UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

OTIMIZAÇÃO DE FLUXO EM REDES NA GESTÃO FINANCEIRA DO CAIXA: APLICAÇÃO EM UMA EMPRESA DO SETOR AGROINDUSTRIAL

José Vinícius de Avila Pacheco

SÃO CARLOS

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

OTIMIZAÇÃO DE FLUXO EM REDES NA GESTÃO FINANCEIRA DO CAIXA:

APLICAÇÃO EM UMA EMPRESA DO SETOR AGROINDUSTRIAL

José Vinícius de Avila Pacheco

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Reinaldo Morabito

SÃO CARLOS

2007

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Pacheco, José Vinícius de Avila.
P116of	Otimização de fluxo em redes na gestão financeira do caixa: aplicação em uma empresa do setor agroindustrial / José Vinícius de Ávila Pacheco. -- São Carlos : UFSCar, 2008.
	123 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.
	1. Administração financeira. 2. Pesquisa operacional. 3. Problemas de gestão do fluxo de caixa. 4. Modelagem Matemática. 5. Programação linear. 6. Agroindústria.I. Título.
	CDD: 658.15 (20ª)

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
Rod. Washington Luís, Km. 235 - CEP. 13565-905 - São Carlos - SP - Brasil
Fone/Fax: (016) 3351-8236 / 3351-8237 / 3351-8238 (ramal: 232)
Email : ppgep@dep.ufscar.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Aluno(a): José Vinicius de Ávila Pacheco

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA E APROVADA EM 18/12/2007 PELA COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto
Orientador(a) PPGEP/UFSCar

Prof. Dr. Edemilson Nogueira
PPGEP/UFSCar

Prof. Dr. Celso Carnieri
DMAT/UFPR

Prof. Dr. Maurício Cardoso de Souza
DEP/UFMG

Prof. Dr. Mário Otávio Batalha
Coordenador do PPGEP

Dedico este trabalho àquela que veio iluminar nossas vidas,

à minha filha Cléo.

“O tempo parco, o mundo movediço e mágico. Seu dever é ver, extrair, extricar, içar, levar a lar.(...) que todo tentar de melodia já é um ensaio do indefinido”

Guimarães Rosa

AGRADECIMENTOS

Àqueles que diante dos desafios que se apresentaram nessa caminhada responderam com estímulo para prosseguir.

Agradeço ao professor Reinaldo Morabito, cuja dedicação e compromisso sempre foram exemplo.

Aos meus amigos, Alessandre Hataka e Alexander Abuabara, pelas vezes em que me indicaram o caminho a seguir.

Ao meu avô, Amaury e ao meu pai, José Trajano, cujas trajetórias me incentivaram nesse percurso.

À minha família e aos meus amigos, agradeço especialmente à minha mãe Maria Lídia.

À Marilda e Oswaldo pelo apoio constante.

À Kary, que me fez acreditar e realizar.

RESUMO

Neste estudo, temos como objetivo otimizar o processo de gerenciamento financeiro do fluxo de caixa num horizonte de planejamento multi-período e finito, presente em uma empresa típica do setor agroindustrial. Procuramos maximizar o conjunto de recursos monetários ao final do período estudado. Para isso, contamos com uma abordagem simultânea dos parâmetros envolvidos no procedimento, possibilitada pelos recursos oferecidos pela Pesquisa Operacional. Como método de otimização para auxiliar as decisões do processo de fluxo de caixa, utilizamos a programação matemática linear. Avaliamos a aplicação de um modelo de gerenciamento do fluxo de caixa, baseado na teoria de fluxo em redes, que contempla os propósitos de ganhos de fluxo de dinheiro e considera os parâmetros mais importantes para a solução. Dois exemplos são estudados: no primeiro, aplicamos o modelo original para apoiar decisões operacionais na gestão do caixa da empresa; no segundo, adaptamos o modelo para abranger o planejamento tático de amortizações de financiamentos na gestão do caixa. Os dois exemplos são testados em situações reais e resolvidos por meio da ferramenta *solver* do Excel, amplamente utilizada nos ambientes de gestão financeira das empresas. A flexibilidade do modelo de otimização em atender mais de um tipo de situação e a capacidade de gerar soluções melhores que as praticadas na empresa, no período estudado, são evidenciadas por meio de exemplos numéricos.

Palavras-chave: 1. Problemas de Gestão Financeira do Fluxo de Caixa 2. Modelagem Matemática 3. Programação Linear 4. Fluxo em redes 5. Agroindústria

CASH FLOW MANAGEMENT OPTIMIZATION WITH NETWORK FLOW:

APLICATION TO THE AGRO-INDUSTRY

ABSTRACT

Cash flow management is a financial problem that involves the efficient management of cash, short-term investments and short-term loans. In this study, we formulate the cash flow problem encountered in a typical agro-industrial company as a network optimization problem. Two examples using a linear programming model were studied: in the first example, the original model were used to support operational cash flow decisions, in the second example, the model were extended to a tactical planning of loan payments. The mathematic models are resolved in the solver tool that is an add-in of Microsoft Excel. Spreadsheets are of wide applicability for analytical work in business. The model has the potential of being flexible and to maximize the cash return from the final planning period in real-life situations.

Keywords: 1. Cash Flow Management Problem 2. Mathematical Modeling 3. Linear Programming 4. Network Flow 5. Agroindustry

SUMÁRIO

	Pág.
LISTA DE FIGURAS	
LISTA DE TABELAS	
CAPÍTULO 1 - Introdução	1
CAPÍTULO 2 - Conceitos financeiros utilizados	7
2.1 - O valor do dinheiro no tempo	7
2.2 - A gestão do caixa	8
2.2.1 - A proporção ótima de títulos negociáveis	10
2.2.2 - Razões para manutenção de saldo em caixa	11
2.3 - Posição do caixa: estado futuro e proteção	12
2.4 - O fluxo de caixa	13
2.5 - Planejamento e controle financeiro	14
2.6 - O *trade-off* risco X retorno	15
CAPÍTULO 3 - Modelos de gestão do caixa e gestão do fluxo de caixa	16
3.1 - Revisão da literatura sobre os modelos de gestão do caixa	16
3.1.1 - Modelos de gestão do caixa da literatura em finanças	16
3.1.2. - Modelos de gestão do fluxo de caixa da literatura em pesquisa operacional	18
3.1.2.1 - Considerações iniciais	18
3.1.2.2 - Classificação dos modelos: determinísticos ou estocásticos	18
3.1.2.3 - O trabalho de revisão de Gregory e a extensão de Srinivasan e Kim	19
3.1.2.4 - Apresentação dos modelos	22

CAPÍTULO 4 - A aplicação do modelo de fluxo em rede aos processos de fluxo de caixa em uma empresa agroindustrial 43

4.1 – Dois ativos e financiamento 45

4.2 – Dados empíricos 47

4.3 – A estrutura de rede para o exemplo 49

4.4 – Os resultados da política de tesouraria para a situação real 53

4.5 – Os resultados da modelagem matemática do problema 59

4.6 – Análise comparativa das duas soluções 69

CAPÍTULO 5 - Adaptação do modelo de fluxo em rede para caso com programação de amortizações 74

5.1 – A estrutura de rede para o exemplo 75

5.2 – Dois ativos e programação de amortizações 78

5.3 – Dados empíricos 79

5.4 – Os resultados da política de tesouraria para a situação real 87

5.5 – Os resultados da modelagem matemática do problema 97

5.6 – Extensão do estudo com proposta de utilização de linha de crédito 101

CAPÍTULO 6 – Conclusões e perspectivas 112

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 116

ANEXO A – Modelo matemático completo da adaptação 119

ANEXO B – Modelo matemático completo da adaptação estendido 121

LISTA DE FIGURAS

		Pág.
3.1	A rede básica	38
3.2	A rede estendida com os arcos reversos indicando os financiamentos	41
4.1	Fluxos de fundos líquidos diários	47
4.2	Fluxo de caixa com 10 períodos	48
4.3	Rede de fluxo para o caso estudado	49
4.4	Orçamento de caixa n.1	52
4.5	Comparativo rendimento X custo de conversão	53
4.6	Rede de fluxo com a prática de tesouraria	57
4.7	A aplicação financeira e o financiamento	63
4.8	Rede de fluxo com o modelo resolvido	65
4.9	Fluxo da solução alternativa	71
5.1	Adaptação do modelo para caso com programação de amortizações	77
5.2	Orçamento de caixa n.2	83
5.3	Financiamento acumulado	84
5.4	Financiamento acumulado por operação	84
5.5	Rede de fluxo pela prática de tesouraria	91
5.6	Orçamento de caixa n.2 - otimizado	99
5.7	A rede de fluxo atualizada com a inserção dos arcos reversos	103
5.8	A rede de fluxo atualizada com o modelo resolvido	104

LISTA DE TABELAS

		Pág.
2.1	Ativos que compõem o disponível	9
2.2	Classificação dos motivos para manutenção da liquidez	12
4.1	Fluxos de fundos líquidos diários	48
4.2	Valores dos parâmetros usados no estudo do caso	49
4.3	Necessidade líquida de caixa dos períodos 1 a 7	53
4.4	Comparação entre o volume potencial e o volume convertido	54
4.5	Quadro de movimentação de recursos dos períodos 2, 3 e 4	55
4.6	Quadro de movimentação de recursos dos períodos 6 e 7	56
4.7	Quadro de movimentação de recursos dos períodos 8, 9 e 10	57
4.8	Fluxo dos ativos x e y e saldo acumulado dos ativos	58
4.9	Resultados obtidos por ativo e pelo agregado dos volumes financeiros	59
4.10	Volume potencial X volume convertido - modelagem	60
4.11	Quadro de movimentação de recursos do período 2	61
4.12	Quadro de movimentação de recursos do período 3	62
4.13	Quadro de movimentação de recursos do período 4	62
4.14	Quadro de movimentação de recursos do período 5	62
4.15	Quadro de movimentação de recursos dos períodos 6 a 10	64
4.16	Fluxo dos ativos x e y e saldo acumulado dos ativos	67
4.17	Resultados obtidos por ativo e pelo agregado dos volumes financeiros	68
5.1	Previsão de entradas e vencimento dos compromissos	79
5.2	Resultado bruto	80
5.3	Financiamentos e taxa de juros média	81
5.4	Juros de cada financiamento calculados por período	81

5.5	Juros de cada financiamento acumulados até o vencimento	82
5.6	Previsão de entradas e vencimento dos compromissos mais juros	82
5.7	Resultado líquido	82
5.8	Valores dos parâmetros usados no estudo do caso	86
5.9	Financiamentos com juros e taxa média	88
5.10	Financiamentos com taxas de juros inferiores à taxa média	88
5.11	Financiamentos com taxas de juros superiores à taxa média	88
5.12	Resultado líquido pela prática de tesouraria	89
5.13	Custo de carregamento total	89
5.14	Solução do problema pela prática de tesouraria	92
5.15	Programação de amortizações por financiamento	93
5.16	Resultado final pela prática de tesouraria	97
5.17	Solução do problema pelo modelo em programação linear	98
5.18	Comparativo de movimentação financeira total	100
5.19	Solução do problema pelo modelo em programação linear com linha de crédito	105
5.20	Programação de amortizações por financiamento	106
5.21	Comparativo de amortizações efetuadas por operação	107
5.22	Comparativo de movimentação financeira total	108
5.23	Comparativo de movimentação financeira total entre alternativas	109
5.24	Comparativo de utilização da linha de crédito	110

Capítulo 1 - Introdução

O objetivo deste trabalho é propor uma ferramenta que possibilite otimizar o gerenciamento financeiro do fluxo de caixa de uma empresa do setor agroindustrial. Pretende-se utilizar um modelo de programação matemática para representar as decisões do problema relativo ao fluxo de caixa, e analisar a viabilidade de sua aplicação em situações reais na prática de uma empresa do setor agroindustrial.

Em sua versão mais simples, o problema de gestão do caixa (*cash management problem*) preocupa-se em formular regras de decisão ligadas ao controle do nível de saldo em caixa de uma organização, a fim de atender às demandas por caixa ao custo mínimo total. Já o gerenciamento do fluxo de caixa (*cash flow management problem*) é um problema financeiro mais complexo que envolve administrar os investimentos de curto prazo, as entradas e as saídas de caixa, e os financiamentos de curto prazo; visando a maximização do retorno financeiro ao final do período de planejamento. O foco do nosso estudo está no problema mais amplo, ou seja, no gerenciamento do fluxo de caixa.

Embora diferenciáveis, essas duas atividades não se fazem de forma isolada. Na prática da gestão financeira, elas estão imbricadas. Enquanto a gestão do caixa trata do suprimento de recursos financeiros nos momentos em que são demandados pelas atividades operacionais da empresa, sem levar em conta o processo evolutivo do fluxo de dinheiro; o gerenciamento do fluxo de caixa compreende a administração de um conjunto de fatos estruturados no tempo.

Pensando nas condições da empresa e de seu ambiente institucional e organizacional, em que há alto grau de certeza nas previsões de entradas e saídas de caixa, procuramos um modelo que se adequasse à realidade da tesouraria da empresa e permitisse a aplicação prática em situações reais. Avaliamos a viabilidade e o desempenho desse modelo com base em exemplos reais da prática da empresa, que é uma empresa típica do setor agroindustrial. Para isso, realizamos uma pesquisa exaustiva dos modelos de gerenciamento de fluxo de caixa, verificando sua adequação as nossas necessidades.

Avaliamos diversas propostas disponíveis na literatura, tais como o modelo de Miller e Orr (1966), cuja premissa de aleatoriedade do comportamento do caixa não é tão relevante para a situação sob estudo, e o modelo de transbordo de Srinivasan (1974), que não considera o reinvestimento dos juros - fato que ocorre na prática da empresa– e que não fornece um referencial gráfico para a análise. Depois dessas e outras avaliações, fizemos a opção de utilizar um modelo de programação linear baseado na teoria do fluxo em redes: o modelo de Golden *et al*. (1979). Apesar de abordar deterministicamente o problema, esse modelo mostrou-se adequado particularmente por fornecer flexibilidade (e.g., contempla diversos ativos e as possíveis conversões entre eles, considera vários períodos de tempo e permite períodos com diferentes durações, etc.) e por estabelecer uma representação visual do problema, o que facilita a comunicação entre os envolvidos neste processo de tomada de decisões, conforme colocam Mulvey e Ziemba (1995).

A utilização do modelo de Golden *et al*. (1979), um modelo determinístico, pode aparentar uma grande limitação no trato das imprevisibilidades, se comparado às tentativas de solução probabilísticas do problema. Todavia, a análise histórica das variações de fluxo de caixa ocorridas na prática da empresa estudada sugere serem insuficientes as variações para justificar a opção por um modelo probabilístico. O que poderia ser pensado para tratar dessas pequenas variações seria aplicar análise de sensibilidade no modelo de Golden *et al.*(1979), ou estender o modelo utilizando técnicas de otimização robusta. Porém, esta possível extensão está além do escopo deste estudo, mas poderá ser objeto de um trabalho futuro.

No ambiente econômico-financeiro em que opera a empresa estudada, as entradas de caixa derivam das vendas em curto prazo a outras companhias industriais do mesmo segmento, que adquirem matéria-prima para seus respectivos processos operacionais. A regularidade e a uniformidade dos pedidos dos clientes permitem, à tesouraria da empresa estudada, projetar os valores a receber com grande acuracidade.

Definimos horizonte de planejamento como o tempo em que a empresa planeja sua gestão do caixa. Vale lembrar que o conceito de horizonte rolante está presente na prática do gerenciamento do fluxo de caixa. O horizonte de planejamento aqui considerado é multi-período e finito, e é recalculado na medida em que o primeiro período é realizado, revendo-se os valores previstos e reavaliando as decisões anteriormente tomadas. Nesta revisão, incorpora-se um novo período ao final do horizonte de planejamento anterior, e assim por diante, repete-se o processo, período a período.

Ao observarmos as práticas de tesouraria tal como elas se desenvolvem na atualidade, podemos verificar que as soluções são alcançadas por meio da experiência acumulada dos usuários ou tomadores de decisão. Tal conhecimento das situações reais, adquirido pela análise dos parâmetros envolvidos, determina as políticas que vão nortear as decisões inerentes ao fluxo de caixa. Os cálculos são efetuados em planilhas eletrônicas e buscam compatibilizar as demandas reais às políticas estabelecidas.

Acreditamos que se estivesse disponível uma ferramenta de gestão do fluxo de caixa, capaz de capturar os problemas de tomada de decisão enfrentados pelos gerentes financeiros nos processos da vida real, e apta a dimensionar o fluxo de recursos monetários, haveria um aperfeiçoamento no processo de otimização do gerenciamento do fluxo de caixa.

Então, justificamos nosso estudo de otimização do fluxo de caixa (utilizando o modelo de fluxo em redes de Golden *et al.*, 1979 que permite tratar o *"cash flow management problem"*), como uma tentativa de alcançar soluções capazes de orientar a decisão sobre financiamentos e investimentos dentro da complexidade e da quantidade de variáveis envolvidas no gerenciamento do fluxo de caixa. O presente trabalho busca contribuir para a administração eficiente do capital de giro de uma empresa.

Para Assaf Neto e Silva (1997, p.36), "uma adequada administração dos fluxos de caixa pressupõe a obtenção de resultados positivos para a empresa, devendo ser focalizada como um segmento lucrativo para seus negócios. A melhor capacidade de geração de recursos de caixa promove, entre outros benefícios à empresa, menor necessidade de financiamento dos investimentos em giro, reduzindo seus custos financeiros".

Essas contribuições que o estudo espera trazer atendem às necessidades do mundo real e esse é um critério de relevância da pesquisa sobre a solução do modelo. Segundo Bertrand e Fransoo (2002), o critério de relevância[1] deve checar se a solução que o modelo propõe cobre os parâmetros mais importantes da solução e verificar, ainda, se os fatores ligados ao contexto do processo (não incluídos no modelo) são menos relevantes para a solução vigente.

A opção de testar o modelo de Golden *et al.* (1979) na prática implica dizer que a escolha pelo tratamento matemático na solução do problema determina a metodologia a ser seguida nesse trabalho. Segundo Mulvey (1994), a capacidade dos modelos matemáticos de Pesquisa Operacional em gerar soluções para problemas com alta complexidade encontra campo de aplicação na área de Finanças, havendo diversas associações entre essas áreas. Nosso estudo está focado nessas duas disciplinas adjacentes: Pesquisa Operacional e Finanças.

Segundo Crum *et al.* (1979), na pesquisa das principais abordagens do problema da gestão do caixa podem ser notados a robustez e o potencial analítico dos procedimentos de programação matemática, bem como suas contribuições ao entendimento da dinâmica dos sistemas financeiros.

[1] Os autores preocupam-se em definir, como critério de relevância da pesquisa, não apenas a questão da validade científica, mas também verificar se a solução do modelo de fato atende às necessidades do mundo real.

No caso da otimização dos processos financeiros, a semelhança com as redes é natural devido aos seus sistemas de fluxo de caixa inter-relacionados e compostos por elementos que entretêm relações numerosas, diversificadas e complexas (Crum *et al.*, 1979).

As etapas do processo de solução pelo método de otimização linear são as seguintes: o fluxo de caixa estudado é formulado graficamente como uma série de arcos direcionados e nós em uma rede de fluxos. Com a representação do problema em uma rede, as informações são transferidas para uma estrutura a fim de serem resolvidas, o modelo matemático. Uma vez definido o modelo matemático, utiliza-se um *software* capacitado a resolver este modelo que representa o problema.

Estudamos dois exemplos: o primeiro contém a aplicação do modelo original para apoiar decisões operacionais na gestão do caixa da empresa; o segundo traz a adaptação do modelo para abranger o planejamento tático de amortizações de financiamentos na gestão do caixa. Esses exemplos são testados em situações reais e resolvidos por meio da ferramenta *solver* do Excel, amplamente utilizada nos ambientes de gestão financeira das empresas (Grossman, 2007). A flexibilidade do modelo de otimização em atender mais de um tipo de situação e a capacidade de gerar soluções melhores que as praticadas na empresa, no período estudado, são evidenciadas por meio de exemplos numéricos.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma: no presente capítulo apresentamos nossos objetivos e as justificativas que fundamentaram nossas escolhas. No segundo capítulo, discorremos sobre os conceitos presentes na área financeira, base para o desenvolvimento das idéias subseqüentes. O terceiro capítulo revisa os modelos da literatura utilizados na gestão do caixa. O quarto capítulo estuda a aplicação do modelo original de fluxo em redes de Golden *et al.*(1979) nos processos reais de fluxo de caixa da empresa estudada, para apoiar decisões operacionais em que os períodos do horizonte de planejamento são dias. No quinto capítulo, adaptamos o modelo de Golden *et al.*(1979) para um caso real na empresa estudada com programação de amortizações, para apoiar decisões táticas em que os períodos do horizonte de planejamento são meses. Por fim, no sexto capítulo, apresentamos as conclusões deste estudo e as perspectivas para pesquisas futuras.

Capítulo 2: Conceitos financeiros utilizados

A seguir, discutimos brevemente alguns conceitos financeiros como: liquidez, valor do dinheiro no tempo, gestão do caixa, *trade-off* risco X retorno, fluxo de caixa e outros. As apresentações e as análises dos capítulos seguintes utilizam esses fundamentos.

Como dissemos anteriormente, é posssível diferenciar a administração do caixa da atividade de gerenciamento do fluxo de caixa, contudo essas duas práticas encontram-se estreitamente ligadas e procuramos, nesse capítulo, estudar o processo como um todo.

2.1 - O valor do dinheiro no tempo

Ao definirem a gestão financeira dos negócios, Ashford *et al*. (1988) afirmam que esta função envolve a tomada de decisões a respeito de como prover e utilizar os recursos financeiros tanto no curto prazo, quanto no longo prazo.

A complexidade das decisões ligadas à gestão financeira envolve o sacrifício de recursos no presente, em troca de um incerto, mas, confiantemente maior montante de recursos num futuro próximo ou distante. Portanto, as palavras-chave em qualquer discussão sobre gestão financeira são: dinheiro, tempo, risco e retorno.

No presente trabalho, vamos nos ater as discussões sobre o tempo e o dinheiro. O debate sobre as decisões financeiras sob condições de risco está além do escopo do nosso estudo. Nossa escolha de limitação do campo de estudo foi feita por critérios de metodologia e foco da pesquisa, sem prejuízo no reconhecimento de que a programação matemática pode também contribuir para o enriquecimento da abordagem à variável risco em finanças.

O dia-a-dia na área financeira é caracterizado principalmente por problemas quantitativamente[2] mensuráveis. Esses problemas constituem decisões a respeito do valor do dinheiro no tempo. Assim, estão apresentadas duas das principais variáveis relativas aos problemas em finanças (tempo e dinheiro), sendo que ambas podem ser quantificadas.

[2] O termo quantitativo diz respeito àquilo que é pertencente ao domínio dos valores ou quantidades numéricas.

Em relação ao valor (monetário/econômico) que o dinheiro possa assumir em dado instante *t*0 e em outro momento futuro *t*1, é possível medir a variação no seu valor (monetário/econômico) pelo custo do capital[3] ou custo de oportunidade entre esses dois instantes (*t*1 – *t*0). E, então, novamente estaremos lidando com uma variável quantitativa que é a taxa de juros (taxa de retorno) usada para atribuir o valor do dinheiro no tempo.

As taxas de juros determinam o valor futuro do dinheiro e para tanto levam em consideração fatores que fazem o valor do dinheiro diminuir no tempo, como, por exemplo, o risco e a preferência por liquidez. Lembramos, portanto, que o conceito de que o valor de uma unidade monetária hoje é maior do que o valor dessa unidade monetária amanhã é central para a teoria financeira (Gropelli, 2000).

2.2 - A gestão do caixa

A administração de caixa e títulos negociáveis[4] (chamaremos aqui de *gestão do caixa*) é uma das áreas-chave da administração do capital de giro[5], já que caixa e títulos negociáveis são os ativos mais líquidos da empresa e possibilitam pagar as contas no vencimento. Colateralmente, esses ativos líquidos constituem um agregado de recursos para cobrir desembolsos inesperados, reduzindo assim o risco de uma crise de liquidez. Uma vez que os outros ativos circulantes mais importantes (ou seja, duplicatas a receber e estoques) serão eventualmente convertidos em caixa através de cobrança e vendas, o caixa é o denominador comum ao qual todos os ativos líquidos podem ser reduzidos.

---

[3] Gitman (1987,p.765) afirma que os termos custo de capital e custo de oportunidade são usados indistintamente e representam “a taxa de retorno que uma empresa deve obter em seus investimentos para manter seu valor de mercado inalterado”.

[4] São títulos de dívida a curto prazo que podem ser facilmente convertidos em caixa sem sofrerem perda do principal e corrigidos por juros no período.

[5] Para que o ciclo operacional de uma organização possa ocorrer, é necessária a aplicação de recursos financeiros que financiem as operações até que o ciclo se complete. Os recursos exigidos formam o capital de giro. O capital de giro será reavido ao final do ciclo operacional.

Duas razões têm gerado uma significativa modificação na gestão do caixa e seu fluxo: a busca dos gerentes financeiros por métodos mais eficientes de gestão do caixa, sobretudo em épocas com tendência de aumento de juros na economia, e o desenvolvimento da tecnologia bancária, particularmente os mecanismos de transferência eletrônica de recursos, que, segundo Brigham e Houston (2004), alterou o modo como o caixa é gerido.

Na definição de Welsch *et al.* (1988), liquidez se refere à disponibilidade de caixa para atendimento das necessidades de caixa diárias de uma empresa. Gitman (1987) relaciona a liquidez de uma empresa diretamente ao nível de caixa e títulos negociáveis e outros ativos circulantes que ela possui. Uma vez que caixa e títulos negociáveis são os ativos de maior liquidez da empresa, eles possibilitam o pagamento dos compromissos no vencimento.

Lemes Junior *et al.* (2002) lembram que caixa é também denominado disponível em administração financeira e podemos resumir sua visão dos elementos a serem gerenciados pela gestão do caixa na tabela 2.2:

TABELA 2.1 – Ativos que compõem o disponível

ATIVO	DEFINIÇÃO	LIQUIDEZ	CARACTERÍSTICAS
CAIXA	Valores em moeda mantidos na tesouraria da empresa ou depositados em contas-correntes bancárias.	Imediata	Sua utilização independe de ações de terceiros.
TÍTULOS NEGOCIÁVEIS ou Quase CAIXA	Recursos ociosos aplicados no mercado financeiro	Grande e risco minimizado	A ação de terceiros é reduzida ao resgate do título e crédito em conta-corrente

Lemes Junior *et al.* (2002, p.418) abordam ainda outras duas importantes questões relacionadas ao caixa:

- "Todos os bens do Ativo serão convertidos em caixa em algum momento da vida da empresa". Uma vez que os outros ativos circulantes mais importantes (ou seja, duplicatas a receber e estoques) serão eventualmente convertidos em caixa através de cobrança e vendas, caixa é o denominador comum ao qual todos os ativos líquidos podem ser reduzidos.
- "A gestão do caixa ou *cash management* é a atividade da administração financeira que objetiva a otimização dos recursos financeiros, integrados às demais atividades da empresa. É a atividade da tesouraria da empresa, que acompanha os reflexos das políticas de investimentos, vendas, créditos, compras e de estoques". As políticas citadas não devem acarretar problemas de liquidez para a empresa.

2.2.1 - A proporção ótima de títulos negociáveis

Intrínseco à discussão sobre a gestão do caixa está o tratamento dado pela tesouraria das empresas ao que alguns autores chamam de "quase-caixa" (Lemes Junior *et al.*, 2002) e outros preferem nomear títulos negociáveis ou "*marketable securities*" (Gitman, 1987, p.780). A idéia central é a necessidade da tesouraria em dispor de outro ativo que remunere o estoque de recursos financeiros melhor do que o caixa. Lembrando que dinheiro é um recurso caro e que também pode ser escasso. O estoque do ativo representado pelo dinheiro aplicado pode ser justificado por haver fundos temporariamente ociosos ou pela política financeira traçada pela tesouraria visando a maximização dos recursos aplicados no mercado financeiro.

Títulos negociáveis representam investimentos a curto prazo feitos pela empresa para obter um retorno sobre fundos temporariamente ociosos. Quando uma empresa reconhece que um montante grande demais de caixa foi acumulado, ela muitas vezes converterá uma parte do caixa num título de renda fixa, isto é, numa aplicação financeira. Embora os bancos comerciais possam pagar juros sobre os depósitos à vista em conta corrente, é mais comum compensar as empresas-clientes pelos saldos, cobrando menores taxas de juros sobre empréstimos. Já que a "taxa de lucratividade" ou taxa de juros pagas pelos bancos é bem reduzida, as empresas tendem a alocar seus saldos bancários em excesso para outros instrumentos. Há inúmeros títulos de renda fixa altamente líquidos que possibilitam à empresa obter um lucro sobre a parcela ociosa de seu caixa, sem sacrificar muito a liquidez de seus ativos.

Gitman (1987, p.316) aborda a questão da proporção ótima de títulos negociáveis na composição dos ativos da empresa: "uma decisão importante que a empresa precisa tomar é exatamente que composição de caixa e títulos negociáveis deve ser mantida. Essa decisão não é simples, porque envolve uma relação entre a oportunidade de ganhar juros sobre fundos ociosos e o custo das taxas de corretagem relacionadas com a compra e venda de títulos negociáveis". Além do *trade-off* existente entre ganhos com juros e custo de aplicação, podemos citar a incidência de impostos sobre a movimentação financeira como outro fator a ser considerado na decisão sobre a compra de títulos negociáveis.

2.2.2 - Razões para manutenção de saldo em caixa

Assaf Neto e Silva (1997) destacam a manutenção do saldo em caixa no vencimento dos compromissos como condição básica para a empresa manter-se operando já que, sem liquidar seus compromissos, a descontinuidade do ciclo operacional da companhia pode ocorrer por falta de crédito e de materiais, por exemplo. Por outro lado, os mesmos autores compartilham a visão de que, por não incorporar explicitamente um retorno operacional, o saldo de caixa deve ser o mais baixo possível, o suficiente para cobrir as várias necessidades associadas aos fluxos de recebimentos e pagamentos.

Keynes, contudo, aponta três motivos básicos para manutenção da liquidez através do saldo do caixa ou da detenção dos títulos negociáveis – que para o autor representam um depósito de liquidez (Gitman,1987). Esses motivos são: motivo de transação, motivo de precaução e motivo de especulação. A tabela 2.3 oferece uma classificação de cada motivo citado e de sua finalidade:

TABELA 2.2 – Classificação dos motivos para manutenção da liquidez

MOTIVO	DEFINIÇÃO	FINALIDADE
Transação	Ato por meio do qual se trocam ou transferem valores	Meio de troca
Precaução	Medida antecipada que visa prevenir uma situação indesejada	Meio de troca
Especulação	Operação financeira que visa obter lucros sobre valores sujeitos à oscilação de mercado	Meio de preservação da riqueza

2.3 - Posição do caixa: estado futuro e proteção

Baseado nas noções sobre o valor do dinheiro no tempo e também na descrição do campo de ação do gestor do caixa, podemos considerar válida a seguinte afirmação de Welsch *et al.* (1988, p.451)**:** “freqüentemente quanto mais cedo ocorre a tomada de decisão, maior a oportunidade de proteção da posição de caixa”. Então, para que a gestão do caixa atinja seu objetivo de otimização dos recursos financeiros, é essencial que haja informações que antecipem o estado futuro da posição de caixa o tanto quanto possível.

Ao apurar o saldo líquido dos fluxos monetários da empresa, o instrumento do fluxo de caixa permite que se estabeleçam prognósticos com relação a eventuais sobras ou faltas de recursos em função do nível de caixa desejado segundo Assaf Neto e Silva (1997).

2.4 - O fluxo de caixa

É no contexto do provimento da empresa com os recursos de caixa que Assaf Neto e Silva (1997, p.35) destacam o fluxo de caixa como "um instrumento que possibilita o planejamento e o controle dos recursos financeiros de uma empresa". Os autores ressaltam ainda o uso gerencial do fluxo de caixa como ato essencial à tomada de decisões no âmbito das finanças empresariais e, também, como sinalizador "dos rumos financeiros dos negócios".

Sanvicente e Santos (2000, p.155) correlacionam o fluxo de caixa projetado com o valor do dinheiro no tempo ao afirmarem que "a projeção do fluxo de caixa é uma atividade indispensável para a grande maioria das empresas. As razões para isso se prendem ao fato de que, em economias inflacionárias, a manutenção de elevados saldos de caixa implica prejuízos devidos ao decréscimo do poder aquisitivo desses valores, além dos juros correspondentes, ou seja, o valor do dinheiro que poderia estar sendo aplicado produtivamente. Por outro lado, as faltas imprevistas de caixa trazem como conseqüências maiores ônus financeiros na obtenção de empréstimos, além de poderem desacreditar a empresa junto aos seus credores".

As projeções do fluxo de caixa podem ser feitas estimando-se as entradas de caixa, decorrentes de vendas e outras receitas, e as saídas de caixa resultantes das despesas operacionais e outros gastos. Além disso, é preciso avaliar os saldos de caixa, identificando-se as eventuais correções necessárias.

Para Sanvicente e Santos (2000, p.156), "conhecendo de antemão as prováveis faltas de caixa, a administração financeira poderá avaliar cuidadosamente as alternativas disponíveis para resolver esse problema e solucionar, dentre elas, aquela que melhor atenda aos interesses da empresa. Muitas dessas alternativas podem exigir providências imediatas por parte da empresa, antes da efetivação das insuficiências de caixa. Essas providências podem ser negociações iniciais, preparação das informações solicitadas pelas instituições financeiras, manutenção de saldos médios, além de outras. Por outro lado, a projeção do fluxo de caixa permite a identificação dos excessos de caixa e possibilita a análise prévia das alternativas da aplicação desses excedentes".

