da figura inicial da obra, além de determinar um eixo de simetria e o centro de rotação.

Figura 6.42 – Caminho Poligonal (*CP*) no recorte da obra "Systematic Study"



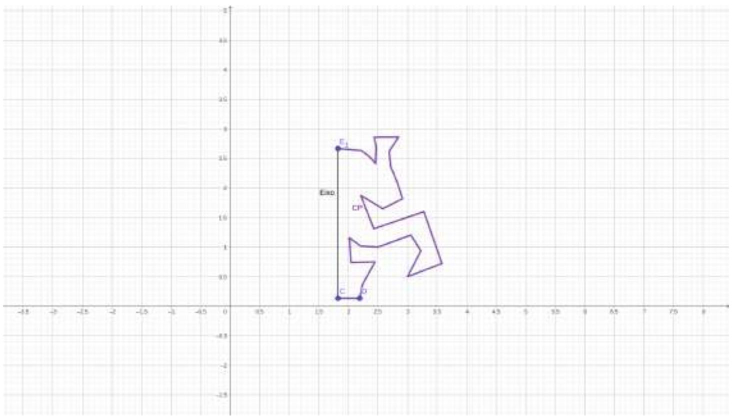
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.43 – Caminho Poligonal na obra "Systematic Study"



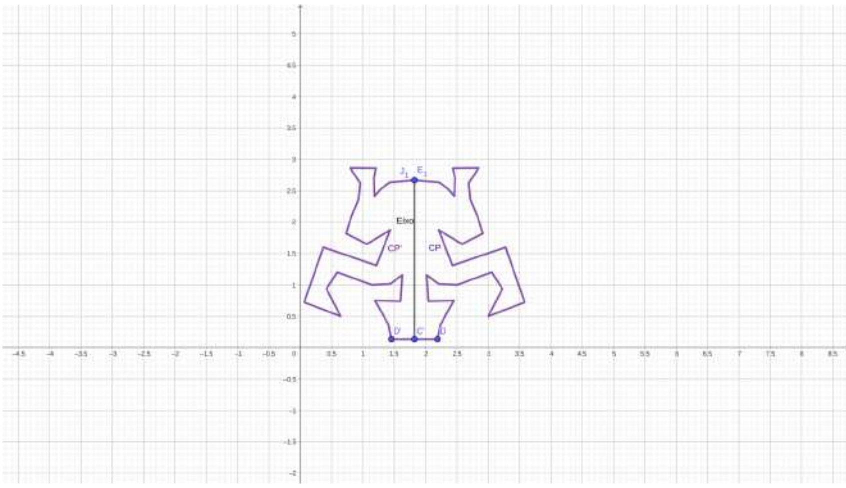
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.44 – Segmento CE_1 como eixo de Simetria na obra "Systematic Study"



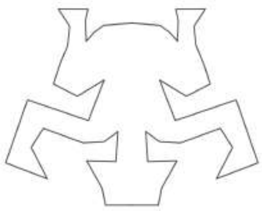
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.45 – Reflexão do caminho Poligonal na obra “Systematic Study”



Fonte: Elaborada pela autora

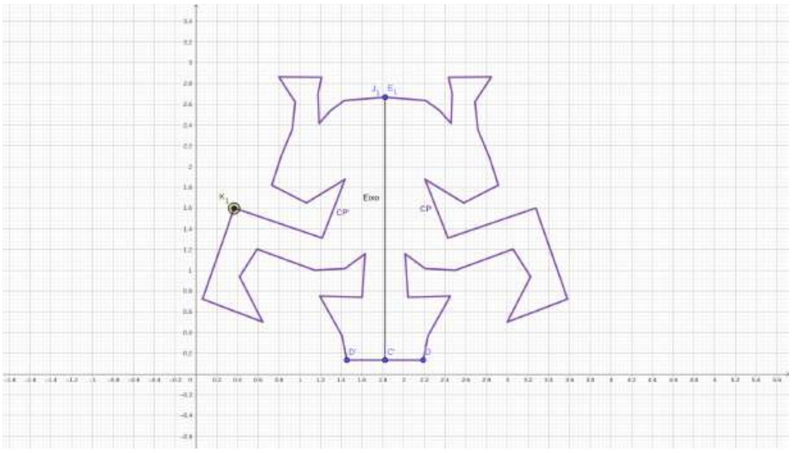
Figura 6.46 – Resultado Final da Simetria de Reflexão na obra “Systematic Study”



Fonte: Elaborada pela autora

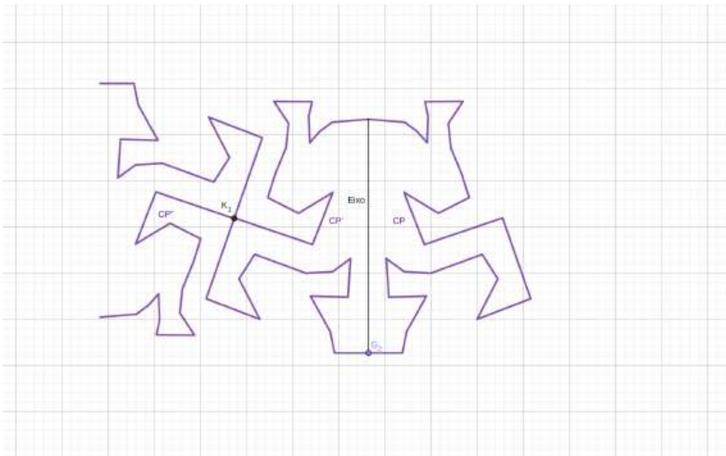
Para continuar a análise e identificar como as simetrias nos caminhos poligonais compõem a obra, iremos realizar a rotação de CP' em relação ao centro de rotação K_1 para o ângulo de 180°. Dessa forma, teremos como resultado o caminho CP''.

Figura 6.47 – Ponto K_1 como centro de rotação



Fonte: Elaborada pela autora

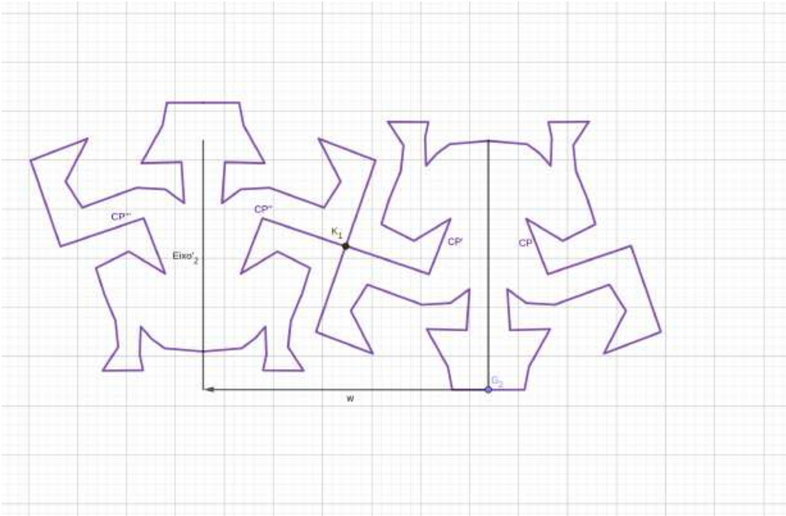
Figura 6.48 – Rotação do caminho Poligonal CP' (obra “Systematic Study”)



Fonte: Elaborada pela autora

Observa-se que, ao efetuarmos a translação do Eixo (segmento CE_1) em relação a um determinado vetor $\vec{w}$, cujo comprimento inicia em G_2 até a extremidade de CP'', teremos como resultado o $Eixo'_2$. Assim, a reflexão de CP'' por $Eixo'_2$, terá como consequência o caminho CP''', de modo que a junção desses dois caminhos poligonais (CP'' e CP'''), compõe outra figura que faz parte da obra.

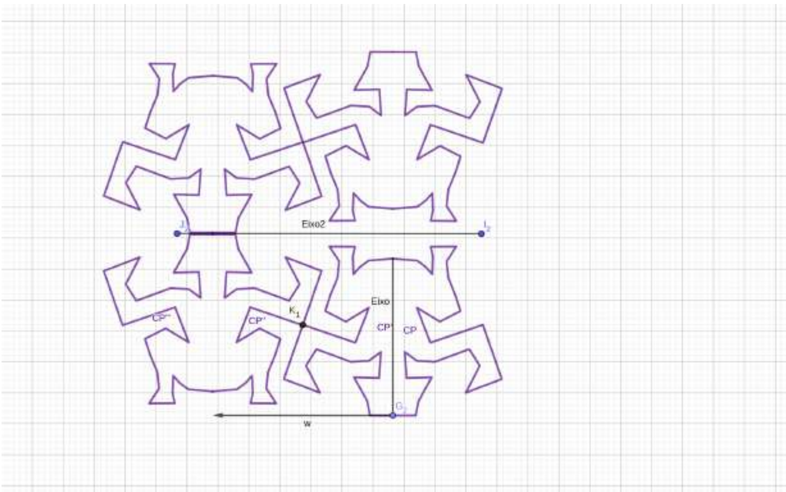
Figura 6.49 – Resultado a reflexão do CP'' em relação ao $Eixo_2'$ (obra "Systematic Study")



Fonte: Elaborada pela autora

De igual modo, se estabelecermos o segmento I_2J_2 (Eixo2) como eixo de simetria e realizarmos a reflexão de cada caminho poligonal criado até o momento através deste eixo, teremos como resultado outras figuras presentes na obra de Escher.

