

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**ABORDAGENS DE FLUXOS EM REDES UTILIZANDO
OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E PROGRAMAÇÃO
ESTOCÁSTICA NA GESTÃO FINANCEIRA DO
CAIXA DE EMPRESAS DE MATERIAL ESCOLAR**

GIOVANNI MARGARIDO RIGHETTO

TESE DE DOUTORADO

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**ABORDAGENS DE FLUXOS EM REDES UTILIZANDO
OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E PROGRAMAÇÃO
ESTOCÁSTICA NA GESTÃO FINANCEIRA DO
CAIXA DE EMPRESAS DE MATERIAL ESCOLAR**

Giovanni Margarido Righetto

**Tese de doutorado apresentada ao
programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Produção da Universidade
Federal de São Carlos, como parte dos
requisitos para a obtenção do título de
Doutor em Engenharia de Produção.**

Orientador: Prof. Reinaldo Morabito

Co-orientador: Prof. Douglas Jose Alem Junior

SÃO CARLOS

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R571a Righetto, Giovanni Margarido
Abordagens de fluxos em redes utilizando
otimização robusta e programação estocástica na gestão
financeira do caixa de empresas de material escolar
/ Giovanni Margarido Righetto. -- São Carlos :
UFSCar, 2016.
148 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2015.

1. Fluxo de caixa. 2. Modelo de fluxos em rede.
3. Otimização robusta. 4. Otimização estocástica. 5.
Programação inteira mista. I. Título.

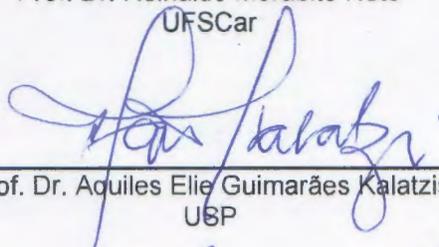


Folha de Aprovação

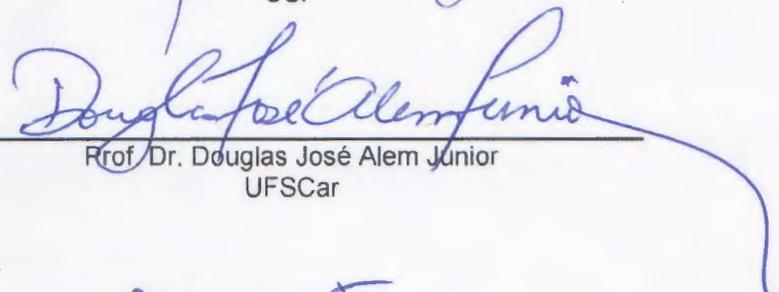
Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Giovanni Margarido Righetto, realizada em 16/12/2015:



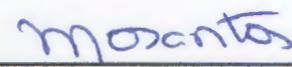
Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto
UFSCar



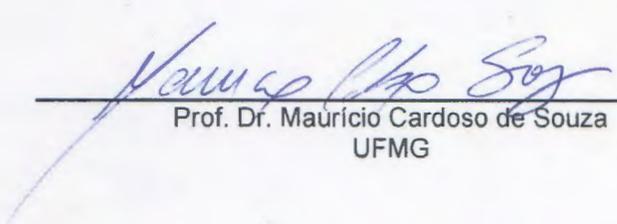
Prof. Dr. Aquiles Elie Guimarães Kalatzis
USP



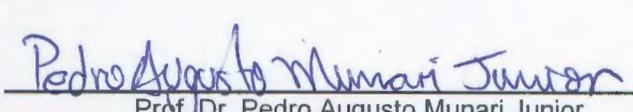
Prof. Dr. Douglas José Alem Junior
UFSCar



Prof. Dr. Maristela Oliveira dos Santos
USP



Prof. Dr. Maurício Cardoso de Souza
UFMG



Prof. Dr. Pedro Augusto Munari Junior
UFSCar

AGRADECIMENTOS

Lembro perfeitamente quando escolhi o poema de Fernando Pessoa para estampar uma das páginas iniciais da minha dissertação de mestrado. Faço questão de reproduzi-lo nessa página de agradecimento:

“De tudo ficaram três coisas

A certeza de que estava sempre começando

A certeza de que era preciso continuar

E a certeza de que seria interrompido antes de terminar

Fazer da interrupção um caminho novo

Fazer da queda um passo de dança

Do sonho uma ponte

Da procura um encontro”

Depois de catorze anos do término do meu mestrado, um dos meus sonhos torna-se realidade. Fui interrompido, criei um novo caminho e tinha certeza de que continuaria e continuei. Esse doutoramento foi um caminho difícil, com sacrifícios de todos os lados, principalmente o familiar. Sei que fiquei ausente em muitos momentos importantes para as pessoas mais importantes da minha vida, meus filhos Giovanni e Gabriel e de minha esposa Solange. Mas, sem o apoio deles, nunca, e digo isso sem nenhuma sombra de dúvida, conseguiria realizar esse sonho. Obrigado por vocês existirem e me suportarem durante esses anos de intenso trabalho e estudos. Vou recompensar vocês com amor, alegria e, acima de tudo, parceria em todos os seus sonhos e projetos de vida.

Douglas, suas críticas sempre recheadas de sabedoria e profundo conhecimento sobre os temas tratados nessa tese me auxiliaram a enriquecer as minhas análises e me fizeram alcançar um outro patamar do conhecimento científico em pesquisa operacional. A incerteza faz parte da nossa vida e agora está mais presente na minha vida profissional. Muito obrigado pelo seu valioso apoio.

Prezado Professor Reinaldo Morabito, não tenho palavras para agradecer a você o apoio e incentivo durante esses anos de convivência. Sempre com paciência e orientações preciosas que me ajudaram a concluir um doutorado. Obrigado por entender e me acolher como seu aluno de doutorado, mesmo sabendo que eu não teria tempo integral para o desenvolvimento dessa tese. Com suas orientações, fui capaz de desenvolver habilidades que serão muito úteis na

insaciável curiosidade que rege a minha conduta na pesquisa científica. Mais uma vez, obrigado, meu amigo Reinaldo.

Quero agradecer a todos os meus professores e colegas do curso de Pós-Graduação da Engenharia de Produção da UFSCar e, em especial, ao Bruno e ao Jonathan, que dedicaram parte do seu tempo e me auxiliaram na implementação dos modelos utilizados nessa tese.

Quando um telhado se perde, ganhamos a visão das estrelas. Perder o que não queria pode ser a oportunidade da conquista de algo que nunca foi imaginado. Nem tudo depende do tempo, mas de atitude e coragem. Eu tenho orgulho dessa conquista! Obrigado pela vida por me proporcionar essa vitória.

RESUMO

O gerenciamento do fluxo de caixa tático é fundamental na gestão financeira de uma empresa ou organização. Vários modelos matemáticos para planejar o fluxo de caixa foram propostos nas últimas décadas. Na sua maioria, os modelos são determinísticos e, inicialmente, tratados como uma extensão da fórmula do lote econômico de compra. Esta tese aborda o problema da gestão do caixa sob a ótica de modelos de otimização presentes na literatura da Pesquisa Operacional. O objetivo é estudar, desenvolver e aplicar formulações baseadas em programação matemática e fluxos em rede, considerando incertezas nos parâmetros, para apoiar as decisões envolvidas no gerenciamento do fluxo de caixa. Um estudo de caso é desenvolvido numa empresa típica do setor de material escolar, para analisar a adequação e o potencial das abordagens propostas em empresas deste setor. Para tal, são utilizados métodos de otimização robusta e programação estocástica para tratar as incertezas nos parâmetros do problema de maximização dos recursos financeiros disponíveis no final de um horizonte de planejamento multi-período e finito do caixa da empresa. As abordagens propostas são baseadas num modelo determinístico, que utiliza uma rede de fluxos para maximizar o retorno do caixa no final do período considerado. Para o tratamento das incertezas presentes nos parâmetros que definem os fluxos de recursos no tempo, são utilizadas a abordagem de otimização robusta de análise de pior caso intervalar e a abordagem de programação estocástica de dois estágios com recurso neutra ao risco e de aversão ao risco – minimax com arrependimento e valor em risco condicional. Não foram encontrados outros estudos na literatura seguindo esta linha de pesquisa. Conforme mostrado nesta tese, as abordagens propostas podem gerar resultados promissores para a gestão do fluxo de caixa de empresas de material escolar e outros, com contribuições significativas nas tomadas de decisões de um gestor financeiro, principalmente quanto ao tratamento das incertezas nos parâmetros do fluxo de caixa.

Palavras-chaves: Fluxo de caixa, modelo de fluxos em rede, otimização robusta, otimização estocástica, programação inteira mista.

ABSTRACT

The tactical management of cash flow is critical in financial management of a company or organization. Several mathematical models for planning cash flow have been proposed in recent decades. Most of the models are deterministic and initially treated as an extension of the economic order quantity. This thesis addresses the cash management problem from the perspective of optimization models present in the Operations Research literature. The aim is to study, develop and apply formulations based on mathematical programming and network flows, considering uncertainties in parameters, to support the decisions involved in managing the cash flow. A case study was developed in a typical company of the stationery sector to analyze the suitability and potential of the proposed approaches for companies of this sector. For that, this thesis implement robust optimization and stochastic programming to address the parameters uncertainties in the problem of maximizing the available financial resources at the end of a multi-period and finite planning horizon of the company's cash flow. The proposed approaches are based on a deterministic model which uses a network flow to maximize the cash flow return at the end of the period. For the treatment of uncertainties in the parameters that define the flow of financial resources in time are used the robust optimization approach of worst case interval and the stochastic programming approach – risk neutral, minimax with regret and conditional value-at-risk. There were no other studies in the literature following this line of research. As shown in this thesis the proposed approaches can generated promising results for the management of cash flow in companies of the stationery sector and others, with significant contributions in financial decision-making department, particularly for the treatment of uncertainties in the parameters of the cash flow.

Keywords: Cash Flow, network flows model, robust optimization, robust stochastic optimization, mixed integer programming.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 Previsão da taxa de câmbio R\$/US\$	3
Tabela 2.1 Comparativo entre projeções de taxa de câmbio na pesquisa Focus do Banco Central vis-a-vis Ptax 800 apurada pelo Banco Central	21
Tabela 3.1. Número de dias úteis por período (mensal)	48
Tabela 3.2 Taxa de juros em base anual para cada mês do período considerado	49
Tabela 3.3 Taxa de juros mensais por ativo	50
Tabela 3.4 Entradas e saídas de caixa em milhares de reais	51
Tabela 4.1 Relatório Focus do Banco Central - Taxa de Câmbio - R\$/US\$ - Média do ano - Período de 06/09/2013 a 30/09/2013 para 31/12/2014	71
Tabela 4.2 Volatilidade da taxa de câmbio em percentuais para o período considerado	72
Tabela 4.3 Cálculo das entradas de caixa em dólares americanos	74
Tabela 4.4 Entradas de caixa em dólares convertidas para reais aplicado os desvios nas taxas de câmbio R\$/US\$	75
Tabela 4.5 Entradas totais de caixa (mercado interno e externo) em reais	76
Tabela 4.6 Resultados do modelo de otimização robusta	82

Tabela 4.7 Valor médio da função objetivo robusta em função de Γ_i	83
Tabela 4.8 Resultados do modelo de otimização robusta com \tilde{w}_{ij} incertos	88
Tabela 4.9 Valor médio da função objetivo robusta em função de Γ_i com \tilde{w}_{ij} incertos	90
Tabela 4.10 Resultados do modelo de otimização robusta com \tilde{w}_{ij}, \hat{s}_i e \hat{d}_i incertos	92
Tabela 4.11 Valor médio da função objetivo robusta em função de Γ_i com \tilde{w}_{ij}, \hat{s}_i e \hat{d}_i incertos	93
Tabela 4.12 Valores gerados aleatoriamente para as entradas e saídas de caixa	94
Tabela 4.13 Resultados do modelo de otimização robusta com entradas e saídas de caixa aleatórias	95
Tabela 4.14 Resultados do modelo de otimização robusta com a inclusão da CPMF	96
Tabela 5.1 Entradas e saídas de caixa (em milhares de R\$ e US\$)	109
Tabela 5.2 EVPI e VSS para o modelo neutro ao risco	111
Tabela 5.3 Indicadores estatísticos das soluções do modelo RN e WS (valores em milhares de reais)	112
Tabela 5.4 Indicadores estatísticos das soluções dos modelos RN e EEV (valores em milhares de reais)	113
Tabela 5.5 Frequência das soluções dos modelos propostos	113

Tabela 5.6	Frequência em % das soluções dos modelos propostos	114
Tabela 5.7	Resultados para o modelo RN (valores em milhares de reais)	114
Tabela 5.8	Resultados para o modelo Minimax (valores milhares de reais)	114
Tabela 5.9	Resultados para o modelo CVaR (valores em milhares de reais)	115
Tabela 5.10	Média das soluções estocásticas (valores em milhões de reais)	117
Tabela 5.11	Taxas de câmbio e entradas de caixa para o modelo de horizonte decrescente	122
Tabela 5.12	Taxas de câmbio e saídas de caixa para o modelo de horizonte decrescente	122

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Volatilidade da taxa de câmbio R\$/US\$ (Fonte: BM&FBovespa - www.bmfbovespa.com.br)	2
Figura 1.2. Previsão da taxa de câmbio R\$/US\$ para 31 de março de 2014	4
Figura 2.1 Rede de Fluxos entre as opções 1 e 2 nos períodos 1, 2, ..., n	16
Figura 2.2 Variação da taxa média mensal pós-fixada de juros para empréstimos a pessoa jurídica	22
Figura 3.1 Rendimento para o ativo com período de carência em função do valor investido	39
Figura 3.2 Valor mínimo para investimento no ativo com período de carência	40
Figura 3.3 O fluxo em rede com arcos reversos indicando os empréstimos e as aplicações com carência para o resgate	41
Figura 3.4 Resultado da solução ótima do modelo determinístico	53
Figura 3.5 Resultado da solução da tesouraria da empresa	55
Figura 4.1 Exemplo de factibilidade de solução na simulação de Monte Carlo	66
Figura 4.2 Exemplo de infactibilidade de solução na simulação de Monte Carlo	67
Figura 4.3 Exemplo de aumento de fluxo de recursos na simulação de Monte Carlo	68
Figura 4.4 Contratos de opções em aberto em 17 de fevereiro de 2014	70
Figura 4.5 Variação da Taxa média mensal (pós-fixada) das operações de crédito com recursos livres referenciais	

para taxa de juros - Pessoa jurídica	78
Figura 4.6 Série histórica do retorno do Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI) desde setembro de 1994	79
Figura 4.7 Trade-off entre o risco e o retorno das soluções robustas	82
Figura 4.8 Valor médio da função objetivo robusta	84
Figura 4.9 <i>Trade-off</i> entre o risco e o retorno das soluções robustas com distribuição normal	85
Figura 4.10 Valor médio da função objetivo robusta com distribuição normal	85
Figura 4.11 Resultado da solução ótima do modelo robusto com $\Gamma = 4$ e $\varphi^{sd} = 1\%$	87
Figura 4.12 <i>Trade-off</i> entre o risco e o retorno das soluções robustas com \tilde{w}_{ij} incertos	89
Figura 4.13 Valor médio da função objetivo robusta para a distribuição uniforme com \tilde{w}_{ij} incertos	90
Figura 4.14 Valor médio da função objetivo robusta para a distribuição normal com \tilde{w}_{ij} incertos	91
Figura 4.15 <i>Trade-off</i> entre o risco e o retorno das soluções robustas com \tilde{w}_{ij} , \hat{s}_i e \hat{d}_i incertos	93
Figura 4.16 Valor médio da função objetivo robusta para a distribuição uniforme com \tilde{w}_{ij} , \hat{s}_i e \hat{d}_i incertos	94
Figura 5.1. Análise de estabilização interna do teste de geração de cenários	107
Figura 5.2. Evolução dos duzentos cenários para a	

taxa de câmbio R\$/USD	107
Figura 5.3. Cenários para os doze meses do horizonte de planejamento do caixa	108
Figura 5.4 CFaR e CCFaR de um conjunto de soluções para o fluxo de caixa	110
Figura 5.5 Histograma das soluções do modelo RN	117
Figura 5.6 Histograma das soluções do modelo Minimax	117
Figura 5.7 Histograma das soluções do modelo CVaR, $\alpha = 0,7$	118
Figura 5.8 Histograma das soluções do modelo CVaR, $\alpha = 0,95$	118
Figura 5.9 Histograma das soluções do modelo CVaR, $\alpha = 0,99$	119
Figura 5.10 Rede com as variações de decisão de primeiro estágio e as entradas e saídas de caixa após a incerteza ser revelada	121
Figura 5.11 Rede com a solução do procedimento de horizonte rolante usando o modelo determinístico	124
Figura 5.12 Rede com a solução do procedimento de horizonte rolante usando o modelo RN	125

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO DA LITERATURA	8
2.1	MODELOS DE GESTÃO DO FLUXO DE CAIXA	9
2.2	MODELOS DETERMINÍSTICOS	10
2.2.1	Abordagem de programação linear ao financiamento de curto prazo	10
2.2.2	Modelo de períodos variáveis para decisões de gestão do caixa	11
2.2.3	Modelo de transbordo para decisões da gestão do caixa	13
2.2.4	Fluxos de caixa em redes generalizadas	14
2.3	AS FONTES DE INCERTEZAS	18
2.3.1	A taxa de câmbio	18
2.3.2	A taxa de juros	21
2.3.3.	A demanda	22
2.4	MODELOS DE OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA	23
2.4.1	Modelos de programação estocástica e fluxos em rede	24
2.4.2	Modelos de programação estocástica de dois estágios com recurso	25
2.4.3	A abordagem de programação estocástica neutra em relação ao risco (RN)	27
2.4.4	O valor da informação perfeita e da solução estocástica	29
2.4.5	Programação estocástica de aversão ao risco em dois estágios com recurso para o problema do fluxo de caixa	30
2.4.6	Programação estocástica de aversão ao risco em dois estágios com recurso para o problema do fluxo de caixa	30
2.4.7	O modelo de otimização de aversão ao risco do valor em risco	

	condicional (CVaR)	31
	2.4.8 Modelo de otimização robusta de análise de pior caso intervalar	32
3	MODELO DETERMINÍSTICO E APLICAÇÃO NO ESTUDO DE CASO	37
3.1	PROGRAMAÇÃO INTEIRA-MISTA (MIP) PARA O MODELO DETERMINÍSTICO	37
3.2	EMPRESA ESTUDADA	47
3.3	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	51
4	MODELO DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA	57
4.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO ROBUSTO	57
4.2	CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE VIOLAÇÃO DAS RESTRIÇÕES VIA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	65
4.3	INCERTEZA NOS DADOS	69
	4.3.1 Estimativas dos desvios relacionados às entradas e saídas de caixa	69
	4.3.2 Incerteza nos multiplicadores w_{ij}	77
4.4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS DO MODELO ROBUSTO	81
	4.4.1 Soluções robustas com incerteza nas entradas e saídas de caixa	81
	4.4.2 Soluções robustas com incerteza nos multiplicadores w_{ij}	88
	4.4.3 Soluções robustas com incerteza nas entradas e saídas de caixa para o planejamento tático do fluxo de caixa	91
	4.4.4 Análise de cenários alternativos	94
5	MODELOS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA PARA O PROBLEMA DO FLUXO DE CAIXA	98

5.1. MODELO DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA EM DOIS ESTÁGIOS NEUTRO AO RISCO PARA O PROBLEMA DO FLUXO DE CAIXA	98
5.2 MODELO MINIMAX COM ARREPENDIMENTO	102
5.3 MODELO DE OTIMIZAÇÃO DO VALOR EM RISCO CONDICIONAL (CVAR)	103
5.4 GERAÇÃO DE CENÁRIOS PARA A TAXA DE CÂMBIO	104
5.4.1 Simulação de Monte Carlo utilizando o Movimento Geométrico Browniano	105
5.4.2 Geração dos cenários para as entradas e saídas de caixa via simulação de Monte Carlo	106
5.5 RESULTADOS COMPUTACIONAIS	108
5.5.1 EVPI e VSS	111
5.5.2 Apresentação dos resultados e estatísticas dos modelos RN e de aversão ao risco	113
5.5.3 Horizonte decrescente para o problema do fluxo de caixa	120
6 CONCLUSÕES	127
REFERÊNCIAS	131
ANEXO I - CONCEITOS ENVOLVENDO OS MODELOS DE FLUXOS EM REDE	142
ANEXO II - O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	145
ANEXO III – MOVIMENTO BROWNIANO	147

1. INTRODUÇÃO

Na gestão financeira, o planejamento tático do fluxo de caixa é fundamental em uma empresa para se maximizar os recursos disponíveis e minimizar as despesas financeiras decorrentes das necessidades de recursos de terceiros, quando necessário. As empresas dedicam particular atenção para os superávits e déficits de caixa, pois podem aplicar os recursos em títulos negociáveis, ou então obter financiamentos em caso de déficit de caixa (GITMAN, 1997). Além disso, o orçamento de caixa permite ao administrador financeiro uma visão dos momentos de superávit ou déficit de recursos financeiros ao longo de um determinado período de tempo.

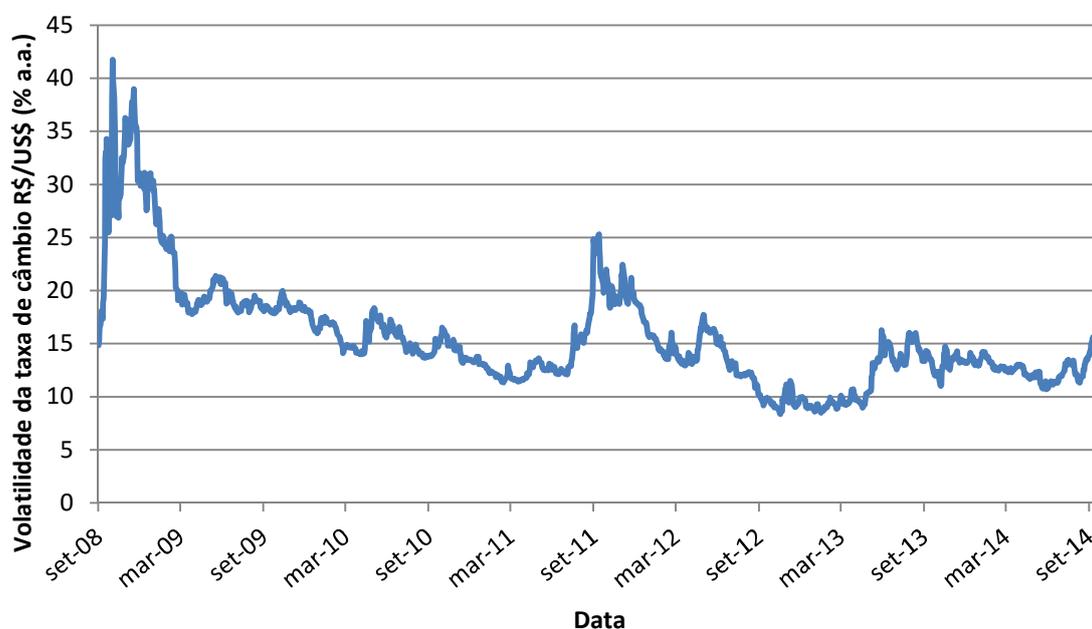
O principal objetivo desta tese é propor formulações matemáticas baseadas em programação linear inteira mista, otimização robusta e programação estocástica, para apoiar decisões na gestão do caixa de empresas de material escolar em um ambiente com incerteza nos parâmetros que definem esse fluxo. O trabalho foi motivado por um caso estudado em uma típica empresa deste setor. Analisa-se e compara-se os resultados obtidos entre um modelo determinístico proposto e modelos de otimização robusta e programação estocástica propostos para subsidiar o tomador de decisão em relação ao *trade-off* entre risco e retorno de caixa. Os resultados desta tese auxiliam na tomada de decisão financeira de alocação de caixa entre alternativas de aplicação e captação de recursos financeiros de empresas do setor de material escolar, já que o ambiente econômico altamente instável gera a necessidade de abordagens de otimização em condições de incerteza na otimização do fluxo de caixa tático de uma companhia. Acredita-se que essas abordagens também podem ser úteis para empresas de outros setores econômicos com problemas de caixa similares.

As abordagens que consideram as incertezas nos parâmetros do fluxo de caixa podem indicar decisões de destinação e captação de recursos financeiros que as abordagens determinísticas nem sempre são capazes de prescrever, já que a maioria dessas abordagens utilizam parâmetros estáticos na definição do fluxo de caixa tático e que podem gerar distorções relevantes nas tomadas de decisões financeiras. É nessas condições de incerteza que a motivação do trabalho está principalmente inserida, procurando responder como os gestores financeiros projetam seus fluxos de caixa, buscando maximizar seus recursos monetários incertos num determinado horizonte de planejamento multi-período e finito. Para se projetar adequadamente o fluxo de caixa de uma organização, é essencial mapear todas as variáveis que influenciam as entradas e saídas de recursos. A principal fonte de entrada de caixa de uma

organização é a receita de vendas, sejam elas no mercado interno ou externo. A previsão de vendas de uma empresa geralmente é fornecida pelo departamento de *marketing*.

Receber da área de *marketing* as previsões desses faturamentos adequadamente é essencial para a gestão financeira do caixa. Porém, o comportamento das vendas não é determinístico e, dependendo das incertezas inerentes, faz-se necessária uma análise estocástica desse comportamento para uma previsão com maior efetividade. Esse comportamento estocástico é verificado, também, nas vendas para o mercado externo, que apresentam um importante componente de risco, que é a variabilidade da taxa de câmbio. Esta variabilidade pode provocar perdas financeiras relevantes para uma empresa do setor de material escolar, já que mais da metade do faturamento destas empresas pode ser proveniente de exportações e o dólar é a moeda de referência para essas vendas. Para ilustrar essa variabilidade da taxa de câmbio, observe a volatilidade histórica (desvio padrão histórico da taxa de câmbio R\$/US\$ - reais por dólar americano) para a taxa de câmbio na Figura 1.1. A Figura 1.1 mostra que desde 2008 a volatilidade da taxa de câmbio no Brasil está acima de 10%, com exceção do período de setembro de 2012 a abril de 2013.

Figura 1.1 Volatilidade da taxa de câmbio R\$/US\$ (Fonte: BM&FBovespa - www.bmfbovespa.com.br).



Para ilustrar a dificuldade em se trabalhar num ambiente com alta volatilidade da taxa de câmbio R\$/US\$, considere o boletim Focus do Banco Central do Brasil (<http://www.bcb.gov.br/?FOCUSRELMERC>). Em 2 de janeiro de 2013, esse relatório, que

reúne a previsão para vários indicadores econômicos, incluindo a taxa de câmbio, de mais de 100 instituições financeiras brasileiras, apontava a previsão para essa taxa de câmbio conforme a Tabela 1.1.

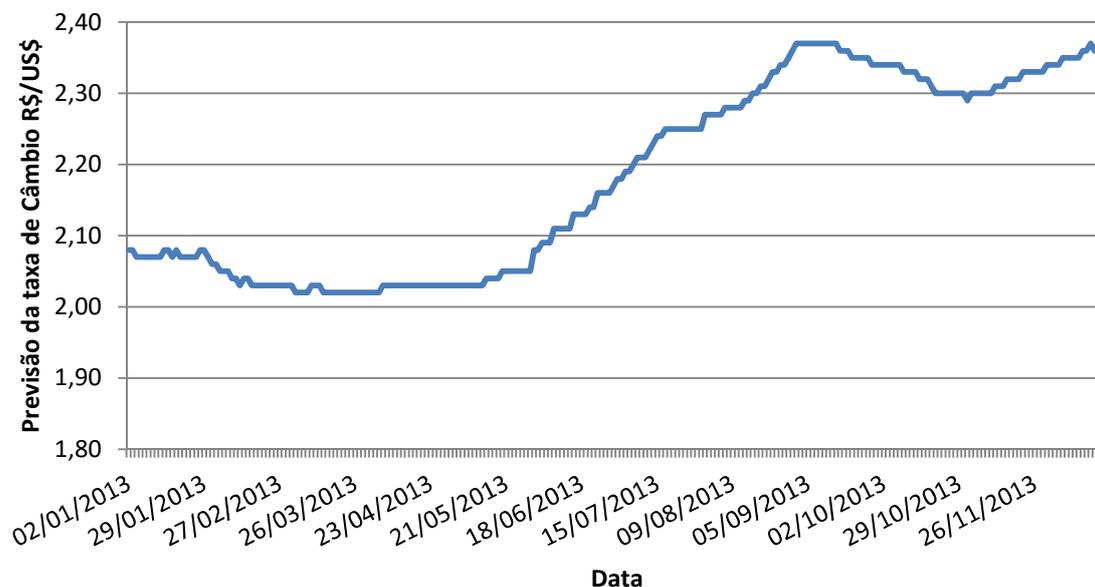
Tabela 1.1 Previsão da taxa de câmbio R\$/US\$.

Data da Previsão	Mês/Ano	R\$/US\$
02/01/2013	abr/13	2,07
	mai/13	2,07
	jun/13	2,08
	jul/13	2,07
	ago/13	2,07
	set/13	2,07
	out/13	2,08
	nov/13	2,08
	dez/13	2,08
	jan/14	2,08
	fev/14	2,08
	mar/14	2,08

Fonte: Banco Central do Brasil (2013)

Entretanto, com o decorrer do tempo, outras previsões foram sendo realizadas e a Figura 1.2 apresenta o quanto as projeções variaram no decorrer do ano de 2013 para a data de 31 de março de 2014. Note que em 02 de janeiro de 2013, a previsão média para a taxa de câmbio R\$/US\$ para 31 de março de 2014 era de 2,08. Já em 02 de setembro de 2013, essa previsão passou para R\$/US\$ 2,37, aproximadamente, o que equivale a 13,94% de aumento em relação a cotação prevista em 02 de janeiro de 2013. Portanto, nestas condições, nem mesmo grandes especialistas em projeções econômicas conseguem prever com acurácia a taxa de câmbio para uma determinada data. Como a taxa de câmbio sofre a influência de inúmeras variáveis, os modelos de previsões das taxas de câmbio ainda estão em evolução e podem gerar distorções significativas nos dados previstos.

Figura 1.2. Previsão da taxa de câmbio R\$/US\$ para 31 de março de 2014 realizadas em diferentes datas anteriores (Fonte: Banco Central do Brasil).



Uma outra fonte de incerteza importante nos recebimentos de recursos financeiros são os erros de previsão da demanda dos clientes internos e externos. As projeções de vendas podem ser efetuadas de duas formas básicas (GITMAN, 1997). A primeira delas é a previsão externa, que se baseia nas relações observadas entre as vendas da empresa e alguns indicadores econômicos, como o PIB e a renda pessoal disponível. Essa abordagem pode ser utilizada já que a atividade econômica nacional está intrinsecamente relacionada às vendas futuras das companhias. A segunda forma de se fazer previsões de vendas baseia-se nas previsões internas, que são elaboradas, principalmente, pelas estimativas dos vendedores quanto ao desejo de seus clientes de efetivarem as compras para o período de análise considerado. Os gerentes de vendas consolidam as informações dos vendedores com suas habilidades e conhecimentos em relação ao negócio e projetam as vendas futuras. Porém, os desvios entre o que foi previsto e o que vai se efetivar nos períodos futuros podem provocar distorções importantes nas entradas de caixa previstas, baseadas nessas projeções de demanda.

Com a projeção das vendas, é possível estabelecer as condições e previsões das necessidades de compras de matérias-primas, previsão de desembolsos com impostos, pessoal, marketing, investimentos (compra de equipamentos, ampliação da planta industrial, entre outros) e necessidades de recursos de terceiros, caso as receitas de vendas não sejam suficientes para gerar saldo superavitário durante o período analisado. Nesse sentido, após a previsão das entradas e saídas de caixa, é possível obter o fluxo líquido de caixa (GITMAN, 1997).

Somando-se o saldo inicial de caixa com o fluxo líquido de caixa, obtém-se o saldo final de caixa, que pode ser um excedente ou uma falta de recursos monetários. Após a obtenção do fluxo líquido de caixa, inicia-se o processo de tomada de decisão quanto às aplicações ou captações de recursos financeiros.

Nessa tese, primeiramente foi desenvolvido um modelo básico determinístico para a gestão do caixa. Esse modelo básico, determinístico é uma extensão da formulação de fluxos em redes desenvolvida inicialmente por Golden *et al.* (1979) e melhorada por outros autores como, Pacheco e Morabito (2011). Nessa extensão são considerados os empréstimos bancários e a inserção de um conjunto de arcos que representam uma aplicação financeira em títulos negociáveis com dois ou mais períodos de carência. Esta característica é um avanço em relação aos modelos descritos da literatura que tratam o problema do gerenciamento do fluxo de caixa de uma empresa. O modelo determinístico tem uma aplicação prática importante quando as incertezas dos parâmetros do modelo não existem ou não são significantes como, por exemplo, no estudo realizado por Pacheco e Morabito (2011). No caso de situações com incertezas relevantes nos parâmetros do problema, como o comportamento da taxa de câmbio, o modelo determinístico pode não ser uma boa alternativa para gerar uma solução adequada ao problema apresentado.

Para analisar o problema de otimização do fluxo de caixa em condições de incerteza, a otimização robusta e a programação estocástica podem ser alternativas melhores. Os modelos de otimização robusta e programação estocástica propostos nesta tese para tratar as incertezas nos parâmetros do problema utilizam a fundamentação teórica desenvolvida por Bertsimas e Sim (2004), Mulvey *et al.* (1995) e Rockafellar e Uryasev (2000, 2002). A ideia central da tese é contribuir nos desenvolvimentos e no potencial das análises tanto de modelos determinísticos, quanto de modelos de otimização robusta e estocástica, na tarefa fundamental de estabelecer um orçamento de caixa para as organizações e facilitar sobremaneira a tomada de decisões financeiras, com foco em empresas do setor de material escolar e sob condições de incerteza.

Não foram encontrados outros estudos na literatura seguindo esta linha de pesquisa. Nos modelos de otimização robusta abordados nessa tese para o problema de fluxo de caixa da empresa do setor de material escolar, a garantia de factibilidade é obtida por uma análise de pior caso intervalar, minimax. Esta abordagem incorpora a incerteza nos parâmetros em um modelo de minimização do máximo desvio da variável aleatória (BERTSIMAS e SIM, 2003). Os modelos de programação estocástica nesta tese consideram, além da clássica abordagem de

programação estocástica de dois estágios com recurso, neutra em relação ao risco, também abordagens de programação estocástica de dois estágios com recurso de aversão ao risco tais como: i) minimax com arrependimento (Kouvelis e Yu, 1997); e ii) uma abordagem na qual o componente de risco considera a modelagem proposta por Rockafellar e Uryasev (2000), na qual os autores propõem minimizar o valor em risco condicional (CVaR – *conditional value-at-risk*). A técnica utilizada pelos autores calcula o valor em risco (VaR – *value-at-risk*) e, simultaneamente, minimiza o CVaR. De acordo com os autores, essa abordagem pode ser utilizada em vários segmentos do setor financeiro, inclusive em companhias do setor não-financeiro para avaliações financeiras que envolvem risco.

A metodologia empregada nesta tese envolve em parte pesquisa axiomática quantitativa normativa; é axiomática já que é orientada a modelos de problemas idealizados e é normativa porque também é baseada em modelos que prescrevem uma decisão para o problema (MORABITO e PUREZA, 2012). Nesse tipo de pesquisa, novos modelos de otimização ou variações de modelos existentes podem ser propostos para um problema idealizado, como é o caso dos modelos de fluxo de caixa aqui propostos. Também tem características da pesquisa empírica quantitativa, já que existe a preocupação de assegurar uma união entre as observações e ações da realidade e os modelos elaborados nessa realidade. Essa tese tem forte apelo de aplicação prática de técnicas de pesquisa operacional, já que tem foco no desenvolvimento e aplicação de modelos para testá-los em processos reais, que é uma característica da pesquisa empírica quantitativa.

Os passos metodológicos utilizados nessa tese seguem o procedimento padrão utilizado em estudos de pesquisa operacional (Arenales *et al.*, 2007): (i) definição do problema: escopo do problema em estudo, as decisões e os objetivos envolvidos e o modelo conceitual do problema; (ii) a construção do modelo: desenvolver um modelo matemático do problema através de relações matemáticas; (iii) solução do modelo: métodos de solução e algoritmos são utilizados para resolver o modelo, com utilização de *softwares* e *hardwares* computacionais; (iv) validação do modelo: verificar se o modelo proposto representa de forma apropriada o comportamento do sistema real; e (v) implementação da solução: testar e implementar a solução na prática da empresa ou organização, traduzindo os resultados do modelo em conclusões ou decisões.

Este texto está estruturado em seis capítulos. O Capítulo 2 apresenta a revisão da literatura relacionada aos modelos determinísticos, as fontes de incertezas do problema e os modelos de otimização sob incerteza. No Capítulo 3, é desenvolvido um modelo determinístico

linear inteiro misto para o problema de gestão do caixa de empresas do setor de material escolar e aplica-se o modelo para tratar situações com dados reais em um estudo de caso de uma empresa típica desse setor. Nesse capítulo também são apresentados os resultados computacionais e as análises desses resultados. No Capítulo 4, desenvolve-se um modelo equivalente robusto, baseado na abordagem de otimização robusta de pior caso intervalar desenvolvida por Bertsimas e Sim (2004), para o problema de gestão de caixa de empresas do setor de material escolar. Os resultados computacionais e análises dos impactos das incertezas nos parâmetros do modelo equivalente robusto também são apresentadas e avaliadas nesse capítulo. No Capítulo 5, desenvolve-se as modelagens de programação estocástica neutra ao risco e de aversão ao risco e são apresentados e analisados os resultados dessas abordagens para o problema do fluxo de caixa. Nesse capítulo, também é apresentada uma abordagem de programação estocástica com horizonte rolante para o problema do fluxo de caixa, como alternativa aos modelos de dois estágios com recurso, para aproximar uma situação multiestágios com recurso. O Capítulo 6 apresenta as conclusões e considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, incluindo discussões de perspectivas de pesquisas futuras.

2. REVISÃO DA LITERATURA

O gerenciamento do caixa lida com o uso eficiente dos ativos líquidos de uma companhia e foi uma das primeiras áreas de aplicação da programação matemática e da pesquisa operacional (MULVEY, 1994). Existe uma ampla literatura sobre técnicas de pesquisa operacional aplicadas a problemas relacionados à engenharia financeira. Alguns desses trabalhos podem ser encontrados em Ashford, Berry e Dyson (1988), Mulvey e Vladimirov (1992), Steuer e Na (2003), Geunes e Pardalos (2003), Gupta e Dutta (2011) e Pacheco e Morabito (2011). No gerenciamento do caixa, além de lidar com os problemas de obtenção de fontes de recursos financeiros, faz-se necessário definir as regras para o controle do nível do saldo de caixa e a administração de um conjunto de fatores que estão estruturados no tempo (BRIGHAM e HOUSTON, 2004; GITMAN, 1997; SETHI e THOMPSON, 1970; VAN HORNE, 1995; WELSCH, HILTON e GORDON, 1988).

Ao otimizar os processos financeiros, as semelhanças com o fluxo em redes é natural devido aos seus sistemas de fluxos de caixa serem inter-relacionados e possuírem parâmetros e variáveis com relações complexas e numerosas (CRUM , KLINGMAN e TRAVIS, 1979; GEUNES e PARDALOS, 2003; CRUM e NYE, 1981). Em particular, os modelos de gestão de fluxo de caixa podem ser formulados como modelos de fluxo em redes generalizadas, em que os fluxos em arcos da rede podem ter ganhos ou perdas, como em algumas redes de gasodutos que perdem fluxo devido a vazamento, ou algumas redes de manufatura que ganham fluxo devido a determinadas reações químicas (GOLDEN *et al.*, 1979; SRINIVASAN e KIM, 1986; CRUM *et al.*, 1979; MCBRIDE e O'LEARY, 1997).

Uma melhor capacidade de gerenciar os recursos de caixa promove, entre outros benefícios para a empresa, menor necessidade de financiamento dos investimentos, o que, por sua vez, reduz os custos financeiros de dar suporte à operação. Uma ferramenta flexível e eficaz para a gestão do fluxo de caixa, capaz de lidar com os problemas enfrentados pelos gestores financeiros nas tomadas de decisões, proporciona uma melhoria no processo de otimização da gestão dos recursos financeiros de uma organização. Na próxima seção é apresentada uma revisão da literatura relacionada aos modelos determinísticos de pesquisa operacional para gerenciamento do fluxo de caixa.

2.1 Modelos de gestão do fluxo de caixa

Segundo Souza e Barros (2000), existem diversas tentativas de se criar um modelo matemático que seja capaz de equilibrar o caixa de uma empresa, minimizar o custo de sua gestão ou, então, maximizar o valor de uma empresa. Os mesmos autores salientam que os modelos mais comumente encontrados tratam o caixa com um estoque e, por essa analogia, criam condições para a otimização do *trade-off* entre os custos de se manter caixa adicional e os relacionados a sua falta.

Baumol (1952) elaborou um modelo para o gerenciamento de caixa, no qual o tomador de decisão tinha duas alternativas para o dinheiro de uma companhia: investir os recursos em títulos negociáveis ou deixar o dinheiro parado em conta bancária sem remuneração, pronto para fazer frente aos desembolsos necessários para a condução dos negócios de uma companhia. Esses desembolsos acontecem de uma forma linear em unidades monetárias por período. As entradas de caixa ocorrem uma vez a cada período determinado. Ou seja, o tratamento que esse modelo atribui ao fluxo de dinheiro na companhia é exatamente àquele que se atribui quando da gestão dos estoques físicos de uma empresa. Como os fluxos entre os títulos negociáveis e o caixa podem ocorrer a qualquer tempo, porém com custos relacionados a essas transações, quanto maior o número de transações, maior o custo total dessas transações. Entretanto, existe outro custo associado a esse problema, que é o custo de oportunidade de não se aplicar os recursos em títulos negociáveis, desperdiçando, dessa forma, a remuneração que esses títulos proporcionam aos seus detentores.

Beranek (1963) e Scherr (1989) tratam o problema de fluxo de caixa considerando as entradas de caixa constantes e os pagamentos ocorrendo de forma concentrada em determinados períodos de tempo. O tratamento dado a esses modelos também utiliza a metodologia utilizada por Baumol (1952). Outros modelos que utilizam esse tipo de metodologia podem ser encontrados em Tobin (1956), Calman (1968) e Robicheck *et al.* (1965).

Os modelos de otimização para gestão do caixa podem ser divididos em duas grandes classes, segundo a previsibilidade dos elementos que constituem a gestão do caixa (ASHFORD *et al.*, 1988). Se os parâmetros envolvidos no processo de gestão do caixa podem ser bem estimados/determinados, os modelos são chamados de determinísticos. Por outro lado, se a incerteza é grande em relação às variáveis de decisão da gestão do caixa, com parâmetros assumindo valores aleatórios, esses modelos de otimização são estocásticos (probabilísticos). Nas próximas seções são apresentados os principais modelos determinísticos e estocásticos

encontrados na revisão bibliográfica dessa tese e utilizados em pesquisa operacional, inclusive modelos aplicados na gestão financeira.

2.2 Modelos Determinísticos

2.2.1 Abordagem de programação linear ao financiamento de curto prazo

Robichek *et al.* (1965) desenvolveram um modelo para a tomada de decisões de financiamento de curto prazo por meio da programação linear, abordando o fato de quanto e de quando obter recursos de um grupo de fontes de terceiros. Os autores desse modelo entendem que o objetivo básico do gestor da tesouraria de uma empresa é garantir recursos financeiros necessários à condução da estratégia de uma empresa de acordo com o orçamento de caixa. O gestor financeiro almeja atingir esse objetivo com um custo mínimo para a empresa (SETHI e THOMPSON, 1970), dadas as restrições dentro das quais ele tem de operar (ROBICHEK *et al.*, 1965). O primeiro passo desse modelo consiste na preparação do orçamento de caixa para cada período futuro. O objetivo desse orçamento é prever um déficit ou um superávit acumulado de caixa.

Para esse modelo, um saldo mínimo de caixa é especificado para todos os períodos. A partir dessa restrição, o gestor do caixa dispõe de um número de alternativas pelas quais o déficit acumulado de caixa pode ser financiado, ou o superávit de caixa pode ser investido no mercado financeiro. Essas alternativas necessitam ser avaliadas em suas características de custo e restrições intrínsecas à opção escolhida. As fontes de recursos de terceiros selecionadas pelos autores consistiram em: empréstimos amparados em uma linha de crédito, financiamento com recebíveis ou duplicatas, alongamento das contas a pagar ou prorrogação de pagamento para fornecedores ou, ainda, com empréstimo bancário.

A função objetivo do problema de programação linear indica como obter os fundos necessários indicados pelo orçamento de caixa ao custo mínimo total e está sujeita às restrições impostas pelas alternativas de financiamento. Os autores decidiram incorporar ao modelo fatores qualitativos derivados das alternativas de financiamento que carregam um custo não financeiro, que é a perda de confiança por parte dos credores no atraso dos pagamentos e as restrições impostas às operações da empresa pelos financiamentos a prazo (ROBICHEK *et al.*, 1965). Esses custos implícitos são proporcionais ao montante de recursos emprestados e, portanto, podem ser expressos por meio de taxas para cada período. Existe ainda um ajuste a ser feito por encerrar o modelo após o período considerado, ou, em outras palavras, uma

condição de encerramento de custo implícito ou crédito é atribuída nas situações em que as condições de início e de encerramento não são as mesmas. Quando o problema de programação linear multi-período estudado por Robichek *et al.* (1965) é resolvido, a estratégia financeira ótima é obtida para cada período do horizonte de planejamento em análise e são definidos, para cada período, os montantes ótimos de cada fonte de financiamento e do excedente de caixa a investir. Srinivasan e Kim (1986) colocam o modelo de Robichek *et al.* (1965) como tendo sido a base para diversos refinamentos subsequentes no tratamento do problema da gestão do caixa. Contudo, entendem que não foram tratados dois aspectos importantes do problema da gestão do caixa: as transações de investimento de curto prazo e as considerações sobre o saldo mínimo de caixa.

2.2.2 Modelo de períodos variáveis para decisões de gestão do caixa

Orgler (1969) destaca o aspecto temporal da gestão do caixa. O tempo é importante, uma vez que a maioria das variáveis que são determinadas com relação ao saldo de caixa é dependente do tempo. Muitas dessas decisões são feitas diariamente, então um modelo de gestão do caixa deve fornecer informações para a tomada de decisões numa base diária ou numa frequência alta. Concomitantemente, o modelo tem que cobrir o período de planejamento de caixa inteiro e incorporar todas as relações relevantes entre períodos. Orgler (1969) afirma ainda que as decisões da gestão do caixa não estão apenas inter-relacionadas entre os períodos de tempo sucessivos, mas também dentro de cada intervalo de tempo. Essas relações existentes intra-períodos necessitam de uma abordagem simultânea, ao invés de tratar por partes o conjunto de variáveis de decisão. O autor aponta que parte da necessidade de financiamento de certo período pode ser substituída pela redução nas saídas de caixa proporcionada por atraso em pagamentos ou na venda de títulos antes do seu vencimento, enquanto que alterações nas definições de saldo mínimo podem afetar tanto as decisões de financiamento quanto às de investimento.

Os dados necessários ao gerenciamento da conta de caixa de uma empresa incluem as vendas à vista, a cobrança das contas a receber, as compras, as fontes de financiamento de curto prazo e os rendimentos em aplicações financeiras de curto prazo. Essas informações são conhecidas apenas parcialmente e requerem o uso de previsões. Tais previsões introduzem um elemento de incerteza ao problema da gestão do caixa. Entretanto, esse elemento é relativamente sem importância devido à natureza de curto prazo do problema. Em resumo, a

complexidade da gestão do caixa advém do grande número de variáveis de decisão, de suas inter-relações e da alta frequência com que elas têm que ser simultaneamente determinadas (ORGLER,1969).

Orgler (1969) abordou o problema da gestão do caixa por meio de um modelo de programação linear multi-período, que inclui quatro tipos principais de variáveis de decisão: programação de pagamentos, financiamento de curto prazo, o saldo de caixa e transações com títulos para os quais tanto o montante quanto o vencimento são explicitamente definidos e, conseqüentemente, derivados do modelo. As características intertemporais do modelo estão baseadas em um planejamento de caixa anual dividido em dez períodos diários, cinco períodos de dez dias e dez períodos mensais. No modelo de Orgler (1969), são tratados sete tipos de restrições: os pagamentos, o financiamento de curto prazo, as vendas de títulos negociáveis, o saldo de caixa, o fluxo de caixa, o encerramento e os índices financeiros.

A função objetivo do modelo pode ser formulada de diversas maneiras. A alternativa escolhida por Orgler (1969) foi maximizar o valor das receitas líquidas obtidas a partir das transações de caixa durante o período de planejamento. Qualquer montante de receita gerado pelo modelo é imediatamente considerado para reinvestimento, ao mesmo tempo em que todo custo é financiado. Por conseqüência, pela adição dos retornos líquidos do início ao fim do período de planejamento, a função objetivo representa o valor da receita líquida do orçamento de caixa no horizonte de planejamento.

Essa abordagem considera o valor do dinheiro no tempo de uma maneira mais precisa do que poderia ser obtido pelo desconto de todas as receitas líquidas a uma taxa de desconto de curto prazo que, para fins práticos, seria muito difícil de estimar. A função objetivo inclui quatro tipos de variáveis de decisão: pagamentos, investimentos de curto prazo, vendas de títulos e financiamentos de curto prazo. Quanto às soluções dos exemplos resolvidos, Orgler (1969) concentrou-se em responder: (i) é possível chegar a mesma ou a uma solução melhor com a utilização de práticas correntes de negócios?; e (ii) qual o grau de sensibilidade dos resultados às mudanças nos dados de entrada?