O fluxo de caixa pode ser definido como uma programação que demonstra as entradas e as saídas de caixa da empresa em determinado período, sendo usado para prever tanto excedentes, quanto a escassez de caixa; tornando-se, assim, um instrumento básico de planejamento da gestão do caixa. Ao permitir à empresa determinar seu fluxo de recursos futuros, torna-se possível à gerência financeira administrar o caixa e daí minimizar a necessidade de recursos, afirma Assaf Neto e Silva (1997).

Um dos benefícios a serem atingidos no estudo está ligado a reduzir o tempo de trabalho que o gerente financeiro gasta com a administração do capital de giro. Administrar o capital de giro de uma empresa consome em média cerca de 60% do tempo de trabalho do gerente financeiro, segundo estudo citado em Ashford *et al.* (1988).

2.5 - Planejamento e controle financeiro

Assim como "qualquer operação produtiva requer planos e controle" (Slack *et al.*, 2002, p.313), entendemos que as operações financeiras devam ser gerenciadas para o atendimento à demanda da empresa por caixa e ainda para contribuir na maximização dos lucros. Adotando a concepção de planejamento e controle como atividade conectora entre suprimento e demanda como citado por Slack *et al.* (2002), e partindo para a adaptação à gestão do caixa, pensaremos na empresa demandando recursos que podem ser supridos pelo mercado financeiro em que ela opera, através da sua função financeira. Através do planejamento e controle financeiro, a gerência da empresa pode avaliar se os padrões atuais de financiamento e aplicação de recursos estão alinhados com os objetivos globais da companhia.

2.6 - O *trade-off* risco X retorno

O *trade-off* risco X retorno expõe o conflito básico da administração financeira e está também presente na análise da manutenção de saldos de caixa. A questão do risco pode ser abordada pela opção de manter saldos reduzidos de caixa e, eventualmente, deixar de obter descontos financeiros pela diminuição no prazo de pagamento de suas compras. Ou ainda, ter que recorrer ao capital de terceiros numa situação em que o custo envolvido no financiamento tende a ser maior pela urgência na obtenção dos recursos financeiros, ou seja, incorrendo na falta de planejamento financeiro.

Ao tratar do balanceamento existente entre a escassez e o excesso de caixa, o gerente financeiro tem que considerar também o *trade-off* risco X retorno, já que os saldos de caixa têm que ser ajustados de acordo com a demanda real por caixa. O volume de recursos financeiros tomados desnecessariamente no sistema tem que ser reduzido sem diminuir o lucro ou aumentar o risco (Yao *et al.*, 2006).

Por outro lado, Assaf Neto e Silva (1997, p.36) destacam que "posições de mais elevada liquidez imediata, ao mesmo tempo em que promovem segurança financeira para a empresa, apuram maior custo de oportunidade". Nessa situação, pesam as decisões a cerca do retorno no volume de recursos mantidos em caixa.

Van Horne (1974) reitera que a quantificação desse *trade-off* é complexa. Os benefícios associados à manutenção da liquidez devem ser ponderados pelo custo em mantê-la. Em termos gerais, o custo de manutenção da liquidez pode ser pensado como sendo o diferencial nos juros obtidos pelo investimento em fundos de ativos líquidos e o custo de financiamento. Como os mercados de capitais praticam taxas de empréstimos superiores às taxas pagas pelos investimentos feitos, existe um custo de manutenção da liquidez. O nível ótimo de liquidez pode ser determinado, então, por análise marginal.

Capítulo 3: Modelos para gestão do caixa e gestão do fluxo de caixa

O objetivo desse capítulo é revisar a literatura sobre modelos de fluxo de caixa e ilustrar o tratamento dado ao problema por diferentes abordagens.

Para proceder com a revisão dessa literatura, estendemos nossos esforços no sentido de alcançar uma visão mista e contributiva que agrega os fundamentos da teoria financeira aos trabalhos desenvolvidos dentro do campo da programação matemática. Nossa intenção é que cada elemento agregado tenha parte no resultado buscado do estudo de otimização da gestão do fluxo de caixa.

3.1 – Revisão da literatura sobre os modelos de gestão do caixa e gestão do fluxo de caixa

Partiremos dos princípios de administração financeira cujos modelos tratam do problema de gestão do caixa - como fundamentação do assunto que vamos trabalhar - e incorporaremos a visão da programação matemática desenvolvida em estudos de Pesquisa Operacional. Em geral, por lidarem com modelos matemáticos para tratar problemas que contém complexidade e incerteza, os estudos em Pesquisa Operacional encontram aplicações em diversas áreas no campo das finanças, conforme destaca Mulvey (1994), na apresentação da edição especial em finanças do periódico *Interfaces*. Convém ainda lembrar que o estudo da gestão do caixa foi uma das áreas iniciais de aplicação dos modelos de Pesquisa Operacional (Ashford *et al.*, 1988).

3.1.1 – Modelos de gestão do caixa da literatura em finanças

Os modelos estudados provenientes da literatura em finanças referem-se ao tratamento dado ao problema de gestão do caixa. O reconhecimento do *trade-off* entre manter recursos em caixa e convertê-los em um ativo mais rentável foi primeiramente tratado por Baumol (1952) ao adaptar o conceito de Lote Econômico à gestão do caixa. Pesquisas mais recentes apontam esse *trade-off* como a explicação para a manutenção de caixa pelas empresas, Opler *et al*.(1999).

A seguir revisamos os modelos mais difundidos[6] na literatura financeira com a intenção de tê-los como referência para a seção seguinte, em que incorporamos a visão da programação matemática desenvolvida nos estudos de Pesquisa Operacional.

- Modelo do Caixa Mínimo Operacional;
- Modelo de Baumol (Lote Econômico);
- Modelo de Beranek;
- Modelo de Miller e Orr;
- Modelo do Dia da Semana;

O objetivo que norteia o uso desses modelos é a adoção de determinado nível de caixa que a empresa deve manter como referência para suas operações financeiras. Tais modelos propõem métodos diferentes para o cálculo desse montante que o caixa da empresa deve atingir. Alguns desses modelos, incluindo aplicação prática, podem ser encontrados em Sousa e Barros (1999), Sousa e Abrantes (2000) e Villalba e Sousa (2001).

Assaf Neto e Silva (1997) afirmam que, no mundo real, o fluxo de caixa não é totalmente determinístico, nem totalmente aleatório. Então, vêem com reservas a adoção de uma abordagem específica de modelo de gestão do caixa, quer seja ela determinística como o modelo de Baumol, ou probabilística como o modelo de Miller e Orr.

Ainda sobre ambos os modelos de Baumol e de Miller e Orr, Assaf Neto e Silva (1997) esclarecem que tais modelos consideram apenas o motivo transação em suas respectivas formulações. E, em relação aos modelos citados, entendem que um fato que limita a utilização dos modelos é o de não se levar em consideração as características de cada empresa e de cada administrador.

[6] Tomamos como base o artigo de Villalba e Souza (2001) que apresenta uma revisão dos modelos mais conhecidos de administração de caixa.

3.1.2 – Modelos de gestão do fluxo de caixa da literatura em pesquisa operacional

3.1.2.1 - Considerações iniciais

Segundo Ashford *et al.* (1988, p.144), "a tendência dominante da literatura financeira não enfatizou realmente a questão do capital de giro. Muitos livros simplesmente oferecem uma coleção de instrumentos de decisão em torno do modelo do Lote Econômico".

Crum *et al.* (1979) lembram que a robustez e o potencial analítico dos procedimentos de programação matemática podem ser utilizados para duas funções importantes: estruturar ambientes em que decisões altamente complexas são tomadas e determinar, de maneira rápida e eficiente, o conjunto dominante de ações para atingir um objetivo explícito.

3.1.2.2 - Classificação dos modelos: determinísticos ou estocásticos

Ao abordarmos os tipos de modelos de gestão do caixa, lembramos que os modelos de otimização podem ser divididos em duas grandes classes, segundo a previsibilidade dos elementos que constituem a gestão do caixa (Ashford *et al.*,1988). Se as variáveis de decisão envolvidas no processo de gestão do caixa podem ser bem estimadas/determinadas, os modelos de gestão do caixa são chamados de determinísticos. Por outro lado, se a incerteza é grande a respeito das variáveis de decisão da gestão do caixa, tais modelos lidam com a probabilidade das variáveis assumirem valores/comportamentos aleatórios e esses modelos de otimização são estocásticos (probabilísticos).

Conforme mencionado antes, os modelos estocásticos estão além do escopo deste trabalho. Contudo, apontamos o modelo de Yao *et al.* (2006) como um trabalho recente nessa linha de pesquisa científica, como forma de ilustrar a atenção despendida pelos pesquisadores na busca de melhores soluções ao problema da gestão do caixa. Yao *et al.* (2006) propõem o uso de técnicas *fuzzy* ao abordarem o problema de gestão do caixa, relacionando-o a outro problema ("*newsvendor problem*") descrito, por exemplo, em Johnson e Montgomery (1974).

3.1.2.3 - O trabalho de revisão de Gregory e a extensão de Srinivasan e Kim

Podemos destacar dois excelentes trabalhos de revisão dessa classe de modelos determinísticos de gestão do caixa. O primeiro deles, Gregory (1976), concentrou sua atenção em um subconjunto de modelos de otimização pertencentes à classe dos modelos determinísticos, e podem ser denominados modelos teóricos de estoque. Já o segundo trabalho de revisão, Srinivasan e Kim (1986), tiveram a intenção de complementar o artigo de Gregory (1976).

Gregory (1976) enxergou a idéia do uso de um modelo de fluxo de caixa como facilitadora do processo de desenvolvimento desses ativos de curto prazo em um instrumento de gestão financeira. Tal instrumento contemplou toda a variabilidade e suas respectivas decisões, acomodando desse modo toda a extensão do comportamento do fluxo de caixa.

Além disso, Gregory (1976) revisou diversos modelos de gestão do caixa, entretanto, quase todos os modelos utilizaram procedimentos essencialmente baseados em teoria de controle de estoques. Para Srinivasan e Kim (1986), a abordagem voltada para teoria de controle de estoques presente na revisão de Gregory deveu-se à definição da função da gestão do caixa utilizada pelo autor. Essa definição ficou limitada a ver a gestão do caixa tratando da proporção ótima dos montantes de caixa e de títulos negociáveis. Embora a revisão dos modelos de gestão do caixa feita por Gregory tenha apresentado limitações, o tipo dos modelos revisados forneceu *insight* na direção da modelagem da gestão do caixa (Srinivasan e Kim, 1986).

Srinivasan e Kim (1986), ao entenderem que o campo de pesquisa dos modelos determinísticos de gestão do caixa se estendia além dos modelos baseados no controle de estoque revisados por Gregory, fizeram uma revisão mais ampla dos modelos de otimização existentes na literatura, de modo a acomodar outras técnicas de otimização da gestão do caixa. Os autores elaboraram ainda uma proposta de decomposição das atividades da gestão do caixa em um grupo de processos de decisão, para os quais um número de modelos de otimização já havia sido sugerido.

Ao revisar os modelos da literatura sobre gestão do caixa, Srinivasan e Kim (1986) estavam dispostos a encontrar respostas para duas questões que, para eles, se mostravam centrais nessa discussão:

- O que faz o gestor do caixa?
- Com quais tipos de decisão a literatura sugere que o gestor do caixa esteja envolvido?

Destaca-se o papel de planejamento e controle intrínseco às funções desempenhadas pelo gestor do caixa na conclusão dos autores acerca de suas responsabilidades. Tais responsabilidades podem ser vistas pelas perspectivas estratégica, tática e/ou operacional e incluem mobilizar, controlar e planejar os recursos de caixa da empresa.

A amplitude da revisão de Srinivasan e Kim (1986) não se deve apenas ao fato dos autores terem incorporado um maior número de ferramentas de otimização ao problema da gestão do caixa, mas, principalmente, por ter sido ampliada a definição das decisões relativas à gestão do caixa. Tal abrangência se deu por meio da classificação do estudo da literatura normativa sobre gestão determinística do caixa em cinco processos de decisão, a saber:

- a gestão do saldo de caixa;
- a coleta de caixa;
- a mobilização e a concentração de caixa;

- o desembolso de caixa e
- o *design* de um sistema bancário para serviços de crédito.

Partindo da classificação de Srinivasan e Kim (1986) dos processos decisórios envolvidos na gestão do caixa, nosso trabalho enfoca as atividades ligadas ao processo de gestão do saldo de caixa que, segundo os autores, envolvem a combinação dos três primeiros itens abaixo:

- a gestão da posição de caixa;
- o financiamento de curto prazo;
- o investimento de curto prazo e
- a previsão de caixa – a discussão desta última atividade está além dos objetivos do presente trabalho sem prejuízo da abordagem do tema estudado, já que os autores agrupam a posição do caixa, o financiamento e o investimento de curto prazo enquanto tratam da previsão do caixa em separado[7].

Srinivasan e Kim (1986) acreditavam que, ao colocarem sua revisão dos modelos determinísticos de gestão do caixa em perspectiva com o trabalho de Gregory, foram levados a revisar a literatura sobre os modelos determinísticos de gestão do caixa pelo mesmo espírito que norteou Gregory: o de trazer as soluções apresentadas pelos modelos ao universo da prática das situações reais dos problemas da gestão do caixa. Esse, segundo Mitroff *et al.* *apud* Bertrand e Fransoo (2002), é o requisito de toda pesquisa quantitativa empírica.

Para os modelos de gestão do caixa, adotamos a terminologia básica oriunda da revisão de Gregory (1976), que representa as características comuns aos modelos estudados e fornece uma estrutura de definições que referencia as discussões posteriores:

- transações: todos os fluxos de caixa de entrada e saída da empresa;

[7] No capítulo 4, vemos que a previsão de caixa é o ponto de partida para a modelagem da gestão do caixa escolhida como exemplo no presente trabalho.

- ambientes com dois ativos: saldo em caixa e portfolio de ativos líquidos de curto prazo (esse aspecto do modelo terá sua extensão discutida);
- transferências: intercâmbio dos ativos;
- saldo de reciprocidade bancária: saldo positivo mínimo ou saldo médio de caixas exigido pelos bancos como remuneração pelos serviços prestados;
- linha de crédito: limite de financiamento disponibilizado por uma instituição financeira (acrescentamos aqui essa variável presente em alguns dos modelos).

Embora essas definições tenham partido de modelos de gestão do caixa com enfoque na teoria de controle de estoque, cujo objetivo é minimizar o custo médio diário de gerenciar o saldo de caixa, acreditamos que elas cumprem o papel de introduzir os conceitos e as variáveis que integram este estudo. Ashford *et al.* (1988) destacam que os problemas com múltiplos tipos de ativos são mais facilmente tratados por modelos de programação linear.

3.1.2.4 - Apresentação dos modelos

Descrevemos as características principais dos modelos que julgamos representativos da evolução no tratamento da gestão do caixa e da multiplicidade de abordagens matemáticas ao problema.

- **Abordagem de programação linear ao financiamento de curto prazo**

Robichek *et al.* (1965) desenvolveram um modelo para a tomada de decisões de financiamento de curto prazo por meio de programação linear, abordando a definição de quanto e de quando obter recursos de um grupo de fontes selecionado pelos autores. Os autores desse modelo entendem como objetivo básico do gestor financeiro, a provisão dos fundos necessários ao negócio da empresa descritos no orçamento de caixa. O gestor financeiro visa atingir esse objetivo ao custo mínimo para a firma (Sethi e Thompson, 1970), dadas as restrições dentro das quais ele tem de operar (Robichek *et al.*, 1965). O primeiro passo desse modelo consiste na preparação do orçamento de caixa para cada período futuro, objetivando definir-se um *deficit* ou um *superavit* acumulado de caixa. Isso é feito a partir do fluxo líquido de caixa, tabulando-se para cada período futuro as receitas totais e subtraindo-se os desembolsos totais.

Nesse modelo, o saldo mínimo de caixa é especificado para todos os períodos. A partir daí, o gestor do caixa dispõe de um número de alternativas pelas quais o *deficit* acumulado de caixa pode ser financiado ou o *superavit* de caixa pode ser investido. Essas alternativas necessitam ser avaliadas em suas características de custo e restrições intrínsecas a opção escolhida. As fontes de recursos selecionadas pelos autores consistiram em: empréstimos amparados em uma linha de crédito, financiamento com recebíveis ou duplicatas dadas em garantia, alongamento das contas a pagar ou prorrogação de desembolsos, e empréstimo bancário.

A função objetivo do problema de programação linear demonstra como obter os fundos necessários indicados pelo orçamento de caixa ao custo mínimo total e está sujeita às restrições impostas pelas alternativas de financiamento. O objetivo é minimizar o custo total relevante que é a soma dos custos explícitos, D_j, e de dois custos implícitos, D_j* e F_m.

$$\text{CTR} = \sum_{j=1}^{m} D_j + \sum_{j=1}^{m} D_j* + F_m$$

A equação dos custos é descrita como segue.

Para o $j^{ésimo}$ período, os custos explícitos, D_j, são os juros referentes aos empréstimos contraídos somados à perda de descontos, menos os juros obtidos pelo excedente de caixa.

Os autores decidiram incorporar ao modelo aspectos de fatores qualitativos derivados das alternativas de financiamento que carregam um indesejável "custo" não financeiro como: a perda de confiança por parte dos credores no atraso dos pagamentos e as restrições impostas às operações da empresa pelos financiamentos a prazo (Robichek *et al.*, 1965). Para que os fatores qualitativos fossem levados em conta pelo tomador de decisões foram assumidos custos implícitos, D_j*. Tais custos implícitos são proporcionais ao montante de recursos tomado emprestado e, portanto, puderam ser expressos por meio de taxas para cada período.

Existe ainda um ajuste a ser feito por encerrar o modelo após *m* períodos, uma condição de encerramento de custo implícito ou crédito é atribuída nas situações em que as condições de início e de encerramento não são as mesmas. O custo implícito da condição de encerramento é F_m.

Quando o problema de programação linear multi-período estudado por Robichek *et al.* (1965) é resolvido, a estratégia financeira ótima é obtida para cada período do horizonte de planejamento em análise. São assim definidos, para cada período, os montantes ótimos de cada fonte de financiamento e do excedente de caixa a investir.

Foram estudadas dez combinações de fontes alternativas de financiamento, bem como o investimento do excedente de caixa nas situações em que esse foi gerado.

Segundo Robichek *et al.* (1965), a solução ótima fornece o valor de cada variável básica que gera o custo total relevante, CTR; e, adicionalmente, indica o custo marginal para cada variável não básica. O uso dos custos marginais relativos a pequenas alterações na decisão ótima pode trazer informações sobre o efeito das mudanças na função objetivo.

Portanto, o modelo de programação linear resolvido pode também contribuir com respostas para outras questões ligadas ao problema. Pela avaliação das variáveis duais, o gestor do caixa obtém *insight* em torno do custo de oportunidade das diversas restrições. Essa abordagem fornece ao gerente financeiro um instrumento de tomada de decisões para a solução de problemas de financiamento de curto prazo particularmente complexos (Van Horne, 1974).

Robichek *et al.* (1965) procuraram diagnosticar se a adoção de regras de decisão simplificadas levaria à solução ótima num ambiente de valores de parâmetros constantes. A conclusão dos autores foi que não existiam tais regras de decisão simples.

Srinivasan e Kim (1986) colocam o modelo de Robichek *et al.*(1965) como tendo sido a base para diversos refinamentos subseqüentes no tratamento do problema da gestão do caixa. Contudo, entendem que não foram tratados dois aspectos inerentes ao problema da gestão do caixa: as transações de investimento de curto prazo e as considerações sobre o saldo mínimo de caixa.

- **Um modelo de períodos variáveis para decisões de gestão do caixa**

Orgler (1969) destaca o aspecto temporal da gestão do caixa. O aspecto tempo é importante, uma vez que a maioria das variáveis que são determinadas com relação ao saldo de caixa é dependente do tempo. Muitas dessas decisões são feitas diariamente, então um modelo de gestão do caixa deve fornecer informações para a tomada de decisões numa base diária ou similarmente numa alta freqüência. Concomitantemente, o modelo tem que cobrir o período de planejamento de caixa inteiro e incorporar todas as relações relevantes entre períodos.

Orgler (1969) afirma ainda que as decisões da gestão do caixa não estão apenas inter-relacionadas entre os períodos de tempo sucessivos, mas também dentro de cada intervalo de tempo. Essas relações intra-períodos requerem abordagem simultânea, ao invés de tratar por partes o conjunto de variáveis de decisão. Orgler (1969) aponta que parte da necessidade de financiamento de certo período pode ser substituída pela redução nas saídas de caixa proporcionada por atraso em pagamentos, ou ainda; a venda de títulos antes do seu vencimento pode oferecer uma fonte de caixa enquanto que alterações nas especificações de saldo mínimo podem afetar tanto as decisões de financiamento quanto às de investimento.

Os dados necessários ao gerenciamento da conta caixa em uma empresa incluem as vendas à vista, a cobrança das contas a receber, as compras, as fontes de financiamento de curto prazo e os rendimentos em aplicações financeiras de curto prazo. Essas informações são conhecidas apenas parcialmente e, conseqüentemente, requerem o uso de previsões. Tais previsões introduzem um elemento de incerteza ao problema da gestão do caixa. Entretanto, esse elemento é relativamente sem importância devido à natureza de curto prazo do problema. Em resumo, a complexidade da gestão do caixa advém do grande número de variáveis de decisão, de suas inter-relações e da alta freqüência com que eles têm que ser simultaneamente determinados (Orgler,1969).

Orgler (1969) acredita que a prática baseada na divisão do problema de gestão do caixa em subproblemas (por exemplo: previsão das alterações nos saldos de caixa, necessidades de financiamento, investimento do *superavit* de caixa), cuja atenção aos subproblemas ocorre de forma seqüencial, falha ao desconsiderar as inter-relações entre as variáveis de decisão da gestão do caixa e seus aspectos intertemporais.

Orgler (1969) abordou o problema da gestão do caixa por meio de um modelo de programação linear multi-período que inclui quatro tipos principais de variáveis de decisão: programação de pagamentos, financiamento de curto prazo, o saldo de caixa e transações com títulos para os quais tanto o montante quanto o vencimento são explicitamente definidos e, conseqüentemente, derivados do modelo.

As características intertemporais do modelo estão baseadas em um planejamento de caixa anual dividido em dez períodos diários, cinco períodos de dez dias e dez períodos mensais. No modelo de Orgler (1969), são tratados sete tipos de restrições: os pagamentos, o financiamento de curto prazo, as vendas de títulos negociáveis, o saldo de caixa, o fluxo de caixa, o encerramento e os índices financeiros.

A função objetivo do modelo pode ser formulada de diversas maneiras. A alternativa escolhida por Orgler (1969) foi maximizar o valor, ao final do horizonte de planejamento, das receitas líquidas obtidas a partir das transações de caixa durante o período de planejamento inteiro. Qualquer montante de receita gerado pelo modelo é imediatamente considerado para reinvestimento, ao mesmo tempo em que todo custo é financiado. Por conseqüência, pela adição dos retornos líquidos do princípio ao fim do período de planejamento, a função objetivo representa o valor da receita líquida do orçamento de caixa no horizonte de planejamento. Logo, essa abordagem considera o valor do dinheiro no tempo de uma maneira mais precisa do que poderia ser obtido pelo desconto de todas as receitas líquidas a uma taxa de desconto de curto prazo que, para fins práticos, seria muito difícil de estimar.

A função objetivo inclui quatro tipos de variáveis de decisão: pagamentos, investimentos de curto prazo, vendas de títulos e financiamentos de curto prazo.

Quanto às soluções dos exemplos resolvidos, Orgler(1969) concentrou-se em responder:

1. é possível chegar a mesma ou a uma solução melhor com a utilização de práticas correntes de negócios?
2. qual o grau de sensibilidade dos resultados às mudanças nos dados de entrada?

Na resposta à questão 1, a solução do modelo foi superior àquela obtida por tentativa e erro em todos os casos testados. Embora esse teste não prove que o modelo forneceu a melhor solução possível ao problema de gestão do caixa, ele demonstra que o modelo de programação linear sugerido é um aperfeiçoamento nas práticas correntes dos negócios.

Na resposta à questão 2, temos a análise de sensibilidade que foi executada nas principais classes de entrada: custo e coeficiente de rendimento, fluxos de caixa e compras, e duração do horizonte de planejamento. As conclusões principais, a partir da análise, foram duas: primeiro, o modelo é mais sensível às mudanças no custo e nos coeficientes de rendimento do que em alterações nos fluxos de caixa e nas compras. Segundo, os horizontes com duração inferior a um ano oferecem soluções quase idênticas aos horizontes anuais. Tais resultados são encorajadores já que o custo e os coeficientes de rendimento geralmente mudam menos que os fluxos de caixa.

- **Um modelo de transbordo para decisões de gestão do caixa**

Srinivasan (1974) utilizou-se da mesma abordagem desenvolvida por Orgler (1969) ao tratar o problema de gestão do caixa, porém formulou o problema como um modelo de transbordo. Estes modelos de programação linear apresentam estrutura especial e podem ser resolvidos eficientemente por meio de algoritmos específicos de fluxos em redes (Srinivasan, 1986).

A adaptação do modelo de transbordo ao problema de gestão do caixa fez com que os depósitos fossem tratados como "origens" de recursos e os mercados como "aplicações" [8]. O modelo de transbordo aplicado à gestão do caixa visa minimizar o custo total de alocação das fontes de recursos às diferentes aplicações, mantendo a possibilidade da transferência de caixa entre as origens (Srinivasan, 1974).

A etapa inicial da modelagem da gestão do caixa como problema de transbordo inclui a tabulação das diversas origens e aplicações dos fundos com seu respectivo *timing*, além da informação dos montantes e dos custos unitários envolvidos. Srinivasan (1974)

[8] Optamos por tratar o termo "uses" como aplicações com a finalidade de mantermos a terminologia da área financeira/contábil para o tema.

acredita que a formulação de transbordo favorece o controle financeiro por organizar os dados nos sistemas de informações gerenciais. O autor esclarece que os problemas de transbordo podem ser reformulados como problemas de transporte (envolvendo exclusivamente embarques do depósito para o mercado), cuja solução (pelos métodos MODI e primal-dual, por exemplo) oferece maior eficiência comparativamente aos problemas de programação linear que se utilizam do método simplex para serem resolvidos.

Embora tanto o problema de transporte quanto o problema de transbordo possam ser resolvidos pelo algoritmo simplex, existem algoritmos específicos, para cada problema, que são mais eficientes do que o algoritmo simplex (Winston, 1991, Arenales *et al.*, 2007).

O problema formulado por Srinivasan (1974) consiste em decidir otimamente sobre:

1. a programação dos pagamentos para as compras previstas nos períodos determinados;
2. as transações a fazer na carteira de títulos mantidos pela firma no início do período de planejamento;
3. a opção sobre novos investimentos em títulos;
4. o uso da linha de crédito disponível (optando pelo uso, quando e em que volume).

Para efeito de comparação com o modelo de programação linear de Orgler (1969), o modelo de transbordo de Srinivasan (1974) ilustrado abaixo utilizou o mesmo exemplo numérico já resolvido por Orgler (1969). Esse exemplo cobre um período de planejamento de seis meses e é dividido em seis intervalos desiguais relacionados com a estrutura de tempo: períodos 1 e 2 (um dia), período 3 (dez dias), período 4 (vinte dias), período 5 (sessenta dias) e período 6 (noventa dias).

Ao invés de partir para a formulação do problema da gestão do caixa como um problema de transbordo para depois reformulá-lo como um problema de transporte, Srinivasan (1974) considerou ser mais fácil configurar diretamente a tabela de transporte. A configuração da referida tabela é feita especificando-se:

i. o número total (*P*) de origens;

ii. o número total (*Q*) de aplicações;

iii. disponibilidades a_i em cada uma das origens $i = 1, 2..., P$,

iv. necessidades r_j em cada uma das aplicações $j = 1, 2..., Q$, (assume-se que $\sum_{i=1}^{P} a_i = \sum_{j=1}^{Q} r_j$)

v. custos unitários c_{ij} para alocar \$1.00 da origem *i* para a aplicação *j*.

Esse é o conjunto de dados necessários à solução do problema de transporte para encontrar alocações ótimas x_{ij} (montante da $i^{ésima}$ origem alocada à aplicação *j*), a fim de que o custo total seja minimizado, sujeito às restrições de que cada origem esteja completamente utilizada e que cada necessidade seja plenamente atendida.

A função objetivo é

$$Min \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{Q} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito à

$$\sum_{j=1}^{Q} x_{ij} = a_i \text{ para } i = 1, 2, ..., P,$$

$$\sum_{i=1}^{P} x_{ij} = r_j \text{ para } j = 1, 2, ..., Q, \text{ e}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para todo } i \text{ e } j.$$

Se alguma origem *i* não pode ser ou não deve ser usada pela aplicação *j* (isto é, x_{ij} deve ser zero), podemos definir $c_{ij} = M$, onde *M* é um custo proibitivamente alto. Uma vez que o objetivo é minimizar o custo total, a solução ótima automaticamente estabelece que x_{ij} = 0 para tal (*i*,,*j*) (Srinavasan, 1974, p.1353).

A solução ótima do modelo acima é basicamente a mesma daquela obtida por Orgler (1969). As pequenas diferenças são atribuídas à maneira com que os descontos e os encargos com juros são manipulados nas duas formulações (Srinivasan, 1974).

Uma vantagem da configuração do problema de gestão de caixa numa tabela de transporte, segundo Srinivasan (1974), é que não é necessário montar as cerca de 25 restrições e uma função objetivo envolvendo 69 variáveis de decisão anteriormente à solução, como é o caso do problema de programação linear proposto por Orgler (1969).

A formulação em programação linear também fornece informações valiosas para análises de sensibilidade, embora, para Srinivasan (1974), não de forma tão rápida e fácil como no problema de transporte. Há de se considerar que este comentário é relativo às ferramentas computacionais disponíveis na década de 70.

Ainda sobre a formulação de Srinivasan (1974), Golden *et al.* (1979) colocam como uma séria desvantagem ao uso do modelo, o fato de que a capitalização dos juros e o reinvestimento dos rendimentos obtidos não serem diretamente considerados. Devido a esse fato, o valor máximo da função objetivo fica subestimado e, na medida em que o horizonte de planejamento se estende, esse *gap* aumenta.

Mais relevante ainda é o dado de que o modelo de Srinivasan (1974) pode indicar inviabilidade em situações em que ela não existe. Golden *et al.* (1979) usam um fluxo de caixa com três períodos para exemplificar a ocorrência desse tipo de erro de conclusão gerada a partir do modelo de Srinivasan. No exemplo citado, os resultados obtidos com um aumento de 25% na demanda por caixa do terceiro período acusam inviabilidade. No entanto, se forem computados os rendimentos de juros nos três períodos, observa-se que são gerados fundos suficientes para o atendimento ao aumento da demanda (Golden *et al.*, 1979).

- **Modelos de planejamento financeiro**

Na apresentação de uma estrutura de conceitualização e de formulação dos modelos de planejamento financeiro que atendesse às necessidades de eficiência na solução dos problemas e maior envolvimento do gestor do caixa tanto na modelagem, como no uso dos modelos de decisão, Crum *et al.* (1979) utilizaram uma estrutura matemática de redes. A atratividade visual desta técnica contribui para um maior grau de interação entre o gestor do caixa e seu modelo. Mesmo não tendo sido originalmente formulados em redes, muitos problemas de otimização podem ser reformulados no formato de redes (Crum *et al.*, 1979).

Como afirmamos anteriormente, a semelhança dos processos financeiros e seus sistemas de fluxo de caixa com as redes é natural. Os modelos em rede são formulados graficamente como uma série de arcos direcionados e nós, e são transferidos para uma estrutura matemática para resolução. Então o resultado pode ser prontamente apresentado no formato gráfico original (Crum *et al.*, 1979).

A definição básica de uma rede consiste em dois conjuntos de símbolos: os nós e os arcos. Os nós podem ser definidos por um conjunto de pontos ou vértices na rede. Um arco consiste em um par ordenado de vértices e representa uma direção possível da movimentação que pode ocorrer entre vértices. Se uma rede apresenta um arco (j,k), isto significa que é possível a movimentação do nó j para o nó k e que o nó j representa o nó inicial do arco e o nó k é o nó terminal do arco.

Um nó é um ponto específico no tempo em que todo o fluxo de caixa precedente e todo o fluxo de caixa imediatamente seguinte estão computados (Barbosa e Pimentel, 2001).

A representação em redes pode oferecer meios para que importantes problemas de otimização possam ser analisados com maior eficiência. Um modelo de rede específico é o problema do fluxo em rede de custo mínimo (MCNFP – *minimum cost network flow problem*), do qual os problemas de transporte e de transbordo são casos especiais. O algoritmo "*network* simplex" - uma generalização do algoritmo simplex de transporte - pode ser utilizado para solucionar o problema do fluxo em rede de custo mínimo (Winston, 1991, Arenales *et al.*, 2007).

- **Fluxo de caixa em redes generalizadas**

Podemos definir uma rede generalizada como sendo aquela que consiste em *m* nós que estão conectados aos pares por um conjunto *A* de arcos direcionados de fluxo de caixa, não sendo necessário que todos os pares de nós estejam conectados, ou seja, não precisam existir todos os arcos. Os arcos existentes são denominados arcos admissíveis. (Crum *et al.*,1979).

Mulvey e Vladimirou (1992) consideram que os modelos de redes generalizadas tratam de um tema comum: a alocação de fundos em diversas categorias de ativos durante vários períodos. Um modelo de rede generalizada é construído pela associação de um nó da rede a cada ativo, em determinado período, e um arco é associado a cada decisão de transação. Cada arco deve ter um multiplicador associado que aumenta ou diminui o fluxo no arco. O fluxo que entra no arco pela "cauda" é ampliado ou reduzido em determinada proporção pelo multiplicador, antes de atingir o nó da "cabeça". Desse modo, taxas de câmbio, de retorno e de empréstimo são modeladas por meio dos multiplicadores dos arcos na estrutura de rede generalizada.