Figura 6.50 – Reflexão de cada caminho poligonal em relação ao novo eixo de Simetria (Eixo2)



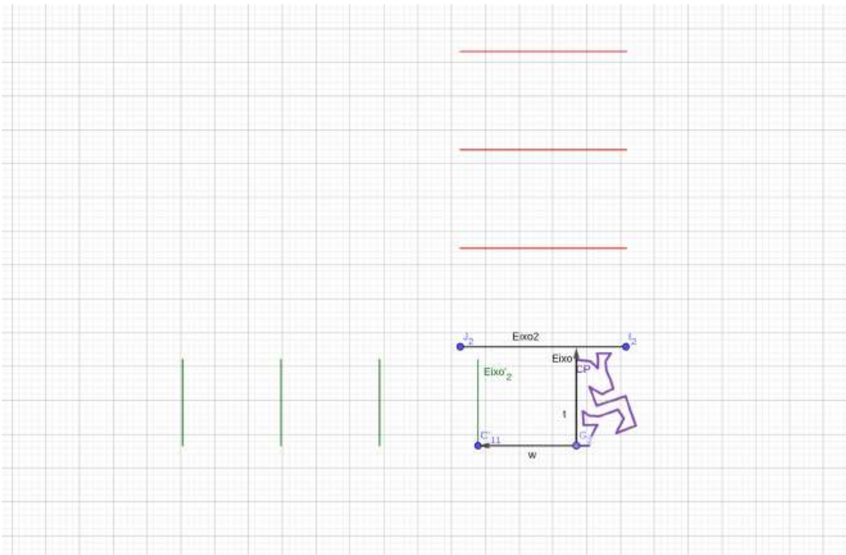
Fonte: Elaborada pela autora

Esse cenário enfatiza que dependendo da perspectiva que uma obra é analisada, torna-se possível identificar distintivos eixos de simetrias. Além disso, ressalta que de fato a obra “Systematic Study” pode ser composta por simetrias de reflexão e de rotação de um conjunto de segmentos.

À vista disso, constatamos que há um padrão na composição da obra considerando um conjunto de segmentos (CP), isso significa que a partir de simetrias nesse caminho poligonal, conseguimos obter uma representação completa da arte. Para isso, consideramos como base, os segmentos Eixo e Eixo2, bem como os vetores $\vec{w}$ e $\vec{t}$, com $\vec{t}$ perpendicular e de mesmo tamanho que $\vec{w}$. Vale destacar que os segmentos de retas em vermelhos são resultados da translação sucessiva do Eixo2 em relação a $\vec{t}$, enquanto os em verde, do Eixo em relação a $\vec{w}$.

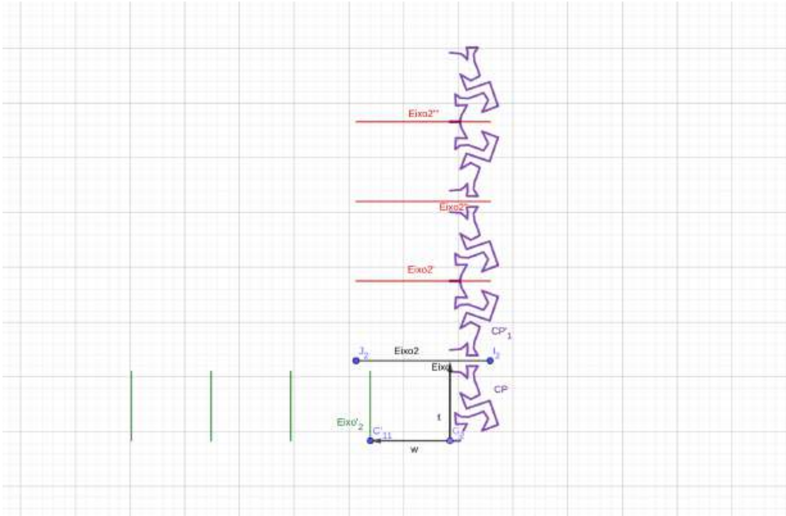
Em seguida, realizamos uma sequência de reflexões consecutivas de cada caminho poligonal, levando em consideração os segmentos em vermelho. Em outras palavras, o caminho CP_1', resultado da reflexão de CP pelo Eixo2, foi refletido por meio do Eixo2’, decorrendo em CP_1'', que em seguida foi refletido por Eixo2”, e assim sucessivamente.

Figura 6.51 – Vetores $\vec{w}$ e $\vec{t}$ na obra “Systematic Study”



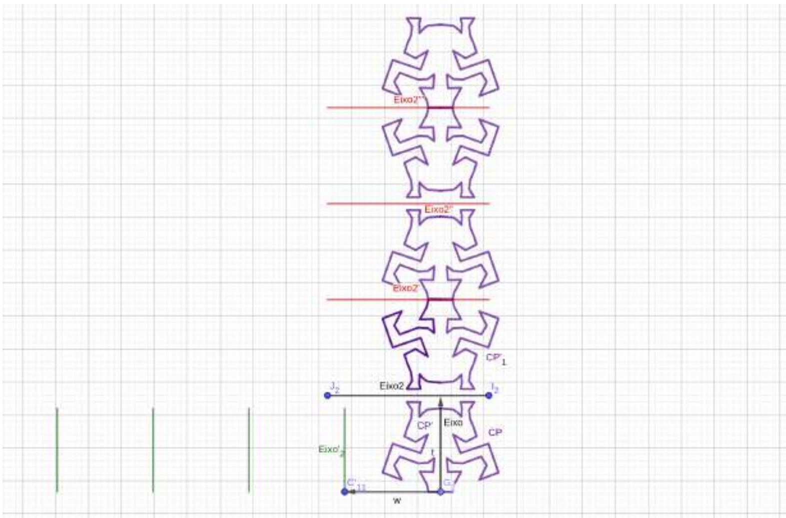
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.52 – Sequência de Reflexões em relação aos eixos em vermelhos
- Início em *CP*



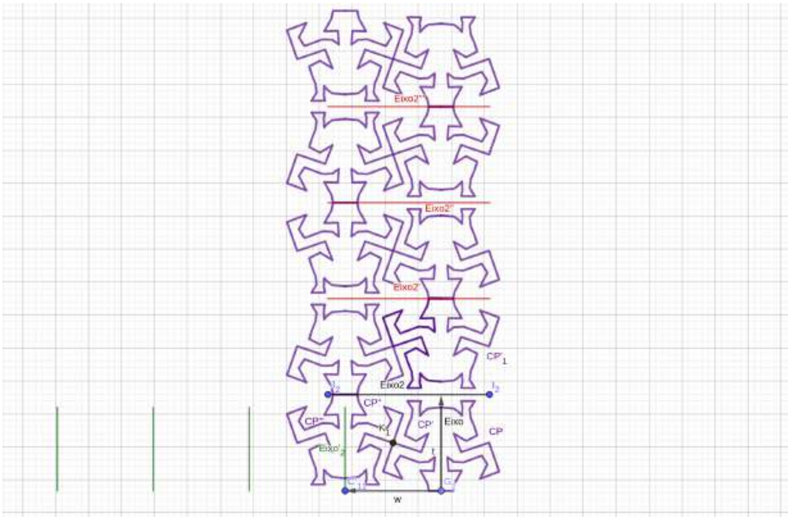
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.53 – Sequência de Reflexões em relação aos eixos em vermelhos
- Início em *CP*′



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.54 – Sequência de Reflexões em relação aos eixos em vermelhos - Início em CP'' e CP'''

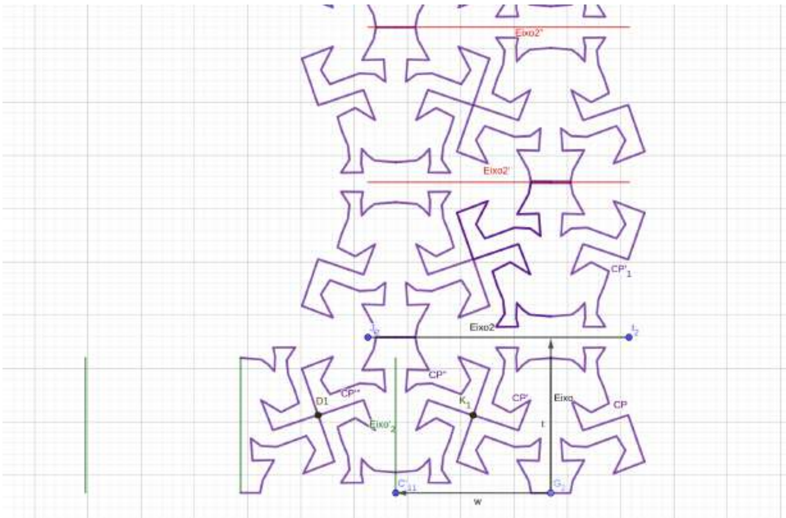


Fonte: Elaborada pela autora

Outro ponto crucial a ser destacado é que para dar continuidade nas reflexões, tem-se que efetuar a simetria de rotação de alguns caminhos poligonais. Por exemplo, primeiramente, realizamos a reflexão de CP em relação ao Eixo, para em seguida efetuarmos a rotação de CP' com o centro K_1, e o resultado, CP'', executamos a reflexão por $Eixo'_2$, tendo como consequência o caminho CP'''.

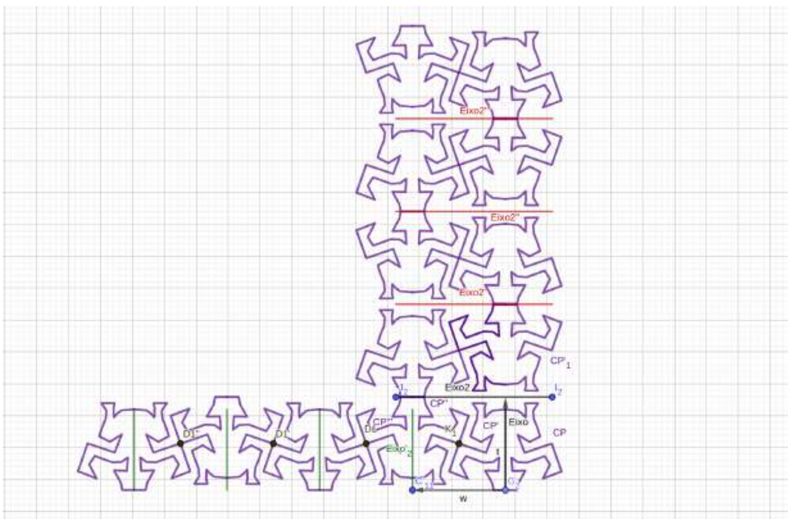
Em decorrência deste padrão exposto, fica evidente a necessidade de executarmos a simetria de rotação em CP'''. Neste interím, estabelecemos que os centros de rotação serão determinados a partir da translação consecutiva do ponto K_1 pelo vetor $\vec{w}$, isto é, a rotação de CP''' terá como centro de rotação o ponto $D_1 = T_w(K_1) = K_1 + \vec{w}$. Em suma, um dos padrões presentes na obra é derivado da reflexão de um conjunto de seguimento, seguida de rotação, e novamente da reflexão.