Como resposta à primeira questão, a solução do modelo foi superior àquela obtida por tentativa e erro em todos os casos testados. Embora esse teste não prove que o modelo forneceu a melhor solução possível ao problema de gestão do caixa, ele demonstra que o modelo de programação linear sugerido é um aperfeiçoamento na prática corrente da gestão do caixa. Para a segunda questão, as duas principais conclusões são: primeiro, o modelo é mais sensível às

mudanças no custo e nos coeficientes de rendimento do que em alterações nos fluxos de caixa e nas compras. Segundo, os horizontes com duração inferior a um ano oferecem soluções quase idênticas aos horizontes anuais. Tais resultados são encorajadores já que o custo e os coeficientes de rendimento geralmente mudam menos que os fluxos de caixa.

2.2.3 Modelo de transbordo para decisões da gestão do caixa

Srinivasan (1974) utilizou-se da mesma abordagem desenvolvida por Orgler (1969) ao tratar o problema de gestão do caixa, porém formulou o problema como um modelo de transbordo. Modelos de transbordo de programação linear podem ser resolvidos eficientemente por meio de algoritmos específicos de fluxos em redes (SRINIVASAN *et al.*, 1986). A adaptação do modelo de transbordo ao problema de gestão do caixa faz com que os depósitos sejam tratados como origens de recursos e os mercados como aplicações. O modelo de transbordo aplicado à gestão do caixa visa minimizar o custo total de alocação das fontes de recursos às diferentes aplicações, mantendo a possibilidade da transferência de caixa entre as origens (SRINIVASAN, 1974).

A etapa inicial da modelagem da gestão do caixa como problema de transbordo inclui a tabulação das diversas origens e aplicações dos fundos com seu respectivo tempo, além da informação dos montantes e dos custos unitários envolvidos. Srinivasan (1974) comenta que a formulação de transbordo favorece o controle financeiro, por organizar os dados nos sistemas de informações gerenciais. O problema formulado por Srinivasan (1974) consiste em decidir de forma ótima sobre: a programação dos pagamentos para as compras previstas nos períodos determinados; as transações a fazer na carteira de títulos mantidos pela firma no início do período de planejamento; a opção sobre novos investimentos em títulos; e o uso da linha de crédito disponível.

Ao invés de partir para a formulação do problema da gestão do caixa como um problema de transbordo, para depois reformulá-lo como um problema de transporte, Srinivasan (1974) considerou ser mais fácil configurar diretamente a tabela de transporte. A solução ótima da abordagem de Srinivasan (1974) é basicamente a mesma daquela obtida por Orgler (1969). As pequenas diferenças são atribuídas à maneira com que os descontos e os encargos com juros são manipulados nas duas formulações (SRINIVASAN, 1974).

Ainda sobre a formulação de Srinivasan (1974), Golden *et al.* (1979) colocam como uma séria desvantagem ao uso do modelo o fato de que a capitalização dos juros e o

reinvestimento dos rendimentos obtidos não serem diretamente considerados. Devido a esse fato, o valor máximo da função objetivo fica subestimado. Essa desvantagem se intensifica na medida em que o horizonte de planejamento se estende.

Mais relevante ainda é o fato de que o modelo de Srinivasan (1974) pode indicar inviabilidade da solução em situações em que essa inviabilidade não existe. Golden *et al.* (1979) usam um fluxo de caixa com três períodos para exemplificar a ocorrência desse tipo de erro de conclusão gerada a partir do modelo de Srinivasan. No exemplo citado, os resultados obtidos com um aumento de 25% na demanda por caixa do terceiro período acusam inviabilidade. No entanto, se forem computados os rendimentos de juros nos três períodos, observa-se que são gerados fundos suficientes para o atendimento ao aumento da demanda (GOLDEN *et al.*, 1979).

2.2.4 Fluxos de caixa em redes generalizadas

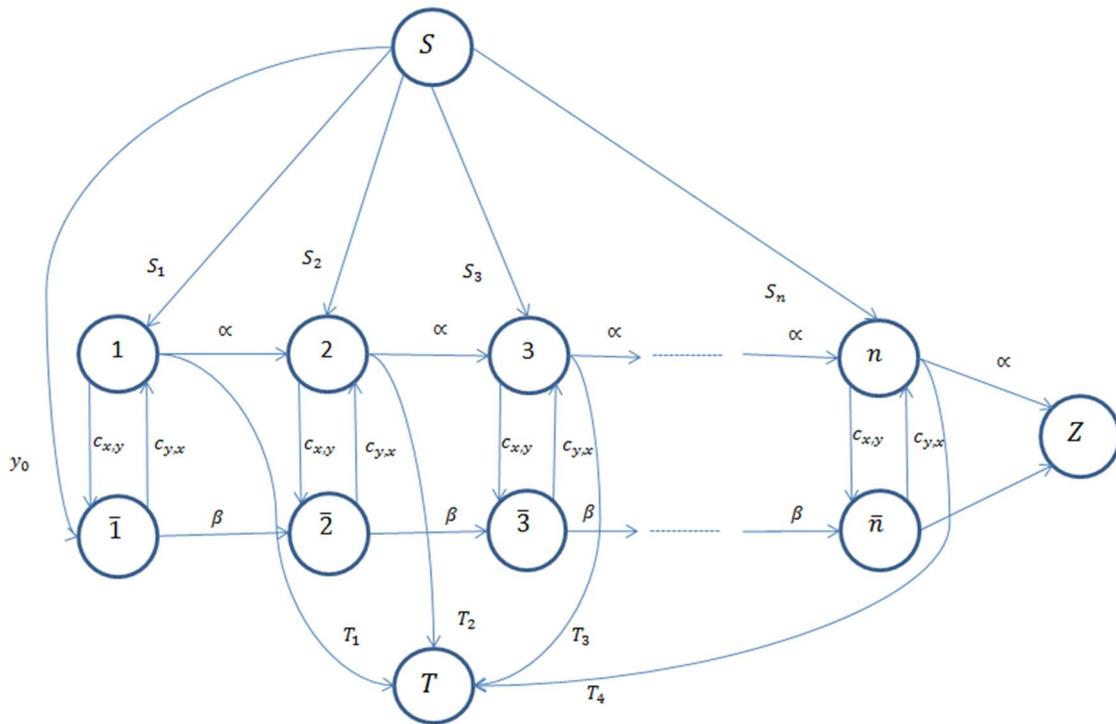
Mulvey e Vladimirou (1992) consideram que os modelos de redes generalizadas tratam de um tema comum: a alocação de fundos em diversas categorias de ativos durante vários períodos. Um modelo de rede generalizada é construído pela associação de um nó da rede a cada ativo, em determinado período, e um arco é associado a cada decisão de transação. Cada arco deve ter um multiplicador associado que aumenta ou diminui o fluxo no arco. O fluxo que entra no arco é ampliado ou reduzido em determinada proporção pelo multiplicador, antes de atingir o próximo nó. Desse modo, taxas de câmbio, de retorno e de empréstimo são modeladas por meio dos multiplicadores dos arcos na estrutura de rede generalizada.

Jorjani e Lamar (1994) propuseram incorporar o conceito de desconto baseado em quantidade ao problema de gerenciamento do fluxo de caixa. A ideia central é que é possível obter descontos ou adicionais de rendimento, de acordo com o volume de dinheiro que está sendo negociado, quer estejam envolvidos os parâmetros de custo ou de remuneração do capital. A complexidade desse tipo de desconto deriva da natureza não linear da função custo, que representa o desconto baseado na quantidade. Como efeito do desconto dado, os custos marginais diminuem à medida que o fluxo de dinheiro aumenta. Então, esse tipo de problema de fluxo em rede não pode ser convertido em um problema equivalente de fluxo em rede com arcos de custos lineares e requer procedimentos de solução específicos (JORJANI e LAMAR, 1994).

O modelo de Golden *et al.* (1979), que é a base para os desenvolvimentos do modelo determinístico e dos modelos sob incerteza nessa tese pode ser expresso da seguinte forma. Dado um número n de períodos de mesmas ou diferentes durações e várias classes de ativos de diversos níveis de liquidez, o que se busca é maximizar o retorno do caixa no horizonte de planejamento. Para facilitar a exposição, o autor trabalha com o caso de dois ativos, sem perda de generalidade. O ativo x é utilizado como meio de troca, ou seja, x é dinheiro, enquanto o ativo y é facilmente conversível em dinheiro, mas a um custo positivo. Os pressupostos da modelagem em questão são: (i) o ativo x é mais líquido do que o ativo y ; (ii) os pagamentos devem ser realizados apenas com o ativo x , pois somente o ativo x é aceitável como um meio de troca; (iii) as entradas e saídas de caixa em todos os períodos são determinísticas; (iv) o estoque inicial do ativo y também é conhecido; (v) os ativos x e y podem ser convertidos um no outro e existe custo unitário de conversão; (vi) as conversões são consideradas instantâneas; e (vii) todas as entradas ocorrem no início de um período e as saídas ocorrem no fim do período. Conforme mencionado, os períodos podem ter a mesma duração, ou durações diferentes. Abaixo são definidos os parâmetros do modelo:

- α taxa de juros (rendimento) por período do ativo x ;
- β taxa de juros (rendimento) por período do ativo y ;
- $c_{x,y}$ o custo de conversão por unidade do ativo x para ativo y ;
- $c_{y,x}$ o custo de conversão por unidade do ativo y para ativo x ;
- x_0 saldo inicial do ativo x ;
- y_0 saldo inicial do ativo y ;
- s_t oferta do ativo x no período de tempo t ($t = 1, 2, \dots, n$);
- d_t demanda do ativo x no período de tempo t ($t = 1, 2, \dots, n$).

Figura 2.1 Rede de Fluxos entre as opções 1 e 2 nos períodos 1, 2, ..., n (Fonte: Golden *et al.* (1979)).



Uma rede $G = (N, A, W)$ consiste de um conjunto de nós N , um conjunto de arcos orientados A e pesos ou multiplicadores dos arcos $(i, j) \in A$, dados pela matriz $W = [W_{ij}]$. Considere o fluxo da Figura 2.1, que modela um problema de fluxo de caixa de n períodos. Neste exemplo, $N = \{S, T, Z, 1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$. O nó S é um nó de entrada de caixa e o nó T é um nó de saída de caixa. O nó Z é o nó objetivo, no sentido que o objetivo é maximizar o fluxo para esse nó. Os nós $1, 2, \dots, n$ e $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}$ significam o horizonte de tempo t para o ativo x e y , respectivamente.

O conjunto A inclui os arcos (S, t) e (t, T) , $t = 1, 2, \dots, n$, onde os parâmetros s_t e d_t indicam fluxos de caixa fixos em cada período t . Os parâmetros s_t e d_t , embora conhecidos, não são necessariamente constantes de um período para o outro. As entradas de caixa estão posicionadas nos arcos deixando o nó S com destino aos respectivos nós do ativo x em cada período t , enquanto que as saídas de caixa estão posicionadas entre os nós do ativo x e o nó T . O conjunto A também inclui os arcos horizontais $(t, t + 1)$, $t = 1, 2, \dots, n - 1$, e $(\bar{t}, \bar{t} + 1)$, $\bar{t} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$, indicando investimentos de recursos em cada ativo, em cada período e os arcos

verticais (t, \bar{t}) e (\bar{t}, t) representando as conversões de recursos entre os dois níveis de liquidez. Os outros arcos do conjunto A , (n, Z) e (\bar{n}, Z) , correspondem ao fluxo do último período dos ativos x e y para o nó Z .

O conjunto N^- é definido como os nós do conjunto N sem os nós S e T , ou seja, $N^- = N \setminus \{S\} \setminus \{T\}$. As variáveis de decisão do modelo são definidas como:

f_{ij} fluxo de entradas no arco $(i, j) \in A, i \in N^-, j \in N^-$

g_{ij} fluxo de saídas do arco $(j, i) \in A, i \in N^-, j \in N^-$

Estas variáveis estão linearmente relacionadas por um multiplicador positivo w_{ij} :

$$g_{ij} = f_{ij} w_{ij} \quad \text{para cada arco } (j, i) \in A, i \in N^-, j \in N^- \quad (2.1)$$

A expressão (2.1) indica que o fluxo das saídas do arco (j, i) aumenta (se $w_{ij} > 1$), ou diminui (se $0 < w_{ij} < 1$) o fluxo das entradas nos arcos subsequentes. O multiplicador w_{ij} representa o ganho ou perda de recursos (taxa de juros ou taxas de conversão). Baseado na Figura 2.1, os multiplicadores podem ser definidos como:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 + \alpha & \text{para } (i, j) = (t, t + 1) \text{ ou } (n, Z) \\ 1 + \beta & \text{para } (i, j) = (\bar{t}, \bar{t} + 1) \text{ ou } (\bar{n}, Z) \\ 1 - c_{ab} & \text{para } (i, j) = (t, \bar{t}) \\ 1 - c_{ba} & \text{para } (i, j) = (\bar{t}, t) \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

O problema de gerenciamento do fluxo de caixa pode ser descrito pelo seguinte modelo de otimização linear com as variáveis f_{ij} e g_{ij} relacionadas por (2.1) e (2.2):

$$\text{Maximizar } g_{n,Z} + g_{\bar{n},Z} \quad (2.3)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in N^-, (i,j) \in A} f_{ij} - \sum_{j \in N^-, (i,j) \in A} g_{ji} = \begin{cases} s_i - d_i + x_0 & \text{para } i = 1 \\ s_i - d_i & \text{para } i = 2, \dots, n \\ y_0 & \text{para } i = \bar{1} \\ 0 & \text{para } i = \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$f_{ji} \geq 0 \quad \text{para } i \in N^-, j \in N^- \text{ e } (i, j) \in A \quad (2.5)$$

A função objetivo (2.3) maximiza o fluxo que chega no nó Z no final do horizonte de planejamento. A restrição (2.4) estabelece o balanço de fluxo dos recursos financeiros

em cada ativo para cada período, de forma que todo o fluxo de entrada em cada nó seja exatamente igual ao seu fluxo de saída. A restrição (2.5) estabelece que todas as entradas sejam não negativas. Substituindo g_{ij} em (2.3)-(2.4) com (2.1), o modelo fica definido apenas em termos das variáveis de decisão f_{ij} .

Uma análise do efeito do impacto da CPMF (Contribuição Provisória sobre Movimentações Financeiras) nas movimentações financeiras e o acréscimo dos empréstimos bancários no problema da gestão do fluxo de caixa pode ser encontrada em Pacheco e Morabito (2011). Mais detalhes sobre os modelos de fluxos em rede são discutidos no Anexo I.

2.3 As fontes de incertezas

2.3.1 A taxa de câmbio

Conforme Famá e Chaia (2001) e Perdomo e Botelho (2007), um dos principais desafios enfrentados pelos gestores financeiros é o estabelecimento de políticas que tornem eficazes as operações que envolvem as transações cambiais. Os autores salientam que apesar do fato dessa variável ter grande influência e importância na gestão financeira, seus mecanismos de precificação ainda estão em processo de ajuste e melhorias de forma a torná-los mais eficazes. Autores como Mark (1995) e Evans e Lyons (2005) obtiveram algum sucesso nessa difícil tarefa, porém, a falta de robustez dos resultados obtidos faz com que os trabalhos nessa área estejam sujeitos a críticas (PERDOMO e BOTELHO, 2007).

Famá e Chaia (2001) salientam que no Sistema Financeiro Internacional são realizadas as transações financeiras e comerciais entre as empresas e governos de diversos países e o mecanismo central de equilíbrio é a taxa de câmbio, que expressa basicamente o valor monetário de troca de uma moeda. Um dos principais fatores de risco no mercado internacional é a taxa de câmbio, já que qualquer alteração nessa taxa gera variações nos investimentos quando estes retornam ao país de origem ou são apurados nos países de origem. Esses autores enfatizam que o fator de risco cambial começou a ganhar grande importância no início dos anos 70 com o término do Sistema de Bretton Woods e a quebra do padrão-ouro, quando o sistema de câmbio fixo entrou em colapso, dando início ao sistema de câmbio flutuante. Outra influência fundamental citada pelos autores foram as duas guerras mundiais, que alteraram sensivelmente o preço do petróleo. Diante desse fato, os países importadores de petróleo

tiveram que ajustar a taxa de câmbio para redimensionar o poder de compra de suas moedas. Com o início do sistema de câmbio livre, o entendimento da formação da taxa de câmbio se tornou peça fundamental na gestão econômica dos países e empresas. Apesar de muito divulgadas e estudadas, as teorias que tentam explicar a formação da taxa de câmbio não conseguiram explicar as variações nas taxas cambiais nos últimos anos.

Famá e Chaia (2001) apresentaram algumas teorias a respeito da taxa de câmbio e salientaram como é difícil a tarefa de se prever fluxos financeiros futuros que dependam da taxa cambial. A teoria da paridade do poder de compra se baseia na Lei do Preço Único, a qual determina que um produto deve ter o mesmo custo, independente do país em que seja adquirido, e o desequilíbrio entre os valores nominais entre os países deve ser compensado pela taxa de câmbio. Os autores salientaram que estudos empíricos apresentados em diversos países não têm conseguido apresentar a eficiência dessa teoria na previsão da taxa de câmbio. Segundo Copeland e Weston (1988), essa teoria não consegue explicar as flutuações nas taxas de câmbio, pois existem outros fatores determinantes na formação dessa taxa, como as diferenças na renda entre os países, a diferenciação no tipo de cesta de consumo, as mudanças de políticas adotadas pelos governos, os custos e perdas em razão do transporte, e a diferenciação em razão da disparidade entre a realidade e a percepção das pessoas.

Outra teoria apontada por Famá e Chaia (2001) é a Teoria do Saldo de Contas Correntes. Essa teoria espera que a existência de diferenças nos saldos da balança de pagamento entre os países acabam gerando pressões de oferta e demanda pelas moedas, o que acabaria gerando um equilíbrio da moeda em uma determinada cotação. Os autores atestam que com a possibilidade de financiamento com fluxos de capitais internacionais, os desequilíbrios nos saldos da balança de transações correntes podem ser ajustados pela entrada de recursos externos, o que torna a oferta e demanda de uma determinada moeda pouco sensível aos ajustes necessários no modelo de importação e exportações. Na prática, a maior parte das transações cambiais está vinculada às transações financeiras, o que limita sobremaneira a aplicação dessa teoria.

A Teoria da Paridade da Taxa de Juros atesta que o retorno real de um título em qualquer país deve ser igual e o fator de ajuste entre seus valores nominais deve ser a taxa de câmbio (COPELAND e WESTON, 1988). De acordo com Miguel (1999), estudos empíricos realizados em países desenvolvidos indicam que o erro encontrado é significativamente diferente de zero, atestando que a eficiência do mercado na previsão da taxa de câmbio não é realista.

No trabalho de Perdomo e Botelho (2007) são comparados os resultados de um modelo baseado no processo estocástico *random walk* com as projeções de agentes econômicos que mais acertam na pesquisa Focus do Banco Central. Esses agentes econômicos utilizam os modelos econômicos que tratam da questão da precificação da taxa de câmbio, suas percepções sobre o mercado e as mais diversas fontes de dados em tempo real. A conclusão dos autores é que um modelo baseado em *random walk* tem um poder preditivo igual ou maior que as projeções feitas pelos agentes econômicos que mais acertam na pesquisa Focus do Banco Central. Perdomo e Botelho (2007) concluem que mesmo após vinte e quatro anos da publicação do artigo de Messe e Rogoff (1983), que comparou o poder preditivo de alguns modelos estruturais com o modelo *random walk*, os economistas ainda têm sérias dificuldades na previsão da taxa de câmbio.

A Tabela 2.1 demonstra a dificuldade dos agentes econômicos em realizar previsões para a taxa de câmbio de forma assertiva. O desvio absoluto das previsões efetuadas pelos agentes econômicos gerou, entre abril e dezembro de 2013, distorções relevantes nas receitas de vendas para o mercado externo. O período considerado na Tabela 2.1 é exatamente o ano societário da empresa estudada nesta tese.

Tabela 2.1 Comparativo entre projeções de taxa de câmbio na pesquisa Focus do Banco Central vis-a-vis Ptax 800 apurada pelo Banco Central

Mês para o qual foi realizada a projeção	Projeção realizada em 10/01/2013	Ptax 800 vigente para o último dia útil do mês	Projeção realizada em 03/01/2014	Desvio Absoluto
abr/2013	2,0600	2,0017		-2,83%
mai/2013	2,0600	2,1319		3,49%
jun/2013	2,0700	2,2156		7,03%
jul/2013	2,0600	2,2903		11,18%
ago/2013	2,0600	2,3725		15,17%
set/2013	2,0600	2,2300		8,25%
out/2013	2,0700	2,2026		6,41%
nov/2013	2,0700	2,3249		12,31%
dez/2013	2,0700	2,3426		13,17%
jan/2014	2,0800		2,35	12,98%
fev/2014	2,0700		2,37	14,49%
mar/2014	2,0700		2,38	14,98%

Fonte: Banco Central do Brasil e dados calculados pelo autor.

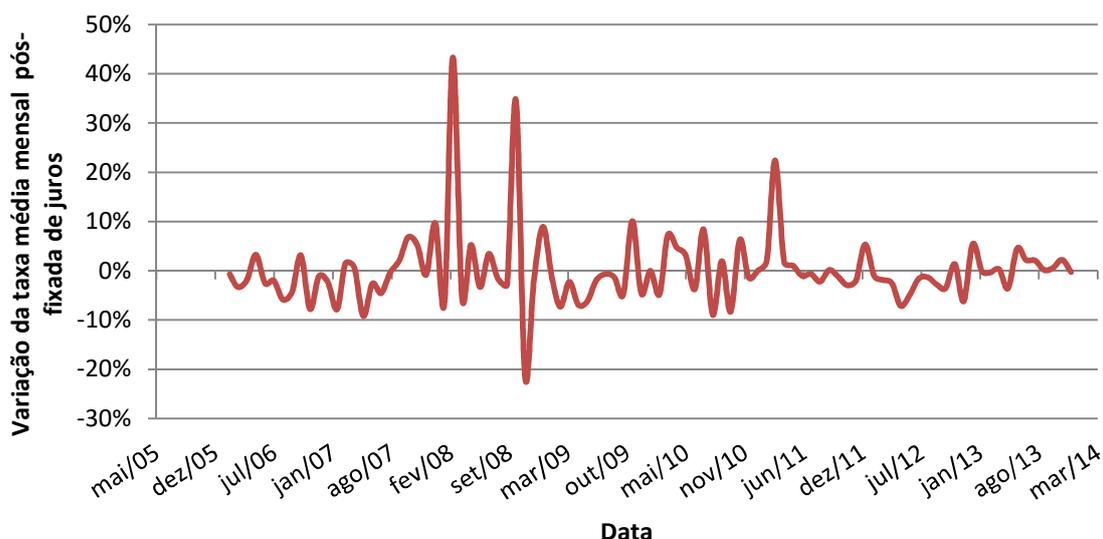
Diante dessas evidências, fica claro que a taxa de câmbio é uma fonte de incerteza importante para a gestão financeira do caixa de empresas exportadoras, como é o caso das empresas do setor de material escolar estudadas nesta tese.

2.3.2 A taxa de juros

Conforme salienta Garcia e Didier (2003), a taxa de juros constitui uma das mais importantes variáveis macroeconômicas, já que influencia o nível de atividade, o nível de emprego, a taxa de câmbio, a inflação, entre outras medidas macroeconômicas. Empresas que possuem em sua estrutura de negócios períodos em que se faz necessário contratar empréstimos bancários, outra medida importante para suas decisões financeiras é o *spread* bancário. O *spread* bancário é uma medida do custo de intermediação financeira e é definida, geralmente, como a diferença da taxa que o banco cobra entre o tomador de recursos e a taxa que o banco remunera os depositantes (BROCK e ROJAS-SUAREZ, 2000).

Para se ter uma ideia da volatilidade da taxa de juros no Brasil, a Figura 2.2 apresenta a variação da taxa média mensal pós-fixada das operações de crédito com recursos livres referencias para a taxa de juros para as pessoas jurídicas no período de março de 2011 a dezembro de 2013. Na Figura 2.2, fica evidente a alta volatilidade nas taxas de juros utilizadas para empréstimos às pessoas jurídicas no Brasil.

Figura 2.2 Variação da taxa média mensal pós-fixada de juros para empréstimos a pessoa jurídica (Fonte: Banco Central do Brasil).



Esse capítulo não pretende discutir os determinantes do *spread* bancário no Brasil, mas para um maior detalhamento e entendimento da decomposição desse *spread*, o leitor pode consultar Reis Junior *et al.* (2013). O importante aqui é ressaltar que uma elevação ou uma geração de expectativa nos agentes econômicos de se elevar a taxa de juros no Brasil contribui para um aumento na taxa de juros praticada na economia brasileira. Esse fato afeta o custo de captação de recursos pelas empresas brasileiras, além de outras consequências macro e microeconômicas (HADDAD, 2012). Consequentemente, as decisões no gerenciamento do fluxo de caixa são afetadas pelas variações das taxas de juros.

2.3.3 A demanda

Outra fonte de incerteza importante para a gestão do fluxo de caixa é a demanda futura de produtos, matérias-primas e outros. Existem na literatura relacionada diversos trabalhos evidenciando o impacto da incerteza na previsão da demanda no planejamento da produção (KRAJEWSKI, KING, RITZMAN e WONG, 1987; UÇKUN, KARAESMEN e SAVAS,

2008; MARQUÈS, LAMOTHE, THIERRY e GOURC, 2012; KANG, 2004; GRABOT, GENEST, REYNOSO- CASTILLO e VÉROT, 2005; MULA, POLER, GARCIA, 2006; e BOULAKSIL *et al.*, 2009). Os erros nas previsões da demanda afetam o caixa quando há falta de caixa, que não estava prevista e que acarreta necessidade de captação não planejada de recursos e, também, quando acarretam compra extraordinária de materiais, contratação de mão-de-obra adicional, entre outros, acarretando desembolsos de caixa não planejados.

Conforme salienta Miranda, *et al.* (2011), quanto maior o erro na previsão da demanda, maior é a dificuldade no planejamento das áreas funcionais da empresa, o que acarreta perdas financeiras e conseqüente perda de dinamismo competitivo. Ainda segundo o mesmo autor, as perdas financeiras se originam pelo excesso de estoque, vendas perdidas, ineficiência no planejamento da produção, entre outras. Miranda, *et al.* (2011) ainda afirma que erros de demanda podem advir de várias causas, sendo as principais as deficiências no ambiente organizacional, no processo de previsão em si e na falta de uso combinado das técnicas quantitativas e qualitativas de previsão. Para os autores, o processo de previsão de demanda ainda apresenta diversas deficiências e estão relacionados, principalmente, na identificação das áreas funcionais da empresa que devem participar do processo de previsão, conhecimento dos métodos de previsão, tratamento adequado do erro das previsões e não utilização de *softwares* de previsão. Uma linha de pesquisa interessante seria incorporar métodos de previsão de entradas e saídas nos modelos de gestão de caixa.

2.4 Modelos de otimização sob incerteza

Como apontado em Geunes e Pardalos (2003) e outros estudos, a primeira abordagem de redes para problemas de gestão de fluxo de caixa teve foco na resolução de problemas de fluxos de rede determinísticos. Em seguida, os pesquisadores cada vez mais focaram o tratamento destes problemas em uma estrutura de otimização de redes estocásticas. Uma ampla revisão de problemas de otimização de redes estocásticas em engenharia financeira, incluindo o gerenciamento de fluxo de caixa, pode ser encontrado em Mulvey e Vladimirou (1992), Liu *et al.*(2003) e Alimardani (2014). Outros estudos que aplicam técnicas de programação dinâmica estocástica e outras abordagens para problemas de equilíbrio de caixa em ambientes de incerteza podem ser encontrados, por exemplo, em Elton e Gruber (1974), Lam, Runeson , Tam, e Lo (1998), Hinderer e Waldmann (2001) , Premachandra (2004) , Yao , Chen e Lu

(2006) , Gormley e Meade (2007) , Baccarin (2009) , Bensoussan , Chutani e Sethi (2009) e Nascimento e Powell (2010).

Nas próximas seções são apresentadas algumas metodologias que lidam com a incerteza dentro de modelos de otimização em pesquisa operacional, com potencial de aplicação no presente problema estocástico de gestão do caixa dessa tese.

2.4.1 Modelos de programação estocástica e fluxos em rede

Um grande número de problemas é simplificado e representado por modelos determinísticos, em que toda a informação requerida assume-se estar disponível. No entanto, deve-se notar que os resultados dos problemas determinísticos, nos quais ignoram-se as incertezas associadas às variáveis aleatórias, podem diferir de forma significativa das soluções ótimas dos seus correspondentes problemas estocásticos do mundo real. Em um problema de planejamento financeiro de fluxo de rede, cada nó é associado a um ativo a cada período de tempo e cada arco da rede denota uma decisão de transação. Decisões de transação normalmente têm um multiplicador que pode aumentar ou diminuir o fluxo que passa por cada arco. Portanto, a taxa de retorno, a taxa de câmbio e quaisquer outros parâmetros podem ser representados por um multiplicador de arco através da rede.

Mulvey e Vladimirov (1992) aplicam a estrutura de fluxos em rede para os problemas de planejamento financeiro. A abordagem dos autores é baseada em cenários e cada cenário tem uma probabilidade associada. Cada cenário é definido através de um fluxo do nó inicial para um nó final e cada nó do fluxo representa uma realização das variáveis de decisão numa fase particular. Esta realização é a mesma para todos os diferentes cenários que passam através de um determinado nó. Esses fluxos pertencem a um subconjunto de um cenário, que são árvores com alguns nós comuns entre o nó inicial e o final. Além disso, é definido um conjunto que representa o número de subconjuntos disjuntos num estágio específico, que é o número de nós da árvore de um determinado estágio específico e são criadas variáveis artificiais definidas para cada nó não terminal.

Em um recente estudo conduzido por Alimardani (2014), um modelo de fluxos em rede estocástico de programação inteira-mista para planejamento financeiro capturou diferentes aspectos do gerenciamento de uma carteira de ativos, minimizando o número total de transações de maneira a reduzir os custos de transação. Isto é possível com a consideração de restrições de cardinalidade, pelas quais é possível controlar o número de ativos presentes na carteira, ou pela

imposição de restrições nos custos de transação por meio de limitantes da compra e venda de ativos. Deve-se notar que a consideração dessas restrições aumenta o nível de complexidade associada com o processo de solução (COLEMAN *et al.*, 2006; e MURRAY e SHECK, 2012). Uma revisão periódica da carteira deve ser realizada devido à presença de incertezas, como a expectativa sobre os retornos futuros e nos custos de transação. Deve ser também considerado que durante o horizonte de tempo do investimento, novos fluxos de caixa podem estar disponíveis para investimentos na carteira, nos mesmos ou em outros ativos. O valor investido em cada ativo na carteira deve ser controlado pela imposição de restrições limitantes de máximo e mínimo para os ativos presentes na carteira de investimento.

No modelo construído por Alimardani (2014), os multiplicadores estão representados por custos de transação determinados em cada estágio e em cada cenário, considerando as regulações e regras do mercado em que a carteira está inserida. Nesta abordagem deve ser considerado que os arcos entre dois estágios são multiplicados por taxas de retorno.

Os modelos com restrições de chance (CHARNES e COOPER, 1959; JOHNSON e MONTGOMERY, 1974) consideram restrições que são satisfeitas em alguma proporção das vezes, ou seja, as restrições são satisfeitas com probabilidades específicas. Por exemplo, Johnson e Montgomery (1974) fixaram uma determinada probabilidade de excesso de produção sobre o valor da variável aleatória de demanda de um produto para um modelo de *mix* de produção, conforme citado por Paiva e Morabito (2011), Alem (2011) e Alem e Morabito (2013).

2.4.2 Modelos de programação estocástica em dois estágios com recurso

Introduzido por Dantzig (1955) e Beale (1955), o modelo de programação estocástica em dois estágios com recurso é bem utilizado na literatura de otimização sob incerteza. Nesse modelo são considerados dois estágios, o estrutural e o de controle. Os parâmetros do estágio estrutural são determinísticos e aqueles referentes ao estágio de controle são aleatórios, ou seja, possuem incerteza. Vladimirou e Zenios (1997) dividem as variáveis de decisão em dois grupos distintos associados aos dois estágios supracitados.

x vetor de variáveis associados ao primeiro estágio e que deve ser decidido antes de se conhecer os valores aleatórios. Não é possível se ajustar o valor dessas variáveis após a realização das variáveis aleatórias.

y vetor de variáveis associados ao segundo estágio e que deve ser determinado após a realização das variáveis aleatórias. O valor ótimo dessas variáveis depende da decisão do primeiro estágio e também da incerteza inerente ao problema. São também conhecidas como ações recurso (Paiva, 2009).

Para as variáveis aleatórias do segundo estágio, pode-se utilizar a abordagem de cenários com variáveis discretas, definindo um conjunto de cenários, no qual cada cenário representa um conjunto de realização dos parâmetros incertos do segundo estágio com suas respectivas probabilidades.

Vladimirou e Zenios (1997) mencionam as vantagens de se trabalhar com cenários, quais sejam, o modelo obtido preserva a linearidade do modelo determinístico original e a possibilidade de se trabalhar com problemas em que não se conhece a distribuição de probabilidade que representa a variável aleatória considerada. Por outro lado, a desvantagem é que conforme o número de cenários considerados cresce, o problema cresce e fica mais difícil de ser resolvido. Mulvey *et al.* (1995) destacam que a limitação dessa abordagem é o fato de não haver tratamento adequado para a variabilidade da função objetivo em situação de incerteza, não havendo garantia de que a solução encontrada permaneça próxima da solução ótima quando as variáveis aleatórias sejam conhecidas.

Uma forma de contornar essa limitação foi proposta por Mulvey *et al.* (1995). O modelo de programação estocástica de aversão ao risco (*risk averse stochastic programming*) proposto pelos autores, tem por objetivo reduzir a variabilidade das realizações de resultados específicos ao longo dos cenários. Para Mulvey *et al.* (1995), solução robusta é definida como uma solução que permanece em torno da solução ótima em todos os cenários considerados, enquanto modelagem robusta é toda modelagem que gera soluções factíveis ou quase factíveis em todos os cenários considerados. O modelo de otimização robusta proposto por esses autores é uma alternativa no sentido de controlar o *trade-off* entre otimalidade e robustez em ambientes com incerteza nos parâmetros que definem um determinado modelo.

A principal contribuição desse modelo é a consideração de penalidades para a violação das restrições nos vários cenários e a flexibilização da função objetivo para contemplar diversos critérios de otimização no sentido de minimizar o máximo desvio entre a meta e o resultado obtido para os cenários. Uma dificuldade dessa modelagem é a necessidade do tomador de decisão de estimar as probabilidades associadas a cada cenário. Outra dificuldade é que o

número de variáveis e restrições associadas ao segundo estágio de decisão do problema aumenta o tamanho do problema determinístico original (PAIVA e MORABITO, 2011).

2.4.3 A abordagem de programação estocástica neutra em relação ao risco (RN)

Os primeiros conceitos de modelos de gestão de ativos e passivos sob condições de incerteza foram desenvolvidos por Kallberg *et al.* (1982) e Kusy e Ziemba (1986). Subsequentemente, um número substancial de aplicações foi apresentado na literatura científica, incluindo o trabalho desenvolvido por Cariño *et al.* (1994) e Mulvey (1994), que desenvolveram modelos de programação multiestagiadas para a solução de problemas de planejamento financeiro, considerando a inerente aleatoriedade dos retornos dos preços dos ativos, por exemplo. As aplicações para esse tipo de modelagem incluem gestão de risco para as instituições, bancos, entidades do governo, fundos de pensão e companhias de seguros.

Na programação estocástica de dois estágios com recurso, existe um conjunto de variáveis de decisão de primeiro estágio que devem ser determinadas antes da realização das variáveis aleatórias. Conforme mencionado, após a realização das variáveis aleatórias, são determinadas as variáveis de segundo estágio. Essas variáveis podem ser entendidas como ações corretivas que são tomadas para adaptar, ou melhorar, as decisões tomadas no primeiro estágio. O valor ótimo das variáveis de segundo estágio depende da decisão do primeiro estágio e das realizações das variáveis aleatórias. As variáveis de segundo estágio são conhecidas como decisões de “espere e veja” ou decisões de recursos.

O objetivo de um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso para um problema do fluxo de caixa seria encontrar uma solução de primeiro estágio que maximize o montante final de recursos financeiros diante de todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias.

A formulação geral para um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso é a seguinte:

$$\text{Minimizar } c^T x + E[\min_{q(\omega)} y(\omega)] \quad (2.6)$$

Sujeito a

$$Ax = b$$

$$T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega) \quad (2.7)$$

$$x, y(\omega) \geq 0 \quad (2.8)$$

No modelo (2.6) – (2.8), c , A e b são os parâmetros que caracterizam a parte determinística do vetor de custos, da matriz tecnológica e do vetor independente. Para cada possível realização de ω , os elementos $T(\omega)$, $W(\omega)$ e $h(\omega)$ definem os parâmetros estocásticos referentes ao vetor de custos, à matriz tecnológica, à matriz de recurso e ao vetor independente, respectivamente. As variáveis x e $y(\omega)$ são definidas como as variáveis de decisão de primeiro e segundo estágio, respectivamente, como função da realização ω . O valor esperado de (2.6) – (2.8) é tomado em relação à distribuição de probabilidade de $\xi(\omega)$, que é conhecida e tem esperança finita.

O modelo (2.6) – (2.8) pode ser escrito como o seguinte modelo determinístico equivalente:

$$\text{Minimizar } c^T x + \Omega(x) \quad (2.9)$$

Sujeito a

$$Ax = b \quad (2.10)$$

$$x \geq 0 \quad (2.11)$$

em que $\Omega(x) = E[Q(x, \xi(\omega))]$. O valor ótimo do problema de segundo estágio é definido da seguinte maneira:

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_{y(\omega)} \{q(\omega)^T y(\omega) | T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega), y(\omega) \geq 0\} \quad (2.12)$$

As equações (2.9) – (2.11) mostram a sequência de eventos no problema recurso. Em primeiro lugar, são determinadas as decisões de primeiro estágio na presença de incerteza. No segundo estágio as realizações de ω passam a ser conhecidas e as ações adaptativas $y(\omega)$ podem ser tomadas para remediar as decisões de primeiro estágio. Entretanto, as decisões de primeiro estágio são tomadas levando em consideração seus efeitos futuros que são medidos pela função de recurso $\Omega(x)$.

Nessa tese, para o desenvolvimento de modelos de programação estocástica, admite-se que os parâmetros incertos do problema têm uma distribuição de probabilidade discreta com um número finito S de possíveis realizações $\xi_s = (q_s, T_s, W_s, h_s)$, com suporte finito $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$. Essas realizações são denominadas cenários com probabilidade de ocorrência

dada por $Pr\{\xi = \xi_s\} = \pi_s$, sendo $\pi_s > 0$ e $\sum_{s \in \Omega} \pi_s = 1$. Na abordagem por cenários, $E[Q(x, \xi(\omega))] = \sum_{s=1}^S \pi_s Q(x, \xi_s)$, em que

$$Q(x, \xi_s) = \min_{y_s} \{q_s^T y_s \mid T_s x + W_s y_s = h_s, y_s \geq 0\} \quad (2.13)$$

O problema estocástico (2.9) – (2.11) pode ser escrito na sua forma equivalente determinística, que resulta num problema de otimização, geralmente, de grande porte.

$$\text{Minimizar } c^T x + \sum_{s \in \Omega} \pi_s q_s^T y_s \quad (2.14)$$

Sujeito a

$$Ax = b \quad (2.15)$$

$$T_s x + W_s y_s = h_s, s \in \Omega \quad (2.16)$$

$$x, y_s \geq 0, s \in \Omega \quad (2.17)$$

2.4.4 O valor da informação perfeita e da solução estocástica

A importância em considerar a incerteza num modelo de programação estocástica é medida pelo valor esperado da informação perfeita (*Expected Value of Perfect Information – EVPI*) pelo valor da solução estocástica (*Value of Stochastic Solution – VSS*). O *EVPI* é calculado pela diferença entre o valor do problema estocástico (recurso), usualmente denominado *RP* na literatura de programação estocástica, e o valor esperado das soluções *wait-and-see* (*WS*), ou seja, $EVPI = RP - WS$. *WS* representa a esperança $WS = \sum_s \pi_s WS_s^*$, na qual WS_s^* é o valor do problema *wait-and-see* de cada cenário $s \in \Omega$. O problema WS_s^* é solucionado supondo-se informação perfeita sobre as variáveis aleatórias. Para Birge e Louveaux (1997), o *EVPI* pode ser considerado a quantia pela qual o decisor estaria propenso a pagar para obter a informação perfeita em relação ao futuro. Uma outra interpretação do *EVPI* é o quanto o decisor espera ganhar se obter antecipadamente os valores das variáveis aleatórias. Quando o *EVPI* é baixo, isso indica que não é tão importante considerar a aleatoriedade do problema e o mesmo pode ser resolvido por aproximações.

Para Birge e Louveaux (1997), o *VSS* é o custo de ignorar a aleatoriedade dos parâmetros na tomada de uma decisão. Para o seu cálculo, resolve-se o problema do valor

esperado (EV), que é a substituição de todas as variáveis aleatórias do problema pelos seus respectivos valores esperados. Após isso, as variáveis de primeiro estágio são fixadas de acordo com o problema EV no problema estocástico, obtendo-se, dessa forma o EEV (resultado esperado de usar a solução do problema EV – *expectation of the expected value problem*). Esse resultado mostra como as variáveis de decisão de segundo estágio são escolhidas em função das variáveis de primeiro estágio do problema EV . O valor da solução estocástica é obtido pela diferença entre o RP e EEV , ou seja, $VSS = EEV - RP$. O valor da solução estocástica auxilia na comparação entre o problema estocástico e abordagens determinísticas aproximadas. Quanto maior for o valor do VSS (maior que uma tolerância definida pelo decisor), maior é o ganho em considerar a estratégia estocástica em detrimento da determinística aproximada, e vice-versa.

2.4.5 Programação estocástica de aversão ao risco em dois estágios com recurso para o problema do fluxo de caixa

Os modelos de programação estocástica que são neutros em relação ao risco não capturam a preferência do decisor em relação ao risco que estão dispostos a aceitar; a preocupação central é apenas a otimização do valor esperado. No sentido de incluir o risco no modelo de programação estocástica, essa tese propõe duas alternativas de formulações para a aversão ao risco. O primeiro modelo é baseado num critério minimax com arrependimento que consiste em otimizar a perspectiva de cenário de pior caso sem a necessidade de inserir a probabilidade de cada cenário. A segunda formulação usa o valor em risco condicional como a medida de risco, no sentido de evitar que as soluções sejam influenciadas por um cenário com baixa probabilidade de ocorrência.

2.4.6 O modelo minimax com arrependimento

O modelo minimax com arrependimento objetiva determinar o melhor desvio de pior caso da otimalidade entre todas as possíveis decisões em todos os cenários considerados (Kouvelis & Yu, 1997). Esse modelo é indicado para representar decisões conservadoras de aversão ao risco. Ele também é utilizado quando as probabilidades dos cenários não são conhecidas.

Para formular o modelo minimax com arrependimento, faz-se necessário determinar o valor das soluções *wait-and-see* W_s^* para todo $s = 1, 2, \dots, S$. Depois disso, é minimizada a

máxima diferença entre o custo e o custo de cada solução *wait-and-see* de cada cenário (arrependimento) na função objetivo. O modelo geral é o seguinte:

$$\text{Minimizar } \theta \tag{2.18}$$

Sujeito a (2.15), (2.16) e (2.17) e

$$\theta \geq c^T x + \sum_{s \in \Omega} \pi_s q_s^T y_s - W_s^*, s = 1, 2, \dots, S \tag{2.19}$$

$$\theta \geq 0 \tag{2.20}$$

2.4.7 O modelo de otimização de aversão ao risco do valor em risco condicional (CVaR)

O modelo anterior de aversão ao risco não leva em consideração a probabilidade de ocorrência de cada cenário e, por essa razão a solução pode ser influenciada por um cenário com baixa probabilidade de ocorrência. De maneira a superar essa questão, esta tese também propõe a utilização de uma medida amplamente utilizada como medida de risco, chamada valor em risco condicional (*conditional value-at-risk* – CVaR) e introduzida por Rockafellar e Uryasev (2000, 2002). O CVaR também é conhecido como *mean excess loss*, *mean shortfall* ou a calda do VaR (valor em risco – *value-at-risk*). Com um nível de probabilidade α , o α -VaR de uma carteira é o mais baixo montante η , de modo que, com probabilidade α , a perda não exceda η . Três valores para α são comumente considerados na literatura: 90%, 95% e 99% (ROCKAFELLAR & URYASEV, 2000). Apesar do VaR ser uma medida muito utilizada para a avaliação de risco, ela possui características matemáticas que são indesejáveis, como a falta de subaditividade e convexidade (ARTZNER, ET AL., 1999). Pflug (2000) provou que o CVaR é uma medida coerente de risco e possui melhores características matemáticas em relação ao VaR. Para mais detalhes ver Artzner *et al.* (1997) e Embrechts *et al.* (1999).

O CVaR é reconhecido como uma medida coerente de risco, conforme Pflug (2000). Ele atende as quatro características que são exigidas para qualquer medida de risco quais sejam: monotonicidade, invariância sobre translações, homogeneidade positiva e subaditividade (convexidade). O modelo CVaR minimiza o valor em risco, VaR, representado pela letra grega

η , em conjunto com o custo esperado ponderado superior ao VaR no nível de confiança α . Um problema de otimização envolvendo o CVaR pode ser formulado da seguinte forma:

$$\max_x \{CVaR_\alpha[f(x, \xi)]\}, \text{ onde } CVaR_\alpha(\xi) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \eta + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[\xi - \eta]_+ \right\}, \quad (2.21)$$

considerando $[\xi - \eta]_+ = \max(0, \xi - \eta)$ e $\alpha \in (0,1)$.

2.4.8 Modelo de otimização robusta de análise de pior caso intervalar

Soyster (1973) foi o pioneiro na técnica de otimização robusta de análise de pior caso intervalar. Ele deu um passo importante para os posteriores desenvolvimentos nesse tipo de abordagem. A formulação robusta de Soyster é expressa da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_j c_j f_j \quad (2.22)$$

Sujeito a:

$$\sum_j a_{ij} f_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} f_j \leq b_i, \quad \forall i \quad (2.23)$$

$$f_j \geq 0, \forall j \quad (2.24)$$

em que J_i é o conjunto de coeficientes da linha da matriz tecnológica $\{a_{ij}\}$, sujeito à incerteza, e \hat{a}_{ij} é o desvio do parâmetro incerto \tilde{a}_{ij} com relação ao seu valor nominal a_{ij} . A metodologia de Soyster é equivalente ao problema de otimização em que todos os parâmetros incertos são fixados nos valores de pior caso. Dessa forma, os valores ótimos robustos são, de forma geral, significativamente piores do que os valores ótimos do problema nominal (determinístico).

De forma a eliminar o problema do conservadorismo da solução de Soyster, autores como Ben-Tal e Nemirovski (1998, 1999), El-Ghaoui e Lebret (1998) e El-Ghaoui *et al.* (1997) propuseram formulações robustas alternativas menos conservadoras. Ben-Tal e Nemirovski (2000) desenvolveram uma formulação robusta de forma a permitir o *tradeoff* entre robustez e desempenho, conforme é demonstrado a seguir:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_j c_j f_j \quad (2.25)$$

sujeito a

$$\sum_j a_{ij}f_j + \gamma \left(\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}f_j + \epsilon_i \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}f_j^2} \right) \leq b_i, \forall i \quad (2.26)$$

$$f_j \geq 0, \forall j \quad (2.27)$$

em que $\gamma > 0$ é um nível de variabilidade dado e ϵ_i é um parâmetro positivo definido pelo decisor, cuja função é controlar a probabilidade máxima de violação da restrição i , calculada pela expressão:

$$k = \frac{\exp(-\epsilon_i^2)}{2} \quad (2.28)$$

A desvantagem dessa formulação é a sua não-linearidade. Essa desvantagem e o conservadorismo da solução robusta de Soyster fizeram com que Bertsimas e Sim (2003, 2004) desenvolvessem uma metodologia de otimização robusta linear baseada em conjuntos de incertezas poliédricos, evitando os problemas de conservadorismo e da não-linearidade, com possibilidade de intratabilidade computacional.

Segundo Bertsimas e Sim (2004), é possível exercer controle sobre o grau de conservadorismo da solução fornecida pelo modelo de Soyster (1973). Considere a i ésima restrição do problema nominal $a_{ij}f_j \leq b_i$. Seja J_i o conjunto de coeficientes a_{ij} , $j \in J_i$, que estão sujeitos a incerteza, isto é, \tilde{a}_{ij} , $j \in J_i$. Esses coeficientes assumem valores de acordo com uma distribuição simétrica com média igual ao valor nominal a_{ij} , no intervalo $[\hat{a}_{ij} - a_{ij}; a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$. Para cada i é introduzido o parâmetro Γ_i que assume valores no intervalo $[0, |J_i|]$.