- **Modelos de redes de gestão de fluxo de caixa com descontos na quantidade**

Jorjani e Lamar (1994) propuseram incorporar o conceito de desconto baseado em quantidade ao problema de gerenciamento do fluxo de caixa. A idéia central é que é possível obter descontos ou adicionais de rendimento, de acordo com o volume de dinheiro que está sendo negociado, quer estejam envolvidos os parâmetros de custo ou de remuneração do capital. A complexidade desse tipo de desconto deriva da natureza não linear da função custo, que representa o desconto baseado na quantidade. Como efeito do desconto dado, os custos marginais diminuem à medida que o fluxo de dinheiro aumenta. Então, esse tipo de problema de fluxo em rede não pode ser convertido em um problema equivalente de fluxo em rede com arcos de custos lineares e requer procedimentos de solução específicos (Jorjani e Lamar,1994, p.150).

- **O modelo de Golden *et al.***

A pesquisa que efetuamos nas bases de dados científicas norteou nossa revisão da literatura sobre o gerenciamento do fluxo de caixa. Observamos que existem poucas citações ao modelo de Golden *et al.* (1979). A grande maioria dos textos que examinamos não traz referências ao modelo, inclusive em trabalhos destinados a rever os modelos de administração de caixa mais conhecidos, como Villalba e Sousa (2001). Acreditamos que o uso do modelo de Golden *et al.* (1979) pode trazer novas contribuições ao problema de gerenciamento do fluxo de caixa, devido às suas características de eficiência e flexibilidade.

Golden *et al.* (1979) aperfeiçoaram o modelo de gestão do caixa de Srinivasan (1974) de duas formas:

1. por meio da eliminação das objeções colocadas pelos autores no que tange à capitalização dos juros obtidos com a aplicação dos ativos e ao reinvestimento desses juros

2. por trazerem maior apelo visual ao problema, em sua formulação da gestão do caixa como um problema de fluxo em redes que visa à maximização do retorno ao final do período de planejamento.

Os autores concluíram que o modelo criado conferia flexibilidade e eficiência à solução da questão. Além do que, para Crum *et al.* (1979), a habilidade de estabelecer uma representação visual do problema também facilita a comunicação e o entendimento entre os envolvidos com a questão.

As objeções apontadas ao trabalho de Srinivasan (1974) foram superadas do seguinte modo: a capitalização dos juros e o reinvestimento dos rendimentos foram considerados no modelo pela inserção dos multiplicadores nos arcos da rede.

Golden *et al.* (1979) consideraram o problema da gestão do caixa como um tipo específico de programação linear e fluxo em redes, conhecido como "problema de redes com ganhos e perdas", nome derivado das redes de dutos com perda de fluxo devido a vazamentos, ou das redes de processos de manufatura que ganham fluxo devido a certas reações químicas.

O tipo específico de rede que fornece a estrutura para a formulação do problema de gestão do caixa de Golden *et al.* (1979) é uma rede $G = (N, A, W)$, que consiste em um conjunto de nós N, um conjunto de arcos A, cada arco de A ligando dois nós de N, e os pesos dos arcos ou multiplicadores dados pela matriz $W = [w(i, j)]$ (Golden *et al.*, 1979).

Dentro da abordagem de fluxos em rede proposta pelos autores, esses multiplicadores indicam as perdas e os ganhos. No fluxo de caixa, essas perdas e ganhos são, respectivamente, as taxas de conversão entre os ativos e os rendimentos dos juros, ou seja, temos a remuneração do dinheiro investido como fator ganhador de fluxo e a conversão entre ativos sendo objeto da perda de fluxo financeiro.

Ao formularem o problema por meio de uma rede com ganhos e perdas, Golden *et al.* (1979) permitiram que os arcos na rede tivessem multiplicadores específicos atuando no aumento ou no decréscimo do fluxo no arco: se o multiplicador >1, há ganho de fluxo no arco; se o multiplicador <1, há perda de fluxo no arco (Silva Neto, 2002). No fluxo de caixa, essas perdas e ganhos são, respectivamente, as taxas de conversão entre os ativos e os rendimentos dos juros

Apresentamos o modelo básico desenvolvido por Golden *et al*. (1979) para a solução do problema de gestão do caixa: dado um número n de períodos de tempo, com possibilidade de terem durações diferentes, e várias categorias de ativos apresentando níveis de liquidez diversos, busca-se a maximização do retorno no período planejado final. A seguir estão contemplados apenas dois ativos – sem perda de generalidade – para que a explicação seja facilitada:

- o ativo x é utilizado por motivos transacionais, por exemplo, como dinheiro;
- o ativo y é, por exemplo, uma aplicação financeira facilmente convertida em dinheiro, contudo há custo envolvido na conversão.

Especificações do modelo básico

1. as duas categorias de ativos serão tratadas como ativos x e y, sendo que o ativo x apresenta maior liquidez que o ativo y;
2. os desembolsos do caixa são realizados somente com o ativo x, já que apenas o ativo x é aceito como meio de troca;
3. o custo unitário de retenção ou custo de oportunidade para o ativo x supera o custo unitário de retenção do ativo y;

4. as entradas e as saídas relativas ao ativo *x*, em cada período de tempo, são determinísticas e conhecidas por antecipação;

5. o saldo inicial do ativo *y*, diz-se y_0, é também conhecido;

6. os ativos *x* e *y* podem ser convertidos um no outro. Existem custos unitários de conversão envolvidos;

7. as conversões são instantâneas no início do período;

8. todas as transações ocorrem no início de cada período e os retornos são obtidos no final de cada período.

Na formulação do modelo básico do problema, foram usados períodos de igual duração. Porém o modelo de Golden *et al.* (1979) permite que sejam variadas as durações dos períodos de tempo, ajustando-se as respectivas taxas de juros dos ativos proporcionalmente ao período de tempo desejado. A flexibilidade apontada no modelo deriva da possibilidade de inclusão de períodos de tempo com diferentes durações, aliada à capacidade de contemplar diversos ativos e seus respectivos níveis de liquidez.

Os termos da modelagem de Golden *et al.* (1979) estão descritos:

$\alpha =$ o rendimento dos juros por período gerados pelo ativo *x*;
$\beta =$ o rendimento dos juros por período gerados pelo ativo *y*;
$c_{xy} =$ o custo unitário de conversão do ativo *x* para o ativo *y*;
$c_{yx} =$ o custo unitário de conversão do ativo *y* para o ativo *x*;
$x_0 =$ o saldo do ativo *x* ao início do primeiro período de tempo *t*, mas após a conclusão das transações de conversão;
$y_0 =$ o saldo do ativo *y* ao início do primeiro período de tempo *t*, mas após a conclusão das transações de conversão;
$e_t =$ o suprimento do ativo *x* no período *t*;
$s_t =$ a demanda do ativo *x* no período *t*;

Se a escolha for por períodos de durações diferentes, os rendimentos com as taxas de juros dos ativos ajustadas proporcionalmente ao período de tempo desejado serão então, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ para os ativos *x* e *y*, respectivamente, no período *t*.

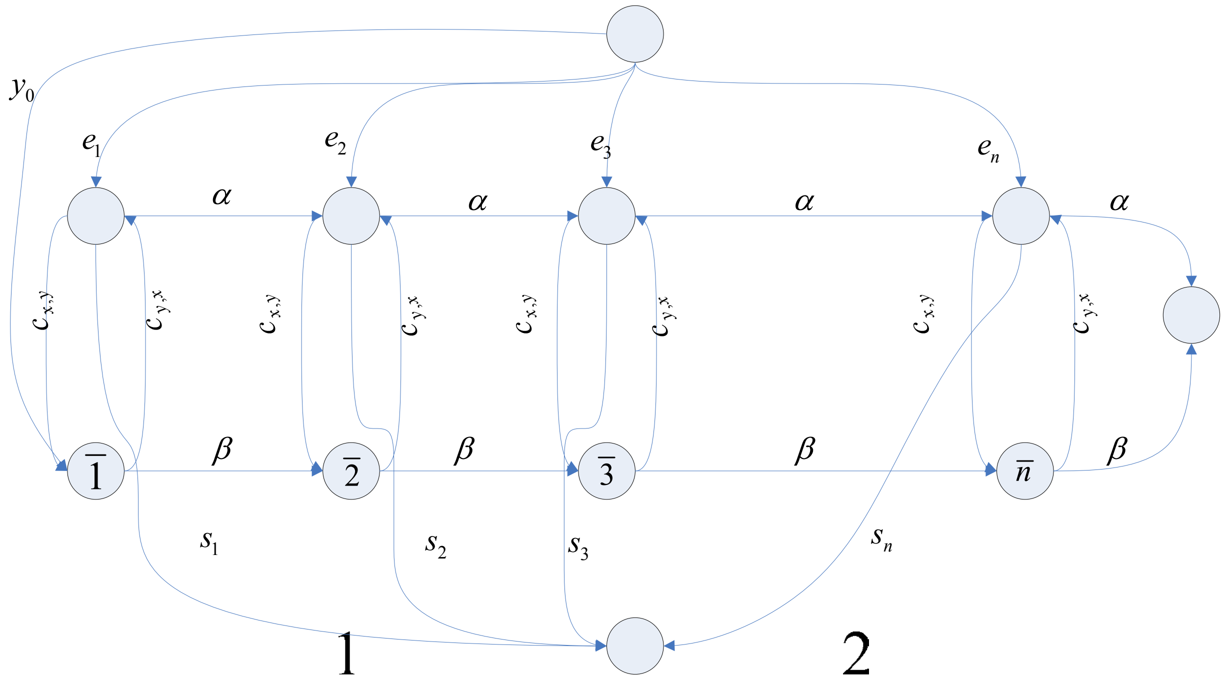


Figura 3.1 - A rede básica

Neste exemplo da figura 3.1, $N = \left\{S, T, Z, 1, 2, ..., n, \bar{1}, \bar{2}, ..., \bar{n}\right\}$. O nó S é um nó de suprimento; o nó T é um nó terminal. O nó Z é um nó objetivo, no sentido de que o objetivo é maximizar o fluxo dentro deste nó. Os nós numerados t e $\bar{t}$ significam o início do período de tempo t para os ativos x e y, respectivamente. Suprimentos e demandas são entradas para o modelo e sua colocação na rede indicam fluxos de caixa fixos. Apesar de serem conhecidos em cada período, os suprimentos e as demandas não precisam ser necessariamente constantes de um período para o próximo período; e, em alguns períodos, eles podem ser nulos.

Os arcos da rede conectam os nós nas direções especificadas. Em geral, os arcos horizontais são a indicação de que os fundos estão aplicados em um dado ativo por um período de tempo específico, e os arcos verticais representam a conversão dos fundos entre vários níveis de liquidez.

A fim de modelar o problema de fluxo de caixa pela abordagem em rede apresentada, precisam ser definidos: o fluxo de entrada, $f(i, j)$, e o fluxo de saída, $g(i, j)$, para cada arco (i, j). Então, $f(i, j)$ e $g(i, j)$ estão relacionados pelo multiplicador positivo $w(i, j)$ como segue:

$$g(i, j) = w(i, j)\, f(i, j) \qquad (1)$$

onde $w(i, j)$ são os multiplicadores já mencionados.

A expressão (1) indica que o fluxo de entrada tem um multiplicador associado que aumenta ou diminui o fluxo no arco e, desse resultado, tem-se o fluxo de saída.

O problema pode ser assim descrito:

$$\text{Maximize } g(n, Z) + g(\overline{n}, Z) \qquad (2)$$

sujeito à

$$\sum_{j \in N^-} f(i,j) - \sum_{j \in N^-} g(j,i) = \begin{cases} e(i) - s(i) \;\; para \; i = 1, 2, ..., n, \\ y_0 \;\; para \; i = \overline{1}, \\ 0 \;\; para \; i = \overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{n}, \end{cases} \qquad (3)$$

$$f(i,j) \geq 0 \; para \, i \in N^-, \; j \in N^- \; (i,j) \in A,$$
$$onde \; N^- = N - S - T. \qquad (4)$$

A função objetivo (2) demonstra que, ao final do horizonte de planejamento, o fluxo que atinge o nó Z deve ser maximizado. As restrições da expressão (3) estabelecem um balanceamento de fluxo de recursos nos períodos, de forma que o total de entrada seja igual ao total de saída nos nós da rede. Já a expressão (4) limita os fluxos de entrada a serem positivos e confirma que os nós pertencem aos conjuntos designados.

É importante notar que se substituirmos $g(i, j)$, a partir da equação (1) em (2) e (3), temos um problema apenas nas variáveis de decisão $f(i, j)$, restando apenas a discussão sobre os multiplicadores $w(i, j)$. Como dissemos, esses multiplicadores indicam perdas ou ganhos devido aos pagamentos de juros ou às taxas de conversão. Esse modelo também foi apresentado e discutido em Arenales *et al.* (2007), onde também foi ilustrado com um exemplo numérico. Com relação à figura 3.1 da rede básica, podemos concluir que:

$$w(i,j)=\begin{cases}1+\alpha \; para\,(i,j)=(t,t+1) \; ou \; (n,Z),\\ 1+\beta \; para\,(i,j)=(\bar{t},\overline{t+1}) \; ou \; (\bar{n},Z),\\ 1-c_{xy} \; para\,(i,j)=(t,\bar{t}),\\ 1-c_{yx} \; para\,(i,j)=(\bar{t},t),\\ 1 \; caso\,contrário.\end{cases} \qquad (5)$$

Extensões em relação ao modelo básico

A partir das definições e dos parâmetros do modelo básico, podem ser incorporados à programação do fluxo em redes outros conceitos comuns à gestão financeira como: saldo mínimo de caixa e capacidade de tomar financiamentos. O saldo mínimo de caixa está ligado às negociações relativas à reciprocidade bancária, e a capacidade de financiar as operações diz respeito à oportunidade do uso de recursos financeiros de terceiros para o capital de giro da empresa.

A formulação matemática tem que incluir um limite mínimo m no fluxo $f(t,t+1)$ sobre os arcos $(t,t+1)$ para tratar o saldo mínimo de caixa. Ainda, supondo que γ indique a taxa de juros do empréstimo de curto prazo, a capacidade de tomar o empréstimo é modelada, em primeiro lugar, pela construção de arcos reversos $(t+1,t)$ presentes na figura 3.2 com os multiplicadores:

$$w(t+1,t)=\frac{1}{1+\gamma} \qquad (6)$$

E daí, um limite máximo u é estabelecido para o montante financiado por $g(t+1,t)$**.** Para o modelo expandido, a formulação matemática consiste em (2), (3) e (4) e

$$f(t,t+1)\geq m, \qquad \text{para } t=1,2,...,n-1, \quad (7)$$

$$\frac{1}{1+\gamma}f(t+1,t)\leq u, \qquad \text{para } t=1,2,...,n-1, \quad (8)$$

$$f(n,Z)\geq m, \qquad \text{para } t=1,2,...,n-1, \quad (9)$$

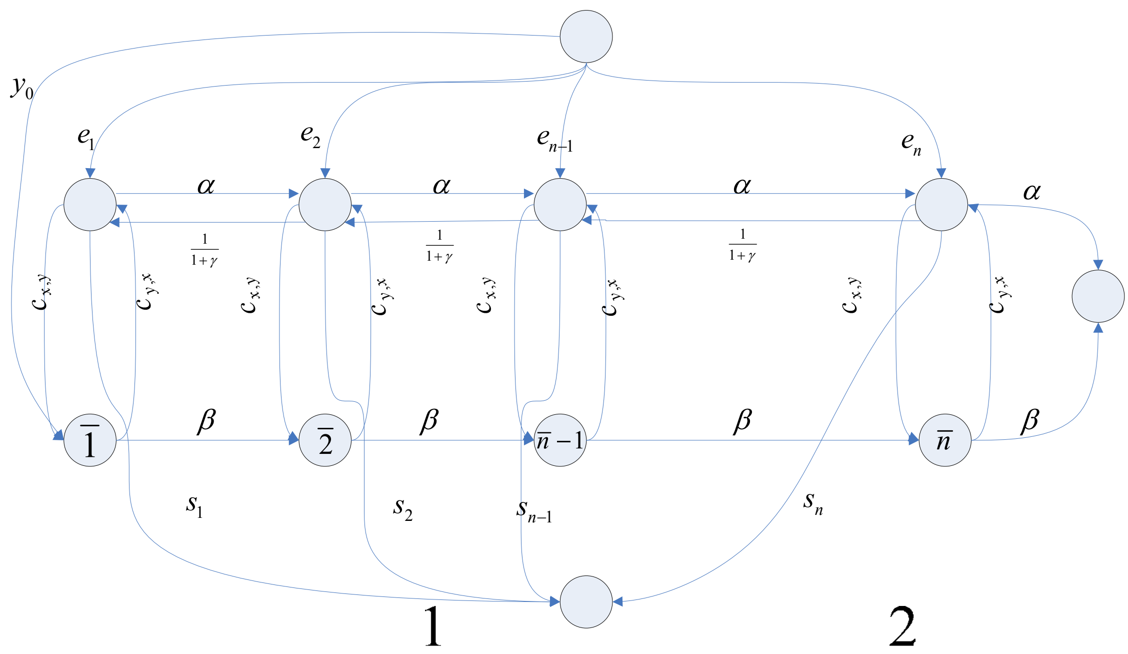


Figura 3.2. - A rede estendida com os arcos reversos indicando os financiamentos

Notar que as restrições (3) do modelo satisfazem, para cada nó da rede, a condição:

fluxo total entrada = fluxo total de saída

Tomando como exemplo o nó 1, as entradas são: e_1, que é o suprimento proveniente do nó *S*; $f_{\bar{1},1}$ que é o fluxo gerado pela conversão do ativo *y* em *x* no período 1; $f_{2,1}$; que é o fluxo gerado pela linha de crédito adiantando recursos do período 2 para o período 1. As saídas do nó 1 são: s_1, que é a saída de caixa destinada ao nó *T*; $f_{1,\bar{1}}$, que é o fluxo gerado pela conversão do ativo *x* em *y* no período 1; $f_{1,2}$, que é o recurso em caixa transferido do período 1 para o período 2. Então, temos a equação de equilíbrio de fluxo para o nó 1:

$$e_1 + f_{\bar{1},1} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) f_{2,1} = f_{1,2} + f_{1,\bar{1}} + s_1 \qquad \text{(nó 1)}$$

Mesmo tendo em mente que toda modelagem é uma abstração da realidade, acreditamos que “a aproximação entre os processos financeiros e a otimização do problema em formato de rede é possível devido à semelhança natural existente entre os sistemas de fluxo de caixa - com suas restrições e inter-relações - e as redes. Modelos em rede são formulados graficamente por meio de redes de fluxo contendo arcos direcionados e nós, e são transferidos em estrutura matemática para serem resolvidos.” (Crum *et al.*, 1979, p.138). Nessa situação, “as premissas assumidas para a modelagem do fluxo de caixa permitem que haja uma aproximação suficientemente boa da realidade, para que o modelo proposto de fluxo de caixa venha a demonstrar ser um instrumento valioso de gestão financeira”, conforme afirmação de Golden *et al*. (1979, p.16).

Convém observar que descontos na quantidade também podem ser incorporados no modelo de fluxos em redes de Golden *et al.* (1979); no entanto, dependendo do tipo de desconto, o modelo resultante é um programa linear por partes ou um programa linear inteiro.

Capítulo 4 – A aplicação do modelo de fluxo em rede aos processos de fluxo de caixa em uma empresa agroindustrial

Nesse capítulo, testamos a aderência do modelo de Golden *et al.* (1979) no planejamento financeiro ambientado em caso real. Verificamos que a situação prática estudada, em que houve a aplicação direta do modelo original, trata-se de uma atividade operacional e diária da tesouraria da empresa. A seguir, relacionamos as características estruturais do planejamento financeiro, as especificações do modelo e como aplicá-lo na prática. Depois, comentamos sobre a construção das previsões e o ambiente institucional e organizacional. Partimos, então, para o exemplo numérico e sua representação gráfica na rede de fluxo. Descrevemos os resultados da política de tesouraria, a solução do problema gerada pelo modelo matemático e comparamos as duas soluções (tesouraria e modelo).

Os problemas de planejamento financeiro lidam com a alocação de fundos para alcançar objetivos específicos. No processo de alocação dos recursos financeiros, as opções disponíveis têm que ser analisadas sob diversas perspectivas. Primeiramente, os ganhos potenciais das alternativas de investimento têm que ser avaliados junto com os custos associados às transferências de fundos. Em segundo lugar, as necessidades de caixa têm que ser atendidas, enquanto são corretamente levados em conta os adiantamentos de depósitos futuros e as obrigações a cumprir. Essa situação faz com que um modelo multi-período torne-se necessário (Mulvey e Vladimirou, 1992).

A aplicação prática presente em nosso trabalho de pesquisa integra o estudo de um caso real de uma empresa do setor de agroindústria. Os detalhes da empresa não são descritos neste trabalho por motivos de confidencialidade. A aplicação considera o problema de gestão do caixa como um tipo específico de programação linear e fluxos em redes conhecido como “redes com ganhos e perdas”. É empregado o modelo de Golden *et al.* (1979)

numa situação com todas as características apresentadas por Mulvey e Vladimirou (1992) na definição dos problemas de planejamento financeiro.

Kornbluth e Salkin (1987) afirmam que os modelos financeiros (incluindo o fluxo de caixa), de modo geral, são formados pelos seguintes itens classificados abaixo:

- **variáveis de decisão:** montantes de caixa para investimento em instrumentos financeiros, níveis possíveis de financiamento, pagamentos de dividendos, etc.
- **funções objetivo:** lucros obtidos pelas transações do sistema (a serem maximizados), custos (a serem minimizados), objetivos (a serem atingidos).
- **recursos**: disponibilidades existentes em determinados períodos de tempo, limite de financiamentos, orçamentos, etc.
- **coeficientes tecnológicos**: parâmetros que determinam o modo pelo qual as variáveis de decisão utilizam (ou criam) vários recursos.

Os itens acima descritos integram o conjunto de elementos usados no modelo de gestão do fluxo de caixa estudado a partir dos parâmetros provenientes de uma situação real. Levantamos os dados obtidos da empresa sob análise e, com estes, testamos a aplicabilidade do modelo de fluxo em rede na gestão do fluxo de caixa.

Procedemos com o mapeamento do cenário em que as decisões de fluxo de caixa foram tomadas; são elas: a necessidade de financiamento gerada pelos fluxos de caixa líquidos negativos, o custo do capital expresso pelas taxas de juros praticadas nos períodos, o rendimento proporcionado pelas alternativas de investimento e demais fatores que afetam a gestão do fluxo de caixa.

Como afirmamos anteriormente, a estrutura utilizada no exemplo prático foi aquela de multiperíodos, em que se objetiva maximizar o retorno dos ativos no nó terminal da rede. A meta é, portanto, maximizar o fluxo que chega ao nó terminal da estrutura do fluxo de caixa em rede, em uma aplicação direta do modelo de Golden *et al.* (1979).

4.1 – Dois ativos e financiamento

O planejamento dos recursos financeiros da empresa é uma ação proporcionada pelo fluxo de caixa. Planejar tais meios financeiros, tendo como base as projeções do fluxo de caixa, é atividade da tesouraria do departamento financeiro da empresa estudada. O fluxo de caixa é projetado estimando-se as entradas de caixa, decorrentes de vendas e outras receitas, e as saídas de caixa resultantes das despesas operacionais e outros gastos, ambas determinadas por técnicas de previsão. Havendo excesso de caixa, pode-se optar por investi-lo no mercado financeiro e, ao contrário, havendo falta de recursos, a empresa pode negociar empréstimos junto aos financiadores.

Observamos que um dos objetivos do gestor, ao projetar o fluxo de caixa da companhia, é antecipar-se nas prováveis faltas de fundos e poder estudar as alternativas disponíveis para compor essas reservas. As opções de geração de caixa envolvem certas operações financeiras, como, por exemplo: o uso de linhas de crédito, os empréstimos a prazo, o desconto de duplicatas a receber, a antecipação de receitas via desconto aos clientes e a postergação de pagamentos aos fornecedores (essa opção financeira pode ser incorporada no modelo Golden *et al.* (1979), ao incluir-se, por exemplo, uma restrição de penalidade pelo atraso no pagamento). Com o resultado da análise dessas opções, é feita a escolha da melhor alternativa de financiamento. Por outro lado, ao identificar excessos de recursos financeiros nas projeções, o gestor do fluxo de caixa está habilitado a examinar previamente as possibilidades de aplicação desses excedentes.

Segundo Sanvicente e Santos (2000), a escolha das alternativas de financiamento e de aplicação de recursos financeiros deve estar compatibilizada aos interesses da empresa e a sua política de negócios.

No ambiente econômico-financeiro em que opera a empresa estudada, as entradas de caixa derivam das vendas a curto prazo a outras companhias industriais do mesmo segmento, que adquirem matéria-prima para seus respectivos processos operacionais. A regularidade dos pedidos dos clientes permite a determinação dos valores a receber com grande acuracidade: sua política de vendas e seus prazos de recebimento determinam as entradas de caixa com elevado grau de certeza.

Wright (1987) propõe considerar as informações existentes na base de faturas emitidas como fator que pode influenciar a acuracidade das previsões das entradas do fluxo de caixa. O autor faz também considerações sobre a relação existente entre as alterações nas taxas de juros de mora cobradas por pagamentos em atraso e a distribuição do atraso no recebimento das faturas, afirmando que as taxas de juros afetam essa distribuição. Comparando as propostas de Wright (1987) com a situação real estudada, podemos afirmar que as informações sobre as faturas emitidas são o ponto de partida para a previsão dos valores a receber. Quanto aos juros incidentes sobre o atraso no pagamento, entendemos que esse aspecto não é relevante, pois, na ampla maioria dos casos práticos, os vencimentos são cumpridos pelos clientes.

Com relação às saídas de caixa, não existe dificuldade em projetá-las, já que a negociação com os fornecedores tem prazos definidos em contratos.

Aguiar (1999, p.129), ao falar sobre os sistemas agroindustriais brasileiros (SAGs), lembra que "os SAGs envolvem diversos estágios de transformação e adição de valor a mercadorias agropecuárias, interligados por uma série de transações" . Os SAGs genéricos são aqueles cuja matéria-prima é pouco específica e um exemplo de transação desse sistema são os contratos para entrega futura de *commodities*. Esses contratos podem ser negociados no âmbito das bolsas de mercadorias ou diretamente entre compradores e vendedores. Em três categorias, podem ser enquadrados os contratos para entrega futura: contratos futuros, contratos a termo e contratos de opções. As características de cada tipo de contrato possibilitam o desempenho de diferentes funções no processo de comercialização agrícola. Na celebração do contrato a termo definem-se o preço, as características, a quantidade do produto e a entrega (o momento e o local).

Tais contratos a termo geram os vencimentos a pagar para que a tesouraria da companhia estudada possa efetuar suas programações. Os outros principais desencaixes são compromissos com data de liquidação conhecida. Portanto, entendemos que a opção por um modelo de gestão de caixa determinístico atende às condições reais da empresa.

4.2 – Dados empíricos

Os fluxos líquidos de caixa apresentados na figura 4.1 integram o estudo de um caso real. Os dados numéricos foram intencionalmente distorcidos para a preservação da confidencialidade da fonte.

Por simplicidade, a apresentação dos valores monetários é feita em milhares de reais. As taxas de juros utilizadas têm como base os dados da Agência Estado para o período de janeiro/2005.

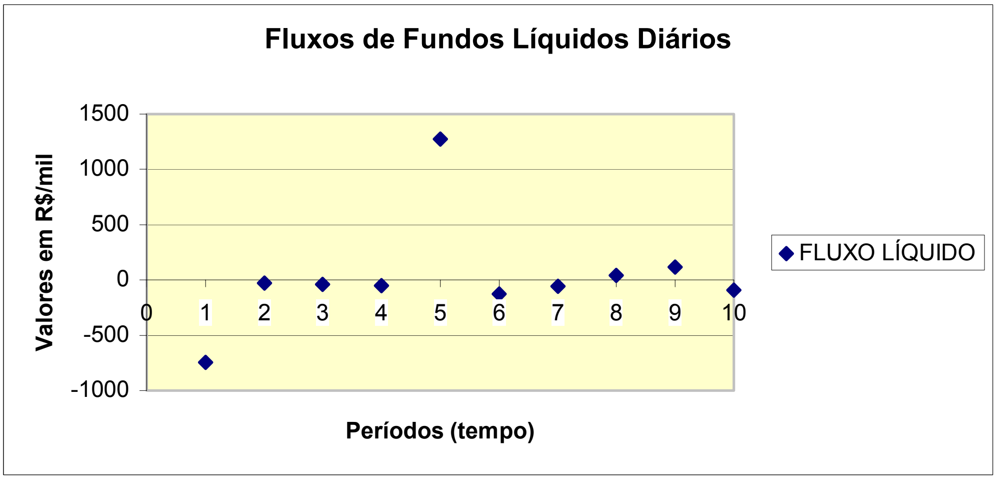


Figura 4.1 – Fluxos de fundos líquidos diários. Gráfico adaptado de Villalba e Sousa (2001)

Trouxemos como exemplo para o nosso estudo um fluxo de caixa previsto, inspirado numa situação real, cujos períodos estão detalhados na tabela 4.1.

TABELA 4.1 – Fluxos de fundos líquidos diários

Período	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Entradas	148	49	142	140	1.429	304	37	213	177	415
Saídas	892	78	180	192	154	429	93	173	60	507
Líquido	-744	-29	-38	-52	1.276	-125	-56	39	117	-92

O exemplo em questão pode ser representado no formato usual da literatura financeira conforme figura 4.2:

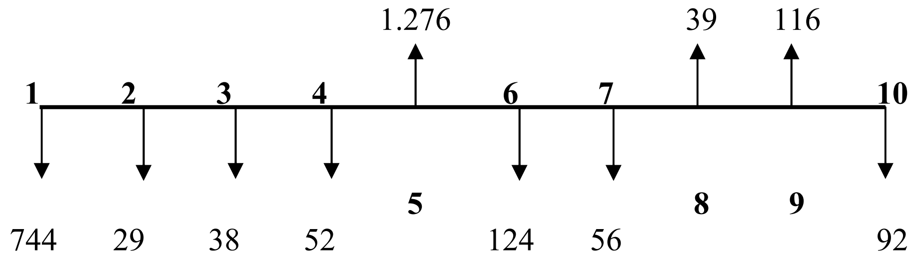


Figura 4.2 - Fluxo de caixa com 10 períodos

O horizonte de planejamento envolve 10 períodos (n = 10 dias) e o objetivo definido é maximizar o fluxo de caixa ao final do horizonte de planejamento, ao mesmo tempo em que são atendidos os compromissos financeiros nos devidos vencimentos. O disponível da empresa apresenta a seguinte composição de ativos no período t_0 em milhares de reais: conta corrente, x_0, com saldo de 1.994 e Certificado de Depósito Bancário (CDB), y_0 , com saldo de 2.860.

Existe ainda uma linha de crédito aprovada, k, de 1.000 para eventuais coberturas de *deficits* de caixa. Assumindo-se que, uma vez tomado o financiamento, o pagamento de principal e juros deva ocorrer no período imediatamente posterior. Assim sendo, as opções existentes para a movimentação financeira desse horizonte de planejamento são: manter saldo em conta corrente, destinar fundos à aplicação financeira e utilizar a linha de crédito para cobertura de fluxos de caixa líquidos negativos.

TABELA 4.2 – Valores dos parâmetros usados no estudo do caso

Ativo ou Financiamento	Saldo Inicial (R$ mil)	Taxas de Juros por período	Limite inferior ou superior
Conta Corrente	$x_0 = 1.994$	Não rende.	$x_i \geq 0$
Certificado Depósito Bancário	$y_0 = 2.860$	$\beta = 0.00056$	$y_i \geq 0$
Linha de crédito	Não há.	$\gamma = 0.00089$	$\frac{1}{1+\gamma} f(t+1,t) \leq 1.000$

4.3 – A estrutura de rede para o exemplo

Na figura 4.3, ilustrativa do exemplo multi-período estudado, podemos verificar que as entradas de caixa estão posicionadas nos arcos que partem do nó S - que é um nó de suprimento – em direção aos respectivos nós do ativo *x* em cada período: e_t diz respeito à entrada de caixa do período *t*, *t* = 1,...,10.

Similarmente, as saídas de caixa posicionam-se nos arcos que saem dos nós do ativo *x* em cada período e direcionam-se ao nó T - que é um nó terminal - sendo s_t a saída de caixa do período *t*, *t* = 1,...,10.