Figura 6.55 – Rotação de CP''' com centro de Rotação D_1 (“Systematic Study”)



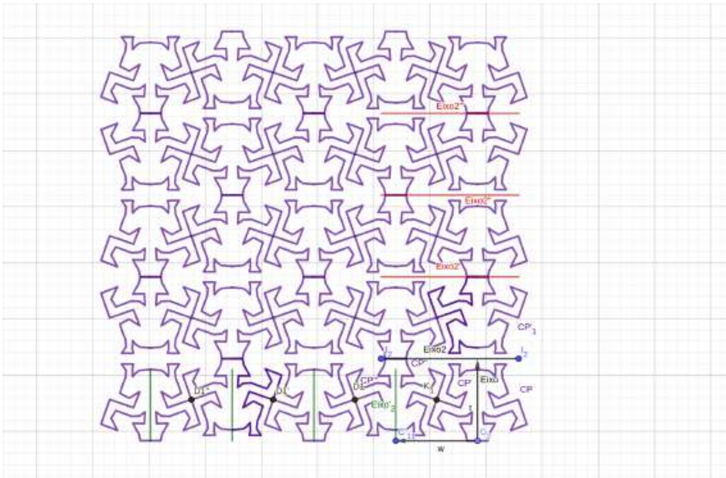
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.56 – Rotações e Reflexões em relação aos eixos em verde e os centros estabelecidos por translações de K_1



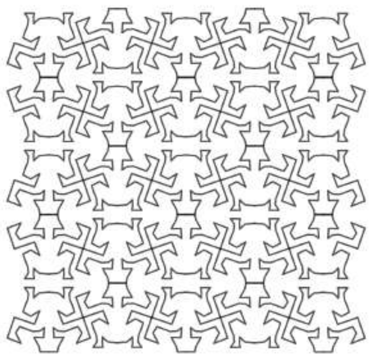
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.57 – Sequência de Reflexões de todos os caminhos poligonais em relação aos eixos em vermelhos



Fonte: Elaborada pela autora

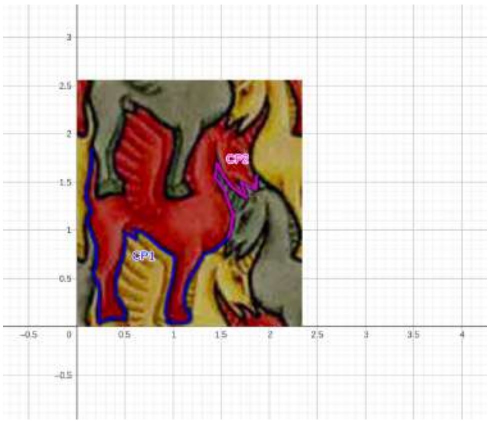
Figura 6.58 – Resultado Final das simetrias de reflexões e rotações na obra “Systematic Study”



Fonte: Elaborada pela autora

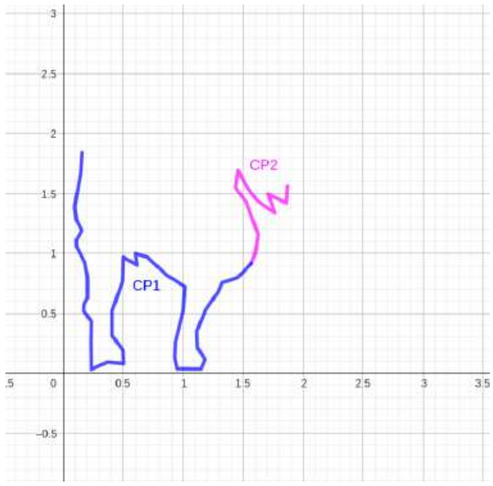
A obra de arte “Unicórnio”, conforme observada no capítulo anterior, exibe em sua composição a simetria de reflexão deslizante. Sob uma outra perspectiva, conseguimos estruturar, através de translações e reflexões deslizantes de um conjunto de segmentos, uma figura inicial, isto é, um dos unicórnios que compõem a obra. Nesse contexto, para realizar essa análise determinamos dois caminhos poligonais, $CP1$ e $CP2$.

Figura 6.59 – Caminhos Poligonais no recorte da obra obra “Unicórnio”



Fonte: Elaborada pela autora

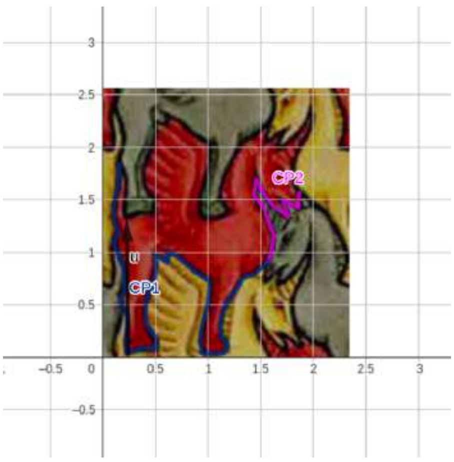
Figura 6.60 – $CP1$ e $CP2$ obra “Unicórnio”



Fonte: Elaborada pela autora

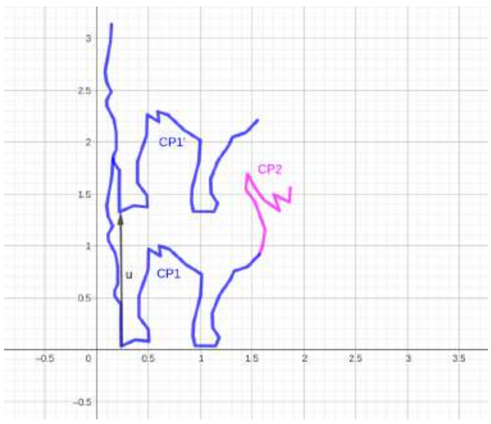
Para dar sequência, estabelecemos o vetor $\vec{u}$ e fizemos a translação de $CP1$ em relação a este vetor. Conforme evidenciado na obra "Symmetry Watercolor 106", o vetor $\vec{u}$, assim como os demais vetores que serão determinado nesta análise, foram obtidos a partir da análise do recorte da obra, uma vez que conseguimos identificar o comprimento, a direção e o sentido do vetor.

Figura 6.61 – Análise do Vetor $\vec{u}$ na obra “Unicórnio”



Fonte: Elaborada pela autora

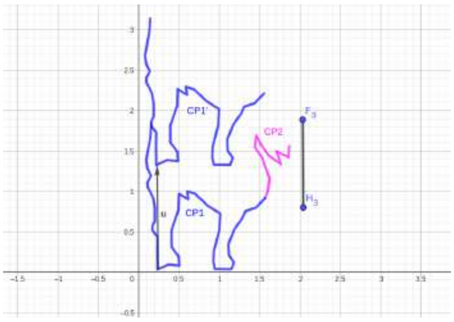
Figura 6.62 – Vetor $\vec{u}$ na obra “Unicórnio” e Translação de $CP1$



Fonte: Elaborada pela autora

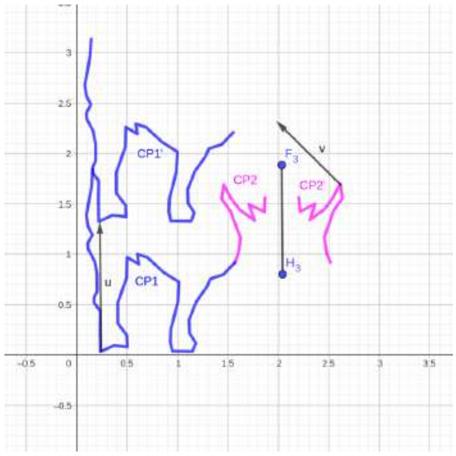
No que diz respeito a $CP2$, notamos que para concluir a construção do unicórnio, é necessário realizar a simetria de reflexão deslizante. Desse modo, é essencial estabelecer o eixo de simetria para efetuar a reflexão e, depois, determinar outro vetor ($\vec{v}$) .

Figura 6.63 – Segmento F_3H_3 na obra “Unicórnio”



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.64 – Reflexão de $CP2$ e vetor $\vec{v}$ na obra “Unicórnio”

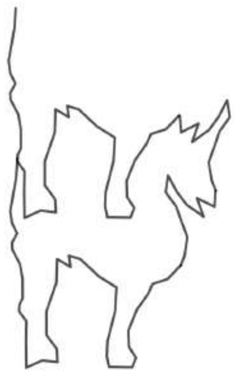


Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.65 – Translação de $CP2''$ em relação a $\vec{v}$ na obra “Unicórnio”

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.66 – Resultado final da simetria de reflexão e translação em $CP1$ e $CP2$

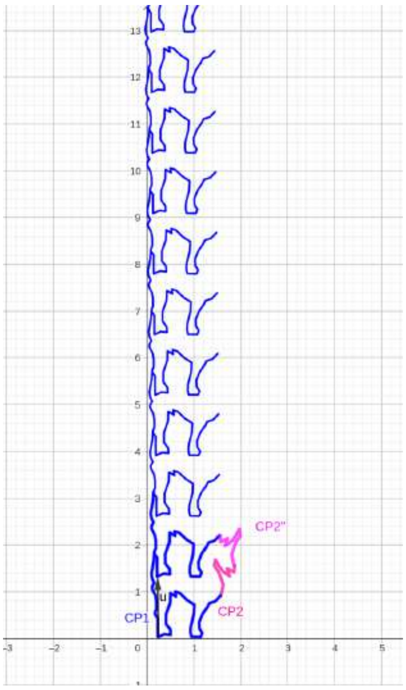


Fonte: Elaborada pela autora

Vale destacar que, ao concluir as simetrias, além de obter um dos unicórnios (figura inicial), as transformações resultam em uma parte do unicórnio seguinte. Isso ocorre, pois o segmento $CP1'$, resultado da translação de $CP1$, não apenas contribui para a construção de um único unicórnio, mas também inicia o processo de criação do unicórnio subsequente.