O papel do parâmetro Γ_i é ajustar o grau de robustez do modelo proposto contra o grau de conservadorismo da solução. Ele representa o grau de aversão ao risco que o decisor está disposto a aceitar. Esse parâmetro é o número máximo de variáveis aleatórias que pode assumir o respectivo valor de pior caso e é denominado *budget* de incerteza. De acordo com Bertsimas e Sim (2004), é improvável que todos os coeficientes a_{ij} , $j \in J_i$ sejam incertos. Os autores consideram que a natureza será restrita em seu comportamento e apenas um subconjunto de coeficientes irão variar de maneira a afetar, de forma adversa, a solução. Os autores desenvolveram um modelo que possui a propriedade de alcançar uma solução robusta determinística, se a natureza se comportar da maneira supracitada.

Sob esse enfoque, é possível construir um modelo de programação não-linear, considerando Γ_i inteiro, já que Γ_i fracionário não tem um apelo prático relevante.

$$\text{Maximizar } Z = \sum_j c_j f_j \quad (2.29)$$

sujeito a

$$\sum_j a_{ij} f_j + \max_{\{S_i | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} f_j \right\} \leq b_i \quad \forall i \quad (2.30)$$

$$l_j \leq f_j \leq u_j, \quad \forall j \quad (2.31)$$

Para reformular o modelo (2.29) - (2.31) para um modelo de otimização linear, faz-se necessária a seguinte proposição: dada uma solução factível f^* , a função de proteção da i ésima restrição é:

$$\beta_i(f^*, \Gamma_i) = \max_{\{S_i | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} f_j^* \right\} \quad (2.32)$$

que é igual à função objetivo do seguinte problema de otimização:

$$\beta_i(f^*, \Gamma_i) = \max \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} f_j^* z_{ij} \quad (2.33)$$

Sujeito a

$$\sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \quad (2.34)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in J_i \quad (2.35)$$

Considere o problema dual de (2.33)-(2.35) a seguir, desenvolvido para eliminar a não linearidade do modelo (2.33) a (2.35):

$$\text{Minimize } \sum_{j \in J_i} \rho_{ij} + \Gamma_i \lambda_i \quad (2.36)$$

sujeito a

$$\rho_{ij} + \lambda_i \geq \hat{a}_{ij} f_j^*, \quad \forall j \in J_i \quad (2.37)$$

$$\rho_{ij} \geq 0, \quad \forall j \in J_i \quad (2.38)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (2.39)$$

Como o problema (2.33) a (2.35) é factível e limitado para todo $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$, pelo conceito de dualidade forte, o problema dual (2.36) a (2.39), também é limitado e factível e seus valores ótimos coincidem. Substituindo a formulação do problema dual (2.36) a (2.39), na equação (2.30) do problema original (programação não-linear), obtém-se a formulação do modelo linear de otimização robusta:

$$\text{Maximizar } Z = \sum_j c_j f_j \quad (2.40)$$

sujeito a

$$\sum_j a_{ij} f_j + \sum_{j \in J_i} \rho_{ij} + \Gamma_i \lambda_i \leq b_i, \forall i \quad (2.41)$$

$$\rho_{ij} + \lambda_i \geq \hat{a}_{ij} f_j, \forall i, j \in J_i \quad (2.42)$$

$$l_j \leq f_j \leq u_j, \forall j \quad (2.43)$$

$$\rho_{ij} \geq 0, \forall i, j \in J_i \quad (2.44)$$

$$\lambda_i \geq 0, \forall i \quad (2.45)$$

$$f_j \geq 0, \forall j \in J_i \quad (2.46)$$

A modelagem proposta por Bertsimas e Sim (2004) tem a vantagem de inferir as probabilidades de violação das restrições para o caso em que o parâmetro incerto aleatório assumia valores além do conjunto de incerteza. Para calcular a probabilidade da i -ésima restrição do problema ser violada, considere:

f^* = solução do modelo de otimização robusta

$$\theta = \Gamma_i / |J_i|$$

$$n = |J_i|$$

$$v = (\Gamma_i + n) / 2$$

$$\mu = v - [v]$$

Para uma distribuição de probabilidade simétrica, limitada e independente, pode ser mostrado que um limitante probabilístico de violação da i ésima restrição é calculado conforme segue:

$$P\left(\sum_{j=1}^m \hat{a}_{ij} f_j^* > b_i\right) \leq (1 - \mu)C(n, [v]) + \sum_{l=[v]+1}^n C(n, l), \quad (2.47)$$

em que

$$C(n, l) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{caso } l = 0 \text{ ou } l = n \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{(n-l)l}} \exp\left(n \log\left(\frac{n}{2(n-l)}\right) + l \log\left(\frac{n-l}{l}\right)\right), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.48)$$

Bertsimas e Sim (2004) apresentam outra opção de limitante em que $\Gamma_i = \theta\sqrt{n}$ é obtido pela aproximação de De-Moivre-Laplace:

$$P\left(\sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} f_j^* > b_i\right) \approx 1 - \phi\left(\frac{\Gamma_i - 1}{\sqrt{n}}\right) \quad (2.49)$$

onde ϕ é a função de distribuição normal acumulada.

Paiva e Morabito (2014), Alem e Morabito (2012) e Munhoz e Morabito (2014) listam algumas vantagens do modelo de otimização robusta de Bertsimas e Sim (2004): (i) agrega maior flexibilidade por meio do controle do conservadorismo adotado na análise; (ii) não resulta em um modelo de maior complexidade computacional do que o modelo determinístico original (por exemplo, se o modelo original é de programação linear, o modelo robusto também vai ser); (iii) pode ser aplicado a problemas com grande quantidade de variáveis reais; (iv) possibilita estimar a probabilidade de violação das restrições; e (v) não há necessidade de determinar as distribuições de probabilidade para as variáveis aleatórias consideradas. Beyer e Sendhoff (2007) consideram esta última vantagem como um ponto negativo da formulação, já que quando as distribuições de probabilidades estão disponíveis, não é possível incorporá-las ao modelo. Algumas aplicações desse tipo de abordagem podem ser encontradas em pesquisas anteriores realizadas no grupo de pesquisa operacional da UFSCar como, por exemplo, Munhoz (2009), Alem e Morabito (2012), Munhoz e Morabito (2014), Paiva e Morabito (2014) e Rocco (2014).

No próximo capítulo, o modelo de programação linear determinístico de Golden *et al.* (1979) é estendido como um modelo de programação inteira mista, para representar adequadamente o gerenciamento de caixa de uma empresa do setor de material escolar. Esse modelo inteiro-misto determinístico resultante é a base dos modelos de otimização robusta e de programação estocástica desenvolvidos nos capítulos posteriores desta tese.

3. MODELO DETERMINÍSTICO E APLICAÇÃO NO ESTUDO DE CASO

Neste capítulo, desenvolve-se um modelo determinístico motivado pelo problema da gestão do caixa de uma empresa típica do setor de material escolar. A partir do modelo básico de Golden *et al.* (1979), revisado no capítulo anterior, é possível incorporar na programação matemática do fluxo em redes aplicações comuns na gestão financeira do caixa de empresas do setor de material escolar e de outros setores, como, por exemplo, o saldo mínimo de caixa, a capacidade de tomar empréstimos e outros ativos com diferentes tipos de liquidez e aplicações financeiras que possuem prazo de carência no resgate. Para a empresa do setor de material escolar, algumas particularidades devem ser incorporadas ao modelo determinístico, quais sejam: i) manter um saldo mínimo de caixa e de investimentos em ativos com liquidez imediata. Apesar do custo de oportunidade perdido, essa forma de gestão do caixa protege a companhia de eventos econômicos adversos que podem, eventualmente, ocorrer. Esses eventos geralmente vêm acompanhados de uma redução de crédito na economia e podem resultar em deficiências de caixa ou aumento significativo do custo de captação de recursos para o capital de giro das companhias; ii) a possibilidade de investir recursos financeiros em ativos com dois meses de carência para o resgate.

Outra característica da empresa do setor de material escolar é a captação de recursos por meio do sistema bancário. A empresa tem um bom *rating* de crédito junto ao sistema bancário e é capaz de financiar as suas operações com empréstimos bancários, quando necessário. O *rating* de crédito de uma empresa é uma informação pública que representa o julgamento de analistas de crédito a respeito da capacidade das empresas em honrar seus compromissos financeiros (DAMASCENO *et al.*, 2008).

3.1 Programação inteira-mista (MIP) para o modelo determinístico

A correspondente rede para o fluxo de caixa pode ser representada por um grafo $G = (N, A, W)$, no qual N é o conjunto de nós, A é o conjunto de arcos conectando dois nós em N e $W = [w_{ij}]$ é a matriz de multiplicadores para cada arco (i, j) . A Figura 3.1 representa um exemplo da rede para o fluxo de caixa da companhia estudada, com o conjunto de nós $N = \{s, d, z, 1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}, \bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}, \dots, \bar{\bar{n}}\}$. Os nós de 1 a n representam os nós do caixa (ativo a); os nós de $\bar{1}$ a \bar{n} representam os nós do CDB (Certificado de Depósito Bancário) sem período de carência (ativo b); e os nós $\bar{\bar{1}}$ a $\bar{\bar{n}}$ representam o CDB com período de carência (ativo c), que

não foram considerados no modelo desenvolvido por Golden *et al.*(1979), nem em outros também baseados em Golden *et al.*(1979), como os modelos desenvolvidos por Pacheco (2007) e Pacheco e Morabito (2011).

O nó s representa as entradas de caixa, enquanto o nó d representa as saídas de caixa. O nó z representa o nó objetivo, no qual o fluxo que chega nesse nó deve ser maximizado. Na aplicação financeira em CDB com período de carência, como os recursos financeiros ficam sem liquidez por dois períodos de tempo, o rendimento oferecido ao investidor é superior aquele com liquidez imediata. Isso pode ser verificado, por exemplo, na Figura 3.3 adiante. Observe, por exemplo, o arco que sai do nó 3 e chega no nó $\bar{5}$. Esse arco representa a aplicação financeira com período de carência para o resgate, no caso dois períodos. Observe também, na Figura 3.3, que no nó $\bar{5}$, os recursos financeiros estão liberados para o resgate. Essa liberação é representada pelo arco que sai de $\bar{5}$ e chega em 5. Essa é uma das diferenças do modelo determinístico desta tese em relação aos modelos determinísticos propostos por Golden *et al.* (1979) e Pacheco e Morabito (2011).

Outra diferença importante desse modelo em relação aos desenvolvimentos anteriores é a consideração de rendimentos crescentes de acordo com o montante aplicado. Ou seja, se o valor da aplicação estiver entre zero e um limite superior previamente determinado, o rendimento obtido é menor do que aquele aplicado se o montante for superior a esse limite. Essa consideração pode ser formulada usando programação inteira mista para a sua solução, já que o problema é de maximização e a função que representa o valor do rendimento em função do valor aplicado é convexa e linear por partes. A Figura 3.1 representa como a remuneração do ativo com carência para o resgate aumenta em função do valor investido. Observe na Figura 3.1, que se o valor investido for menor ou igual a lm_{ij} , a sua remuneração é w_{ij} . Caso o valor investido seja maior do que lm_{ij} , a sua remuneração passa a ser w_{ij}^2 com $w_{ij}^2 > w_{ij}$. Na Figura 3.1, f_{ij}^1 é o montante investido menor ou igual a lm_{ij} , que recebe a rentabilidade representada pelo multiplicador w_{ij} , e f_{ij}^2 é o montante investido maior do que lm_{ij} , que recebe a rentabilidade w_{ij}^2 . Observe na Figura 3.1 que $g_{ij} = f_{ij}^1 w_{ij} + f_{ij}^2 w_{ij}^2$ e $f_{ij}^1 + f_{ij}^2 = f_{ij}$.

Para que o modelo possa considerar w_{ij} ou w_{ij}^2 , é necessário introduzir as seguintes restrições para o ativo com carência para o resgate:

$$\begin{aligned} f_{ij}^1 + f_{ij}^2 &= f_{ij}, (i, j) = (\bar{l}, \bar{l} + 1) \text{ e } (i, \bar{l} + 2), \\ \bar{l} &= \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, n - 2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$0 \leq f_{ij}^1 < lm_{ij}x_{ij}^1, (i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ e } (i, \bar{i} + 2),$$

$$\bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.2)$$

$$lm_{ij}x_{ij}^2 \leq f_{ij}^2 < Mx_{ij}^2, (i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ e } (i, \bar{i} + 2),$$

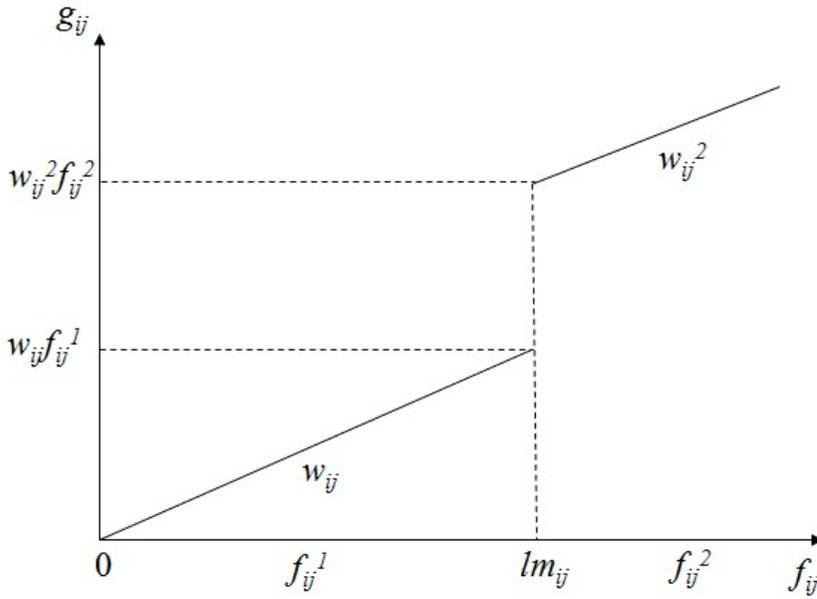
$$\bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.3)$$

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = 1 \quad (3.4)$$

$$x_{ij}^1, x_{ij}^2 \in \{0, 1\}, (i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ e } (i, \bar{i} + 2), \quad \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.5)$$

Essas restrições são válidas para os arcos $(\bar{i}, \bar{i} + 1), \bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$, e os arcos $(i, \bar{i} + 2), i = 1, 2, \dots, n - 2$ e garantem que, dependendo do valor investido no ativo com período de carência (menor ou igual a lm_{ij} ou maior do que esse limitante), a remuneração será w_{ij} ou w_{ij}^2 . A notação M define um número suficientemente grande.

Figura 3.1 Rendimento para o ativo com período de carência em função do valor investido.



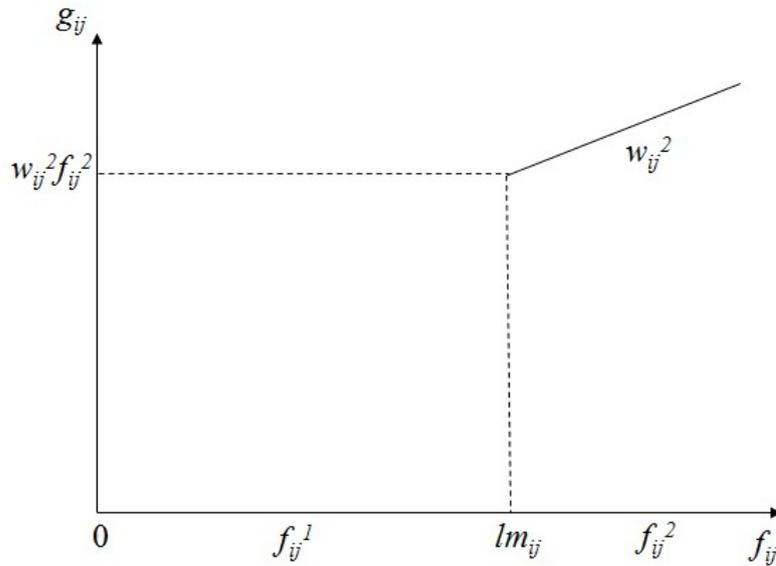
Um caso particular desse tipo de abordagem pode ser observado na Figura 3.2, na qual nenhum rendimento é pago ao investimento no ativo com carência para o resgate se o montante investido for menor do que lm_{ij} . Nesse caso, $g_{ij} = w_{ij}f_{ij}$ e as restrições adicionais são:

$$lm_{ij}x_{ij} \leq f_{ij} < Mx_{ij}, (i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ e } (i, \bar{i} + 2),$$

$$\bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, (i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ e } (i, \bar{i} + 2), \quad \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.7)$$

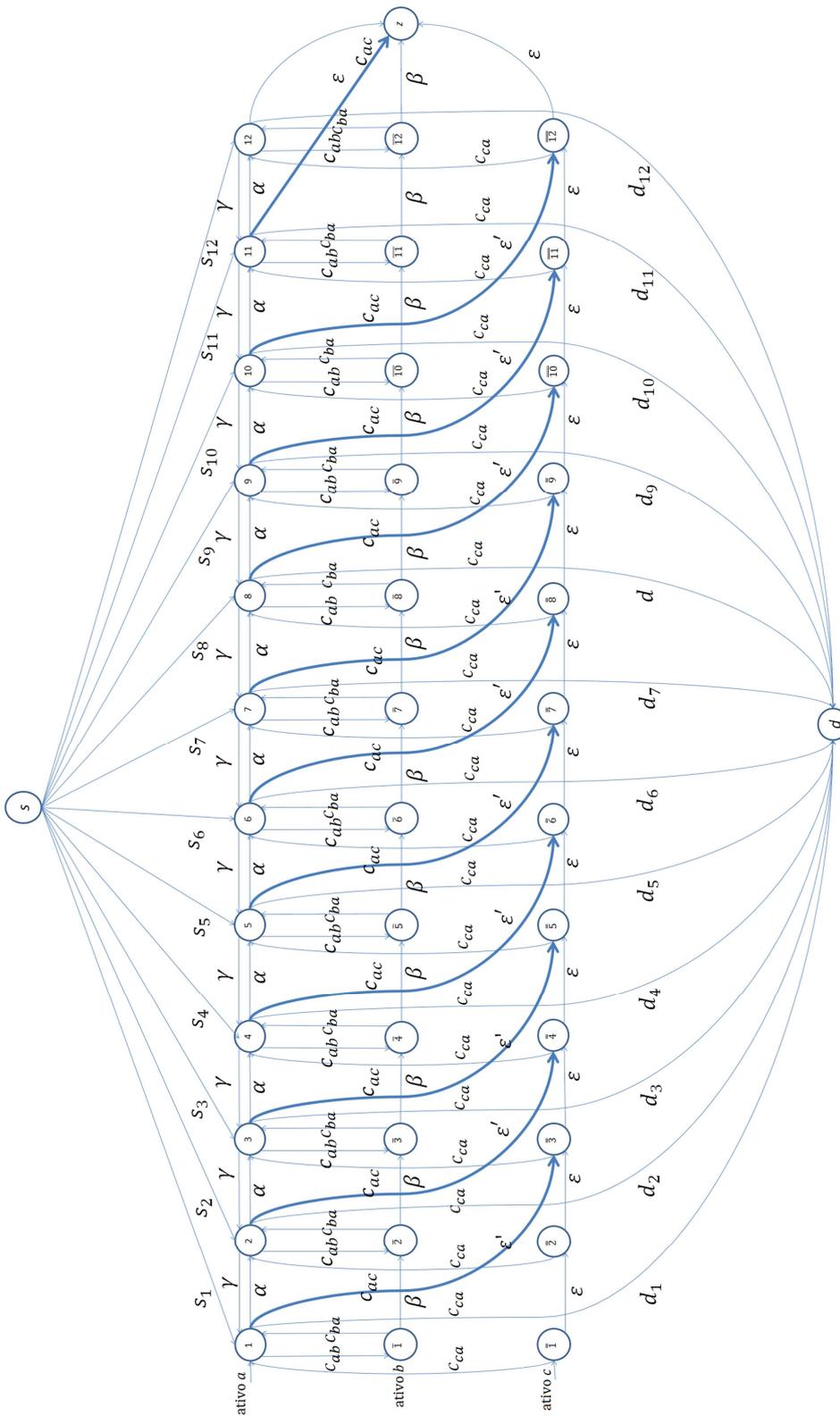
Figura 3.2 Valor mínimo para investimento no ativo com período de carência.



Esse caso particular corresponde a um dos cenários alternativos para testar o desempenho do modelo robusto com dados reais da empresa do estudo de caso, conforme é visto no capítulo 4.

Conforme ilustrado na Figura 3.3, os arcos $(\bar{i}, \bar{i} + 1)$, $\bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$, e os arcos $(i, \bar{i} + 2)$, $i = 1, 2, \dots, n - 2$ são os investimentos no ativo com carência para o resgate e são utilizados pela empresa para aumentar as suas receitas financeiras e, conseqüentemente, aumentar a sua lucratividade. Os arcos reversos, $(i + 1, i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, representam os empréstimos bancários. Os arcos representados por $(i, i + 1)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, representam a movimentação da conta corrente bancária. Os arcos $(\bar{i}, \bar{i} + 1)$, $\bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$, representam a movimentação das aplicações financeiras com liquidez imediata e os arcos $(\bar{i}, \bar{i} + 1)$, $\bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$, constituem a movimentação das aplicações financeiras com período de carência. Os arcos (i, \bar{i}) , (\bar{i}, i) , (\bar{i}, i) representam a conversão de fundos entre os três ativos a, b e c . Os outros arcos do conjunto A , $(n - 1, Z)$, (n, Z) , (\bar{n}, Z) e $(\bar{\bar{n}}, Z)$, correspondem ao fluxo do último período dos ativos a, b e c para o nó Z .

Figura 3.3. O fluxo em rede com arcos reversos indicando os empréstimos e as aplicações com carência para o resgate.



O conjunto N^- é o conjunto N sem os nós s e d , ou seja, $N^- = N \setminus \{s\} \setminus \{d\}$. As variáveis de decisão do modelo são:

f_{ij} fluxos de recursos financeiros que o nó i recebe, $(i, j) \in A, i \in N^-, j \in N^-$;

f_{ij}^1 é o montante investido menor ou igual a lm_{ij} , que recebe a rentabilidade representada pelo multiplicador w_{ij} ;

f_{ij}^2 é o montante investido maior do que lm_{ij} , que recebe a rentabilidade w_{ij}^2 ;

x_{ij}^1 variável binária quando $0 \leq f_{ij} < lm_{ij}$, para $(\bar{i}, \bar{i} + 1), \bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$, e $(i, \bar{i} + 2), i = 1, 2, \dots, n - 2$; e

x_{ij}^2 variável binária quando $lm_{ij} \leq f_{ij} < M$, $(\bar{i}, \bar{i} + 1), \bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$, e $(i, \bar{i} + 2), i = 1, 2, \dots, n - 2$; e

Os parâmetros do modelo estão descritos a seguir:

a ativo considerado como meio de troca, ou seja, dinheiro;

b aplicações financeiras sem prazo de carência para o resgate;

c aplicações financeiras com prazo de carência para o resgate;

α_{ij} rendimento dos juros por período gerado pelo ativo a , para $(i, j) = (i, i + 1), i = 1, 2, \dots, n - 1$ e (n, Z) ;

β_{ij} rendimento dos juros por período gerados pelo ativo b , para $(i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1)$ e $(\bar{n}, Z), \bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$;

ε_{ij} rendimento dos juros por período gerados pelo ativo c , para $(i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1)$ e $(i, \bar{i} + 2)$ e (\bar{n}, Z) e $0 \leq f_{ij} \leq lm_{ij}, \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1$ e $i = 1, 2, \dots, n - 2$;

κ_{ij} rendimento dos juros por período gerados pelo ativo c , para $(i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1)$ e $(i, \bar{i} + 2)$ e (\bar{n}, Z) e $lm_{ij} \leq f_{ij} \leq M, \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1$ e $i = 1, 2, \dots, n - 2$;

γ_{ij} juros incorridos pela utilização do ativo a , para $(i, j) = (i + 1, i), i = 2, \dots, n$. São os juros pagos pela utilização do empréstimo bancário;

c_{ab} custo unitário de conversão do ativo a para o ativo b ;

c_{ac} custo unitário de conversão do ativo a para o ativo c ;

c_{ba} custo unitário de conversão do ativo b para o ativo a ;

- c_{ca} custo unitário de conversão do ativo c para o ativo a ;
 a_0 saldo inicial do ativo a ;
 b_0 saldo inicial do ativo b ;
 c_0 saldo inicial do ativo c ;
 s_i entradas de caixa, para $i = 1, 2, \dots, n$;
 d_i saídas de caixa, para $i = 1, 2, \dots, n$;
 w_{ij} multiplicador dos fluxos de recursos nos arcos (i, j) ;
 w_{ij}^2 multiplicador dos fluxos de recursos nos arcos (i, j) , para $(i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1)$ e $(i, \bar{i} + 2)$ e (\bar{n}, Z) e $lm_{ij} \leq f_{ij} \leq M$, $\bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1$ e $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
 u_{ij} limite máximo de endividamento, para $(i, j) = (i + 1, i)$, $i = 2, \dots, n$;
 m_{ij} limite mínimo de caixa, para $(i, j) = (i, i + 1)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ e (n, Z) ;
 q_{ij} limite mínimo para o ativo b , para $(i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1)$ e (\bar{n}, Z) , $\bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1$;
 lm_{ij} limite máximo para o ativo c receber o rendimento ε_{ij} e mínimo para o ativo c receber o rendimento κ_{ij} , para $(i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1)$ e $(i, \bar{i} + 2)$ e (\bar{n}, Z) , $\bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1$ e $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
 M é um número suficientemente grande que é o limitante para o ativo c receber o rendimento κ_{ij} , para $(i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1)$ ou $(i, \bar{i} + 2)$ ou (\bar{n}, Z) , $\bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1$ ou $i = 1, 2, \dots, n - 2$.
 As restrições para os multiplicadores são:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 + \alpha_{ij} & \text{para } (i, j) = (i, i + 1) \text{ e } (n, Z) \\ 1 + \beta_{ij} & \text{para } (i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ e } (\bar{n}, Z) \\ 1 + \varepsilon_{ij} & \text{para } (i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ e } (\bar{n}, Z) \text{ e } 0 \leq f_{ij}^1 \leq lm_{ij} \\ (1 + \varepsilon_{ij})^2 & \text{para } (i, j) = (i, \bar{i} + 2) \text{ e } 0 \leq f_{ij}^1 \leq lm_{ij} \\ 1 - C_{ab} & \text{para } (i, j) = (i, \bar{i}) \\ 1 - C_{ac} & \text{para } (i, j) = (i, \bar{i} + 2) \\ 1 - C_{ba} & \text{para } (i, j) = (\bar{i}, i) \\ 1 - C_{ca} & \text{para } (i, j) = (\bar{i}, i) \\ \frac{1}{1 + \gamma_{ij}} & \text{para } (i, j) = (i + 1, i) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.8)$$

e

$$w_{ij}^2 = 1 + \kappa_{ij} \text{ para } (i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ e } (\bar{n}, Z) \text{ e } lm_{ij} \leq f_{ij}^1 \leq M \quad \text{e} \quad w_{ij}^2 = (1 + \kappa_{ij})^2 \text{ para } (i, j) = (i, \bar{i} + 2) \text{ e } lm_{ij} \leq f_{ij}^1 \leq M \quad (3.9)$$

O modelo de programação linear inteira mista para a maximização do fluxo de recursos financeiros é:

$$\text{Maximizar } w_{n-1,z}f_{n-1,z}^1 + w_{n-1,z}^2f_{n-1,z}^2 + w_{nz}f_{nz}^1 + w_{nz}^2f_{nz}^2 + w_{\bar{n}z}f_{\bar{n}z} + w_{\bar{n},z}f_{\bar{n}z}^1 + w_{\bar{n}z}^2f_{\bar{n}z}^2 \quad (3.10)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji}f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq -a_0 - s_i + d_i, i = 1 \quad (3.11)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji}f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq -b_0, i = \bar{1} \quad (3.12)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji}f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq -c_0, i = \bar{1} \quad (3.13)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji}f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq -s_i + d_i, i = 2, 3, \dots, n \quad (3.14)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji}f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq 0, i = \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n} \quad (3.15)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji}f_{ji}^1 + \sum_{j \in N^-} w_{ji}^2f_{ji}^2 - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq 0, i = \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n} \quad (3.16)$$

$$f_{n-1,z}^1 + f_{n-1,z}^2 = f_{n-1,z} \quad (3.17)$$

$$f_{nz}^1 + f_{nz}^2 = f_{nz} \quad (3.18)$$

$$f_{\bar{n}z}^1 + f_{\bar{n}z}^2 = f_{\bar{n}z} \quad (3.19)$$

$$0 \leq f_{n-1,z}^1 \leq lm_{n-1,z}x_{n-1,z}^1 \quad (3.20)$$

$$lm_{n-1,z}x_{n-1,z}^2 \leq f_{n-1,z}^2 \leq Mx_{n-1,z}^2 \quad (3.21)$$

$$0 \leq f_{nz}^1 \leq lm_{nz}x_{nz}^1 \quad (3.22)$$

$$lm_{nz}x_{nz}^2 \leq f_{nz}^2 \leq Mx_{nz}^2 \quad (3.23)$$

$$0 \leq f_{\bar{n}z}^1 \leq lm_{\bar{n}z}x_{\bar{n}z}^1 \quad (3.24)$$

$$lm_{\bar{n}z}x_{\bar{n}z}^2 \leq f_{\bar{n}z}^2 \leq Mx_{\bar{n}z}^2 \quad (3.25)$$

$$x_{n-1,z}^1, x_{n-1,z}^2, x_{nz}^1, x_{nz}^2, x_{\bar{n}z}^1, x_{\bar{n}z}^2 \in \{0,1\} \quad (3.26)$$

$$x_{n-1,z}^1 + x_{n-1,z}^2 = 1 \quad (3.27)$$

$$x_{nz}^1 + x_{nz}^2 = 1 \quad (3.28)$$

$$x_{\bar{n}z}^1 + x_{\bar{n}z}^2 = 1 \quad (3.29)$$

$$f_{i,j}^1 + f_{i,j}^2 = f_{i,j}, (i,j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ ou } (i, \bar{i} + 2) \text{ e } \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.1)$$

$$0 \leq f_{i,j}^1 \leq lm_{ij}x_{ij}^1, (i,j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ ou } (i, \bar{i} + 2) \text{ e } \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.2)$$

$$lm_{ij}x_{ij}^2 \leq f_{i,j}^2 \leq Mx_{ij}^2, (i,j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ ou } (i, \bar{i} + 2) \text{ e } \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.3)$$

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = 1 \quad (3.4)$$

$$x_{ij}^1, x_{ij}^2 \in \{0,1\}, (i,j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ ou } (i, \bar{i} + 2) \text{ e } \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.5)$$

$$0 \leq f_{i+1,i} \leq u_{i+1,i}, i = 2, \dots, n \quad (3.30)$$

$$f_{i,i+1} \geq m_{i,i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.31)$$

$$f_{nz} \geq m_{nz} \quad (3.32)$$

$$f_{i,i+1} \geq q_{i,i+1}, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1 \quad (3.33)$$

$$f_{\bar{n}z} \geq q_{\bar{n}z} \quad (3.34)$$

$$f_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \quad (3.35)$$

A função objetivo (3.10) maximiza o montante de recursos financeiros no nó z , que estão aplicados nos ativos a, b e c , considerando os correspondentes multiplicadores w_{ij} . Os

dois primeiros termos da função objetivo, $w_{n-1,z}f_{n-1,z}^1$ e $w_{n-1,z}^2f_{n-1,z}^2$, são os fluxos de recursos que chegam ao nó terminal z por meio do penúltimo nó do ativo a . Esses fluxos chegam ao nó z , multiplicados por $w_{n-1,z}$ ou por $w_{n-1,z}^2$, dependendo do valor investido. As restrições que determinam o rendimento do fluxo $f_{n-1,z}$ são (3.17), (3.20), (3.21), (3.26) e (3.27). O terceiro e quarto termos da função objetivo (3.10), $w_{nz}f_{nz}^1$ e $w_{nz}^2f_{nz}^2$, são os fluxos de recursos que chegam ao nó terminal z por meio do último nó do ativo a . Eles, também, dependem do valor investido e as restrições que determinam o rendimento para f_{nz} são (3.18), (3.22), (3.23), (3.26) e (3.28). O quinto termo da função objetivo (3.10), é o fluxo de recursos que chega ao nó z por meio do ativo b , que tem liquidez imediata. Como esse ativo não tem a possibilidade de obter diferentes rendimentos, dependendo do valor investido, ele não necessita das restrições utilizadas para o ativo a . Os dois últimos termos da função objetivo (3.9), $w_{\bar{n},z}f_{\bar{n},z}^1 + w_{\bar{n},z}^2f_{\bar{n},z}^2$, são os fluxos que chegam ao nó terminal z por meio do ativo c . Esses fluxos dependem do valor investido para a determinação dos seus rendimentos e as restrições que controlam essa dependência são (3.19), (3.24), (3.25), (3.26) e (3.29).

A restrição (3.11) representa o balanço de fluxo para o nó 1. Nessa restrição, são considerados o saldo inicial do ativo a , as entradas de caixa, s_i , e as saídas de caixa, d_i , além da movimentação do ativo no tempo e o empréstimo bancário. A restrição (3.12) representa o balanço de fluxo para o nó $\bar{1}$. Além da movimentação do ativo, considera-se o saldo inicial do ativo b . A restrição (3.13) representa o balanço de fluxo para o nó $\bar{1}$. Nessa expressão, são consideradas as movimentações do ativo c , bem como o seu saldo inicial. A restrição (3.13) é o balanço de fluxo para os nós $2, 3, \dots, n$. Nessa expressão, são consideradas as entradas e saídas de caixa, s_i e d_i , respectivamente, a movimentação do ativo a , e os empréstimos bancários. As restrições (3.14) e (3.15) representam o balanço de fluxo para os nós $\bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n}$ e para os nós $\bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n}$, respectivamente. As restrições (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) são aquelas necessárias para considerar a função convexa linear por partes da programação inteira-mista para $(i, j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1)$ e $(i, \bar{i} + 2)$ e $\bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1$ ou $i = 1, 2, \dots, n - 2$. A restrição (3.30) representa o limite máximo de endividamento e a condição de não negatividade dos empréstimos bancários. As restrições (3.31) e (3.32) indicam o saldo mínimo de caixa e as equações (3.33) e (3.34) indicam o saldo mínimo para a aplicação no CDB sem carência para o resgate. Conforme já salientado no início do capítulo, esses saldos mínimos são necessários para garantir uma condição mínima de liquidez para qualquer eventualidade na economia, como, por exemplo,

uma restrição de crédito por parte dos bancos. A restrição (3.35) é a condição de não negatividade das variáveis para todo tipo de arco (i, j) .

3.2 Empresa estudada

A empresa escolhida para o estudo de caso é uma típica representante do setor de material escolar. Ela emprega mais de dois mil funcionários e fatura anualmente acima de quinhentos milhões de reais, distribuídos entre o mercado brasileiro e o mercado internacional. A carteira comercial no mercado brasileiro dessa empresa conta com mais de cinco mil clientes, desde as pequenas papelarias até os grandes atacadistas. No mercado externo, os seus clientes estão concentrados na América Latina, Estados Unidos e alguns países da Europa.

Para essa empresa, as vendas no mercado interno possuem uma sazonalidade típica desse setor, que é a concentração dos recebimentos nos meses de janeiro, fevereiro, março e abril de cada ano, justamente o período de volta às aulas. O volume de recebimentos nesses meses depende fundamentalmente do plano de vendas que a companhia adota. Essas vendas podem ser estimuladas por planos comerciais e financeiros. A maior fatia do faturamento dessa empresa ocorre basicamente nos meses de agosto, setembro, outubro, novembro e dezembro. Para administrar os estoques e os problemas logísticos de abastecimento dos clientes, a empresa financia seus clientes através de prazo para pagamento, facilitando as compras por parte dos clientes nos meses citados. Essa estratégia equaciona o problema de abastecimento desses clientes para o principal período de vendas. Para essa empresa estudada, os dados de entrada do modelo de otimização foram distorcidos para a preservação da confidencialidade da fonte e proteger seus interesses.

O modelo matemático foi codificado na linguagem de modelagem algébrica GAMS 23.0.2 e resolvido pelo solver de otimização CPLEX 11.2 com parâmetros *default*. O computador utilizado para os testes computacionais foi um Notebook com processador Intel(R) Core(TM) i3-3110M, 2.40GHz e memória RAM de 4GB. Por simplicidade os valores monetários são apresentados em milhares de reais no restante deste texto.

No exemplo fornecido pela empresa estudada, o horizonte de planejamento envolve 12 períodos (meses). O cálculo das taxas de juros mensais baseia-se num ano de 252 dias úteis (DU). Os dias úteis de cada período de um mês ($t = 1, 2, \dots, 12$) são exibidos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Número de dias úteis por período (mensal).

Período (mês)	Dias úteis
1	20
2	22
3	20
4	22
5	23
6	19
7	22
8	20
9	20
10	22
11	18
12	20

Para o cálculo da taxa de juros nos 12 períodos, consideraram-se as seguintes informações:

- $\iota_{a.m.}$ taxa de juros mensal, baseada nos DU de cada mês;
- $\iota_{a.a.}$ taxa de juros anual, baseada em um ano com 252 DU;
- $\%CDI$ porcentagem acima da taxa estipulada para o Certificado de Depósito Interbancário (taxa de juros praticada no mercado interbancário brasileiro);
- DU_t dias úteis em cada mês t ;

A expressão do cálculo da taxa de juro mensal é definida a seguir:

$$\iota_{a.m.} = (((1 + \iota_{a.a.})^{\frac{1}{252}} - 1) \%CDI + 1)^{DU_t} - 1) 0,785 \quad (3.36)$$

A multiplicação por 0,785 é explicada pela cobrança de 22,5% de imposto de renda retido na fonte sobre o valor do rendimento da aplicação, cobrado no momento do resgate dos recursos aplicados. Dessa forma, o juro efetivamente recebido, ou seja, aquele que está disponível para a empresa, é 22,5% menor, ou representa 78,5% do rendimento bruto da aplicação financeira.

Os Certificados de Depósito Interbancário (CDI) são os títulos de emissão das instituições financeiras, que lastreiam as operações do mercado interbancário. Uma aplicação

financeira que rende 100% do CDI terá exatamente a mesma rentabilidade da variação do CDI em determinado período. Se o CDI teve uma taxa acumulada de 11,65% nos últimos 12 meses, essa aplicação teria rendido exatamente 11,65% no mesmo período. Ou seja, 100% do CDI representa que sua aplicação vai render exatamente igual ao rendimento do CDI em um determinado período de tempo. Ainda dando exemplos para ilustrar essa taxa, caso uma aplicação financeira renda 90% do CDI, e o rendimento do CDI foi de 11,60% nos últimos 12 meses, a rentabilidade desse investimento, no mesmo período, teria sido 10,44% ($11,60\% \times 90\%$). Em contrapartida, caso essa aplicação rendesse 110% do CDI, considerando a mesma taxa anterior, a rentabilidade deste investimento seria 12,76% ($11,60\% \times 110\%$).

A Tabela 3.2 apresenta as taxas de juros ao ano previstas para os 12 períodos considerados nessa análise.

Tabela 3.2 Taxa de juros em base anual para cada mês do período considerado.

Período	Dias úteis	100% CDI a.a.
1	20	9,19%
2	22	8,72%
3	20	8,35%
4	22	8,02%
5	23	7,78%
6	19	7,36%
7	22	7,18%
8	20	7,18%
9	20	7,18%
10	22	7,18%
11	18	7,18%
12	20	7,18%

Essas taxas servem de base para o cálculo das aplicações financeiras e do empréstimo bancário. Para o ativo b , a porcentagem do CDI considerada para o cálculo dos juros, β_{ij} , é de 98%. Como a liquidez dessa aplicação financeira é imediata, ou seja, não existe nenhum tipo de carência para o seu resgate, a rentabilidade desse tipo de aplicação financeira é abaixo da taxa do CDI. Para a aplicação financeira que possui dois períodos de carência e para o estoque de aplicação financeira cujo período de carência já expirou a porcentagem do CDI para o cálculo

dos juros, ε_{ij} , é de 103% do CDI. No caso do valor da aplicação exceder o valor de lm_{ij} esse percentual sobe para 106% do CDI. Para os empréstimos, é considerada uma taxa de juros, γ_{ij} , de 109% do CDI. Para α_{ij} , não é considerado nenhum tipo de rendimento, ou seja, o valor atribuído a ele é zero. A Tabela 3.3 apresenta as taxas de juros praticadas para os ativos b e c , líquidos do imposto de renda retido na fonte de 22,5%, e para o empréstimo bancário.

Tabela 3.3 Taxa de juros mensais por ativo.

Período	DU	100% CDI ao ano	98% CDI (β_{ij}) ao mês	103% CDI (ε_{ij}) ao mês	106% CDI (ε_{ij}) ao mês	109% CDI (γ_{ij}) ao mês
1	20	9,19%	0,54%	0,57%	0,58%	0,76%
2	22	8,72%	0,56%	0,59%	0,61%	0,80%
3	20	8,35%	0,49%	0,52%	0,53%	0,70%
4	22	8,02%	0,52%	0,55%	0,56%	0,74%
5	23	7,78%	0,53%	0,56%	0,57%	0,75%
6	19	7,36%	0,41%	0,43%	0,45%	0,59%
7	22	7,18%	0,47%	0,49%	0,51%	0,66%
8	20	7,18%	0,42%	0,45%	0,46%	0,60%
9	20	7,18%	0,42%	0,45%	0,46%	0,60%
10	22	7,18%	0,47%	0,49%	0,51%	0,66%
11	18	7,18%	0,38%	0,40%	0,41%	0,54%
12	20	7,18%	0,42%	0,45%	0,46%	0,60%

No exemplo estudado, o saldo inicial do ativo a é de R\$ 1.994 mil e as entradas e saídas de caixa em cada período são apresentadas na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 Entradas e saídas de caixa em milhares de reais.

Período (i)	Entradas (s_i)	Saída (d_i)
1	14.784	89.159
2	14.949	7.828
3	14.250	18.009
4	13.972	19.200
5	12.915	15.359
6	20.423	42.856
7	13.675	9.294
8	21.260	17.332
9	17.659	6.016
10	141.499	50.689
11	120.000	95.362
12	125.000	140.035

Para o ativo b , o saldo inicial é igual zero. Para o estoque de aplicações financeiras cujo prazo de carência já expirou, o saldo inicial é igual a R\$ 100.000 mil. Esse estoque ainda vai receber os recursos que estão aplicados com período de carência de dois meses e que são geradas pelo modelo e, portanto, liberadas e adicionadas ao estoque de aplicações financeiras com período de carência expirado, para que sejam passíveis de resgate.

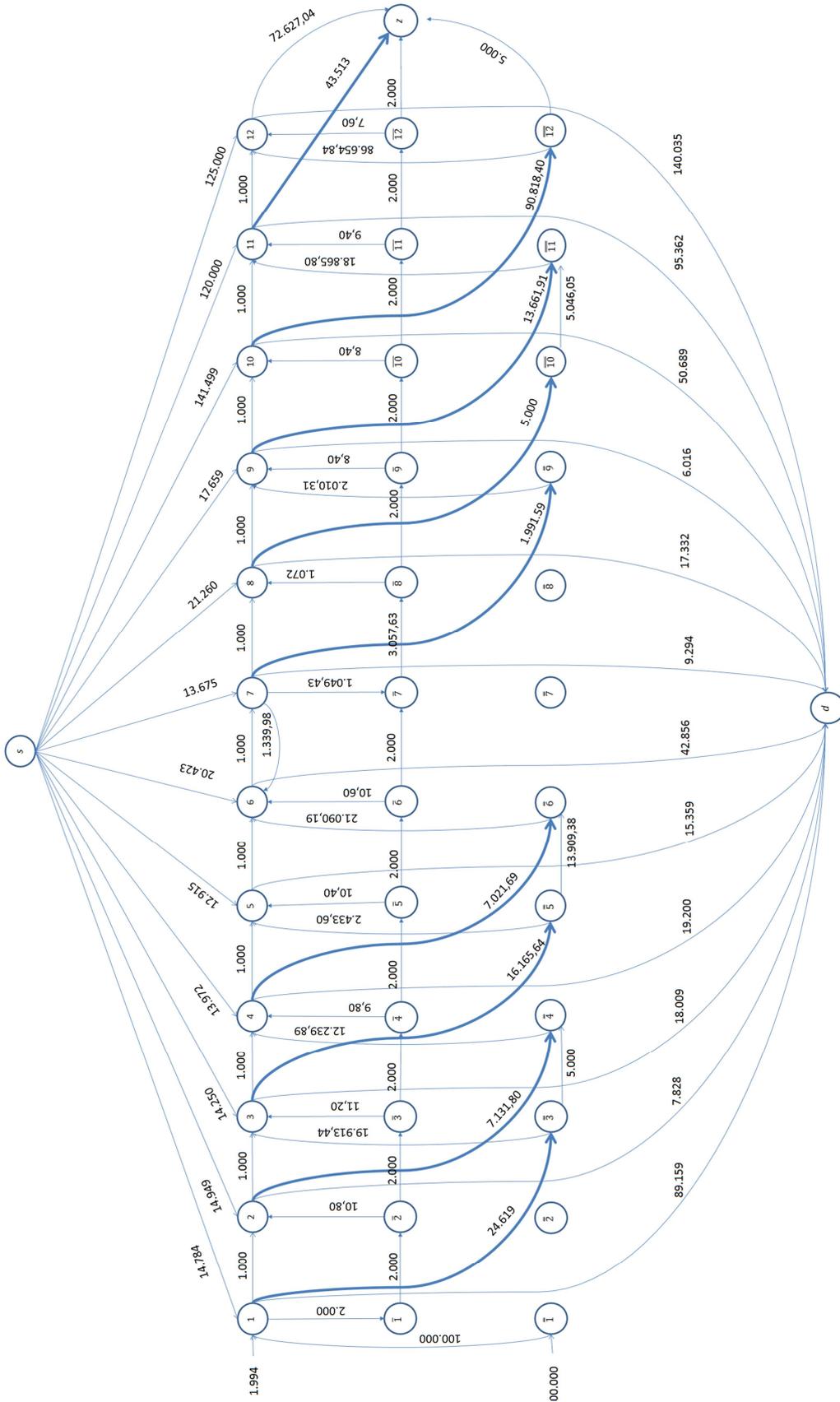
Os custos para aplicações de recursos nos ativos b e c são $C_{(a,b)} = C_{(a,c)} = 0$. Os custos de resgatar recursos dos ativos b e c são (já que considera-se o juro líquido de imposto de renda retido na fonte) $C_{(b,a)} = C_{(c,a)} = 0$. Para os empréstimos bancários, existe o limite máximo de R\$ 100.000 mil. Assume-se que, uma vez contratado o empréstimo, o pagamento do valor contratado mais os juros devem ocorrer no período imediatamente posterior. Assim sendo, as opções existentes para a movimentação financeira desse horizonte de planejamento são: manter saldo em conta corrente, destinar fundos às aplicações financeiras disponíveis e utilizar a linha de crédito para cobertura de fluxos de caixa líquidos negativos.

3.3 Resultados computacionais

Sendo o fluxo líquido de caixa negativo, a necessidade de caixa deve ser atendida por meio das opções disponíveis: saldo anterior em caixa, resgate de aplicação financeira e/ou linha de crédito. Como dados de entrada, todas as transações ocorrem no início do

período a que estão ligadas, sejam elas as entradas e saídas de caixa, bem como os arcos horizontais e verticais. A Figura 3.4 apresenta a solução ótima do modelo determinístico de fluxos em rede. Os valores nos arcos representam os fluxos das variáveis de decisão f_{ij} .

Figura 3.4 Resultado de solução ótima do modelo determinístico.