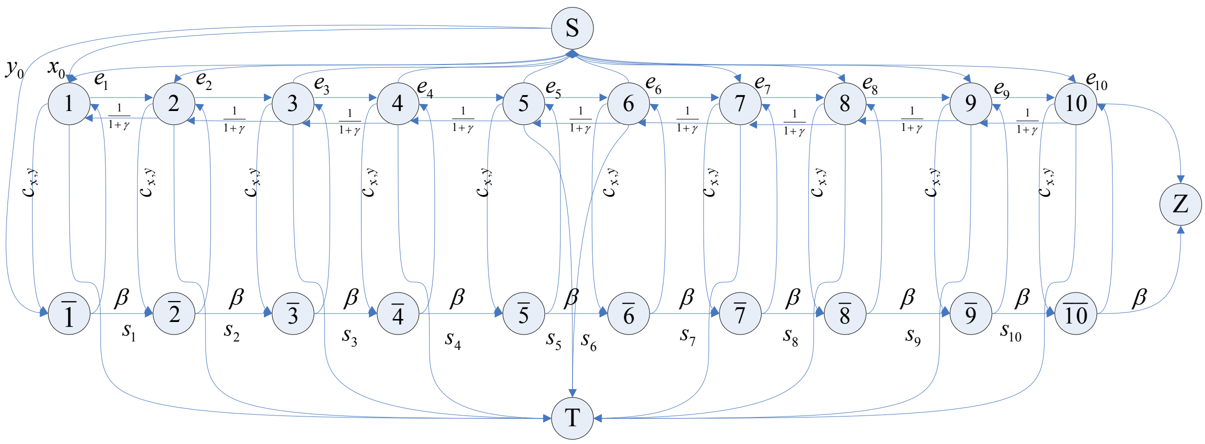


Figura 4.3 – Rede de fluxo para o caso estudado

Suprimentos e demandas são parâmetros de entrada para o modelo e sua colocação na rede indica fluxos de caixa fixos (Golden *et al.*, 1979). Todas as transações devem ocorrer no início do período a que estão ligadas, quer sejam entradas e saídas de caixa ou aquelas representadas pelos arcos horizontais e verticais. Os arcos horizontais apresentam a movimentação de recursos relativa a um ativo específico. Os nós numerados de 1 a 10 dizem respeito ao ativo *x* e os nós indicados com $\overline{1}$ a $\overline{10}$ referem-se ao ativo *y*.

No exemplo que analisamos, para a movimentação de fundos do ativo *x* do período 1 para o período 2, não há remuneração financeira. Então, o ativo *x* não oferece remuneração. Na direção contrária, ou seja, trazer fundos do período 2 para o período 1, custa 0,089% ao dia, $\frac{1}{1+\gamma} f(t+1,t)$. Essa taxa representa o custo diário pelo uso da linha de crédito, já que está se trazendo recursos do futuro para o presente. A linha de crédito é simbolizada pelos arcos reversos entre os períodos. E assim sucessivamente para os demais períodos do ativo *x*.

A adoção de um limite mínimo de caixa pode ser útil em, pelo menos, duas situações: surgimento de desembolsos inesperados e instrumento de reciprocidade bancária. Esta modificação no modelo básico foi considerada em Golden *et al.* (1979), mas não considerada aqui porque a tesouraria da empresa não impôs um limite mínimo de caixa.

A movimentação horizontal ligada ao ativo *y* rende 0,056% ao dia quando os arcos partem de um período ao outro. Essa taxa, β, representa o rendimento diário do CDB líquido dos impostos.

A conversão entre os ativos pode ser visualizada pelos arcos verticais que ligam os nós do mesmo período de tempo. As conversões entre ativos são as aplicações e os resgates. Apenas a movimentação no sentido do ativo *x* para o ativo *y* apresenta o custo de conversão, C_{xy}, equivalente aos 0,38% da Contribuição Provisória sobre Movimentação Financeira (CPMF). Fica claro, portanto, que a CPMF é cobrada na aplicação financeira e não no resgate de fundos de determinado ativo para a conta corrente.

Convém observar que este exemplo foi analisado em 2007, sob um ambiente econômico-financeiro ainda com a CPMF em vigor. Recentemente, as operações do caixa estão sujeitas ao aumento ocorrido na alíquota do Imposto sobre Operações Financeiras (IOF), que foi de zero para 0,38%. Note que o modelo pode ser facilmente adaptado para considerar o IOF nos arcos reversos, além do custo da linha de crédito.

A função objetivo é maximizar os fluxos de recursos que entram no nó *Z* após a movimentação financeira presente nos 10 períodos. Portanto, os fluxos de recursos financeiros que partem tanto do nó 10, quanto do nó $\overline{10}$ - ambos em direção ao nó *Z* - devem ser maximizados. Logo, as variáveis de decisão são:

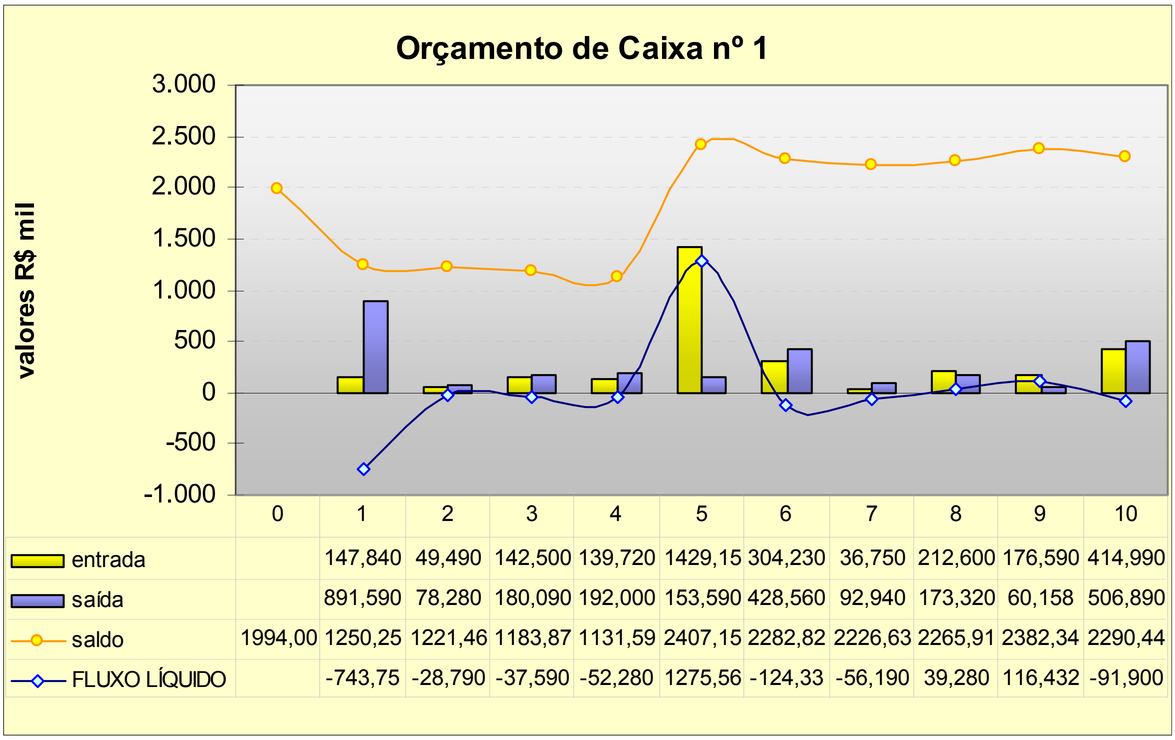
$f_{i,j}$ fluxo de recursos financeiros que partem do nó *i* para o nó *j*.

A expressão (3) apresentada no capítulo anterior deve ser re-escrita de modo a incluir o saldo inicial , x_0, nas entradas do nó 1:

$$\sum_{j \in N^-} f(i,j) - \sum_{j \in N^-} g(j,i) = \begin{cases} e(i) - s(i) + x_0 \; para \; i = 1 \\ e(i) - s(i) \; para \; i = 2, ..., n, \\ y_0 \; para \; i = \overline{1}, \\ 0 \; para \; i = \overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{n}, \end{cases}$$

Os respectivos fluxos líquidos de caixa previstos para cada período podem ser positivos, negativos ou zero e estão representados na figura 4.4, que apresenta também o saldo hipotético do ativo *x*, caso não haja conversão de ativos.

Sendo o fluxo líquido de caixa negativo, a necessidade de caixa deve ser atendida por meio das opções disponíveis: saldo anterior em caixa, resgate de aplicação financeira e/ou linha de crédito.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
entrada		147,840	49,490	142,500	139,720	1429,15	304,230	36,750	212,600	176,590	414,990
saída		891,590	78,280	180,090	192,000	153,590	428,560	92,940	173,320	60,158	506,890
saldo	1994,00	1250,25	1221,46	1183,87	1131,59	2407,15	2282,82	2226,63	2265,91	2382,34	2290,44
FLUXO LÍQUIDO		-743,75	-28,790	-37,590	-52,280	1275,56	-124,33	-56,190	39,280	116,432	-91,900

Figura 4.4 – Orçamento de caixa n.1

O caso 1 com o fluxo de caixa de 10 períodos e 2 ativos (x e y) está descrito no modelo matemático estendido a seguir:

$$\max f_{10,Z} + (1+\beta) f_{\overline{10},Z}$$

s.a.

$$x_0 + e_1 + f_{\bar{1},1} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) f_{2,1} = f_{1,2} + f_{1,\bar{1}} + s_1 \qquad \text{(nó 1)}$$

$$\mathrm{y}_0 + (1 - c_{x,y}) f_{1,\bar{1}} = f_{\bar{1},\bar{2}} + f_{\bar{1},1} \qquad \text{(nó } \bar{1}\text{)}$$

$$e_2 + f_{1,2} + f_{\bar{2},2} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) f_{3,2} = f_{2,3} + f_{2,1} + f_{2,\bar{2}} + s_2 \qquad \text{(nó 2)}$$

$$(1+\beta) f_{\bar{1},\bar{2}} + (1 - c_{x,y}) f_{2,\bar{2}} = f_{\bar{2},\bar{3}} + f_{\bar{2},2} \qquad \text{(nó } \bar{2}\text{)}$$

$$\ldots$$

$$e_{10} + f_{9,10} + f_{\overline{10},10} = f_{10,Z} + f_{10,9} + f_{10,\overline{10}} + s_{10} \qquad \text{(nó 10)}$$

$$(1+\beta) f_{\bar{9},\overline{10}} + (1 - c_{x,y}) f_{10,\overline{10}} = f_{\overline{10},Z} + f_{\overline{10},10} \qquad \text{(nó } \overline{10}\text{)}$$

$f(i, j) \geq 0$ para todo i, j.

4.4 – Os resultados da política de tesouraria para a situação real

As práticas usuais de tesouraria no exemplo real que estudamos dão a seguinte destinação aos recursos financeiros nos fluxos dos dez períodos em análise. Temos os quatro primeiros fluxos de caixa líquidos negativos e saldo inicial em volume que supera o fluxo total líquido dos quatro primeiros períodos, isto é, saldo inicial = 1.994 > 862 = 744 (período 1), 29 (período 2), 38 (período 3) e 52 (período 4). Contudo, não são aplicados os volumes excedentes na totalidade de 1.250 proveniente do saldo inicial do caixa (1.994) abatido o fluxo líquido do período 1 (744), que seria a aplicação máxima possível ao final do período 1.

O motivo de não aplicar o montante de 1.250 na íntegra deve-se à existência de custo de conversão do ativo *x* para o ativo *y* – a CPMF de 0,38% sobre o valor aplicado - que inviabiliza aplicar recursos que terão de ser resgatados em um prazo inferior a sete períodos, conforme demonstrado na figura 4.5.

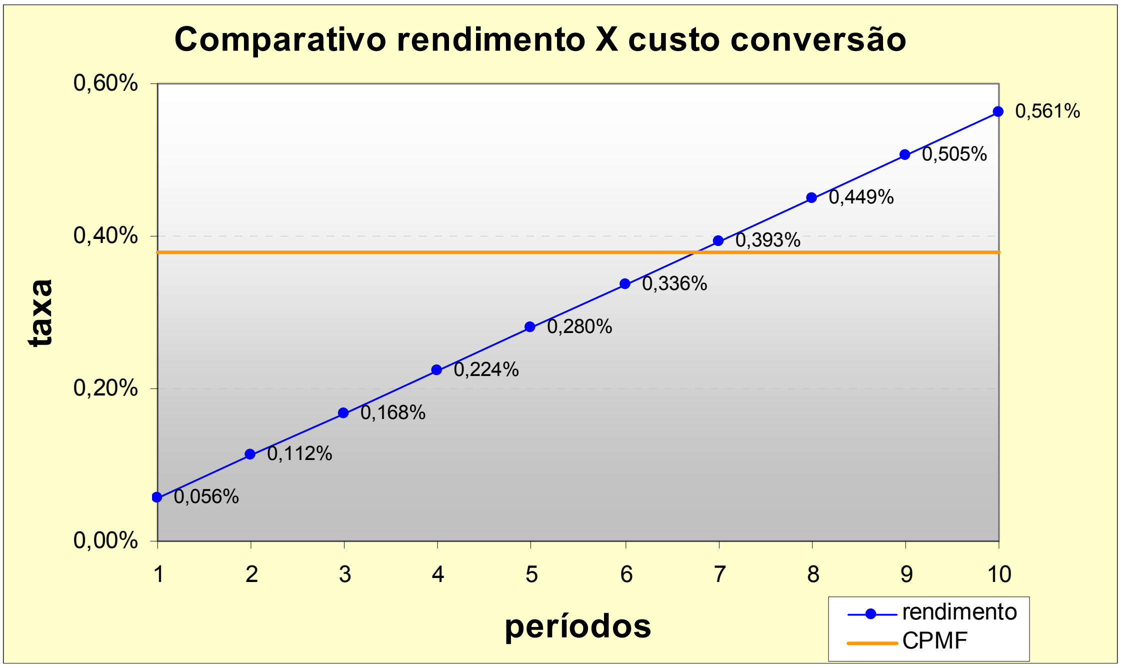


Figura 4.5 – Comparativo rendimento X custo de conversão

Assim sendo, a política adotada pela tesouraria da empresa foi a de abater a necessidade de caixa dos próximos 7 períodos do volume a ser convertido do ativo *x* para o ativo *y*.

TABELA 4.3 – Necessidade líquida de caixa dos períodos 1 a 7

período 1	744	
período 2	**29**	
período 3	**38**	total 2, 3 e 4
período 4	**52**	**119**
período 5	-1.276	
período 6	124	
período 7	56	

Já que a necessidade líquida de caixa do período 1 é suprida pelo estoque do ativo *x* e, ainda, que o período 5 apresenta necessidade líquida negativa de caixa, restam para serem supridos os períodos 2, 3 e 4 conforme tabela 4.3. Havendo excesso de recursos financeiros em volume significativo no período 5, não é recomendável converter ativos que estão sendo melhor remunerados do que o ativo *x*, ou seja, não é preciso resgatar uma aplicação feita no período 1, já que sobram recursos no período 5.

Ao analisarmos as necessidades líquidas de caixa de cada período e encontrando um período com necessidade líquida negativa, torna-se então desnecessário levar em conta os 7 períodos, uma vez que não será necessário converter ativos de *y* para *x*. A soma das necessidades líquidas de caixa dos períodos 2, 3 e 4 é de 119. Sendo assim, na tabela 4.4, temos:

TABELA 4.4 – Comparação entre o volume potencial e o volume convertido

Volume potencial para conversão do ativo *x* em *y* ao final do período 1	1.250
Soma das necessidades líquidas de caixa dos períodos 2, 3 e 4	-119
Volume efetivo da conversão de *x* para *y* no período 1	1.132

Examinando os nós relativos ao período 1 na rede de fluxo da figura 4.6, temos o arco vertical indicativo da conversão de ativos. A conversão é do caixa (ativo *x*) para o CDB (ativo *y*) em volume de 1.132 .

Temos que, ao saldo inicial do ativo *y* de 2.860, incorpora-se uma aplicação de recursos de 1.127. O total aplicado equivale aos 1.132 descontados do custo de conversão de 4, $1-C_{xy}$, referente à CPMF. O estoque de *y* totaliza então 3.987 que, remunerados à taxa de 0,056%, chegam ao período 2 a 3.990. O ativo *x*, ao final do período 1, apresenta um saldo de 119. Ao final do período 2, tem 90. Ao final do período 3, tem 52 e termina o período 4 com saldo zero, conforme tabela 4.5.

TABELA 4.5 – Quadro de movimentação de recursos dos períodos 2, 3 e 4

	movimentação	**saldo**
Volume mantido em *x* ao final do período 1		119
Necessidade líquida de caixa do período 2	-29	90
Necessidade líquida de caixa do período 3	-38	52
Necessidade líquida de caixa do período 4	-52	$0
Volume mantido em *x* ao final do período 4		$0

A rede da figura 4.6 demonstra essa movimentação financeira por meio dos arcos horizontais entre os nós 1, 2, 3 e 4; cujas transferências de fundos entre os períodos são: 119, 90 e 52, respectivamente. Como não há estoque de dinheiro ao final do período 4, inexiste arco ligando os nós 4 e 5.

Quanto à aplicação em CDB ilustrada na rede, temos dois arcos de entrada no nó $\bar{1}$: o primeiro proveniente do nó *S* e equivalente ao estoque inicial do ativo; e o outro arco, referente à conversão do caixa no período 1, em que saem 1.132 do nó 1 através de um arco com multiplicador < 1 e há perda de fluxo.

A equação de equilíbrio do nó $\bar{1}$ é

$$\mathrm{y}_0 + (1 - c_{x,y}) f_{1,\bar{1}} = f_{\bar{1},\bar{2}} + f_{\bar{1},1} \qquad (\text{nó } \bar{1})$$

Substituindo os parâmetros pelos valores numéricos da situação real estudada, temos:

$$2.860 + (1 - 0{,}0038)1.132 = 3.987 + 0 \qquad (\text{nó } \bar{1})$$

Não existe transferência de recursos do período 4 para o período 5. A necessidade líquida de caixa negativa do período 5 é de 1.276, sendo esse um volume potencial para a conversão do ativo *x* em y. Contudo, o universo de planejamento termina no período 10 e não há 7 períodos para que o rendimento da aplicação no ativo *y* supere o custo de conversão da CPMF, conforme figura 4.5. Ou seja, uma aplicação financeira no período 5 seria lucrativa no período 12, caso houvesse tal período. Pela ausência de arcos verticais de conversão entre ativos na rede de fluxo da figura 4.6, podemos comprovar que não há aplicação em CDB nos nós 5 a 10.

O volume de recursos existente ao final do período 5 é usado para suprir a demanda dos períodos seguintes. Conforme tabela 4.6, os próximos períodos a demandarem recursos são os períodos 6 e 7 cuja necessidade líquida de caixa é positiva.

TABELA 4.6 – Quadro de movimentação de recursos dos períodos 6 e 7

	movimentação	Saldo
Volume mantido em *x* ao final do período 5		1.276
Necessidade líquida de caixa do período 6	-124	1.151
Necessidade líquida de caixa do período 7	-56	1.095

Na rede de fluxo da figura 4.6 , vemos os arcos horizontais ligando os nós 5, 6, 7, 8, 9 e 10; cujas transferências de fundos entre os períodos são: 1.276, 1.151, 1.095, 1.134 e 1.251, respectivamente.

O ativo *x*, ao final do período 6, apresenta um saldo de 1.151. Ao final do período 7, tem 1.095. Os períodos 8 e 9 apresentam necessidade líquida de caixa negativa de 39 e 116, respectivamente. Já o período 10, tem necessidade líquida de caixa positiva de 92. Na tabela 4.7, os períodos 8, 9 e 10 apresentam como saldo final o acumulado de suas necessidades líquidas de caixa:

TABELA 4.7 – Quadro de movimentação de recursos dos períodos 8, 9 e 10

	movimentação	Saldo
Volume mantido em *x* ao final do período 7		1.095
Necessidade líquida de caixa do período 8	39	1.134
Necessidade líquida de caixa do período 9	116	1.251
Necessidade líquida de caixa do período 10	-92	1.159
Volume mantido em *x* ao final do período 10		1.159

O estoque de *y* não é movimentado a partir do período 5. O estoque de *y*, remunerado à taxa de 0,056% por período, chega ao final do horizonte em análise totalizando 4.010. O nó *Z* é atingido por meio do ativo *x* com 1.159 e pelo ativo *y* com 4.010, totalizando 5.168,527. A movimentação financeira gerada pela prática de tesouraria pode ser visualizada através dos fluxos na rede da figura 4.6:

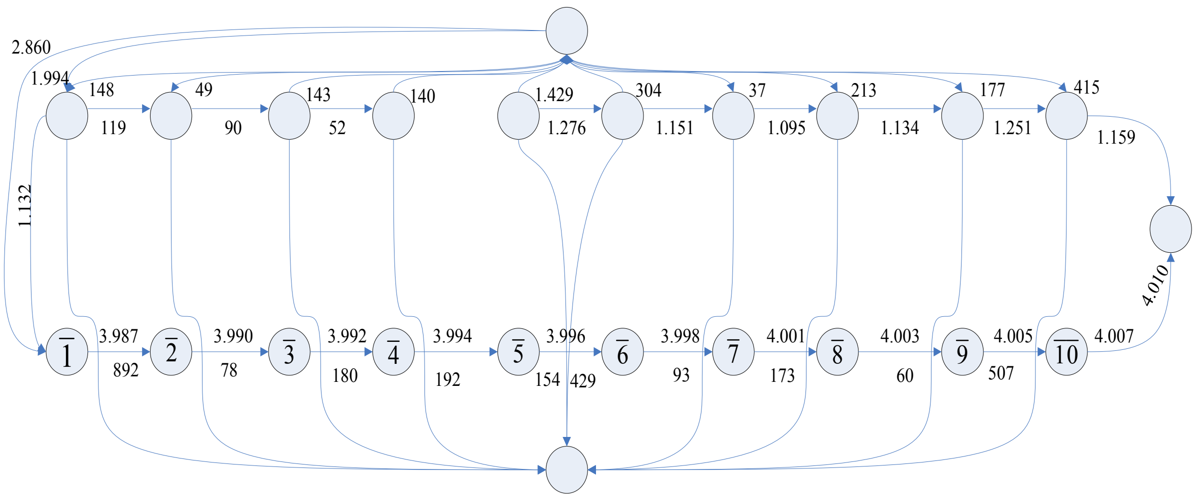


Figura 4.6 – Rede de fluxo com a prática de tesouraria

Note que não há resgate de CDB para o caixa na rede de fluxo da figura 4.6. Temos os arcos horizontais ligando todos os nós de $\overline{1}$ a $\overline{10}$; cujas transferências de fundos entre os períodos representam o carregamento do estoque e o respectivo ganho de fluxo pelo multiplicador >1 nos arcos, isto é, o rendimento obtido pela aplicação financeira dentro do horizonte de planejamento. O fluxo de saída do nó $\overline{1}$ é 3.987 e o arco que atinge o nó *Z* traz

4.010. O nó *Z* também recebe recursos do caixa no valor de 1.159, conforme arco oriundo do nó 10.

É possível concluir que a opção dos gestores do caixa da empresa foi pela não utilização do capital de terceiros, já que a linha de crédito disponibilizada não foi tomada. A capacidade de geração de caixa permitiu que os compromissos financeiros fossem respeitados. Então, a política financeira foi a de, havendo *superavit* de caixa, investir o montante adequado em CDB, levando em conta o custo de conversão entre ativos, no caso a CPMF.

As tabelas 4.8 e 4.9 detalham a movimentação financeira inerente à situação real estudada. A tabela 4.8 apresenta os fluxos de caixa dos ativos *x*, *y*, a conversão entre eles e o resultado do nó *Z* ao final do horizonte de planejamento. A tabela 4.9 demonstra os resultados obtidos por uma visão agregada dos volumes financeiros.

TABELA 4.8 – Fluxo dos ativos *x* e *y* e saldo acumulado dos ativos

	SOLUÇÃO HEURÍSTICA												
t			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**final**
	entrada		148	49	143	140	1.429	304	37	213	177	415	
x	saída		892	78	180	192	154	429	93	173	60	507	
	rendimentos 0%												
	saldo	1.994	118,660	89,87	52,28	**0,00**	1.275,56	1.151,23	**1.095,04**	1.134,32	1.250,75	1.158,85	**1.158,85**
x para k	amortização												
k para x	financiamento												
	juros 25% a.a.												
	saldo												
x para y	aplicações		1.132										
y para x	resgates												
	entrada		2.860										
y	saída												
	rendimentos 16% a.a.			2,233	2,234	2,235	2,237	2,238	2,239	2,240	2,242	2,243	2,244
	saldo		3.987,29	3.989,52	3.991,76	3.993,99	3.996,23	3.998,47	4.000,71	4.002,95	4.005,19	4.007,43	**4.009,675**
x + y	saldo	1.994	4.106	4.079	4.044	3.994	5.272	5.150	5.096	5.137	5.256	5.166	**5.168,53**

TABELA 4.9 – Resultados obtidos por ativo e pelo agregado dos volumes financeiros

RESUMO POR ATIVO		**VISÃO AGREGADA**	
Volume disponível ativo *x*	2.290	Estoque inicial do ativo *x*	1.994
Volume convertido de *x* para *y*	-1.132	Estoque inicial do ativo *y*	2.860
Volume final ativo *x*	1.159	Necessidade total de caixa	296
		Resultado bruto	5.150
Estoque inicial do ativo *y*	2.860		
Volume líquido convertido de *x* para *y*	1.127	Custo conversão ativos	-4
Remuneração ativo y	22	Remuneração ativo y	22
Volume final ativo *y*	4.010		
Volume final ativo *x* + *y*	**5.168,527**	**Resultado líquido**	**5.168,527**

4.5 – Os resultados da modelagem matemática do problema

A solução obtida pelo modelo de programação linear otimiza o fluxo de caixa e considera as relações dos montantes envolvidos, dos custos de conversão e de financiamento, e dos rendimentos com juros entre os períodos do planejamento. As relações entre os parâmetros envolvidos no exemplo são, portanto, intratemporais.

Os montantes são as necessidades de caixa líquidas que podem ser positivas ou negativas e, dependendo de como se configuram, isto é, o período e em que volume ocorrem as necessidades de caixa, permitem que o fluxo seja otimizado em relação às práticas de tesouraria.

O problema de maximização do retorno financeiro ao final do horizonte de planejamento foi resolvido por programação linear através da ferramenta s*olver* que integra o Microsoft Office Excel 2003. Em uma planilha eletrônica, o s*olver* utilizou o método simplex para solucionar o modelo em um computador Pentium 4 1,8 GHz. O tempo computacional aproximado para encontrar a resposta foi de 1 segundo. A opção pelo uso do Excel foi feita por critérios de conveniência e de simplicidade, no entanto, outros *softwares*, computacionalmente mais eficientes, poderiam ter sido utilizados como, por exemplo, a linguagem de modelagem GAMS e o *solver* CPLEX.

Na descrição da movimentação financeira proposta pelo modelo resolvido, verificamos que não são aplicados os volumes excedentes na totalidade de 1.250 - que seria a aplicação máxima possível ao final do período 1 - proveniente do saldo inicial do caixa (1.994), abatido o fluxo líquido do período 1 (744). A rede de fluxo da figura 4.8 indica a conversão de ativos no período 1 através do arco vertical que parte do nó 1 com 1.221 em direção ao nó $\overline{1}$.

O motivo de não aplicar na íntegra o montante de 1.250 não se explica apenas pela existência do custo de conversão do ativo *x* para o ativo *y*, que inviabiliza aplicar recursos que terão de ser resgatados em um prazo inferior a 7 períodos, conforme demonstrado na figura 4.5.

É certo que a CPMF impacta qualquer decisão de aplicação de recursos do ativo *x* para *y*. No entanto, a movimentação financeira gerada pela solução ótima do modelo de fluxo de caixa considerou outros parâmetros que serão descritos adiante. A política adotada foi a de abater a necessidade de caixa dos períodos 1 e 2 do volume a ser convertido do ativo *x* para o ativo *y*. Assim sendo, temos na tabela 4.10:

TABELA 4.10 –Volume potencial X volume convertido - modelagem

Volume potencial para conversão do ativo *x* em *y* no início do período 1	1.994
Necessidade líquida de caixa dos períodos 1 e 2	-773
Volume efetivo da conversão de x para y no período 1	1.221

Temos que o ativo *y*, com saldo inicial de 2.860, recebe uma aplicação de recursos de 1.217. O total aplicado equivale aos 1.221 descontados do custo de conversão de 4 referente à CPMF. O estoque de *y* totaliza então 4.077 que, remunerados à taxa de 0,056%, chegam ao período 2 a 4.079. O ativo *x*, ao final do período 1, apresenta um saldo de 29. Ao final do período 2, tem saldo zero, conforme tabela 4.11.

TABELA 4.11 – Quadro de movimentação de recursos do período 2

	movimentação	**saldo**
Volume mantido em *x* ao final do período 1		29
Necessidade líquida de caixa do período 2	-29	0

A figura 4.8 traz a rede que demonstra essa movimentação financeira por meio do arco horizontal entre os nós 1, e 2; cujo montante de fundos transferidos é 29. Já que não há estoque de dinheiro ao final do período 2, inexiste arco ligando os nós 2 e 3.

Quanto à aplicação em CDB ilustrada na rede, temos dois arcos de entrada no nó $\overline{1}$: o primeiro proveniente do nó *S* e equivalente ao estoque inicial do ativo; e o outro arco, referente à conversão do caixa no período 1, em que saem 1.221 do nó 1 através de um arco com multiplicador < 1 e há perda de fluxo.

Portanto não há transferência de recursos do período 2 para 3. Aqui, ocorre a diferenciação na solução dada pelo modelo ao suprimento da demanda dos períodos 3 e 4, em relação às práticas de tesouraria. A rede de fluxo da figura 4.8 explicita essa diferenciação pela existência dos dois arcos reversos trazendo recursos do nó 5 para o nó 4 e do nó 4 para o nó 3, nos valores de 90 e 38, respectivamente.

A solução ótima do modelo opta por financiar a necessidade de caixa dos períodos 3 e 4. Sabemos que o custo do financiamento é superior ao rendimento obtido pela manutenção de recursos em *y*, 0,089% (custo) e 0,056% (receita). Ainda assim, a solução ótima apresentada foi capaz, tanto de maximizar ganhos financeiros, quanto de atender às restrições impostas pelo problema. A necessidade líquida de caixa do período 3 de 37,590 é financiada com pagamento de 37,623 no período 4, conforme tabelas 4.12 e 4.13, e está representada pelo arco que parte do nó 4 em direção ao nó 3 na rede de fluxo da figura 4.8.

TABELA 4.12 – Quadro de movimentação de recursos do período 3

	movimentação	saldo
Volume mantido em x ao final do período 2		0
Necessidade líquida de caixa do período 2	-38	-38
Linha de crédito k	38	0
Volume mantido em x ao final do período 3		0

A necessidade líquida de caixa do período 4 de 52 é aumentada para 89,903 para pagamento do financiamento do período 3. O financiamento da demanda por caixa atualizada de 4 tem pagamento em 5 de 89,983.

TABELA 4.13 – Quadro de movimentação de recursos do período 4

	movimentação	saldo
Volume mantido em x ao final do período 3		0
Necessidade líquida de caixa do período 4	-52	-52
Pagamento do valor financiado em 3 + juros	-38	-90
Linha de crédito k	90	0

Por conseqüência, ao período 5, é acrescido o compromisso financeiro de quitar o financiamento total 89,983 indicado na tabela 4.14. A rede de fluxo da figura 4.8 confirma essa operação através do arco saindo do nó 5 e atingindo o nó 4.

TABELA 4.14 – Quadro de movimentação de recursos do período 5

	movimentação	saldo
Volume mantido em x ao final do período 4		0
Necessidade líquida de caixa do período 5	1.276	1.276
Pagamento do valor financiado em 4 + juros	-89,983	1.186

Para a análise da viabilidade da opção de financiamento proposta pela solução do modelo a partir do período 3, vamos usar a notação financeira usual para os dois fluxos de caixa envolvidos. Destacamos que houve duas operações conjugadas que encontram-se na figura 4.7: a aplicação financeira e o financiamento.

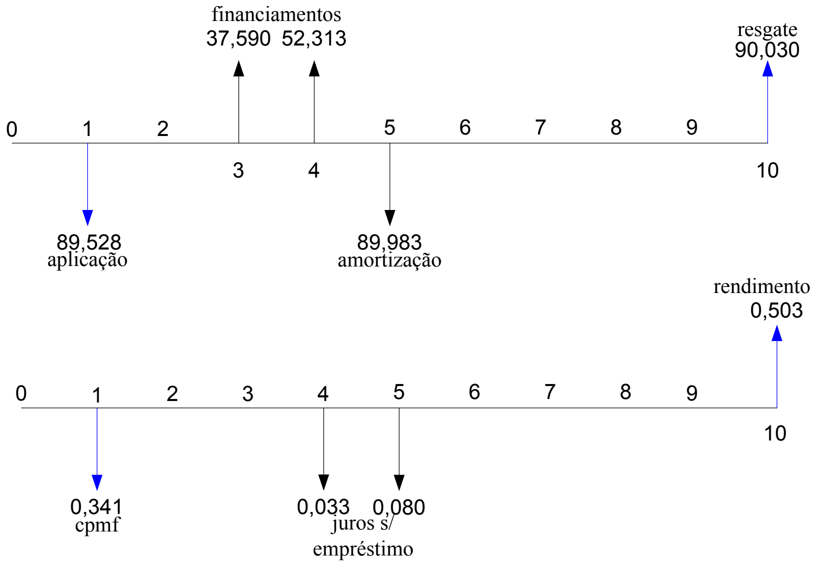


Figura 4.7 – A aplicação financeira e o financiamento

No primeiro fluxo de caixa da figura 4.7 estão dispostos: a aplicação de 89,528 no período 1 e o respectivo resgate[9] de 90,030 no último período; além dos valores financiados nos períodos 3 e 4 com pagamento total no período 5.

O segundo fluxo de caixa da figura 4.7 é derivado do primeiro e temos: no período 1, o custo de conversão entre ativos de 0,341; nos períodos 4 e 5, o pagamento de juros de 0,033 e 0,080, respectivamente. No período 10, o rendimento apresentado pela manutenção dos recursos na aplicação financeira é de 0,503. Somadas as saídas do fluxo de caixa, temos 0,455. Então, foi gerado um retorno financeiro de 0,048 ao final do horizonte de planejamento.