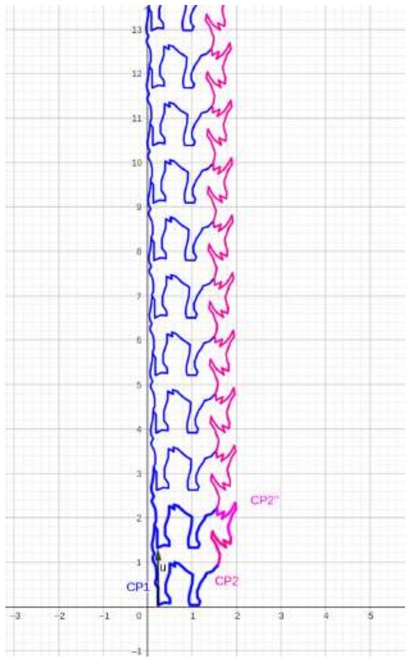
Nesse panorama, fica evidente que a partir de simetrias de translações e reflexões deslizantes em um conjunto de segmentos, conseguimos construir as demais figuras para integrar na obra. Para tal, iremos estruturar uma sequência de simetrias com o comando Sequência do Geogebra, com a mesma ideia utilizada no obra “Symmetry Watercolor 106 Bird”, ou seja, Sequência(Transladar(objeto,$s * u$), s, 0,n, 1), em que iremos transladar os caminhos poligonais, $CP1$, $CP2$ e $CP2''$, em relação ao vetor $\vec{u}$.

Figura 6.67 – Sequência de Translações de $CP1$ em relação ao vetor $\vec{u}$ na obra “Unicórnio”



Fonte: Elaborada pela autora

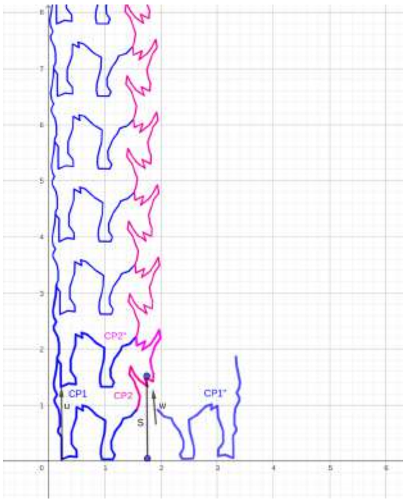
Figura 6.68 – Sequência de Translações de $CP2$ e $CP2''$ em relação ao vetor $\vec{u}$ na obra “Unicórnio”



Fonte: Elaborada pela autora

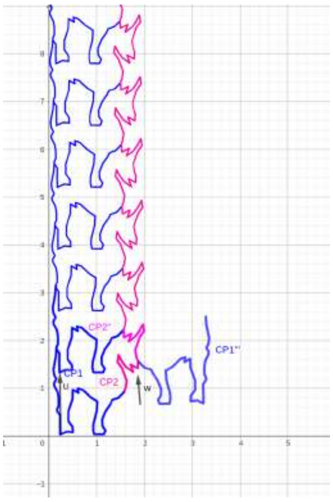
Após efetuar a sucessão de translações, percebemos que era necessário fazer a reflexão deslizante tanto de $CP1$ como dos caminhos poligonais resultantes da simetria de translação. Assim, determinados o segmento S como eixo de simetria e o vetor $\vec{w}$.

Figura 6.69 – vetor $\vec{w}$ e Reflexão de CP1 em relação ao segmento S



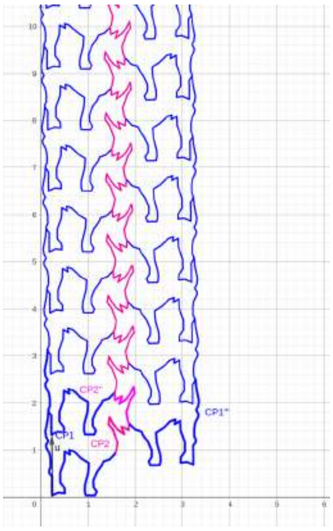
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.70 – $CP1''$- Resultado Final de reflexão Deslizante de $CP1$



Fonte: Elaborada pela autora

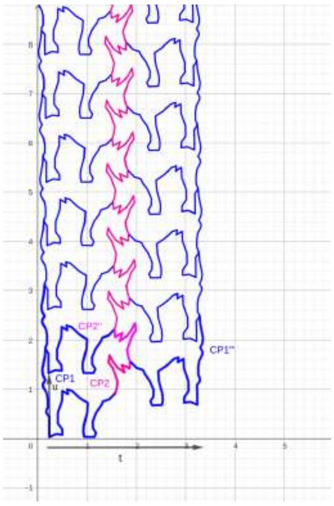
Figura 6.71 – Sequência de Translações de $CP1'''$ em relação a $\vec{u}$



Fonte: Elaborada pela autora

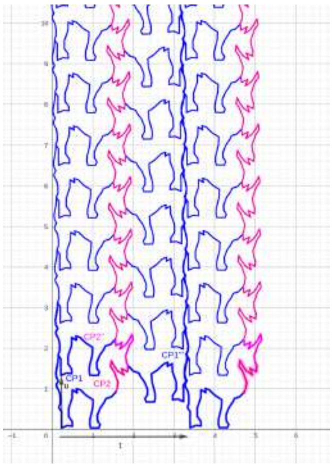
Observa-se que estruturamos duas fileiras de unicórnios, composta por caminhos poligonais, gerados a partir das simetrias em $CP1$ e $CP2$. Essas fileiras constituem um padrão que será repetido ao longo da obra de Escher, ou seja, a composição artística consiste na translação desses caminhos poligonais em função de um determinado vetor, o qual denominados de vetor t. Dessa forma, ao concluir as translações de $CP1$, $CP2$, $CP1'''$, $CP2''$, bem como dos demais caminhos poligonais estruturados até então, em relação a esse vetor, as próximas translações se darão a partir dos resultados dessas interações, e assim sucessivamente.

Figura 6.72 – Vetor $\vec{t}$ na obra "Unicórnio"



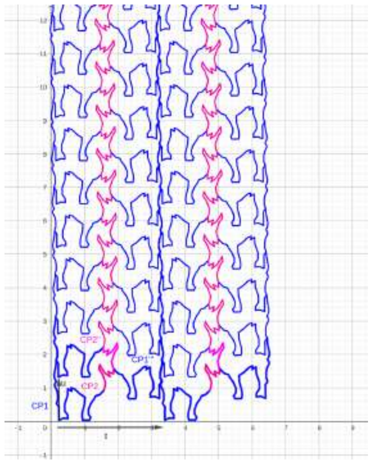
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.73 – Translação da primeira fileira em relação ao vetor $\vec{t}$



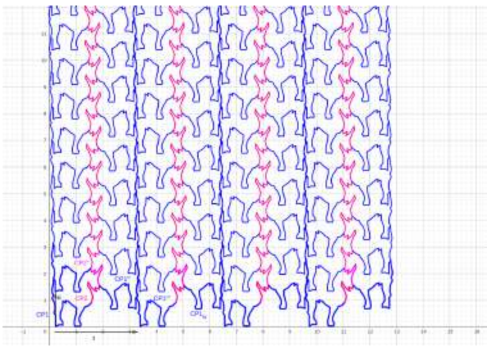
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.74 – Translação da Segunda fileira em relação a $\vec{t}$



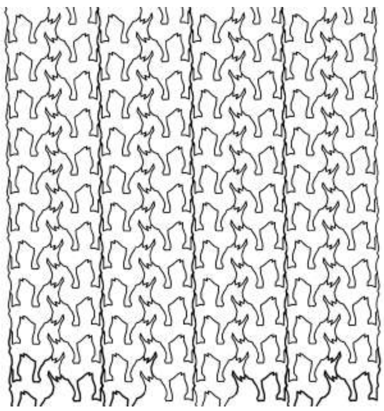
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.75 – Translações sucessivas dos caminhos poligonais resultantes das interações anteriores



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 6.76 – Resultado Final das simetrias dos caminhos poligonais na obra "Unicórnio"



Fonte: Elaborada pela autora

De maneira concisa, com essa outra perspectiva de analisar as criações artísticas, utilizando o Geogebra, observamos que além de ampliar as percepções dos alunos, é possível revisar outros conteúdos matemáticos, como segmentos de retas, equidistância, simetria entre pontos, vetores e ângulos. Outrossim, dependendo do tempo disponível para a execução da atividade, é possível ensinar os alunos a utilizarem esses recursos da plataforma, não apenas para eles identificarem os conjuntos de segmentos que pode construir a obra, mas também para criar suas próprias imagens, de modo que através de simetrias, os educandos podem compor suas próprias obras de arte.

Ademais, os professores podem fazer uso das ferramentas presentes no software para desenvolver atividades e materiais que incentivem essas distintas percepções em sala de aula, já que, conforme analisado neste capítulo e no capítulo anterior, há diferentes abordagens que podem ser adotadas para trabalhar a simetria. Neste trabalho, apresentamos algumas maneiras de estudar esse tema, a partir do diálogo com a arte, porém há diferentes formas de analisá-la. Sendo assim, o importante é que o docente promova situações que estimulem a criatividade, a participação ativa do educandos, a troca de experiências entre os mesmos, e incorpore cenários que contribuem para a conexão dos conteúdos com o cotidiano, bem como entre diferentes áreas do conhecimento, fazendo com que as discussões dessas temáticas ganhem significados.

7 PLANO DE AULA - EXPLORANDO A SIMETRIA NA ARTE: UMA JORNADA COM O GEOGEBRA

Este capítulo engloba uma análise do desenvolvimento de um plano de aula referente ao estudo da Simetria em Interlocução com a Arte. A atividade em questão foi conduzida em uma instituição de ensino público no âmbito da Educação Básica. Assim, espera-se refletir sobre a participação dos alunos, averiguar possíveis dificuldades enfrentadas tanto por eles quanto pelos docentes e os aprendizados obtidos na execução da mesma.

7.1 PLANO DE AULA

- **Turma:** 3° ano do Ensino Médio
- **Duração:** 2 Aulas de 45 minutos.
- **Habilidade (BNCC):** A habilidade desenvolvida neste plano é a (EM13MAT105), destinada para o Ensino Médio.