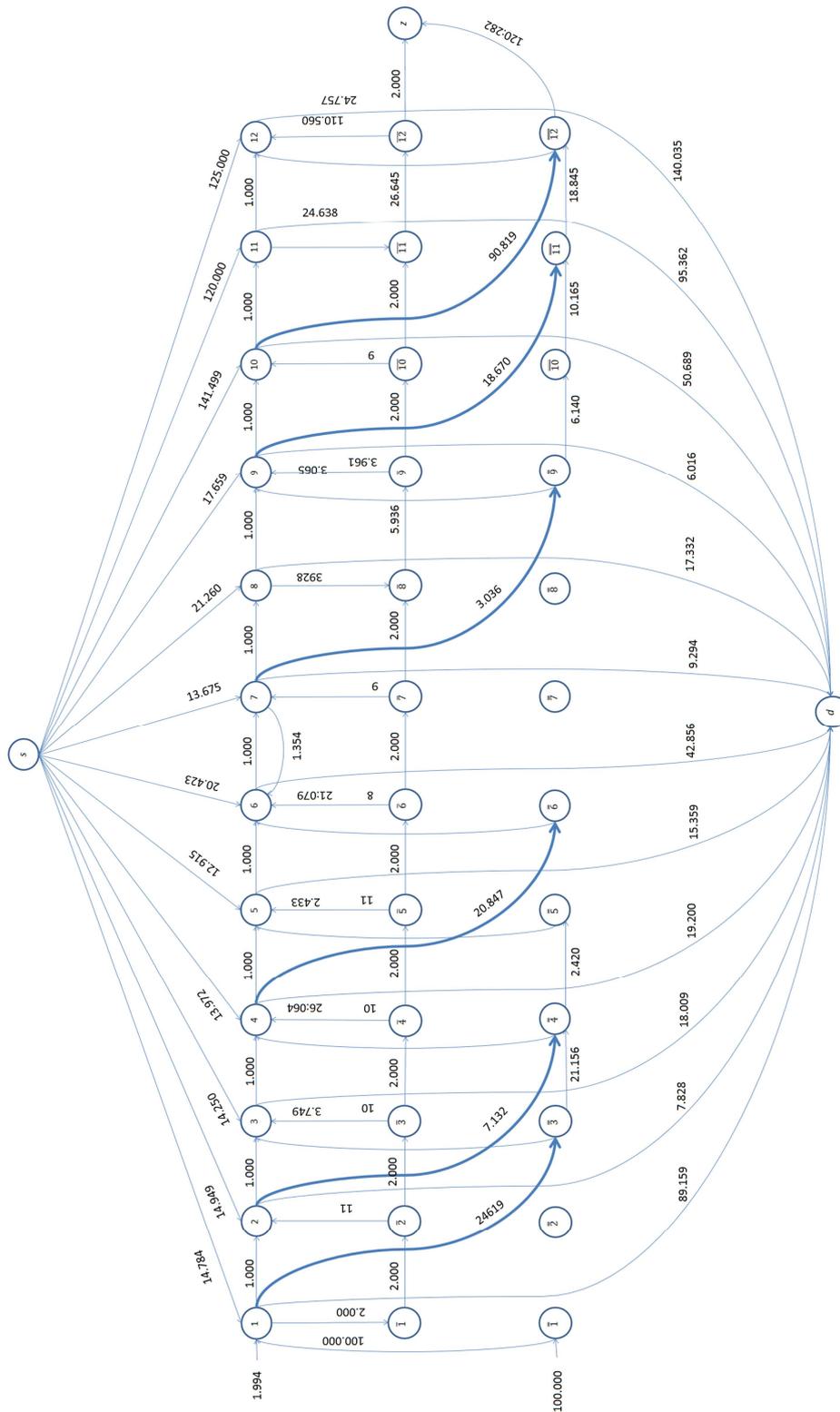


Como era esperado, a solução ótima do modelo aloca a maior parte dos investimentos no ativo c que possui carência para o resgate, pagando um rendimento maior que o ativo b . Os montantes que saem do nó 11 e 12 chegam no nó terminal z diretamente, sem passar pelos ativos b ou c , já que o horizonte de planejamento termina no período 12 e são remunerados a um percentual de 106% do CDI, já que são valores maiores do que cinco milhões de reais. O nó terminal recebe recursos do nó 11, 12, $\overline{12}$ e $\overline{\overline{12}}$, cujos valores são R\$ 42.513,00, R\$ 72.627,04, R\$ 2.000,00 e R\$ 5.000,00, respectivamente (valores em milhares de reais). Esses valores chegam no nó terminal com os seus respectivos multiplicadores. Dessa forma, o valor da função objetivo é de R\$ 123.886,26.

É interessante observar que, para esse mesmo exemplo, a solução utilizada pela tesouraria da empresa resultou em um valor de R\$ 123.831,91. A Figura 3.5 apresenta a solução empregada pela empresa. Note que existem várias diferenças entre a solução determinística do modelo inteiro misto e a solução da tesouraria da empresa. A tesouraria da empresa, que conta com profissionais experientes no mercado financeiro, com mais de 15 anos de experiência nessas atividades, demora em torno de duas a três horas para elaborar o fluxo e realizar todos os cálculos necessários para gerar a solução do problema. O modelo determinístico de otimização linear inteira mista foi resolvido otimamente em menos de um segundo, pelo solver utilizado, facilitando a tomada de decisão por parte do gestor financeiro. O número total de variáveis foi de 1.666, sendo que dentre estas existem 48 variáveis inteiras. O número de restrições é de 29.004. A tesouraria da empresa estudou e calculou novamente o fluxo de caixa e concordou que a solução proposta pelo modelo determinístico foi um pouco melhor do que a solução gerada por ela, validando a solução e a lógica do modelo para a utilização prática na empresa.

Note que o ganho financeiro obtido pelo modelo determinístico não é relevante neste exemplo. No entanto, além do pequeno aumento de recursos financeiros no nó objetivo, o modelo gera uma nova forma de gerenciar o caixa, com aumento da segurança e velocidade na análise do problema, bem como permite a sistematização do processo da gestão do fluxo de caixa, uma vez que a solução do modelo é menos dependente da experiência dos analistas da tesouraria da empresa. Ademais, a cada mudança de cenário nos dados de entrada, o modelo gera rapidamente a solução otimizada. Essa rapidez é muito importante para os tomadores de decisão, já que, em muitos casos, os parâmetros do modelo são forçados a variar para gerar cenários de choque, no intuito de analisar os impactos financeiros de mudanças no fluxo de caixa da empresa.

Figura 3.5 Resultado da solução da tesouraria da empresa.



Outros exemplos da empresa também foram analisados por meio do modelo determinístico inteiro misto e comparados com as soluções da tesouraria. Os resultados dessas

comparações foram similares ao exemplo ilustrativo anterior, mostrando a consistência e a exatidão do modelo para representar apropriadamente o problema do fluxo de caixa e gerar soluções competitivas em relação às soluções apresentadas pela tesouraria.

4. MODELO DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Neste capítulo, desenvolve-se um modelo matemático de otimização robusta para o problema de gestão de caixa de empresas do setor de material escolar a partir do modelo determinístico do Capítulo 3. O modelo é baseado na perspectiva de otimização robusta desenvolvida por Bertsimas e Sim (2004). Considere o grafo $G = (N, A, W)$ do modelo determinístico do Capítulo 3, com os parâmetros w_{ji} , s_i e d_i , $j \in J_i$, modelados como variáveis aleatórias simétricas, independentes e limitadas \tilde{w}_{ji} , \tilde{s}_i e \tilde{d}_i que pertencem, no caso específico do problema de fluxo de caixa, aos intervalos $[w_{ji}, w_{ji} - \hat{w}_{ji}]$, $[s_i, s_i - \hat{s}_i]$ e $[d_i, d_i + \hat{d}_i]$. Estes intervalos representam os desvios mais desfavoráveis dessas variáveis aleatórias. De fato, uma redução no valor do multiplicador \tilde{w}_{ij} diminui o fluxo de recursos no arco (i, j) , uma redução no parâmetro \tilde{s}_i , reduz as entradas de caixa provenientes das vendas da empresa e um aumento dos parâmetros \tilde{d}_i , aumentam as saídas de caixa para o pagamento de fornecedores, impostos, salários, entre outros.

4.1 Formulação matemática do modelo robusto

De uma perspectiva de pior caso, as variáveis aleatórias podem ser escritas da seguinte forma: $\tilde{w}_{ji} = w_{ji} - \hat{w}_{ji}\xi_{ji}^w$, $\tilde{s}_i = s_i - \hat{s}_i\xi_i^s$ e $\tilde{d}_i = d_i + \hat{d}_i\xi_i^d$, onde ξ_{ji}^w , ξ_i^s e ξ_i^d são variáveis aleatórias com valores pertencentes a $[0,1]$. Então, a contraparte não-linear robusta do modelo inteiro-misto para o problema de fluxo de caixa pode ser formulada como:

$$\begin{aligned} \max_{f^1, f^2} \max_{(\tilde{w}, \tilde{w}^2) \in \mathcal{U}^0} & \tilde{w}_{n-1,z} f_{n-1,z}^1 + \tilde{w}_{n-1,z}^2 f_{n-1,z}^2 + \tilde{w}_{nz} f_{nz}^1 + \tilde{w}_{nz}^2 f_{nz}^2 + \tilde{w}_{\bar{n}z} f_{\bar{n}z} + \tilde{w}_{\bar{n},z} f_{\bar{n}z}^1 \\ & + \tilde{w}_{\bar{n}z}^2 f_{\bar{n}z}^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sujeito a

$$\sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji} f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq -a_0 - \tilde{s}_i + \tilde{d}_i, i = 1, \text{ para todo } (\tilde{w}, \tilde{s}, \tilde{d}) \in \mathcal{U}^1 \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji} f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq -b_0, i = \bar{1}, \text{ para todo } \tilde{w} \in \mathcal{U}^2 \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji} f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq -c_0, i = \bar{\bar{1}}, \text{ para todo } \tilde{w} \in \mathcal{U}^2 \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji} f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq -\tilde{s}_i + \tilde{d}_i, i = 2, \dots, n, \text{ para todo } (\tilde{w}, \tilde{s}, \tilde{d}) \in \mathcal{U}^1 \quad (4.5)$$

$$\sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji} f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq 0, i = \bar{2}, \dots, \bar{n}, \text{ para todo } \tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{U}^2 \quad (4.6)$$

$$\sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji} f_{ji}^1 + \sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji}^2 f_{ji}^2 - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq 0, i = \bar{2}, \dots, \bar{n}, \text{ para todo } (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}^2) \in \mathcal{U}^3 \quad (4.7)$$

em que $\mathcal{U}^0, \mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2$ e \mathcal{U}^3 são os seguintes conjuntos incertos poliédricos:

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}^0 \\ &= \left\{ \tilde{w}_{n-1,z} \in \mathbb{R}, \tilde{w}_{n-1,z}^2 \in \mathbb{R}, \tilde{w}_{nz} \in \mathbb{R}, \tilde{w}_{nz}^2 \in \mathbb{R}, \tilde{w}_{\bar{n}z} \in \mathbb{R}, \tilde{w}_{\bar{n}z}^2 \in \mathbb{R} \right. \\ &: \tilde{w}_{n-1,z} = w_{n-1,z} - \hat{w}_{n-1,z} \xi_{n-1,z}^w, \tilde{w}_{n-1,z}^2 = w_{n-1,z}^2 - \hat{w}_{n-1,z}^2 \xi_{n-1,z}^{w^2}, \tilde{w}_{nz} = w_{nz} - \hat{w}_{nz} \xi_{nz}^w, \tilde{w}_{nz}^2 \\ &= w_{nz}^2 - \hat{w}_{nz}^2 \xi_{nz}^{w^2}, \tilde{w}_{\bar{n}z} = w_{\bar{n}z} - \hat{w}_{\bar{n}z} \xi_{\bar{n}z}^w, \tilde{w}_{\bar{n}z}^2 = w_{\bar{n}z}^2 - \hat{w}_{\bar{n}z}^2 \xi_{\bar{n}z}^{w^2} \text{ e } \tilde{w}_{\bar{n}z}^2 \\ &= w_{\bar{n}z}^2 - \hat{w}_{\bar{n}z}^2 \xi_{\bar{n}z}^{w^2} \text{ e } \xi_{n-1,z}^w + \xi_{n-1,z}^{w^2} + \xi_{nz}^w + \xi_{nz}^{w^2} + \xi_{\bar{n}z}^w + \xi_{\bar{n}z}^{w^2} \leq \Gamma^0 \left. \right\} \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}^1 \\ &= \left\{ \tilde{w}_{ji} \in \mathbb{R}, \tilde{s}_i \in \mathbb{R}, \tilde{d}_i \in \mathbb{R} : \tilde{w}_{ji} = w_{ji} - \hat{w}_{ji} \xi_{ji}^w, \tilde{s}_i = s_i - \hat{s}_i \xi_i^s \text{ e } \tilde{d}_i = d_i + \hat{d}_i \xi_i^d, j \right. \\ & \left. \in J_i, \sum_{j \in J_i} \xi_{ji}^w + \xi_i^s + \xi_i^d \leq \Gamma_i^1 \right\}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$\mathcal{U}^2 = \left\{ \tilde{w}_{ji} \in \mathbb{R} : \tilde{w}_{ji} = w_{ji} - \hat{w}_{ji} \xi_{ji}^w, j \in J_i, \sum_{j \in J_i} \xi_{ji}^w \leq \Gamma_i^2 \right\}, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}^3 \\ &= \left\{ \tilde{w}_{ji} \in \mathbb{R}, \tilde{w}_{ji}^2 \in \mathbb{R} : \tilde{w}_{ji} = w_{ji} - \hat{w}_{ji} \xi_{ji}^w, \tilde{w}_{ji}^2 = w_{ji}^2 - \hat{w}_{ji}^2 \xi_{ji}^{w^2}, j \right. \\ & \left. \in J_i, \sum_{j \in J_i} \xi_{ji}^w + \xi_{ji}^{w^2} \leq \Gamma_i^3 \right\}, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.11) \end{aligned}$$

A ideia de robustez, preconizada por Bertsimas e Sim (2003, 2004), é construir uma solução robusta que esteja protegida contra os desvios de pior caso. Tomando-se a restrição (4.2), tem-se:

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji} + s_i - d_i - \sum_{j \in N^-} f_{ij} + a_0 \geq \max_{\xi^w, \xi^s, \xi^d} \left\{ \sum_{j \in J_i} \hat{w}_{ji} f_{ji} \xi_{ji}^w + \hat{s}_i \xi_i^s + \hat{d}_i \xi_i^d \right\}, i = 1 \quad (4.12)$$

A maximização interna pode ser interpretada como um problema de escolher as variáveis aleatórias que conduzem para os desvios de pior caso, o que por sua vez pode ser definido como o seguinte problema de programação linear:

Maximize

$$\sum_{j \in J_i} \hat{w}_{ji} f_{ji} \xi_{ji}^w + \hat{s}_i \xi_i^s + \hat{d}_i \xi_i^d, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.13)$$

Sujeito a

$$\sum_{j \in J_i} \xi_{ji}^w + \xi_i^s + \xi_i^d \leq \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.14)$$

$$0 \leq \xi_{ji}^w \leq 1, j \in J_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.15)$$

$$0 \leq \xi_i^s \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

$$0 \leq \xi_i^d \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.17)$$

Se a maximização interna for substituída em (4.12) pelo problema auxiliar (4.13) – (4.17), o problema resultante continua não-linear, devido ao produto das variáveis de decisão. Entretanto, este problema é facilmente superado pela consideração do problema dual referente ao problema (4.13) – (4.17). Sejam λ_i , ϕ_{ji}^w , ϕ_i^s e ϕ_i^d as variáveis duais associadas as restrições (4.14), (4.15), (4.16) e (4.17), respectivamente. Então, o problema dual pode ser escrito como:

$$\text{Minimize } \lambda_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^w + \phi_i^s + \phi_i^d, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.18)$$

sujeito a

$$\lambda_i + \phi_{ji}^w \geq \hat{w}_{ji} f_{ji}, j \in J_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.19)$$

$$\lambda_i + \phi_i^s \geq \hat{s}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.20)$$

$$\lambda_i + \phi_i^d \geq \hat{d}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.21)$$

$$\lambda_i, \phi_{ji}^w, \phi_i^s, \phi_i^d \geq 0, j \in J_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.22)$$

Como o problema primal (4.13) – (4.17) é factível e limitado para todo Γ_i – de fato, a solução trivial $\xi^w = \xi^s = \xi^d = 0$ é sempre possível – então, por dualidade forte, seu correspondente dual (4.18) – (4.22) é factível, limitado e seus valores ótimos coincidem. Logo, a maximização interna de (4.12) pode ser substituída pelo problema dual e a correspondente contraparte tratável robusta do balanço de fluxo torna-se:

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji} + s_i - d_i - \sum_{j \in N^-} f_{ij} - \lambda_i \Gamma_i - \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^w - \phi_i^s - \phi_i^d \geq -a_0, i = 1 \quad (4.23)$$

$$\lambda_i + \phi_{ji}^w \geq \hat{w}_{ji} f_{ji}, j \in J_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.24)$$

$$\lambda_i + \phi_i^s \geq \hat{s}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.25)$$

$$\lambda_i + \phi_i^d \geq \hat{d}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.26)$$

$$\lambda_i, \phi_{ji}^w, \phi_i^s, \phi_i^d \geq 0, j \in J_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.27)$$

Note que nessa modelagem foram consideradas três fontes de incertezas, \tilde{w}_{ji} , \tilde{s}_i e \tilde{d}_i . Apesar de serem fontes de incertezas diferentes, já que \tilde{w}_{ji} corresponde a incerteza da taxa de juros e \tilde{s}_i e \tilde{d}_i são fontes de incerteza relacionadas a taxa de câmbio, elas impactam o montante de recurso financeiro que o nó 1 recebe e libera. Ou seja, a consideração dessas fontes de incerteza de forma conjunta faz sentido economicamente e é importante na construção do equivalente robusto, já que a consideração dessas incertezas isoladamente não faz sentido, e a solução do modelo converge para aquela obtida pela formulação do modelo de Soyster.

Na restrição (3.15) do modelo determinístico do capítulo 3 (ver também a restrição (4.7)), existe a possibilidade de aplicarmos os recursos de duas formas: se o montante aplicado for maior ou igual a zero e menor do que lm_{ij} , a taxa de juros que rentabiliza a aplicação financeira é w_{ji}^1 e, caso o montante seja maior ou igual a lm_{ij} a taxa de juros é w_{ji}^2 , com $w_{ji}^1 < w_{ji}^2$. Como já foi salientado no capítulo 3 o problema aqui apresentado é de maximização e a função entre essas taxas de juros e o montante aplicado é convexa, então pode-se aplicar a programação inteira mista para a solução deste problema. Assumindo que os coeficientes \tilde{w}_{ji} , \tilde{w}_{ji}^1 e \tilde{w}_{ji}^2 são incertos (para $i = \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n}$), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji} f_{ji}^1 + \sum_{j \in N^-} \tilde{w}_{ji}^2 f_{ji}^2 - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq 0 &\equiv \sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji}^1 + \sum_{j \in N^-} w_{ji}^2 f_{ji}^2 - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq \\ &\geq \sum_{j \in N^-} \hat{w}_{ji} f_{ji}^1 \xi_{ji}^w + \sum_{j \in N^-} \hat{w}_{ji}^2 f_{ji}^2 \xi_{ji}^{w^2}, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \end{aligned} \quad (4.28)$$

De uma perspectiva de pior caso, a restrição (4.28) torna-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji}^1 + \sum_{j \in N^-} w_{ji}^2 f_{ji}^2 - \sum_{j \in N^-} f_{ij} \geq \max_{\xi^w, \xi^{w^2}} \left\{ \sum_{j \in J_i} \hat{w}_{ji} f_{ji}^1 \xi_{ji}^w + \sum_{j \in J_i} \hat{w}_{ji}^2 f_{ji}^2 \xi_{ji}^{w^2} \right\}, i \\ = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Similarmente aos passos realizados anteriormente, define-se o problema de programação linear equivalente ao problema de maximização interna de (4.29):

$$\text{Maximize } \sum_{j \in J_i} \hat{w}_{ji} f_{ji}^1 \xi_{ji}^w + \sum_{j \in J_i} \hat{w}_{ji}^2 f_{ji}^2 \xi_{ji}^{w^2}, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.30)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in J_i} \xi_{ji}^w + \xi_{ji}^{w^2} \leq \Gamma_i^3, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.31)$$

$$0 \leq \xi_{ji}^w \leq 1, j \in J_i, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.32)$$

$$0 \leq \xi_{ji}^{w^2} \leq 1, j \in J_i, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.33)$$

Considere, como nos passos anteriores, as variáveis duais, ϕ_{ji}^w , $\phi_{ji}^{w^2}$ e λ_i associadas às restrições (4.31), (4.32) e (4.33), respectivamente. Então, o dual do problema (4.30) – (4.33) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^w + \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^{w^2} + \lambda_i \Gamma_i^3, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.34)$$

sujeito a

$$\phi_{ji}^w + \lambda_i \geq \hat{w}_{ji} f_{ji}^1, j \in J_i, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.35)$$

$$\phi_{ji}^{w^2} + \lambda_i \geq \hat{w}_{ji}^2 f_{ji}^2, j \in J_i, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.36)$$

$$\phi_{ji}^w, \phi_{ji}^{w^2}, \lambda_i \geq 0, j \in J_i, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.37)$$

Como o problema primal (4.30) – (4.33) é factível e limitado, por dualidade forte, tem-se que o seu correspondente dual (4.34) – (4.37) é factível e limitado e os seus valores ótimos coincidem. Assim, como a maximização interna do problema (4.29) é equivalente ao problema (4.30) – (4.33) e esse, por sua vez, é equivalente ao dual (4.34) – (4.37), então pode-se substituir esse último pela maximização interna de (4.29) para se obter a restrição equivalente robusta tratável (linear) da restrição original, que é exibida a seguir:

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji}^1 + \sum_{j \in N^-} w_{ji}^2 f_{ji}^2 - \sum_{j \in N^-} f_{ij} - \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^w - \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^{w^2} - \lambda_i \Gamma_i^3 \geq 0, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.38)$$

sujeito a

$$\phi_{ji}^w + \lambda_i \geq \hat{w}_{ji} f_{ji}^1, j \in J_i, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.39)$$

$$\phi_{ji}^{w^2} + \lambda_i \geq \hat{w}_{ji}^2 f_{ji}^2, j \in J_i, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.40)$$

$$\phi_{ji}^w, \phi_{ji}^{w^2}, \lambda_i \geq 0, j \in J_i, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.41)$$

$$f_{ij}^1 + f_{ij}^2 = f_{ij}, j \in N^-, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.42)$$

$$0 \leq f_{ij}^1 < n x_{ij}^1, j \in N^-, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.43)$$

$$n x_{ij}^2 \leq f_{ij}^2 < M x_{ij}^2, j \in N^-, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.44)$$

$$x_{ij}^1, x_{ij}^2 \in \{0, 1\}, j \in N^-, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.45)$$

Aplicando esses mesmos desenvolvimentos nas demais restrições do modelo determinístico e na função objetivo, o correspondente modelo linear robusto completo para o problema do fluxo de caixa pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & w_{n-1,z} f_{n-1,z}^1 + w_{n-1,z}^2 f_{n-1,z}^2 + w_{nz} f_{nz}^1 + w_{nz}^2 f_{nz}^2 + w_{\bar{n}z} f_{\bar{n}z} + w_{\bar{n},z} f_{\bar{n}z}^1 + w_{\bar{n}z}^2 f_{\bar{n}z}^2 \\ & - \phi_{n-1,z}^w - \phi_{n-1,z}^{w^2} - \phi_{nz}^w - \phi_{nz}^{w^2} - \phi_{\bar{n}z}^w - \phi_{\bar{n}z}^{w^2} - \lambda_z \Gamma^0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji} + s_i - d_i - \sum_{j \in N^-} f_{ij} - \lambda_i \Gamma_i - \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^w - \phi_i^s - \phi_i^d \geq -a_0, i = 1 \quad (4.23)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} - \sum_{j \in N^-} \phi_{ji}^w - \lambda_i \Gamma_i^2 \geq -b_0, i = \bar{1} \quad (4.47)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} - \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^w - \lambda_i \Gamma_i^3 \geq -c_0, i = \bar{1} \quad (4.48)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji} + s_i - d_i - \sum_{j \in N^-} f_{ij} - \lambda_i \Gamma_i^1 - \sum_{j \in J_i} \phi_{ji}^w - \phi_i^s - \phi_i^d \geq 0, i = 2, \dots, n \quad (4.49)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji} - \sum_{j \in N^-} f_{ij} - \sum_{j \in N^-} \phi_{ji}^w - \lambda_i \Gamma_i^2 \geq 0, \quad i = \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.50)$$

$$\sum_{j \in N^-} w_{ji} f_{ji}^1 + \sum_{j \in N^-} w_{ji}^2 f_{ji}^2 - \sum_{j \in N^-} f_{ij} - \sum_{j \in N^-} \phi_{ji}^w - \sum_{j \in N^-} \phi_{ji}^{w^2} - \lambda_i \Gamma_i^3 \geq 0, i = \bar{\bar{2}}, \bar{\bar{3}}, \dots, \bar{\bar{n}} \quad (4.38)$$

$$\phi_{n-1,z}^w + \lambda_z \geq \hat{w}_{n-1,z} f_{n-1,z}^1 \quad (4.51)$$

$$\phi_{n-1,z}^{w^2} + \lambda_z \geq \hat{w}_{n-1,z}^2 f_{n-1,z}^2 \quad (4.52)$$

$$\phi_{nz}^w + \lambda_z \geq \hat{w}_{nz} f_{nz}^1 \quad (4.53)$$

$$\phi_{nz}^{w^2} + \lambda_z \geq \hat{w}_{nz}^2 f_{nz}^2 \quad (4.54)$$

$$\phi_{\bar{n}z}^w + \lambda_z \geq \hat{w}_{\bar{n}z} f_{\bar{n}z} \quad (4.55)$$

$$\phi_{\bar{n}z}^w + \lambda_z \geq \hat{w}_{\bar{n}z} f_{\bar{n},z}^1 \quad (4.56)$$

$$\phi_{\bar{n}z}^{w^2} + \lambda_z \geq \hat{w}_{\bar{n}z}^2 f_{\bar{n}z}^2 \quad (4.45)$$

$$\phi_{n-1,z}^w, \phi_{n-1,z}^{w^2}, \phi_{nz}^w, \phi_{nz}^{w^2}, \phi_{\bar{n}z}^w, \phi_{\bar{n}z}^{w^2}, \phi_{\bar{n}z}^w, \lambda_z \geq 0 \quad (4.46)$$

$$\phi_{ji}^w + \lambda_i \geq \hat{w}_{ji} f_{ji}, i = 1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \quad (4.57)$$

$$\phi_i^s + \lambda_i \geq \hat{s}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.58)$$

$$\phi_i^d + \lambda_i \geq \hat{d}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.59)$$

$$\phi_{ji}^w, \phi_i^s, \phi_i^d, \lambda_i \geq 0, j \in J_i, i = 1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}, \bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}, \dots, \bar{\bar{n}} \quad (4.60)$$

$$\phi_{ji}^w + \lambda_i \geq \hat{w}_{ji} f_{ji}^1, i = \bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}, \dots, \bar{\bar{n}} \quad (4.61)$$

$$\phi_{ji}^{w^1} + \lambda_i \geq \hat{w}_{ji}^2 f_{ji}^2, i = \bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}, \dots, \bar{\bar{n}} \quad (4.62)$$

$$f_{n-1,z}^1 + f_{n-1,z}^2 = f_{n-1,z} \quad (3.17)$$

$$f_{n,z}^1 + f_{n,z}^2 = f_{n,z} \quad (3.18)$$

$$f_{\bar{n},z}^1 + f_{\bar{n},z}^2 = f_{\bar{n},z} \quad (3.19)$$

$$0 \leq f_{n-1,z}^1 < lm_{n-1,z}x_{n-1,z}^1 \quad (3.20)$$

$$lm_{n-1,z}x_{n-1,z}^2 \leq f_{n-1,z}^2 < Mx_{n-1,z}^2 \quad (3.21)$$

$$0 \leq f_{nZ}^1 < lm_{nZ}x_{nZ}^1 \quad (3.22)$$

$$lm_{nZ}x_{nZ}^2 \leq f_{nZ}^2 < Mx_{nZ}^2 \quad (3.23)$$

$$0 \leq f_{\bar{n}Z}^1 < lm_{\bar{n}Z}x_{\bar{n}Z}^1 \quad (3.24)$$

$$lm_{\bar{n}Z}x_{\bar{n}Z}^2 \leq f_{\bar{n}Z}^2 < Mx_{\bar{n}Z}^2 \quad (3.25)$$

$$x_{n-1,z}^1, x_{n-1,z}^2, x_{nZ}^1, x_{nZ}^2, x_{\bar{n}Z}^1, x_{\bar{n}Z}^2 \in \{0,1\} \quad (3.26)$$

$$x_{n-1,z}^1 + x_{n-1,z}^2 = 1 \quad (3.27)$$

$$x_{nZ}^1 + x_{nZ}^2 = 1 \quad (3.28)$$

$$x_{\bar{n}Z}^1 + x_{\bar{n}Z}^2 = 1 \quad (3.29)$$

$$f_{i,j}^1 + f_{i,j}^2 = f_{i,j}, (i,j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ ou } (i, \bar{i} + 2) \text{ e } \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.1)$$

$$0 \leq f_{ij}^1 < lm_{ij}x_{ij}^1, (i,j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ ou } (i, \bar{i} + 2) \text{ e } \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.2)$$

$$lm_{ij}x_{ij}^2 \leq f_{ij}^2 < Mx_{ij}^2, (i,j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ ou } (i, \bar{i} + 2) \text{ e } \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.3)$$

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = 1 \quad (3.4)$$

$$x_{ij}^1, x_{ij}^2 \in \{0,1\}, (i,j) = (\bar{i}, \bar{i} + 1) \text{ ou } (i, \bar{i} + 2) \text{ e } \bar{i} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ ou } i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.5)$$

$$0 \leq f_{i+1,i} \leq u_{i+1,i}, i = 2, \dots, n \quad (3.30)$$

$$f_{i,i+1} \geq m_{i,i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.31)$$

$$f_{nZ} \geq m_{nZ} \quad (3.32)$$

$$f_{i,i+1} \geq q_{i,i+1}, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} - 1 \quad (3.33)$$

$$f_{\bar{n}Z} \geq q_{\bar{n}Z} \quad (3.34)$$

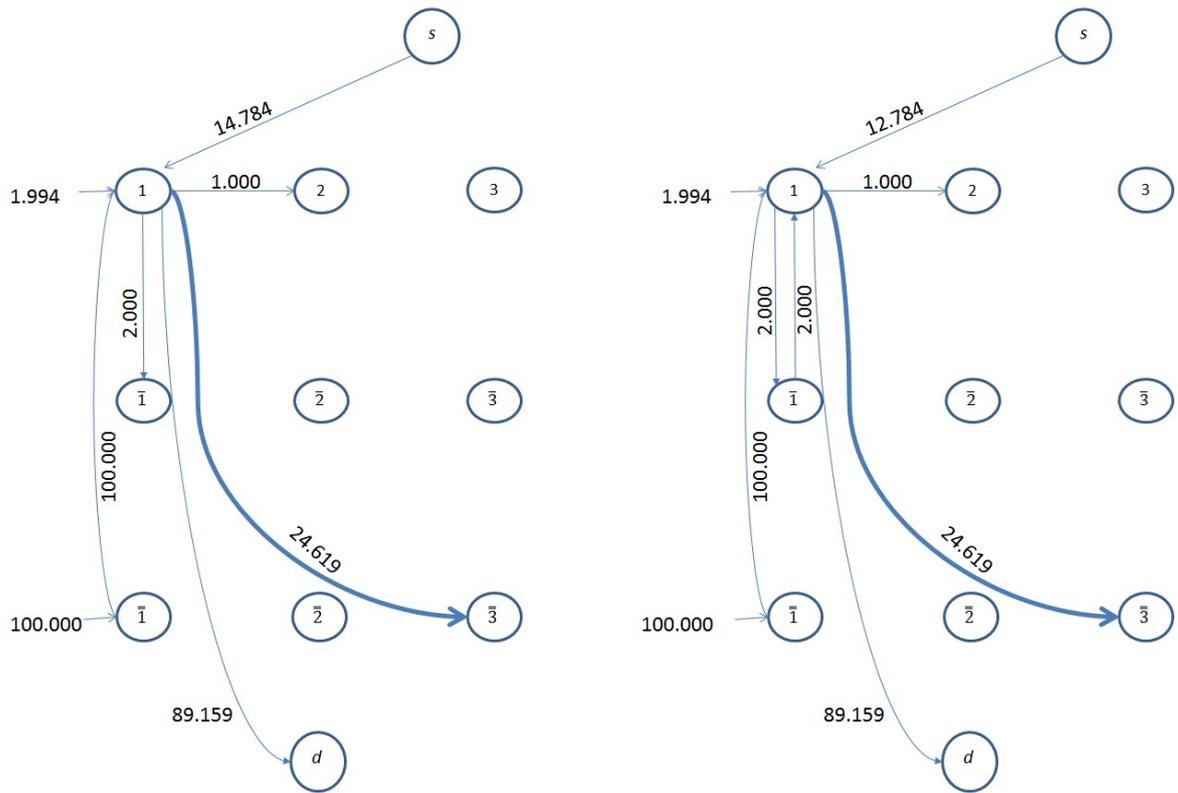
$$f_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \quad (3.35)$$

4.2 Cálculo da probabilidade de violação das restrições via Simulação de Monte Carlo

Embora Bertsimas e Sim (2004) forneçam limites teóricos para a violação de restrição, a sua abordagem refere-se a uma condição particular onde há uma única restrição a ser violada. Esta característica difere do problema estudado nesta tese que possui múltiplas restrições que, de forma conjunta, são violadas ou não. Como forma de superar a dificuldade de calcular o limitante probabilístico analiticamente, esta tese propõe o cálculo desse limitante probabilístico por meio da simulação de Monte Carlo.

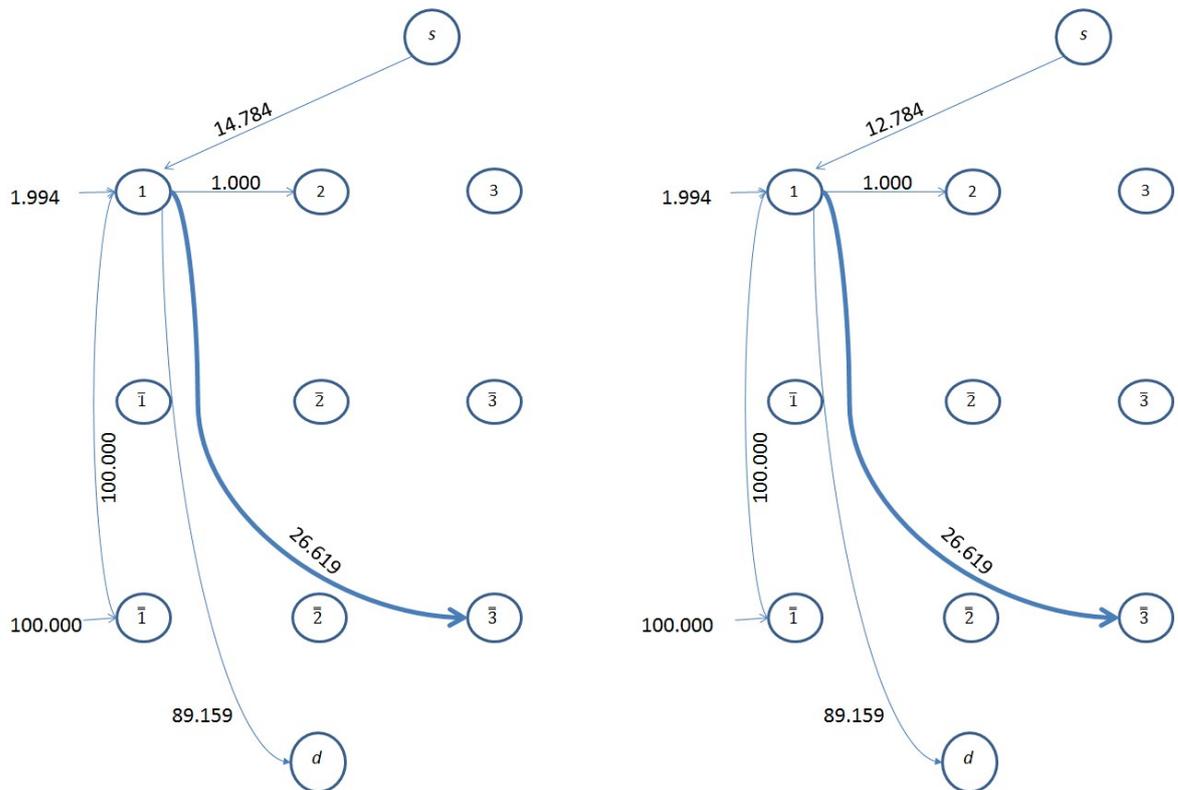
Para o cálculo da probabilidade de violação das restrições, as variáveis de decisão, da solução equivalente robusta, são fixadas e definem-se distribuições simétricas para os intervalos poliédricos dos parâmetros incertos. Cada valor aleatório gerado na simulação de Monte Carlo (para mais detalhes deste tipo de simulação, ver anexo II), testa se as restrições serão violadas ou não. Para verificar se a solução é factível, a simulação testa se, num determinado período, a soma dos montantes de recursos nos 3 ativos considerados é maior ou igual a zero. Ou seja, o saldo do caixa pode estar negativo, mas se o saldo de uma das aplicações estiver positivo e for suficiente para cobrir o déficit de caixa, a factibilidade da solução está garantida, já que não há falta de dinheiro no período. Esse recurso é importante, já que na prática o gestor financeiro utiliza desse mecanismo para suprir o ativo deficitário. Observe na Figura 4.1 que a estratégia da solução do modelo foi aplicar R\$ 2.000 (f_{11}) no ativo com liquidez imediata e aplicar R\$ 24.619 (f_{13}) no ativo com carência no resgate (lado esquerdo da Figura 4.1). Numa determinada iteração da simulação de Monte Carlo, houve uma entrada menor de caixa (R\$ 2.000 a menos) e, mesmo assim, a solução não se torna infactível, já que é possível resgatar o valor de R\$ 2.000,00, que deixou de entrar no caixa, do ativo com liquidez imediata (lado direito da Figura 4.1)

Figura 4.1 Exemplo de factibilidade de solução na simulação de Monte Carlo.



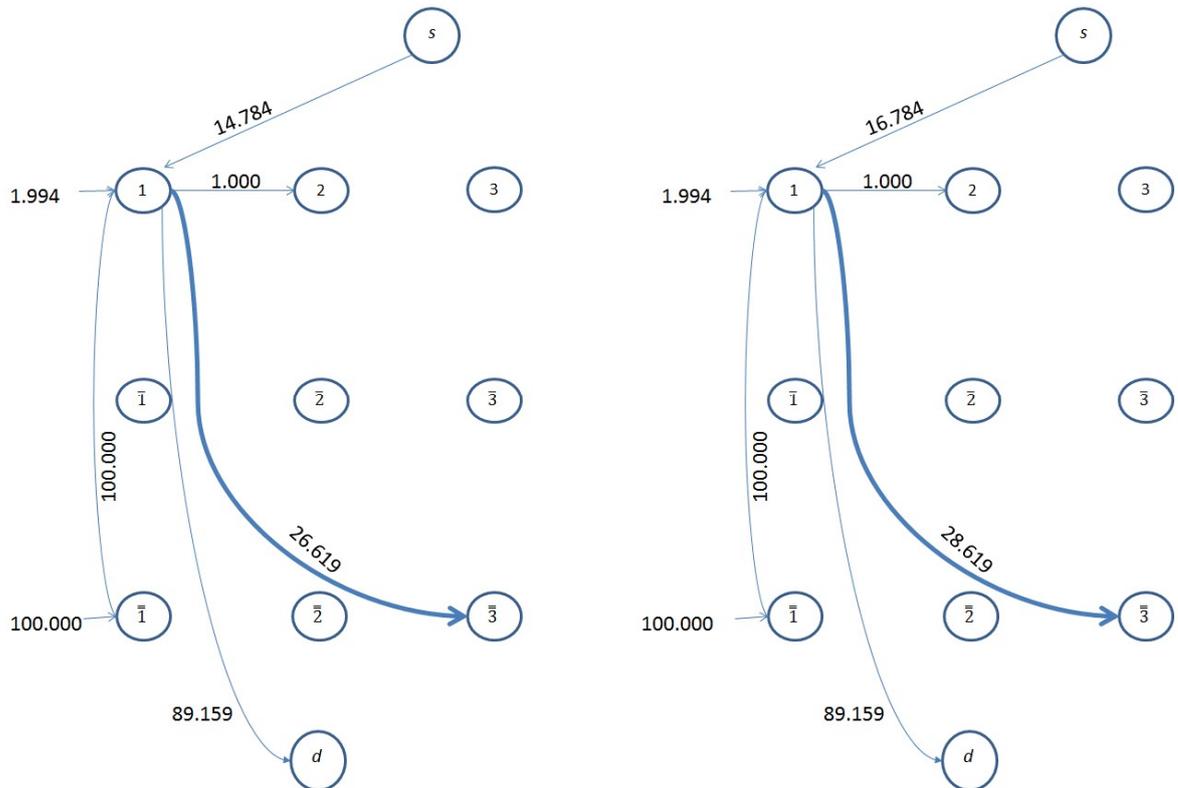
Uma outra iteração pode ser observada na Figura 4.2. Como a solução do modelo decidiu investir os recursos no ativo com período de carência, R\$ 26.619 no arco $f_{1\bar{3}}$ (lado esquerdo da Figura 4.2), se a iteração na simulação gerou uma entrada de caixa de R\$ 2.000 menor, gerando o valor de R\$ 12.784, não existe a possibilidade de a solução tornar-se factível, já que não é possível resgatar do ativo com carência para o resgate para compensar a menor entrada de caixa (lado direito da Figura 4.2).

Figura 4.2 Exemplo de infactibilidade de solução na simulação de Monte Carlo.



Um outro exemplo é ilustrado na Figura 4.3. Nela é possível observar que houve uma entrada maior de caixa do que estava previsto. Quando isso ocorre a simulação de Monte Carlo direciona os recursos adicionais para o ativo mais rentável que no caso é o ativo com carência para o resgate, aumentando o fluxo no arco $f_{1\bar{3}}$ em R\$ 2.000,00 (valor adicional que entrou no caixa da empresa).

Figura 4.3 Exemplo de aumento de fluxo de recursos na simulação de Monte Carlo.



Conforme apresentado nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, a simulação de Monte Carlo vai testar para cada iteração se existe ou não factibilidade da solução gerada pelo modelo robusto. O número de iterações, para os parâmetros incertos, \tilde{w}_{ij} , \tilde{s}_i e \tilde{d}_i , na simulação de Monte Carlo foi, arbitrariamente, definido em dez mil.

As distribuições utilizadas para a geração dos números aleatórios foram a uniforme e a normal e os números aleatórios estão nos intervalos $[-1\%, 1\%]$, $[-2\%, 2\%]$ e $[-3\%, 3\%]$ para os desvios de \tilde{s}_i e \tilde{d}_i . Para os multiplicadores \tilde{w}_{ij} , os intervalos para a geração dos números aleatórios são $[-20\%, 20\%]$, $[-30\%, 30\%]$ e $[-40\%, 40\%]$, considerando os três desvios propostos. Para gerar a simulação de Monte Carlo, foi resolvido o modelo robusto para Γ igual a zero até a cardinalidade do conjunto J_i para os cenários de desvios de \tilde{s}_i , \tilde{d}_i e \tilde{w}_{ij} considerados. Os resultados das iterações da simulação de Monte Carlo são armazenados de forma que, no final da simulação, a probabilidade de violação das restrições possa ser calculada da seguinte forma:

$$P(V) = \frac{N_V}{N} \quad (4.63)$$

em que

$P(V)$ probabilidade de violação das restrições;

N_V número de eventos cuja solução tornou infactível; e

N número total de iterações.

Com o modelo de otimização robusta e o método de cálculo da violação das restrições propostos, a seção a seguir apresenta a aplicação desse modelo com base nos dados da empresa de material escolar considerada no estudo de caso. Conforme é salientado no Capítulo 3, os dados foram intencionalmente distorcidos para manter a confidencialidade da fonte.

4.3 Incerteza nos dados

As seções 4.3.1 e 4.3.2 apresentam como é estimada as incertezas para as entradas e saídas de caixa e para os multiplicadores w_{ij} .

4.3.1 Estimativas dos desvios relacionados às entradas e saídas de caixa

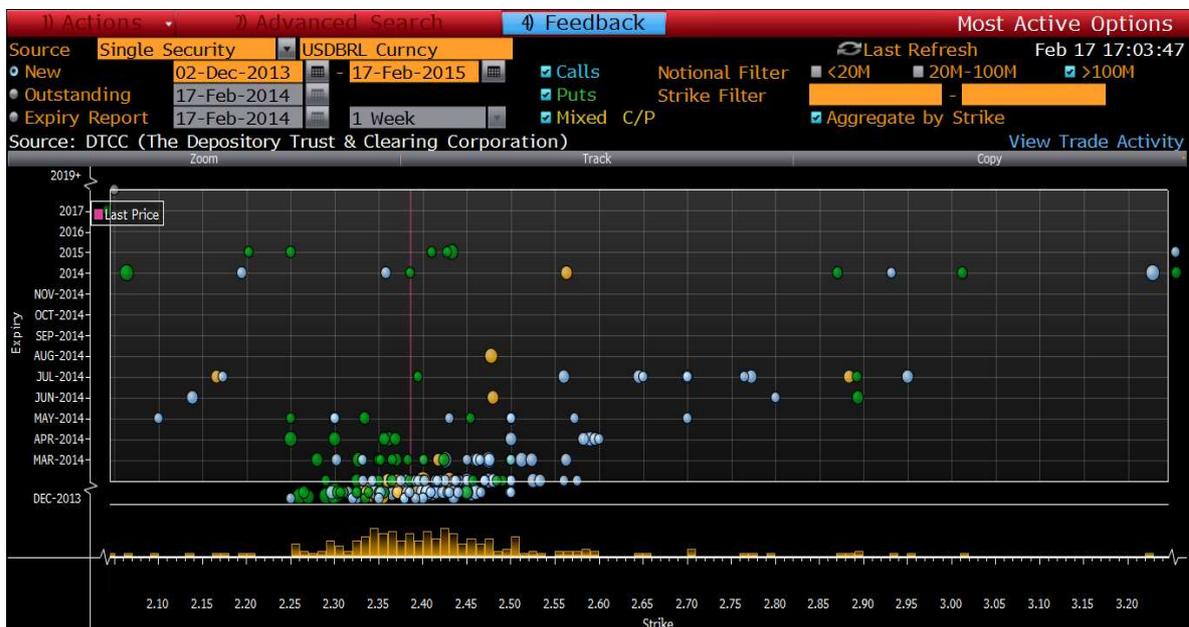
Para as entradas e saídas de caixa, \tilde{s}_i e \tilde{d}_i , os percentuais de variação levam em consideração o comportamento da taxa de câmbio real brasileiro (R\$) por dólar dos Estados Unidos (US\$). Como já salientado, a empresa estudada efetua as suas vendas no mercado interno e externo. Para o mercado interno, não se considera nenhuma fonte de incerteza, já que a inadimplência é baixa, menor do que 1% do total faturado, e as previsões de demanda para o mercado de material escolar são bastante precisas devido à sazonalidade bem característica desse setor. Dessa forma, a incerteza nas entradas de caixa \tilde{s}_i se concentra nos recebimentos do mercado externo. O componente central dessa incerteza é a taxa de câmbio R\$/US\$. Nesse sentido, não é a incerteza na previsão da demanda física (volume de vendas), especificamente, que gera a incerteza nas entradas de caixa, mas principalmente a incerteza no comportamento da taxa de câmbio que gera a incerteza nas entradas de caixa em reais na empresa estudada. Esse mesmo raciocínio é válido para as saídas de caixa \tilde{d}_i . Para as saídas de caixa em reais não são consideradas nenhum tipo de incerteza e, para as compras importadas, a fonte de incerteza também é a taxa de câmbio R\$/US\$.

Para a empresa estudada, a previsão da taxa de câmbio para um horizonte de

planejamento de doze meses é baseada nas seguintes fontes de informações: a) informações do setor bancário, principalmente as previsões das áreas econômicas de alguns bancos brasileiros e estrangeiros; b) previsões que são apresentadas pelo boletim Focus do Banco Central (<http://www.bcb.gov.br/?FOCUS>). Esse boletim é divulgado semanalmente pelo Banco Central do Brasil e participam dessas previsões cerca de cem instituições financeiras presentes no mercado financeiro brasileiro; c) análises macroeconômicas da área de finanças da empresa estudada e consultores contratados para tal fim; e d) posicionamento dos agentes econômicos em determinados ativos correlacionados com a taxa de câmbio R\$/US\$, ou derivados dessa taxa, como, por exemplo, as opções de compra e venda da taxa de câmbio a termo R\$/US\$.

A Figura 4.4 apresenta os contratos em aberto das opções de compra e venda de taxa de câmbio para diferentes datas de vencimento e preços de exercício. Note que, para o período considerado, a concentração dos contratos de opções de compra e venda de taxa de câmbio R\$/US\$ é em torno de R\$ 2,40.

Figura 4.4 Contratos de opções em aberto em 17 de fevereiro de 2014 (Fonte: Bloomberg, 2014).



A Tabela 4.1 apresenta a média das projeções para a taxa média de câmbio R\$/US\$ para 2014 para o mês de setembro de 2013. Para esse período, a previsão das instituições financeiras para a média da taxa de câmbio R\$/US\$ estava próxima de R\$ 2,40.

Tabela 4.1 Relatório Focus do Banco Central - Taxa de Câmbio - R\$/US\$ - Média do ano - Período de 06/09/2013 a 30/09/2013 para 31/12/2014.

Data	Taxa Média
06/09/2013	2,38
09/09/2013	2,38
10/09/2013	2,38
11/09/2013	2,38
12/09/2013	2,38
13/09/2013	2,38
16/09/2013	2,38
17/09/2013	2,38
18/09/2013	2,38
19/09/2013	2,37
20/09/2013	2,37
23/09/2013	2,37
24/09/2013	2,37
25/09/2013	2,37
26/09/2013	2,37
27/09/2013	2,36
30/09/2013	2,36

Fonte: Banco Central do Brasil.

Com tais informações e, conjuntamente às previsões das consultorias contratadas, a tesouraria da empresa estipulou a taxa de câmbio para o exercício societário de abril de 2014 a março de 2015 em 2,40 reais por 1,00 dólar americano (R\$ 2,40). Essa é uma taxa indicativa que serve de referência para a elaboração do orçamento do ano societário de 2014.

A tesouraria da empresa não possui um modelo próprio de previsão de volatilidade da taxa de câmbio. Portanto, para uma medida dessa volatilidade, que se baseia na expectativa dos agentes econômicos do desvio padrão no futuro para uma determinada taxa de câmbio real por dólar americano, é utilizada a superfície de volatilidade implícita divulgada pela BM&FBovespa (para mais detalhes sobre a superfície de volatilidade, acessar <http://www.bmf.com.br/bmfbovespa/pages/boletim1/SuperficieVolatilidade.asp>).