A necessidade líquida de caixa do período 5 permanece negativa após o pagamento do financiamento e é de 1.186, sendo um volume potencial para a conversão do ativo x em y. Contudo, o universo de planejamento termina no período 10 e não há 7 períodos para que o rendimento da aplicação no ativo y supere o custo de conversão da CPMF,

[9] O resgate simboliza o valor futuro da aplicação financeira no período 10. Para o modelo, esse valor integra o estoque do ativo y e não há resgate.

conforme indicado na figura 4.5. Ou seja, uma aplicação financeira no período 5 seria lucrativa no período 12, caso houvesse tal período. O volume de recursos existente ao final do período 5 é usado para suprir a demanda dos períodos seguintes conforme tabela 4.15. Vemos então, na rede de fluxo da figura 4.8, o arco que sai do nó 5 em direção ao nó 6 com o valor de 1.186 e, assim por diante até que o nó *Z* seja atingido, temos: o arco que liga os nós 6 e 7, com 1.061; o arco que liga os nós 7 e 8, com 1.005; o arco que liga os nós 8 e 9, com 1.044; o arco que liga os nós 9 e 10, com 1.161; e o arco que liga os nós 10 e *Z*, com 1.069.

TABELA 4.15 – Quadro de movimentação de recursos dos períodos 6 a 10

	movimentação	saldo
Volume mantido em *x* ao final do período 5		1.186
Necessidade líquida de caixa do período 6	-124	1.061
Necessidade líquida de caixa do período 7	-56	1.005
Necessidade líquida de caixa do período 8	39	1.044
Necessidade líquida de caixa do período 9	116	1.161
Necessidade líquida de caixa do período 10	-92	1.069
Volume mantido em *x* ao final do período 10		1.069

O estoque de *x* totaliza 1.069 após o suprimento das demandas dos períodos 6, 7 e 10 e do incremento de caixa dos períodos 8 e 9. O estoque de *y* não é movimentado a partir do período 1. O estoque de *y* remunerado à taxa de 0,056% por período chega ao final do horizonte em análise totalizando 4.100. O nó *Z* é atingido por meio do ativo *x* com 1.069 e pelo ativo *y* com 4.100 totalizando 5.169. A movimentação financeira gerada pela solução do modelo pode ser visualizada através do fluxo em redes da figura 4.8:

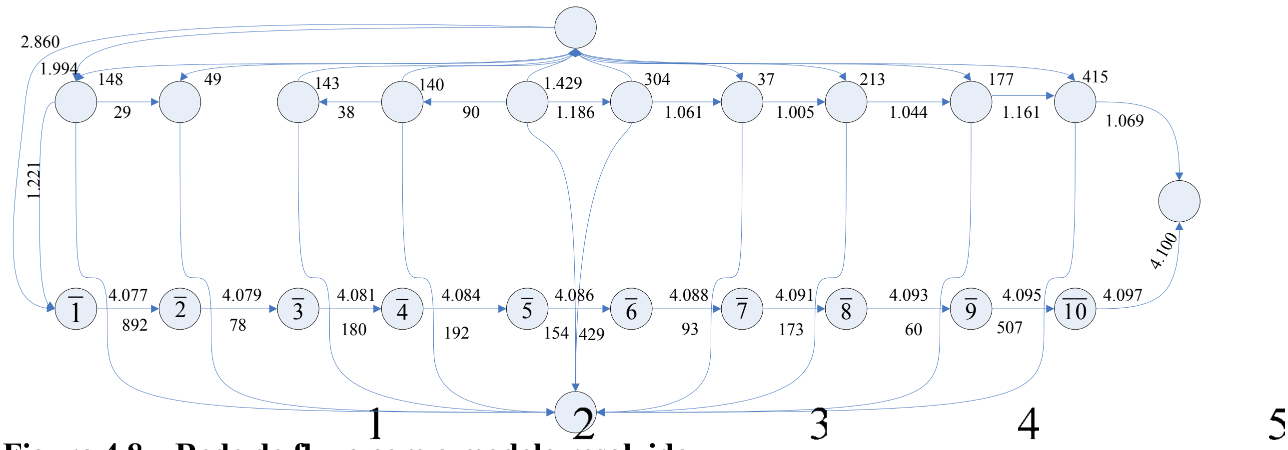


Figura 4.8 – Rede de fluxo com o modelo resolvido

Ao compararmos as movimentações de recursos financeiros geradas pelas duas soluções apresentadas: a da prática de tesouraria (figura 4.6)**,** e a da modelagem matemática do problema (figura 4.8), podemos observar, através do arco vertical que sai do nó 1 para o nó $\overline{1}$, que os valores convertidos do caixa para o CDB, no período 1, são: 1.132, na prática de tesouraria, e, 1.221, com o modelo resolvido. Presente nas duas respostas, a opção de, uma vez aplicados os recursos em CDB, o ativo mais rentável, esses fundos se juntam ao volume inicial y_0, 2.860, compondo um estoque que é carregado até o nó *Z*. Logo, o arco que parte do nó $\overline{10}$ atinge o nó *Z*, com 4.010, na resposta da tesouraria, e 4.100, na solução do modelo em programação linear.

Feitos os comentários relativos à movimentação financeira ligada ao ativo *y* nos dois fluxos em rede, notamos que a diferença de volume aplicado, em torno de 90, é explicada a partir das transferências de fundos no caixa. Os arcos horizontais do ativo *x*, na figura da prática de tesouraria, são todos no mesmo sentido e expressam a passagem de fundos de um período ao outro. Enquanto, na solução do modelo matemático, vemos dois arcos reversos mostrando o uso da linha de crédito do nó 5 para o nó 4 , assim como do nó 4 para o nó 3. Assim sendo, o financiamento disponibilizado permitiu o adicional no volume convertido do ativo *x* para o ativo *y* desde o início do horizonte de planejamento do modelo.

Então, na figura 4.6 do fluxo em rede alusiva à prática de tesouraria, aparece o arco do nó 10 alcançando o nó *Z* com 1.159, esse montante é superior, em aproximadamente 90, em comparação aos 1.069 dispostos no mesmo arco da figura 4.8 do fluxo em rede do modelo resolvido. Em resumo, a tesouraria utiliza-se de recursos próprios e permanece com os 90 em caixa, enquanto o modelo matemático estabelece a aplicação desse montante em CDB do período 1 até o nó final e, quando faltam fundos para atender a demanda por caixa, opta pela linha de crédito, pagando pelo uso de capital de terceiros, demonstrando ser lucrativa a opção feita, já que a soma dos volumes que alcançam o nó *Z* é superior à rotina da tesouraria da empresa.

Os objetivos alcançados na solução apresentada pelo modelo

Podemos fazer as seguintes considerações a cerca dos objetivos alcançados pelo modelo:

- a demanda por caixa foi atendida em todos os períodos;
- a capacidade de geração de caixa foi plenamente utilizada;
- o montante do *superavit* de caixa do período 5 possibilitou o financiamento das necessidades financeiras dos períodos 3 e 4;
- a opção pelo uso do capital de terceiros se mostrou vantajosa pois, embora o custo deste capital tenha sido de 0,089% ao período, a utilização da linha de crédito se deu em uma proporção que tornou essa opção financeiramente viável;
- a política financeira foi a de não consumir o estoque do ativo *y*;

É possível afirmar que o modelo considerou todos os parâmetros envolvidos no problema, quer sejam custos de captação de recursos, receitas com juros pela aplicação financeira, características dos fluxos de caixa e custo de conversão entre ativos. Temos então que a CPMF fez parte dos parâmetros, mas não foi o único critério de decisão.

A análise de outros cenários também poderia ser feita sem maiores dificuldades, por exemplo, alterando-se valores dos multiplicadores dos arcos e das entradas e saídas do caixa, estendendo o horizonte de planejamento para, digamos, n = 30 dias, ou ainda, baseando-se em períodos com durações diferentes cujas taxas de juros sejam proporcionais a estas durações.

As tabelas 4.16 e 4.17 detalham a movimentação financeira inerente à situação real estudada. A tabela 4.16 apresenta os fluxos de caixa dos ativos x, y, a conversão entre eles e o resultado do nó Z ao final do horizonte de planejamento. A tabela 4.17 demonstra os resultados obtidos por uma visão agregada dos volumes financeiros.

TABELA 4.16 – Fluxo dos ativos *x* e *y* e saldo acumulado dos ativos

			SOLUÇÃO ÓTIMA										
t			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**final**
	entrada		148	49	143	140	1.429	304	37	213	177	415	
x	saída		892	78	180	192	154	429	93	173	60	507	
	rendimentos 0%												
	saldo	1.994	28,79	0	0		1.185,577	1.061	1.005	1.044	1.161	1.069	1.068,869
x para k	amortização					37,623	89,983						
k para x	financiamento				37,590	89,903							
	juros 25% a.a.												
	saldo				-37,590	-89,870	0,113	0	0	0	0	0	0
			89,870										
x para y	aplicações		1.221,46										
y para x	resgates												
	entrada		2.860										
y	saída												
	rendimentos 16% a.a.			2,283	2,284	2,286	2,287	2,288	2,289	2,291	2,292	2,293	2,295
	saldo		4.077	4.079	4.081	4.084	4.085,958	4.088	4.091	4.093	4.095	4.097	4.099,706
x + y	saldo	1.994	4.106	4.079	4.081	4.084	5.272	5.149	5.096	5.137	5.256	5.166	**5.168,57**

Confrontando as tabelas 4.8 e 4.16, podemos observar as movimentações financeiras ocorridas, a partir dos parâmetros estabelecidos à esquerda (t, x, k, y). Para cada período, o ativo x tem o saldo final do período anterior como saldo inicial do período em análise; o que é traduzido na figura 4.8 do fluxo em rede pelo arco horizontal cujo montante está sendo levado de um nó ao outro. Estão também demonstradas as entradas e as saídas de caixa. Para se calcular o saldo final do período, os resgates de CDB e os financiamentos da linha de crédito têm que ser considerados junto com as entradas, e, agregam-se aos desembolsos de caixa, as aplicações em CDB e a amortização dos financiamentos. Os saldos finais do caixa da tabela 4.8 são superiores a zero, com exceção do período 4. A aplicação em CDB ocorre em 1, com custo de conversão de 4, e chega líquida ao CDB com 1.127. Enquanto, na tabela 4.16**,** temos demonstrados o valor da aplicação no período 1 e, logo acima, o adicional de 89,87 que integra a aplicação e é calculado por diferença em relação à aplicação do mesmo período no na tabela 4.8. Para verificarmos como a solução do modelo tornou possível aplicar o montante de 89,87, sem deixar de atender à demanda por caixa dos períodos futuros, temos que perceber os financiamentos de 37,59 e 89,90 nos períodos 3 e 4, cujas amortizações de 37,62 e 89,98 aparecem em 4 e 5, respectivamente.

TABELA 4.17 – Resultados obtidos por ativo e pelo agregado dos volumes financeiros

RESUMO POR ATIVO		VISÃO AGREGADA	
Volume disponível ativo *x*	2.290	Estoque inicial do ativo *x*	1.994
Volume financiado de *k*	127,493	Estoque inicial do ativo *y*	2.860
Volume amortizado de *k*	-127,606		
Volume convertido de *x* para *y*	-1.221	Necessidade total de caixa	296
Volume final ativo *x*	1.069	Resultado bruto	5.150
Estoque inicial do ativo *y*	2.860	Custo financiamento	-0,113
Volume líquido convertido de *x* para *y*	1.217	Custo conversão ativos	-4
Remuneração ativo y	23	Remuneração ativo y	23
Volume final ativo *y*	4.100		
Volume final ativo *x* + *y*	**5.168,575**	**Resultado líquido**	**5.168,575**

Os resultados obtidos pela rotina de tesouraria estão descritos na tabela 4.9 em que o volume final do ativo *x* é 1.159 e o estoque final do CDB, 4.010, portanto, o fluxo total que chega até o nó *Z* é 5.169. Ao observamos os resultados obtidos pelo modelo na tabela 4.17, consta como volume final do ativo *x*, 1.069 e o estoque final do CDB, 4.100, totalizando o fluxo que chega até o nó *Z* em 5.169.

Podemos também contrapor os resultados alcançados pelas duas soluções através das tabelas 4.9 e 4.17**,** nos seguintes termos: o resultado bruto é a soma dos estoques iniciais do caixa e do CDB acrescida da necessidade total de caixa que, no caso estudado, elevou o resultado bruto por haver geração de caixa no horizonte de planejamento. Sendo o resultado bruto igual a 5.150 e lembrando que é o mesmo para ambas as políticas adotadas, logo, três outros fatores compõem a diferença nos resultados obtidos. O primeiro fator é o custo de conversão de ativos: 4,300, na prática de tesouraria, e, 4,642, no modelo resolvido. O segundo fator é a geração de receita financeira proporcionada pela aplicação em CDB: 22,385, na prática de tesouraria, e, 22,888, no modelo resolvido. O terceiro fator está presente apenas na modelagem matemática e é o custo do dinheiro tomado, 0,113. Somam-se ao resultado bruto os dois fatores gerados pela política de tesouraria e chega-se a 5.168,527. Enquanto, na modelagem, o resultado bruto acrescido dos três fatores discutidos gera 5.168,575.

4.6 – Análise comparativa das duas soluções

Sabemos que as duas soluções foram capazes de lidar com as restrições de não permitir saldos negativos de ativos e de utilizar a linha de crédito até o limite de 1.000. As práticas de tesouraria na situação real levaram a maximização do fluxo de caixa a 5.168,527 no período avaliado. A solução apresentada pelo modelo de fluxo em redes foi de 5.168,575. Nota-se que o ganho financeiro possibilitado pelo modelo não é numericamente relevante neste exemplo.

Este ganho de 0,048 foi oriundo da política financeira gerada pela solução do modelo de aplicar recursos no ativo *y* do período 1 até o final do horizonte de planejamento.

Os recursos aplicados foram cobertos pela linha de crédito e representaram a necessidade líquida de caixa dos períodos 3 e 4. O fluxo líquido de caixa do período 5 pode absorver as necessidades dos dois períodos anteriores adicionadas do custo de capital pelo financiamento.

No entanto, além do incremento de caixa no resultado final do exemplo estudado, o modelo de fluxo em redes traz reflexões ao gestor do caixa, na medida em que indica opções alternativas para a administração do disponível da empresa. As relações intratemporais existentes no horizonte de planejamento - condição para que haja o ganho financeiro - são:

- saldo inicial do ativo x superior às demandas por caixa dos períodos iniciais $x_0 = 1.944$;
- fluxo líquido positivo no período 5 em volume suficiente para a cobertura das necessidades de caixa de outros períodos;
- aplicação financeira no período 1 - havendo mais de 7 períodos para manter os recursos- de forma que até o final do horizonte de planejamento o rendimento gerado compensou o custo de conversão;

A partir dessas considerações, podemos fazer uma análise mais aprofundada da solução ótima gerada pelo modelo. Para iniciarmos a análise, lembramos que o estoque inicial em x cobre a demanda por caixa do período 1. Temos que a necessidade líquida de caixa dos três períodos anteriores ao período 5 é 119. Então, o excedente de recursos em 5 é suficiente para cobrir o *deficit* de caixa de 2 a 4: 1.276 – 119 = 1.157.

Intuitivamente, surge a questão: por que não converter do ativo x para o ativo y (mais rentável) todo o volume de 119? Passemos ao fluxo de caixa hipotético dessa solução alternativa para explicarmos.

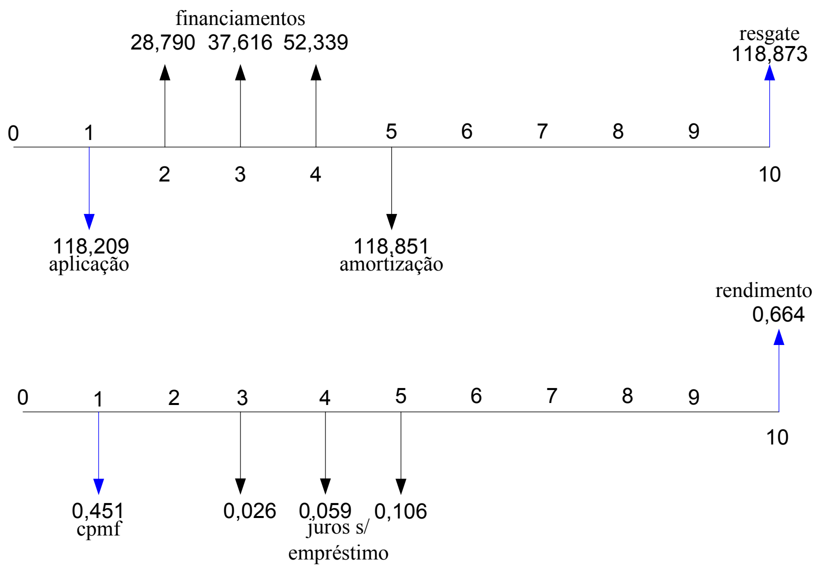


Figura 4.9 – Fluxo da solução alternativa

No primeiro fluxo de caixa da figura 4.9 estão dispostos: a aplicação de 118,209 no período 1 e o respectivo resgate de 118,873 no último período; além dos valores financiados nos períodos 2, 3 e 4 com pagamento total no período 5.

O segundo fluxo de caixa da figura 4.9 é derivado do primeiro e temos: no período 1, o custo de conversão entre ativos de 0,451; nos períodos 3, 4 e 5, o pagamento de juros de 0,026, 0,059 e 0,106, respectivamente. No período 10, o rendimento apresentado pela manutenção dos recursos na aplicação financeira é de 0,664. Somadas as saídas do fluxo de caixa, temos 0,641. Então, foi gerado um retorno financeiro de 0,023 ao final do horizonte de planejamento.

O fluxo de caixa hipotético da solução alternativa inclui a necessidade do período 2 (28,790) no volume aplicado e é capaz de adicionar 0,023 ao retorno financeiro da situação real sob estudo. No entanto, há também um aumento na despesa com juros sob empréstimo, já que o montante financiado aumentou tanto em valor quanto em período de tempo em que o dinheiro ficou emprestado. Portanto, a solução ótima gerada pelo modelo do fluxo em redes é superior, embora o ganho financeiro gerado não seja particularmente significativo no caso deste exemplo.

Para chegarmos a essa conclusão, a partir da solução ótima, analisamos o relacionamento entre as variáveis de decisão e buscamos compreender seu funcionamento. Entendemos que podemos chamar essa compreensão de *insight* no mecanismo do problema.

Notadamente, no exemplo utilizado, foi demonstrado que a utilização da linha de crédito trouxe benefícios à solução do problema, indicando que podem existir situações nas quais é mais vantajoso tomar capital de terceiros e efetuar aplicação financeira. A ocorrência dessas situações em que pode haver maximização do retorno financeiro depende do arranjo existente entre os fluxos de caixa líquidos, os saldos dos ativos e os períodos do horizonte planejamento. Logo, as oportunidades de ganho financeiro estão ligadas às relações intratemporais dos parâmetros envolvidos no processo do fluxo de caixa.

A solução gerada pela prática de tesouraria está ligada a uma regra mais simples de evitar-se o prejuízo de um custo de conversão que não pudesse ser coberto pelo rendimento gerado pela aplicação financeira. Então, não se aplica recursos se não houver ao menos sete períodos de rendimentos previstos. Segue-se a política do ponto de equilíbrio. Já o modelo matemático considera um vasto número de relacionamentos entre as variáveis de decisão. A solução apresentada pelo modelo em programação linear garante:

- que a solução é menos dependente da experiência acumulada dos usuários ou tomadores de decisão, o processo de tomada de decisões torna-se mais sistematizado.
- *insight* no mecanismo das operações, fornecendo uma base para acordos futuros com os parceiros de negócios. Conhecendo as características do fluxo e das relações intratemporais, pode-se buscar melhores condições para a gestão dos ativos da empresa.
- conhecimento profundo dos momentos que apresentam possibilidade de ganho financeiro no fluxo estudado, sendo possível tentar alterações nos

parâmetros: entradas, saídas, períodos, etc.; com o modelo indicando aonde devem ser centrados os esforços.

- visão objetiva dos processos envolvidos no fluxo de caixa, evitando que deixe de ser percebida uma possibilidade de ganho financeiro ou a alavancagem financeira de alguma situação.

Capítulo 5 – Adaptação do modelo de fluxo em rede para caso com programação de amortizações

Nesse capítulo, é apresentada uma adaptação feita ao modelo de Golden *et al.* (1979) para que o gerenciamento financeiro do fluxo de caixa incorpore também o planejamento e o controle da programação de amortizações dos financiamentos tomados pela empresa. As amortizações envolvem o pagamento do principal e dos juros sobre os empréstimos. Ao invés de dias, os períodos estudados equivalem a meses e integram um planejamento tático para a tesouraria.

Vamos discutir quais as alterações necessárias para modificar o modelo de Golden *et al.* (1979) de forma a considerar a programação de amortizações. As observações sobre o modelo, feitas nos capítulos 3 e 4, continuam válidas, com exceção dos arcos indicativos das saídas de caixa, que agora não têm como destino o nó *T*. Acrescentamos, na rede, nós específicos para cada uma das operações de financiamento, cuja programação de amortização é objeto da modelagem. Continua existindo a previsão das entradas do fluxo de caixa, enquanto as saídas do caixa estão destinadas a liquidar as operações de financiamento. Assim sendo, os arcos descritivos das saídas do caixa são ligados aos nós dos financiamentos. Programar as amortizações significa indicar qual nó será atendido pelo recurso do caixa, ou seja, em que período, em que montante e para qual operação de financiamento o fundo será transferido. Lembrando ainda que os nós relativos ao ativo *y* também concorrem como receptores das reservas, dado que a opção pela aplicação em CDB permanece. Nesse segundo caso, a opção de linha de crédito não existe inicialmente; ela surge como uma extensão do estudo inicial das amortizações.

Para representarmos graficamente cada operação de financiamento no fluxo em rede, utilizamos os seguintes elementos: o nó inicial, representando o primeiro período em que a obrigação pode ser quitada; o nó final, fixando o vencimento da operação; e os nós intermediários, quando o nó final não for subseqüente ao nó inicial. A quantidade de nós intermediários varia segundo o número de períodos que separam os nós inicial e final. Como regra, o nó inicial recepciona fundos apenas do caixa e o nó final destina todo o volume recebido ao nó *T*. Os arcos horizontais ligam os nós dos financiamentos, partindo sempre de um período *t* ao período *t*+1, e existe um multiplicador que garante ganho de fluxo nesses arcos.

Mantivemos a sequência de apresentação do capítulo anterior em que demonstramos a prática de tesouraria, na sequência, os resultados do modelo resolvido e, por fim, a análise comparativa das duas soluções. Ao final do capítulo, propusemos uma extensão ao estudo da programação de amortizações com o uso de linha de crédito.

5.1 – A estrutura de rede para o exemplo

A rede de fluxo da figura 5.1 ilustra as adaptações do modelo de Golden *et al.* (1979). O modelo matemático completo dessa rede de fluxo encontra-se no anexo A.

Na figura 5.1, podemos verificar que as entradas de caixa estão posicionadas nos arcos que partem do nó S - que é um nó de suprimento – em direção aos respectivos nós do ativo *x* em cada período: e_t diz respeito à entrada de caixa do período *t*, *t* = 1,...,12.

Os arcos horizontais apresentam a movimentação de recursos relativa a um parâmetro específico de um período ao outro. Por exemplo, o fluxo de recursos que está no caixa (ativo *x*) e vai do período 1 para o período 2 é representado por $f_{1,2}$.

Os nós numerados de 1 a 12 dizem respeito ao ativo *x* e os nós indicados com $\overline{1}$ a $\overline{12}$ referem-se ao ativo *y*. O fluxo de recursos entre $\overline{1}$ e $\overline{2}$ é definido por $f_{\overline{1},\overline{2}}(1+\beta)$, sendo $\beta = 0,0165$ a remuneração paga pelo CDB no período.

Os arcos verticais entre os ativos *x* e *y* definem a conversão dos ativos nas duas direções. Há um custo de converter recursos do caixa para o CDB $(C_{x,y} = 0,0038)$, equivalente à CPMF com alíquota de 0,38%. A conversão de ativos na direção contrária não apresenta custo financeiro $(C_{y,x} = 0)$.

Todos os outros nós numerados referem-se às dez operações de financiamentos de *i* a *x* representadas da seguinte forma: o financiamento *i* com vencimento no período 2 equivale aos nós 1^i e 2^i, o financiamento *ii* com vencimento no período 3 equivale aos nós 1^{ii}, 2^{ii} e 3^{ii}, e, assim por diante, até termos o financiamento *x* com vencimento no período 12 e os nós 1^x a 12^x.

O último nó de cada financiamento constitui o período final e, portanto, o vencimento da operação. Assim sendo, os arcos que saem do nó vencimento do financiamento direcionam-se ao nó T, que é um nó terminal.

As saídas de caixa são os fluxos de recursos que precisam ser determinados. Os desembolsos de caixa posicionam-se nos arcos que saem dos nós do ativo *x* em cada período e direcionam-se aos nós dos financiamentos.

Ao estoque do ativo *x*, é permitido amortizar quaisquer financiamentos no todo ou em partes. Por exemplo, os arcos que partem do nó 1 estão ligados aos dez financiamentos. Se o destino dos recursos financeiros do período 1 for liquidar antecipadamente o financiamento *iii*, o arco estará representado pelo fluxo $f_{1,1^{iii}}$.

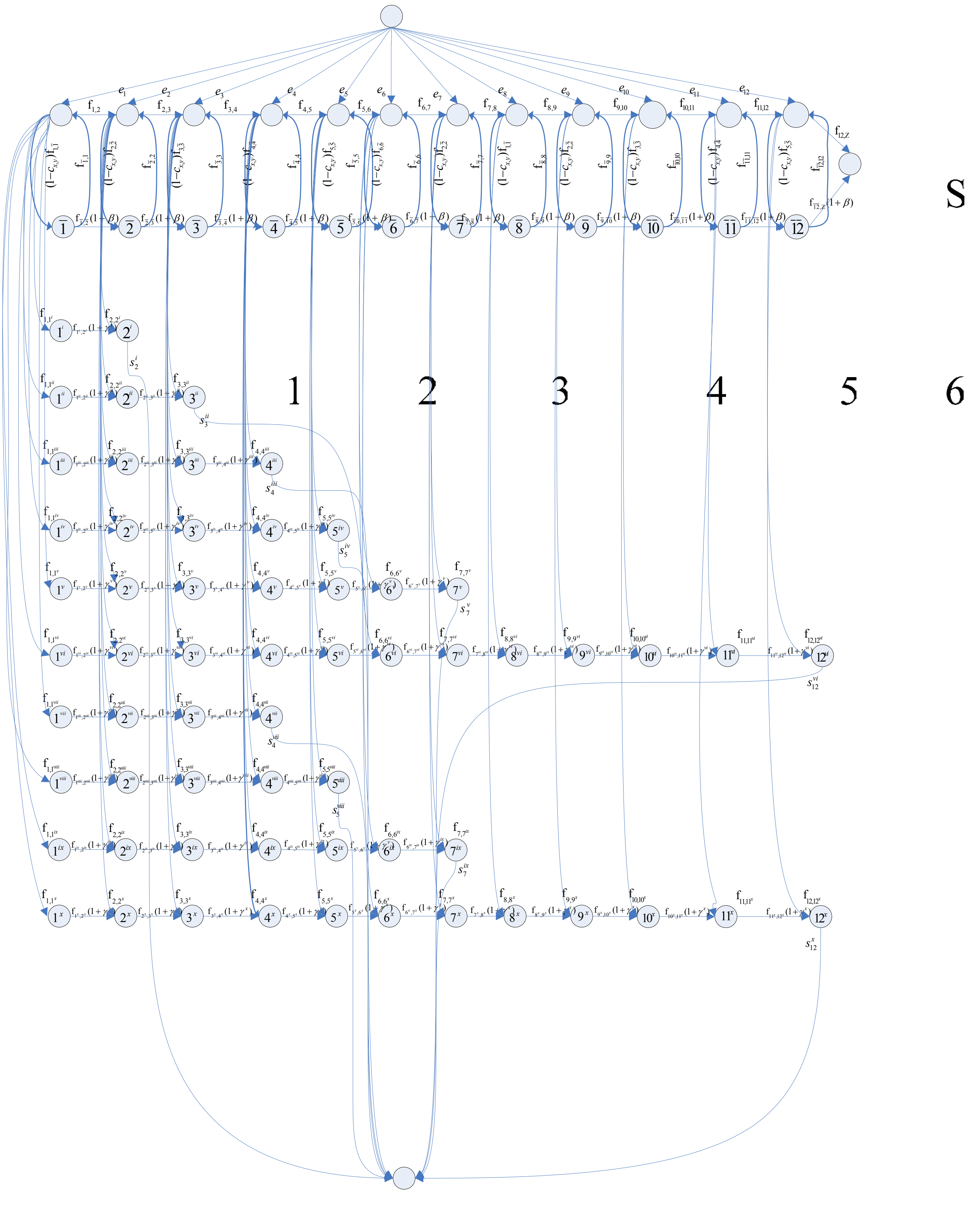


Figura 5.1 – Adaptação do modelo para caso com programação de amortizações

5.2 – Dois ativos e programação de amortizações

O segundo caso que estudamos aborda um problema típico de tesouraria da empresa estudada ligado ao custo do capital de giro. O capital de giro é utilizado pela empresa no financiamento de suas operações. O foco do estudo de caso está na liquidação dos empréstimos contraídos, por exemplo, quando da necessidade de caixa para efetuar pagamentos ou para aplicação financeira.

No contexto da empresa agroindustrial estudada, a busca pela solução desse problema surge no atendimento de objetivos múltiplos e interdependentes. O primeiro objetivo diz respeito ao cumprimento das obrigações em seus vencimentos pactuados. Outro propósito é reduzir o volume de juros a pagar ao menor nível possível, além da meta de ter o fluxo de dinheiro maximizado ao final do horizonte de planejamento. Concomitantemente, a tesouraria está monitorando esse desempenho financeiro, intencionando utilizá-lo como um sinalizador para futuras negociações, como pode ser visto no item 5.7.

Tendo financiado as operações da empresa, o capital de giro tem que ser reavido com o recebimento das vendas de seus produtos. Portanto, aqueles que adiantaram recursos financeiros para que a companhia estivesse apta a produzir e a comercializar sua produção, esperam ter seu capital reembolsado, na entrega combinada, com o acréscimo dos juros. Surge, daí, a necessidade do cumprimento das obrigações em seus vencimentos pactuados.

Projetando a disponibilidade futura dos recursos, através das entradas do fluxo de caixa, a tesouraria da empresa tem que definir, além do atendimento aos vencimentos, aquela composição do conjunto de amortizações capaz de reduzir o custo final dos financiamentos. O gestor do caixa está interessado em desembolsar o menor montante possível de juros a pagar.

Sujeitando-se às restrições de quantidade de fundos recebida por período e dos volumes a serem amortizados até o vencimento, o fluxo de dinheiro pode ser maximizado, pela tesouraria, por meio dos descontos nas liquidações antecipadas dos empréstimos e pela remuneração do ativo mais rentável, no caso, o CDB.

5.3 – Dados empíricos

Assume-se que, em algum período anterior ao horizonte de planejamento sob estudo, os financiamentos foram pactuados para serem pagos em vencimentos específicos dentro do horizonte de 12 períodos. Cada período corresponde a um mês. A partir de uma previsão das entradas de caixa, é montado um fluxo de recursos que vai estruturar a política de amortização dos financiamentos. Logo, busca-se verificar de antemão se as entradas serão suficientes para saldar os compromissos financeiros assumidos para cada período em particular. Lembramos que os valores estão apresentados em milhares de unidades monetárias.

Na tabela 5.1, a previsão de entradas foi distribuída para os próximos 10 períodos, bem como os financiamentos que são as saídas de caixa programadas para os vencimentos contratados. Caso o volume das entradas não satisfaça os compromissos nos vencimentos dos financiamentos abaixo, novas entradas pertencentes aos períodos 11 a 12 terão que ser estimadas e incorporadas ao fluxo.

A apresentação dos valores monetários é feita em milhares de reais. As taxas de juros utilizadas têm como base os dados da Agência Estado para o período de agosto/2006.

TABELA 5.1 – Previsão de entradas e vencimentos dos compromissos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
entradas	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	32.000	12.000	12.000	9.000	10.000		
financiamentos		21.624	10.000	37.965	14.000		17.805					15.000
taxa		1,88%	1,67%	1,32%	1,39%		1,46%					1,81%
financiamentos				15.000	34.000		24.641					9.902
taxa				1,53%	1,60%		1,74%					1,24%
fluxo líquid	25.000	3.376	20.000	-17.965	-13.000	32.000	-30.446	12.000	9.000	10.000	0	-24.902
acumuladc	25.000	28.376	48.376	30.411	17.411	49.411	18.965	30.965	39.965	49.965	49.965	25.063

Este exemplo foi inspirado numa situação real da empresa estudada.

Os financiamentos estão distribuídos nos períodos em que vencem e não podem ser prorrogados, mas podem ser antecipados. Nos financiamentos da tabela 5.1 está indicado o valor referente ao principal, ou seja, o capital da dívida. O custo de carregamento dos financiamentos está expresso em taxa por período abaixo dos respectivos montantes.

A questão dos juros incidentes sobre os empréstimos é central em nossa discussão, razão pela qual houve a opção de incorporar os encargos financeiros ao longo da descrição do caso. Na tabela 5.2, está demonstrado o resultado bruto.

TABELA 5.2 – Resultado bruto

Entradas de caixa	225.000	
Amortização - financiamentos	199.937	1,125354
Resultado bruto	25.063	

Há folga financeira equivalente a 12,5% das entradas.

Olhando para o horizonte de planejamento como um todo é possível afirmar que os financiamentos podem ser quitados, comprometendo a somatória das entradas de caixa dos períodos de 1 a 8. Observando o fluxo líquido acumulado na tabela 5.1, verifica-se que ele é positivo em todos os períodos. Isto significa que a demanda de caixa para a amortização dos financiamentos nos vencimentos está satisfeita em cada período específico.