  (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- **Objetivo Geral:** Compreender as características dos diferentes tipos de simetria (simetria de reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante), principalmente que a figura resultante destas transformações são invariantes.
- **Objetivos Específicos:**
  - Compreender que a Simetria está presente em diversas situações do cotidiano, como na Arte.
  - Compreender que a Simetria é uma Isometria, a qual mantém a figura invariante, isto é, inalterada ao sofrer um conjunto de transformações.
  - Reconhecer as simetrias presentes nas composições das obras de Arte.
  - Reconhecer e nomear os tipos de simetrias.
  - Desenvolver o interesse investigativo.
  - Conseguir conectar a matemática com vivências cotidianas
- **Conteúdo:** Simetria de Reflexão, Simetria de Rotação, Simetria de Translação e Simetria de Reflexão seguida de Translação. Breve compreensão de figuras invariantes.
- **Materiais**

- Computadores;
- Internet;
- Data Show ou Televisão;

- **Metodologia**

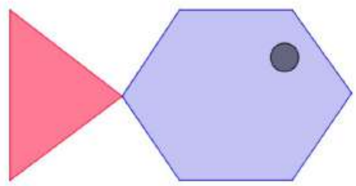
A aula será dividida em dois momentos, o primeiro destinado a uma abordagem teórica e conceitual da simetria e o segundo para o desenvolvimento da atividade.

- Primeiramente, será feito alguns questionamentos aos alunos, a fim de identificar o conhecimento prévio que os mesmos possuem do tema.
  * O que vocês sabem sobre Simetria?
  * Vocês acham que a Simetria está presente na Arte?
  * Já ouviram falar de Reflexão, Rotação e Translação?
- Após essa breve discussão, será explicado aos alunos o que é uma Simetria, e os tipos de simetrias existentes, apresentando exemplos para auxiliar na visualização dos mesmos.
- Em seguida, será exibido às obras do artista Escher. Assim, os alunos terão a oportunidade de identificar quais os tipos de simetrias presentes nas obras e poderão trocar essas percepções com os colegas, já que dependendo da figura inicial analisada é possível determinar diferentes tipos de simetria em uma mesma composição.
- Finalizando essa etapa da aula, será questionado aos alunos se eles conhecem o geogebra e se já utilizaram o software anteriormente. Dessa forma, será explicado alguns recursos disponíveis nessa plataforma e como acessá-lo.
- Após essa breve conversa, será apresentado a atividade aos alunos.

Atividade: "Agora é sua vez de criar uma obra de Arte!!"
Vamos explorar seu lado artístico e sua criatividade !!!! Em duplas, criem uma figura utilizando os recursos disponibilizados no Geogebra. Depois, escolham uma das ferramentas: de reflexão, rotação ou translação para explorar as simetrias das formas e dar vida a criação de vocês !!!
É hora de transformar conceitos matemáticos em verdadeiras obras de arte.

- No intuito de ajudá-los, caso os alunos não saibam mexer no Geogebra, será apresentado um exemplo, o qual eles podem se inspirar caso queiram.

Figura 7.1 – Exemplo para os alunos
se inspirarem



Fonte: Elaborada pela autora

- Durante a confecção da atividade, a todo momento será dado auxílio e suporte aos alunos, principalmente se houver alguma dúvida quanto ao conteúdo discutido e a plataforma Geogebra.
- A medida que os educandos forem finalizando as obras de arte, eles irão socializar com os demais colegas as imagens criadas. O objetivo dessa atividade é incentivar a participação dos alunos, a criatividade, e contribuir para o compartilhamento de informações e conhecimento entre eles. Além de que, eles poderão aplicar os conceitos abordados em sala de aula de forma atrativa e participativa rompendo com o ensino tradicional. Ademais, irão conseguir relacionar a Matemática com a Arte, desenvolvendo uma perspectiva interdisciplinar.
- No final da aula, será respondido um questionário a fim de analisar a opinião dos estudantes sobre a aula desenvolvida.

Questionário

1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?

2)Qual parte da aula você mais gostou?

3)Você gostou de trabalhar a Simetria em conjunto com a Arte?

4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?

7.2 REFLEXÃO DA ATIVIDADE APLICADA NO AMBIENTE ESCOLAR

A aula transcorreu em uma escola pública estadual situada na cidade de São Carlos, localizada no estado de São Paulo. A instituição está inserida no Programa de Ensino Integral

(PEI) com uma jornada de 9h, ou seja, os alunos entram na escola às 7h30 e saem às 16h30. O intuito principal das atividades desenvolvidas nas escolas PEI, além de contribuir para a aprendizagem, é desenvolver o protagonismo dos estudantes.

A atividade estava prevista para ser realizada com a turma do 3° ano do Ensino Médio, de modo que durante a confecção da mesma, questionamos a professora de matemática da turma sobre as dificuldades e as particularidades da sala, a fim de adaptar, caso fosse necessário, o plano de aula com o objetivo de atender as especificidades dos alunos. Nessa conversa, a docente observou que os educandos estudaram o tópico de isometria no plano durante o ano e que já utilizaram anteriormente o Geogebra, assim ela acreditava que os estudantes iriam gostar da atividade e se interessar pelas obras de Escher.

Além de apresentar uma sala de informática, a escola disponibiliza notebook para os alunos utilizarem na própria sala de aula, de modo que a docente sugeriu desenvolver as atividades em classe, pois como era apenas duas aulas, seria mais prático do que deslocar toda a turma para outro ambiente.

No início da aula, indagamos os alunos acerca do que eles sabiam sobre a simetria e se achavam que esta estava presente nos recursos artísticos. Um dos estudantes observou que a simetria ocorre quando duas figuras são idênticas, assim observa-se que intuitivamente ele compreendia a ideia de invariância de figuras sem de fato saber que estava usufruindo deste conceito. Para dar continuidade na discussão, questionamos se eles lembravam sobre a Isometria no Plano, no entanto, enquanto alguns recordavam desta temática, outros apresentaram um pouco de dificuldade. Dessa forma, realizamos uma breve retomada sobre a isometria, para em seguida discorrer sobre a simetria.

Ao longo da explicação, para auxiliar os alunos a visualizarem a simetria em situações cotidianas, e assim compreenderem de fato essa temática, para que a aprendizagem seja significativa, foram exibidos alguns exemplos presentes na natureza, na arquitetura, e na arte, a partir das obras do artista Maurits Cornelis Escher, as quais incentivaram o interesse dos estudantes.

Figura 7.2 – Discussão sobre a Simetria na Sala de Aula

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.3 – Apresentação de exemplos envolvendo Simetrias

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.4 – Apresentação sobre Escher

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.5 – Exemplos de Simetrias nas obras de Escher

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.6 – Discussão sobre a Simetria de Translação

Fonte: Elaborada pela Autora

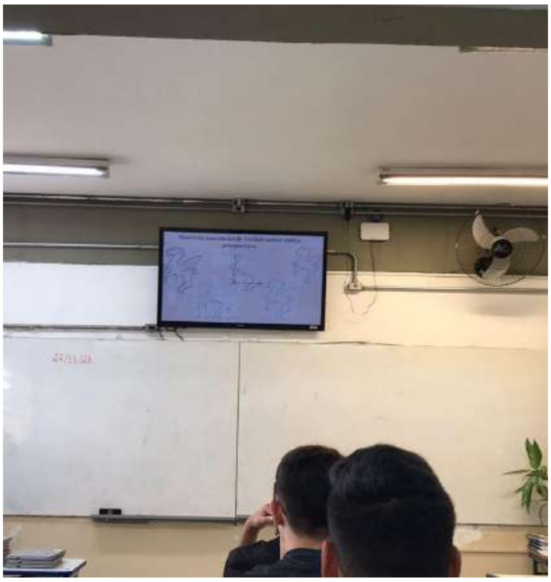
Figura 7.7 – Discussão sobre a Simetria de Reflexão

Fonte: Elaborada pela Autora

Nesse panorama, a discussão sobre os tipos de Simetria ocorreu em conjunto com a análise das obras de Escher, em que os alunos relataram as simetrias que identificavam e as opiniões que tinham sobre as obras analisadas. A medida que eles iam apontando as simetrias, utilizamos os recursos disponíveis no Geogebra para apresentar que de fato as simetrias observadas estavam presentes nos recursos artísticos e que dependendo da figura inicial escolhida era possível identificar diferentes simetrias, por exemplos, simetrias de translação determinadas por vetores com direções e sentidos diferentes.

No intuito de expandir o repertório dos alunos quanto às possibilidades de estudar a simetria nas obras de Escher, apresentamos outras formas e perspectivas de analisar esses recursos artísticos, observando não só a figura inicial que compõe a obra, mas sim as simetrias que darão origem às figuras iniciais. Essa reflexão, atraiu a atenção dos educandos para a grandiosidade e a criatividade presente nas obras de Escher, consequentemente os alunos mostraram curiosidade em conhecer outras obras do artista.

Figura 7.8 – Estudo das Simetria nas obras de Escher



Fonte: Elaborada pela Autora

Além de retomar os conceitos e propriedades vinculadas às simetrias, foi possível relembrar outros tópicos da matemática, como segmentos de retas e vetores. Ao finalizar a parte Teórica explicamos a atividade que seria desenvolvida na aula e apresentamos uma imagem para inspirá-los a criarem a própria figura. A princípio a atividade seria desenvolvida em duplas, mas como cada aluno estava em posse de um notebook, sugerimos que eles realizassem a atividade cada um em seu computador, mas incentivamos os mesmos a conversarem com os colegas e trocar ideias.

Alguns alunos apresentaram mais facilidades em manusear as ferramentas presentes na plataforma, mas para auxiliar aqueles que estavam com mais dificuldades, além do tutorial disponibilizado referente a construção de figuras no Geogebra, tendo a imagem apresentada como inspiração, optamos em criar uma figura simultaneamente com os alunos. Ademais, os estudantes poderiam escolher qual simetria iriam utilizar em suas criações, entretanto para ajudá-los nesse processo, ministramos instruções passo a passo de como fazer as simetrias. Primeiramente, abordamos a simetria de translação, assim após criarem a imagem, os educandos aprenderam a estabelecer um vetor para em seguida realizar a translação. Posteriormente, abordamos como fazer a simetria de reflexão e, por fim, a de reflexão deslizante. Devido ao tempo limitado de aula, não foi possível trabalhar a simetria de Rotação.