Com isso, é possível calcular por interpolação, a volatilidade a termo para uma determinada taxa de câmbio real por dólar americano futura. A empresa utiliza a interpolação

cubic spline (CALDEIRA, 2011), que é uma metodologia de interpolação numérica. Ela representa uma forma de interpolação através de polinômios de terceira ordem e sua principal característica é o amortecimento ou suavização que apresenta na transição de um nó para outro, sendo muito utilizada para instrumentos sensíveis a variações bruscas.

A volatilidade implícita, ou seja, a volatilidade futura para a taxa de câmbio, é negociada na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&FBovespa). Para a obtenção da superfície de volatilidade, é utilizado um provedor de notícias e cotações em tempo real que atualiza uma planilha de cálculo e fornece as cotações das volatilidades para os prazos e taxas de câmbio que a tesouraria da companhia deseja. Neste estudo, o horizonte de tempo para a cotação dessas taxas foi de doze períodos (meses). A BM&FBovespa divulga a superfície de volatilidade em termos percentuais ao ano (% a.a.). Para calcular o desvio em relação à taxa de câmbio, que é o desvio utilizado para as simulações do modelo de otimização robusta, a volatilidade percentual anual é descapitalizada de forma contínua para os períodos de um a doze, conforme Tabela 4.2.

Tabela 4.2 Volatilidade da taxa de câmbio em percentuais para o período considerado.

Período	Dias Úteis	Vol. Anual %	Vol. Per. %	Taxa Câmbio
1	22	16,68%	4,93%	2,2817
2	43	15,11%	6,24%	2,2502
3	62	14,55%	7,22%	2,2268
4	84	14,25%	8,23%	2,2025
5	104	14,52%	9,33%	2,1761
6	123	13,96%	9,75%	2,1659
7	143	13,77%	10,37%	2,1510
8	164	13,64%	11,00%	2,1359
9	185	13,57%	11,63%	2,1210
10	206	13,52%	12,22%	2,1066
11	228	13,46%	12,80%	2,0927
12	249	13,34%	13,26%	2,0818

Fonte: BM&FBovespa e cálculos do autor

A descapitalização contínua segue a fórmula apresentada a seguir:

$$Vol\%_{per.du} = \left(\frac{Vol\%_{252du}}{\sqrt{252}} \right) * \sqrt{per.du} \quad (4.64)$$

Sendo que:

$Vol\%_{per.du}$ é a volatilidade da taxa de câmbio para um determinado período, medida em dias úteis;

$Vol\%_{252du}$ é a volatilidade da taxa de câmbio para um ano, considerando um ano com 252 dias úteis; e

$per.du$ é o número de dias úteis para o qual se quer calcular a volatilidade da taxa de câmbio.

A quarta coluna da Tabela 4.2 apresenta as volatilidades para os períodos de um a doze, considerando uma taxa de câmbio constante de R\$ 2,40 para todos os períodos considerados no horizonte de planejamento. A última coluna da Tabela 4.2 representa a taxa de câmbio de reais por dólar americano obtida, aplicando a volatilidade calculada para todos os períodos do horizonte de planejamento. Como o pior caso para as entradas de caixa é uma redução no valor recebido, aplicamos o desvio reduzindo o valor da taxa de câmbio.

Para o exemplo da empresa estudada, 25% do valor das entradas mensais de caixa são exportados, ou seja, sofrem a influência direta da taxa de câmbio real por dólar americano. Portanto, os valores das entradas de caixa que devem sofrer o desvio calculado na Tabela 4.2 são aqueles apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 Cálculo das entradas de caixa em dólares americanos.

Períodos	Entradas de Caixa R\$	Taxa de Câmbio R\$/US\$	Entradas de Caixa US\$
1	3.696	2,40	1.540
2	3.737	2,40	1.557
3	3.563	2,40	1.484
4	3.493	2,40	1.455
5	3.229	2,40	1.345
6	5.106	2,40	2.127
7	3.419	2,40	1.424
8	5.315	2,40	2.215
9	4.415	2,40	1.839
10	35.375	2,40	14.739
11	30.000	2,40	12.500
12	31.250	2,40	13.021
Totais	132.598		55.246

A Tabela 4.3 apresenta as entradas de caixa em reais, a taxa de câmbio real por dólar americano para a conversão dos valores em reais e as entradas de caixa em dólar americano que sofrem o impacto dos desvios nas taxas de câmbio. Convertendo os valores das entradas de caixa em dólares, apresentados na Tabela 4.3, para reais, de acordo com as taxas de câmbio apresentadas na Tabela 4.2, obtém-se os valores de entradas de caixa em reais para os valores exportados, conforme a Tabela 4.4. Com a soma desses valores com as entradas de caixa em reais no mercado interno, obtém-se o valor total de entradas de caixa para os doze meses do período de planejamento, conforme Tabela 4.5.

Tabela 4.4 Entradas de caixa em dólares convertidas para reais aplicado os desvios nas taxas de câmbio R\$/US\$.

Períodos	Entradas de Caixa	Taxa	Entradas de Caixa
	US\$	Câmbio	R\$
1	1.540	2,2817	3.514
2	1.557	2,2502	3.504
3	1.484	2,2268	3.305
4	1.455	2,2025	3.206
5	1.345	2,1761	2.928
6	2.127	2,1659	4.608
7	1.424	2,1510	3.064
8	2.215	2,1359	4.730
9	1.839	2,1210	3.901
10	14.739	2,1066	31.051
11	12.500	2,0927	26.159
12	13.021	2,0818	27.106
Totais	55.249		117.076

Dessa forma, aplicando os desvios apresentados na quarta coluna (Vol. Per. %) da Tabela 4.2, na taxa de câmbio para os doze períodos do horizonte de planejamento, obtém-se, para as entradas de caixa em dólares e convertidas para reais, um desvio total de 11,71%. Esse desvio é obtido pela diferença entre o valor das entradas de caixa em dólares, convertidas para reais antes das aplicações dos desvios mensais e após as aplicações dos desvios. Como o objetivo é a obtenção de um desvio que seja aplicado ao total das entradas de caixa, as entradas de caixa em dólares convertidas para reais após as aplicações dos desvios foram somadas às entradas de caixa em reais, que são advindas das vendas da empresa no mercado nacional. Obtém-se um total de entradas de caixa de R\$ 514.865, conforme demonstrado na Tabela 4.5. Esse montante representa um desvio de 2,93%, em termos absolutos, em relação às entradas de caixa totais antes das aplicações dos desvios nas entradas de caixa em dólares convertidas para reais. Dessa forma, obtém-se o desvio de 3%, com arredondamento na segunda casa decimal, para as entradas de caixa para os doze períodos considerados no horizonte de planejamento.

Tabela 4.5 Entradas totais de caixa (mercado interno e externo) em reais.

Período	Entradas de Caixa em US\$ convertidas para R\$	Entradas de Caixa R\$	Total R\$
1	3.514	11.088	14.602
2	3.504	11.212	14.716
3	3.305	10.688	13.993
4	3.206	10.479	13.685
5	2.928	9.686	12.614
6	4.608	15.317	19.925
7	3.064	10.256	13.320
8	4.730	15.945	20.675
9	3.901	13.244	17.146
10	31.051	106.124	137.175
11	26.159	90.000	116.159
12	27.106	93.750	120.856
Totais	117.076	397.790	514.865

Para as saídas de caixa, também se aplica o mesmo desvio de 3% calculado para as entradas de caixa. A razão para tal é que as saídas de caixa em dólares são proporcionais as entradas de caixa em dólares e o raciocínio aplicado para as entradas de caixa é válido para as saídas de caixa. Ou seja, as saídas de caixa em dólares representam vinte e cinco por cento das saídas de caixa totais da empresa. Dessa forma, o raciocínio para a obtenção dos desvios para as saídas de caixa é o mesmo daquele aplicado para as entradas de caixa.

Como são simulados três cenários de desvios para os testes computacionais, são aplicados dois acréscimos de R\$ 0,03 (três centavos de reais) na taxa de câmbio, obtendo-se os desvios totais de 2% e 1% nas entradas e saídas de caixa totais para o horizonte de planejamento. Portanto, o desvio de 3% representa, para o gestor da empresa estudada, o caso mais desfavorável para as entradas de caixa. O desvio de 2% é o caso intermediário e o desvio de 1% representa um caso em que a economia brasileira não sofrerá nenhuma intercorrência que afete de forma significativa a volatilidade da taxa de câmbio.

4.3.2. Incerteza nos multiplicadores w_{ij}

Para os multiplicadores \tilde{w}_{ij} , que são as taxas de juros dos empréstimos e das aplicações financeiras com e sem período de carência, os percentuais de 20%, 30% e 40% baseiam-se no desvio padrão (volatilidade) histórico das operações de crédito com recursos livres referenciais para taxa de juros para pessoas jurídicas. Os dados originais para o cálculo dessa volatilidade foram obtidos no site do Banco Central do Brasil (www.bcb.gov.br).

Outra série considerada para o cálculo dos desvios de \tilde{w}_{ij} é a volatilidade histórica do Certificado de Depósito Interbancário (CDI) e os dados originais para o cálculo da volatilidade do CDI foram obtidos no site da Cetip (www.cetip.com.br). O CDI é a taxa base que indexa as aplicações financeiras da empresa estudada. A Figura 4.5 apresenta o retorno para as operações de crédito com recursos livres referenciais da taxa de juros para pessoas jurídicas. Com base nesses dados, foi calculada a volatilidade anual, de acordo com a seguinte expressão:

$$Vol.\%_{a.a.} = desvpad_{a.m.} * \sqrt{\frac{252}{21}}, \quad (4.65)$$

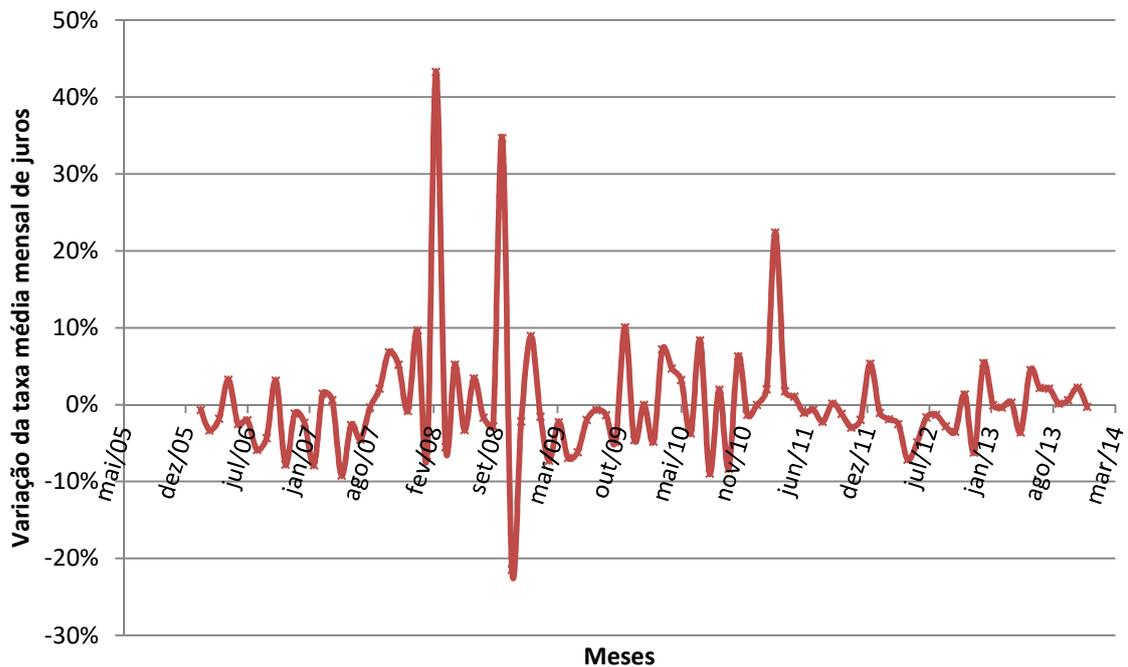
em que:

$Vol.\%_{a.a.}$ volatilidade anual das operações de crédito com recursos livres referenciais para taxa de juros para pessoas jurídicas;

$desvpad_{a.m.}$ desvio padrão em base mensal das operações de crédito com recursos livres referências para taxa de juros para pessoas jurídicas; e

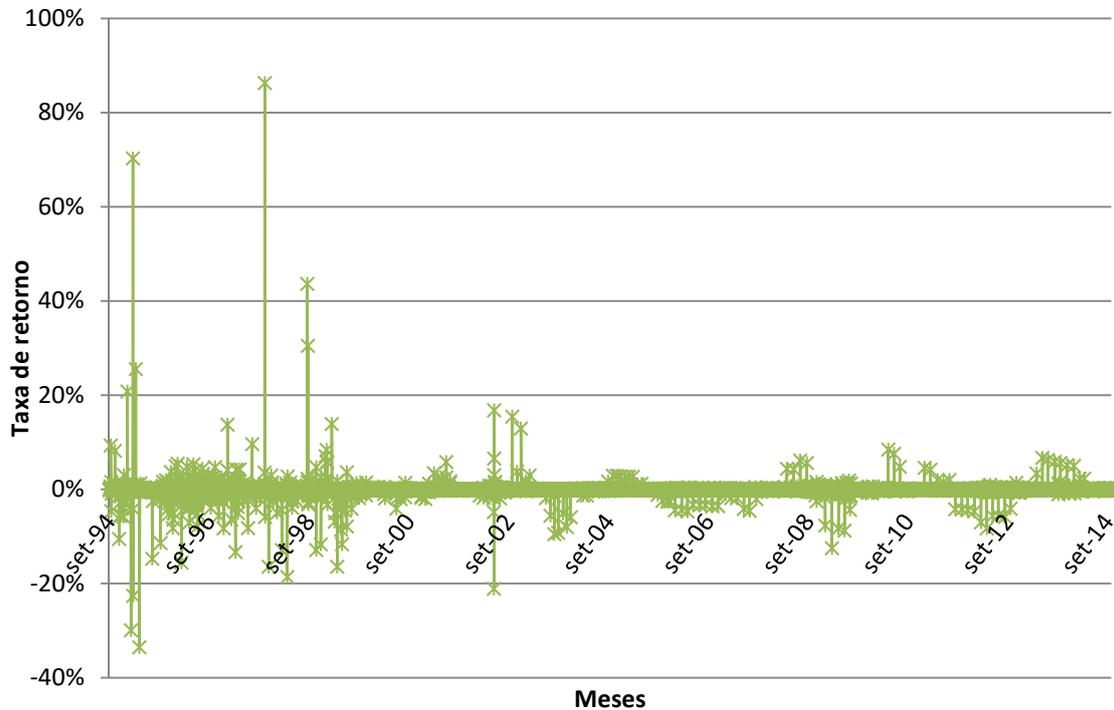
$\sqrt{\frac{252}{21}}$ representa a forma contínua da capitalização mensal para a anual da volatilidade das operações de crédito com recursos livres referenciais para taxa de juros para pessoas jurídicas.

Figura 4.5 Variação da Taxa média mensal (pós-fixada) das operações de crédito com recursos livres referenciais para taxa de juros - Pessoa jurídica (Fonte: Banco Central do Brasil).



A volatilidade mensal das operações de crédito com recursos livres referenciais da taxa de juros para pessoas jurídicas é de 7,21%. Com essa volatilidade e aplicando a expressão (4.55), obtém-se a volatilidade anual para essas operações de crédito no valor de 24,99%. A Figura 4.6 apresenta o retorno histórico do Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI) com início em setembro de 1994, logo após a implantação do Plano Real.

Figura 4.6 Série histórica do retorno do Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI) desde setembro de 1994



A Figura 4.6 apresenta a série histórica do retorno do Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI) desde setembro de 1994. Para essa série histórica, a volatilidade (desvio padrão) diária do CDI é de 2,33%. Com base nesses dados foi calculada a volatilidade anual de acordo com a seguinte expressão:

$$Vol._{\%a.a.} = desvpad_{a.d.} * \sqrt{252} \tag{4.66}$$

em que:

$Vol._{\%a.a.}$ volatilidade anual do CDI;

$desvpad_{a.d.}$ desvio padrão em base diária do CDI; e

$\sqrt{252}$ utilizada para calcular a capitalização contínua anual da volatilidade do CDI.

De acordo com a expressão (4.66), a volatilidade anual do CDI é de 37,02%. Dessa forma, com o cálculo das volatilidades anuais das operações de crédito com recursos livres referenciais para taxa de juros para pessoas jurídicas e do CDI, definem-se os desvios para as simulações de w_{ij} no modelo robusto. O desvio mínimo de 20% é arredondado para baixo do desvio de 24,99% das operações de crédito com recursos livres referenciais da taxa de juros

para pessoas jurídicas; e o desvio máximo é de 40%, arredondando-se para cima o desvio de 37,02% do CDI. Além disso, criou-se um desvio intermediário adicional de 30%, resultado médio dos desvios anteriores.

Para os cenários considerados, definiu-se φ^{sd} como o nível de variabilidade das entradas de caixa, \tilde{s}_i e das saídas de caixa, \tilde{d}_i . Para os demais parâmetros incertos, \tilde{w}_{ij} , definiu-se φ^w como sendo os seus níveis de variabilidade. Dessa forma, $\hat{w}_{ij} = \varphi^w w_{ij}$, $\hat{s}_i = \varphi^{sd} s_i$, $\hat{d}_i = \varphi^{sd} d_i$. Nos testes computacionais foram adotados três valores para φ^w : 20%, 30% e 40%, conforme explicação anterior. Para φ^{sd} , os seus níveis de variabilidade são 1%, 2% e 3%. Devido à característica sazonal das entradas de caixa da empresa, que se concentram, basicamente, nos meses de janeiro, fevereiro e março (períodos 10, 11 e 12, respectivamente), no modelo de otimização robusta, o primeiro cenário visa analisar os efeitos dos parâmetros incertos \tilde{s}_i e \tilde{d}_i no valor ótimo da função objetivo nesses períodos. O segundo cenário considera que apenas os parâmetros incertos \tilde{w}_{ij} variam nos períodos 10, 11 e 12. O terceiro cenário considera que todos os parâmetros incertos, \tilde{w}_{ij} , \tilde{s}_i e \tilde{d}_i variam simultaneamente nos períodos 10, 11 e 12.

Como uma forma de testar o modelo robusto, foram gerados três cenários alternativos e que não são característicos da empresa utilizada para o estudo de caso. O primeiro cenário alternativo considera que as entradas de caixa são aleatórias entre [R\$ 12.915, R\$ 141.499] e as saídas de caixa são aleatórias entre [R\$ 6.016, R\$ 145.035] e os parâmetros incertos \tilde{s}_i e \tilde{d}_i variam para todos os períodos do horizonte de planejamento. Para esse teste, definiu-se $\varphi^s = 1,76\%$ como o nível de variabilidade das entradas de caixa, \tilde{s}_i e $\varphi^s = 2,26\%$ para as saídas de caixa, \tilde{d}_i . Esses níveis de variabilidade foram definidos aleatoriamente no intervalo [1%, 3%]. O segundo cenário alternativo agrega a eventualidade da cobrança da Contribuição Provisória sobre Movimentação Financeira (CPMF) para todas as saídas de caixa da conta corrente da empresa ao primeiro cenário alternativo. Finalmente, o terceiro cenário alternativo agrega ao primeiro cenário alternativo, a possibilidade de se aplicar num certificado de operação estruturada, onde o rendimento da aplicação depende do valor aplicado. O rendimento majorado só ocorre se o valor aplicado for maior ou igual a um mínimo preestabelecido, caso contrário o rendimento é nulo.

4.4 Resultados computacionais do modelo robusto

Os parâmetros utilizados para os testes numéricos desta seção são os mesmos utilizados no capítulo 3. O modelo foi codificado na linguagem de modelagem algébrica GAMS 23.0.2 e resolvido pelo solver de otimização CPLEX 11.2 com parâmetros *default*. O computador utilizado para os testes computacionais foi o mesmo Notebook com processador Intel(R) Core(TM) i3-3110M, 2.40GHz e memória RAM de 4GB. Assim como antes, os valores monetários são apresentados em milhares de reais.

4.4.1 Soluções robustas com incerteza nas entradas e saídas de caixa

Nessa seção são apresentados os resultados da utilização do modelo robusto para o fluxo de caixa da empresa estudada, considerando as entradas e saídas de caixa como incertas, \tilde{s}_i e \tilde{d}_i , respectivamente. Para os períodos 10, 11 e 12, Γ_i variou entre 0 e $|J_i| = 6$ (inclusive) com passo unitário. Ou seja, para cada período considerado, existem um \tilde{s}_i e um \tilde{d}_i incerto. O tempo para encontrar a solução ótima foi menos de um segundo.

A Tabela 4.6 resume os resultados do primeiro cenário considerando os coeficientes \tilde{s}_i e \tilde{d}_i incertos para os períodos 10, 11 e 12. Ela apresenta os valores de Γ_i , a deterioração da função objetivo do modelo robusto, em termos percentuais, a probabilidade de violação das restrições e o ganho de factibilidade em relação à solução nominal ($\Gamma_i = 0$) para todos os níveis de desvios. Considerou-se a distribuição uniforme para a geração dos valores aleatórios para o intervalo poliédrico utilizado na simulação de Monte Carlo.

Observe na Tabela 4.6 que o valor ótimo da função objetivo atinge uma deterioração máxima (situação de pior caso ou solução de Soyster com $\Gamma_i = 6$) de 5,5% para $\varphi^{sd} = 1\%$, 11,0% para $\varphi^{sd} = 2\%$ e 16,4% para $\varphi^{sd} = 3\%$. Note que, apesar da deterioração do valor da função objetivo, a probabilidade de violação das restrições $P(V)$ cai numa proporção maior. Isto pode ser observado para $\Gamma_i = 4$, por exemplo, onde o percentual de deterioração da função objetivo é de 4,3%, quando $\varphi^{sd} = 1\%$, e a probabilidade de violação da restrição cai para 10,0%, proporcionando um ganho de factibilidade em relação a solução nominal de 49,6%.

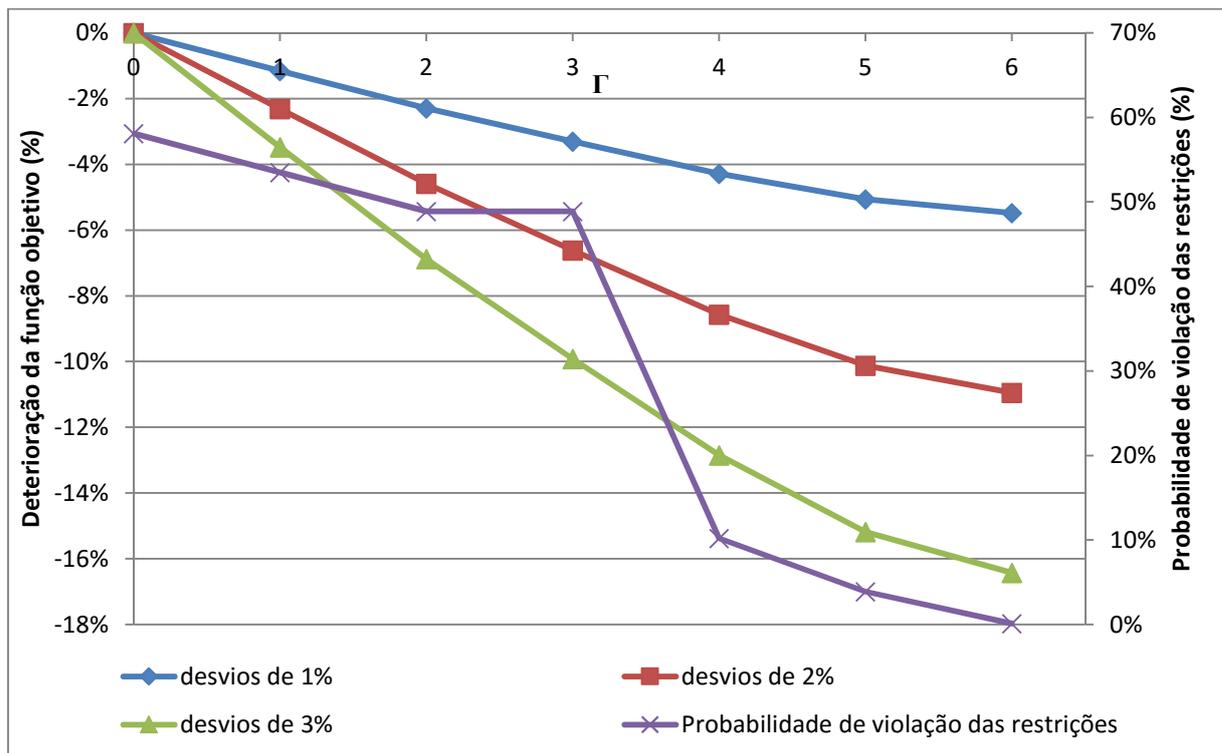
Tabela 4.6 Resultados do modelo de otimização robusta

	Γ	0	1	2	3	4	5	6
Δ^*	$\varphi^{sd} = 1\%$	0,00%	-1,20%	-2,30%	-3,30%	-4,30%	-5,10%	-5,50%
	$\varphi^{sd} = 2\%$	0,00%	-2,30%	-4,60%	-6,60%	-8,60%	-10,10%	-11,00%
	$\varphi^{sd} = 3\%$	0,00%	-3,50%	-6,90%	-9,90%	-12,90%	-15,20%	-16,40%
	$P(V)$	59,60%	54,00%	50,00%	49,60%	10,00%	4,70%	0,00%
Ganho								
Factibilidade			5,60%	9,60%	10,10%	49,60%	54,90%	59,60%

* $\Delta = (z^R - z^N)/z^N$, em que z^R e z^N são os valores ótimos do modelo robusto e nominal, respectivamente.

Ou seja, nessa situação a deterioração percentual do valor da função objetivo é marginal em relação à queda da probabilidade de violação das restrições da solução robusta *vis-a-vis* à da solução nominal, evidenciando o *trade-off* entre o risco e o retorno em favor da adoção da solução robusta para o problema do fluxo de caixa. A Figura 4.7 ilustra o *trade-off* entre o risco e o retorno das soluções robustas em função de Γ_i para os níveis de variabilidade considerados. Quanto maior for o *budget* de incerteza, maior é a deterioração percentual do valor da função objetivo e menor a probabilidade de violação das restrições.

Figura 4.7 *Trade-off* entre o risco e o retorno das soluções robustas.



Para evidenciar ainda mais a vantagem da solução robusta em detrimento da adoção da solução nominal, para cada iteração da simulação de Monte Carlo que não viola as restrições, a sobra de recursos financeiros em cada nó é agregada às variáveis de decisão para que elas possam seguir nos mesmos arcos que a solução robusta indicou, de forma a aumentar o valor

da função objetivo, se este for o caso, conforme explicado na seção 4.2. Após o término da simulação é calculado o valor médio das soluções para as dez mil iterações da simulação de Monte Carlo. A Tabela 4.7 apresenta o valor médio da função objetivo em função de Γ_i .

Note que o valor médio, mesmo para a solução de pior caso teórico, está em torno do valor da função objetivo da solução nominal. Para $\Gamma_i = 4$, onde o ganho de factibilidade em relação a solução nominal é de 49,6%, o valor médio para $\varphi^{sd} = 1\%$ é superior à solução do modelo determinístico inteiro misto.

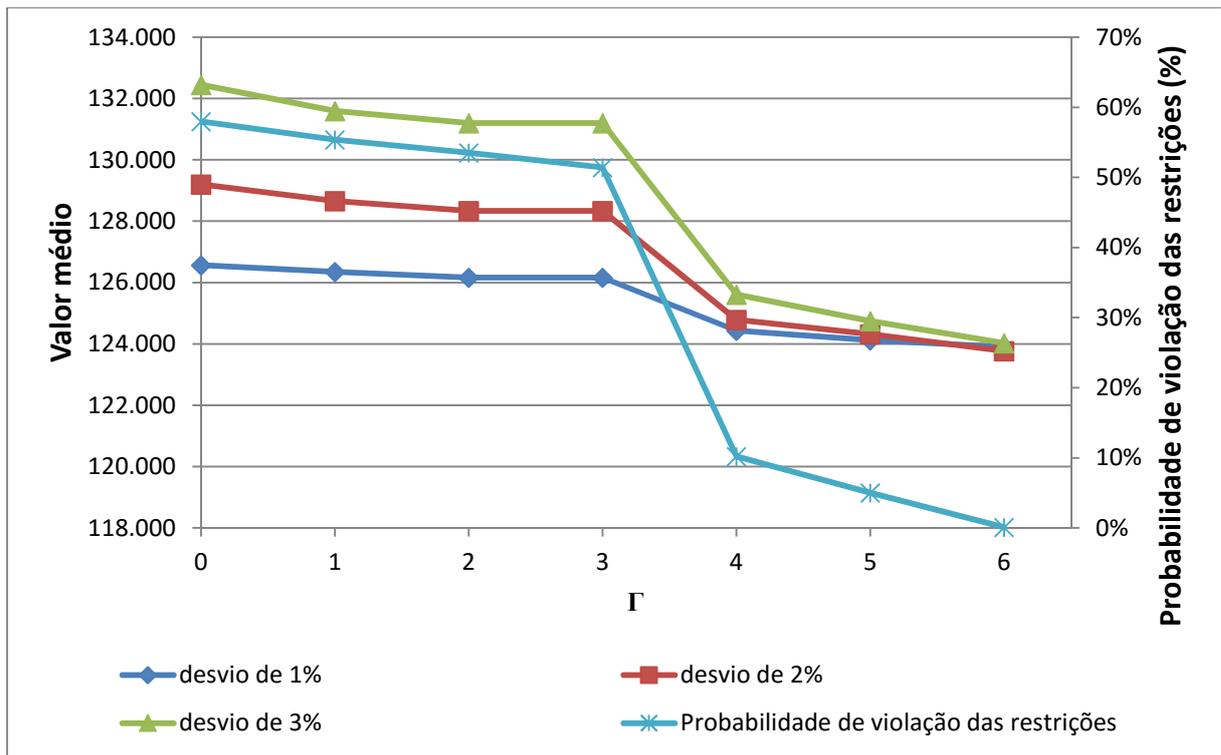
Essa constatação evidencia que a solução robusta adotada, seja ela qual for, é melhor do que a adoção da solução nominal. Na prática, não faz sentido o gestor financeiro adotar uma solução nominal que exibe uma probabilidade de violação de 59,6%, quando ele pode adotar uma solução robusta que possui uma probabilidade de violação de 10% e cujo valor médio da função objetivo é maior que o valor da função objetivo da solução nominal, que ele já entendia como uma solução boa para o montante de recursos financeiros no final do horizonte de planejamento.

A Figura 4.8 mostra o valor esperado para todo φ^{sd} . Observe que para todos os níveis de variabilidade e para todo Γ_i , os valores esperados estão em torno do valor nominal (determinístico) ou maior que este, o que evidencia a vantagem de utilizar as soluções robustas em detrimento da solução nominal.

Tabela 4.7 Valor médio da função objetivo robusta em função de Γ_i .

Γ		0	1	2	3	4	5	6
Valor Médio	$\varphi^{sd} = 1\%$	126.572	126.348	126.166	126.166	124.439	124.120	123.901
	$\varphi^{sd} = 2\%$	129.204	128.665	128.334	128.334	124.792	124.325	123.770
	$\varphi^{sd} = 3\%$	132.449	131.592	131.199	131.199	125.610	124.750	124.026

Figura 4.8 Valor médio da função objetivo robusta.



As Figuras 4.9 e 4.10 apresentam o *trade-off* entre o risco e o retorno das soluções robustas em função de Γ_i e os valores esperados das soluções robustas para os níveis de variabilidade considerados, respectivamente, com geração de números aleatórios para a simulação de Monte Carlo, considerando distribuições normais com média zero e desvio padrão de 0,003 para $\varphi^{sd} = 1\%$, média zero e desvio padrão de 0,006 para $\varphi^{sd} = 2\%$ e média zero e desvio padrão de 0,0095 para $\varphi^{sd} = 3\%$. Note que, com as distribuições normais, a probabilidade de violação decresce mais rápido do que com a adoção das distribuições uniformes e o valor esperado possui desvio padrão em torno de 30% menor do que àquele apresentado pelas distribuições uniformes. O mais importante é concluir que mesmo com distribuições distintas, mas simétricas, as soluções robustas são mais vantajosas do que a solução nominal.

Figura 4.9 Trade-off entre o risco e o retorno das soluções robustas com distribuição normal.

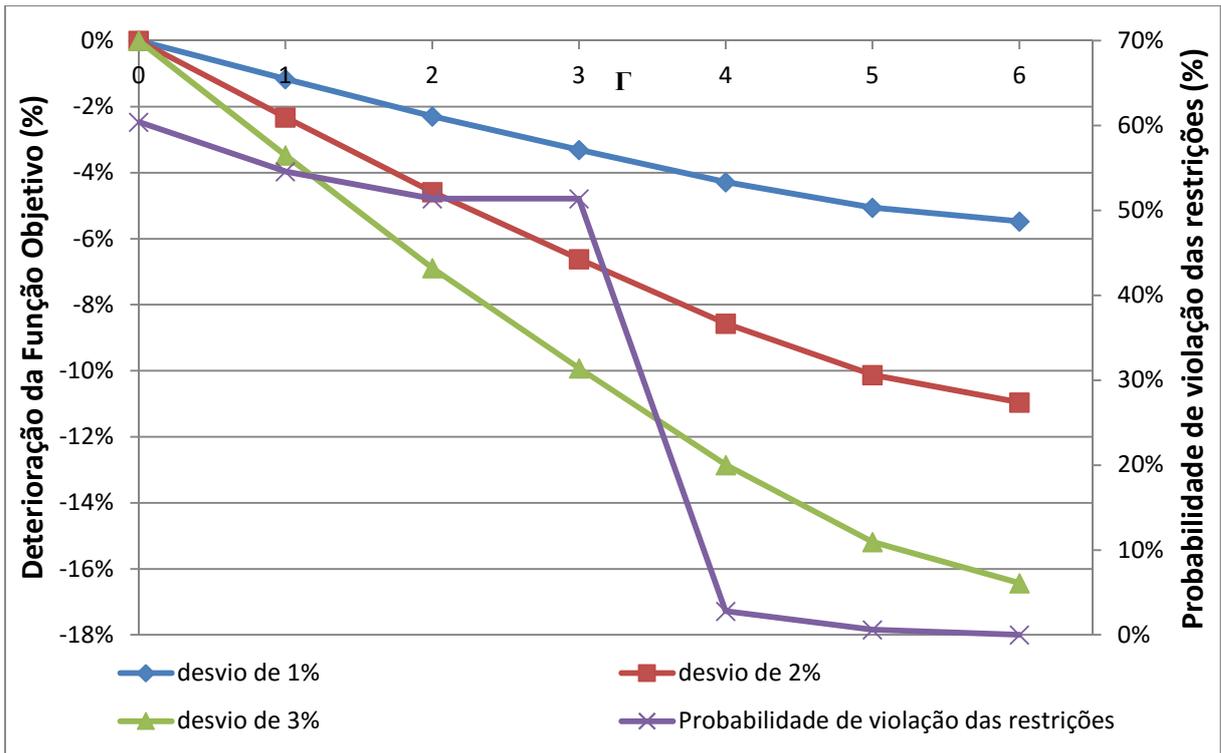
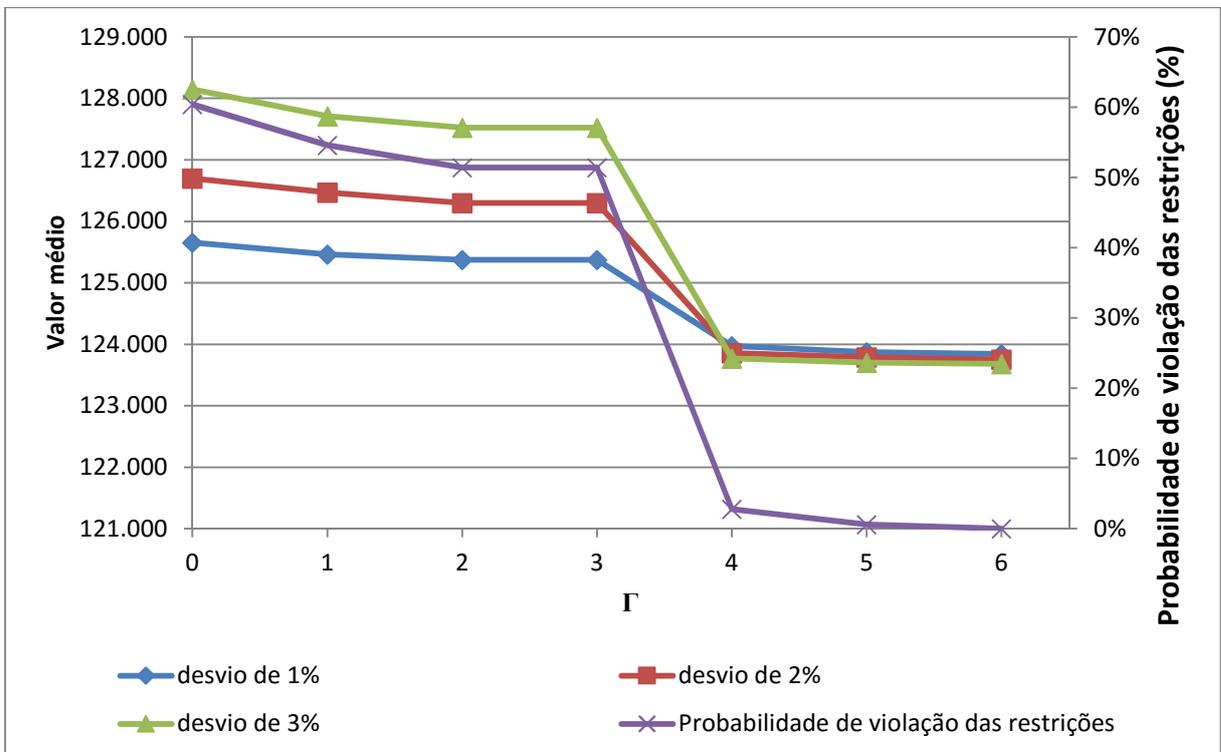
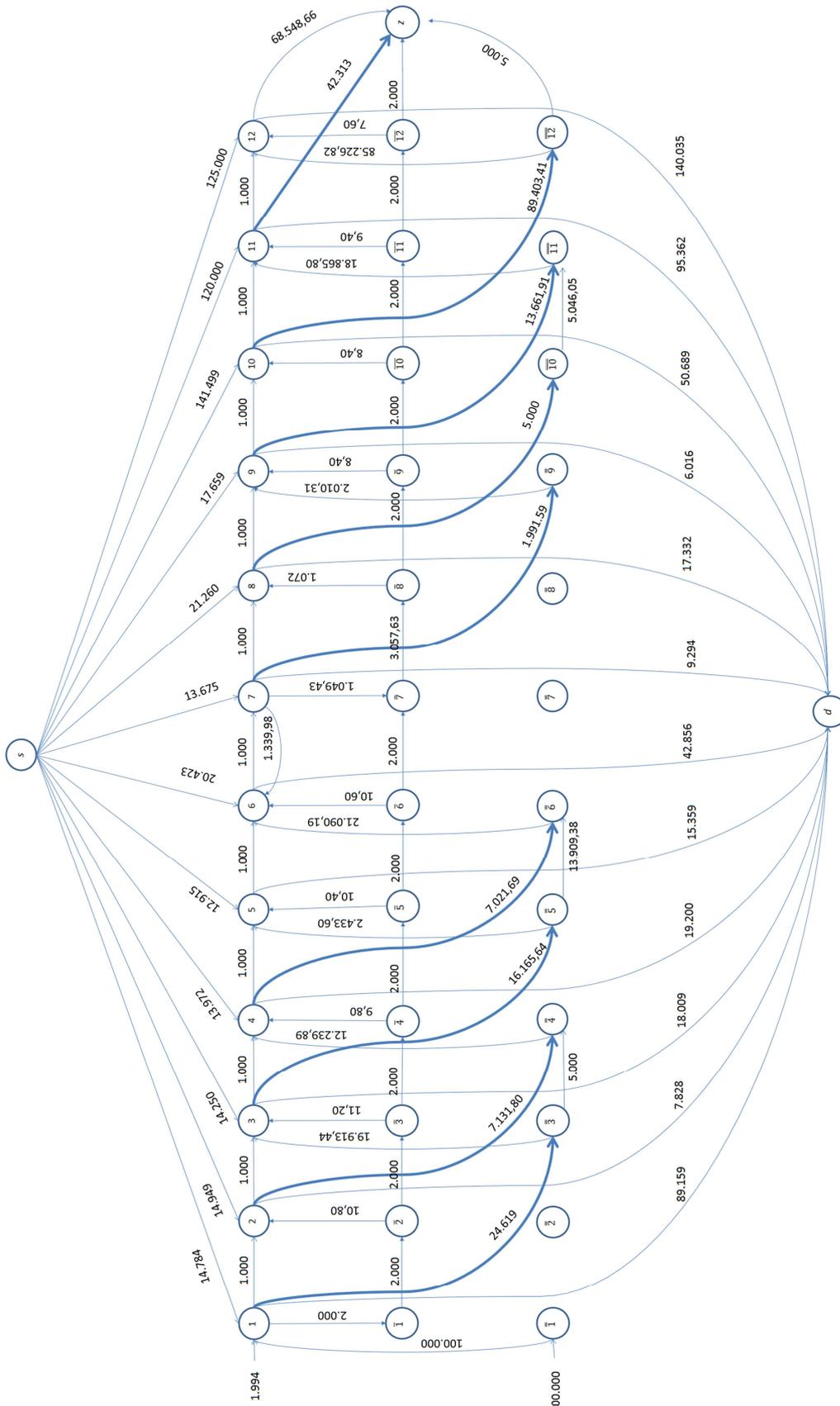


Figura 4.10 Valor médio da função objetivo robusta com distribuição normal.



Para este exemplo, a escolha $\Gamma_i = 4$ foi a solução preferida pela tesouraria da empresa para a sua gestão do caixa no planejamento tático. Ela apresenta uma probabilidade de violação das restrições de 10%, com ganho de factibilidade de 49,6% em relação a solução nominal e valor médio para a função objetivo da solução robusta em torno do valor da função objetivo da solução nominal (determinística). Ficou evidente para a tesouraria da empresa a vantagem da utilização da solução robusta. A Figura 4.11 mostra os fluxos de recursos gerados pela solução robusta. Note que as diferenças entre os fluxos da solução determinística apresentados na Figura 3.4 ocorre apenas nos últimos nós da rede. Isso era esperado, já que são nesses nós que se concentram as maiores entradas e saídas de caixa e são nesses nós que o modelo robusto de pior caso intervalar foi aplicado. As diferenças nesses fluxos fazem com que a infactibilidade da solução caia para 10%.

Figura 4.11 Resultado de solução ótima do modelo robusto com $\Gamma_i = 4$ e $\varphi^{sd} = 1\%$.



Todas as conclusões obtidas para os testes com as distribuições uniformes são válidas para os testes com as distribuições normais. A próxima seção apresenta o segundo conjunto de testes no qual as incertezas são consideradas nos coeficientes w_{ij} .

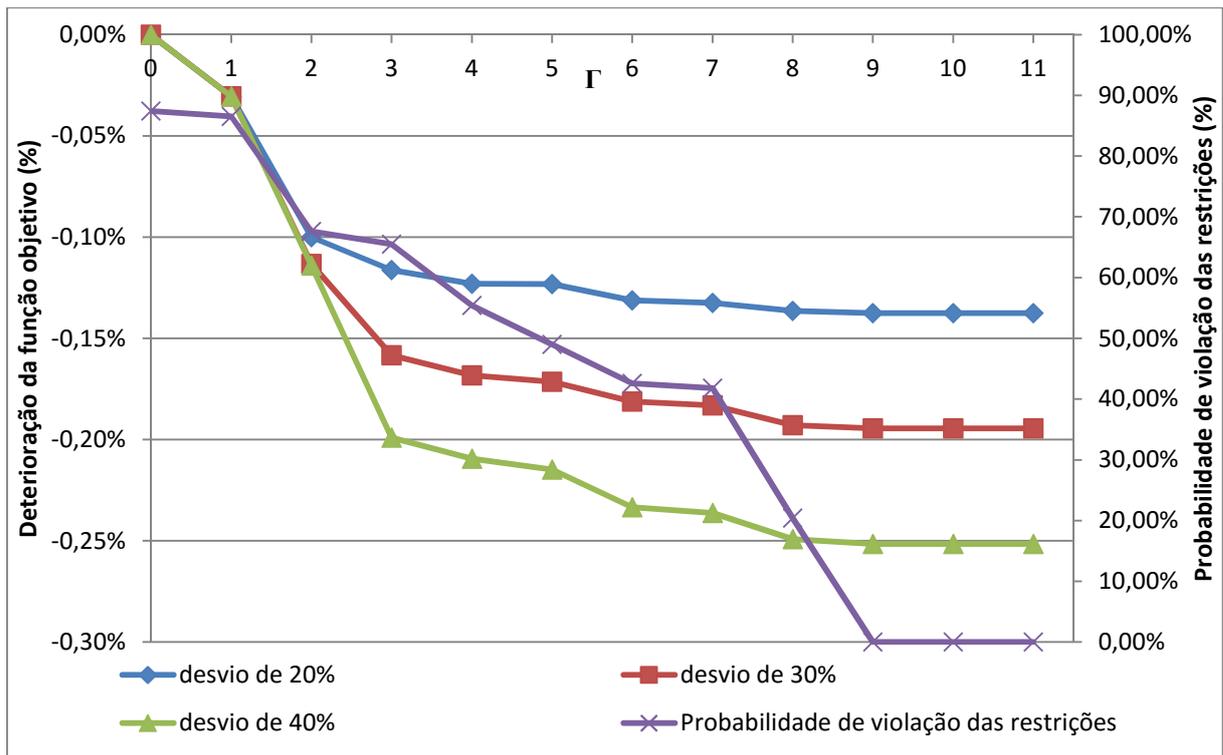
4.4.2 Soluções robustas com incerteza nos multiplicadores w_{ij}

Nessa seção são apresentados os resultados da utilização do modelo robusto para o fluxo de caixa considerando os parâmetros \tilde{w}_{ij} incertos. Nas simulações, foram adotados três valores para φ^w : 20, 30 e 40% e Γ_i variou entre 0 e $|J_i| = 11$ (inclusive) com passo unitário. A Tabela 4.8 resume os resultados do segundo conjunto de testes considerando os coeficientes \tilde{w}_{ij} incertos para os períodos 10, 11 e 12. Note que, no caso da incerteza estar presente nos multiplicadores \tilde{w}_{ij} , as deteriorações percentuais das soluções robustas *vis-à-vis* a solução nominal não são significantes, atestando mais uma vez que a adoção das soluções robustas é mais vantajosa do que a adoção da solução nominal. Isso pode ser demonstrado quando observa-se os resultados dos testes para $\Gamma = 8$, por exemplo, onde o ganho de factibilidade é de 67% e a deterioração da função objetivo da solução robusta em comparação a solução nominal é de apenas 0,25% para $\varphi^{sd} = 3\%$. A Figura 4.12 apresenta o *tradeoff* entre risco e robustez das soluções robustas e a Tabela 4.9 e a Figura 4.13 apresentam os valores médios, gerados pela simulação de Monte Carlo, para os intervalos poliédricos considerados. A distribuição utilizada para a geração dos números aleatórios para a simulação de Monte Carlo é a uniforme.

Tabela 4.8 Resultados do modelo de otimização robusta com \tilde{w}_{ij} incertos (%).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\varphi^{sd} = 20\%$	0,00	-0,03	-0,10	-0,12	-0,12	-0,12	-0,13	-0,13	-0,14	-0,14	-0,14	-0,14
Δ *												
$\varphi^{sd} = 30\%$	0,00	-0,03	-0,11	-0,16	-0,17	-0,17	-0,18	-0,18	-0,19	-0,19	-0,19	-0,19
$\varphi^{sd} = 40\%$	0,00	-0,03	-0,11	-0,20	-0,21	-0,21	-0,23	-0,24	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25
$P(V)$	87,40	86,50	67,60	65,50	55,40	49,00	42,60	41,80	20,40	0,00	0,00	0,00
Ganho Factibilidade		0,90	19,80	21,90	32,00	38,40	44,80	45,60	67,00	87,40	87,40	87,40

Figura 4.12 *Trade-off* entre o risco e o retorno das soluções robustas com \tilde{w}_{ij} incertos.



Note, na Figura 4.12, que os valores esperados para a função objetivo das soluções robustas são no máximo 0,03% menor do que a solução nominal e com ganho de factibilidade de 87,4% em relação a ela, o que atesta a vantagem da adoção das soluções robustas quando consideram-se os multiplicadores \tilde{w}_{ij} incertos. A Figura 4.14 mostra o *trade-off* entre risco e retorno dos valores médios das soluções robustas com a utilização da distribuição normal para a geração dos números aleatórios utilizados na simulação de Monte Carlo (média zero e desvio padrão de 0,055 para $\varphi^w = 20\%$, média zero e desvio padrão de 0,1 para $\varphi^w = 30\%$ e média zero e desvio padrão de 0,118 para $\varphi^w = 40\%$).

O valor médio para a função objetivo da solução robusta para $\Gamma = 11$ é apenas 0,05% menor do que a solução nominal para $\varphi^w = 30\%$, com ganho de factibilidade de 89,30% em relação a essa solução, atestando mais uma vez a vantagem da solução robusta em relação a solução nominal.

Tabela 4.9 Valor médio da função objetivo robusta em função de Γ_i com \tilde{w}_{ij} incertos.