Nesse caso, também existe a possibilidade da conversão de recursos para um ativo mais rentável, porém com menor liquidez. O comprometimento da liquidez deve-se ao fato do ativo *y* não servir como meio de pagamento. O ativo *y* remunera os recursos aplicados à taxa de 1,15% por período. Há um custo de conversão de ativos representado pela CPMF com alíquota de 0,38%.

Demonstramos na tabela 5.3 indicativa dos valores financiados com o detalhamento das taxas de juros e vencimento, além do cálculo da taxa média ponderada.

TABELA 5.3 – Financiamentos e taxa de juros média

Financiamento	Valor	Taxa	Vencimento
i	21.624	1,88%	período 2
ii	10.000	1,67%	período 3
iii	37.965	1,32%	período 4
vii	15.000	1,53%	período 4
iv	14.000	1,39%	período 5
viii	34.000	1,60%	período 5
v	17.805	1,46%	período 7
ix	24.641	1,74%	período 7
vi	15.000	1,81%	período 12
x	9.902	1,24%	período 12
total	**199.937**	**1,56%**	**taxa média**

Verificamos que a taxa de juros média equivale a 1,56% por período e o custo de carregamento das operações de financiamento por período está apontado na tabela 5.4:

TABELA 5.4 – Juros de cada financiamento calculados por período

Financiamento	Saldo	Juros
i	21.624	407
ii	10.000	167
iii	37.965	501
vii	15.000	230
iv	14.000	195
viii	34.000	544
v	17.805	260
ix	24.641	429
vi	15.000	272
x	9.902	123
Total	**199.937**	**3.126**

É possível calcular os valores futuros dos financiamentos em seus vencimentos, isto é, o montante que inclui capital acrescido dos juros para entrega no período pactuado, conforme tabela 5.5.

TABELA 5.5 – Juros de cada financiamento acumulados até o vencimento

Financiamento	Total	Principal	Juros
i	22.031	21.624	407
ii	10.337	10.000	337
iii	39.488	37.965	1.523
vii	15.699	15.000	699
iv	14.795	14.000	795
viii	36.229	34.000	2.229
v	19.423	17.805	1.618
ix	27.328	24.641	2.687
vi	18.272	15.000	3.272
x	11.340	9.902	1.438
Total	**214.941**	**199.937**	**15.004**

Com essa informação, um novo fluxo de caixa, agora incorporando o pagamento dos juros, pode ser gerado, conforme ilustrado na tabela 5.6:

TABELA 5.6 – Previsão de entradas e vencimentos dos compromissos mais juros

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
entradas	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	32.000	12.000	12.000	9.000	10.000		
financiamentos		22.031	10.337	39.488	14.795		19.423					18.272
taxa		1,88%	1,67%	1,32%	1,39%		1,46%					1,81%
financiamentos				15.699	36.229		27.328					11.340
taxa				1,53%	1,60%		1,74%					1,24%
fluxo líquid	25.000	2.969	19.663	-20.187	-16.024	32.000	-34.751	12.000	9.000	10.000	0	-29.612
acumuladc	25.000	27.969	47.633	27.445	11.422	43.422	8.671	20.671	29.671	39.671	39.671	10.059

O fluxo de caixa gerado para pagamento dos juros num total de 15.004, da tabela 5.5, demonstra que a folga financeira que existia no fluxo da tabela 5.1 foi reduzida a 10.059, ou aproximadamente 4,47% do volume das entradas de caixa previstas conforme tabela 5.7.

TABELA 5.7 – Resultado líquido

Resultado bruto	25.063
Juros - financiamentos	-15.004
Resultado líquido	10.059

Continua positivo em todos os períodos o fluxo líquido acumulado na tabela 5.6. Nessa situação em que os financiamentos são pagos 100% no vencimento, há a necessidade de comprometer as entradas relativas aos nove primeiros períodos.

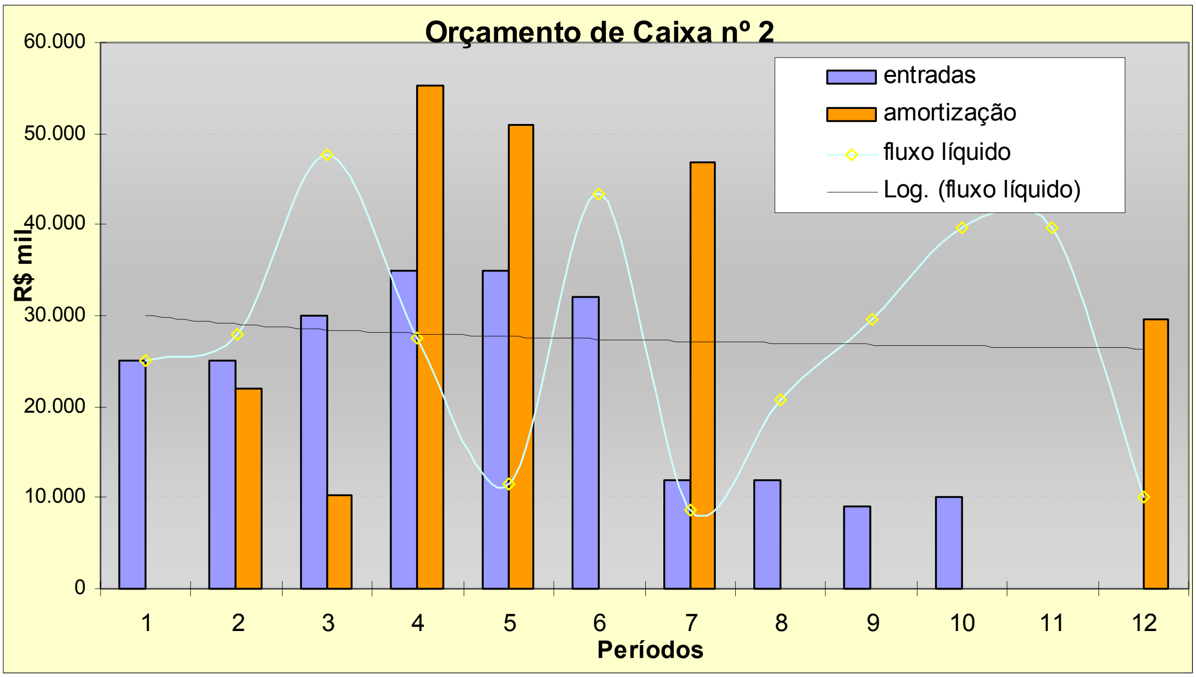


Figura 5.2 – Orçamento de caixa n.2

Estão dispostos na figura 5.2: um comparativo de volume entre as entradas e as amortizações por período. Temos ainda o fluxo líquido de caixa com sua linha de tendência. As figuras 5.3 e 5.4 agregam ao estudo a visão do financiamento acumulado do início ao final do horizonte de planejamento e como evoluíram as respectivas amortizações.

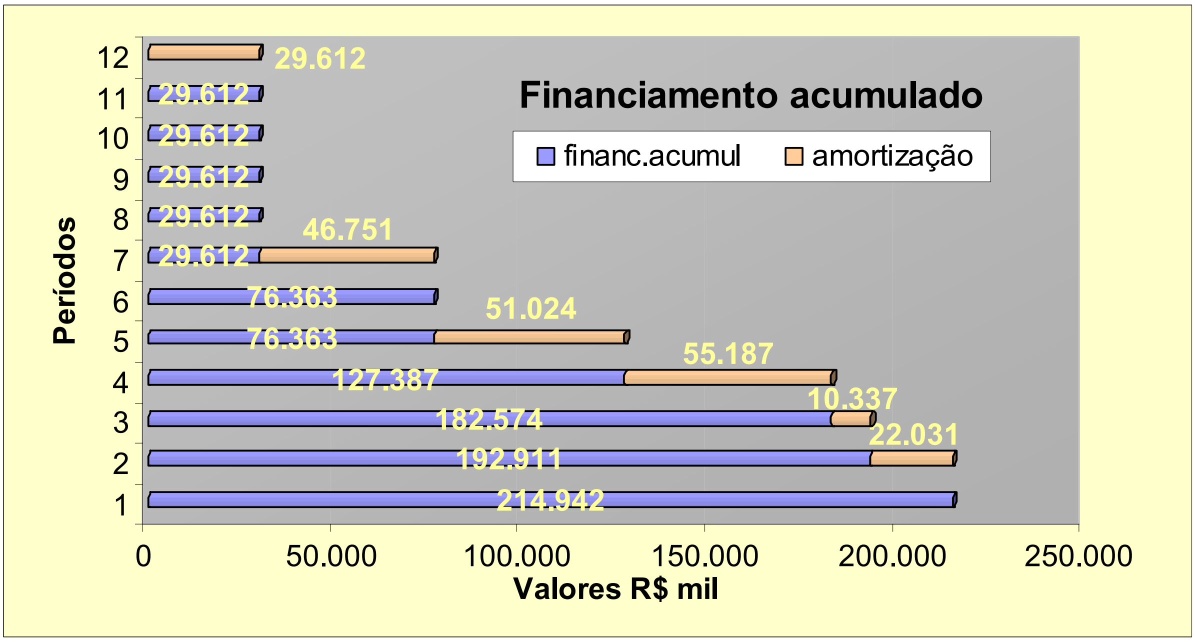


Figura 5.3 – Financiamento acumulado

A figura 5.4 demonstra de maneira individual, por operação de financiamento, as amortizações, ou seja, para cada um dos dez financiamentos existentes.

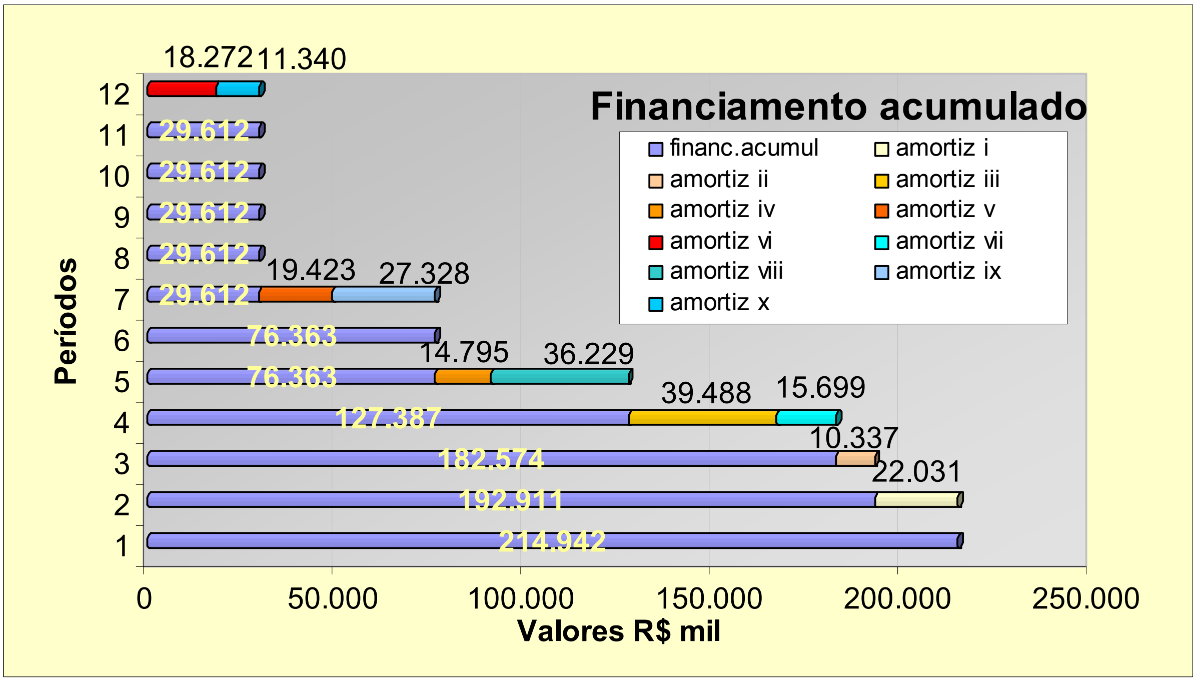


Figura 5.4 – Financiamento acumulado por operação

Para o fluxo de caixa previsto, atestamos que existe:

- folga financeira no horizonte de planejamento;

- ativo oferecendo melhor remuneração pelos recursos, do que mantê-los em caixa;
- custo de conversão de ativos;
- possibilidade de liquidar antecipadamente os financiamentos.

Com base nessas afirmações, o gestor de caixa pode buscar uma solução alternativa para a maximização dos recursos financeiros da empresa através de uma programação de amortizações de financiamentos, que não se restrinja a pagá-los em uma única vez no vencimento. A política financeira a ser proposta, visando o aumento do fluxo de dinheiro ao final do horizonte de planejamento, tem que lidar com o *trade-off* entre aplicar recursos em um ativo mais rentável que o caixa e liquidar antecipadamente os financiamentos existentes.

Portanto, o ponto-chave na discussão que propomos é determinar quais serão as saídas de caixa de cada período, ou seja, definir qual financiamento será pago e em que volume deve ocorrer o pagamento, sem deixar de planejar a melhor remuneração pelos recursos financeiros. Deve-se, portanto, definir a destinação ótima para a geração de caixa da empresa.

Não há perda de generalidade no modelo proposto caso haja financiamentos com período inicial t>1. O fluxo de recursos estabelecido nos arcos horizontais que ligam os nós dos financiamentos é definido por $f_{1^i,2^i}(1+\gamma^i)$ para o financiamento *i* entre os nós 1^i e 2^i. A taxa de juros do financiamento *i* é 1,88% por período, então $\gamma^i = 0,0188$.

A movimentação financeira que considera a amortização antecipada de parte ou do todo de um financiamento gera um desconto financeiro pelo pagamento da obrigação em período anterior ao vencimento. Tal desconto está representado pelo ganho $(1+\gamma^i)$ incorporado ao fluxo $f_{1^i,2^i}$.

A amortização do financiamento ocorre quando o nó vencimento é atingido pelo fluxo de recursos financeiros em volume previsto na restrição do modelo e esse montante é direcionado ao nó *T* através dos arcos do tipo s_t^k, *k= i,ii, ..., x*. No caso da liquidação do financiamento *i*, o arco que a representa em direção ao nó *T* é s_2^i.

Todas as transações devem ocorrer no início do período a que estão ligadas, quer sejam entradas e saídas de caixa, ou aquelas representadas pelos arcos horizontais e verticais. No exemplo que analisamos, para a movimentação de fundos do ativo *x* do período 1 para o período 2, não há remuneração financeira. Então, o ativo *x* não oferece remuneração, conforme tabela 5.8.

TABELA 5.8 – Valores dos parâmetros usados no estudo do caso

Ativo ou Financiamento	**Saldo Inicial (R$ mil)**	**Taxas de Juros por período**	**Limite inferior ou superior**
Conta Corrente	$x_0 = 0$	Não rende.	$x_i \geq 0$
Certificado Depósito Bancário	$y_0 = 0$	$\beta = 0{,}0115$	$y_i \geq 0$
Financiamento *i*	$s_0^i = 21.624$	$\gamma^i = 0{,}0188$	$s_2^i = 22.031$
Financiamento *ii*	$s_0^{ii} = 10.000$	$\gamma^{ii} = 0{,}0167$	$s_3^{ii} = 10.337$
Financiamento *iii*	$s_0^{iii} = 37.965$	$\gamma^{iii} = 0{,}0132$	$s_4^{iii} = 39.488$
Financiamento *iv*	$s_0^{iv} = 14.000$	$\gamma^{iv} = 0{,}0139$	$s_5^{iv} = 14.795$
Financiamento *v*	$s_0^{v} = 17.805$	$\gamma^{v} = 0{,}0146$	$s_7^{v} = 19.423$
Financiamento *vi*	$s_0^{vi} = 15.000$	$\gamma^{vi} = 0{,}0181$	$s_{12}^{vi} = 18.272$
Financiamento *vii*	$s_0^{vii} = 15.000$	$\gamma^{vii} = 0{,}0153$	$s_4^{vii} = 15.699$
Financiamento *viii*	$s_0^{viii} = 34.000$	$\gamma^{viii} = 0{,}0160$	$s_5^{viii} = 36.229$
Financiamento *ix*	$s_0^{ix} = 24.641$	$\gamma^{ix} = 0{,}0174$	$s_7^{ix} = 27.328$
Financiamento *x*	$s_0^{x} = 9.902$	$\gamma^{x} = 0{,}0124$	$s_{12}^{x} = 11.340$

A função objetivo é maximizar os fluxos de recursos que entram no nó Z após a movimentação financeira presente nos 12 períodos. Portanto, os fluxos de recursos financeiros que partem tanto do nó 12, quanto do nó $\overline{12}$ - ambos em direção ao nó Z - devem ser maximizados.

A expressão (3) apresentada anteriormente deve ser re-escrita uma vez que $y_0 = 0$, então:

$$\sum_{j \in N^-} f(i,j) - \sum_{j \in N^-} g(j,i) = \begin{cases} e(i) - s(i) \; para \; i = 1, 2, ..., n, \\ 0 \; para \; i = \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{n}, \end{cases}$$

As restrições do modelo referem-se simplesmente ao equilíbrio de fluxos nos nós da rede, ou seja, o fluxo total de entrada é igual ao fluxo total de saída para cada nó da rede.

Tomando como exemplo o nó 2^{ii} da rede de fluxo para descrevermos as restrições do modelo matemático, temos a equação de equilíbrio de fluxo para o nó 2^{ii}:

$$f_{2,2^{ii}} + f_{1^{ii},2^{ii}}(1+\gamma^{ii}) = f_{2^{ii},3^{ii}} \qquad \text{(nó } 2^{\text{ii}}\text{)}$$

As entradas são: $f_{2,2^{ii}}$, que é o suprimento proveniente do nó 2, ou seja, recurso do caixa para amortização; $f_{1^{ii},2^{ii}}(1+\gamma^{ii})$, que é o fluxo trazido do nó 1^{ii} com ganho do multiplicador equivalente à taxa γ^{ii}, isto é, desconto gerado pelo pagamento antecipado do financiamento *ii*. o A saída do nó 2^{ii} é $f_{2^{ii},3^{ii}}$, que é a remessa de fundos destinada ao nó 3^{ii}, último nó, representando o vencimento da operação de financiamento.

5.4 – Os resultados da política de tesouraria para a situação real

Descrevemos a seguir a política financeira adotada pela tesouraria da empresa sob estudo visando à maximização dos recursos financeiros ao final do horizonte de planejamento de 12 períodos. Dispomos a tabela 5.9, indicativa dos valores financiados, com o detalhamento das taxas de juros e valor no vencimento, além do cálculo da taxa média ponderada.

TABELA 5.9 – Financiamentos com juros e taxa média

Financiamento	Valor	Taxa	Vencimento
i	22.031	1,88%	período 2
Ii	10.337	1,67%	período 3
iii	39.488	1,32%	período 4
vii	15.699	1,53%	período 4
iv	14.795	1,39%	período 5
viii	36.229	1,60%	período 5
v	19.423	1,46%	período 7
ix	27.328	1,74%	período 7
vi	18.272	1,81%	período 12
x	11.340	1,24%	período 12
total	**214.941**	**1,56%**	**taxa média**

Lembramos que a taxa de juros média equivale a 1,56% por período. A política de tesouraria para a situação real propõe pagar apenas no vencimento da operação aqueles financiamentos que apresentam taxas de juros inferiores à taxa média de 1,56%, conforme tabela 5.10.

TABELA 5.10 – Financiamentos com taxas de juros inferiores à taxa média

Financiamento	Valor	Taxa	Vencimento
iii	39.488	1,32%	período 4
vii	15.699	1,53%	período 4
iv	14.795	1,39%	período 5
v	19.423	1,46%	período 7
x	11.340	1,24%	período 12

O objetivo dessa política de pagamentos é destinar os recursos financeiros para quitar os financiamentos com custo de carregamento mais elevado, conforme tabela 5.11, reduzindo o gasto com juros sobre os empréstimos:

TABELA 5.11 – Financiamentos com taxas de juros superiores à taxa média

Financiamento	Valor	Taxa	Vencimento
i	22.031	1,88%	período 2
ii	10.337	1,67%	período 3
viii	36.229	1,60%	período 5
ix	27.328	1,74%	período 7
vi	18.272	1,81%	período 12

Divididos em dois grupos conforme tabelas 5.10 e 5.11, os financiamentos passam a ter prioridades diferentes de quitação: pagar o quanto antes possível *i*, *ii*, *viii*, *ix* e *vi*; e pagar até o vencimento *iii*, *vii*, *iv*, *v* e *x*. As restrições de pagar o financiamento até o vencimento e de não permitir saldo negativo em conta corrente continuam válidas. Estando quitados os financiamentos e havendo possibilidade de converter ativos para gerar receita financeira, a decisão do gestor do caixa é pela aplicação em CDB.

O fluxo de caixa gerado pela prática de tesouraria tem pagamento de juros num total de 9.762 – o total pago é 209.699 menos o total do principal das operações igual a 199.937 - demonstrando que a folga financeira que existia no fluxo da tabela 5.1, com pagamento 100% no vencimento, foi ampliada para 15.301, conforme tabela 5.12, ou aproximadamente 6,80% do volume das entradas de caixa previstas.

TABELA 5.12 – Resultado líquido pela prática de tesouraria

Resultado bruto	25.063
Juros – financiamentos	-9.762
Resultado líquido	15.301

O custo de carregamento foi reduzido conforme tabela 5.13:

TABELA 5.13 – Custo de carregamento total

Custo carregamento com liquidação 100% no vencimento	15.004
Custo carregamento com liquidações antecipadas	9.762
Redução nos juros por financiamento	-5.242

A geração adicional de caixa de 5.242 (15.301 – 10.059) representa um acréscimo de 52% sobre a previsão de pagar os empréstimos em uma única vez no vencimento e 2,33% sobre o volume das entradas previstas para os 10 períodos, que é 225.000. É possível notar que o estoque dos ativos *x* e *y* é igual a zero nos períodos 1 a 8 e o fluxo líquido acumulado do ativo *y* continua positivo nos períodos 9 a 12. Na rede de fluxo da figura 5.5, é possível notar que a movimentação financeira dos oito primeiros períodos transfere os recursos totais do caixa através dos arcos verticais para o suprimento dos nós dos financiamentos. Por isso, o saldo do caixa é igual a zero nesses períodos. Usando todas as reservas na amortização dos financiamentos, não há sobra a aplicar em CDB, o que explica a ausência de movimentação do ativo *y* nos períodos 1 a 8. A partir do período 9 e até o período 10, há conversão de ativos, isto é, existe aplicação financeira.

Tomando como exemplo o nó 1 na rede de fluxo de dinheiro da figura 5.5, vemos que a destinação dos 25.000 foi amortizar totalmente o financiamento *i* por 21.624 e, com a sobra de 3.376, foi feito um pagamento parcial do financiamento *vi*. A solução da tesouraria através de planilha eletrônica está descrita na tabela 5.14. Na tabela 5.15, há a descrição detalhada de cada amortização de financiamento ocorrida.

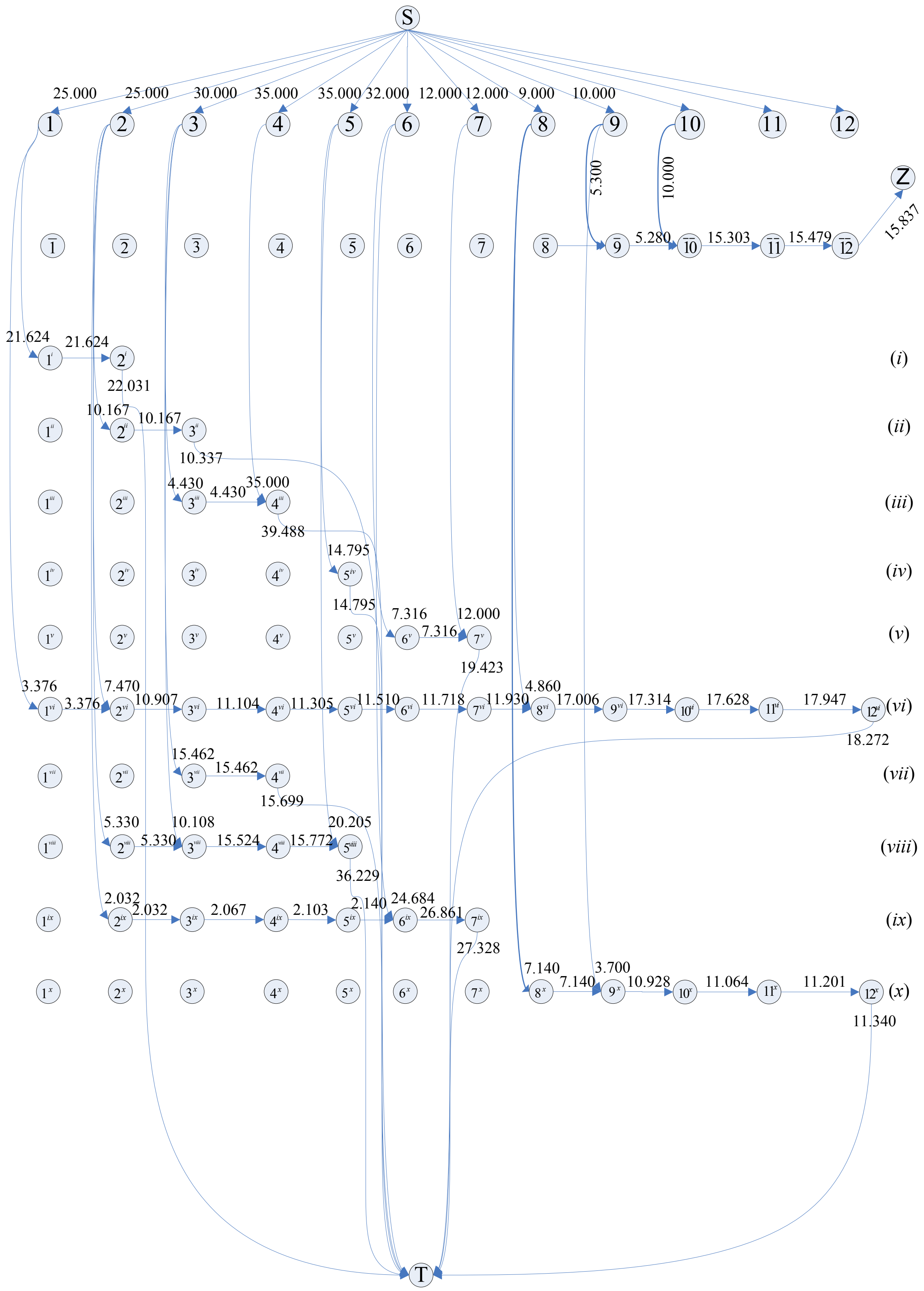


Figura 5.5 – Rede de fluxo pela prática de tesouraria

TABELA 5.14 - Solução do problema pela prática de tesouraria

		SOLUÇÃO ÓTIMA											
t		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**final**
	entrada	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	32.000	12.000	12.000	9.000	10.000			
x	saída	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	31.999	12.000	12.000	3.700				
	saldo	0	0	0	0	0	0	0	0					
x para y	aplicações									5.300	10.000			
y para x	resgates													
y														
	rendimentos 1,15%										61	176	178	180
	saldo									5.280	15.303	15.479	15.657	15.837
x + y	saldo	0	0	0	0	0	0	0	0	5.280	15.303	15.479	15.657	**15.836,982**
cpmf										20	38			
FINANCIAMENTO TOTAL														
	amortização	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	31.999	12.000	12.000	3.700				
	acumulada	25.000	50.000	80.000	115.000	150.000	182.000	194.000	206.000	209.700	209.700	209.700	209.700	209.700

TABELA 5.15 – Programação de amortizações por financiamento

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	fi
Financ i		21.624													
	amortização		21.624												
taxa juros	saldo principal														
1,88%	juros			407											
			21.624	22.031											
Financ ii		10.167													
	amortização			10.167											
taxa juros	saldo principal														
1,67%	juros				170										
	saldo a pagar			10.167	10.337										
Financ iii		39.430													
	amortização				4.430	35.000									
taxa juros	saldo principal														
1,32%	juros					58									
	saldo a pagar				4.430	39.488									
Financ iv		14.795													
	amortização						14.795								
taxa juros	saldo principal														
1,39%	juros														
	saldo a pagar						14.795								
Financ v		19.316													
	amortização							7.316	12.000						
taxa juros	saldo principal														
1,46%	juros								107						
	saldo a pagar							7.316	19.423						
Financ vi		15.706													
	amortização		3.376	7.470						4.860					
taxa juros	saldo principal														
1,81%	juros			61	197	201	205	208	212	216	308	313	319	325	
	saldo a pagar		3.376	10.907	11.104	11.305	11.510	11.718	11.930	17.007	17.314	17.628	17.947	18.272	
Financ vii		15.462													
	amortização				15.462										
taxa juros	saldo principal														
1,53%	juros					237									
	saldo a pagar				15.462	15.699									
Financ viii		35.643													
	amortização			5.330,3	10.108		20.205								
taxa juros	saldo principal														
1,60%	juros				85	248	252								
	saldo a pagar			5.330	15.524	15.772	36.229								
Financ ix		26.716													
	amortização			2.032,9				24.683							
taxa juros	saldo principal														
1,74%	juros				35	36	37	37	467						
	saldo a pagar			2.033	2.068	2.104	2.141	26.861	27.328						
Financ x		10.840													
	amortização									7.140	3.700				
taxa juros	saldo principal														
1,24%	juros										89	136	137	139	
alteração	saldo a pagar									7.140	10.928	11.064	11.201	11.340	

A distribuição dos valores que amortizam os financiamentos é feita de modo a tentar atender aos requisitos da política estabelecida. O primeiro passo é alocar para o vencimento os financiamentos com as menores taxas de juros. Isso é possível para os financiamentos *iv* e *x*; o financiamento *iv* é pago 100% no respectivo vencimento, o financiamento *x* depende das soluções dadas aos demais financiamentos. A rede de fluxo da figura 5.5 apresenta um arco saindo do nó 5 que quita o financiamento *iv*. Já os financiamentos *iii* e *vii* vencem no período 4 cuja previsão de entradas é 35.000; então, não há caixa suficiente para quitar a soma de *iii* e *vii*, igual a 55.187. É feita uma análise comparativa entre as taxas de juros de maneira a escolher a menor taxa entre *iii* e *vii* para pagamento no vencimento, Utiliza-se 35.000 do período 4 para pagar parte de *iii*. Por conseqüência, o saldo de *iii* e todo o financiamento *vii* têm que ser antecipados para o período 3. Situação semelhante ocorre com o financiamento *v*, pois a entrada prevista para seu vencimento é 12.000, mostrando-se insuficiente para quitar 19.423. O financiamento *v* é quitado em duas parcelas: 7.316 no período 6 e 12.000 no período 7.

Esse é um breve relato dos primeiros passos na elaboração do fluxo de caixa. Pode-se notar que é uma atividade manual, trabalhosa e que exige bastante atenção do tomador de decisão, portanto, sujeita a falhas, ainda que seja possível incorporar fórmulas de checagem na planilha eletrônica de modo a alertar, por exemplo, sobre o cumprimento de vencimentos, etc.

Os passos seguintes são uma continuação dos passos anteriores de modo a acomodar as liquidações dentro dos vencimentos e, se houver disponibilidades, partir para o pagamento dos financiamentos mais custosos. No exemplo em questão, a sobra de caixa do período 1 – 25.000 (entradas) menos 21.624 (pagamento antecipado do financiamento *i*) – equivale a 3.376 e foi usada para pagamento parcial do financiamento *vi*, a operação com maior custo de carregamento, 1,81%. Já, no próximo mês, o excedente de caixa do período 2 – 25.000 (entradas) menos 10.167 (pagamento antecipado do financiamento *ii*) – equivale a 14.833 e aguarda uma decisão. Nesse estágio da programação manual feita pelo gestor do caixa está decidida a destinação de recursos para seis financiamentos: *i*, *ii*, *iii*, *iv*, *v* e *vii*. Resta, portanto, planejar a amortização final de quatro financiamentos: *vi*, *viii*, *ix* e *x*.

Temos, a seguir, uma descrição dos passos para alocação das amortizações dos financiamentos *vi*, *viii* e *ix*. Deixa-se o financiamento *x* aguardando tal programação, por apresentar a menor taxa de juros, 1,24%, e por vencer no último período, 12. Lembrando que existem ainda 14.833 no período 2 e que o financiamento *vi* já recebeu 3.376 no período 1. A estratégia adotada é tentar quitar o maior volume possível do financiamento *vi* e, na seqüência, partir para amortizar *ix* e, depois, *viii*. Sabe-se que a remuneração oferecida pelo CDB é inferior a qualquer uma das quatro taxas dos financiamentos em questão. Para quitar *vi,* verifica-se que faltam 14.160 até o seu vencimento no período 12. Como temos recursos no período 2, o total de 14.160 representa um valor futuro e trazemos ao valor presente através da fórmula $\frac{14.160}{1,0181^{10}} = 11.835$. Então, o montante de 11.835 é utilizado da sobra de 14.833 e o restante, 2.998, vai amortizar parcialmente o financiamento *ix*.

Contudo, tal decisão não atende ao requisito de quitar 36.229 do financiamento *viii* no período 5, já que os saldos finais em caixa para os meses seguintes são: 10.108 nos períodos 3 e 4 e 30.313 no período 5. É necessário repensar a decisão inicial e realocar recursos financeiros para o cumprimento dos compromissos. São transferidos 2.998 de *ix* para *viii* no período 2 e, também, a sobra do período 3, que é de 10.108. Faltam ainda 22.651 para quitar *viii* em 5 e o saldo de caixa apresentado nesse período é inferior a essa necessidade, 20.205. O saldo de 20.205 é utilizado para amortizar *viii* e busca-se complementar a necessidade residual de 2.446, alterando a programação de algum período anterior. A opção existente é abater do montante de 11.835 destinado a princípio ao financiamento *vi* em 2. O valor futuro de *viii* no período 5 é 2.446 que, trazido três períodos em direção ao período 2, é igual a $\frac{2.446}{1,0146^{3}} = 2.332$. Com o aporte de 2.332, o financiamento *viii* recebe o total de 5.330 no período 2 e sua programação de amortização está encerrada.