Uma das principais dificuldades que observamos nos alunos durante a aula, foi acionar algumas ferramentas da plataforma, como mudar a cor e retirar as legendas dos polígonos e segmentos criados, sem a utilização do mouse. À vista disso, apresentamos outra maneira de acessar as configurações, o que tornou mais fácil para alguns estudantes executarem os comandos, porém para outros ainda era um desafio, de modo que durante o desenvolvimento na atividade íamos até eles auxiliá-los. Diante disso, essas dificuldades não impediram que eles finalizassem a atividade.

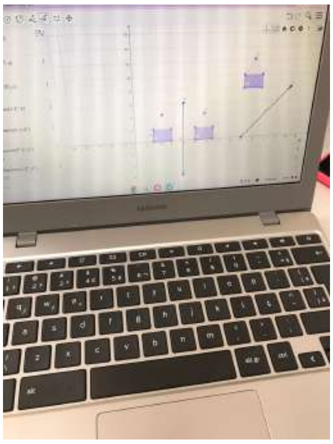
Nesse sentido, sempre que os educandos apresentavam alguma adversidade, dirigimos até a carteira para ajudá-los, e conforme eles iam aprendendo a mexer na plataforma, tomaram a iniciativa de auxiliar os colegas que estavam com mais dificuldade. Essa ação contribui para que eles desenvolvam o protagonismo e habilidades, como trabalho em equipe, essenciais para o exercício da cidadania e o mercado de trabalho, ao mesmo tempo que incentiva a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Outro ponto que vale destacar é que durante a execução da simetria de reflexão, uma das alunas que tinha feito um desenho monocromático, observou que durante a reflexão a imagem permanecia idêntica à original, sem notar nenhuma mudança de posição ou o reflexo da figura, como ocorre em um espelho. Dessa forma, ao conversar com outra colega e com a professora da sala, optou em trocar o eixo de simetria, que antes estava na vertical, para colocá-lo na horizontal, no intuito de ver a mudança de posição da imagem. Essas distintas percepções somadas com a troca de experiências e informações entre os estudantes, faz com que a sala de aula seja um ambiente favorável para a aprendizagem dos conceitos matemáticos, amplia o repertório dos alunos, além de promover situações em que eles possam relacionar a matemática com outras disciplinas e consequentemente com situações vivenciadas no cotidiano, resultando em uma aprendizagem significativa.

Figura 7.9 – Construindo a Simetria de Reflexão em sala de aula (I)

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.10 – Construindo a Simetria de Reflexão Deslizante em sala de aula

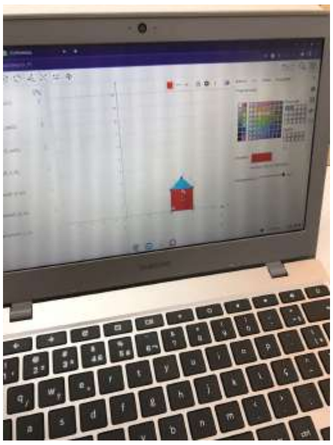


Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.11 – Construindo a Simetria de Reflexão em sala de aula (II)

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.12 – Construindo a Imagem no Geogebra (I)

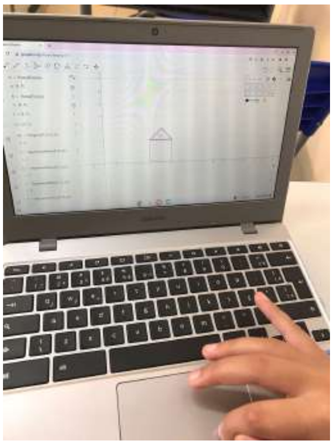


Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.13 – Construindo a Simetria de Translação em sala de aula

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.14 – Construindo a Imagem no Geogebra (II)



Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.15 – Fotos tiradas da participação dos alunos (I)

Fonte: Elaborada pela Autora

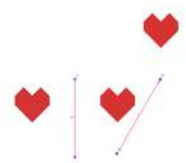
Figura 7.16 – Fotos tiradas da participação dos alunos (II)

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.17 – Fotos tiradas da participação dos alunos (III)

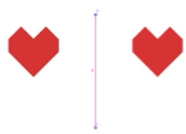
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.18 – Atividade desenvolvida pelos alunos (I)



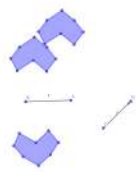
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.19 – Atividade desenvolvida pelos alunos (II)



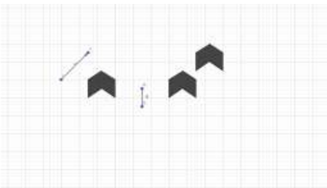
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.20 – Atividade desenvolvida pelos alunos (III)



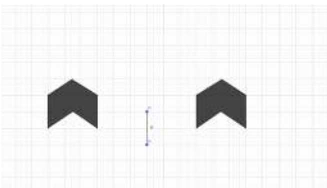
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.21 – Atividade desenvolvida pelos alunos (IV)



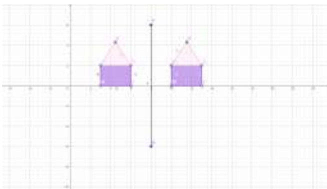
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.22 – Atividade desenvolvida pelos alunos (V)



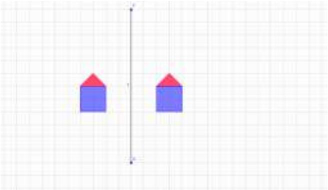
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.23 – Atividade desenvolvida pelos alunos (VI)



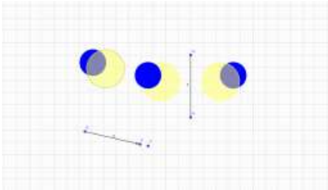
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.24 – Atividade desenvolvida pelos alunos (VII)



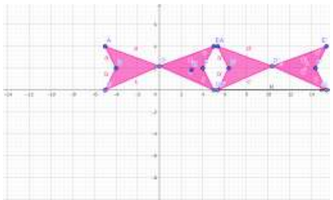
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.25 – Atividade desenvolvida pelos alunos (VIII)



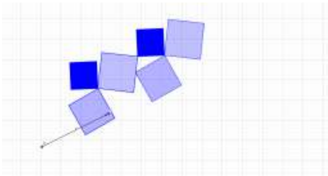
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.26 – Atividade desenvolvida pelos alunos (IX)



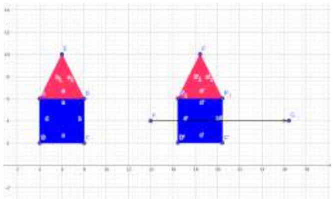
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.27 – Atividade desenvolvida pelos alunos (X)



Fonte: Elaborada pela Autora

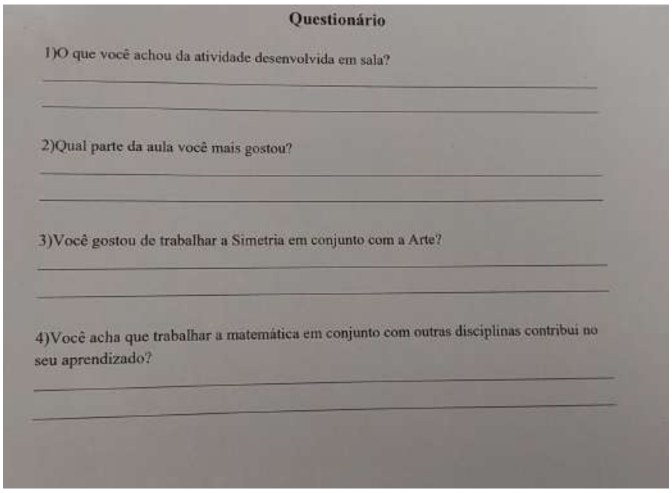
Figura 7.28 – Atividade desenvolvida pelos alunos (XI)



Fonte: Elaborada pela Autora

Com a finalidade de avaliar o desenvolvimento do plano de aula, entregamos um questionário aos alunos, em que deveriam indicar as suas opiniões sobre a atividade e destacar os momentos que mais gostaram durante a aula.

Figura 7.29 – Questionário


Questionário

1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?

2)Qual parte da aula você mais gostou?

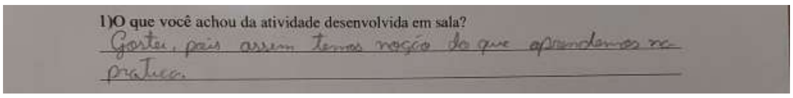
3)Você gostou de trabalhar a Simetria em conjunto com a Arte?

4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?

Fonte: Elaborada pela Autora

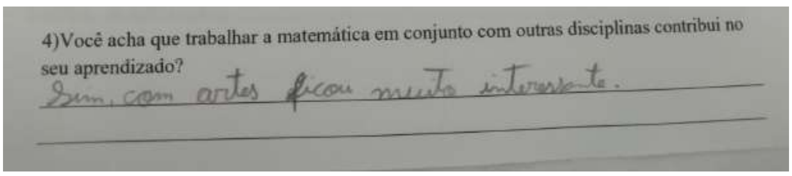
Nesse sentido, por intermédio das respostas obtidas, notamos que os estudantes mostraram grande interesse pela aula, principalmente da atividade prática, na qual puderam criar a imagem e aplicar a teoria abordada em classe, além disso eles também mencionaram a análise das obras de Escher. Quanto a importância em trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas, foi unânime as respostas dos estudantes, ao apontarem que essa conexão auxilia na aprendizagem e promove atividades diferenciadas, fazendo com que a aula fique mais atrativa e interessante.

Figura 7.30 – Questionário - Respostas dos Alunos (I)


1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?
Gostei, pois assim temos noção do que aprendemos na prática.