	0	1	2	3	4	5
Δ						
* $\varphi^{sd} = 20\%$	124.001	123.916	123.876	123.868	123.860	123.852
* $\varphi^{sd} = 30\%$	124.041	123.945	123.911	123.871	123.866	123.847
* $\varphi^{sd} = 40\%$	124.092	123.983	123.966	123.885	123.870	123.882

	6	7	8	9	10	11
Δ						
* $\varphi^{sd} = 20\%$	123.853	123.851	123.850	123.849	123.849	123.849
* $\varphi^{sd} = 30\%$	123.847	123.849	123.849	123.850	123.850	123.850
* $\varphi^{sd} = 40\%$	123.861	123.858	123.856	123.850	123.850	123.850

Figura 4.13 Valor médio da função objetivo robusta para a distribuição uniforme com \tilde{w}_{ij} incertos.

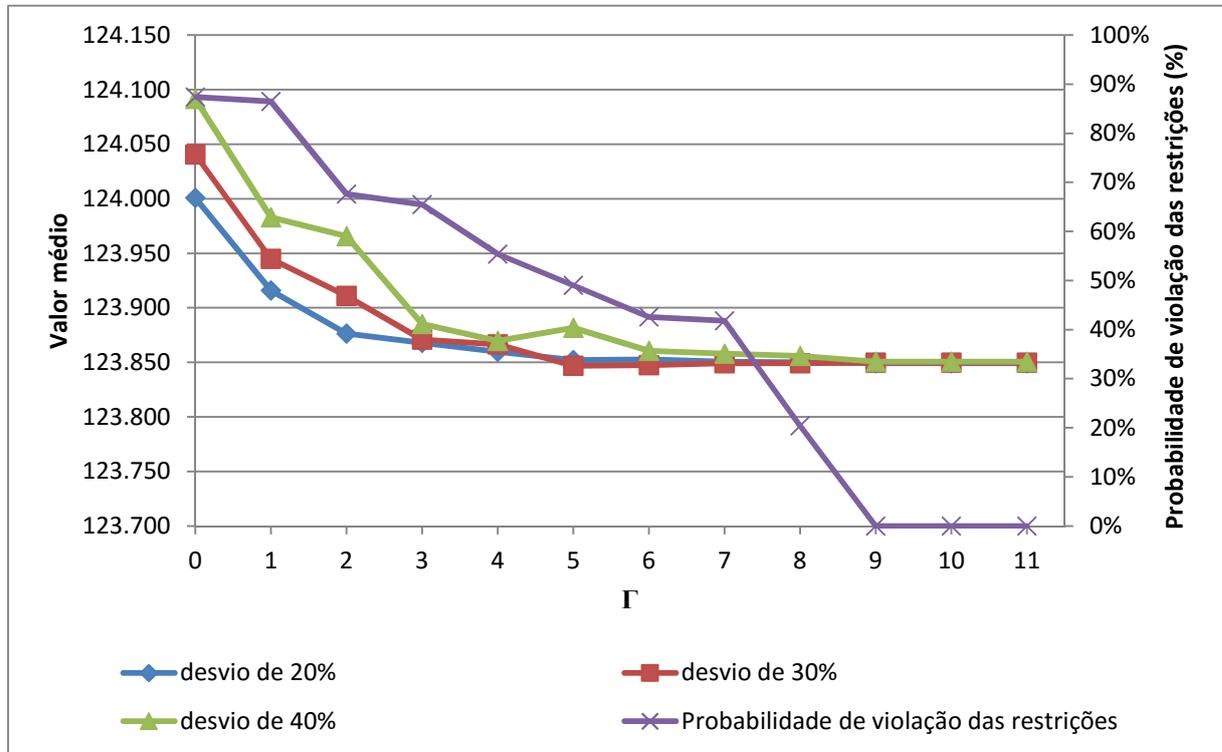
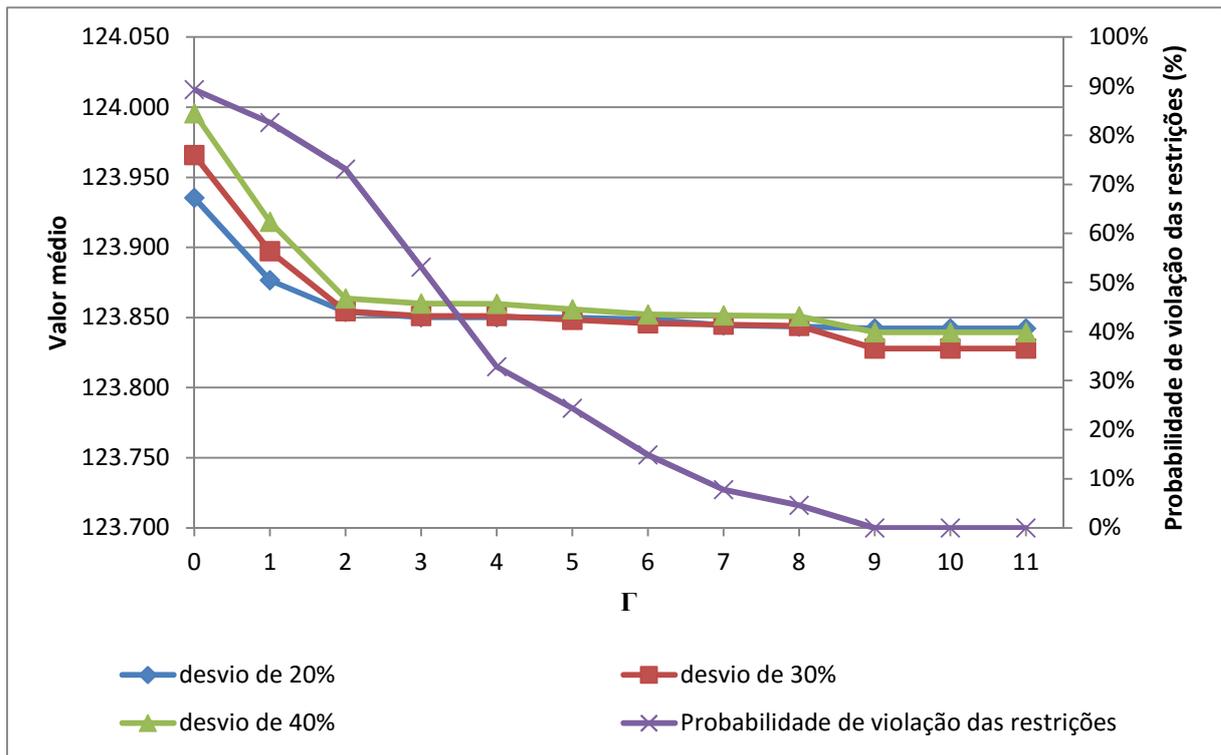


Figura 4.14 Valor médio da função objetivo com distribuição normal com \tilde{w}_{ij} incertos.



4.4.3 Soluções robustas com incerteza nas entradas e saídas de caixa para o planejamento tático do fluxo de caixa

Esse conjunto de testes considera que todos os parâmetros \tilde{w}_{ij} , \tilde{s}_i e \tilde{d}_i são incertos e as mesmas suposições utilizadas para esses parâmetros nas seções anteriores são válidas para os testes dessa seção. As Tabelas 4.10 e 4.11 e as Figuras 4.15 e 4.16 apresentam o *trade-off* entre risco e retorno e o valor médio para a função objetivo das soluções robustas *vis-à-vis* o valor da função objetivo da solução nominal.

Note que, na Figura 4.15, os valores esperados da função objetivo das soluções robustas são em média 0,04% menores do que o valor da função objetivo da solução nominal para $\Gamma = 17$, que é o pior caso para todos os desvios considerados (solução de Soyster). Como o ganho de factibilidade é de 58,10%, os testes corroboram a tese de que a adoção da solução robusta é mais vantajosa do que adotar a solução nominal.

Como pode ser observado nos testes anteriores, as incertezas nas entradas e saídas de caixa são dominantes em relação às incertezas dos multiplicadores \tilde{w}_{ij} , mesmo quando considera-se um desvio de 40%. Dessa forma, a próxima seção apresenta cenários alternativos

para estender a análise e aprofundar o entendimento de que a adoção das soluções robustas são mais vantajosas do que a adoção da solução nominal. Os cenários alternativos são aqueles citados no início do Capítulo 4.

Tabela 4.10 Resultados do modelo de otimização robusta com \tilde{w}_{ij} , \hat{s}_i e \hat{d}_i incertos.

Γ	Δ^*			$P(V)$	Ganho
	$\varphi^{sd} = 1\%$ $\varphi^w = 20\%$	$\varphi^{sd} = 2\%$ $\varphi^w = 30\%$	$\varphi^{sd} = 3\%$ $\varphi^w = 40\%$		Factibilidade
0	0,00%	0,00%	0,00%	58,00%	
1	-1,16%	-2,32%	-3,47%	55,40%	4,60%
2	-2,29%	-4,59%	-6,88%	53,50%	9,20%
3	-3,31%	-6,61%	-9,92%	51,40%	9,20%
4	-4,28%	-8,57%	-12,85%	10,20%	47,90%
5	-5,06%	-10,12%	-15,18%	5,00%	54,20%
6	-5,48%	-10,95%	-16,43%	0,10%	58,00%
7	-5,51%	-10,98%	-16,46%	0,00%	58,10%
8	-5,57%	-11,06%	-16,54%	0,00%	58,10%
9	-5,59%	-11,11%	-16,62%	0,00%	58,10%
10	-5,60%	-11,11%	-16,63%	0,00%	58,10%
11	-5,60%	-11,12%	-16,64%	0,00%	58,10%
12	-5,60%	-11,13%	-16,65%	0,00%	58,10%
13	-5,61%	-11,14%	-16,66%	0,00%	58,10%
14	-5,61%	-11,14%	-16,67%	0,00%	58,10%
15	-5,61%	-11,14%	-16,68%	0,00%	58,10%
16	-5,61%	-11,14%	-16,68%	0,00%	58,10%
17	-5,61%	-11,14%	-16,68%	0,00%	58,10%

Tabela 4.11 Valor médio da função objetivo robusta em função de Γ_i com \tilde{w}_{ij} , \tilde{s}_i e \tilde{d}_i incertos.

Γ	Δ^*		
	$\varphi^{sd} = 1\%$	$\varphi^{sd} = 2\%$	$\varphi^{sd} = 3\%$
	$\varphi^w = 20\%$	$\varphi^w = 30\%$	$\varphi^w = 40\%$
0	126.572	129.204	132.449
1	126.348	128.665	131.592
2	126.166	128.334	131.199
3	126.166	128.334	131.199
4	124.439	124.792	125.610
5	124.120	124.325	124.750
6	123.901	123.770	124.026
7	123.848	123.729	123.995
8	123.856	123.729	123.906
9	123.849	123.729	123.987
10	123.849	123.719	123.985
11	123.848	123.737	123.988
12	123.854	123.737	123.993
13	123.850	123.743	124.002
14	123.860	123.741	124.007
15	123.860	123.742	124.007
16	123.860	123.742	124.007
17	123.860	123.742	124.007

Figura 4.15 Trade-off entre o risco e o retorno das soluções robustas com \tilde{w}_{ij} , \tilde{s}_i e \tilde{d}_i incertos.

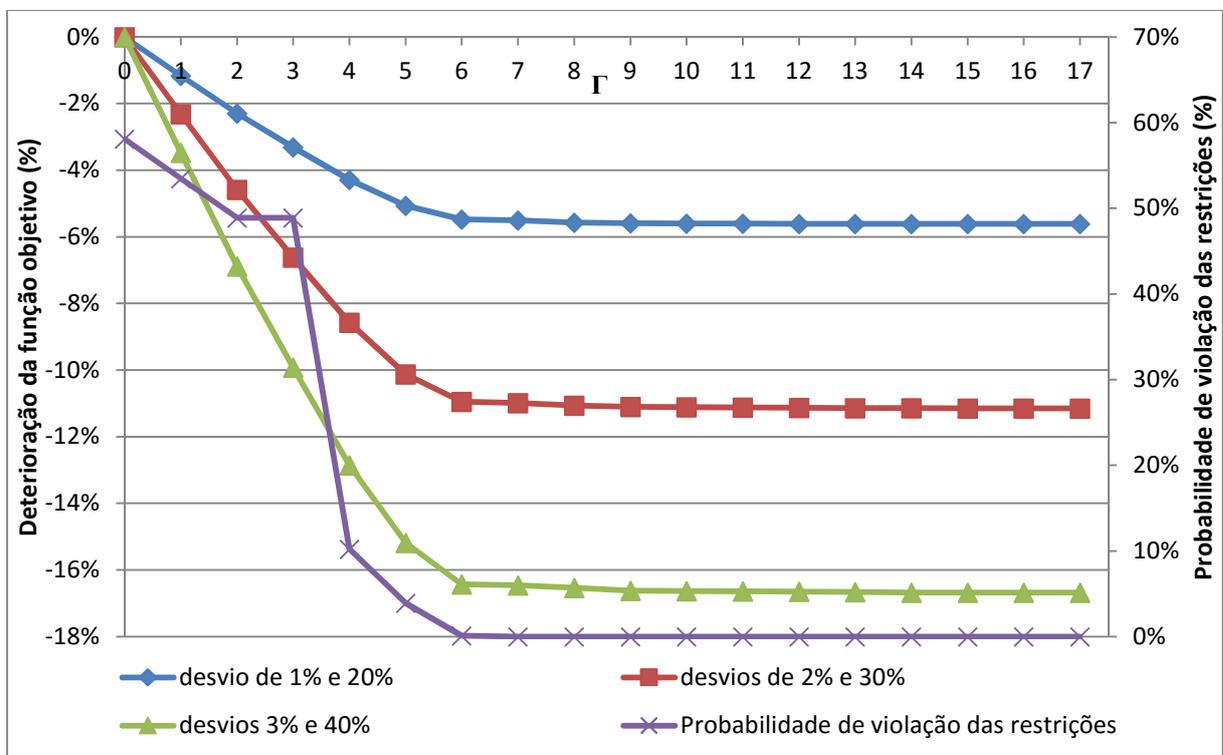
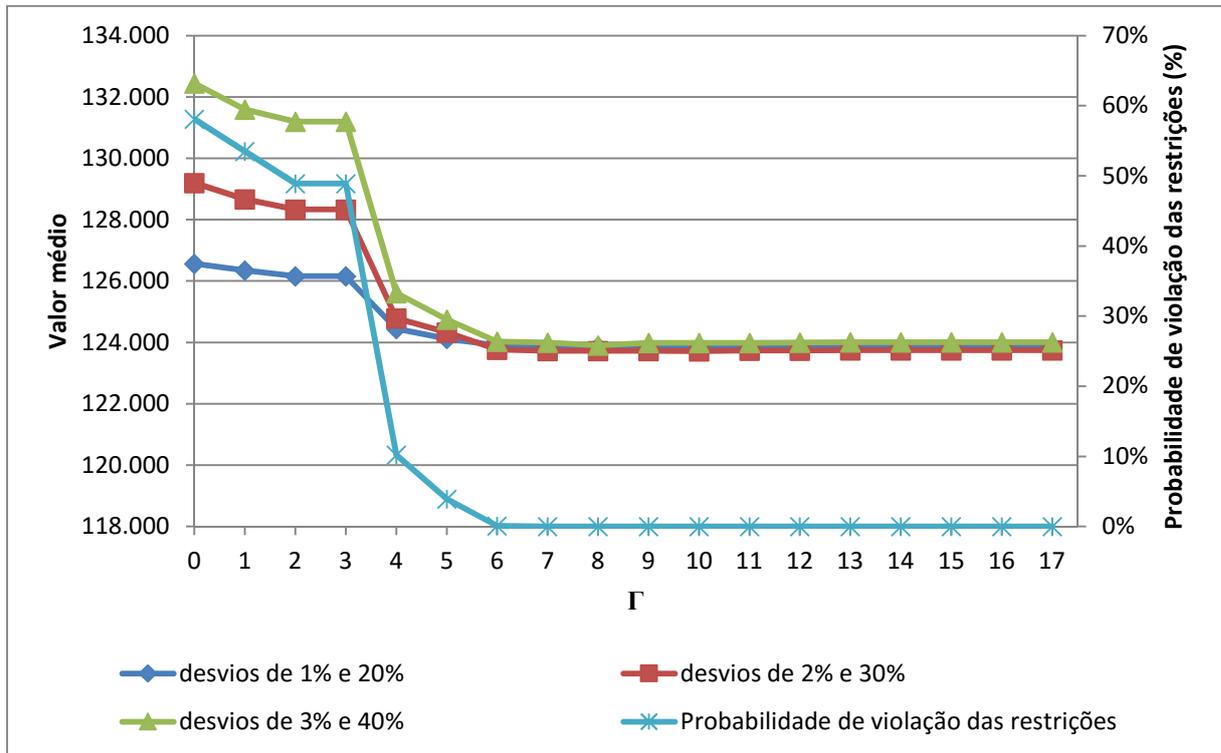


Figura 4.16 Valor médio da função objetivo robusta para a distribuição uniforme com \tilde{w}_{ij} , \tilde{s}_i e \tilde{d}_i incertos.



4.4.4 Análise de cenários alternativos

O primeiro cenário dessa seção considera que as entradas de caixa são aleatórias entre [R\$ 12.915, R\$ 141.499], as saídas de caixa são aleatórias entre [R\$ 6.016, R\$145.035] e os parâmetros incertos \tilde{s}_i e \tilde{d}_i variam para todos os períodos do horizonte de planejamento, ou seja para os meses 1 a 12, e não apenas para os três meses críticos da empresa. As entradas e saídas de caixa para esse teste podem ser observadas na Tabela 4.12. Os saldos iniciais dos ativos a , b e c são iguais a zero. O tempo computacional para a geração da solução ótima é de menos de um segundo.

Tabela 4.12 Valores gerados aleatoriamente para as entradas e saídas de caixa.

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s_i	17.181	42.425	121.487	20.880	19.796	28.607	15.383	37.500	68.991	20.517	72.718	96.800
d_i	15.995	53.741	41.804	63.972	49.709	13.673	79.621	10.851	63.780	51.487	50.844	36.566

Os demais parâmetros do problema permanecem os mesmos dos testes realizados nas seções anteriores. A Tabela 4.13 apresenta os resultados para este teste. Note que esse teste atesta novamente que a solução robusta é mais vantajosa que a solução nominal. Para $\Gamma_i = 19$,

a probabilidade de violação das restrições é de 11,50%, com ganho de factibilidade de 76,80% em relação a solução nominal e o valor esperado da solução robusta é apenas 1,04% menor do que o valor da função objetivo da solução nominal.

Tabela 4.13 Resultados do modelo de otimização robusta com entradas e saídas de caixa aleatórias.

Γ	Função	Δ^*	Valor Esperado	P (V)	Ganho Factibilidade
	Objetivo	$\varphi^s = 1,76\%$ $\varphi^d = 2,26\%$			
0	29.657	0,00%	33.048	88,30%	
1	27.392	-7,64%	31.579	76,40%	11,90%
2	25.680	-13,41%	31.445	75,70%	12,60%
3	23.816	-19,69%	30.889	72,20%	16,10%
4	22.523	-24,05%	30.827	72,00%	16,30%
5	21.049	-29,03%	30.745	71,60%	16,70%
6	19.525	-34,16%	30.354	71,40%	16,90%
7	18.283	-38,35%	30.338	69,30%	19,00%
8	16.986	-42,73%	29.636	52,50%	35,80%
9	15.803	-46,72%	29.633	52,02%	35,80%
10	14.642	-50,63%	29.621	49,61%	35,80%
11	13.465	-54,60%	29.589	49,48%	35,80%
12	12.667	-57,29%	29.425	49,20%	38,50%
13	11.666	-60,66%	29.389	49,06%	38,50%
14	10.987	-62,95%	29.382	47,62%	38,50%
15	10.157	-65,75%	29.382	47,18%	38,50%
16	9.633	-67,52%	29.371	45,00%	38,50%
17	9.246	-68,82%	29.358	44,88%	38,50%
18	8.879	-70,06%	29.357	44,63%	38,50%
19	8.514	-71,29%	29.347	11,50%	76,80%
20	8.125	-72,60%	29.052	9,60%	78,70%
21	7.799	-73,70%	29.016	0,00%	88,30%
22	7.519	-74,65%	29.011	0,00%	88,30%
23	7.197	-75,73%	29.004	0,00%	88,30%
24	6.945	-76,58%	29.001	0,00%	88,30%

Tabela 4.14 Resultados do modelo de otimização robusta com a inclusão da CPMF.

Γ	Função	Δ^*	Valor		Ganho
	Objetivo	$\varphi^s = 1,76\%$ $\varphi^d = 2,26\%$	Esperado	P (V)	Factibilidade
0	29.260	0,00%	32.435	88,30%	
1	27.015	-7,67%	31.125	76,40%	11,90%
2	25.310	-13,50%	30.939	75,70%	12,60%
3	23.453	-19,85%	30.363	72,20%	16,10%
4	22.165	-24,25%	30.319	72,00%	16,30%
5	20.696	-29,27%	30.127	71,60%	16,70%
6	19.180	-34,45%	29.780	71,40%	16,90%
7	17.942	-38,68%	29.731	69,30%	19,00%
8	16.657	-43,07%	29.097	52,50%	35,80%
9	15.478	-47,10%	29.079	52,02%	35,80%
10	14.322	-51,05%	29.067	49,61%	35,80%
11	13.151	-55,05%	29.033	49,48%	35,80%
12	12.631	-56,83%	28.875	49,20%	38,50%
13	11.369	-61,15%	28.841	49,06%	38,50%
14	11.003	-62,40%	28.838	47,62%	38,50%
15	10.176	-65,22%	28.838	47,18%	38,50%
16	9.655	-67,00%	28.826	45,00%	38,50%
17	9.270	-68,32%	28.812	44,88%	38,50%
18	8.906	-69,56%	28.801	44,63%	38,50%
19	8.521	-70,88%	28.726	11,50%	76,80%
20	8.198	-71,98%	28.674	9,60%	78,70%
21	7.919	-72,94%	28.669	0,00%	88,30%
22	7.598	-74,03%	28.661	0,00%	88,30%
23	6.921	-76,34%	28.650	0,00%	88,30%
24	6.670	-77,20%	28.647	0,00%	88,30%

O segundo cenário alternativo agrega ao primeiro cenário alternativo uma eventual volta da cobrança da Contribuição Provisória sobre Movimentação Financeira (CPMF) para todas as saídas de caixa da conta corrente da empresa. A taxa cobrada como CPMF é 0,38% sobre todas as saídas de caixa. A Tabela 4.14 mostra os resultados da inclusão da CPMF sobre as soluções robustas. A inclusão da CPMF não muda as conclusões do cenário anterior e também corrobora com a tese da adoção das soluções robustas em detrimento da solução nominal.

O terceiro cenário alternativo analisa o comportamento das soluções robustas no caso em que existe um limite mínimo para as aplicações com períodos de carência. Ou seja, só é

possível aplicar num título negociável com carência para o resgate e obter um rendimento maior se o valor aplicado for maior ou igual a R\$ 5.000. Esse teste apresentou os mesmos resultados do primeiro teste dessa seção, o que indica que a solução robusta adotada já indicava esse comportamento para as aplicações do ativo com carência para o resgate. O tempo computacional para a geração da solução ótima permaneceu em menos de um segundo.

As soluções robustas obtidas nos testes computacionais evidenciaram o *tradeoff* existente entre o risco e o retorno em função da variação do *budget* de incerteza, Γ_i . É possível, suportar decisões da gestão financeira de uma empresa com informações suficientes para que ela possa gerenciar o seu fluxo de caixa tático. As adoções das soluções robustas mostraram-se mais vantajosas do que as soluções determinísticas, e isso ficou claro com as análises dos valores médios, bem como a análise das probabilidades de violação das restrições. Os valores médios das soluções robustas transmitem ao tomador de decisão uma sensação de segurança para tomar as decisões apontadas pela modelagem robusta. Esse fato foi apontado pelo gestor financeiro da empresa como um ponto fundamental para o convencimento de que a solução robusta é mais vantajosa do que a solução nominal. A sensação intuitiva do tomador de decisão de que a natureza não vai se comportar sempre nos desvios de pior caso foi atestada pela análise dos valores médios das soluções robustas, realizada com a simulação de Monte Carlo. A tesouraria da empresa atestou que o modelo de otimização robusta é uma inovação quanto à gestão do fluxo caixa de empresas e que seria recomendada como um novo modelo corporativo para as tomadas de decisões relacionadas ao gerenciamento do caixa da empresa, inclusive recomendando que esse deveria ser o padrão da operação global da companhia.

O próximo capítulo desenvolve e aplica os modelos de programação estocástica de dois estágios com recurso neutro ao risco e de aversão ao risco para o problema do fluxo de caixa no intuito de avaliar o potencial das análises que esses modelos podem proporcionar. Salienta-se que não é um objetivo desta tese comparar as soluções das duas abordagens, otimização robusta e a programação estocástica de dois estágios com recurso, mas que essa poderia ser uma pesquisa interessante em estudos futuros.

5. MODELOS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA PARA O PROBLEMA DO FLUXO DE CAIXA

Neste capítulo, são desenvolvidos modelos de programação estocástica para o problema de fluxo de caixa motivados pelo problema da empresa do estudo de caso. A literatura dispõe de métodos para gerar cenários para as taxas de câmbio, o que também motivou o desenvolvimento e aplicação de modelos de programação estocástica baseados em cenários, para análise deste problema de fluxo de caixa. O objetivo do capítulo é aplicar as abordagens de programação estocástica e explorar o potencial das análises que elas podem proporcionar para a gestão financeira de uma empresa. Além da clássica abordagem de programação estocástica de dois estágios com recurso, neutra em relação ao risco, que é apresentada na seção 5.1, são propostos e analisados outros dois modelos de programação estocástica: uma abordagem minimax com arrependimento (Kouvelis e Yu, 1997), detalhada na seção 5.2; e uma abordagem via CVaR apresentada na seção 5.3. A geração dos cenários é discutida na seção 5.4 e os resultados computacionais dos modelos propostos são descritos e analisados na seção 5.5. Além dessas abordagens, um modelo de horizonte rolante também é explorado e apresentado na seção 5.6.

5.1 Modelo de programação estocástica de dois estágios neutro em relação ao risco para o problema do fluxo de caixa

Nesta seção, é apresentado um modelo de programação estocástica de dois estágios com recursos, neutro ao risco, para o problema de fluxo de caixa de empresas do setor de material. Essa abordagem é a versão estocástica do modelo determinístico inteiro misto desenvolvido no capítulo 3. Este modelo estabelece que um conjunto de decisões, chamadas de decisões de primeiro estágio, devem ser determinadas antes das realizações das variáveis aleatórias serem observadas, conforme explicado no capítulo 2, e ações corretivas podem ser tomadas, uma vez que os parâmetros incertos se tornam conhecidos em cada cenário considerado. Essas variáveis são conhecidas como de segundo estágio.

Para o problema de fluxo de caixa, a programação estocástica de dois estágios com recurso inteira mista, neutra em relação ao risco, é caracterizada pelas incertezas nas taxas de câmbio. A seguir são definidos os parâmetros, as variáveis de primeiro estágio e as variáveis de segundo estágio do modelo. Os parâmetros do modelo são os mesmos descritos na seção 3.1 acrescidos dos seguintes parâmetros, que consideram os diferentes cenários para a modelagem da programação estocástica.

- \mathcal{C} conjunto de cenários $c = 1, 2, \dots, C$
 s_{ic} entradas de caixa, para $i = 1, 2, \dots, t$ e $c = 1, 2, \dots, C$
 d_{ic} saídas de caixa, para $i = 1, 2, \dots, t$ e $c = 1, 2, \dots, C$
 π_c probabilidade de ocorrência de cada cenário c , $c = 1, 2, \dots, C$

As variáveis de decisão são:

- f_{ijc} quantidade de recursos financeiros que o nó i recebe no cenário c , $(i, j) \in A$, $c = 1, 2, \dots, C$;

Dentre essas variáveis, as variáveis de decisão do primeiro estágio são aquelas variáveis f_{ijc} em que $i \in P$ e independem do cenário $c \in \mathcal{C}$, enquanto as demais variáveis f_{ijc} são do segundo estágio. Por exemplo, se $P = \{1, \bar{1}, \bar{\bar{1}}\}$, então as variáveis do primeiro estágio são aquelas referentes ao primeiro período, ou seja:

- f_{ijc} quantidade de recursos financeiros que o nó i recebe, $(i, j) \in A$, $i = 1, \bar{1}, \bar{\bar{1}}$, em que:

$$f_{ij1} = f_{ij2} = \dots = f_{ijc}$$

Ou seja, são as mesmas para todos os cenários c porque independem de c . Similarmente, pode-se considerar outros conjuntos P como de primeiro estágio como, por exemplo, se $P = \{1, \bar{1}, \bar{\bar{1}}, 2, \bar{2}, \bar{\bar{2}}\}$. Neste caso, as variáveis de decisões dos dois primeiros períodos são consideradas variáveis de primeiro estágio e teríamos $f_{ij1} = f_{ij2} = \dots = f_{ijc}$ para $(i, j) \in A$, $i = 1, \bar{1}, \bar{\bar{1}}, 2, \bar{2}, \bar{\bar{2}}$. Desse modo, as variáveis de um ou mais períodos consecutivos podem ser consideradas como variáveis de primeiro estágio, independente de c .

As variáveis de decisão do segundo estágio são as restantes, que dependem de c , por exemplo, para $P = \{1, \bar{1}, \bar{\bar{1}}\}$ como variáveis de primeiro estágio, as de segundo estágio seriam:

- f_{ijc} quantidade de recursos financeiros que o nó i recebe, $(i, j) \in A$,

$$i = 2, \dots, n, \bar{2}, \dots, \bar{n}, \bar{\bar{2}}, \dots, \bar{\bar{n}}.$$

Para o ativo c , temos que, conforme descrito no capítulo 3, $f_{ijc} = f_{ijc}^1 + f_{ijc}^2$, sendo que:

- f_{ijc}^1 quantidade de recursos financeiros que o nó i recebe, $(i, j) \in A$, $i = \bar{1}$, $0 \leq f_{ijc}^1 \leq lm_{ijc}$; e

- f_{ijc}^2 quantidade de recursos financeiros que o nó i recebe, $(i, j) \in A$, $i = \bar{\bar{1}}$, $lm_{ijc} \leq f_{ijc}^2 \leq$

M_{ijc} .

Convém salientar que, uma maneira alternativa de se definir as variáveis de primeiro estágio seria por f_{ij} , em que $(i, j) \in A$ e $i \in P$, que apareceriam junto com as demais variáveis de segundo estágio f_{ijc} , em que $(i, j) \in A$ e $i \notin P$ no modelo. No entanto, por simplicidade de

apresentação e de implementação computacional deste modelo e dos demais modelos deste capítulo, não optou-se por esta representação aqui neste trabalho.

As restrições para os multiplicadores são as mesmas utilizadas para o modelo inteiro-misto determinístico conforme seção 3.1. O modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso neutro ao risco é definido a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & \sum_{c=1}^{\mathcal{C}} \pi_c [w_{n-1,z} f_{n-1,z,c}^1 + w_{n-1,z}^2 f_{n-1,z,c}^2 + w_{nz} f_{nz,c}^1 + w_{nz}^2 f_{nz,c}^2 + w_{\bar{n}z} f_{\bar{n}z,c} + w_{\bar{n},z} f_{\bar{n}z,c}^1 \\ & + w_{\bar{n}z}^2 f_{\bar{n}z,c}^2] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}^-} w_{ji} f_{jic} - \sum_{j \in \mathcal{N}^-} f_{ijc} & \geq -a_0 - s_{ic} + d_{ic}, i = 1, c \\ & \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}^-} w_{ji} f_{jic} - \sum_{j \in \mathcal{N}^-} f_{ijc} \geq -b_0, i = \bar{1}, c \in \mathcal{C} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}^-} w_{ji} f_{jic} - \sum_{j \in \mathcal{N}^-} f_{ijc} & \geq -c_0, i = \bar{\bar{1}}, c \\ & \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}^-} w_{ji} f_{jic} - \sum_{j \in \mathcal{N}^-} f_{ijc} & \geq -s_{ic} + d_{ic}, i = 2, 3, \dots, n, c \\ & \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}^-} w_{ji} f_{jic} - \sum_{j \in \mathcal{N}^-} f_{ijc} \geq 0, i = \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n}, c \in \mathcal{C} \quad (5.6)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}^-} w_{ji} f_{jic}^1 + \sum_{j \in \mathcal{N}^-} w_{ji}^2 f_{jic}^2 - \sum_{j \in \mathcal{N}^-} f_{ijc} \geq 0, i = \bar{\bar{2}}, \bar{\bar{3}}, \dots, \bar{\bar{n}}, c \in \mathcal{C} \quad (5.7)$$

$$f_{n-1,z,c}^1 + f_{n-1,z,c}^2 = f_{n-1,z,c}, c \in \mathcal{C} \quad (5.8)$$

$$f_{nz,c}^1 + f_{nz,c}^2 = f_{nz,c}, c \in \mathcal{C} \quad (5.9)$$

$$f_{\bar{n}zc}^1 + f_{\bar{n}zc}^2 = f_{\bar{n}zc}, c \in \mathcal{C} \quad (5.10)$$

$$0 \leq f_{n-1,z,c}^1 < lm_{n-1,z,c} x_{n-1,z,c}^1, c \in \mathcal{C} \quad (5.11)$$

$$lm_{n-1,z,c} x_{n-1,z,c}^2 \leq f_{n-1,z,c}^2 < Mx_{n-1,z,c}^2, c \in \mathcal{C} \quad (5.12)$$

$$0 \leq f_{nzc}^1 < lm_{nzc} x_{nzc}^1, c \in \mathcal{C} \quad (5.13)$$

$$lm_{nzc} x_{nzc}^2 \leq f_{nzc}^2 < Mx_{nzc}^2, c \in \mathcal{C} \quad (5.14)$$

$$0 \leq f_{\bar{n}zc}^1 < lm_{\bar{n}zc} x_{\bar{n}zc}^1, c \in \mathcal{C} \quad (5.15)$$

$$lm_{\bar{n}zc} x_{\bar{n}zc}^2 \leq f_{\bar{n}zc}^2 < Mx_{\bar{n}zc}^2, c \in \mathcal{C} \quad (5.16)$$

$$x_{n-1,z,c}^1 + x_{n-1,z,c}^2 = 1, c \in \mathcal{C} \quad (5.17)$$

$$x_{nzc}^1 + x_{nzc}^2 = 1, c \in \mathcal{C} \quad (5.18)$$

$$x_{\bar{n}zc}^1 + x_{\bar{n}zc}^2 = 1, c \in \mathcal{C} \quad (5.19)$$

$$f_{ijc}^1 + f_{ijc}^2 = f_{ijc}, (i, j) = (\bar{l}, \bar{l} + 1) e (i, \bar{l} + 2), \bar{l} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 e i = 1, 2, \dots, n - 2$$

$$e c \in \mathcal{C} \quad (5.20)$$

$$0 \leq f_{ijc}^1 < lm_{ijc} x_{ijc}^1, (i, j) = (\bar{l}, \bar{l} + 1) e (i, \bar{l} + 2), \bar{l} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 e i = 1, 2, \dots, n - 2 e c \in \mathcal{C} \quad (5.21)$$

$$lm_{ijc} x_{ijc}^2 \leq f_{ijc}^2 < Mx_{ijc}^2, (i, j) = (\bar{l}, \bar{l} + 1) e (i, \bar{l} + 2), \bar{l} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 e i = 1, 2, \dots, n - 2 e c \in \mathcal{C} \quad (5.22)$$

$$x_{ijc}^1 + x_{ijc}^2 = 1 \quad (5.23)$$

$$0 \leq f_{i+1,i,c} \leq u, i = 1, 2, \dots, n - 1 e c \in \mathcal{C} \quad (5.24)$$

$$f_{i,i+1,c} \geq m, i = 1, 2, \dots, n e c \in \mathcal{C} \quad (5.25)$$

$$f_{nzc} \geq m \quad (5.26)$$

$$f_{i,i+1,c} \geq m, i = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n} \text{ e } c \in \mathcal{C} \quad (5.27)$$

$$f_{\bar{n}zc} \geq q, c \in \mathcal{C} \quad (5.28)$$

$$f_{ijc} \geq 0, (i, j) \in A, c \in \mathcal{C} \quad (5.29)$$

$$f_{ij1} = f_{ij2} = \dots = f_{ijc}, (i, j) \in A, i \in P \quad (5.30)$$

$$x_{n-1,z,c}^1, x_{n-1,z,c}^2, x_{\bar{n}zc}^1, x_{\bar{n}zc}^2, x_{\bar{n}zc}^1, x_{\bar{n}zc}^2 \in [0,1], c \in \mathcal{C} \quad (5.31)$$

$$x_{ijc}^1, x_{ijc}^2 \in [0,1], (i, j) = (\bar{l}, \bar{l} + 1) \text{ e } (i, \bar{l} + 2),$$

$$\bar{l} = \bar{1}, \dots, \bar{n} - 1 \text{ e } i = 1, 2, \dots, n - 2 \text{ e } c \in \mathcal{C} \quad (5.32)$$

A função objetivo (5.1) maximiza o valor esperado. As restrições (5.2) e (5.5) consideram as entradas e saídas de caixa que são determinadas pelos cenários para a taxa de câmbio definidos na seção 5.2.3. As entradas e saídas de caixa são divididas em dois componentes, a saber: i) as entradas e saídas de caixa que ocorrem no mercado nacional, com recebimentos e pagamentos na moeda local do Brasil; e ii) as entradas e saídas de caixa que dependem do comportamento da taxa de câmbio, já que são transações financeiras com clientes e fornecedores do exterior. Por meio dessas duas restrições, (5.2) e (5.5), de balanço de fluxo, os cenários para a taxa de câmbio vão determinar o comportamento das variáveis de primeiro e segundo estágio do modelo de programação estocástica. As demais restrições, com exceção da restrição (5.30), são similares às suas versões do modelo determinístico do capítulo 3, mas devem ser satisfeitas para todo cenário $c \in \mathcal{C}$. A restrição (5.30) é a restrição de não-antecipação que define as variáveis de primeiro estágio. Tal restrição assegura que, para todo cenário $c \in \mathcal{C}$, os fluxos f_{ijc} para os ativos a, b e c para os primeiros períodos do horizonte de planejamento explicitados no conjunto P são iguais.

5.2 Modelo minimax com arrependimento

Conforme discutido no capítulo 2, para formular o modelo minimax com arrependimento para o problema do fluxo de caixa, faz-se necessário determinar as soluções *wait-and-see* W_c^* , para todo cenário $c = 1, 2, \dots, \mathcal{C}$. Após isso, minimiza-se a diferença máxima entre o montante do nó terminal do modelo de dois estágios com recurso e as soluções W_c^* ,

levando em conta todos os cenários c . O problema minimax com arrependimento pode ser modelado da seguinte forma:

$$\text{Minimize } \Theta \quad (5.32)$$

Sujeito a (5.2) – (5.32) e:

$$\begin{aligned} \Theta \geq & W_c^* - w_{n-1,z} f_{n-1,z,c}^1 + w_{n-1,z}^2 f_{n-1,z,c}^2 + w_{nz} f_{nz,c}^1 + w_{nz}^2 f_{nz,c}^2 + w_{\bar{n}z} f_{\bar{n}z,c}^1 + w_{\bar{n},z} f_{\bar{n}z,c}^1 \\ & + w_{\bar{n}z}^2 f_{\bar{n}z,c}^2, \quad c = 1, \dots, \mathcal{C} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\Theta \geq 0 \quad (5.34)$$

A função objetivo combinada com as restrições (5.33) e (5.34) assegura que o desvio (arrependimento) máximo Θ entre o problema de dois estágios e os valores das funções objetivo do problema *wait-and-see* (W_c^*) seja minimizado. Note que $\Theta \geq 0$ assegura que apenas os desvios mais desfavoráveis são considerados.

5.3 Modelo de otimização de risco do valor em risco condicional (CVaR)

O modelo do valor em risco condicional (*conditional value-at-risk* – CVaR), introduzido por Rockafellar e Uryasev (2000, 2002) e já discutido no capítulo 2 é o segundo tipo de modelo de aversão ao risco escolhido nessa tese para explorar o potencial das análises que ele pode proporcionar para o gestor financeiro. O modelo CVaR, para o problema do fluxo de caixa maximiza o valor em risco, VaR, representado pela letra grega η , minimiza um conjunto com as perdas esperadas ponderadas inferiores ao VaR no nível de confiança α . Um problema de otimização, envolvendo o CVaR pode ser formulado da seguinte forma:

$$\max_x \{CVaR_\alpha[f(x, \xi)]\}, \text{ onde } CVaR_\alpha(\xi) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \eta - \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[\eta - \xi]_+ \right\} \quad (5.35)$$

considerando $[\eta - \xi]_+ = \max(0, \eta - \xi)$ e $\alpha \in (0,1)$. Assumindo que ξ é o valor da solução estocástica e é discreta, com um número finito de cenários $c = 1, \dots, \mathcal{C}$ com as correspondentes probabilidades $\pi_1, \dots, \pi_{\mathcal{C}}$, o modelo de risco CVaR para o problema do fluxo de caixa pode ser formulado da seguinte forma:

$$(\text{CVaR}_\alpha) \text{ Maximize } \eta - \frac{1}{1-\alpha} \sum_{c=1}^{\mathcal{C}} \pi_c v_c \quad (5.36)$$

Sujeito a (5.2) - (5.32) e:

$$\begin{aligned} & v_c \\ & \geq \eta - (w_{n-1,z} f_{n-1,z,c}^1 + w_{n-1,z}^2 f_{n-1,z,c}^2 + w_{nz} f_{nz,c}^1 + w_{nz}^2 f_{nz,c}^2 + w_{\bar{n}z} f_{\bar{n}z,c}^1 + w_{\bar{n},z} f_{\bar{n}z,c}^1 \\ & + w_{\bar{n}z}^2 f_{\bar{n}z,c}^2), c = 1, \dots, \mathcal{C} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$v_c \geq 0, c = 1, \dots, \mathcal{C} \quad (5.38)$$

$$\eta \in \mathbb{R} \quad (5.39)$$

A v_c é uma variável contínua que representa o excesso de perda além da variável do VaR, η , para cada cenário $c \in \mathcal{C}$. O nível de confiança α é utilizado para refletir a preferência ao risco do tomador de decisão. Maiores valores de α indicam maior aversão ao risco e o CVaR controla os maiores desvios das perdas esperadas em relação ao VaR. Por exemplo, considerando-se $\alpha = 0,7$, as restrições do CVaR podem controlar os 30% maiores desvios relativos e para $\alpha = 0,001$, o CVaR é muito similar ao valor esperado, já que nesse caso ele minimiza 99,9% dos piores cenários.

5.4 Geração de cenários para a taxa de câmbio

Cada cenário simulado é uma trajetória ao longo do tempo de uma ou mais variáveis de mercado, como por exemplo, a evolução de uma taxa de câmbio, ou a evolução da taxa de juros ao longo de um ano. Uma variável cujas mudanças nos seus valores ao longo do tempo ocorram de maneira incerta segue um processo estocástico (Hull, 2003). Os processos estocásticos são classificados como discretos e contínuos. No processo estocástico discreto, os valores de determinadas variáveis oscilam em determinados pontos no tempo, enquanto que no processo contínuo, as oscilações ocorrem em qualquer instante de tempo. Os ativos financeiros seguem um processo estocástico discreto no qual as cotações variaram conforme frações de preço e dependem da ocorrência de negócios. Apesar desse fato, os modelos contínuos são muito utilizados e aderentes à maioria dos modelos utilizados em finanças.

O processo de Markov é um processo estocástico em que as variáveis assumem valores imprevisíveis, em que o estado presente do processo é o que importa e é relevante para prever o valor futuro dessas variáveis. Assume-se que a maioria dos preços dos ativos segue um processo de Markov. Ou seja, a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo depende somente do seu valor atual, não sendo afetada pelos valores passados do processo, ou por qualquer outra informação. O que se quer dizer com isso é que o preço no mercado a vista contém toda a informação relevante para estudar o seu comportamento futuro. O passado, ou seja, qual o caminho percorrido por um determinado ativo, não tem importância para prever seu valor futuro. O processo de Wiener, ou movimento browniano, é um caso particular do processo de Markov cujos incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidades da variação do processo em um intervalo de tempo, é independente de qualquer outro intervalo de tempo e as variações de um processo, em um intervalo de tempo finito, seguem uma distribuição normal, com variância que cresce linearmente nesse intervalo (Hull, 2003). Para mais detalhes, ver Anexo III que está baseado em Hull (2003).

5.4.1 Simulação de Monte Carlo utilizando o Movimento Geométrico Browniano

Considere que o preço da taxa de câmbio segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB), conforme a equação estocástica abaixo (ver Anexo III):

$$dx = axdt + \sigma x dz \quad (5.40)$$

onde dz é um processo incremental de Wiener, $dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$, ε_t é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão, $(N(0,1))$, α é a taxa de juros livre de risco observada historicamente e σ é a volatilidade da taxa de câmbio. Aplicando o lema de Itô e uma transformação logarítmica, é possível obter a equação discreta de simulação de preço, em um instante t futuro qualquer, da taxa de câmbio X_t conforme segue:

$$X_t = X_0 e^{\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} N(0,1) \right]} \quad (5.41)$$

A simulação de Monte Carlo dos preços da taxa de câmbio usando a equação acima é feita escolhendo-se ao acaso valores aleatórios e obtendo sua distribuição normal padrão $(N(0,1))$, e assim chegando-se ao preço X_t correspondente. Uma importante característica da equação (5.41) é que a discretização em relação à sua forma contínua é exata e precisa. Em outras palavras, não é necessário utilizar pequenos incrementos de tempo Δt para obter-se uma

boa aproximação. Pode-se utilizar qualquer tamanho de Δt que a equação de simulação (5.41) continua válida (HULL, 2003).

5.4.2 Geração dos cenários para as entradas e saídas de caixa via simulação de Monte Carlo utilizando o movimento geométrico browniano

Os parâmetros incertos nas entradas e saídas de caixa são as taxas de câmbio, que são utilizadas para determinar os valores em reais (R\$) dos recebimentos e pagamentos em dólar (US\$). Ou seja, a variação da taxa de câmbio altera as entradas e saídas de caixa advindas das vendas no mercado externo. A taxa de câmbio inicial da simulação foi de R\$ 2,40. A volatilidade da taxa de câmbio para a geração dos cenários segue uma distribuição uniforme entre [9%, 34%], sendo que esse intervalo foi obtido por meio de dados históricos extraídos das estatísticas da BM&FBovespa (www.bmfbovespa.com.br). A taxa de juros livre de risco para a geração dos cenários segue uma distribuição uniforme entre [7,10%, 32,40%], intervalo que também foi obtido por meio das estatísticas da BM&FBovespa.

Note que, o método de geração de cenários proposto nessa tese fornece as realizações para os parâmetros estocásticos, mas não determina o número de cenários que será incorporado no modelo de programação estocástica. Especialmente em problemas inteiros-mistos, é essencial determinar o *tradeoff* entre precisão e tratabilidade computacional do método de geração de cenários. Por um lado, incorporar um grande número de cenários melhora a precisão do modelo de programação estocástica, mas pode aumentar a dificuldade computacional do modelo equivalente determinístico. Por outro lado, lidar com poucos cenários é computacionalmente mais simples, mas a variável aleatória pode estar mal representada. Para lidar com esse compromisso, utilizou-se a análise de estabilidade interna, que fornece o número "mínimo" de cenários que deve ser gerado para se observar a estabilização do valor da função objetivo do modelo de programação estocástica. Primeiramente, são geradas amostras de cenários de tamanhos variados e crescentes, por exemplo, 10, 50, 100, ..., 600. Em seguida, são resolvidos vários modelos de programação estocástica e analisados os correspondentes valores ótimos da função objetivo.

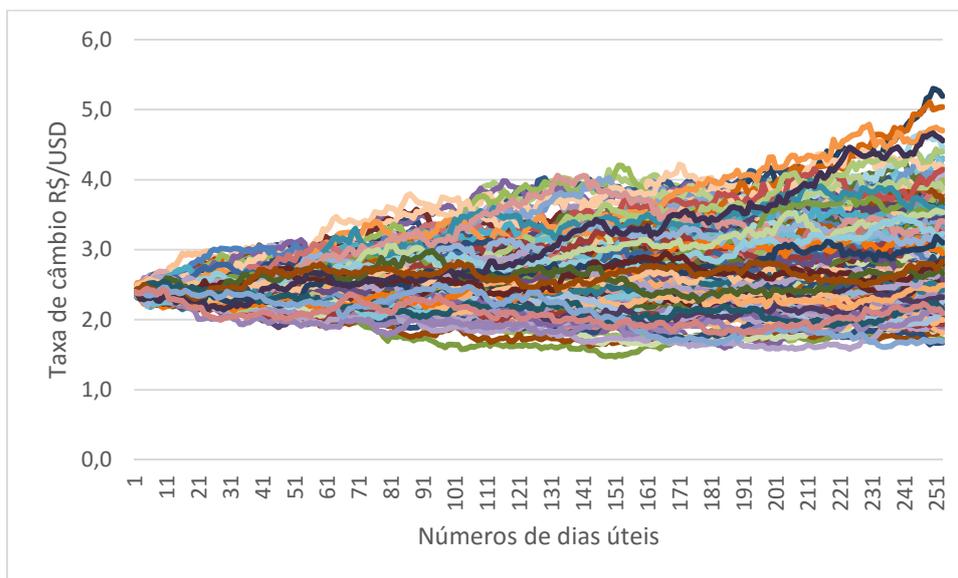
A Figura 5.1 mostra o comportamento dos valores ótimos para um número de cenários variando de 10 até 600. O número de cenários começou com dez, variando de dez em dez até atingir cinquenta cenários. Após isso uma solução foi obtida para 100, 200, 300, 400, 500 e 600 cenários.