Porém, o planejamento atual não é capaz de amortizar o financiamento *ix* até o período 7 no volume requerido de 27.328. Os saldos finais em caixa para os meses posteriores são: 24.683 nos períodos 6 e 7. Assim, precisam ser transferidos 2.216 de alguma decisão anterior para o financiamento *ix*, ou seja, novamente do financiamento *vi* no período 2. O saldo do período 6 de 24.683 é utilizado para amortizar *viii* e complementa-se a necessidade residual futura de 2.216, que recalculada para o período 2 representa $\frac{2.216}{1{,}0174^5} = 2.033$, abatendo-a do valor 9.503 que estava destinado ao financiamento *vi*. O planejamento do financiamento *ix* fica completo.

Após as intervenções que possibilitaram o cumprimento dos vencimentos dos financiamentos *viii* e *ix*, a amortização parcial do financiamento *vi* no período 2 foi reduzida de 11.835 para 7.470. Verifica-se que resta quitar o volume de 5.222 até o período 12, mas todos os demais financiamentos foram atendidos e existe saldo em caixa no período 8 de 12.000. Trazendo a necessidade do valor futuro do período 12 para o período 8, temos $\frac{5.222}{1{,}0181^4} = 4.860$. O financiamento *vi* recebe 4.860 no período 8 e sua programação de amortizações está concluída.

O saldo do período 8 é de 7.140 e esse montante é amortizado do financiamento *x*. A demanda residual futura é de 3.839, que, recalculada para o período 9, representa $\frac{3.839}{1{,}0124^3} = 3.700$, e é atendida no período 9. O planejamento do financiamento *x* fica completo.

Os excedentes dos períodos 9 e 10 são aplicados em CDB: 5.300 e 10.000, respectivamente. Ao considerarmos toda a movimentação financeira, incluindo o custo da conversão de ativos e o ganho pelo rendimento dos recursos aplicados, temos os resultados da tabela 5.16:

TABELA 5.16 – Resultado final pela prática de tesouraria.

Resultado bruto	25.063
Juros - Financiamentos	- 9.762
Resultado líquido	15.301
CPMF	- 58
Rendimento CDB	595
Resultado final	**15.837**

O resultado final 15.837 é o fluxo maximizado que atinge o nó Z de acordo com a função objetivo.

Vimos, na figura 5.5, que o arco vindo do caixa atinge o nó 1^i com 21.624. Por sua vez, o nó 2^i recebe $f_{1^i,2^i}(1+\gamma^i)$, que é o fluxo trazido do nó 1^i com ganho do multiplicador equivalente à taxa γ^i, isto é, desconto gerado pelo pagamento antecipado do financiamento *i*. Então, temos o valor 21.624 multiplicado por (1 + 0,0188) e perfazendo 22.031. Essa quantia é suficiente para que o nó 2^i, nó vencimento do financiamento *i*, atenda ao compromisso e destine 22.031 através de um arco até o nó terminal *T*. Os financiamentos *ii* e *vii* têm movimentação semelhante à amortização do financiamento *i*. O financiamento *iii* recebe recursos do caixa em dois momentos: o arco que vem do nó 3 tem 4.430 e o outro arco, vindo do nó 4, tem 35.000. Logo, temos o valor 4.430 multiplicado por (1 + 0,0132) e totalizando 4.488. Esse montante, somado aos 35.000 que chegam ao período 4, é suficiente para que o nó 4^{iii}, nó vencimento do financiamento *iii*, atenda ao compromisso e destine 39.488 através de um arco até o nó terminal *T*. O financiamento *v* tem movimentação semelhante a essa. Como já dissemos, o financiamento *iv* é quitado totalmente no seu nó vencimentos. Os demais financiamentos recebem recursos do caixa em duas parcelas ou mais e são os financiamentos *vi*, *viii* , *ix* e *x* cuja programação foi discutida em detalhes.

5.5 – Os resultados da modelagem matemática do problema

O problema de maximização do retorno financeiro ao final do horizonte de planejamento foi resolvido por programação linear através da ferramenta *solver* que integra o

Microsoft Office Excel 2003. Em uma planilha eletrônica, o *solver* utiliza o método simplex e trabalha com um grupo de células relacionadas direta ou indiretamente com a fórmula na célula de destino, ajustando os valores nas células variáveis que foram especificadas — chamadas de células ajustáveis — para produzir o resultado na fórmula da célula de destino. As restrições que o *solver* usa no modelo podem se referir a outras células que afetem a fórmula da célula de destino. Para solucionar o modelo em um computador Pentium 4 1,8 GHz, o tempo computacional aproximado para encontrar a resposta foi de 2 segundos.

A partir da tabela 5.17, descrevemos a solução ótima por meio do fluxo de caixa com a amortização de financiamento por período e acumulada, além das conversões entre os ativos *x* e *y* e seus rendimentos. A liquidação antecipada dos financiamentos obedeceu ao fluxo de recursos existentes.

TABELA 5.17 – Solução do problema pelo modelo em programação linear

	SOLUÇÃO ÓTIMA													
t		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	final
	entrada	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	32.000	12.000	12.000	9.000	10.000			
x	saída	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	32.000	12.000	12.000	3.699				
	saldo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x para y	aplicações	0		0		0	0	0		5.301	10.000			
y para x	resgates		0		0									
y														
	rendimentos 1,15%		0	0	0	0	0	0	0	0	61	176	178	180
	saldo	0	0	0	0	0	0	0	0	5.280	15.303	15.479	15.657	15.837
x + y	saldo	0	0	0	0	0	0	0	0	5.280	15.303	15.479	15.657	**15.837,212**
cpmf		0		0		0	0	0		20	38			
AMORTIZACAO TOTAL														
x para k	amortização	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	32.000	12.000	12.000	3.699				
	acumulada	25.000	50.000	80.000	115.000	150.000	182.000	194.000	206.000	209.699	209.699	209.699	209.699	**209.699**

A solução do modelo em programação linear é idêntica à solução da prática de tesouraria. A diferença decimal, que surge da comparação das tabelas 5.14 e 5.17, deve-se ao critério de arredondamento dos valores adotado a fim de facilitar a digitação feita pela tesouraria da empresa estudada.

Paga-se com antecedência, há economia com juros sobre os empréstimos e o excedente é aplicado em CDB. A otimização do fluxo de caixa está apresentada no gráfico da figura 5.6 e fica clara a opção pela antecipação na liquidação dos empréstimos, já que as amortizações começam a ocorrer desde o período 1 e tomam a maior parte dos recursos financeiros nos períodos seguintes.

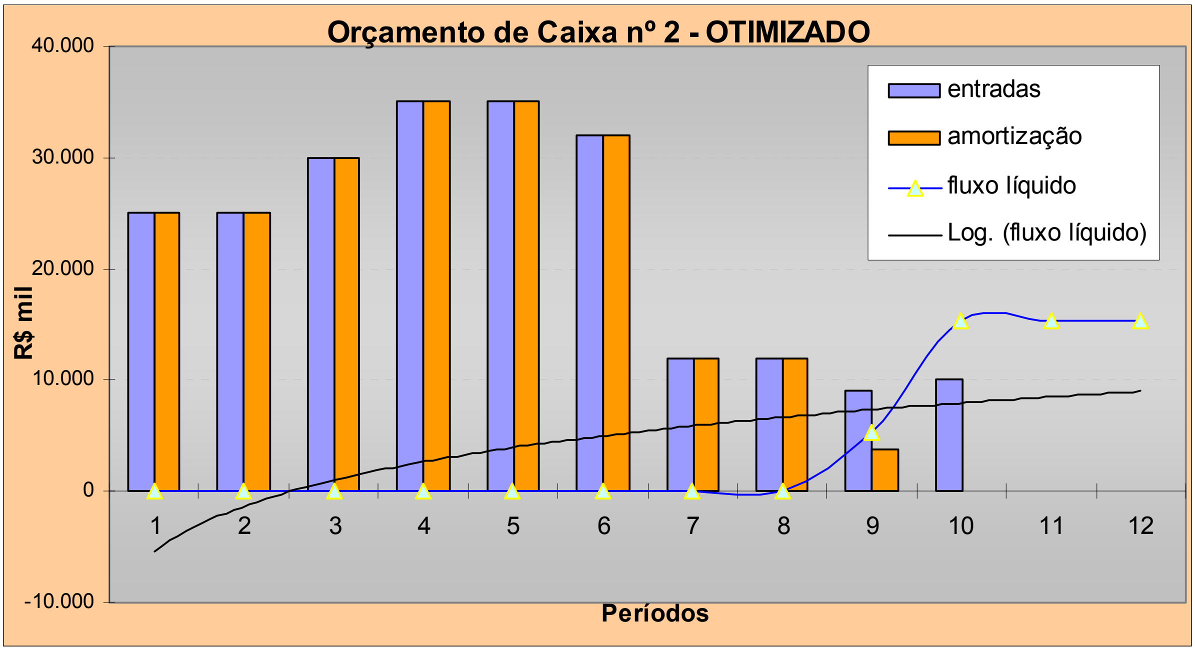


Figura 5.6 – Orçamento de caixa n.2 - otimizado

É permitido concluir, por meio do comparativo da movimentação financeira total, que o rendimento do CDB gerado pelo modelo foi superior à prática de tesouraria em apenas 0,01, conforme tabela 5.18.

TABELA 5.18 – Comparativo de movimentação financeira total

Operação	Prática de tesouraria	Solução do modelo	Variação
Saldo ativo *y*	15.300,355	15.300,575	0,220
Pagamento de CPMF	58,141	58,142	0,001
Rendimento CDB	594,768	594,779	0,010
TOTAL	**15.836,982**	**15.837,212**	**0,230**

Nesse caso da programação de amortizações estudada, não foi gerado ganho financeiro com a utilização do modelo em programação linear na solução do problema.

Consideramos que nossa proposta inicial foi atingida, uma vez que a adaptação ao modelo de Golden *et al.* (1979) foi feita com sucesso e a programação das amortizações da série de financiamentos foi capturada pelo modelo. Houve aderência do modelo à situação real de gerenciamento do fluxo de caixa pois, por meio da comparação com as decisões tomadas pela tesouraria, vemos que o modelo resolvido corroborou as escolhas das amortizações antecipadas. Fica claro no detalhamento usado pela tesouraria para liquidar os financiamentos *vi*, *viii* e *ix* que a experiência acumulada dos tomadores de decisão foi fundamental para resultar naquela programação de amortizações prática, sem o modelo em programação linear, isto exige muitos cálculos na planilha eletrônica, distribuição de valores por tentativa e erro, além do risco que permanece residente de deixar de considerar alguma relação entre os parâmetros. O uso do modelo de Golden *et al.* (1979), adaptado para o planejamento e o controle da programação de amortizações, mostrou-se capaz de orientar as decisões sobre financiamentos e investimentos envolvidos no gerenciamento do fluxo de caixa. Vale ressaltar que o modelo sistematiza o processo de tomada de decisão, gerando ganhos de tempo e segurança no processo.

5.6 – Extensão do estudo com proposta de utilização de linha de crédito

Durante o desenvolvimento desse capítulo, apresentamos resultados em que o fluxo de dinheiro pôde ser maximizado sujeitando-se às restrições de quantidade de fundos recebida por período.

A empresa estudada tem a opção de tomar linhas de crédito disponibilizadas por seus parceiros bancários. No exemplo que estudamos anteriormente, a empresa pôde gerar caixa para o pagamento dos dez financiamentos que havia tomado. Logo, não houve necessidade de recorrer ao capital de terceiros para operar aquela programação de amortizações.

Acontece que o gestor de caixa deve estar atento às oportunidades e às situações não exploradas. Sendo assim, ele pode desejar saber qual o comportamento do fluxo de caixa se puder contar com a alternativa de uma linha de crédito. A questão pode ser mais específica, por exemplo, qual o benefício de usar uma linha de crédito com taxa de 2% a.m. e vencimento no período seguinte?

Vamos incluir essas novas condições nos parâmetros do modelo do fluxo em redes do exemplo anterior e verificar as soluções apresentadas.

Existe uma linha de crédito aprovada, k, de 10.000 para eventuais coberturas de *deficits* de caixa. Uma vez tomado o financiamento, o pagamento de principal e juros deve ocorrer no período imediatamente posterior. Assim sendo, as opções existentes para a movimentação financeira desse horizonte de planejamento são: manter saldo em conta corrente, destinar fundos à aplicação financeira, amortizar financiamentos e, também, utilizar a linha de crédito para cobertura de fluxos de caixa líquidos negativos.

Como as taxas de remuneração do CDB estão mantidas, a política financeira a ser desenvolvida, visando o aumento do fluxo de dinheiro ao final do horizonte de planejamento, tem que lidar com o *trade-off* entre liquidar antecipadamente os financiamentos existentes apenas com a geração de caixa da empresa, ou fazer parte das liquidações com o uso de capital de terceiros.

A linha de crédito é simbolizada pelos arcos reversos entre os períodos do ativo x. Por exemplo, trazer fundos do período 2 para o período 1, custa 2,00% ao mês $\left(\frac{1}{1+\gamma} f(t+1,t)\right)$. Essa taxa representa o custo mensal pelo uso da linha de crédito, já que está se trazendo recursos do futuro para o presente.

A rede de fluxo disposta na figura 5.7 apresenta os arcos reversos.

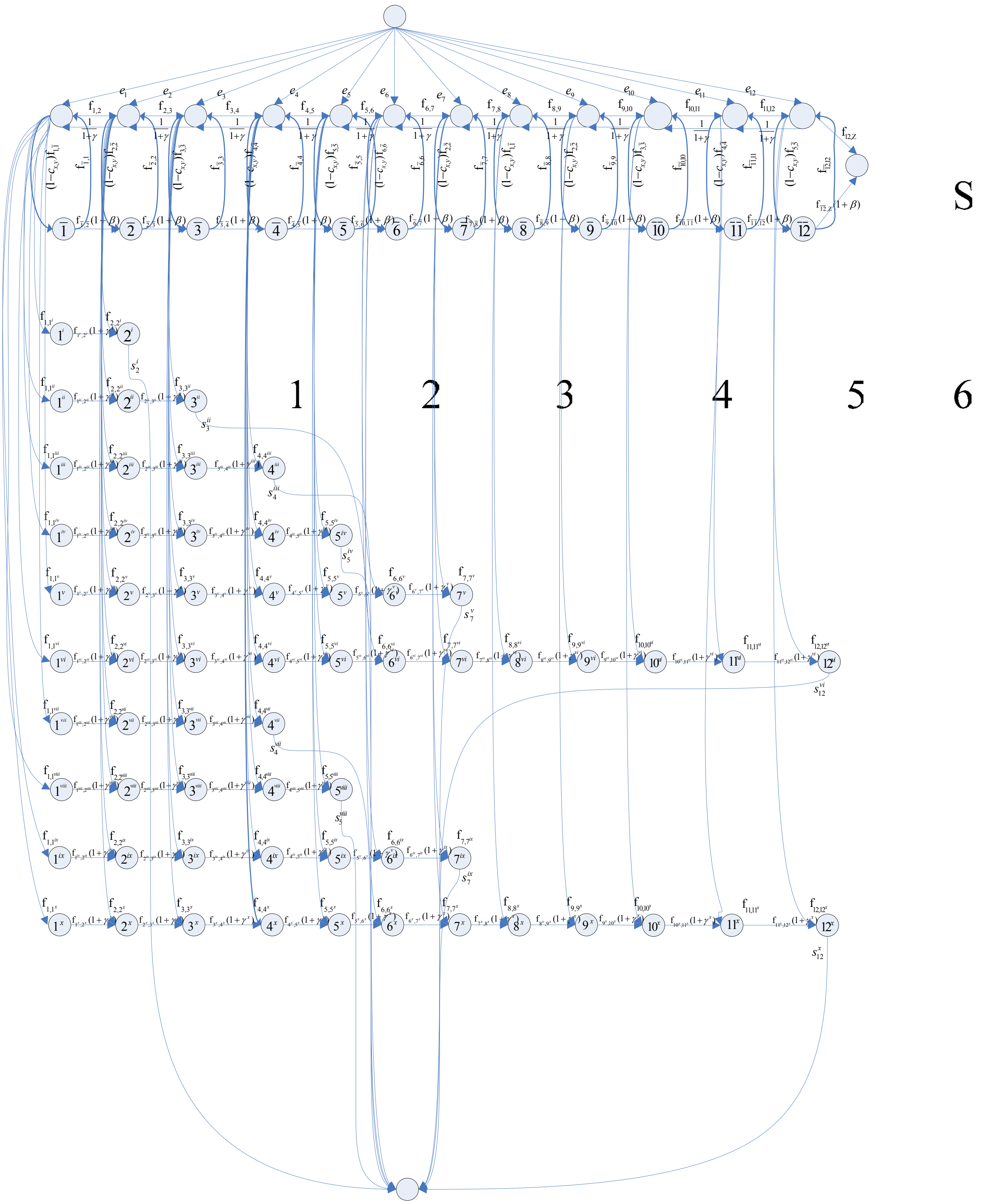


Figura 5.7 – A rede de fluxo atualizada com a inserção dos arcos reversos

O modelo matemático completo referente a essa rede de fluxo encontra-se no **anexo B**. A solução do modelo pode ser vista na figura 5.8.

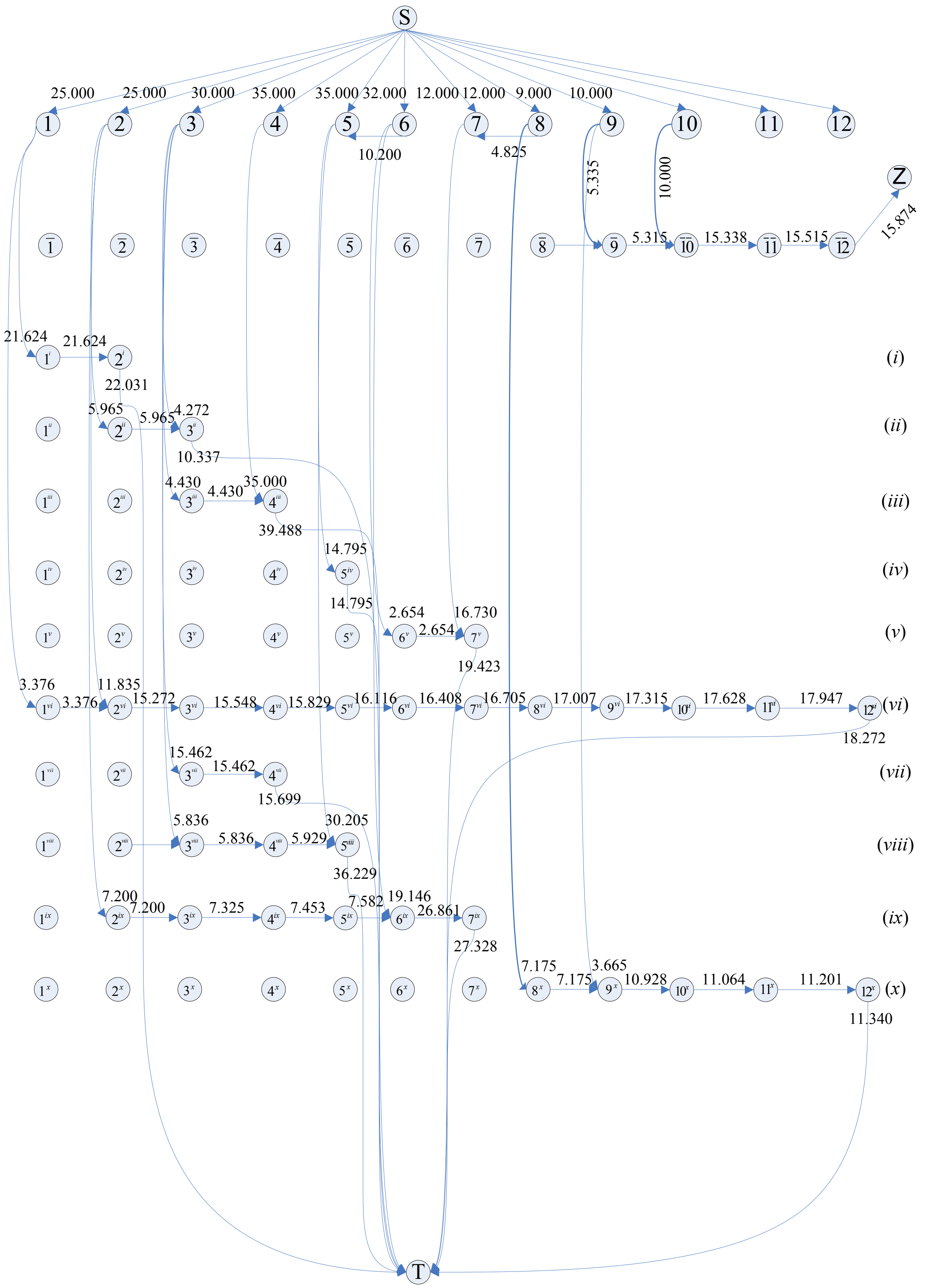


Figura 5.9 – A rede de fluxo atualizada com o modelo resolvido

A partir da tabela 5.19, descrevemos a solução ótima por meio do fluxo de caixa com a amortização de financiamento por período e acumulada, além das conversões entre os ativos x e y , seus rendimentos e a movimentação relativa à linha de crédito. A liquidação antecipada dos financiamentos obedeceu ao fluxo de recursos existentes e utilizou também a linha de crédito.

TABELA 5.19 – Solução do problema pelo modelo em programação linear com linha de crédito

	SOLUÇÃO ÓTIMA													
t		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	final
	entrada	25.000	25.000	30.000	35.000	35.000	32.000	12.000	12.000	9.000	10.000			
x	saída	25.000	25.000	30.000	35.000	45.000	21.800	16.730	7.175	3.665				
	linha de crédito					10.000	-10.200	4.730	-4.825					
	saldo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x para y	aplicações	0	0	0					0	5.335	10.000			
y para x	resgates				0	0	0	0					0	
y														
	rendimentos 1,15%		0	0	0	0	0	0	0	0	61	176	178	180
	saldo	0	0	0	0	0	0	0	0	5.315	15.338	15.515	15.693	15.874
x + y	saldo	0	0	0	0	0	0	0	0	5.315	15.338	15.515	15.693	**15.873,600**
cpmf		0	0	0					0	20	38			
FINANCIAMENTO TOTAL														
	amortização	25.000	25.000	30.000	35.000	45.000	21.800	16.730	7.175	3.665				
	acumulada	25.000	50.000	80.000	115.000	160.000	181.800	198.530	205.705	209.370	209.370	209.370	209.370	**209.369,921**
LINHA DE CRÉDITO														
x para k	amortização						10.200		4.825					
k para x	financiamento					10.000		4.730						
	juros 2% a.m.													
	saldo					-10.000	200	-4.530	295	295	295	295	295	**294,610**

Na planilha da tabela 5.20, há a descrição detalhada de cada amortização de financiamento ocorrida. Pode-se verificar na linha amortização e na coluna período em que ocorre o valor liquidado, que pode ser parte ou todo de cada operação.

TABELA 5.20 – Programação de amortizações por financiamento

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	final
Financ i		21.624													
	amortização		21.624												
taxa juros	saldo principal														
1,88%	juros			407											
			21.624	22.031											
Financ ii		10.237													
	amortização			5.965	4.272										
taxa juros	saldo principal														
1,67%	juros				100										
	saldo a pagar			5.965	10.337										
Financ iii		39.430													
	amortização				4.430	35.000									
taxa juros	saldo principal														
1,32%	juros					58									
	saldo a pagar				4.430	39.488									
Financ iv		14.795													
	amortização						14.795								
taxa juros	saldo principal														
1,39%	juros														
	saldo a pagar						14.795								
Financ v		19.384													
	amortização							2.654	16.730						
taxa juros	saldo principal														
1,46%	juros								39						
	saldo a pagar							2.654	19.423						
Financ vi		15.210													
	amortização		3.376	11.835											
taxa juros	saldo principal														
1,81%	juros			61	276	281	287	292	297	302	308	313	319	325	
	saldo a pagar		3.376	15.272	15.548	15.829	16.116	16.408	16.705	17.007	17.315	17.628	17.947	18.272	
Financ vii		15.462													
	amortização				15.462										
taxa juros	saldo principal														
1,53%	juros					237									
	saldo a pagar				15.462	15.699									
Financ viii		36.041													
	amortização				5.836		30.205								
taxa juros	saldo principal														
1,60%	juros					93	95								
	saldo a pagar				5.836	5.929	36.229								
Financ ix		26.346													
	amortização			7.200				19.146							
taxa juros	saldo principal														
1,74%	juros				125	127	130	132	467						
	saldo a pagar			7.200	7.325	7.453	7.582	26.861	27.328						
Financ x		10.839													
	amortização									7.175	3.665				
taxa juros	saldo principal														
1,24%	juros										89	136	137	139	
alteração	saldo a pagar									7.175	10.928	11.064	11.201	11.340	

A comparação entre a prática de tesouraria com programação manual das amortizações, sem considerar a linha de crédito com taxa de 2% a.m., e os resultados da solução ótima do modelo em programação linear, considerando esta opção, está presente nas tabelas 5.21, e 5.22.

Caso a prática de tesouraria decidisse incorporar a alternativa da linha de crédito em sua solução do problema, os cálculos efetuados na planilha eletrônica seriam bem mais complicados. Nessa hipótese, seria necessário mais tempo para que a solução manual fosse obtida e, ainda, não necessariamente, chegaria-se nos resultados da solução ótima.

TABELA 5.21 – Comparativo de amortizações efetuadas por operação

Financiamento	Prática de tesouraria	Solução do modelo	Variação
i	21.624,460	21.624,460	0,000
ii	10.167,208	10.237,383	70,175
iii	39.429,530	39.429,530	0,000
iv	14.795,000	14.795,000	0,000
v	19.316,184	19.384,255	68,071
vi	15.706,051	15.210,403	-495,648
vii	15.462,425	15.462,425	0,000
viii	35.643,251	36.040,762	397,510
ix	26.715,877	26.346,271	-369,606
x	10.839,659	10.839,432	-0,227
TOTAL	**209.699,645**	**209.369,921**	**-329,723**

TABELA 5.22– Comparativo de movimentação financeira total

Operação	Prática de tesouraria	Solução do modelo	Variação
amortizações	209.699,645	209.369,921	-329,723
juros s/ linha de crédito	0,000	294,610	294,610
aplicações CDB	15.300,355	15.335,469	35,114
pagamento CPMF	-58,141	-58,275	-0,133
rendimento CDB	594,768	596,406	1,637
Saldo final	**15.836,982**	**15.873,600**	**36,617**

Com base nas redes de fluxos das figuras 5.5 e 5.8, podemos chegar aos totais amortizados por financiamento, conforme a tabela 5.21. Analisando o custo dos financiamentos, temos que o modelo resolvido assegura um custo inferior em 329.723, conforme tabela 5.21.

A solução do modelo em programaçao linear foi capaz de programar a amortização dos financiamentos de forma a pagar um volume menor de juros por conseguir antecipar as liquidações previstas. A antecipação pode ocorrer devido à utilização da linha de crédito nos períodos 5 e 7, com custo de capital de 294,610. O volume financiado foi 14.730,489. O tempo computacional para solucionar o modelo em um computador Pentium 4 1,8 GHz foi de aproximadamente 3 segundos.

Na tabela 5.22, podemos verificar que o resultado líquido da economia com juros e da utilização da linha de crédito foi 35,114, cuja aplicação em CDB eleva o valor a 36,617, já deduzido o custo de aplicação.

Houve ganho financeiro adicional com a utilização do modelo em programação linear. O *insight* proporcionado pela análise da solução apresentada pelo modelo mostra que é financeiramente vantajoso tomar emprestado a 2,00% a.m. e utilizar tais recursos para antecipar a liquidação dos financiamentos *vi*, *ix* e *x*, deixando as antecipações dos financiamentos *ii*, *v* e *viii* deslocadas para o futuro em relação à prática adotada pela tesouraria e a solução anterior do modelo (sem considerar a linha de crédito).

Continuando a refletir sobre o uso da linha de crédito e a maximização do fluxo de dinheiro ao final do horizonte de planejamento, alteramos as taxas de juros da linha de crédito (de 2% para 1,75%, 2,25% e 2,5%), para testar a sensibilidade da solução gerada pelo modelo. Daí obtivemos os seguintes resultados após o uso do modelo em programação linear conforme tabela 5.23:

TABELA 5.23 – Comparativo de movimentação financeira total entre alternativas

Operação	Modelo a 2%a.m.	Modelo a 1,75%a.m.	Modelo a 2,25%a.m.	Modelo a 2,50%a.m.
Amortizações	209.369,921	209.102,790	209.530,641	209.699,426
juros s/ linha de crédito	294,610	510,659	161,812	0
Aplicações CDB	15.335,469	15.386,543	15.307,545	15.300,576
pagamento CPMF	-58,275	-58,469	-58,169	-58,142
Rendimento CDB	596,406	598,787	595,104	594,779
Saldo final	**15.873,600**	**15.926,861**	**15.844,480**	**15.837,212**
Ganho em relação à tesouraria	**36,617**	**89,879**	**7,498**	**0,230**
Ganho em relação à tesouraria	**0,23%**	**0,57%**	**0,05%**	**0,00%**
Linha de crédito	**14.730,489**	**29.180,537**	**7.191.663**	**0**

Observando os saldos finais da tabela 5.23, vemos que a linha de crédito com taxa de 1,75% a.m. proporciona um ganho de 89,879, equivalente a 0,57% em relação ao resultado da prática de tesouraria sem a utilização da linha de crédito. O comportamento do fluxo de caixa é direcionado para tomar a linha de crédito quatro vezes: nos períodos 1, 4, 5 e 7 conforme a tabela 5.24.

Verificamos que as alterações de 0,25% nas taxas de juros da linha de crédito proporcionam mudanças significativas no volume tomado pela empresa e, consequentemente, na programação das amortizações. Por exemplo, diminuir a taxa de juros de 2,00% a.m. para 1,75% a.m. faz com que o volume financiado cresça 98% e o fluxo de dinheiro ao final do horizonte de planejamento aumente 145%. Na direção contrária, de 2,00% a.m. para 2,25% a.m., o volume da linha de crédito é reduzido para 49% e o ganho financeiro cai para 20%. Lembramos que o teste do modelo com taxa de juros da linha de crédito igual a 2,50% a.m. torna o custo da linha proibitivo, não havendo financiamento e, portanto, a solução traz os mesmos resultados anteriores, sem considerar o uso da linha de crédito.

TABELA 5.24– Comparativo de utilização da linha de crédito

SOLUÇÃO ÓTIMA		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	final
LINHA DE CRÉDITO														
x para k	amortização						10.200		4.825					
k para x	financiamento					10.000		4.730						14.730
	juros 2% a.m.													
	saldo					-10.000	200	-4.530	295	295	295	295	295	**294,610**
LINHA DE CRÉDITO														
x para k	amortização		10.175			4.567	10.175		4.775					
k para x	financiamento	10.000			4.488	10.000		4.693						29.181
	juros 1,75% a.m.													
	saldo	-10.000	175	175	-4.313	-9.746	429	-4.264	511	511	511	511	511	**510,659**
LINHA DE CRÉDITO														
x para k	amortização						2.501		4.853					
k para x	financiamento					2.446		4.746						7.192
	juros 2,25% a.m.													
	saldo					-2.446	55	-4.691	162	162	162	162	162	**161,812**
LINHA DE CRÉDITO														
x para k	amortização													
k para x	financiamento													
	juros 2,5% a.m.													
	saldo													

Feito esse estudo adicional sobre a alternativa de uso da linha de crédito, o gestor do caixa tem em mãos informações capazes de orientar as decisões sobre financiamentos e investimentos envolvidas no gerenciamento do fluxo de caixa. É possível tentar negociar a linha de crédito com os bancos nas condições apresentadas nesse estudo e conhecer o impacto no comportamento do fluxo de caixa e em seu resultado ao final do horizonte de planejamento. Esse apoio à decisão proporcinado pelo uso do modelo de Golden *et al.* (1979) com a adaptação aqui realizada demonstra o potencial de aplicação prática do modelo.

Capítulo 6 – Conclusões e perspectivas

A proposta deste trabalho foi a otimização do gerenciamento financeiro do fluxo de caixa de uma empresa do setor agroindustrial, por meio da avaliação da viabilidade e do desempenho de um modelo matemático com base em exemplos reais da prática de tesouraria da empresa estudada. O modelo de programação linear utilizado, tanto em sua forma original, quanto modificado, atendeu aos requisitos de maximização do fluxo de dinheiro e trouxe reflexões à dinâmica dos sistemas financeiros estudados.

Inicialmente, foi feita uma aplicação direta do modelo original de Golden *et al.* (1979) em um horizonte de planejamento multi-período com dois ativos e com a possibilidade de utilização de linha de crédito. Algumas características do modelo de Golden *et al.* (1979) que nortearam sua escolha para as aplicações práticas puderam ser confirmadas como: a eficiência, a flexibilidade e a representação visual permitida pela formulação gráfica do fluxo de caixa na rede com ganhos e perdas. A situação inicial modelada representa uma atividade operacional e diária da tesouraria da empresa agroindustrial estudada, conforme apontado no capítulo 4.