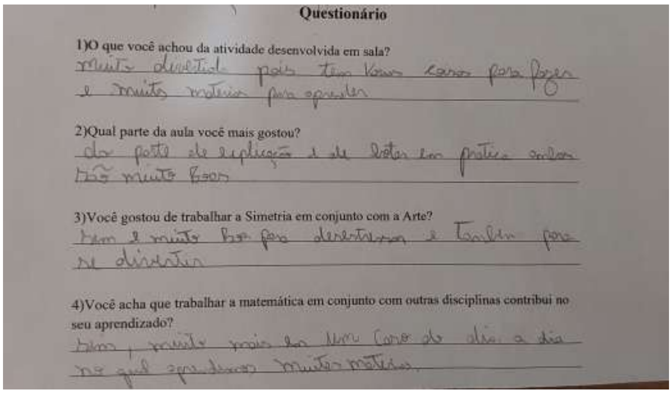
Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.31 – Questionário - Respostas dos Alunos (II)


4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?
Sim, com artes ficou muito interessante.

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.32 – Questionário - Respostas dos Alunos (III)


Questionário

1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?

muito divertido pois tem varios coisas para fazer e muitos materias para aprender

2)Qual parte da aula você mais gostou?

da parte de explicação e de botar em prática ambos são muito boas

3)Você gostou de trabalhar a Simetria em conjunto com a Arte?

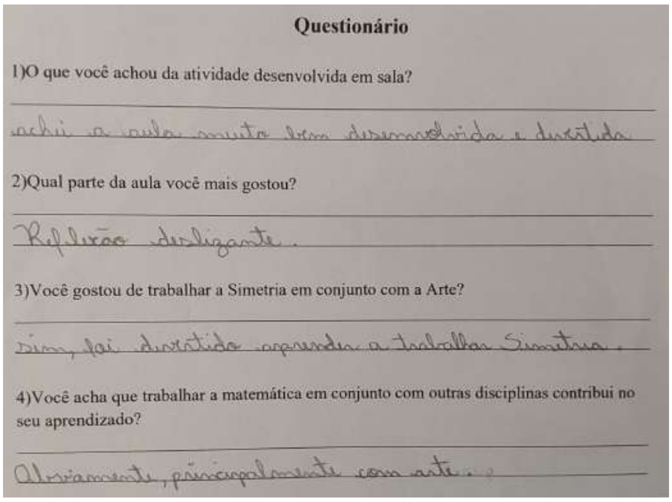
sim é muito bom para desenvolver e também para se divertir

4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?

Sim, muito mais boa uma coisa do dia a dia no qual aprendemos muitos materias.

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.33 – Questionário - Respostas dos Alunos (IV)


Questionário

1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?

achei a aula muito bem desenvolvida e divertida

2)Qual parte da aula você mais gostou?

Reflexão deslizante.

3)Você gostou de trabalhar a Simetria em conjunto com a Arte?

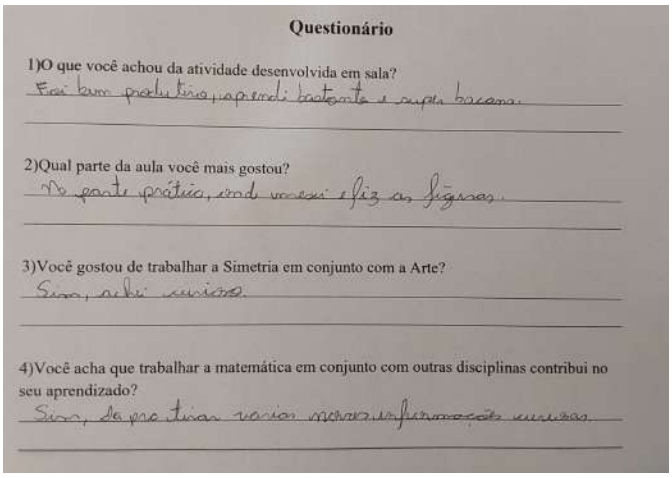
Sim, foi divertido aprender a trabalhar Simetria.

4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?

Obviamente, principalmente com arte.

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.34 – Questionário - Respostas dos Alunos (V)


Questionário

1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?

Foi bem produtivo, aprendi bastante e super bacana.

2)Qual parte da aula você mais gostou?

Na parte prática, onde mexi e fiz as figuras.

3)Você gostou de trabalhar a Simetria em conjunto com a Arte?

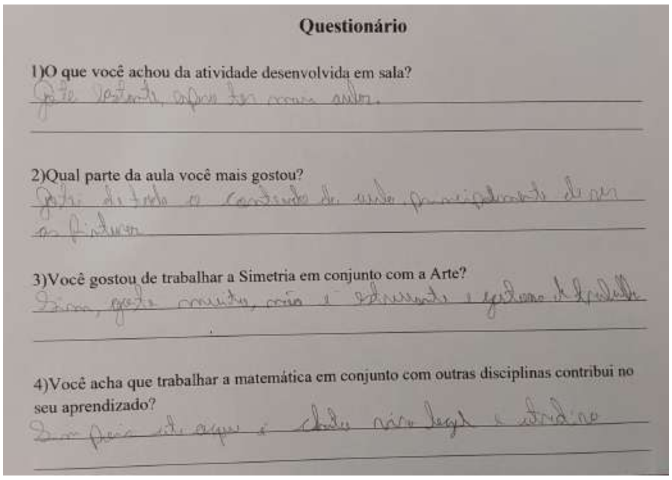
Sim, achei curioso.

4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?

Sim, da pra tirar varias novas informações curiosas.

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.35 – Questionário - Respostas dos Alunos (VI)



Questionário

1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?

[illegible]

2)Qual parte da aula você mais gostou?

[illegible]

3)Você gostou de trabalhar a Simetria em conjunto com a Arte?

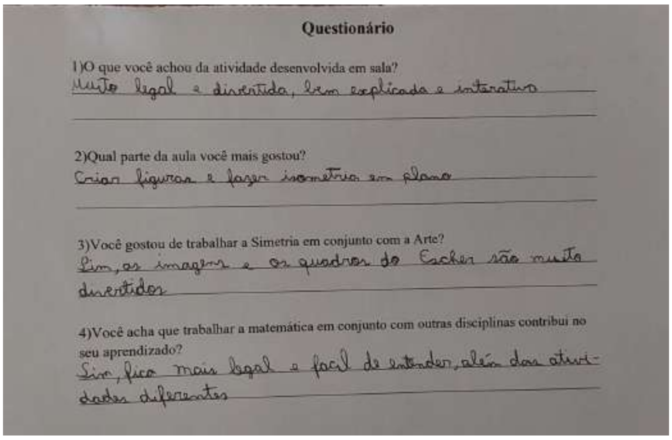
[illegible]

4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?

[illegible]

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.36 – Questionário - Respostas dos Alunos (VII)



Questionário

1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?

Muito legal e divertida, bem explicada e interativo

2)Qual parte da aula você mais gostou?

Criar figuras e fazer isometria em plano

3)Você gostou de trabalhar a Simetria em conjunto com a Arte?

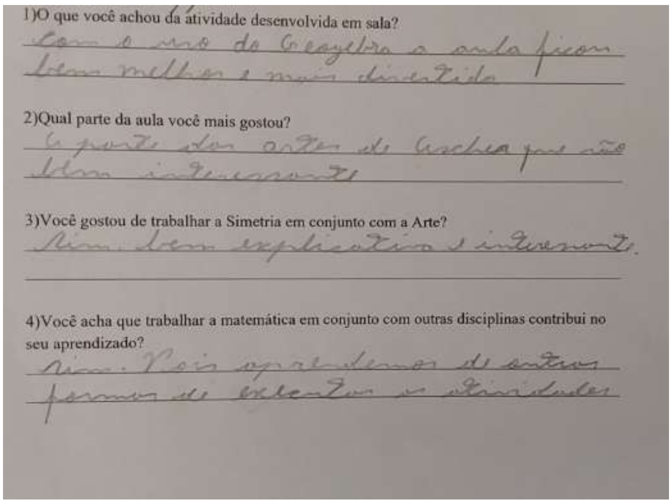
Sim, as imagens e os quadros do Escher são muito divertidos

4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?

Sim, fica mais legal e facil de entender, além das atividades diferentes

Fonte: Elaborada pela Autora

Figura 7.37 – Questionário - Respostas dos Alunos (VIII)



1)O que você achou da atividade desenvolvida em sala?

Com o uso do Geogebra a aula ficou bem melhor e mais divertida

2)Qual parte da aula você mais gostou?

A parte das artes de Escher que são bem interessantes

3)Você gostou de trabalhar a Simetria em conjunto com a Arte?

Sim. bem explicativo e interessante.

4)Você acha que trabalhar a matemática em conjunto com outras disciplinas contribui no seu aprendizado?

Sim. Pois aprendemos de outras formas de executar as atividades

Fonte: Elaborada pela Autora

As respostas obtidas e a participação dos alunos na aula elucidam o quanto é importante promover situações no ambiente escolar em que os estudantes tenham papel ativo no processo de ensino e aprendizagem, além de considerar as experiências e a bagagem cultural de cada educando, sendo aspectos fundamentais para eles estabelecerem relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, pois assim os conteúdos abordados passam a ser visualizados em situações cotidianas, resultando em uma aprendizagem significativa. Vale destacar que com as obras de Escher, eles puderam visualizar as simetrias em diversas formas e perspectivas, fazendo com que a aprendizagem não fosse limitada e nem restrita.

Nesse sentido, desenvolver o plano de aula em uma escola da Educação Básica, foi primordial para analisar na prática toda a teoria estudada até o presente momento, pois conseguimos compreender que de fato o diálogo entre a Simetria e a Arte, ou seja, a interdisciplinaridade entre a Arte e a Matemática, rompe com paradigmas de que a segunda não se associa com outras disciplinas. Essa situação enfatiza o quanto é importante desenvolver atividades que contribua para o criação de novos significados e a construção do conhecimentos, ao mesmo tempo que estimula o envolvimentos dos alunos, visto que pode instigar o interesse deles nas discussões propostas em sala, incentivando uma ruptura com a aula tradicional de matemática.

Outrossim, a partir da discussão em classe e da interação dos estudantes, ficou notório que essa conexão vai além da aprendizagem dos conceitos e propriedades da matemática, também auxilia no desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade, incentiva os alunos a refletirem sobre a realidade no qual estão inseridos, e consequentemente favorece a formação integral do estudante, contribuindo para o crescimento intelectual e individual de cada aluno, e para isso vale reforçar a ação dos estudantes em auxiliar os demais colegas que estavam com dificuldades.