Figura 5.1. Análise de estabilidade interna do teste de geração de cenários.



Por meio da Figura 5.1, é possível observar que a partir de 200 cenários o valor ótimo do modelo (5.1) – (5.32) não varia mais do que 0,2%, o que mostra que a partir desse número de cenários há uma estabilização do valor da função objetivo. Portanto, estabeleceu-se 200 cenários para a geração dos testes numéricos deste capítulo. A Figura 5.2 mostra a evolução dos duzentos cenários gerados com passo unitário de 1 dia útil para a taxa de câmbio entre reais (R\$) e dólar americano (USD) utilizando o método descrito na seção 5.4.1.

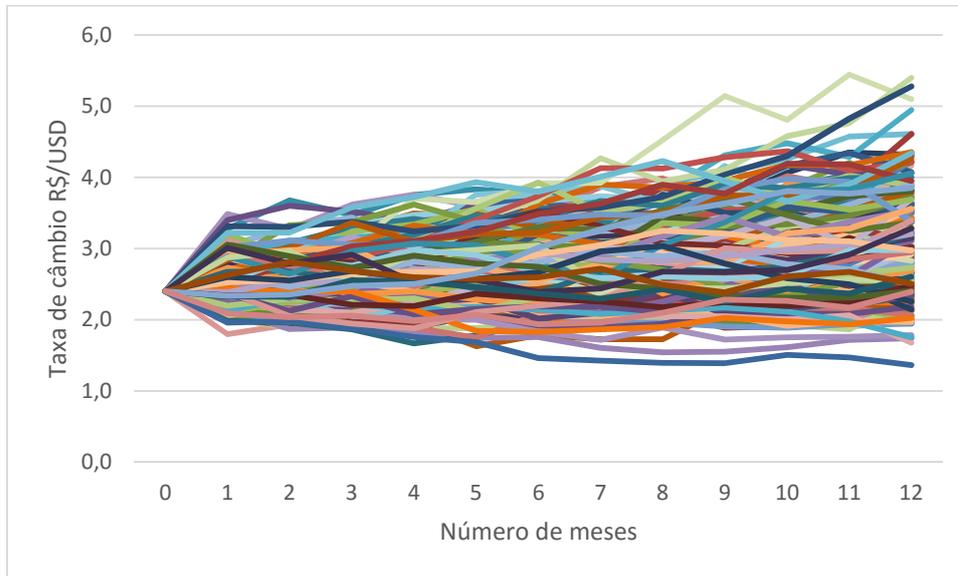
Figura 5.2. Evolução dos cenários para a taxa de câmbio R\$/USD.



Como o fluxo de caixa é gerenciado mês a mês, a taxa de câmbio mensal de cada cenário foi estabelecida obtendo-se de cada cenário as taxas de câmbio geradas a cada 21 dias úteis, que corresponde ao número de dias úteis médio de cada mês. A Figura 5.3 mostra os duzentos

cenários para os doze meses utilizados nos testes numéricos. Os cenários foram considerados equiprováveis.

Figura 5.3. Cenários para os doze meses do horizonte de planejamento do caixa.



5.5 Resultados computacionais

Para a geração dos resultados computacionais os parâmetros w_{ij} e w_{ij}^2 são os mesmos apresentados no capítulo 2, na seção 3.2. As variáveis de decisão do primeiro estágio são aquelas variáveis f_{ijs} em que $i \in P$ e $P = \{1, \bar{1}, \bar{\bar{1}}\}$, ou seja, as variáveis de primeiro estágio correspondem ao primeiro período do horizonte de planejamento. As entradas e saídas de caixa para rodar os modelos estocásticos estão divididas entre entradas e saídas que se originam no mercado interno, cotadas em R\$, e as entradas e saídas de caixa que são originadas no mercado externo e cotadas em USD. As taxas de câmbio para transformar os dólares, recebidos do mercado externo, são oriundas dos cenários gerados na seção anterior. A Tabela 5.1 apresenta as entradas e saídas de caixa em R\$ e em USD utilizadas como parâmetros para rodar os modelos de programação estocástica. O tempo computacional para rodar os modelos estocásticos foi de menos de um minuto. O número de variáveis do modelo RN é de 333.001 e entre essas existem 9.600 variáveis inteiras. O modelo CVaR possui 333.202 variáveis, dentre as quais 9.600 são variáveis inteiras e o modelo minimax possui 333.002 variáveis entre as quais, também, 9.600 são variáveis inteiras.

Tabela 5.1 Entradas e saídas de caixa (em milhares de R\$ e US\$)

Período	Entradas de caixa		Saídas de caixa	
	R\$	US\$	R\$	US\$
1	11.088,00	1.540,00	62.411,30	11.144,88
2	6.952,27	1.557,19	5.479,60	978,50
3	9.371,55	1.484,38	12.606,30	2.251,13
4	10.192,85	1.455,42	13.440,00	2.400,00
5	9.381,20	1.345,31	10.751,30	1.919,88
6	15.070,24	2.127,40	29.999,20	5.357,00
7	9.400,04	1.424,48	6.505,80	1.161,75
8	15.883,83	2.214,58	12.132,40	2.166,50
9	13.221,85	1.839,48	4.211,06	751,98
10	105.591,97	14.739,48	35.482,30	6.336,13
11	86.818,02	12.500,00	66.753,54	11.920,28
12	93.588,97	13.020,83	98.024,78	17.504,43

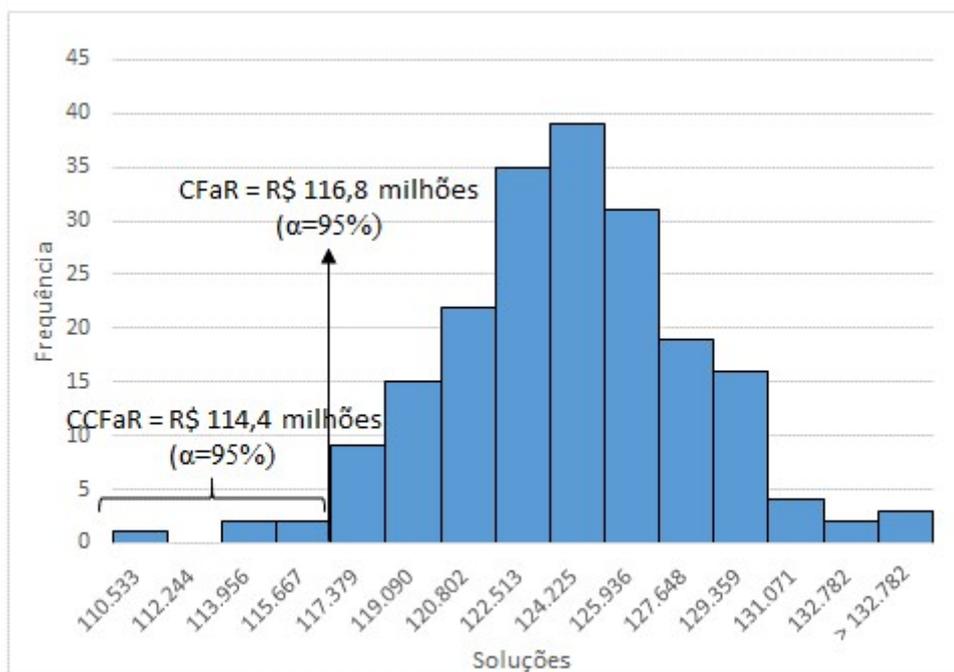
Os valores de entradas e saídas de caixa em US\$ são multiplicados por cada cenário de taxa de câmbio para gerar as entradas e saídas de caixa em R\$ de cada cenário. Para os resultados computacionais, foram considerados os duzentos cenários gerados pela metodologia desenvolvida na Seção 5.2 e os mesmos são utilizados para os modelos de programação estocástica de dois estágios com recursos neutra em relação ao risco, denominado de RN, minimax com arrependimento, denominado de minimax e o CVaR. Para este último foram considerados $\alpha \in \{0,7; 0,75; 0,80; 0,85; 0,95; 0,96; 0,97; 0,98; 0,99\}$.

Para a análise estatística dos modelos propostos, foram considerados a média, o valor de pior caso e o valor de melhor caso entre as soluções fornecidas pelos duzentos cenários, o desvio padrão, o índice beta (β), definido a seguir, e a probabilidade das soluções entre os duzentos cenários ser menor do que R\$ 120 milhões, que foi o valor estabelecido como meta pela tesouraria da empresa. Essa probabilidade é definida pela razão entre o número de soluções abaixo de R\$ 120 milhões sobre o número total de soluções (200). Agregam-se a esses indicadores o *Cash Flow at Risk* (CFaR) e o *Conditional Cash Flow at Risk* (CCFaR) de cada conjunto das 200 soluções estocásticas geradas pelos modelos propostos.

O CFaR é a queda máxima do montante do fluxo de caixa gerado no horizonte de planejamento, ocorrida devido ao impacto de variações na taxa de mercado em um dado conjunto de exposições e um determinado nível de confiança. No caso específico desta tese, o conjunto de exposições são as entradas e saídas de caixa em US\$, a taxa de mercado é a taxa de câmbio R\$ por US\$ e o nível de confiança é de 95%. Para o cálculo do CFaR, as soluções

estocásticas correspondentes a cada cenário de taxa de câmbio foram ordenadas de forma crescente e identifica-se aquela solução correspondente ao nível de confiança de 95% (percentil) desejado. Observe na Figura 5.4 que o valor de R\$ 116,8 milhões representa o CFaR, com um intervalo de confiança de 95%, para um conjunto de soluções de fluxo de caixa. O CCFaR é definido como uma esperança condicional, ou seja, é a expectativa de perda, dado que a perda foi maior do que CFaR. Na prática, o CCFaR pode ser calculado por meio da média dos valores que excedem o CFaR, com um nível de confiança desejado. Na Figura 5.4 o valor do CCFaR é de R\$ 114,4 milhões. Para maiores detalhes sobre as medidas do CFaR veja Fonseca (2005) e Lee (1999).

Figura 5.4 CFaR e CCFaR de um conjunto de soluções para o fluxo de caixa.



Essas medidas estatísticas são utilizadas para medir o risco entre os modelos de aversão ao risco e o modelo RN.

O índice β reflete o comportamento relativo de um conjunto de dados em relação a um outro conjunto de referência. A função básica do índice β é ser um indicador de riscos. Quando o β é maior do que 1, diz-se que o conjunto de dados analisado tem um risco maior do que aquele considerado como referência. Caso o β seja menor do que 1, o conjunto de dados tem um risco menor do que o conjunto de dados de referência. Caso o índice β seja igual a um, os dois conjuntos de dados possuem o mesmo nível de risco. Para um melhor entendimento desse índice, considere o retorno de uma ação em relação ao índice Ibovespa (índice composto por

um conjunto de ações negociado na BMF&Bovespa). Se essa ação tem um β maior do que um, ela tende a subir mais do que o Ibovespa quando este está em alta e, em compensação, tende a cair mais quando o Ibovespa estiver em baixa. Para o problema do fluxo de caixa, utilizou-se o β como um índice para medir o risco entre o modelo RN e os modelos de aversão ao risco. Para um conjunto de soluções dos modelos de aversão ao risco, foi calculado o índice β em relação ao conjunto de soluções do modelo RN. A fórmula para o cálculo do beta é a seguinte:

$$\beta = \frac{\text{Cov}(\text{soluções dos 200 cenários de RN}, \text{soluções dos 200 cenários de aversão ao risco})}{\text{variância}(\text{soluções dos 200 cenários de RN})}$$

sendo que,

$\text{Cov}(\text{soluções dos 200 cenários de RN}, \text{soluções dos 200 cenários de aversão ao risco})$ a covariância do conjunto de soluções dos duzentos cenários geradas pelo modelo RN e do conjunto de soluções dos duzentos cenários geradas por meio de um determinado modelo de aversão a risco e $\text{Var}(\text{soluções dos 200 cenários de RN})$ é a variância do conjunto de soluções dos duzentos cenários geradas por meio do modelo RN. Para mais detalhes sobre o índice β , veja Gitman (1997).

5.5.1 EVPI e VSS

Para o modelo neutro em relação ao risco, o EVPI e o VSS foram calculados para atestar que a aleatoriedade nos parâmetros é importante para o tomador de decisão. O resultado apresentado na Tabela 5.2 indica que é possível obter um ganho expressivo por meio da aquisição da informação perfeita sobre o futuro. Em termos absolutos, o valor de R\$ 1,2 milhões de reais representa para a empresa estudada uma redução das suas despesas financeiras em torno de 10%, o que gera um aumento do lucro nesse percentual, o que é representativo para a empresa estudada.

Tabela 5.2 EVPI e VSS para o modelo neutro ao risco (valores em milhares de reais).

Cenários	RN	WS	EEV	EVPI	VSS
200	123.133,64	124.347,23	121.983,85	1.213,59	1.149,79

A Tabela 5.3 mostra que as soluções WS apresentam algumas estatísticas que indicam que há um ganho de desempenho quando é utilizado o método de *wait-and-see*, como era esperado. Observe, por exemplo, que o valor de pior caso para as soluções WS é 5,44% melhor do que as duzentas soluções geradas pelo modelo RN para obter-se o valor esperado. Isso

representa uma diferença em torno de R\$ 6 milhões de reais. Para o melhor caso das soluções WS, ele é 2,61% menor do que o pior caso do modelo RN, evidenciando que as soluções WS aumentam mais do que proporcionalmente o pior caso em relação ao decréscimo do melhor caso.

Outro aspecto interessante das soluções WS é que elas diminuem, em termos percentuais, a relação entre o desvio-padrão e o valor esperado das suas soluções comparativamente ao modelo RN. Houve uma redução de 31,46% nessa medida para as soluções WS, quando comparadas às soluções do modelo RN. Isso evidencia que as soluções WS tem uma menor dispersão dos dados em relação as soluções do modelo RN. Outro indicador importante para o gestor financeiro é a probabilidade de as soluções dos modelos encontrarem-se abaixo de uma determinada meta estabelecida pela direção da empresa. Valores de soluções abaixo de, por exemplo, R\$ 120 milhões são considerados ruins pela direção da companhia e medir a probabilidade desses eventos acontecerem é importante para o gestor financeiro. Na Tabela 5.4 pode-se observar que as soluções WS diminuem significativamente (6,5%) a probabilidade de os valores das soluções encontrarem-se abaixo de R\$ 120 milhões.

Tabela 5.3 Indicadores estatísticos das soluções do modelo RN e WS (valores em milhares de reais).

	Valor Esperado (VE)	Pior Caso	Melhor Caso	Desvio Padrão (DP)	DP/VE %	Probabilidade (%) Valor da Solução < 120 milhões
RN	123.133,64	110.532,87	134.493,46	3.955,85	3,21	14,50
WS	124.347,23	116.544,46	130.979,38	2.741,13	2,20	6,50

A Tabela 5.4 apresenta os mesmos indicadores da Tabela 5.3 para comparar os modelos RN e EEV. Note que, o pior caso entre as duzentas soluções geradas pelo modelo EEV para gerar o seu valor esperado tem um incremento marginal e que o melhor caso deteriora-se 2,62% em relação as soluções geradas pelo modelo RN. O valor esperado do modelo EEV tem uma redução de aproximadamente 1% e a probabilidade das soluções geradas pelo modelo EEV estar abaixo da meta de R\$ 120 milhões é 13,51% maior quando comparada a essa mesma probabilidade para o modelo RN.

Tabela 5.4 Indicadores estatísticos das soluções dos modelos RN e EEV (valores em milhares de reais).

	Valor Esperado (VE)	Pior Caso	Melhor Caso	Desvio Padrão (DP)	DP/VE %	Probabilidade (%) Valor da Solução < 120 milhões
RN	123.133,64	110.532,87	134.493,46	3.955,85	3,21	14,50
EEV	121.983,85	110.552,78	130.973,76	3.195,08	2,62	21,00

Diante dessas análises, pode-se concluir que desprezar a aleatoriedade dos dados pode ser um risco na administração do caixa da empresa estudada.

5.5.2 Apresentação dos resultados e estatísticas dos modelos RN e de aversão ao risco

A tesouraria da empresa não trabalha com modelos estocásticos para a gestão do caixa e, também, não tem em seus relatórios nenhum tipo de análise estatística dos resultados de simulações que ela realiza com os parâmetros incertos do fluxo de caixa. Portanto, uma forma de apresentar os resultados para a companhia, além das medidas clássicas de pior caso, melhor caso, desvio padrão, o índice β e o VaR e o CVar, foi construir duas tabelas de frequência (Tabela 5.5 e Tabela 5.6), mostrando para o gestor financeiro como se comportam as duzentas soluções estocásticas geradas pelos modelos propostos. O objetivo das Tabelas 5.5 e 5.6 é mostrar para o gestor como o aumento da aversão ao risco altera os valores das duzentas soluções geradas pelo modelo e, conseqüentemente, como isso afeta o valor esperado dos modelos propostos. Na Tabela 5.5 observa-se que grande parte das soluções está entre R\$ 120 e R\$ 130 milhões, sendo que a Tabela 5.6 mostra que 48% das soluções encontram-se entre R\$ 120 e R\$ 125 milhões e 37,5% das soluções encontram-se acima de R\$ 125 milhões. Para o modelo RN, soluções abaixo da meta estabelecida pela tesouraria de R\$ 120 milhões representam uma porcentagem de 14,5%.

Tabela 5.5 Frequência das soluções dos modelos propostos.

Valor das Soluções ($\times 10^6$)		Frequência											
		RN	Minimax	CVar ($\alpha =$)									
				0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
>	\leq												
100	105	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
105	110	0	41	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
110	115	3	100	3	7	3	5	4	5	3	4	126	120
115	120	26	49	27	28	27	24	136	153	164	174	51	69
120	125	96	9	139	146	141	164	45	40	29	22	22	11
125	130	66	0	28	16	27	6	15	2	4	0	1	0
130	135	9	0	3	2	2	1	0	0	0	0	0	0

Tabela 5.6 Frequência em % das soluções dos modelos propostos.

Valor das Soluções ($\times 10^6$)	Frequência (%)											
	RN (%)	Minimax (%)	CVaR ($\alpha =$)									
			0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
Menor ou igual 120	14,50	95,50	15,00	18,00	15,00	14,50	70,00	79,00	83,50	89,00	88,50	94,50
Entre 120 e 125	48,00	4,50	69,50	73,00	70,50	82,00	22,50	20,00	14,50	11,00	11,00	5,50
Maior do que 125	37,50	-	15,50	9,00	14,50	3,50	7,50	1,00	2,00	-	0,50	-
Maior do que 120	0,86	0,05	0,85	0,82	0,85	0,86	0,30	0,21	0,17	0,11	0,12	0,06

A Tabela 5.7 apresenta os resultados para o modelo RN. A Tabela 5.7 apresenta o valor esperado do modelo RN, o pior e o melhor caso entre os duzentos cenários considerados, o desvio padrão e, para um nível de confiança de 0,95, o CFaR e o CCFaR calculado considerando uma análise pós-otimização das duzentas soluções geradas pelo modelo de programação estocástica. Considerando um nível de confiança de 95%, o pior resultado de caixa é de R\$ 116,8 milhões e com o mesmo nível de confiança a média dos resultados de caixa inferiores ao CFaR é de R\$ 114,4 milhões.

Tabela 5.7 Resultados para o modelo RN (valores em milhares de reais).

Valor Esperado	Pior Caso	Melhor Caso	Desvio Padrão	Nível de confiança = 0,95 CFaR	CCFaR
123.133,64	110.532,87	134.493,46	3.955,85	116.776,60	114.387,19

A Tabela 5.8 apresenta os mesmos resultados da Tabela 5.7 para o modelo minimax, com exceção do índice beta.

Tabela 5.8 Resultados para o modelo Minimax (valores milhares de reais).

Valor Esperado	Pior Caso	Melhor Caso	Desvio Padrão	β	Nível de confiança = 0,95 CFaR	CCFaR
112.677,39	104.090,38	124.016,02	3.536,72	0,88	106.994,68	106.034,12

No modelo minimax com arrependimento, que considera os desvios mais desfavoráveis, o valor ótimo esperado é menor do que o valor ótimo esperado do modelo RN. Esse é o “preço do conservadorismo” da solução minimax. O CFaR, que é o menor valor entre as soluções para o horizonte de planejamento com um nível de confiança de 0,95, é 8,37% menor em relação ao CFaR do modelo RN. Uma redução de 7,40% também ocorre com o CCFaR do modelo minimax em relação ao modelo RN. Apesar da redução significativa do valor médio das

soluções em relação ao modelo RN, a medida do desvio padrão também teve uma redução importante (-10,60%).

Na Tabela 5.5, observe que a grande concentração das soluções está entre R\$ 105 e R\$ 120 milhões. A Tabela 5.6 mostra que a ocorrência de valores abaixo da meta de R\$ 120 milhões é de 95,5%, muito superior a essa mesma medida do modelo RN. A probabilidade dos valores se encontrarem entre de R\$ 120 e R\$ 125 milhões é de apenas 4,5%. Observe que o valor mais frequente do modelo minimax, em relação ao modelo RN, é 8,19% menor.

Para o modelo CVaR, como era esperado, quanto maior o valor de α , menor o valor esperado da solução do modelo, já que os cenários mais conservadores têm maior importância em relação aos cenários com maior potencial de ganhos financeiros. Para a comparação entre o modelo RN e o CVaR, observe na Tabela 5.9 que o valor esperado do modelo CVaR é, no máximo, 7,14% ($\alpha = 0,99$) menor do que o valor esperado da solução do modelo RN, enquanto a redução na medida do desvio-padrão é representativa para todos os valores de α em comparação ao desvio-padrão das soluções do modelo RN.

Tabela 5.9 Resultados para o modelo CVaR (valores em milhares de reais).

CVaR $\alpha =$	Valor Esperado	Pior Caso	Melhor Caso	Desvio Padrão	β	Nível de confiança = 0,95	
						CFaR	CCFaR
0,70	121.469,05	110.545,40	131.496,32	2.918,34	0,71	116.789,13	114.399,73
0,75	120.554,85	107.388,12	130.977,71	3.206,50	0,76	114.532,13	112.107,35
0,80	120.946,37	110.548,06	131.329,30	2.856,29	0,69	116.791,79	114.402,38
0,85	119.631,98	110.550,08	130.436,83	2.237,74	0,50	116.793,81	114.404,41
0,90	119.059,37	110.552,23	127.719,90	2.560,73	0,58	116.795,96	114.406,55
0,95	117.870,36	110.554,41	125.400,45	2.312,89	0,50	116.796,39	114.408,73
0,96	117.471,39	110.555,39	126.703,42	2.377,14	0,50	116.360,61	114.389,05
0,97	116.765,65	110.556,54	124.469,90	2.093,10	0,43	115.844,62	114.252,40
0,98	115.733,29	110.560,20	126.041,23	2.587,42	0,55	114.219,42	113.492,02
0,99	114.336,97	110.561,87	123.277,30	2.690,97	0,59	112.423,83	112.216,95

O mesmo ocorre com o valor de β . Note que há uma redução substancial no risco medido pelo índice beta. Na Tabela 5.9, é possível observar que os valores do CFaR e do CCFaR são desprezíveis quando se compara o modelo CVaR e o RN para todos os níveis de α . Para $\alpha = 0,99$, as reduções do CFaR e do CCFaR são de apenas 3,60% e 1,90%, respectivamente.

A Tabela 5.5 mostra que para α variando entre 0,7 e 0,85, a grande concentração das soluções encontram-se entre R\$ 120 e R\$ 125 milhões. Para valores de α entre 0,90 e 0,97, a

concentração maior das soluções está entre R\$ 115 e R\$ 120 milhões, enquanto que para $\alpha = 0,98$ e $\alpha = 0,99$, a concentração das soluções está entre R\$ 110 e R\$ 115 milhões. A Tabela 5.6 mostra que o modelo CVaR diminui a dispersão dos valores das soluções, ou seja, enquanto o modelo RN atribui frequência de 48% para os valores entre R\$ 120 e R\$ 125 milhões, o modelo CVaR atribui frequência entre 69 e 82% para esse intervalo com α variando entre 0,7 e 0,85. Para valores de α acima desses valores, a frequência maior ocorre para valores abaixo de R\$ 120 milhões. Interessante notar que para valores de α variando entre 0,7 e 0,85, valores abaixo de R\$ 120 milhões possuem probabilidades de ocorrência praticamente iguais às do modelo RN. Portanto, o modelo CVaR tem a vantagem de gerar mais assertividade para o gestor financeiro, no sentido de que as frequências das soluções estão mais concentradas em torno do valor esperado do modelo estocástico de aversão ao risco.

Essa constatação pode ser observada nas Figuras 5.5 a 5.9, que apresentam os histogramas para os modelos propostos de programação estocástica. Observe que, no modelo RN o valor esperado é de R\$ 123.133,64 e a frequência das soluções estão dispersas no seu respectivo histograma, enquanto que para o modelo CVaR, os histogramas mostram que as frequências das soluções se encontram muito mais concentradas em torno dos valores esperados das soluções estocásticas. O modelo RN, devido a sua maior dispersão das soluções, é o que gera a maior probabilidade de obtenção de valores acima de R\$ 125 milhões.

A Tabela 5.10 apresenta a média das soluções para os mesmos intervalos apresentados na Tabela 5.5. Observe que o modelo CVaR não apresentou melhora importante para os valores médios nos intervalos estabelecidos. Dependendo da política de risco de uma determinada companhia, o modelo CVaR pode ou não ser preterido em relação ao modelo RN, já que a grande vantagem na sua utilização, para o caso do problema do fluxo de caixa, é a sua assertividade. No caso da presente análise da empresa do estudo de caso, o modelo RN pode ser preterido, já que ele possui praticamente a mesma probabilidade de ocorrência de valores abaixo da meta de R\$ 120 milhões do modelo CVaR, com α variando entre 0,7 e 0,85, e possui probabilidade alta de ocorrência de valores acima de R\$ 125 milhões, o que não acontece com o modelo CVaR. O modelo minimax com arrependimento se mostrou muito conservador e não despertou interesse na tesouraria da empresa. É importante frisar que o principal objetivo nestes experimentos computacionais foi mostrar o potencial das análises dos modelos propostos para gestores de empresas do setor de material escolar, e não propor a utilização de um modelo em detrimento de outro, já que o exemplo é ilustrativo e os resultados e análises são baseados em apenas um exemplar real de uma empresa. Qualquer inferência sobre o comportamento desses

modelos, baseada apenas nestes resultados, seria limitada devido à análise realizada em apenas um exemplar real de uma empresa.

Tabela 5.10 Média das soluções estocásticas (valores em milhões de reais).

Valor das Soluções (x106)			Média									
			CVaR ($\alpha =$)									
	RN	Minimax	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
<= 120	117,43	112,35	117,44	116,25	117,45	118,80	117,83	116,99	116,65	116,21	115,01	113,89
> 120 e <= 125	122,56	122,15	121,71	121,20	121,16	122,41	122,45	122,13	122,37	122,10	121,67	122,03
>= 125	127,56	-	127,18	127,81	127,11	126,93	126,38	125,38	126,70	-	126,04	-
> 120	125,06	122,15	124,45	124,51	124,13	124,67	124,42	123,75	124,54	122,10	123,86	122,03

Figura 5.5 Histograma das soluções do modelo RN.

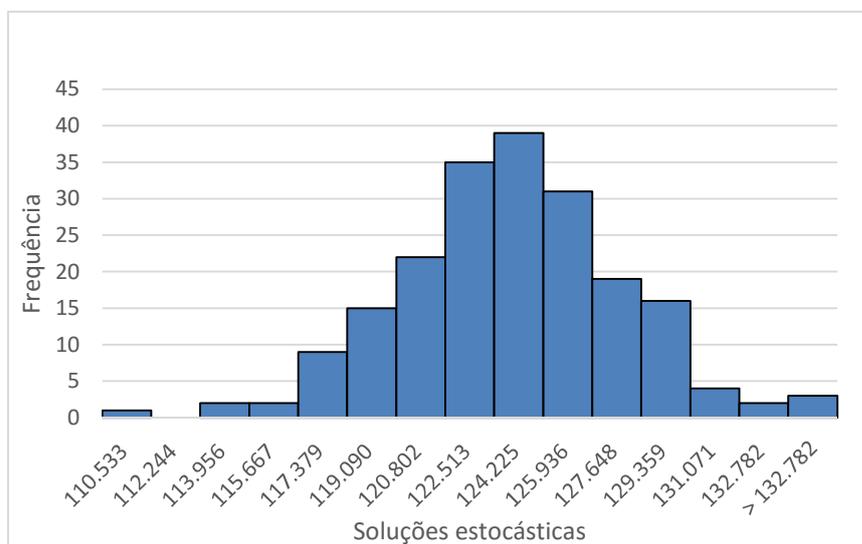


Figura 5.6 Histograma das soluções do modelo minimax.

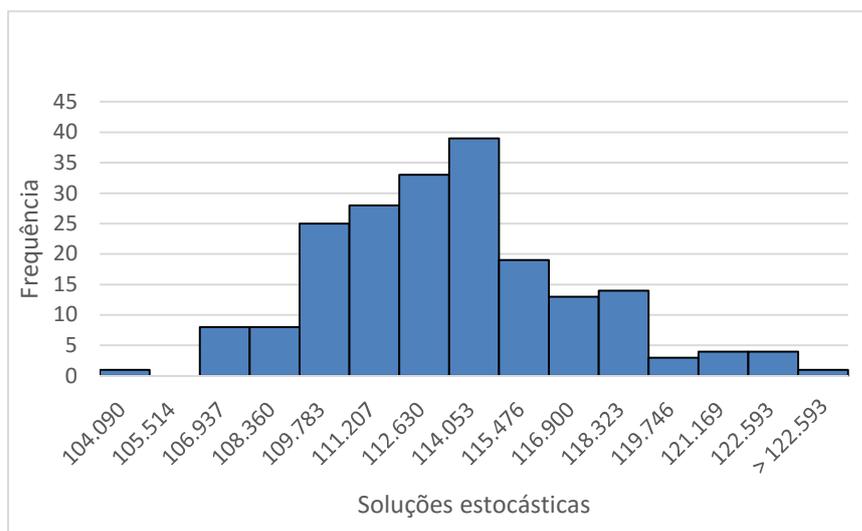


Figura 5.7 Histograma das soluções do modelo CVaR, $\alpha = 0,7$.

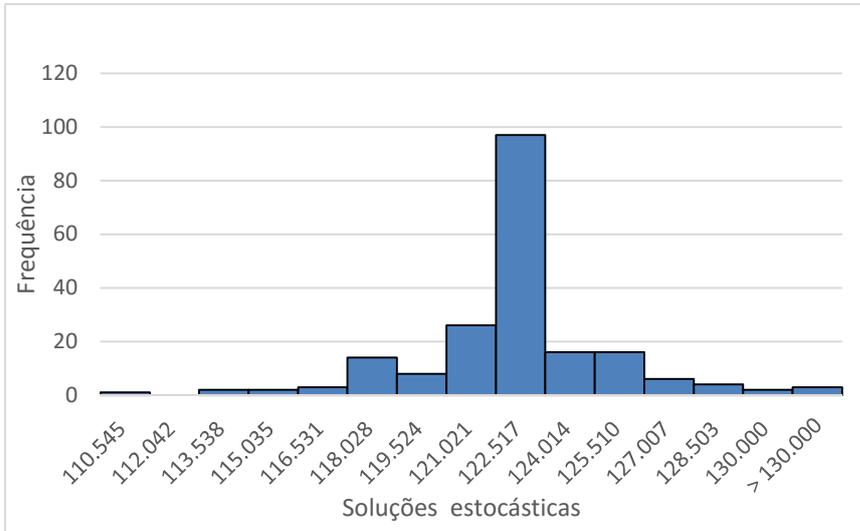


Figura 5.8 Histograma das soluções do modelo CVaR, $\alpha = 0,95$

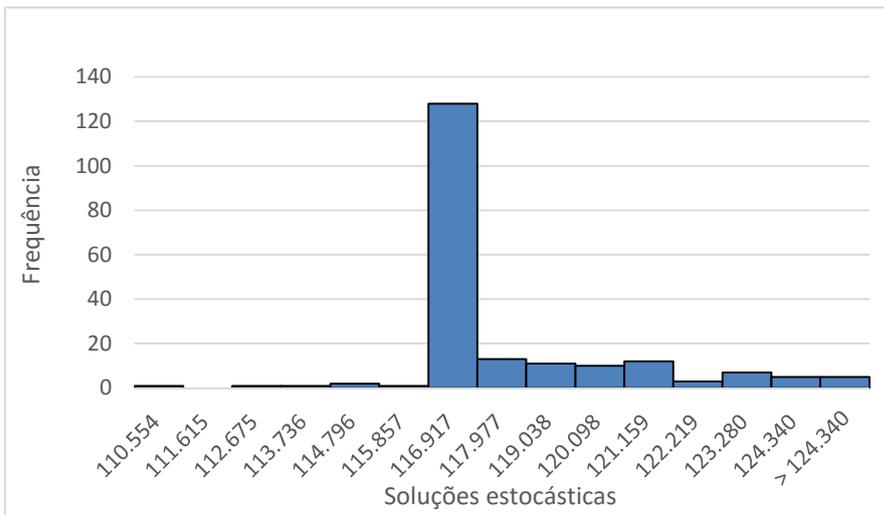
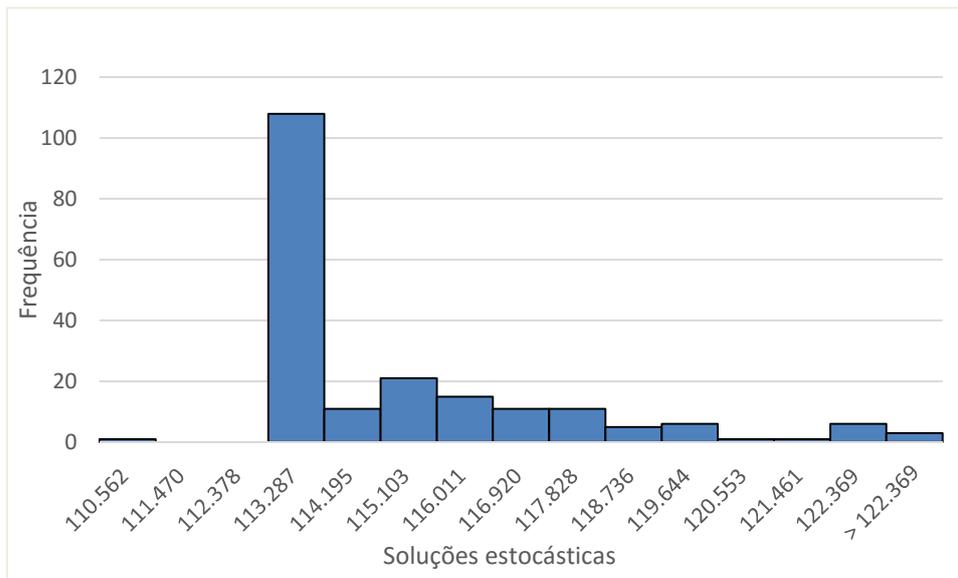


Figura 5.9 Histograma das soluções do modelo CVaR, $\alpha = 0,99$



Existem outros modelos de programação estocástica de dois estágios com recurso que poderiam ser utilizados para avaliar o comportamento das soluções ótimas, principalmente quanto ao *trade-off* entre risco e retorno, como os modelos de média-risco ou de recursos restritos (ver Alem e Morabito, 2012). Entretanto, a escolha, nesta tese, do modelo CVaR foi uma tentativa de implementar uma abordagem de otimização estocástica no problema do fluxo de caixa que está sendo adotado em várias aplicações práticas, mas que ainda não foi aplicado num problema de gerenciamento de caixa de uma empresa não financeira. Estudos com esses outros modelos estocásticos são tópicos interessantes para pesquisa futura.

Os resultados das análises das abordagens da programação estocástica para o problema do fluxo de caixa indicam que existem análises interessantes para a gestão financeira de uma empresa. As comparações entre os modelos RN, minimax e CVaR, indicam que existem diferenças importantes entre as soluções estocásticas geradas para compor o valor esperado de cada modelo, sendo a mais significativa a menor dispersão das soluções no modelo CVaR. Todas as análises desse capítulo foram realizadas com $P = \{1, \bar{1}, \bar{\bar{1}}\}$, ou seja com as variáveis de primeiro estágio iguais ao primeiro período. Outras análises poderiam ter sido realizadas com $P = \{1, \bar{1}, \bar{\bar{1}}, 2, \bar{2}, \bar{\bar{2}}\}$ de maneira similar. Porém, algumas investigações preliminares nessa direção não indicaram vantagens utilizando mais períodos como variáveis de primeiro estágio.

5.6 Horizonte rolante para o problema do fluxo de caixa

O modelo de horizonte rolante, pode ser visto como uma alternativa de se obter soluções aproximadas para um modelo de programação estocástica multiestágio. Como o modelo de programação estocástica multiestágio é muito mais difícil de ser desenvolvido, implementado e resolvido do que os modelos de dois estágios, principalmente quando se trata de modelos de otimização com variáveis discretas, esta heurística do horizonte rolante pode ser uma boa opção para gerar solução em tempo computacional aceitável para problemas multiestagiados de fluxo de caixa. A abordagem de horizonte rolante (decrecente) para o problema do fluxo de caixa gera e resolve sucessivos problemas de programação estocástica em dois estágios com recursos neutros ao risco. Uma abordagem similar pode ser encontrada em Balasubramanian e Grossmann (2004). Para o problema do fluxo de caixa, o modelo de horizonte rolante foi resolvido por meio do algoritmo a seguir e as variáveis de primeiro estágio são as mesmas apresentadas na seção 5.3.

O algoritmo para o modelo de horizonte rolante é o seguinte:

Passo 0: faça período 1 = 1º período e #períodos = 12 meses;

Passo 1: gere 200 cenários de taxa de câmbio e rode o modelo RN com #períodos, em que o primeiro estágio corresponde ao período 1 e o segundo estágio aos demais períodos;

Passo 2: guarde a decisão tomada do primeiro estágio e escolha a taxa de câmbio aleatoriamente para o final do período 1 entre os duzentos cenários;

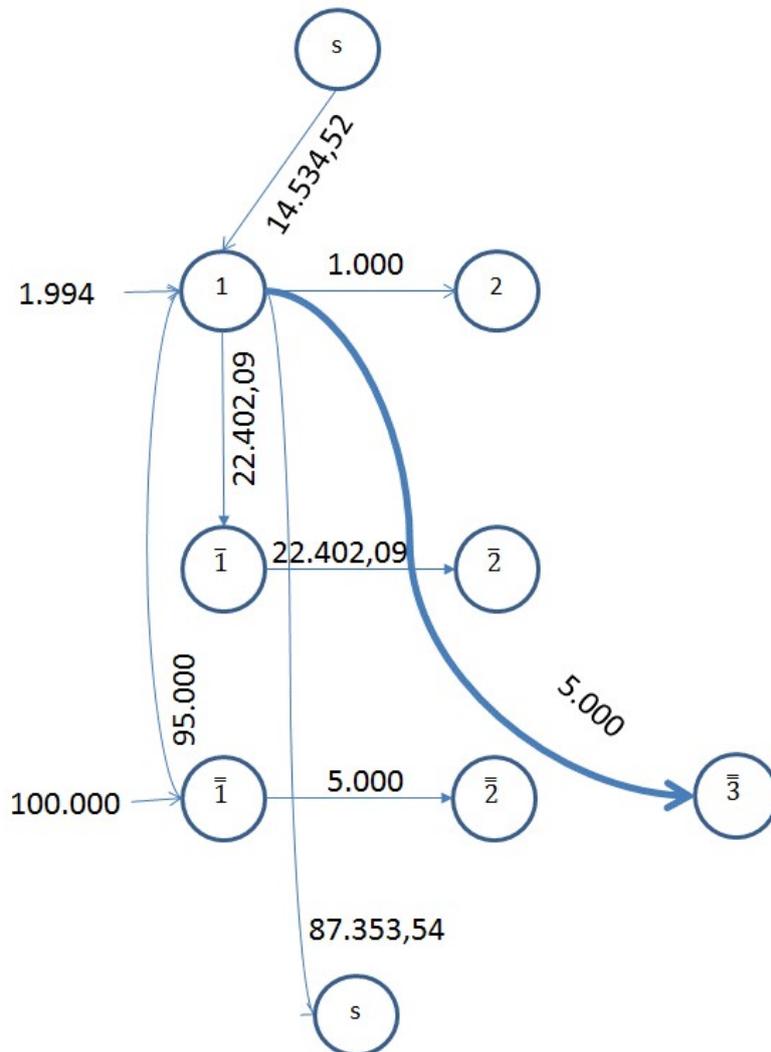
Passo 3: atualize os saldos iniciais para o início do próximo período, fazendo os ajustes de factibilidade (conversões entre os ativos e empréstimos bancários);

Passo 4: volte para o Passo 1, se período 1 < 12º período, fazendo #períodos = #períodos – 1 e período 1 = período 1 + 1.

A Figura 5.10 mostra as decisões de primeiro estágio do primeiro problema de programação estocástica em dois estágios com recurso para o problema do fluxo de caixa com horizonte decrescente, bem como as entradas e saídas de caixa após a primeira rodada do algoritmo apresentado anteriormente.. As decisões de primeiro estágio são $f_{121} = 1.000$, $f_{1\bar{1}1} = 22.402,09$, $f_{1\bar{3}1} = 5.000$, $f_{\bar{1}21} = 22.402,09$, $f_{\bar{1},11} = 95.000$ e $f_{\bar{1}\bar{2}1} = 5.000$. Após a incerteza ser revelada (taxa de câmbio R\$/US\$ escolhida aleatoriamente foi de 2,2380), as entradas e saídas de caixa são $s_1 = 14.534,52$ e $d_1 = 87.353,54$. Com esses dados, é possível calcular o balanço de fluxo após a incerteza ser revelada. Esse cálculo gerou uma necessidade de se obter um montante adicional de R\$ 4.227,11 de empréstimo bancário. Esse montante deve

ser pago ao banco no período seguinte, com juros no montante de R\$ 4.259,48 ($4.227,11 \div 0,9924$). Esse valor é subtraído das entradas de caixa em reais do próximo período e é utilizado para o novo problema de programação estocástica com horizonte de planejamento decrescente, já que o mesmo é pago ao banco pelo empréstimo contratado. Os saldos iniciais dos três ativos passam a ser agora $a_0 = 1.000$, $b_0 = 22.523,06$ ($22.402,09 \times 1,0054$) e $c_0 = 5.028,50$ ($5000 \times 1,0057$).

Figura 5.10 Rede com as variações de decisão de primeiro estágio e as entradas e saídas de caixa após a incerteza ser revelada



As taxas de câmbio R\$/USD, escolhidas aleatoriamente, assim como as entradas e saídas de caixa resultantes da aplicação do algoritmo de horizonte rolante (decrescente), são apresentadas na Tabela 5.11 e 5.12, respectivamente.

Tabela 5.11 Taxas de câmbio e entradas de caixa para o modelo de horizonte decrescente.

Período	Entradas R\$ (A)	Taxa	Entradas US\$ ©	Total
		Câmbio R\$/US\$ (B)		Entradas (A) + (B) x (C)
1	11.088,00	2,2380	1.540,00	14.534,52
2	6.952,27	2,2340	1.557,19	10.431,03
3	9.371,55	2,2340	1.484,38	12.687,65
4	10.192,85	2,1980	1.455,42	13.391,86
5	9.381,20	2,2720	1.345,31	12.437,74
6	15.070,24	2,2310	2.127,40	19.816,47
7	9.400,04	2,4390	1.424,48	12.874,35
8	15.883,83	2,4490	2.214,58	21.307,34
9	13.221,85	2,5550	1.839,48	17.921,72
10	105.591,97	2,6610	14.739,48	144.813,73
11	86.818,02	2,8740	12.500,00	122.743,02
12	93.588,97	3,2080	13.020,83	135.359,79

Tabela 5.12 Taxas de câmbio e saídas de caixa para o modelo de horizonte decrescente.

Período	Saídas R\$ (A)	Taxa	Saídas US\$ (C)	Total Saídas
		Câmbio R\$/US\$ (B)		Saídas (A) + (B) x (C)
1	62.411,30	2,2380	11.144,88	87.353,54
2	5.479,60	2,2340	978,50	7.665,57
3	12.606,30	2,2340	2.251,13	17.635,32
4	13.440,00	2,1980	2.400,00	18.715,20
5	10.751,30	2,2720	1.919,88	15.113,27
6	29.999,20	2,2310	5.357,00	41.950,67
7	6.505,80	2,4390	1.161,75	9.339,31
8	12.132,40	2,4490	2.166,50	17.438,16
9	4.211,06	2,5550	751,98	6.132,37
10	35.482,30	2,6610	6.336,13	52.342,74
11	66.753,54	2,8740	11.920,28	101.012,42
12	98.024,78	3,2080	17.504,43	154.178,99

Resolvendo os 12 modelos de programação estocástica em dois estágios com recurso neutros ao risco, a solução encontrada nesta abordagem de horizonte rolante gera um montante final de recursos financeiros de R\$ 124.337,84. A título de comparação, esse mesmo algoritmo foi utilizado para gerar uma solução com horizonte rolante para o modelo inteiro-misto determinístico (3.9) – (3.35), ao invés do modelo RN (5.1) – (5.32). O resultado foi a geração de um montante final de recursos de R\$ 119.380,10. Ou seja, uma diferença de R\$ 4.957,74 (3,99% maior) a favor da utilização do modelo de programação estocástica com

horizonte rolante. As taxas de câmbio utilizadas no final de cada período, para os devidos ajustes de factibilidade e atualização de saldos iniciais, foram exatamente as mesmas utilizadas para o procedimento com o modelo de programação estocástica. A Figura 5.11 e 5.12 apresentam as soluções para o procedimento de horizonte rolante usando os modelos determinístico e RN, respectivamente.

Figura 5.11 Rede com a solução do procedimento de horizonte rolante usando o modelo determinístico

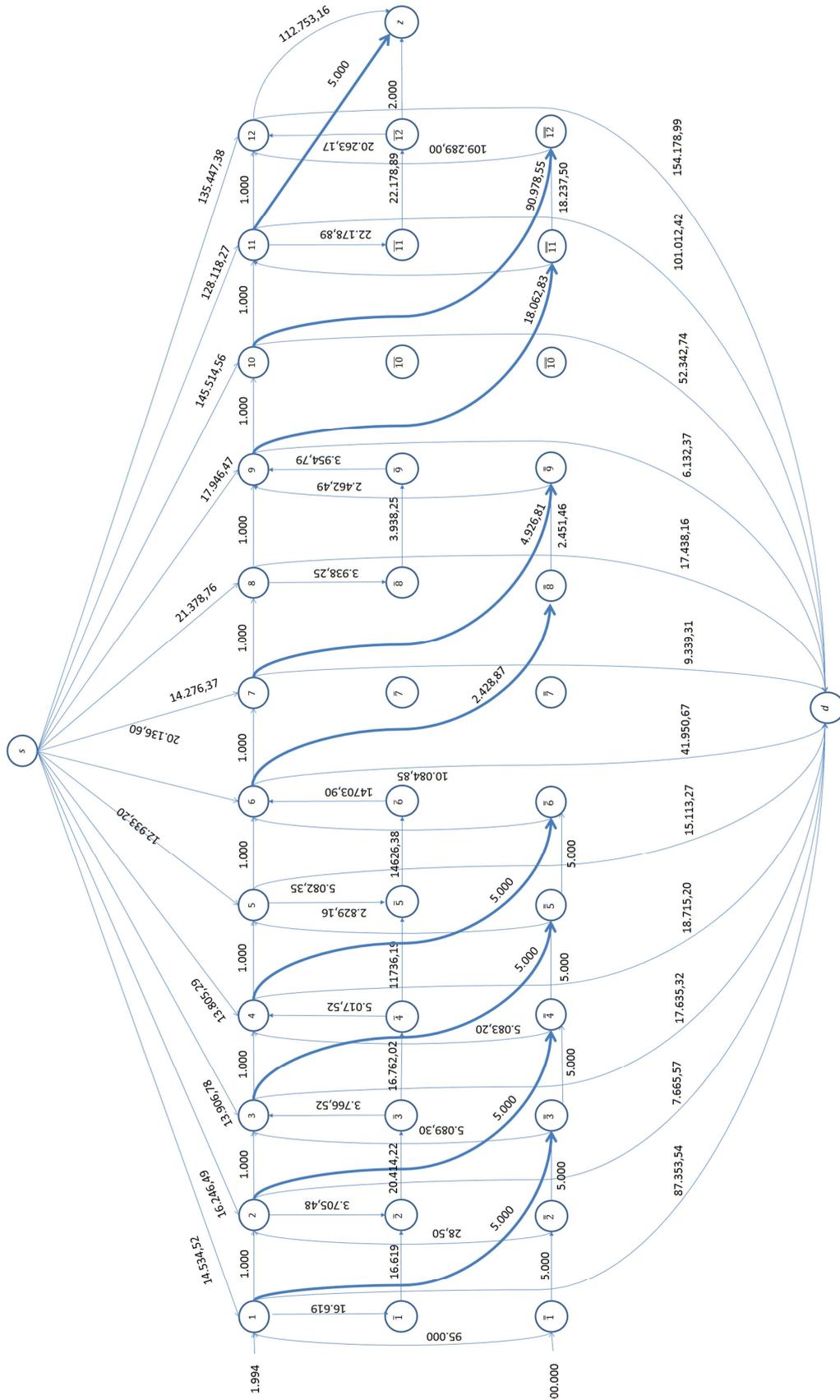
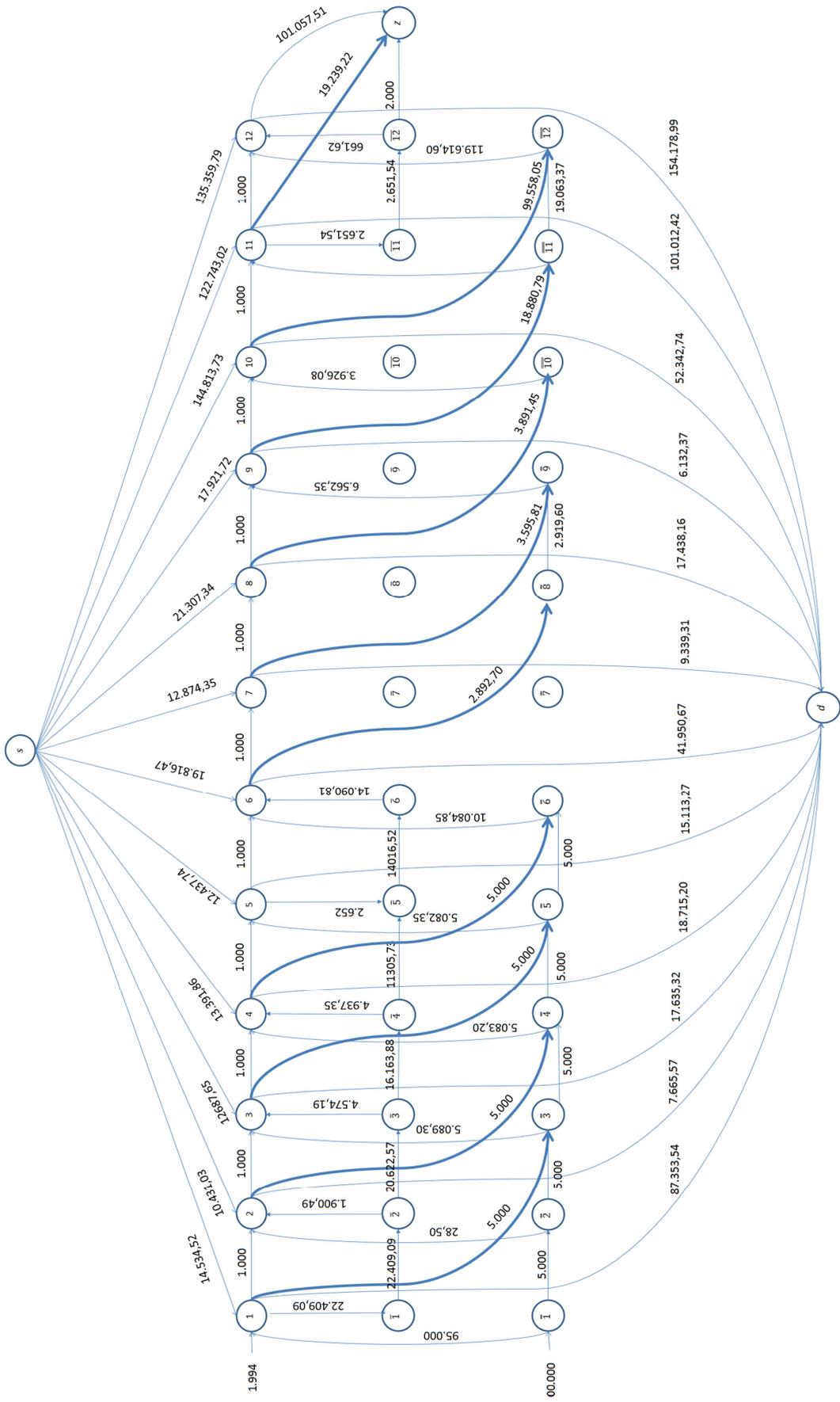


Figura 5.12 Rede com a solução do procedimento de horizonte rolante usando o modelo RN



Note que nas Figuras 5.11 e 5.12 os ajustes de factibilidade sempre ocorrem nas entradas de caixa. Convém salientar que esse procedimento foi comparado com apenas uma realização de 12 meses, por ilustração. A rigor, ele deveria ser repetido diversas vezes (por exemplo 30 vezes) e então calcular as vantagens do uso de um modelo sobre o outro em média nessas replicações. Essa abordagem foi apresentada ao tomador de decisão da empresa, que achou a abordagem interessante e se posicionou favorável à sua aplicação na prática da empresa. Esta abordagem apresenta, de forma mais clara, o fluxo de tomada de decisão no tempo, já que as variáveis de decisões de primeiro estágio são sempre fixadas e observáveis para cada período do horizonte decrescente de planejamento. A possibilidade de ajustar o balanço de fluxo também foi bem assimilada e bem recebida pelo gestor do fluxo de caixa da empresa estudada.

Na prática, uma vantagem desse procedimento é a sua adaptação a possíveis mudanças nos dados do problema. Note que, cada rodada deste procedimento corresponde a uma sequência dos 200 cenários ao longo dos 12 períodos, mas com ajustes no final de cada período, diferentemente do que ocorre com o modelo RN. Convém salientar que esse procedimento também poderia ter sido realizado com os outros modelos de programação estocástica, além do RN e do modelo determinístico.

O modelo de horizonte rolante pode ser visto como uma alternativa de se obter soluções aproximadas para um modelo de programação estocástica multiestágio. Como o modelo de programação estocástica multiestágio é mais difícil de ser desenvolvido, implementado e resolvido do que os modelos de dois estágios, principalmente quando se trata de modelos de otimização com variáveis discretas, este procedimento heurístico do horizonte rolante pode ser uma boa opção para gerar uma solução aproximada e efetiva em tempo computacional aceitável para problemas multiestágios de fluxo de caixa. Essas observações vão de encontro com algumas análises, como em Huang (2005) e Riis e Anderson (2004), em que os autores atestam que o ganho em resolver otimamente um problema com vários estágios é pequeno e sugerem que a solução de dois estágios deve ser preferida em detrimento da solução multiestágios, principalmente se o tempo computacional for um fator crítico. A modelagem multiestagiada do fluxo de caixa e uma comparação efetiva de suas soluções com as soluções de dois estágios e as soluções do modelo de horizonte rolante é um tema interessante para pesquisas futuras.

6. CONCLUSÕES

Nesse trabalho, o principal objetivo foi propor formulações matemáticas baseadas em programação linear inteira-mista, otimização robusta e programação estocástica em dois estágios com recursos (neutro ao risco e de aversão ao risco), para representar apropriadamente e resolver o problema de maximização dos recursos financeiros disponíveis no final de um horizonte de planejamento de caixa em empresas do setor de material escolar. Essas abordagens podem ser úteis para analisar o problema em ambientes sem e com incerteza nos parâmetros que definem esse fluxo e apoiar decisões de gestão de caixa nestas empresas.

Inicialmente, foi desenvolvida uma nova formulação inteira-mista do problema de fluxos em rede determinística para o planejamento tático do fluxo de caixa, que tem como diferencial em relação aos modelos anteriores já propostos na literatura os títulos negociáveis com carência para o resgate e a possibilidade de obter um rendimento maior, dependendo do valor investido. O ganho financeiro obtido pelo modelo inteiro-misto determinístico em relação ao modelo adotado pela tesouraria da empresa estudada não foi muito relevante nos exemplos da empresa aqui estudados. No entanto, além do pequeno aumento de recursos financeiros no nó objetivo, o modelo de otimização utilizado apresentou uma nova forma de gerenciar o caixa, com aumento da segurança e velocidade na análise do problema, bem como contribuiu para a sistematização do processo da gestão do fluxo de caixa, uma vez que a solução do modelo é menos dependente da experiência dos analistas da tesouraria da empresa.

Ademais, a cada mudança de cenário nos dados de entrada, o modelo inteiro-misto determinístico gera rapidamente uma nova solução otimizada. Essa rapidez é muito importante para os tomadores de decisão, já que, em muitos casos, os parâmetros do modelo são forçados a variar para gerar diversos cenários de choque, no intuito de analisar os impactos financeiros de possíveis mudanças no fluxo de caixa da empresa. Esses benefícios foram considerados importantes pelos tomadores de decisão da empresa.

Como os parâmetros que definem os fluxos de recursos no problema do fluxo de caixa tático em geral contém incertezas, desenvolveu-se também modelos estocásticos que consideram essas incertezas nos parâmetros deste problema. A abordagem de otimização robusta de Bertsimas e Sim (2004), aqui explorada, agregou maior flexibilidade, por meio do controle do conservadorismo adotado na análise, e não resultou em um modelo robusto de maior complexidade computacional em relação ao modelo inteiro-misto determinístico original. Esse

modelo de otimização robusta, aqui desenvolvido, representou adequadamente o problema com parâmetros incertos e pode ser aplicado com sucesso a situações realistas desse problema. Também foi possível estimar a probabilidade de violação das restrições, usando a simulação de Monte Carlo. Uma das vantagens da otimização robusta é que não há necessidade de determinar as distribuições de probabilidade dessas variáveis aleatórias envolvidas no problema, o que pode ser importante em certas situações reais.

As soluções robustas obtidas nos testes computacionais evidenciaram o *tradeoff* existente entre o risco e o retorno das soluções robustas em função da variação do *budget* de incerteza, Γ_i . Quanto maior o *budget* de incerteza, maior a deterioração do valor da solução robusta. Foi possível, por meio dos testes realizados com as variáveis aleatórias, \tilde{s}_i , \tilde{d}_i e \tilde{w}_{ij} suportar decisões de gestão financeira da empresa, com informações suficientes para gerenciar o seu fluxo de caixa tático. A escolha das soluções robustas adequou-se bem ao risco que a empresa está disposta a correr, sem que a deterioração das soluções adotadas prejudique sua estratégia de lucratividade. Além disso, foi possível mostrar que, apesar das soluções robustas apresentarem deterioração no valor da função objetivo, nos piores casos das variáveis aleatórias, o valor médio da solução adotada, obtida por meio de uma simulação de Monte Carlo, é muito próximo do valor da solução do modelo inteiro-misto determinístico, o que enfatiza a vantagem da implantação da solução robusta em detrimento da solução determinística.

Outra vantagem da otimização robusta é a sua contribuição na sistematização do tratamento e análise dos parâmetros incertos. Muitas empresas do setor de material escolar realizam simulações para entender o efeito das variações das variáveis aleatórias, \tilde{s}_i , \tilde{d}_i e \tilde{w}_{ij} nos seus planejamentos de caixa. Com a otimização robusta, essas simulações podem ser substituídas pelas análises com o modelo de otimização robusta, além de gerar resultados rapidamente e ser capaz de prescrever boas soluções factíveis para todo o intervalo poliédrico intervalar considerado. Com isso, aumenta-se também a segurança e acurácia no processo de gestão do fluxo de caixa tático e diminui-se a dependência da experiência dos analistas da tesouraria para o processo de tomada de decisões de fluxo de caixa.

Com relação aos modelos aqui propostos de programação estocástica, os modelos de programação estocástica em dois estágios com recursos também são uma boa alternativa para lidar com os parâmetros incertos do problema do fluxo de caixa quando se dispõe de informações sobre as distribuições das variáveis aleatórias envolvidas ou quando é possível gerar cenários realistas para o problema. Foram desenvolvidos e analisados os modelos de

programação estocástica neutro ao risco e os modelos de aversão ao risco minimax com arrependimento e o modelo de risco CVaR. As medidas do EVPI e do VSS mostraram que a aleatoriedade das taxas de câmbio é representativa para a gestão do fluxo de caixa e as análises de risco dos modelos RN, WS e EEV mostraram que existe boas razões para adotar os modelos de programação estocástica. Dessa forma, foram implementados os modelos minimax com arrependimento e o modelo de risco CVaR. O modelo minimax com arrependimento provou-se ser muito conservador na geração das soluções para o problema sem, entretanto, reduzir de forma significativa o risco associado. Isso ficou evidente nas medidas de risco utilizadas na seção 5.3.2. O modelo de risco CVaR, que está sendo objeto de várias aplicações práticas na literatura de programação estocástica e financeira, mostrou um potencial de análise interessante para o problema do fluxo de caixa

A abordagem de programação estocástica com horizonte rolante, baseado no modelo RN do capítulo 5, foi bem recebida pela tesouraria da empresa, já que ela apresenta de forma clara e intuitiva o fluxo de tomada de decisões no tempo (as variáveis de decisões de primeiro estágio são sempre fixadas nos primeiros períodos e observáveis para os demais períodos do horizonte decrescente de planejamento). A possibilidade de ajustar o balanço de fluxo, também foi bem assimilada e bem recebida pelos gestores do fluxo de caixa, além do que é prática da empresa rever as tomadas de decisões mensalmente, realizando os ajustes necessários para o tempo restante do horizonte de planejamento. Ademais, a abordagem de horizonte rolante com o modelo de programação estocástica de dois estágios mostrou-se mais vantajosa do que a aplicação do horizonte rolante usando o modelo determinístico, salientando que utilizou-se apenas uma replicação desse procedimento e que para conclusões mais contundentes esse procedimento deveria ser replicado diversas vezes e analisado os valores médios de um modelo sobre o outro. O procedimento heurístico do horizonte rolante como uma forma de aproximação de um modelo de programação estocástica multiestágio apresentou uma melhora pequena de desempenho em relação ao modelo de dois estágios, o que reforça os achados na literatura de programação estocástica quando se compara o desempenho da modelagem multiestagiada em relação ao modelo de dois estágios. Essas observações vão de encontro com algumas análises, como em Huang (2005) e Riis e Anderson (2004), em que os autores atestam que o ganho em resolver um problema com vários estágios é pequeno e sugerem que a solução em dois estágios deve ser preferida em detrimento da solução multiestágios, principalmente se o tempo computacional for um fator crítico.

A realização de experimentos computacionais com outros exemplos desta e de outras

empresas do setor de material escolar, com os modelos e abordagens propostas na tese são outro tópico de pesquisa futura para poder obter avaliações mais conclusivas sobre o desempenho dos modelos neste problema de fluxo de caixa e tecer comparações mais efetivas entre os modelos e as soluções usadas pelas tesourarias.

Modelos de otimização robusta com desvio de banda única para as variáveis aleatórias introduzidas por Bertsimas e Sim (2003) representaram um avanço no desenvolvimento de modelos robustos tratáveis. No entanto, autores como D'Andreagiovanni e Büsing (2013) apontam que uma única banda de desvio para as variáveis aleatórias pode ser uma limitação na prática. Em alguns problemas do mundo real, os desvios observados podem ter distribuições assimétricas, sendo aconselhável modelar os problemas com desvios multi-banda. A investigação deste tipo de método é um tema interessante para futuras pesquisas no problema da gestão de fluxo de caixa, a fim de compreender se essas formulações trazem vantagens adicionais em relação aos modelos de otimização robustos aqui desenvolvidos, especialmente no que diz respeito à deterioração da função objetivo. Outra possível pesquisa futura interessante seria a determinação analítica da probabilidade de violação das restrições (ou limitantes apertados para essa probabilidade) para os modelos de otimização robusta, quando diversas restrições contendo parâmetros incertos em comum acarretam a infactibilidade da solução do problema.

A forma como os cenários são gerados podem gerar resultados diferentes daqueles apresentados pelo modelo RN aplicado no problema do fluxo de caixa. Outro tópico interessante é a geração de cenários pelo método de *moment-matching* (PONOMAREVA ET AL., 2015) que pode ser utilizada para produzir soluções de modelos de programação estocástica em dois estágios neutros ao risco, podendo também ser objeto de pesquisa futura na gestão de caixa deste e de outros setores industriais. Outro ponto interessante para investigações futuras seria o desenvolvimento de uma abordagem de programação estocástica multiestágio para o problema do fluxo de caixa, analisando se a modelagem multiestágio pode trazer contribuições relevantes para a análise desse problema. Como não foi objeto de estudo dessa tese, a comparação dos resultados das abordagens de otimização robusta e de programação estocástica também poderia ser considerada em estudos futuros, embora seja de difícil análise, conforme apontado por alguns autores, e pouco encontrada na literatura.

REFERÊNCIAS

- ALEM, D.** *Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras*. Tese de Doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação: Universidade de São Paulo, 2011.
- ALEM, D. & MORABITO, R.** *Production planning in furniture settings via robust optimization*. *Computers & Operations Research*, Vol.39, Issue 2, 2012.
- ALEM, D. J. & MORABITO, R.** *Risk-averse two-stage stochastic programs in furniture plants*. *OR Spectrum*, 35, 4, 773-806, 2013.
- ALIMARDANI, M.** *Stochastic mixed-integer programming for financial planning problems using network flow structure*. Master of Applied Science. Department of Mechanical and Industrial Engineering. University of Toronto, 2014.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R. & YANASSE, H.** *Pesquisa Operacionais*. Elsevier, 2007.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.M. & HEATH, D.** *Thinking coherently*. *Risk*, 10(11), 68-71, 1997.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.M. & HEATH, D.** *Coherent measures of risk*. *Mathematical Finance*, 9, 203-228, 1999.
- ASHFORD, R. W.; BERRY, R. H.; & DYSON, R. G.** *Operational research and financial management*. *European Journal of Operational Research*, 36, 143–152, 1988.
- BACCARIN, S.** *Optimal impulse control for a multidimensional cash management system with generalized cost functions*. *European Journal of Operational Research*, 196, p.198–206, 2009.
- BALASUBRAMANIAN J. & GROSSMANN I.E.** *Approximation to multistage stochastic optimization in multiperiod batch plant scheduling under demand uncertainty*. *Ind Eng Chem Res*, 43(14):3695–713, 2004.
- BANKS, J.; CARSON, J. & NELSON, B.** *Discrete-event system simulation*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

- BAUMOL, W.** *Transaction Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach*. Quarterly Journal of Economics Vol.66, 1952.
- BEALE, E.M.L.** *On minimizing a convex function subject to linear inequalities*. Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 17, n.2, 1955.
- BENSOUSSAN, A.; CHUTANI, A. & SETHI, S. P.** *Optimal cash management under uncertainty*. Operations Research Letters, 37(6), p.425–429, 2009.
- BEN-TAL, A. & NEMIROVSKY, A.** *Robust convex optimization*. Mathematics of Operations Research Vol. 23, n.4, p.769-805, 1998.
- BEN-TAL, A. & NEMIROVSKY, A.** *Robust solutions of uncertain linear programs*. Operations Research letters Vol. 25, n.1, p.1-13, 1999.
- BEN-TAL, A. & NEMIROVSKY, A.** *Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data*. Mathematical Programming Vol. 88, n.3, p.411-424, 2000.
- BERANEK, W.** *Analysis for financial decisions*. Homewood, Ill Dow Jones-Irwin, 1963.
- BERTSIMAS, D. & SIM, M.** *Robust discrete optimization and network flows*. Mathematical Programming Series B Vol. 98, n.1-3, p.49-71, 2003.
- BERTSIMAS, D. & SIM, M.** *The price of robustness*. Operations Research Vol. 52, n.1, p.35-53, 2004.
- BEYER H. & SENDHOFF B.** *Robust optimization—a comprehensive survey*. Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 196, n.33, p. 3190-3218, 2007.
- BIRGE, J.R. & LOUVEAUX, F.** *Introduction to stochastic programming*. Springer, 1997.
- BOULAKSIL, Y.; FRANSOO, J.C. & TAN, T.** *Capacity reservation and utilization for a manufacturer with uncertain capacity and demand*. School of Industrial Engineering, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2009.
- BRIGHAM, E. F. & HOUSTON, J. F.** *Fundamentals of financial management*. Thompson/South-Western, 2004.

BROCK, P. L. & ROJAS-SUAREZ, L. *Understanding the behavior of bank spreads in Latin America.* Journal of Development Economics Vol. 63, p. 113-134, 2000.

BRUNI, A. L.; FAMÁ, R. & SIQUEIRA, J. O. *Análise do Risco na Avaliação de Projetos de Investimento: Uma Aplicação do Método de Monte Carlo.* Caderno de Pesquisas em Administração, v. 1, n. 6, p. 62-74, 1998.

BURATTO, M. V. *Quantificação Construção e Avaliação de um Modelo de Monte Carlo para Analisar a Capacidade de Pagamento das Empresas em Financiamentos de Longo Prazo.* Dissertação (Mestrado) – Programa de Pósgraduação em Administração, Mestrado Acadêmico em Contabilidade e Finanças, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

CALDEIRA, F.J. *Estimação da Estrutura a Termo da Curva de Juros no Brasil através de Modelos Paramétricos e Não Paramétricos.* Análise Econômica, Porto Alegre, ano 29, n. 55, p. 95-122, 2011.

CARDOSO, D. & AMARAL, H. F. *O uso da Simulação de Monte Carlo na elaboração do Fluxo de Caixa Empresarial: uma proposta para quantificação das incertezas ambientais.* In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 20., 2000, São Paulo. Anais... São Paulo: ABEPRO, 2000.

CALMAN, R.F. *Linear Programming and Cash Management.* Cash Alpha. Cambridge, The MIT Press, 1968.

CARIÑO, D. R.; T. KENT; ET AL. *The Russel-Yasuda Kasai model: An asset-liability model for a Japanese insurance company using multistage stochastic programming.* Interfaces 24(1): 29-49, 1994.

CHARNES, A. & COOPER, W.W. *Chance-Constrained Programming.* Management Science, p. 73-79, 1959.

COLEMAN, T.F.; YUYING, L. & HENNIGER, L.J. *Minimizing tracking error while restricting the number of assets.* The Journal of Risk, vol. 8, no. 4, pp. 33-55, 2006.

COPELAND, T.E. & J.F. WESTON, *Financial Theory and Corporate Policy.* Addison-Wesley, 1988.

CORRAR, L. J. *O modelo econômico da empresa em condições de incerteza - aplicação do método de simulação de Monte Carlo.* Caderno de Estudos FIPECAFI FEA USP, São Paulo, n. 8, p. 1-13, 1993.

CORREIA NETO, J. F. *Avaliação de uma software house através da simulação de Monte Carlo.* ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 26., 2006, Fortaleza, Anais... Fortaleza: ABEPRO, 2006.

CORREIA NETO, J. F.; MOURA, H. J. & FORTE, S.H. C.A. *Modelo prático de previsão de Fluxo de Caixa Operacional para empresas comerciais considerado os Efeitos de Risco, através do Método de Monte Carlo.* REAd- Revista Eletrônica de Administração, Rio Grande do Sul, v. 8, n. 3, p. 1-5, 2002.

CRUM, R.L.; KLINGMAN, D.D. & TRAVIS, L.A. *Implementation of large-scale financial planning methods: solution efficient transformations.* Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol.14, p.137-152, 1979.

CRUM, R. L. & NYE, D. J. *A network model of insurance company cash flow management.* Mathematical Programming Study, Vol.15, p. 86–101, 1981.

DAMASCENO, D.L.; ARTES, R. & MINARDI, A. *Determinação de rating de crédito de empresas brasileiras com a utilização de índices contábeis.* Revista de Administração, São Paulo, Vol.43, n.4, p.344-355, out./nov./dez., 2008.

DANTZIG, G.B. *Linear Programming under Uncertainty.* Management Science. p. 197-206, April, 1955.

D'ANDREAGIOVANNI, F. & BÜSING, C. *Robust Optimization under Multi-band Uncertainty - Part I: Theory.* arXiv:1301.2734, Cornell University Library, 2013

DOMENICA, N.D.; LUCAS, C. & MITRA, G. *Scenario generation for stochastic programming and simulation: a modelling perspective.* IMA Journal of Management Mathematics, 20(1):1-38, 2007.

EL-GHAOUI, L. & LEBRET, H. *Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices.* SIAM Journal on Optimization Vol.9, p.33-52, 1998.

EL-GHAOUI, L.; OUSTRY, F. & LEBRET, H. *Robust solutions to uncertain semidefinite programs.* SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications Vol.18, p.1035-1064, 1997.

ELTON, E. J., & GRUBER, M. J. *On the cash balance problem.* Operational Research Quarterly, 25, p.553–572, 1974.

EMBRECHTS, P.; RESNICK, S.I. & SAMORODNITSKY, G. *Extreme value theory as a risk management tool.* North American Actuarial Journal, 3(2), 32-41, 1999.

EVANS, D.D. & LYONS, R.K. *Meese-Rogoff redux: micro-based exchange rate forecasting.* NBER WORKING PAPER SERIES, Working Paper 11042, 2005.

FAMÁ, R. & CHAIA, A. J. *Teorias da previsão da taxa de câmbio: um teste de eficiência no Brasil, Chile e México na segunda metade dos anos 90.* Cadernos de Pesquisa em Administração, São Paulo, Vol.08, n.2, 2001.

FONSECA, E.V.D.N. *Comparação entre simulações pelo Movimento Geométrico Browniano e Movimento de Reversão à Média no cálculo do Fluxo de Caixa at Risk do departamento de downstream de uma empresa de petróleo.* Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto COPPEAD de Administração, 2006.

GARCIA, M. & DIDIER, T. *Taxa de juros, risco cambial e risco Brasil.* Pesquisa e Planejamento Econômico, Vol.33, n.2, 2003.

GEUNES, J. & PARDALOS, P. M. *Network optimization in supply chain management and financial engineering: An annotated bibliography.* Networks, 42(2), p.66–84, 2003.

GITMAN, L. J. *Princípios de administração financeira* (3rd ed.). Sao Paulo: Harbra, 1997.

GOLDEN, B.; LIBERATORE, M. & LIEBERMAN, C. *Models and solution techniques for cash flow management.* Computers & Operational Research Vol.6, p.13-20, 1979.

GORMLEY, F. M. & MEADE, N. *The utility of cash flow forecasts in the management of corporate cash balances.* European Journal of Operational Research, 182, p.923–935, 2007.

GRABOT, B.; GENEST, L.; REYNOSO-CASTILLO, G. & VÉROT, S. *Integration of uncertain and imprecise orders in the MRP method.* Journal of Intelligent Manufacturing, Vol. 16, p. 215-234, 2005.

GUPTA, S. & DUTTA, K. *Modeling of financial supply chain*. European Journal of Operational Research, 211, 47–56, 2011.

HADDAD, M. *Análise sobre a variação da taxa referencial da economia nacional*. Future Studies Research Journal, São Paulo, Vol. 4, n. 1, p. 140 - 158, 2012.

HERTZ, D. B. *Risk analysis in capital investment*. Harvard Business Review, v. 57, n. 5, p. 169-181, 1964.

HILLIER, F. S. & LIEBERMAN, G. J. *Introduction to Operations Research*. 6th ed. New York: McGraw Hill, 1995.

HINDERER, K. & WALDMANN, K. H. *Cash management in a randomly varying environment*. European Journal of Operational Research, 130, p.468–485, 2001.

HUANG, K. *Multi-stage stochastic programming models in production planning*. Tese de Doutorado, School of Industrial and System Engineering – Georgia Institute of Technology, 2005.

HULL, J. *Options, futures and others derivatives*. Pearson, Prentice Hall, 2003.

JOHNSON L.A. & MONTGOMERY, D.C. *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*. New York : Wiley, 1974.

JORJANI, S. & LAMAR, B. W. *Cash flow management network models with quantity discounting*. Omega, 22(2), p.149–155, 1994.

KANG, Y. *Information inaccuracy in inventory systems*. Tese de doutorado, Massachusetts Institute of Technology, 2004.

KALLBERG, P. UPALLA, S., GUSTAFSSON, M. & PAILLEUX, J. *The impact of cloud track wind data on global analysis and medium range forecasts*, ECMWF, Tech. Rep., n.34, 60 pp., 1982.

KOUVELIS P. & YU G. *Robust discrete optimization and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

KRAJEWISKI, L. J.; KING, B. E.; RITZMAN, L. P. & WONG, D. S. *Kanban, MRP and shaping the manufacturing environment*. Management Science, v. 33, n. 1, p. 39-57, 1987.

KUSY, M.I. & ZIEMBA, W.T. *A bank asset and liability management model.* Journal of Operational Research, volume 34, 3, p. 356-376, 1986.

LAM, K. C.; RUNESON, G.; TAM, C. M., & LO, S. M. *Modelling loan acquisition decisions.* Engineering Construction and Architectural Management, 5(4), p.359–375, 1998.

LEE, A.Y. *Corporate Metrics: the benchmark for corporate risk management.* Technical document, (1999).

LIU, S.; WANG, Y. & QIU W. *Mean-variance-skewness model for portfolio selection with transaction costs.* International Journal of Systems Science, vol. 34, no. 4, pp. 255-262, 2003.

LUSTOSA, P. R. B.; PONTE, V. M. R. & DOMINAS, W. R. *Simulação.* In: **CORRAR, L.J.; THEÓPHILO, C. R. (Org.)** *Pesquisa Operacional para decisão em contabilidade e administração.* São Paulo: Atlas, 2004.

MARK, N. *Exchange Rates and Fundamentals: Evidence on Long-Horizon Predictability.* American Economy Review, 85, 201-218, 1995.

MARQUÈS, G.; LAMOTHE, J.; THIERRY, C. & GOURC, D. *A supply chain performance analysis of a pull inspired supply strategy faced to demand uncertainties.* Journal of Intelligent Manufacturing, v. 23, n. 1, p. 91-108, 2012.

MCBRIDE, R. D. & O'LEARY, D. E. *An intelligent modeling system for generalized network flow problems: With application to planning for multinational firms.* Annals of Operations Research, 75, p.355–372, 1997.

MESSE, R.A. & ROGOFF, K. *Empirical Exchange Models of the Seventies: Do They Fit Out of Sample?.* Journal of International Economics, 14, 3-24, 1983.

MORABITO, R. & PUREZA, V. *Modelagem e Simulação.* In: **MIGUEL, P. C. (Coord.)** *Metodologia de Pesquisa em Engenharia de Produção e Gestão de Operações.* Rio de Janeiro: Elsevier, ABEPRO. 2 ed., 2012.

MIGUEL, P.P. *Paridade de juros, fluxo de capitais e eficiência do mercado de câmbio no Brasil: evidência dos anos 90.* Dissertação de mestrado. Departamento de Economia da FEA/USP. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1999.

- MIRANDA, R.G.; ANDRADE, G.J.P.O.; GERBER, J.Z. & BORNIA, A.C.** *Método estruturado para o processo de planejamento da demanda nas organizações.* Revista ADMpg Gestão Estratégica, Vol. 4, n.1, p.45-53, 2011.
- MULA, J.; POLER, R. & GARCIA, J. P.** *MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach.* Fuzzy Sets and Systems, v. 157, p. 74-97, 2006.
- MULVEY, J.M.; VANDERBEI, R.J. & ZENIOS, S.A.** *Robust Optimization of Large-Scale System.* Operations Research Vol. 43, n.2, p.264-281, 1995.
- MULVEY, J.M. & VLADIMIROU, H.** *Stochastic network programming for financial planning problems.* Management Science, 38(11), p. 1642-1664, 1992.
- MULVEY, J. M.** *Introduction to the special issue on finance.* Interfaces, 24(3), 1–2, 1994.
- MUNHOZ, J.R.** *Otimização no planejamento agregado de produção em indústrias de processamento de suco concentrado congelado de laranja.* Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Produção: Universidade Federal de São Carlos, 2009.
- MUNHOZ, J.R. & MORABITO, R.** *Optimization approaches to support decision making in the production planning of a citrus company: A Brazilian case study.* Computers and Electronics in Agriculture 107, p. 45–57, 2014.
- MURRAY, W. & SHEK, H.** *A local relaxation method for the cardinality constrained portfolio optimization problem.* Computational Optimization and Application, vol. 53, no. 3, pp. 681-709, 2012.
- NASCIMENTO, J. & POWELL, W.** *Dynamic programming models and algorithms for the mutual fund cash balance problem.* Management Science, 56(5), p.801–815, 2010.
- ORGLER, Y.E.** *An unequal-period model for cash management decisions.* Management Science Vol.16, n.2, p.77-92, 1969.
- PACHECO, J.V.A.** *Otimização de fluxos em rede na gestão financeira do caixa: aplicação em uma empresa do setor agroindustrial.* Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Produção: Universidade Federal de São Carlos, 2007.

PACHECO, J.V.A. & MORABITO, R. *Application of network flow models for the cash management of an agribusiness company.* Computer & Industrial Engineering, Vol.61, p. 848-857, 2011.

PAIVA, R.P.O. *Modelagem do planejamento agregado da produção em usinas cooperadas do setor sucroenergético utilizando programação matemática e otimização robusta.* Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Produção: Universidade Federal de São Carlos, 2009.

PAIVA, R.P.O. & MORABITO, R. *Programação estocástica robusta aplicada ao planejamento agregado de safra em usinas cooperadas do setor sucroenergético.* Gestão da Produção, São Carlos, Vol. 18, n.4, p. 719-738, 2011.

PAIVA, R. P.O. & MORABITO, R. *Planejamento hierárquico da produção em usinas de açúcar e álcool: Modelagem de otimização robusta,* Produção, 24, 3, 644-663, 2014.

PERDOMO, J. P. J. & BOTELHO, F. B. *Messe-Rogoff revisitados: uma análise empírica das projeções para a taxa de câmbio no Brasil.* Anais do XXXV Encontro Nacional de Economia, 2007.

PFLUG, G.CH. *Some remarks on the value at risk and the conditional value at risk.* In *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications.* Ed. S. Uryasev, Kluwer, 2000.

PONOMAREVA, K.; ROMAN, D. & DATE, P. *An algorithm for moment-matching scenario generation with application to financial portfolio optimisation.* European Journal of Operational Research, 240, p.678–687, 2015.

PRÉKOPA, A. *Stochastic programming.* Kluwer Academic Publ., 1995.

PREMACHANDRA, I. M. *A diffusion approximation model for managing cash in firms: An alternative approach to the Miller–Orr model.* European Journal of Operational Research, 157, p.218–226, 2004.

REIS JÚNIOR, H.; DE PAULA, L.F. & LEAL, R. *Decomposição do spread bancário no Brasil: uma análise do período recente.* Revista EconomiA, janeiro/abril, 2013.

RIIS, M. & ANDERSEN, K.A. *Multiperiod capacity expansion of a telecommunications connection with uncertain demand.* Computer & Operational Research, v.31, p.1427-1436, 2004.

ROBICHECK, A.A.; TEICHROEW, D. & JONES, J.M. *Optimal Short-Term Financing Decisionst.* Management Science Vol.121, 1965.

ROCCO, C.D. *Modelagem do planejamento agrícola e industrial no setor de tomate para processamento utilizando programação matemática e otimização robusta.* Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Produção: Universidade Federal de São Carlos, 2014.

ROCKAFELLAR R.T, & URYASEV S. *Optimization of conditional value-at-risk.* J Risk 2:21–41, 2000.

ROCKAFELLAR R.T. & URYASEV S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. J Bank Finance, 26:1443–1471,2002.

SARAIVA JÚNIOR, A.F.; RODRIGUES, M.V. & DA COSTA, R.P. *Simulação de Monte Carlo Aplicada à Decisão de Mix de Produtos.* Produto & Produção, vol. 11, n. 2, p. 26 - 54, jun. 2010.

SHAMBLIN, J. E. & STEVENS, G. T. *Operations research: a fundamental approach.* New York: McGraw-Hill, 1974.

SETHI, S. P. & THOMPSON, G. L. *Application of mathematical control theory to finance: Modelling simple dynamic cash balance problems.* Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.5, p.381–394, 1970.

SCHERR, F.C. *Modern Working Capital Management.* New Jersey: Printice-Hall, 1989.

SOUZA, M. C. M. *Quantificação das incertezas na avaliação de projetos: o modelo utilizado na Agência de Fomento do Estado da Bahia.* Dissertação (Mestrado) – Programa de Pósgraduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

SOUZA, A.F. & BARROS, L.A.B.C. *Propriedades estatísticas dos fluxos de caixa e modelos de gerenciamento de caixa.* Caderno de Pesquisa em Administração, Vol.1, n.12, 2000.

- SOYSTER, A.L.** *Convex programming with set inclusive constraints and applications to inexact linear programming.* Operations Research Vol.21, n.1, p.1154-1157, 1973.
- SRINIVASAN, V.** *A transshipment model for cash management decisions.* Management Science Vol.20, n.10, p.1350-1363, 1974.
- SRINIVASAN, V. & KIM, H.** *Deterministic Cash Flow management: State of the art and research directions.* Journal of Management Science Vol.14, n.2, p.145-166, 1986.
- STEUER, R. E. & NA, P.** *Multicriteria decision making combined with finance. A categorized bibliographic study.* European Journal of Operational Research, 150(3), p.496–515, 2003.
- TOBIN, J.** *The Interest-Elasticity of Transaction Demand for Cash.* Review of Economic and Statistics Vol.38, 1956.
- UÇKUN, C.; KARAESMEN, F. & SAVAS, S.** *Investment in improved inventory accuracy in a decentralized supply chain.* International Journal of Production Economics, v. 113, p. 546-566, 2008.
- VAN HORNE, J. C.** *Financial management and policy.* Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1995.
- VLADIMIROU, H. & ZENIOS, S.A.** *Stochastic linear programs with recourse.* European Journal of Operational Research, Vol. 101, n.1, p.177-192, 1997.
- WELSCH, G.; HILTON, R. W. & GORDON, P. N.** *Budgeting profit planning and control.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1988.
- YAO, J. S.; CHEN, M. S. & LU, H. F.** *A fuzzy stochastic single-period model for cash management.* European Journal of Operational Research, 170, p.72–90, 2006.

ANEXO I - CONCEITOS ENVOLVENDO OS MODELOS DE FLUXOS EM REDE

Em alguns problemas, é possível identificar conjuntos de elementos que mantêm uma relação entre si. Exemplos desses tipos de conjuntos são cidades, estradas, reservatórios e bairros de uma cidade, entre outros (ARENALES, et al. 2007). Nessa tese, a suposição é que esse número de elementos é finito, de modo que é possível enumerá-los, 1, 2, ..., n . Esses elementos são denominados de *nós*. Para indicar que o *nó* i se relaciona com o *nó* j , é utilizada a notação (i, j) . A definição de grafo e rede pode ser feita como segue: seja N um conjunto finito, cujos elementos são chamados *nós* e E um conjunto de pares de *nós*, cujos elementos (i, j) são chamados arestas. O par $G = (N, E)$ é chamado *grafo*. Uma rede é um grafo cujos *nós* e/ou arestas têm valores associados. O número de elementos de um conjunto X é chamado *cardinalidade* de X e a notação para esse conceito é $|X|$. Para facilitar o entendimento, se um grafo $G = (N, E)$ tem n *nós* e m arestas, significa que $|N| = n$ e $|E| = m$. Um grafo $G = (N, E)$ pode ser representado graficamente da forma que segue: cada *nó* i é representado por um círculo com o rótulo i , e cada aresta (i, j) por uma linha conectando os dois círculos rotulados de i e j .

Um grafo $G = (N, E)$ no qual as arestas são pares ordenados é chamado grafo orientado ou dígrafo. O par ordenado (i, j) é chamado arco e i é o *nó* inicial e j o *nó* final. Uma rede orientada é um grafo orientado onde os *nós* e/ou arcos têm valores associados. A representação gráfica de um grafo orientado é uma flecha de i para j , indicando a orientação relevante. A cada aresta ou arco $(i, j) \in E$, pode existir um ou mais valores numéricos associados representando parâmetros relativos à aresta ou ao arco. A cada *nó* $i \in N$ pode existir um ou mais valores numéricos associados (ARENALES et al., 2007).

Outros problemas de otimização em redes envolvem o transporte ou fluxo de algum item de um *nó* a outro na rede com um determinado objetivo. Para uma rede $G = (N, E)$, os problemas de fluxo em rede normalmente apresentam as características que seguem: um nível máximo de fluxo tolerado para cada arco do grafo; um nível mínimo de fluxo imprescindível para cada arco do grafo; um custo por unidade de fluxo enviada para cada arco do grafo; e uma demanda ou produção do item em cada *nó* do grafo. Para um objetivo de minimização de custos, o problema é conhecido como problema de fluxo de custo mínimo e pode ser modelado como um problema de otimização linear. Para esse tipo de problema, a variável de decisão é:

x_{ij} fluxo no arco (i, j)

e os parâmetros são:

c_{ij} custo por unidade de fluxo no arco (i, j)

d_i demanda ou suprimento de itens no nó i

μ_{ij} limite máximo de fluxo no arco (i, j)

l_{ij} limite inferior de fluxo no arco (i, j)

Em cada nó da rede, o fluxo de material deve ser conservado, ou seja, o fluxo total que entra no nó i , mais a oferta, menos a demanda, deve ser igual ao fluxo total que sai do nó i . Esse fluxo de material pode ser representado pela expressão (1):

$$\sum_{k \in P(i)} x_{ki} + d_i = \sum_{j \in S(i)} x_{ij} \quad (1)$$

em que,

$S(i)$ é o conjunto dos nós sucessores de i . $S(i) = \{j \in N | (i, j) \in E\}$

$P(i)$ é o conjunto de nós predecessores de i . $P(i) = \{k \in N | (k, i) \in E\}$

O modelo que representa o problema de fluxo de custo mínimo em uma rede de n nós é o que segue:

$$\text{Minimizar } f(x) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (2)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{k \in P(i)} x_{ki} = d_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i, j) \in E \quad (4)$$

Sem perda de generalidade, é possível considerar $l_{ij} = 0$ para todo o arco (i, j) . Caso este valor seja diferente de zero, é possível realizar uma mudança de variável e considerar uma nova variável y_{ij} , em que $y_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$ e $0 \leq y_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}$.

Outro problema muito comum é o problema de fluxo máximo, que consiste em determinar o valor do maior fluxo possível que pode ser enviado de um nó para outro da rede. Nesse tipo de problema, o nó 1 é o nó de origem e o nó n é aquele que se deseja enviar o fluxo máximo. Definido y como a quantidade de produto que está sendo enviado do nó 1 ao n , é possível escrever o modelo de otimização linear da seguinte forma (ARENALES et al., 2007).

Maximizar y

sujeito a

$$\sum_{j \in S(1)} x_{1j} - \sum_{k \in P(1)} x_{k1} = y, i = 1 \quad (5)$$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{k \in P(i)} x_{ki} = 0, i = 2, 3, \dots, n - 1 \quad (6)$$

$$\sum_{j \in S(n)} x_{ij} - \sum_{k \in P(n)} x_{ki} = -y, i = n \quad (7)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i, j) \in E \quad (8)$$

ANEXO II - O MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Como parte integrante do campo de conhecimento da Pesquisa Operacional, a simulação é uma representação da operação de um processo real, para um determinado período de tempo, que envolve a geração de um caminho artificial desse processo e a observação deste para fazer inferências relativas às características do processo real (BANKS *et al.*, 1996). Hillier e Liberman (1995) indicam que a realização de uma simulação inicia-se com o desenvolvimento de um modelo que represente o sistema a ser investigado. A simulação de Monte Carlo envolve a geração de números aleatórios e probabilidades para a solução e análise de problemas.

Para Lustosa *et al.* (2004), a simulação de Monte Carlo é um método que utiliza a geração de números aleatórios no intuito de atribuir valores às variáveis do processo investigado. Os números são obtidos através de artifícios aleatórios, como tabelas e sorteios ou diretamente de softwares, através de funções específicas. De acordo com Saraiva Junior *et al.* (2010), a cada iteração, o resultado é armazenado e, ao final de todas as iterações, a sequência de resultados gerados é transformada em uma distribuição de frequência que possibilita calcular estatísticas descritivas, como média (valor esperado), valor mínimo, valor máximo e desvio-padrão, bem como a projeção de cenários futuros.

A aplicação da simulação de Monte Carlo é atribuída aos problemas de tomada de decisão que envolve risco e incerteza, nas quais as variáveis envolvidas não são de natureza determinística. A operacionalização da Simulação de Monte Carlo envolve os passos apresentados a seguir (SHAMBLIN e STEVENS, 1974): (i) definir as variáveis envolvidas no sistema em análise com base em dados passados ou em estimativas subjetivas dos administradores; (ii) construir as distribuições de frequência (absoluta, relativa e acumulada) para cada uma das variáveis definidas; (iii) definir, para cada variável considerada, os intervalos de classe (de incidência dos números aleatórios) com base nas distribuições de frequência acumulada projetadas; (iv) gerar números aleatórios; (v) incidir números aleatórios gerados nos intervalos de classe de cada variável; e (vi) simular os experimentos.

Hertz (1964) foi o primeiro autor a ilustrar a aplicabilidade da Simulação de Monte Carlo na teoria financeira. Neste artigo, o autor sugeriu a utilização da Simulação de Monte Carlo na análise de projetos como forma de medir os riscos inerentes a cada variável. Desde então, a metodologia possui uma extensa aplicabilidade prática aplicada a finanças.

Para o método de simulação de Monte Carlo, quanto maior o número de iterações, melhor para a análise do problema estudado. A fim de gerar um número mínimo de iterações (N) para um determinado erro estipulado, a fórmula apresentada a seguir é em geral utilizada:

$$N = \left(\frac{z \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad (1)$$

Em que σ é o desvio padrão da variável aleatória, ε é o erro padrão e z é a variável aleatória normal padronizada. Nessa equação, fica evidente que quanto menor é o erro padrão, maior deve ser o número de iterações. Como o método proporciona apenas uma aproximação da solução, convém utilizar a aproximação a seguir como forma de calcular o número mínimo de iterações:

$$N = \left(\frac{3 \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad (2)$$

Com essa aproximação, o que se pretende é que o número de iterações garanta um nível de confiança de 99,73%. Correia Neto, et al. (2002) comentam que a Simulação de Monte Carlo é o método mais completo de mensuração de risco dos fluxos de caixa da empresa, pois capta de maneira mais eficiente o relacionamento entre as variáveis que compõem o fluxo de caixa da empresa.

Souza (2004) e Buratto (2005) aplicam a Simulação de Monte Carlo à análise de crédito. O primeiro autor avalia a utilização de simulações de Monte Carlo para a análise de crédito na concessão de financiamentos de longo prazo de uma empresa. O segundo autor utiliza a ferramenta para analisar o principal indicador de análise de crédito de um banco. Autores como em Bruni, et al. (1998) e Cardoso e Amaral (2000) desenvolveram estudos para a utilização da Simulação de Monte Carlo para a avaliação de projetos. Outros autores como Corrar (1993) e Correia Neto (2006) analisaram o desempenho da ferramenta na avaliação de empresas.

ANEXO III MOVIMENTO BROWNIANO

Suponha uma variável $z(t)$, que segue um processo de Wiener, Δz uma variação de $z(t)$, e Δt um intervalo de tempo qualquer, tem-se que $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$, onde ε_t é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão, com média zero e desvio padrão igual a um. Os valores de Δz , para quaisquer intervalos Δt são independentes e a variável aleatória ε_t não é correlacionada serialmente. Quando o intervalo de tempo Δt torna-se muito pequeno é possível representar a variação de um processo de Wiener, Δz , em tempo contínuo como (Hull, 2003):

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} dz \quad (1)$$

Um movimento browniano com tendência é uma extensão do processo acima, sendo representado pela seguinte equação estocástica:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (2)$$

onde α é o parâmetro de tendência (ou crescimento), σ é o parâmetro de variância, x é um processo estocástico, como, por exemplo, a taxa de câmbio. Para qualquer intervalo de tempo Δt , a variação em x , possui distribuição normal, com esperança $E(\Delta x) = \alpha \Delta t$ e variância $Var(\Delta x) = \sigma^2 \Delta t$. Logo, um movimento browniano com tendência pode ser definido como:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad (3)$$

Um processo estocástico contínuo $x(t)$ é chamado de processo de Itô, quando é representado pela equação:

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \quad (4)$$

onde $a(x, t)$ é a função não-aleatória de tendência, $b(x, t)$ é a função não-aleatória da variância, $z(t)$ é um processo de Wiener, onde t é o tempo. O movimento geométrico browniano é um caso especial do processo de Ito, onde $a(x, t) = \alpha x$ e $b(x, t) = \sigma x$.

Dada uma função $F(x, t)$ diferenciável no mínimo duas vezes em x , e uma vez em t , o lema de Itô mostra que ela segue o seguinte processo:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} dz \quad (5)$$

Este lema é a base de fórmulas e métodos de precificação de derivativos, pois $F(x, t)$ pode ser o preço de uma ação ou a taxa de câmbio. Enquanto parece razoável que a taxa de câmbio siga um processo de Markov e tenha incrementos independentes, não é razoável assumir que as variações do preço sigam uma distribuição normal, já que a taxa de câmbio não pode ser menor do que zero. Mas, pode-se assumir que a taxa de câmbio segue uma distribuição lognormal, ou em outras palavras, as variações no logaritmo do preço seguem uma distribuição

normal. Dessa forma, sendo X o processo geométrico browniano que descreve o preço de um ativo, e $F(X) = \ln(X)$, tem-se, pelo lema de Itô:

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{1}{X}, \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \frac{-1}{X^2}$$

$$dF = \left[0 + \alpha X \frac{1}{X} + \frac{1}{2} (\sigma X)^2 \frac{-1}{X^2} \right] dt + \sigma X \frac{1}{X} dz = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \rho dz \quad (6)$$

Assim, baseado nos resultados obtidos acima e na análise do movimento browniano, tem-se que dentro do intervalo de tempo T , a variação em $\ln(S)$ segue uma distribuição normal com média $\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$ e variância $\sigma^2 T$. A versão discreta da equação estocástica acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ln \left(\frac{X_t}{X_0} \right) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t \quad (7)$$

Para uma perspectiva de modelagem para a geração de cenários utilizados em programação estocástica e simulação, ver, por exemplo, *Domenica et al. (2007)*.