O método de iniciar as apresentações com a prática adotada pela tesouraria na solução do problema permitiu-nos conhecer melhor as variáveis de decisão envolvidas e também fazermos as considerações iniciais sobre a viabilidade da aplicação do modelo de programação linear. No universo da prática, a experiência acumulada dos gestores do caixa nos processos de gerenciamento do fluxo e o uso de planilhas eletrônicas compõem os recursos principais para o processo de tomada de decisão. Com o fluxo de caixa formatado na rede e o modelo matemático definido, resolvemos o modelo utilizando o *solver* que integra o Microsoft Excel na forma de um suplemento do programa. O tempo computacional para gerar a solução do problema mostrou-se insignificante (ordem de poucos segundos), considerando-se as decisões envolvidas. Obtidas as duas soluções, pudemos compará-las.

Verificamos que o tratamento dado ao problema de gestão do fluxo de caixa pelo modelo de programação linear diverge da solução produzida na prática de tesouraria. Utilizando as condições de manter o dinheiro aplicado por mais tempo, a solução do modelo proporcionou um ganho financeiro. A política financeira proposta pelo modelo de programação linear garantiu um incremento de caixa que, embora não se mostre numericamente relevante no exemplo estudado, revela a existência de arranjos nas relações intratemporais dos parâmetros do fluxo de caixa que podem maximizar o fluxo de dinheiro.

Tendo finalizado o estudo descrito no capítulo 4, havíamos confirmado a capacidade do modelo em apoiar decisões para problemas de gestão operacional do fluxo de caixa. Então, estendemos o modelo de Golden *et al*. (1979) para o tratamento da gestão tática do fluxo de caixa da empresa estudada.

Com esse propósito, no capítulo 5, adaptamos o modelo de Golden *et al.* (1979), fazendo com que o gerenciamento do fluxo de caixa incorporasse também o planejamento e o controle das amortizações dos financiamentos tomados pela empresa. A figura 5.1 ilustra essa adaptação e explicita a idéia central de obter o desconto financeiro nas liquidações antecipadas. Tal desconto pode ser visualizado através do multiplicador positivo presente nos arcos que ligam os nós dos dez financiamentos.

Tendo que definir a destinação ótima para a geração de caixa da empresa e estando o montante a ser amortizado restrito ao volume e à distribuição da previsão de entradas de caixa, o *trade-off* existente residiu entre aplicar recursos em um ativo mais rentável que o caixa e liquidar antecipadamente os financiamentos existentes.

A solução ótima para o caso da programação de amortizações foi obtida dentro de um tempo computacional muito inferior ao tempo necessário para que a consideração atenta das relações entre os parâmetros do problema e a experiência acumulada dos gestores de caixa pudesse propor sua solução. A política de amortização é a mesma nas duas soluções.

A adaptação do modelo de programação linear na solução do problema não gerou ganho financeiro adicional, mas capturou a programação das amortizações da série de financiamentos. Além disso, há incremento de segurança e possibilidade de sistematização no processo do fluxo de caixa com o modelo, pois a solução é menos dependente da experiência acumulada dos tomadores de decisão.

Estudamos, adicionalmente, incluir a alternativa de uso da linha de crédito nessa amortização dos financiamentos. Os resultados obtidos com essa inclusão exploram o apoio à decisão proporcionado pelo uso do modelo modificado de Golden *et al.* (1979), demonstrando o potencial de aplicação prática do modelo.

A nova política financeira teve que lidar com o *trade-off* entre liquidar antecipadamente os financiamentos existentes apenas com a geração de caixa da empresa, ou fazer parte das liquidações utilizando o capital de terceiros. Assim como no capítulo 4, a opção pelo uso do capital de terceiros mostrou-se vantajosa, pois embora o custo desse capital tenha sido superior aos anteriormente tomados, a utilização da linha de crédito se deu em uma proporção que tornou essa opção financeiramente viável.

Sintetizando o que afirmamos sobre as soluções aos problemas apresentados nos capítulos 4 e 5: a teoria do fluxo em redes, através da utilização do modelo original e estendido de Golden *et al.* (1979), permitiu integrar fatores e situações que, em geral, são tratados de forma separada pelo gestor do caixa na prática de tesouraria e, muitas vezes, podem estar deixando de ser considerados e relacionados, conseqüentemente, obstruindo uma visão geral do processo modelado pelo gestor do caixa da empresa.

Como perspectivas de continuidade desse trabalho, entendemos que implementar, de fato, o modelo de fluxo em redes na prática e verificar o comportamento do modelo no apoio à tomada de decisões é uma forma de abordagem sistemática, que identifica e mensura os processos da vida real. Essa mensuração é requisito de toda pesquisa quantitativa empírica, conforme apontado por Mitroff *et al. apud* Bertrand e Fransoo (2002).

Acreditamos também ser interessante aplicar as análises paramétrica e de sensibilidade aos resultados do modelo de fluxo em rede. Isto pode ser feito por meio de análises das variáveis duais e dos custos relativos associados ao modelo, e também por meio de estudos extensivos e mais efetivos utilizando diferentes cenários para o problema. Então, pretendemos avaliar o impacto que as alterações em certos parâmetros podem trazer na solução dos modelos destes exemplos e em outros exemplos reais de empresas do setor agroindustrial e de outros setores econômicos.

Como dissemos anteriormente, as oportunidades de ganho financeiro estão ligadas às relações intratemporais dos parâmetros envolvidos no processo do fluxo de caixa. Assim sendo, buscamos investigar como essas relações intratemporais se constroem e, ainda, como podem se alterar.

Outra possibilidade interessante de trabalho futuro é a de suplementar o modelo de Golden *et al.* (1979) com técnicas de otimização robusta e outras técnicas relacionadas, a fim de incorporar incertezas nos parâmetros do problema de gestão do fluxo de caixa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, D.R.D. “Mercados futuros e a gestão do risco nos sistemas agroindustriais brasileiros”, II Workshop Brasileiro de Gestão de Sistemas Agroalimentares, PENSA/FEA/USP, Ribeirão Preto, 129-136, 1999.

ARENALES M., MORABITO, R., ARMENTANO, V., YANASSE, H.H. Pesquisa Operacional, Campus-Elsevier, Rio de Janeiro, 2007.

ASHFORD, R.W., BERRY, R.H., DYSON, R.G. “Operational research and financial management”, European Journal of Operational Research, 36, 143-152, 1988.

ASSAF NETO, A. e SILVA, A.T. Administração do capital de giro, Atlas, São Paulo, 1997.

BARBOSA, P.S.F. e PIMENTEL, P.R. “A linear programming model for cash flow management in the Brazilian construction industry”, Construction Management and Economics, 19, 469-479, 2001.

BAUMOL, W. J. “The transactions demand for cash: an inventory theoretic approach”, Quarterly Journal of Economics, 66, 4, 545-556, 1952.

BERTRAND, J.W.M., FRANSOO, J.C. “Operations management research methodologies using quantitative modeling”, International Journal of Operations & Production Management, 22, 2, 241-264, 2002.

BRIGHAM, E.F. e HOUSTON, J.F. Fundamentals of financial management, Thompson/South-Western, 2004.

CRUM, R.L., KLINGMAN, D.D. e TRAVIS, L.A. “Implementation of large-scale financial planning methods: solution efficient transformations”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 14, 137-152, 1979.

GITMAN, L.J. Princípios de administração financeira, 3 ed., Harbra, São Paulo, 1987.

GOLDEN, B., LIBERATORE, M., LIEBERMAN, C. “Models and solution techniques for cash flow management”, Computers & Operations Research, 6, 13-20, 1979.

GREGORY, G. “Cash flow models: a review”, Omega, 4, 6 , 643-656, 1976.

GROPELLI, A.A. ; NIKBAKHT, E. Finance. 4 ed., pp. 168-172, Barron’s Educational Series, Inc. 2000.

GROSSMAN, T.A. “Integrating spreadsheet engineering in a management science course: a hierarchical approach” Informs Transactions on Education,.7:1, pp.18-36, 2007.

JOHNSON, L. A. e MONTGOMERY, D.C.. “Operations research in production planning, scheduling, and inventory control”. John Wiley & Sons, Inc, NY, 1974.

JORJANI, S. e LAMAR, B.W. “Cash flow management network models with quantity discounting”, Omega, 22, 2, 149-155, 1994.

KORNBLUTH, J.S.H., SALKIN, G.R. The management of corporate financial assets: applications of mathematical programming models, Academic Press, Londres, 1987.

LEMES JUNIOR, A.B., RIGO, C.M., CHEROBIM, A.P.M.S. Administração financeira: princípios, fundamentos e práticas brasileiras. Aplicações e casos nacionais, Campus, Rio de Janeiro, 2002.

MULVEY, J.M. “Introduction to the special issue on finance”, Interfaces, 24, 3, 1-2, 1994.

MULVEY, J.M. e VLADIMIROU, H. “Stochastic network programming for financial planning problems”, Management Science, 38, 11, 1642-1664, 1992.

MULVEY, J.M. e ZIEMBA, W.T. “Asset and liability allocation in a global environment”, Handbooks in Operations Research & Management Science, vol. 9, Elsevier, Amsterdam, 1995.

OPLER, T., PINKOWITZ, L., STULZ, R., WILLIAMSON, R. “The determinants and implications of corporate cash holdings”, Journal of Financial Economics, 52 , 3-46,1999.

ORGLER, Y.E. “An unequal-period model for cash management decisions”, Management Science, 16, 2 , 77-92,1969.

ROBICHEK, A.A., TEICHROEW, D., JONES, J.M. “Optimal short term financing decision”, Management Science, 12, 1, 1-36, 1965.

SANVICENTE, A.Z. e SANTOS, C.C. Orçamento na administração de empresas: planejamento e controle, 2 ed., Atlas, São Paulo, 2000.

SETHI, S. P. e THOMPSON, G. L. “Application of mathematical control theory to finance: modeling simple dynamic cash balance problems”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 5 , 381-394, 1970.

SILVA NETO, G.. “Modelos e técnicas de solução para a administração do fluxo de caixa: um estudo de caso”. Trabalho de graduação apresentado ao Departamento de Engenharia de Produção da Universidade Federal de São Carlos, 2002.

SLACK, N., CHAMBERS, C., JOHNSTON, R. “Administração da produção”, Atlas, São Paulo, 2002.

SOUSA, A.F. e ABRANTES FILHO, G. “Aplicação prática do modelo de otimização de Miller-Orr”, III Seminários em Administração, São Paulo, 1999.

SOUSA, A.F. e BARROS, L.A. “Propriedades estatísticas dos fluxos de caixa e modelos de gerenciamento de caixa”, Caderno de Pesquisas em Administração, São Paulo, 1, 12, 22-35, 2000.

SRINIVASAN, V. “A transshipment model for cash management decisions”, Management Science, 20, 10, 1350-1363, 1974.

SRINIVASAN, V. e KIM, Y.H. “Deterministic cash flow management: state of the art and research directions”, Omega, 14, 2, 145-166, 1986.

VAN HORNE, J.C., Financial management and policy, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977.

VILLALBA, G.B. e SOUSA, A.F. “Modelos de administração de caixa – análise empírica”, Ensaio Finanças, V Seminários em Administração, São Paulo, 2001.

WELSCH, G., HILTON, R.W., GORDON, P.N. Budgeting profit planning and control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988.

WRIGHT, D.J. “The value of information on invoices in forecasting for cash management”, Computers & Industrial Engineering, 12, 4, 263-273, 1987.

WINSTON, W.L. Operations research: applications and algorithms, PWS-KENT, Belmont, 1991.

YAO, J.S., CHEN, M.S., LU, H.F. “A fuzzy stochastic single-period model for cash management”, European Journal of Operational Research, 170, 72-90, 2006.

Anexo A

$\max f_{12,Z} + (1+\beta) f_{\overline{12},Z}$

s.a.

(nó 1) $x_0 + e_1 + f_{\bar{1},1} = f_{1,2} + f_{1,\bar{1}} + f_{1,1^{i}} + f_{1,1^{ii}} + f_{1,1^{iii}} + f_{1,1^{iv}} + f_{1,1^{v}} + f_{1,1^{vi}} + f_{1,1^{vii}} + f_{1,1^{viii}} + f_{1,1^{ix}} + f_{1,1^{x}}$

(nó $\bar{1}$) $\mathrm{y}_0 + (1 - c_{x,y}) f_{1,\bar{1}} = f_{\bar{1},\bar{2}} + f_{\bar{1},1}$

(nó 1^{i}) $f_{1,1^{i}} = f_{1^{i},2^{i}}$

(nó 1^{ii}) $f_{1,1^{ii}} = f_{1^{ii},2^{ii}}$

…

(nó 1^{x}) $f_{1,1^{x}} = f_{1^{x},2^{x}}$

(nó 2) $e_2 + f_{1,2} + f_{\bar{2},2} = f_{2,3} + f_{2,\bar{2}} + f_{2,2^{i}} + f_{2,2^{ii}} + f_{2,2^{iii}} + f_{2,2^{iv}} + f_{2,2^{v}} + f_{2,2^{vi}} + f_{2,2^{vii}} + f_{2,2^{viii}} + f_{2,2^{ix}} + f_{2,2^{x}}$

(nó $\bar{2}$) $(1+\beta) f_{\bar{1},\bar{2}} + (1 - c_{x,y}) f_{2,\bar{2}} = f_{\bar{2},\bar{3}} + f_{\bar{2},2}$

(nó 2^{i}) $f_{2,2^{i}} + f_{1^{i},2^{i}} (1+\gamma^{i}) = s_2^{i}$

(nó 2^{ii}) $f_{2,2^{ii}} + f_{1^{ii},2^{ii}} (1+\gamma^{ii}) = f_{2^{ii},3^{ii}}$

(nó 2^{iii}) $f_{2,2^{iii}} + f_{1^{iii},2^{iii}} (1+\gamma^{iii}) = f_{2^{iii},3^{iii}}$

…

(nó 2^{x}) $f_{2,2^{x}} + f_{1^{x},2^{x}} (1+\gamma^{x}) = f_{2^{x},3^{x}}$

(nó 3) $e_3 + f_{2,3} + f_{\bar{3},3} = f_{3,4} + f_{3,\bar{3}} + f_{3,3^{ii}} + f_{3,3^{iii}} + f_{3,3^{iv}} + f_{3,3^{v}} + f_{3,3^{vi}} + f_{3,3^{vii}} + f_{3,3^{viii}} + f_{3,3^{ix}} + f_{3,3^{x}}$

(nó $\bar{3}$) $(1+\beta) f_{\bar{2},\bar{3}} + (1 - c_{x,y}) f_{3,\bar{3}} = f_{\bar{3},\bar{4}} + f_{\bar{3},3}$

(nó 3^{ii}) $f_{3,3^{ii}} + f_{2^{ii},3^{ii}} (1+\gamma^{ii}) = s_3^{ii}$

(nó 3^{iii}) $f_{3,3^{iii}} + f_{2^{iii},3^{iii}} (1+\gamma^{iii}) = f_{3^{iii},4^{iii}}$

(nó 3^{iv}) $f_{3,3^{iv}} + f_{2^{iv},3^{iv}} (1+\gamma^{iv}) = f_{3^{iv},4^{iv}}$

…

(nó 3^{x}) $f_{3,3^{x}} + f_{2^{x},3^{x}} (1+\gamma^{x}) = f_{3^{x},4^{x}}$

(nó 4) $e_4 + f_{3,4} + f_{\bar{4},4} = f_{4,5} + f_{4,\bar{4}} + f_{4,4^{iii}} + f_{4,4^{iv}} + f_{4,4^{v}} + f_{4,4^{vi}} + f_{4,4^{vii}} + f_{4,4^{viii}} + f_{4,4^{ix}} + f_{4,4^{x}}$

(nó $\bar{4}$) $(1+\beta) f_{\bar{3},\bar{4}} + (1 - c_{x,y}) f_{4,\bar{4}} = f_{\bar{4},\bar{5}} + f_{\bar{4},4}$

(nó 4^{iii}) $f_{4,4^{iii}} + f_{3^{iii},4^{iii}} (1+\gamma^{iii}) = s_4^{iii}$

(nó 4^{iv}) $f_{4,4^{iv}} + f_{3^{iv},4^{iv}} (1+\gamma^{iv}) = f_{4^{iv},5^{iv}}$

…

(nó 4^{vi}) $f_{4,4^{vi}} + f_{3^{vi},4^{vi}} (1+\gamma^{vi}) = f_{4^{vi},5^{vi}}$

(nó 4^{vii}) $f_{4,4^{vii}} + f_{3^{vii},4^{vii}} (1+\gamma^{vii}) = s_4^{vii}$

(nó 4^{viii}) $f_{4,4^{viii}} + f_{3^{viii},4^{viii}} (1+\gamma^{viii}) = f_{4^{viii},5^{viii}}$

…

(nó 4^{x}) $f_{4,4^{x}} + f_{3^{x},4^{x}} (1+\gamma^{x}) = f_{4^{x},5^{x}}$

(nó 5) $e_5 + f_{4,5} + f_{\overline{5},5} = f_{5,6} + f_{5,\overline{5}} + f_{5,5^{iv}} + f_{5,5^{v}} + f_{5,5^{vi}} + f_{5,5^{viii}} + f_{5,5^{ix}} + f_{5,5^{x}}$

(nó $\overline{5}$) $(1+\beta)f_{\overline{4},\overline{5}} + (1-c_{x,y})f_{5,\overline{5}} = f_{\overline{5},\overline{6}} + f_{\overline{5},5}$

(nó 5^{iv}) $f_{5,5^{iv}} + f_{4^{iv},5^{iv}}(1+\gamma^{iv}) = s_5^{iv}$

(nó 5^{v}) $f_{5,5^{v}} + f_{4^{v},5^{v}}(1+\gamma^{v}) = f_{5^{v},6^{v}}$

(nó 5^{vi}) $f_{5,5^{vi}} + f_{4^{vi},5^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = f_{5^{vi},6^{vi}}$

(nó 5^{viii}) $f_{5,5^{viii}} + f_{4^{viii},5^{viii}}(1+\gamma^{viii}) = s_5^{viii}$

(nó 5^{ix}) $f_{5,5^{ix}} + f_{4^{ix},5^{ix}}(1+\gamma^{ix}) = f_{5^{ix},6^{ix}}$

(nó 5^{x}) $f_{5,5^{x}} + f_{4^{x},5^{x}}(1+\gamma^{x}) = f_{5^{x},6^{x}}$

(nó 6) $e_6 + f_{5,6} + f_{\overline{6},6} = f_{6,7} + f_{6,\overline{6}} + f_{6,6^{v}} + f_{6,6^{vi}} + f_{6,6^{ix}} + f_{6,6^{x}}$

(nó $\overline{6}$) $(1+\beta)f_{\overline{5},\overline{6}} + (1-c_{x,y})f_{6,\overline{6}} = f_{\overline{6},\overline{7}} + f_{\overline{6},6}$

(nó 6^{v}) $f_{6,6^{v}} + f_{5^{v},6^{v}}(1+\gamma^{v}) = f_{6^{v},7^{v}}$

(nó 6^{vi}) $f_{6,6^{vi}} + f_{5^{vi},6^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = f_{6^{vi},7^{vi}}$

(nó 6^{ix}) $f_{6,6^{ix}} + f_{5^{ix},6^{ix}}(1+\gamma^{ix}) = f_{6^{ix},7^{ix}}$

(nó 6^{x}) $f_{6,6^{x}} + f_{5^{x},6^{x}}(1+\gamma^{x}) = f_{6^{x},7^{x}}$

(nó 7) $e_7 + f_{6,7} + f_{\overline{7},7} = f_{7,8} + f_{7,\overline{7}} + f_{7,7^{v}} + f_{7,7^{vi}} + f_{7,7^{ix}} + f_{7,7^{x}}$

(nó $\overline{7}$) $(1+\beta)f_{\overline{6},\overline{7}} + (1-c_{x,y})f_{7,\overline{7}} = f_{\overline{7},\overline{8}} + f_{\overline{7},7}$

(nó 7^{v}) $f_{7,7^{v}} + f_{6^{v},7^{v}}(1+\gamma^{v}) = s_7^{v}$

(nó 7^{vi}) $f_{7,7^{vi}} + f_{6^{vi},7^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = f_{7^{vi},8^{vi}}$

(nó 7^{ix}) $f_{7,7^{ix}} + f_{6^{ix},7^{ix}}(1+\gamma^{ix}) = s_7^{ix}$

(nó 7^{x}) $f_{7,7^{x}} + f_{6^{x},7^{x}}(1+\gamma^{x}) = f_{7^{x},8^{x}}$

(nó 8) $e_8 + f_{7,8} + f_{\overline{8},8} = f_{8,9} + f_{8,\overline{8}} + f_{8,8^{vi}} + f_{8,8^{x}}$

(nó $\overline{8}$) $(1+\beta)f_{\overline{7},\overline{8}} + (1-c_{x,y})f_{8,\overline{8}} = f_{\overline{8},\overline{9}} + f_{\overline{8},8}$

(nó 8^{vi}) $f_{8,8^{vi}} + f_{7^{vi},8^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = f_{8^{vi},9^{vi}}$

(nó 8^{x}) $f_{8,8^{x}} + f_{7^{x},8^{x}}(1+\gamma^{x}) = f_{8^{x},9^{x}}$

…

(nó 11) $e_{11} + f_{10,11} + f_{\overline{11},11} = f_{11,12} + f_{11,\overline{11}} + f_{11,11^{vi}} + f_{11,11^{x}}$

(nó $\overline{11}$) $(1+\beta)f_{\overline{10},\overline{11}} + (1-c_{x,y})f_{11,\overline{11}} = f_{\overline{11},\overline{12}} + f_{\overline{11},11}$

(nó 11^{vi}) $f_{11,11^{vi}} + f_{10^{vi},11^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = f_{11^{vi},12^{vi}}$

(nó 11^{x}) $f_{11,11^{x}} + f_{10^{x},11^{x}}(1+\gamma^{x}) = f_{11^{x},12^{x}}$

(nó 12) $e_{12} + f_{11,12} + f_{\overline{12},12} = f_{12,Z} + f_{12,\overline{12}} + f_{12,12^{vi}} + f_{12,12^{x}}$

(nó $\overline{12}$) $(1+\beta)f_{\overline{11},\overline{12}} + (1-c_{x,y})f_{12,\overline{12}} = f_{\overline{12},Z} + f_{\overline{12},12}$

(nó 12^{vi}) $f_{12,12^{vi}} + f_{11^{vi},12^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = s_{12}^{vi}$

(nó 12^{x}) $f_{12,12^{x}} + f_{11^{x},12^{x}}(1+\gamma^{x}) = s_{12}^{x}$

$f(i,j) \geq 0$ para todo i, j.

Anexo B

$\max f_{12,Z} + (1+\beta) f_{\overline{12},Z}$

s.a.

(nó 1) $x_0 + e_1 + f_{\overline{1},1} + \left(\dfrac{1}{1+\gamma}\right) f_{2,1} = f_{1,2} + f_{1,\overline{1}} + f_{1,1^i} + f_{1,1^{ii}} + f_{1,1^{iii}} + f_{1,1^{iv}} + f_{1,1^v} + f_{1,1^{vi}} + f_{1,1^{vii}} + f_{1,1^{viii}} + f_{1,1^{ix}} + f_{1,1^x}$

(nó $\overline{1}$) $y_0 + (1-c_{x,y}) f_{1,\overline{1}} = f_{\overline{1},\overline{2}} + f_{\overline{1},1}$

(nó 1^{i}) $f_{1,1^i} = f_{1^i,2^i}$

(nó 1^{ii}) $f_{1,1^{ii}} = f_{1^{ii},2^{ii}}$

…

(nó 1^{x}) $f_{1,1^x} = f_{1^x,2^x}$

(nó 2) $e_2 + f_{1,2} + f_{\overline{2},2} + \left(\dfrac{1}{1+\gamma}\right) f_{3,2} = f_{2,3} + f_{2,1} + f_{2,\overline{2}} + f_{2,2^i} + f_{2,2^{ii}} + f_{2,2^{iii}} + f_{2,2^{iv}} + f_{2,2^v} + f_{2,2^{vi}} + f_{2,2^{vii}} + f_{2,2^{viii}} + f_{2,2^{ix}} + f_{2,2^x}$

(nó $\overline{2}$) $(1+\beta) f_{\overline{1},\overline{2}} + (1-c_{x,y}) f_{2,\overline{2}} = f_{\overline{2},\overline{3}} + f_{\overline{2},2}$

(nó 2^{i}) $f_{2,2^i} + f_{1^i,2^i}(1+\gamma^i) = s_2^i$

(nó 2^{ii}) $f_{2,2^{ii}} + f_{1^{ii},2^{ii}}(1+\gamma^{ii}) = f_{2^{ii},3^{ii}}$

(nó 2^{iii}) $f_{2,2^{iii}} + f_{1^{iii},2^{iii}}(1+\gamma^{iii}) = f_{2^{iii},3^{iii}}$

…

(nó 2^{x}) $f_{2,2^x} + f_{1^x,2^x}(1+\gamma^x) = f_{2^x,3^x}$

(nó 3) $e_3 + f_{2,3} + f_{\overline{3},3} + \left(\dfrac{1}{1+\gamma}\right) f_{4,3} = f_{3,4} + f_{3,2} + f_{3,\overline{3}} + f_{3,3^{ii}} + f_{3,3^{iii}} + f_{3,3^{iv}} + f_{3,3^v} + f_{3,3^{vi}} + f_{3,3^{vii}} + f_{3,3^{viii}} + f_{3,3^{ix}} + f_{3,3^x}$

(nó $\overline{3}$) $(1+\beta) f_{\overline{2},\overline{3}} + (1-c_{x,y}) f_{3,\overline{3}} = f_{\overline{3},\overline{4}} + f_{\overline{3},3}$

(nó 3^{ii}) $f_{3,3^{ii}} + f_{2^{ii},3^{ii}}(1+\gamma^{ii}) = s_3^{ii}$

(nó 3^{iii}) $f_{3,3^{iii}} + f_{2^{iii},3^{iii}}(1+\gamma^{iii}) = f_{3^{iii},4^{iii}}$

(nó 3^{iv}) $f_{3,3^{iv}} + f_{2^{iv},3^{iv}}(1+\gamma^{iv}) = f_{3^{iv},4^{iv}}$

…

(nó 3^{x}) $f_{3,3^x} + f_{2^x,3^x}(1+\gamma^x) = f_{3^x,4^x}$

(nó 4) $e_4 + f_{3,4} + f_{\overline{4},4} + \left(\dfrac{1}{1+\gamma}\right) f_{5,4} = f_{4,5} + f_{4,3} + f_{4,\overline{4}} + f_{4,4^{iii}} + f_{4,4^{iv}} + f_{4,4^v} + f_{4,4^{vi}} + f_{4,4^{vii}} + f_{4,4^{viii}} + f_{4,4^{ix}} + f_{4,4^x}$

(nó $\overline{4}$) $(1+\beta) f_{\overline{3},\overline{4}} + (1-c_{x,y}) f_{4,\overline{4}} = f_{\overline{4},\overline{5}} + f_{\overline{4},4}$

(nó 4^{iii}) $f_{4,4^{iii}} + f_{3^{iii},4^{iii}}(1+\gamma^{iii}) = s_4^{iii}$

(nó 4^{iv}) $f_{4,4^{iv}} + f_{3^{iv},4^{iv}}(1+\gamma^{iv}) = f_{4^{iv},5^{iv}}$

…

(nó 4^{vi}) $f_{4,4^{vi}} + f_{3^{vi},4^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = f_{4^{vi},5^{vi}}$

(nó 4^{vii}) $f_{4,4^{vii}} + f_{3^{vii},4^{vii}}(1+\gamma^{vii}) = s_4^{vii}$

(nó 4^{viii}) $f_{4,4^{viii}} + f_{3^{viii},4^{viii}}(1+\gamma^{viii}) = f_{4^{viii},5^{viii}}$

…

(nó 4^{x}) $f_{4,4^x} + f_{3^x,4^x}(1+\gamma^x) = f_{4^x,5^x}$

(nó 5) $e_5 + f_{4,5} + f_{\bar{5},5} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) f_{6,5} = f_{5,6} + f_{5,4} + f_{5,\bar{5}} + f_{5,5^{iv}} + f_{5,5^{v}} + f_{5,5^{vi}} + f_{5,5^{viii}} + f_{5,5^{ix}} + f_{5,5^{x}}$

(nó $\bar{5}$) $(1+\beta) f_{\bar{4},\bar{5}} + (1-c_{x,y}) f_{5,\bar{5}} = f_{\bar{5},\bar{6}} + f_{\bar{5},5}$

(nó 5^{iv}) $f_{5,5^{iv}} + f_{4^{iv},5^{iv}} (1+\gamma^{iv}) = s_5^{iv}$

(nó 5^{v}) $f_{5,5^{v}} + f_{4^{v},5^{v}} (1+\gamma^{v}) = f_{5^{v},6^{v}}$

(nó 5^{vi}) $f_{5,5^{vi}} + f_{4^{vi},5^{vi}} (1+\gamma^{vi}) = f_{5^{vi},6^{vi}}$

(nó 5^{viii}) $f_{5,5^{viii}} + f_{4^{viii},5^{viii}} (1+\gamma^{viii}) = s_5^{viii}$

(nó 5^{ix}) $f_{5,5^{ix}} + f_{4^{ix},5^{ix}} (1+\gamma^{ix}) = f_{5^{ix},6^{ix}}$

(nó 5^{x}) $f_{5,5^{x}} + f_{4^{x},5^{x}} (1+\gamma^{x}) = f_{5^{x},6^{x}}$

(nó 6) $e_6 + f_{5,6} + f_{\bar{6},6} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) f_{7,6} = f_{6,7} + f_{6,5} + f_{6,\bar{6}} + f_{6,6^{v}} + f_{6,6^{vi}} + f_{6,6^{ix}} + f_{6,6^{x}}$

(nó $\bar{6}$) $(1+\beta) f_{\bar{5},\bar{6}} + (1-c_{x,y}) f_{6,\bar{6}} = f_{\bar{6},\bar{7}} + f_{\bar{6},6}$

(nó 6^{v}) $f_{6,6^{v}} + f_{5^{v},6^{v}} (1+\gamma^{v}) = f_{6^{v},7^{v}}$

(nó 6^{vi}) $f_{6,6^{vi}} + f_{5^{vi},6^{vi}} (1+\gamma^{vi}) = f_{6^{vi},7^{vi}}$

(nó 6^{ix}) $f_{6,6^{ix}} + f_{5^{ix},6^{ix}} (1+\gamma^{ix}) = f_{6^{ix},7^{ix}}$

(nó 6^{x}) $f_{6,6^{x}} + f_{5^{x},6^{x}} (1+\gamma^{x}) = f_{6^{x},7^{x}}$

(nó 7) $e_7 + f_{6,7} + f_{\bar{7},7} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) f_{8,7} = f_{7,8} + f_{7,6} + f_{7,\bar{7}} + f_{7,7^{v}} + f_{7,7^{vi}} + f_{7,7^{ix}} + f_{7,7^{x}}$

(nó $\bar{7}$) $(1+\beta) f_{\bar{6},\bar{7}} + (1-c_{x,y}) f_{7,\bar{7}} = f_{\bar{7},\bar{8}} + f_{\bar{7},7}$

(nó 7^{v}) $f_{7,7^{v}} + f_{6^{v},7^{v}} (1+\gamma^{v}) = s_7^{v}$

(nó 7^{vi}) $f_{7,7^{vi}} + f_{6^{vi},7^{vi}} (1+\gamma^{vi}) = f_{7^{vi},8^{vi}}$

(nó 7^{ix}) $f_{7,7^{ix}} + f_{6^{ix},7^{ix}} (1+\gamma^{ix}) = s_7^{ix}$

(nó 7^{x}) $f_{7,7^{x}} + f_{6^{x},7^{x}} (1+\gamma^{x}) = f_{7^{x},8^{x}}$

(nó 8) $e_8 + f_{7,8} + f_{\bar{8},8} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) f_{9,8} = f_{8,9} + f_{8,7} + f_{8,\bar{8}} + f_{8,8^{vi}} + f_{8,8^{x}}$

(nó $\bar{8}$) $(1+\beta) f_{\bar{7},\bar{8}} + (1-c_{x,y}) f_{8,\bar{8}} = f_{\bar{8},\bar{9}} + f_{\bar{8},8}$

(nó 8^{vi}) $f_{8,8^{vi}} + f_{7^{vi},8^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = f_{8^{vi},9^{vi}}$

(nó 8^{x}) $f_{8,8^{x}} + f_{7^{x},8^{x}}(1+\gamma^{x}) = f_{8^{x},9^{x}}$

…

(nó 11) $e_{11} + f_{10,11} + f_{\overline{11},11} + \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) f_{12,11} = f_{11,12} + f_{11,10} + f_{11,\overline{11}} + f_{11,11^{vi}} + f_{11,11^{x}}$

(nó $\overline{11}$) $(1+\beta) f_{\overline{10},\overline{11}} + (1-c_{x,y}) f_{11,\overline{11}} = f_{\overline{11},\overline{12}} + f_{\overline{11},11}$

(nó 11^{vi}) $f_{11,11^{vi}} + f_{10^{vi},11^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = f_{11^{vi},12^{vi}}$

(nó 11^{x}) $f_{11,11^{x}} + f_{10^{x},11^{x}}(1+\gamma^{x}) = f_{11^{x},12^{x}}$

(nó 12) $e_{12} + f_{11,12} + f_{\overline{12},12} = f_{12,Z} + f_{12,11} + f_{12,\overline{12}} + f_{12,12^{vi}} + f_{12,12^{x}}$

(nó $\overline{12}$) $(1+\beta) f_{\overline{11},\overline{12}} + (1-c_{x,y}) f_{12,\overline{12}} = f_{\overline{12},Z} + f_{\overline{12},12}$

(nó 12^{vi}) $f_{12,12^{vi}} + f_{11^{vi},12^{vi}}(1+\gamma^{vi}) = s_{12}^{vi}$

(nó 12^{x}) $f_{12,12^{x}} + f_{11^{x},12^{x}}(1+\gamma^{x}) = s_{12}^{x}$

$f(i,j) \geq 0$ para todo i, j.