Adicionalmente, com a aula, observamos que os alunos compreenderam a teoria vinculada a Simetria, suas propriedades e características, principalmente a percepção intuitiva de invariância de figuras, ou seja, os educandos entenderam que figuras simétricas permanecem inalteradas mesmo ao sofrer um conjunto de transformações.

Além disso, ao identificar as dificuldades dos alunos referente ao uso do Geogebra, foi possível repensarmos a execução da atividade e ajustá-la considerando as particularidades da turma, visto que só assim os estudantes puderam desenvolvê-la e a aprendizagem ocorreu de fato. Mesmo com as adaptações, a aula atingiu os objetivos propostos no plano de aula (seção 7.1), os educandos mostraram grande interesse na atividade proposta e em utilizar o Geogebra, muitas das criações foram surpreendentes, criativas e superaram as expectativas.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao abordar a Simetria na Educação Básica a partir de uma perspectiva artística, é possível refletir sobre a própria prática docente, não só por questionar qual conceito da simetria está sendo discutido em sala de aula, mas também como usufruir da interdisciplinaridade entre a arte e a matemática sem que uma disciplina seja apenas um instrumento didático para a outra, mas sim trabalhá-las em conjunto, a fim de tornar a aprendizagem mais significativa e incentivar o desenvolvimento integral do estudante. Há diversas formas para proporcionar o estudo da simetria; nesta pesquisa optou-se em abordá-la por intermédio do diálogo com a arte, utilizando as obras de Escher como referência.

Nesse ínterim, esse Trabalho de Conclusão de Curso, englobando tanto o TCC1 como o TCC2, procurou discutir como desenvolver essas relações no ambiente escolar e quais as consequências que a conexão entre arte e matemática acarreta para o ensino. Por intermédio da análise teórica da simetria e da atividade prática, conseguimos concluir que, efetivamente, a interlocução destas duas áreas de conhecimento contribuem para o processo de ensino e aprendizagem, não apenas no âmbito da matemática, como também em relação a outras disciplinas. Isso decorre pois o estudo não se limita exclusivamente aos conceitos vinculados à simetria, mas abrange diversas temáticas, que também são importantes para outras áreas.

Dessa forma, uma das decorrências da abordagem discutida neste trabalho, é a ampliação da compreensão que os estudantes apresentam da própria matemática, contribuindo para que eles possam refletir sobre a interconexão da mesma com outras esferas de conhecimento, e consequentemente com vivências cotidianas. Além disso, a atividade prática possibilitou explorar outras circunstâncias fundamentais para a prática docente, como a importância de adaptar os planos de aulas conforme as especificidades dos alunos, mas, principalmente, de refletir sobre os conceitos e as perspectivas que almejamos abordar em sala de aula, uma vez que estas influenciam diretamente nas dinâmicas em sala, na interação dos estudantes nas atividades propostas, e por conseguinte no processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALVES, Claudia Maria Fiuza. **O Estudo da Simetria Através da Arte de Maurits Cornelis Escher**. 2014. Orientador: Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

ARAÚJO, Abraão Juvêncio; GITIRANA, Verônica. Construção do Conceito de Simetria Rotacional Através de um Ambiente no Cabri-Géomètre: Análise de uma Seqüência Didática. In: 23ª Reunião da ANPEd, 2000, Caxambu - MG. Anais da 23ª Reunião da ANPEd, 2000.

BARROS, Priscila Bezerra Zioto. **A arte na matemática**: contribuições para o ensino de geometria. 2017. Orientador: Prof. Dr. José Roberto Boettger. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Docência para a Educação Básica, - Mestrado Profissional, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP. Bauru, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação.**Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 10 jul. 2023

CANELLA, Andrea Cardoso. **Matemática, Tecnologia e Arte**: uma proposta de ensino de Isometrias para a Educação Básica. 2021. Orientadora: Prof. Tatiana Fernandes Sodero. Tese de Mestrado. PUC-Rio.

CARVALHO, Alda; *et al*. Pisando arte e matemática em Lisboa. Convocarte. **Revista de Ciências da Arte**, v. 2, p. 136-159, 2016.

CAVALHEIRO, Rosemary Borin; DE ALENCAR, Edvonete Souza. O ensino de simetria no Ensino Fundamental: possibilidades para uma proposta investigativa. **Revista Diálogos em Educação Matemática**, v. 1, n. 1, Fluxo Contínuo, 2022.

CHAVES, Diego Romeira Cigaran. **A matemática é uma arte**: uma proposta de ensino explorando ligações entre arte e a matemática. 2008. Orientadora: Profaª. Drª. Marilaine de Fraga Sant' Ana. Trabalho de Conclusão de Curso -Monografia (Curso Graduação de Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

COSTA, Deyvison Eduardo Valadares da. **Isometrias na reta e no plano**. 2020. Orientador: Prof. Dr. Juliano Soares A. Dias. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Matemática. Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional. Ouro Preto, 2020.

FLORENCIO, Mariele Parteli. **Transformações no Plano e Grupos de Simetria**.2011. Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini. Trabalho de Conclusão de Curso Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de São Carlos, 2011.

FLORES, Cláudia Regina. Descaminhos: potencialidades da arte com a educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 30, p. 502-514, 2016.

FLORES, Cláudia Regina; KERSCHER, Mônica Maria. Sobre Aprender Matemática com a Arte, ou Matemática e Arte e Visualidade em Experiência na Escola. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 3, p. 22-38, abr. 2021. DOI https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a02. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/FyCY44jtx8YqB97MxGbSh8s/?lang=pt>. Acesso em: 09 jul. 2023

GUSMÃO, Lucimar Donizete. **Educação matemática pela arte:** uma defesa da educação da sensibilidade no campo da matemática. 2013. 152 f. Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática. Curitiba, 2013.

ISIDRO, Maria Eduarda Nunes. **Simetria e obras de arte de Escher**: religando saberes nas séries iniciais do ensino fundamental II na perspectiva de Edgar Morin. Orientador: Profª. Mestre Flávia Aparecida Bezerra da Silva .Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, Monteiro, 2022.

LOPES, Lidiane Schimitz; ALVES, Gilson Leandro Pacheco; FERREIRA, André Luis Andrejew. **A Simetria por meio de uma proposta investigativa:** História E Implicações Culturais. In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática-2013. 2013.

MACIEL, Aníbal de Menezes. **Possibilidades pedagógicas do uso da imagem fotográfica no âmbito do livro didático de Matemática**. Orientador: Profª.Drª. Rogéria Gaudencio do Rêgo. Tese de Doutorado. (Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

MATOS, Joana Gaudêncio. **Simetria:** na interface entre a arte e a matemática: de que forma as aprendizagens sobre novas culturas, poderão contribuir para o desenvolvimento do conceito de simetria?. 2011. Orientador: Prof. João Pires. Tese de Doutorado. Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal.

MIR, Michel. **Uma abordagem de isometria em sala de aula**. 2014. Orientador: Profª. Drª. Évelin Meneguesso BarbarescoDissertação de Mestrado Profissional- PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. São José do Rio Preto, 2014.

NASCIMENTO, Eimard GA do. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. In: **Conferência Latinoamericana de Geogebra**, 2012, Uruguai. Atas da Conferência Latinoamericana de Geogebra, 2012, p. 110-117.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP). In: IMPA

(Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 12 jul. 2023.

PASQUINI, Regina Célia Guapo; BORTOLOSSI, Humberto José. **Simetria:** história de um conceito e suas implicações no contexto escolar. Editora Livraria da Física, 2015.

PASQUINI, Regina Célia Guapo; BORTOLOSSI, Humberto José. O QUE É SIMETRIA? DIFERENTES USOS DA PALAVRA AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 6-17, 2016.

PINATTI, Adeline Laudicéia ; LORIN, João Henrique . **SIMETRIAS NAS OBRAS DE ESCHER**: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO POR MEIO DA ARTE. In: IX EPCT, 2014, Campo Mourão. Anais-IX EPCT, 2014.

ROSA, Guilherme Henrique Custódio et al.. Desvendando a arte de escher por meio das isometrias. Anais do **VIII ENALIC... Campina Grande: Realize Editora**, 2021. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/84694>. Acesso em: 20 jul. 2023

ROSSI, Izabela Caroline. **Aprendendo Isometria com mosaicos**. 2014. Orientador: Orientador: Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado. Dissertação de Mestrado Profissional- Programa de PósGraduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São José do Rio Preto, 2014.

SABBA, Claudia Georgina; CAVALCANTE, Clécio Esteves. A arte pelo olhar da isometria e da geometria plana na prática: dos espelhos aos ângulos. In: **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática**, 2015, Chiapas. Anais da XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática. ICMI: ICMI, 2015. v. único.

SALES, Ivanilton de Jesus. **Isometrias no Plano:** Uma Abordagem Aplicável ao Ensino Básico. 2017. Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia, Salvador - Bahia, 2017.

SANTOS, Luciana Ferreira dos; TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Pintar, Dobrar, Recortar e Desenhar: o ensino da Simetria e Artes Visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 291-310, 2012.

SANTOS, Maria Madalena. A Matematica da Arquitetura Ideal. In: **VII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design 18o Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**. 2007.

SILVA, Alberto Heleno Rocha. **Simetrias para o ensino de equações e funções na Educação básica**. Orientador: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo. Tese de Doutorado. (Dissertação de Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014.

SILVA, Renato Oliveira. **Isometrias**. 2016. Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

SILVA, Ubiratan Barbosa. **Contribuições do Software Geogebra para a aprendizagem sobre simetria no 1º ano do Ensino Médio**. Orientador: Profª. Ma. Regina Coelly Mendes da Silva. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2019.

TINOCA, Maria João. **Isometrias**. 2012. Orientador: Prof. Dr. José Carlos Santos. Tese de Mestrado- Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Portugal, 2012.

ZAGO, Hellen da Silva; FLORES, Cláudia Regina. Uma proposta para relacionar arte e educação matemática. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 13, n. 3, p. 337-354, 2010.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil